

Processamento de Sinal e Ôndulas

Maria Joana Soares

MMC

Fevereiro 2011



Historicamente, as origens do processamento de sinal estão ligadas à Engenharia Electrotécnica e, nesse contexto, geralmente um sinal significa um *senal eléctrico* transportado, por exemplo, por uma linha telefónica ou por uma onda de rádio.

Mais geralmente, contudo, um sinal é qualquer coisa que contenha informação, por exemplo um discurso (fala), uma música, uma imagem, uma série de preços de mercado, um registo de temperaturas máximas/mínimas diárias, etc.

Matematicamente, um sinal é uma simples função (eventualmente, complexa) de uma ou mais variáveis.

Neste curso estudaremos sinais uni-dimensionais (i.e. funções de uma só variável).

É muito usual¹ associar a variável independente ao *tempo* (embora tal não seja obrigatório, podendo ser mais natural, em certos contextos, ter variáveis independentes associadas, por exemplo, ao espaço).

¹E fá-lo-emos neste curso.

Sinais analógicos e sinais digitais

Os sinais são geralmente classificados em:

- **Sinais analógicos** (ou sinais em tempo-contínuo) se a variável assume valores num contínuo de pontos (i.e. num conjunto não discreto, geralmente \mathbb{R} , ou um seu subintervalo).
- **Sinais digitais** (ou sinais em tempo-discreto) se a variável assume valores num conjunto discreto de pontos (geralmente \mathbb{Z} ou um seu subconjunto).

Assim, nesta disciplina, se nada for dito em contrário, os sinais analógicos são funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, e os sinais em tempo-discreto são sucessões $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Outras notações mais frequentes, em processamento de sinal, para os sinais em tempo-discreto são $x(n)$ (que será esta a notação que usaremos com mais frequência) ou ainda $x[n]$.



No mundo real, os sinais analógicos são os mais frequentes, mas o uso de sinais discretos e de processamento de sinal digital é cada vez mais importante.

Este curso é, essencialmente, dedicado à matemática envolvida no processamento de sinal digital (PSD), ou seja, ao estudo das ferramentas matemáticas e dos algoritmos usados para processar (i.e. manipular, tratar, modificar) sinais digitais.

O processamento pode ter diversos objectivos, como por exemplo: supressão de ruído num sinal sonoro, tratamento de uma imagem, reconhecimento de fala, compressão de dados para armazenamento e transmissão, etc.



O processamento de sinal digital teve o seu início nos anos 1960/1970 com a acessibilidade de computadores digitais.

Nessa altura, os computadores eram caros e o PSD estava limitado a áreas de aplicação muito específicas: em radares, exploração de petróleo, exploração espacial e imagem médica.

A verdadeira revolução causada pela introdução dos computadores pessoais iniciada na década de 1980 veio permitir um desenvolvimento muito grande do PSD.

O PSD “chega hoje ao público” em produtos tais como telemóveis, leitores de CD, discos de computadores, modems, impressoras, etc (os quais incluem microprocessadores de sinal adaptados aos algoritmos mais utilizados em PSD: convolução, transformada de Fourier discreta, etc.).

$$f(t) \rightarrow \boxed{\text{CAD}} \rightarrow x(n) \rightarrow \boxed{\text{PSD}} \rightarrow \tilde{x}(n) \rightarrow \boxed{\text{CDA}} \rightarrow \tilde{f}(t)$$



Dado $z = x + iy$ tem-se:

- $\operatorname{Re}(z) = x$ $\operatorname{Im}(z) = y$ $\bar{z} = x - iy$
- $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (em proc. sinal $|z|$ é usualmente designado por *amplitude* de z)
- $\theta := \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan}(y/x)$ ($\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$) (em proc. sinal θ é usualmente designado por *fase* de z).
- $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}$
- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
-

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y, \quad |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

- $|e^{i\theta}| = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$
- $\{z : |z| = r\} \rightarrow$ círculo (circunferência) de centro em $z = 0$ e raio r
- $\{z : |z| = 1\} \rightarrow$ círculo unitário
- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Recorde...

- No espaço vectorial \mathbb{R}^3 tem-se:
 - Produto interno usual: $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \sum_{k=1}^3 x_ky_k$
 - Norma: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
 - x, y ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$
- No espaço vectorial \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}$):
 - Produto interno usual: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}$
 - Norma: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$
 - x, y ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$



Facilmente se verifica que o produto interno em \mathbb{C}^n satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\textit{Positividade})$$

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (\textit{Hermiticidade})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \langle \alpha x + \beta y, w \rangle = \alpha \langle x, w \rangle + \beta \langle y, w \rangle \quad (\textit{Linearidade})$$

O conceito de produto interno canónico pode generalizar-se para outros “produtos internos”. Mais precisamente, sendo V um espaço vectorial complexo, chama-se produto interno em V a toda a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfaça as propriedades acima mencionadas.



Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vectorial V , a função $\| \cdot \|$ definida por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\forall x, y \in V \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Qualquer função de V em \mathbb{R} que satisfaça as propriedades acima mencionadas diz-se uma **norma**, e um espaço vectorial onde esteja definida uma norma diz-se um **espaço vectorial normado** (e.v.n.).

Vemos, assim, que todo o espaço vectorial com produto interno é um espaço vectorial normado.

De notar que, nem todas as normas estão, no entanto, associadas a produtos internos.



Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se V é um espaço com produto interno e $\|\cdot\|$ é a norma associada, então é válida a chamada **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V , diremos que dois vectores x e y de V são **ortogonais** se $\langle x, y \rangle = 0$.



Um vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{C}^n pode ser interpretado como uma função, definida no conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$, que a cada inteiro k desse conjunto associa a componente x_k , isto é, $x(k) = x_k$. Com esta notação, o produto interno canónico e norma associada vêm dados por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)} \quad \text{e} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Seja agora S um conjunto arbitrário, não vazio, e denotemos por \mathbb{C}^S o conjunto de todas as aplicações de S em \mathbb{C} .

Como é bem sabido, \mathbb{C}^S tem uma estrutura de espaço vectorial para a adição de funções e de multiplicação de funções por um escalar definidas de forma usual, isto é, pontualmente.



- $S = \{1, 2, \dots, n\} \rightsquigarrow$ vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ (\mathbb{C}^n espaço de dimensão finita)

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

- Se S for um conjunto infinito, \mathbb{C}^S terá dimensão infinita.

- $S = \mathbb{Z} \rightsquigarrow$ seqüências $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

- $S = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$



Espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$

$S = \mathbb{Z}$: Sequências $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

Problema: As séries acima envolvidas não convergem para todos as sequências $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Solução: Considerar apenas o subconjunto H das sequências de “norma” finita, i.e

$$H = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k|^2 < \infty \right\}.$$

Pode provar-se que, se x, y estão em H , então a série que define $\langle x, y \rangle$ converge e que, além disso, $\langle x, y \rangle$ satisfaz os axiomas de um produto interno. Também não é difícil mostrar que H é um subespaço vectorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.



O conjunto H atrás considerado é um espaço vectorial com produto interno. Este espaço é chamado **espaço das seqüências (complexas) de quadrado somável** e é denotado por $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}.$$



Espaço $L^2(\mathbb{R})$

$S = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ funções $f(t)$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt, \quad \|f\| := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Existem **dois problemas** associados com estas definições.

A primeira dificuldade tem a ver com o facto de os integrais (usuais, no sentido de Riemann) que definem $\langle f, g \rangle$ e $\|f\|$ não existirem, para a maior parte das funções de \mathbb{R} em \mathbb{C} .

Existe, no entanto, uma generalização do conceito de integral, conhecida por integral de Lebesgue, que permite lidar com uma muito mais vasta classe de funções.



A teoria de integração de Lebesgue é um pouco técnica e não temos tempo de a desenvolver aqui...

Esta teoria baseia-se no conceito de *medida*, que é uma generalização do conceito de comprimento. A medida de Lebesgue de um subconjunto de \mathbb{R} é, “grosso modo” o seu comprimento total (por exemplo, a medida de Lebesgue de um intervalo (a, b) é $b - a$).

Existem conjuntos que têm medida nula.² Quando uma propriedade se verifique em todos os pontos de \mathbb{R} , com excepção de um conjunto de pontos que tenha medida nula, diremos que ela se verifica *quase sempre* (q.s.) ou *para quase todo* t (para q.t. t).

Apenas para certo tipo de funções, ditas *mensuráveis*, faz sentido definir o integral de Lebesgue. A classe de funções mensuráveis é, no entanto, muito vasta, contendo, a bem dizer, todas as funções que aparecem em aplicações práticas.

Assim, ao longo deste curso, assumimos tacitamente que todas as funções referidas são funções mensuráveis.

²Como exemplos de conjuntos de medida nula têm-se, para além de conjuntos finitos, todos os conjuntos numeráveis, como \mathbb{Z} e \mathbb{Q} , por exemplo. Existem também conjuntos não numeráveis cuja medida de Lebesgue é nula; como exemplo, temos os chamados conjuntos de Cantor.

Se f é mensurável, o integral (de Lebesgue) que define $\|f\|$ faz sentido, embora o resultado possa ser infinito. Assim, o conjunto

$$H := \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

é um subconjunto bem definido de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

Pode também provar-se que, se $f, g \in H$, o integral que define $\langle f, g \rangle$ é finito.



Contudo, temos agora uma nova dificuldade.

Consideremos, por exemplo, uma função f que se anule em todos os pontos de \mathbb{R} , com excepção de um conjunto de pontos de medida nula.

Para uma função deste género, o integral de Lebesgue é nulo.

Assim, temos $\langle f, f \rangle = 0$, e, no entanto, f não é a função nula.

Isto mostra que o produto interno proposto viola a condição de positividade. A solução para este problema consiste em encarar quaisquer duas funções mensuráveis f e g que difiram apenas num conjunto de pontos de medida nula como sendo a *mesma* função.



Dito de um modo mais matemático, H não consistirá então de simples funções, mas de *classes de equivalência de funções* relativamente à relação definida por

$$f \mathcal{R} g \iff f(t) = g(t) \quad (\text{para q.t. } t).$$

Naturalmente, identificaremos cada classe com uma função que a represente e, caso haja um representante contínuo, diremos que a “função” é contínua, etc.

Continuaremos a escrever $f = g$ com o significado de que $f = g$ (q.s.). Com este entendimento, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define, de facto, um produto interno em H . Além disso, verifica-se facilmente que H é um espaço vectorial complexo. Este espaço é chamado **espaço das funções (mensuráveis) de quadrado integrável**, e é denotado por $L^2(\mathbb{R})$.



Espaço $L^2[a, b]$

Dada uma função f , chama-se suporte de f , e designa-se por $\text{supp } f$, o conjunto

$$\text{supp } f := \overline{\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\}},$$

onde \bar{A} designa o fecho do conjunto A .

Diz-se que f tem suporte compacto se $\text{supp } f$ for compacto.

Espaço $L^2[a, b]$

O conjunto de todas as funções de quadrado integrável cujo suporte esteja contido num certo intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} é denotado por $L^2[a, b]$.

Nesse caso, tem-se

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$



- ① É mais conveniente, no entanto, redefinir o produto interno em $L^2[a, b]$ do seguinte modo

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

- ② Uma função $f \in L^2[a, b]$ pode ser sempre estendida periodicamente a todo o \mathbb{R} (função de período $b-a$).

Reciprocamente, se f é periódica de período $b-a$ e

$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, então basta-nos considerar a restrição de f a $[a, b]$.

Em resumo: $L^2[a, b]$ também pode ser visto como o espaço das funções periódicas de período $(b-a)$ tais que $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$.



Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vectorial normado.

- Uma sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de V diz-se uma **sucessão de Cauchy**, se $\|v_m - v_n\| \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$
- Uma sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se **convergente para $v \in H$** , e escreve-se $v_n \rightarrow v$, se $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Toda a sucessão convergente é uma sucessão de Cauchy, mas o recíproco não se verifica necessariamente.

Um espaço normado no qual toda a sucessão de Cauchy convirja para um elemento do espaço é chamado **espaço normado completo** ou **espaço de Banach**.

Um espaço com produto interno que seja completo para a norma induzida pelo produto interno chama-se um **espaço de Hilbert**.

Pode provar-se que $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $L^2[a, b]$ são espaços de Hilbert.



Para $p \in \mathbb{N}$ define-se:

- $$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_k)_{k=-\infty}^{\infty} : \sum |x_k|^p < \infty \right\}$$
$$\|x\|_p = \left(\sum |x_k|^p \right)^{1/p}$$

- $$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$
$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

- $$L^p[a, b] = \left\{ f : \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$
$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Estes espaços são espaços de Banach

Temos também

- $$\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_k)_{k=-\infty}^{\infty} : \sup\{|x_k|\} < \infty \right\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_k|\}$$

Espaço das seqüências limitadas.

- $$L^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f : \sup \text{ess } |f| < \infty \right\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup \text{ess } |f|,$$

onde

$$\sup \text{ess } |f| = \inf\{C : |f(t)| < C \text{ para q.t.t.}\}.$$

Espaço das funções (essencialmente) limitadas.

Estes espaços são também espaços de Banach

Em processamento de sinal:

- as funções de $L^2(\mathbb{R})$ são chamados sinais (analógicos) de energia finita, sendo a energia definida

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|^2$$

- as sucessões de $\ell^2(\mathbb{Z})$ são chamados sinais (digitais) de energia finita, sendo a energia definida

$$E(x) = \sum_k |x_k|^2 = \|x\|^2$$

- as funções de $L^1(\mathbb{R})$ são chamados sinais (analógicos) estáveis
- as sucessões de $\ell^1(\mathbb{Z})$ são chamados sinais (digitais) estáveis.



Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e seja $(v_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ uma sequência de elementos de V .

Dizemos que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n$ converge para v , e escrevemos

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n$$

se a sucessão das somas parciais $S_N = \sum_{n=-N}^N v_n$ converge para v quando $N \rightarrow \infty$, isto é, se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=-N}^N v_n - v \right\| = 0.$$



Uma sequência $(v_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ num espaço de normado $(V, \|\cdot\|)$ diz-se uma **base de Schauder** de V se, para cada vector $v \in H$, existe uma única sequência de escalares $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ tais que

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h_n$$

Por vezes, escrevemos $c_n = c_n(v)$ para indicar a dependência dos escalares c_n do vector v . Os escalares c_n (univocamente determinados) são chamados **coeficientes** de v a respeito da base (v_n) .

Nota: De agora em diante, sempre que nos referirmos a uma base de um espaço normado V será no sentido de uma base de Schauder.

Segue-se de imediato da definição de base de Schauder, que, dada uma base $(v_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ do espaço V , qualquer vector desse espaço pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por combinações finitas dos elementos da base.



Consideremos agora o caso de estarmos num espaço de Hilbert H , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

De entre as bases de um espaço de Hilbert, têm particular importância as bases ortonormadas (o.n.), que passamos agora a caracterizar.

Seja $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ uma sequência o.n. de um espaço de Hilbert H , isto é, suponhamos que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base de H
- $\forall h \in H \quad h = \sum_n \langle h, e_n \rangle e_n$
- $\forall h \in H \quad \sum_n |\langle h, e_n \rangle|^2 = \|h\|^2 \quad (\textit{Identidade de Plancherel}).$

Uma sequência ortonormada $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ que verifique qualquer das três condições acima, diz-se uma **base ortonormada** ou **base de Hilbert** de H 

Se (e_n) é uma base o.n., então tem-se a seguinte igualdade (*de Parseval*):

$$\langle u, v \rangle = \sum_n \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}$$

Um espaço de Hilbert diz-se **separável** se existir um subconjunto S de H , numerável e denso em H , isto é, tal que $\overline{S} = H$ onde \overline{S} designa o fecho de S em H .

Desde que nada seja dito em contrário, quando nos referirmos a um espaço de Hilbert, será com o significado de espaço de Hilbert separável.

Pode provar-se o seguinte resultado:

Todo o espaço de Hilbert admite uma base ortonormada.



Exemplos

- O conjunto das sequências $\{\delta_n : n \in \mathbb{Z}\}$, onde $\delta_n = ((\delta_n)_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ são definidas por

$$(\delta_n)_k = \delta_{n,k}$$

é uma base o.n. de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

- O conjunto das funções $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ onde

$$e_n(t) = e^{2\pi int}$$

é uma base o.n. de $L^2[0, 1]$.

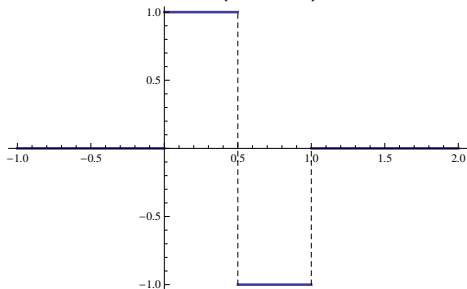
Verificar que estas funções formam um conjunto o.n.e que estão em $L^2[0, 1]$ é muito simples. Mostrar que são uma base não é – trata-se do teorema da representação de uma função periódica de quadrado integrável em série de Fourier.



- Seja

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{restantes valores de } t \end{cases}$$

Esta função é a chamada função (ôndula) de Haar.



O conjunto das funções $\{h_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ onde

$$h_{j,k}(t) = 2^{j/2} h(2^j t - k)$$

forma uma base o.n. de $L^2(\mathbb{R})$ – base de Haar.

De volta aos sinais. . . digitais!

Um sinal digital é uma sequência $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ (geralmente em $\ell^1(\mathbb{Z})$ – sinal estável – ou em $\ell^2(\mathbb{Z})$ – sinal de energia finita).

Nota: Embora $x(n)$ represente o termo de índice n da sucessão, referir-nos-emos, com frequência, à “sucessão $x(n)$ ” (é um abuso de linguagem idêntico ao que cometemos quando falamos na “função $f(t)$ ”, onde, como sabemos, $f(t)$ designa a imagem por f de t). Estes abusos de linguagem facilitam-nos muito a vida e usá-los-emos quando conveniente . . .

Pode mostrar-se que $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$.³

Pode demonstrar este resultado recordando os critérios de comparação de séries de termos não negativos que estudou em Análise (ou Cálculo)!

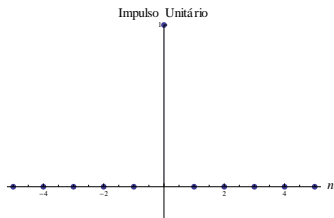
É mais “exigente” estar em ℓ^1 do que em ℓ^2 .

Pense por exemplo, que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ diverge, mas a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converge!

³Não existe um resultado idêntico para os espaços $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$; não temos $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ nem $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$! Para os espaços $L^1[a, b]$ e $L^2[a, b]$ tem-se “o contrário”, i.e. $L^2[a, b] \subset L^1[a, b]$.

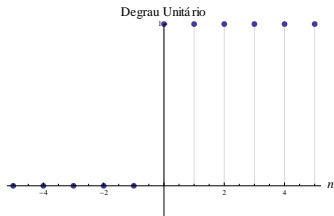
1 Dirac Discreto ou (Sequência) Impulso Unitário

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



2 (Sequência) Degrau Unitário

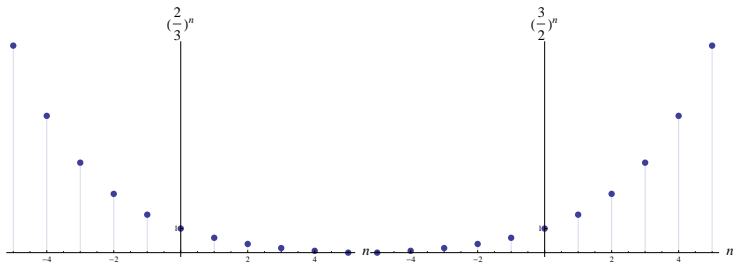
$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

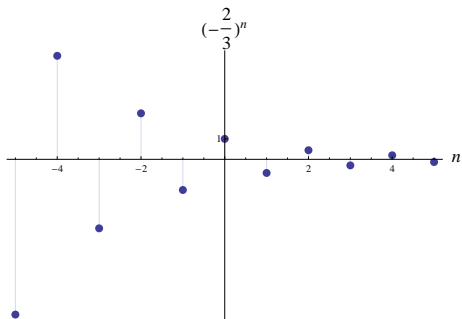


3 Sequência exponencial (real)

$$x(n) = \alpha^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $|\alpha| < 1$, $|x(n)|$ decrescente
- Se $|\alpha| > 1$, $|x(n)|$ crescente
- Se $\alpha > 0$, $x(n)$ é sempre positivo
- Se $\alpha < 0$, $x(n)$ toma valores alternadamente positivos e negativos





Momentaneamente de volta ao caso contínuo ...

Consideremos uma “onda sinusoidal”⁴

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi), \quad t \in \mathbb{R} (\omega_0 > 0).$$

Temos

$$x(t) = x(t + T) \iff \cos(\omega_0 t + \phi) = \cos(\omega_0 t + \phi + \omega_0 T)$$

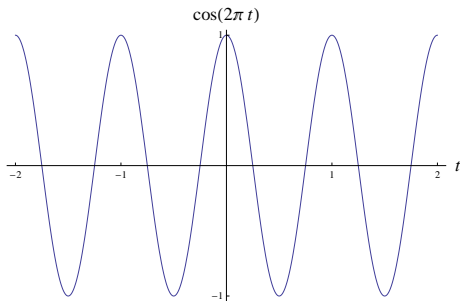
$$\iff \omega_0 T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff T = \frac{2k\pi}{\omega_0}, k \in \mathbb{Z}$$

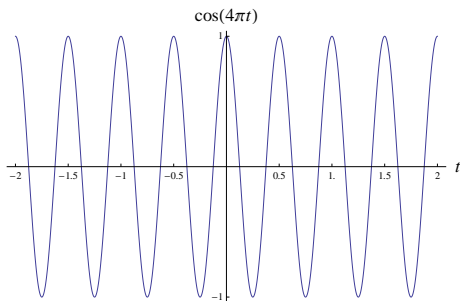
- Para $k = 1$, tem-se $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow$ **período** (fundamental).
- O inverso do período é a **frequência**: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$.
- Também chamamos **frequência (angular)** a ω_0 .
- ϕ é a **fase** (inicial).

⁴Chama-se onda sinusoidal mesmo quando tratando-se de um co-seno, tendo em conta em conta que $\cos(\omega_0 t + \phi) = \sin(\omega_0 t + \phi + \pi/2)$.

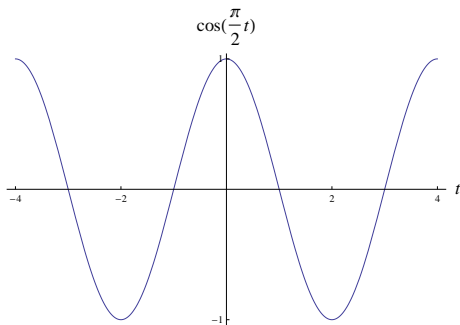
Se o tempo t estiver medido em segundos, a frequência angular vem expressa em *radianos por segundo* e a frequência vem expressa em *ciclos por segundo* (c.p.s.) ou **Herz**.



$$\omega_0 = 2\pi \Rightarrow f = 1 \Rightarrow T = 1$$



$$\omega_0 = 4\pi \Rightarrow f = 2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}$$



$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f = \frac{1}{4} \Rightarrow T = 4$$

De volta ao discreto...

4 (Sequência) sinusoidal

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \phi)$$

Temos que $x(n)$ será periódica de período N ($N \in \mathbb{Z}$) se e só se

$$\begin{aligned} x(n) = x(n + N) &\iff \cos(\omega_0 n + \phi) = \cos(\omega_0 n + \phi + \omega_0 N) \\ &\iff \omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

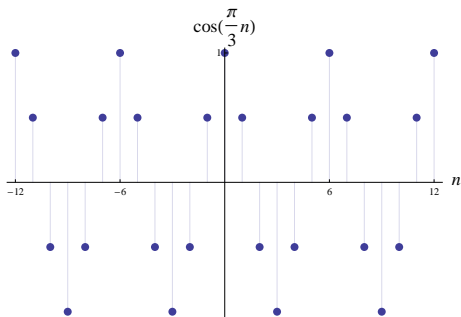
Mas

$$\omega_0 N = 2\pi k \iff \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \iff \frac{\omega_0}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

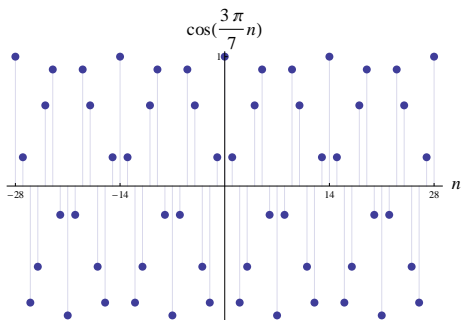
A sequência sinusoidal só é periódica se $\frac{\omega_0}{2\pi}$ for um número racional!

Sendo $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$ (com k o menor inteiro possível), tem-se que $N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$ é o período (fundamental).



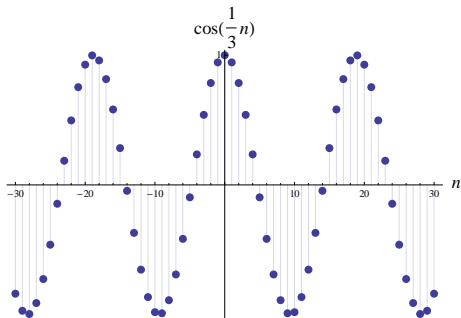


$$\omega_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{6} \Rightarrow N = 6$$



$$\omega_0 = \frac{3\pi}{7} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{3}{14} \Rightarrow N = 14$$





$$\omega_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{6\pi} \notin \mathbb{Q}$$

Não é periódica!



5 (Sequência) exponencial complexa

$$x(n) = e^{(\sigma + i\omega_0)n}$$

Tem-se,

$$\begin{aligned}x(n) &= e^{\sigma n} e^{i\omega_0 n} \\ &= e^{\sigma n} \left(\cos(\omega_0 n) + i \operatorname{sen}(\omega_0 n) \right)\end{aligned}$$

- Se $\sigma \neq 0$, não é periódica.
- Se $\sigma = 0$, comporta-se como a sinusoidal (i.e., é periódica apenas se $\frac{\omega_0}{2\pi} \in \mathbb{Q}$)

Nota O parâmetro ω_0 será referido como a *frequência* da sinusoidal ou exponencial complexa, mesmo quando estas não são periódicas.

Como $\cos(\omega_0 n + \phi) = \cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \phi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, basta-nos considerar as sinusoidais (e as exponenciais) com o valor do parâmetro ω_0 restringido a um intervalo de amplitude 2π (e.g. $[0, 2\pi)$ ou $[-\pi, \pi)$).



No que se segue, denotamos por $\ell(\mathbb{Z})$ o espaço de todas as sequências complexas – ou sinais digitais – (para a adição e multiplicação definidas da forma usual). Os espaços $\ell^2(\mathbb{Z})$ e $\ell^1(\mathbb{Z})$ são, naturalmente, subespaços de $\ell(\mathbb{Z})$ (o espaço dos sinais de energia finita e o dos sinais estáveis, respectivamente).

EM PSD, chamamos **sistema** a qualquer aplicação (ou se, preferirmos, operador) $T : \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z})$. Normalmente, um sistema é descrito na forma

$$y(n) = T(x(n))$$

ou através com um diagrama do tipo

$$x(n) \rightarrow \boxed{T(\quad)} \rightarrow y(n)$$

O sinal $x(n)$ é a *entrada* ou *input* e o sinal transformado $y(n)$ é a *resposta* ou *output*.



Translação no tempo (*shift*, atraso ou deslocamento)

Para $k \in \mathbb{Z}$ (fixo), chamamos (**operador de**) **translação** (ou *shift* ou **atraso** ou **deslocamento**) a um operador T_k tal que

$$T_k(x(n)) = x(n - k).$$

O sinal $y(n) = x(n - k)$ diz-se uma translação, *shift* ou deslocamento de $x(n)$. É imediato reconhecer que qualquer sinal $x(n)$ se pode decompor numa soma (em geral infinita, i.e. numa série) de impulsos unitários deslocados e multiplicados por uma constante:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (1)$$

- Se a aplicação $L : \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z})$ for uma aplicação linear, i.e. se

$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \forall x_1, x_2 \in \ell(\mathbb{Z}),$$

dizemos que L é um **sistema linear**.

- Um sistema T diz-se **invariante no tempo** se comutar com qualquer operador de translação T_k , i.e. se tivermos:

$$x(n) \rightarrow \boxed{T(\quad)} \rightarrow y(n) \rightarrow \boxed{T_k(\quad)} \rightarrow y(n-k)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{T_k(\quad)} \rightarrow x(n-k) \rightarrow \boxed{T(\quad)} \rightarrow y(n-k)$$

Assim, T é invariante no tempo se e só se, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, tivermos

$$T(x(n-k)) = y(n-k),$$

onde $y(n) = T(x(n))$.



Seja T um sistema LIT e seja $h(n)$ a sua resposta ao impulso unitário $\delta(n)$, i.e.

$$h(n) = T(\delta(n)).$$

Seja $x(n) \in \ell(\mathbb{Z})$ um sinal arbitrário. Então, usando a decomposição $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$ e a linearidade e invariância no tempo de T , tem-se

$$\begin{aligned} y(n) &= T(x(n)) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T(\delta(n-k)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

5

⁵Estamos aqui implicitamente a assumir que a linearidade, obviamente válida quando aplicada a um número finito de sinais, se estende quando temos o conjunto numerável de sinais $\delta(n-k)$; pode provar-se que o resultado acima se verifica, por exemplo, se $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$, bastando então que $x \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.



Acabámos de ver que um sistema LIT fica completamente definido desde que conheçamos a sua resposta ao impulso unitário (a que chamamos, habitualmente **resposta impulsional**).

Dados dois sinais $x(n)$ e $y(n)$, o **produto de convolução** de x e y , denotado por $x * y$, é definido como

$$(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n - k) \quad (2)$$

Nota: O produto de convolução só está definido quando a série acima for absolutamente convergente; condições suficientes para que tal aconteça, são, por exemplo, $x(k) \neq 0$ apenas para um número finito de termos, ou $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ou $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Vemos assim que, se T é um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$, então a sua resposta a uma entrada $x(n)$ é dada pela convolução de $x(n)$ com $h(n)$:

$$y(n) = T(x(n)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) = (x * h)(n).$$

Facilmente se provam as seguinte propriedades do produto de convolução:

1 Comutatividade

$$x * y = y * x$$

2 Associatividade

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

3 Neutro

$$x * \delta = x$$

4 Translação

$$x * (T_k \delta) = T_k x$$

5 Linearidade

$$(c_1 x_1 + c_2 x_2) * y = c_1 (x_1 * y) + c_2 (x_2 * y)$$



- Um sistema T diz-se **estável**, se a imagem de qualquer sinal que esteja em $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ estiver também em $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.⁶ Pode provar-se que um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$ é estável se e só se $h(n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (i.e. se $h(n)$ for um “sinal estável”).
- Um sistema T diz-se **causal**, se o valor da resposta correspondente ao índice $n = n_0$ depender apenas dos valores da entrada para $n \leq n_0$.⁷ Pode provar-se que um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$ é causal se e só se

$$h(n) = 0, \quad \text{para } n < 0.$$

- Um sistema diz-se **sem memória**, se o valor da resposta correspondente ao índice $n = n_0$ depender apenas do valor da entrada correspondente a $n = n_0$.

⁶Esta estabilidade é por vezes referida como estabilidade *input limitado output limitado* (em inglês *BIBO-stability*: bounded input bounded output-stability).

⁷Para sistemas em tempo real em que n representa o tempo, a causalidade é importante. A causalidade não é, no entanto, essencial em aplicações onde n não representa o tempo, por exemplo, em processamento de imagem.

- Um sistema LIT diz-se de **de resposta impulsional finita – FIR** (do inglês, Finite Impulse Response) se a sua resposta impulsional $h(n)$ tiver apenas um número finito de termos não nulos, i.e. se existirem inteiros M e N tais que $h(n) = 0$ para $n < M$ e $n > N$.
- Um sistema LIT diz-se de **de resposta impulsional infinita – IIR** (do inglês, Infinite Impulse Response) se a sua resposta impulsional $h(n)$ tiver um número infinito de termos não nulos.

Se um sistema é FIR, então ele pode ser sempre implementado directamente a partir da sua resposta impulsional, uma vez que a convolução

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=M}^N h(k)x(n-k)$$

é obtida como uma soma com um número finito de parcelas.



Exemplo

O sistema definido por $h(n) = (3 - n)(u(n) - u(n - 3))$ é FIR:

$$h(n) = \begin{cases} 3 & n = 0, \\ 2 & n = 1, \\ 1 & n = 2 \\ 0, & n \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

ou seja, tem-se $h(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n - 1) + \delta(n - 2)$. Então, dado qualquer sinal $x(n)$, tem-se

$$y(n) = 3x(n) + 2x(n - 1) + x(n - 2).$$



O sistema do exemplo anterior é um exemplo de um sistema **não recursivo**, isto é, um sistema em que a resposta $y(n)$ à entrada $x(n)$ é expressa exclusivamente em termos de valores do sinal de entrada.

Outro exemplo de um sistema não recursivo (mas, IIR) é o seguinte:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k)$$

A resposta impulsional deste sistema é

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(n-k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

isto é, tem-se

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n).$$

Considere-se agora o seguinte sistema **recursivo** (i.e. um sistema em que o valor da resposta no instante n , $y(n)$, depende da resposta em instantes anteriores)

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}y(n-1).$$

Vamos determinar a resposta impulsional deste sistema, supondo que ele é **causal**: Tem-se

$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}h(n-1), \quad \text{para todo o } n$$

e

$$h(n) = 0, \quad \text{para } n < 0.$$

Assim, vem

- $n = 0$: $h(0) = \delta(0) + \frac{1}{2}h(-1) = 1 + 0 = 1$
- $n = 1$: $h(1) = \delta(1) + \frac{1}{2}h(0) = \frac{1}{2}$
- $n = 2$: $h(2) = \delta(2) + \frac{1}{2}h(1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $n = 3$: $h(3) = \delta(3) + \frac{1}{2}h(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots$

Facilmente se conclui⁸ que

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n).$$

Mais à frente iremos desenvolver métodos mais simples para determinar $h(n)$.

Vemos assim que este sistema (definido de forma recursiva) é o mesmo (ou seja, tem a mesma resposta impulsional, logo dá a mesma resposta a qualquer sinal) que o sistema não recursivo anterior.

O primeiro sistema é não recursivo, mas necessita de um número infinito de atrasos para ser realizado e o segundo é recursivo e precisa apenas de um atraso para ser realizado.

⁸A demonstração poderia fazer-se facilmente por indução.

Nota: No que se segue (até que algo seja dito em contrário) os sinais considerados serão sinais estáveis, i.e. elementos de $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Dado um sinal $x(n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$, a sua **transformada de Fourier (em tempo discreto) – TFTD**, denotada por $\mathcal{F}x$ ou \hat{x} é definida por

$$[\mathcal{F}x](\omega) = \hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}.$$

Uma vez que $|x(n)e^{-i\omega n}| = |x(n)|$ e que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, o critério M de Weierstrass⁹ garante-nos que a série (de funções) considerada acima converge uniformemente para uma certa função.

⁹Se (f_n) é uma sequência de funções definidas num certo conjunto A e existem constantes positivas M_n tais que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$ e todo o $x \in A$ e $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n < \infty$, então a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)$ converge uniformemente em A .

A função definida por $\hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$ é:

- periódica de período 2π :

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega + 2\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n - i2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} e^{-i2\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} = \hat{x}(\omega)\end{aligned}$$

- contínua (a convergência é uniforme e cada uma das funções é contínua.)
- pertence a $L^1[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} \right| d\omega &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)e^{-i\omega n}| \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right) d\omega = \|x\|_1\end{aligned}$$

Notações!

Em PSD é muito frequente usar a notação $X(e^{i\omega})$ para a transformada de Fourier de x , i.e. considerar

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$$

como definindo a TFTD de x . Se designarmos por \mathbb{T} o conjunto dos complexos situados no círculo unitário, i.e.

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\omega}, \omega \in \mathbb{R}\}$$

o que a definição anterior significa é que estamos a considerar uma função X de *uma variável complexa* z , $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, mas definida apenas para valores de $z \in \mathbb{T}$.

Esta notação tem a vantagem de permitir facilmente considerar a extensão da função assim definida para outros valores de $z \in \mathbb{C}$, definindo a chamada transformada Z (que iremos estudar posteriormente). É, no entanto, uma notação menos simples, pelo que tenderemos a usar a notação $\hat{x}(\omega)$ (por vezes também denotada por $X(\omega)$).



Dada uma função $f(\omega) \in L^1[-\pi, \pi]$, a sua transformada de Fourier (em tempo discreto) inversa (TFTDI) é definida, para $n \in \mathbb{Z}$, por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(n) = \check{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega n} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dado um sinal x , se \hat{x} for a sua TFTD, então a TFTDI de \hat{x} é o próprio sinal, i.e.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\omega) e^{i\omega n} d\omega = x(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\omega) e^{i\omega n} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-i\omega k} \right) e^{i\omega n} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\omega} d\omega \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta_{n-k} = x(n). \end{aligned}$$



A demonstração anterior envolveu uma troca do somatório com o integral que pode mostrar-se que é válida nas condições em causa.

Para que tenha interesse, aqui fica a justificação, que é baseada no chamado Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (aqui apresentado numa forma particular):

Teorema da convergência dominada de Lebesgue

Seja dada uma sequência de funções $f_m(t)$ tais que $f_m(t) \rightarrow f(t)$ para q.t. $t \in I$, onde I designa um intervalo de \mathbb{R} (limitado ou ilimitado, em particular $I = \mathbb{R}$). Suponhamos, além disso, que existe uma função $G \geq 0$, tal que $\int_I G(t)dt < \infty$ e, para todo o m , $|f_m(t)| < G(t)$ (para q.t. $t \in I$). Então, $|f(t)| \leq G(t)$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_I f_m(t)dt = \int_I (\lim_m f(t))dt = \int_I f(t)dt$.

Como aplicar aqui?

As funções a considerar são :

- $f_m(\omega) = \sum_{k=-m}^m x(k)e^{-i\omega k} e^{i\omega n}$ (somas parciais)
- $f(\omega) = \hat{x}(\omega)$ (a soma da série, i.e. o limite da sucessão das somas parciais)
- $G(\omega)$ é a função constante $\|x\|_1$, uma vez que

$$|f_m(\omega)| = \left| \sum_{k=-m}^m x(k)e^{-i\omega k} e^{i\omega n} \right| \leq \sum_{k=-m}^m |x(k)| \leq \|x\|_1$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|x\|_1 d\omega = 2\pi \|x\|_1 < \infty.$$



A TFTD goza das seguintes propriedades:

- 1 **Linearidade:** $\mathcal{F}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)](\omega) = (\alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2)(\omega)$
- 2 **Deslocamento no tempo:** A um deslocamento no tempo corresponde uma **modulação**¹⁰

$$\mathcal{F}[x(n - n_0)](\omega) = \hat{x}(\omega)e^{-i\omega n_0}.$$

- 3 **Deslocamento na frequência:** À multiplicação por uma exponencial complexa corresponde um *shift* na frequência:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 n} x(n)](\omega) = \hat{x}(\omega - \omega_0).$$

¹⁰Que é o nome que, em processamento de sinal, damos à multiplicação por uma exponencial $e^{ik\omega}$.

- 4 **Conjugação:** À conjugação no domínio do tempo corresponde a conjugação e reflexão no domínio da frequência:

$$\mathcal{F}[\overline{x(n)}](\omega) = \overline{\hat{x}(-\omega)}$$

- 5 **Se $x(n)$ é real**, então $x(n) = \overline{x(n)}$, donde, tem-se

$$\hat{x}(\omega) = \overline{\hat{x}(-\omega)},$$

isto é $\hat{x}(\omega)$ é uma função simétrica-conjugada. Então, tem-se:

- 1 $\text{Re}(\hat{x}(\omega)) = \text{Re}(\hat{x}(-\omega))$
- 2 $\text{Im}(\hat{x}(\omega)) = -\text{Im}(\hat{x}(-\omega))$
- 3 $|\hat{x}(\omega)| = |\hat{x}(-\omega)|$
- 4 $\text{Arg}(\hat{x}(\omega)) = -\text{Arg}(\hat{x}(-\omega))$

Assim, se $x(n)$ é real, a parte real da sua TFDT é uma função par e parte imaginária da sua TFDT é uma função ímpar, a amplitude de da sua TFDT é uma função par e o argumento da sua TFDT é uma função ímpar.

(\Rightarrow Para os gráficos de $\hat{\omega}$ só precisamos de considerar meio-período de $\hat{x}(\omega)$, por exemplo $\omega \in [0, \pi]$.)



- 5 **Inversão no tempo:** A uma inversão no tempo corresponde uma inversão na frequência:

$$\mathcal{F}[x(-n)] = \hat{x}(-\omega)$$

- 6 **Se $x(n)$ é real,** então $x(n)$ pode sempre decompor-se como soma de uma parte par e de uma parte ímpar:

$$x(n) = x_P(n) + X_I(n),$$

onde

$$x_P(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad \text{e} \quad X_I(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)].$$

Então, facilmente se prova que:

$$\mathcal{F}[x_P(n)] = \text{Re}(\hat{x}(\omega)) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[X_I(n)] = i \text{Im}(\hat{x}(\omega)).$$

Assim, se sequência é **real e par**, a sua TFDT também é real e par
(\Rightarrow Só precisamos de um gráfico no intervalo $[0, \pi]$ para a representar.)



- 6 **Convolução:** Ao produto de convolução corresponde o produto na frequência:

$$\mathcal{F}[x_1(n) * x_2(n)](\omega) = \hat{x}_1(\omega)\hat{x}_2(\omega).$$

- 7 **Preservação de energia (Teorema de Parseval) :**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega.$$

Nota: A demonstração (de algumas) destas propriedades será feita nas aulas práticas.

- 1 A demonstração da linearidade é trivial.
- 2 Demonstração da propriedade: $\mathcal{F}[x(n - n_0)](\omega) = \hat{x}(\omega)e^{-i\omega n_0}$.
Seja $u(n) = x(n - n_0)$. Então

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k - n_0)e^{-i\omega k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i\omega(m+n_0)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i\omega m}e^{-i\omega n_0} = e^{-i\omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i\omega m} = \hat{x}(\omega)e^{-i\omega n_0}.\end{aligned}$$

- 3 Demonstração da propriedade: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 n}x(n)](\omega) = \hat{x}(\omega - \omega_0)$.
Seja $u(n) = e^{i\omega_0 n}x(n)$. Então

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 k}x(k)e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i(\omega - \omega_0)k} = \hat{x}(\omega - \omega_0).\end{aligned}$$



- 4 Demonstração da propriedade: $\mathcal{F}[\overline{x(n)}](\omega) = \overline{\hat{x}(-\omega)}$

Seja $u(n) = \overline{x(n)}$. Então

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x(k)}e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x(k)e^{i\omega k}} \\ &= \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{i\omega k}} = \overline{\hat{x}(-\omega)}.\end{aligned}$$

- 5 Demonstração da propriedade: $\mathcal{F}[x(-n)] = \hat{x}(-\omega)$.

Seja $u(n) = x(-n)$. Então

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{im\omega} = \hat{x}(-\omega).\end{aligned}$$



- 6 Demonstração da propriedade: $\mathcal{F}[x_P(n)](\omega) = \text{Re}(\hat{x}(\omega))$

Seja $u(n) = x_P(n) = \frac{1}{2}x(n) + x(-n)$. Então

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2}\hat{x}(\omega) + \frac{1}{2}\hat{x}(-\omega)$$

Mas, sendo $x(n)$ real, tem-se $\hat{x}(-\omega) = \overline{\hat{x}(\omega)}$. Então

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\omega) + \overline{\hat{x}(\omega)}) = \frac{1}{2}[2 \text{Re}(\hat{x}(\omega))] = \text{Re}(\hat{x}(\omega)).$$

De modo análogo se prova o resultado relativo a $x_I(n)$.

- 7 Demonstração da propriedade: $\mathcal{F}[x_1(n) * x_2(n)](\omega) = \hat{x}_1(\omega)\hat{x}_2(\omega)$.

Seja $u(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$. Então

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m) \right) e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k-m)e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_2(\ell)e^{-i\omega(m+\ell)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-i\omega m} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_2(\ell)e^{-i\omega \ell} = \hat{x}_1(\omega)\hat{x}_2(\omega). \end{aligned}$$



8 Demonstração do Teorema de Parseval: $\sum_n |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \overline{x(n)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \overline{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\omega) e^{i\omega n} d\omega \right)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{x}(\omega)} e^{-i\omega n} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{x}(\omega)} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n} \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{x}(\omega)} \hat{x}(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega.
 \end{aligned}$$



Sobre a convergência da série que define a TFTD

Até agora assumimos que o sinal $x(n)$ cuja TFTD estamos a calcular é estável, i.e. está em $\ell^1(\mathbb{Z})$. Que acontece se, por exemplo, o sinal estiver apenas em $\ell^2(\mathbb{Z})$?

Neste caso, pode mostrar-se que a sucessão das somas parciais $\{S_N(\omega)\}$, onde $S_N(\omega) = \sum_{k=-N}^N x(k)e^{-i\omega k}$, converge, em $L^2[-\pi, \pi]$, para uma certa função $\hat{x}(\omega) \in L^2[-\pi, \pi]$, i.e. tem-se $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{x}(\omega) - \sum_{k=-N}^N x(k)e^{-i\omega k}\|_2 = 0$ ou, de modo equivalente, $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{x}(\omega) - \sum_{k=-N}^N x(k)e^{-i\omega k} \right|^2 d\omega = 0$.

Naturalmente, continuaremos a escrever

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i\omega k},$$

e a chamar a $\hat{x}(\omega)$ a TFTD do sinal $x(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, mas haverá que ter em atenção que a convergência da série tem de ser interpretada como uma *convergência em norma* e não como uma convergência pontual.

De notar que, neste caso, a igualdade ainda é válida pontualmente, *mas apenas para q.t.* $\omega \in [-\pi, \pi]$.



Convergência em $L^p[-\pi, \pi]$

Para $x(n) \in \ell^p(\mathbb{Z})$ ($p > 2$) tem-se um resultado semelhante. Neste caso, a série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-ik\omega}$ converge, em norma p , para uma função em $L^p[-\pi, \pi]$.

Convergência no sentido das distribuições

Existe ainda uma outra forma de convergência (mais fraca, num outro sentido) para a qual podemos considerar a TFTD de sinais que não estejam em $\ell^p(\mathbb{Z})$, desde que esses sinais não tenham um crescimento “demasiado rápido”; mais precisamente, desde que o sinal $x(n)$ tenha um crescimento, no máximo polinomial, i.e. existam $A > 0$ e $p \in \mathbb{N}$, tais que $|x(n)| \leq An^p$. O sentido em que em que a convergência da série que define a TFTD deve, nesse caso, ser interpretado leva-nos ao conceito de *distribuição*.

Para uma breve introdução à teoria das distribuições, leia as notas sobre esse assunto que lhe foram fornecidas.



Resposta em frequência

Seja T um sistema linear invariante no tempo e estável, cuja resposta impulsional é $h(n)$.

À transformada de Fourier em tempo discreto (TFDT) de $h(n)$, $\hat{h}(\omega)$, chamamos **resposta em frequência** do sistema T .

Se $x(n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ for a entrada do sistema e $y(n) = [Tx](n)$ for a respectiva resposta, então, como sabemos, tem-se

$$y(n) = (x * h)(n)$$

e portanto, tendo em atenção a propriedade P7 do produto de convolução, ter-se-á a seguinte expressão para a TFDT de $y(n)$:

$$\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}[x * h](\omega) = \hat{x}(\omega)\hat{h}(\omega),$$

a qual pode ser vista como uma representação do sistema no domínio da frequência.



A resposta em frequência pode expressar-se em termos da sua parte real e parte imaginária:

$$\hat{h}(\omega) = \text{Re}(\hat{h}(\omega)) + i \text{Im}(\hat{h}(\omega))$$

ou em termos da sua magnitude ($|\hat{h}(\omega)|$) e fase ($\text{Arg}(\hat{h}(\omega))$):

$$\hat{h}(\omega) = |\hat{h}(\omega)|e^{i \text{Arg}(\hat{h}(\omega))}$$

Note-se que, uma vez que $\hat{y}(\omega) = \hat{x}(\omega)\hat{h}(\omega)$, se tem

$$|\hat{y}(\omega)| = |\hat{x}(\omega)| |\hat{h}(\omega)| \text{ e } \text{Arg}(\hat{y}(\omega)) = [\text{Arg}(\hat{h}(\omega)) + \text{Arg}(\hat{x}(\omega))] \text{ mod } (2\pi)$$

Isto mostra que a magnitude de $\hat{x}(\omega)$, $|\hat{x}(\omega)|$, tem um “ganho” $|\hat{h}(\omega)|$ quando o sistema actua e que a fase de $\hat{x}(\omega)$ sofre uma translação de $\text{Arg}(\hat{h}(\omega))$.

A magnitude de $\hat{h}(\omega)$ é usualmente designada por **ganho** do sistema.

Se usarmos a TFTDI, podemos escrever o sinal resposta do seguinte modo:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\omega) \hat{h}(\omega) e^{i\omega n} d\omega.$$

Em particular, a resposta impulsional de um sistema discreto (LIT) pode ser obtida a partir da sua resposta em frequência, através da fórmula

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega) e^{i\omega n} d\omega.$$



Resposta a uma exponencial

Vejamos qual o efeito de um sistema com resposta impulsional $h(n)$ (e, portanto, com resposta em frequência $\hat{h}(\omega)$) quando o sinal de entrada é da forma $x(n) = e^{i\omega_0 n}$. Temos,

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{i\omega_0(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-i\omega_0 k} \right) e^{i\omega_0 n} = \hat{h}(\omega_0)e^{i\omega_0 n}\end{aligned}$$

Vemos assim que o sinal de saída é simplesmente o sinal de entrada $x(n) = e^{i\omega_0 n}$ modificado (multiplicado) pela resposta em frequência do sistema calculada em ω_0 .



Resposta a uma sinusóide

Consideremos agora um sinal de entrada sinusoidal $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ e vejamos qual a sua resposta (a um sistema com resposta em frequência $\hat{h}(\omega)$). Começemos por expressar a sinusóide na forma

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{i(\omega_0 n + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega_0 n + \phi)}.$$

(Relembre que $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$) Tem-se

- A resposta a $\frac{A}{2} e^{i(\omega_0 n + \phi)}$ é $\frac{A}{2} \hat{h}(\omega_0) e^{i(\omega_0 n + \phi)}$
- A resposta a $\frac{A}{2} e^{-i(\omega_0 n + \phi)}$ é $\frac{A}{2} \hat{h}(-\omega_0) e^{-i(\omega_0 n + \phi)}$
- Se $h(n)$ for real, então $\hat{h}(-\omega_0) = \overline{\hat{h}(\omega_0)}$ e, portanto, nesse caso tem-se

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} \left(|\hat{h}(\omega_0)| e^{i \text{Arg}(\hat{h}(\omega_0))} e^{i(\omega_0 n + \phi)} + |\hat{h}(\omega_0)| e^{-i \text{Arg}(\hat{h}(\omega_0))} e^{-i(\omega_0 n + \phi)} \right) \\ &= A |\hat{h}(\omega_0)| \cos(\omega_0 n + \phi + \text{Arg}(\hat{h}(\omega_0))) \end{aligned}$$



Temos, então

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) \longrightarrow y(n) = A |\hat{h}(\omega_0)| \cos(\omega_0 n + \phi + \text{Arg}(\hat{h}(\omega_0)))$$

A resposta é uma nova sinusóide com a mesma frequência ω_0 , com amplitude com um “ganho” de $|\hat{h}(\omega_0)|$ e cuja fase sofre um *shift* de $\text{Arg}(\hat{h}(\omega_0))$.



Exemplo

Considere-se um sistema com resposta impulsional $h(n) = a^n u(n)$, com $|a| < 1$. Vejamos qual a sua resposta em frequência.

Tem-se

$$\begin{aligned}\hat{h}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-i\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-i\omega}}.\end{aligned}$$



Exemplo – Filtro passa-baixo ideal

Um sistema (discreto, LIT) cuja resposta em frequência é da forma

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

onde $0 < \omega_c < \pi$, é dito um **filtro passa-baixo (ideal)** (com frequência de corte ω_c). Vejamos qual a resposta impulsional deste sistema.

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega) e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{i\omega n}}{in} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{n\pi} \frac{e^{i\omega_c n} - e^{-i\omega_c n}}{2i} = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{n\pi} \end{aligned}$$



Considere-se um sistema descrito por uma equação às diferenças

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^{M-1} b_k y(n-k)$$

Calculando a TFTD de cada um dos membros da equação anterior (e atendendo às propriedades de linearidade e relação com a translação no tempo desta transformada) tem-se

$$\hat{y}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k} \hat{x}(\omega) + \sum_{k=1}^{M-1} b_k e^{-i\omega k} \hat{y}(\omega).$$

Tem-se, então

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{M-1} b_k e^{-i\omega k}\right) \hat{y}(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k}\right) \hat{x}(\omega),$$

donde se conclui que

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{x}(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^{M-1} b_k e^{-i\omega k}}$$

Exemplo

Consideremos um sistema com resposta implusional

$$h(n) = 0.3 (0.7)^n u(n).$$

Vamos determinar a representação do sistema por meio de uma equação às diferenças.

A resposta em frequência do sistema é

$$\begin{aligned}\hat{h}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n} = 0.3 \sum_{n=0}^{\infty} (0.7)^n e^{-i\omega n} \\ &= 0.3 \frac{1}{1 - 0.7e^{-i\omega}} = \frac{0.3}{1 - 0.7e^{-i\omega}}\end{aligned}$$

Portanto, o sistema pode ser descrito pela seguinte equação às diferenças

$$y(n) = 0.3x(n) + 0.7y(n - 1)$$

(sistema dado na forma recursiva)



Transformada Z

Dado um sinal $x(n) \in \ell(\mathbb{Z})$, chama-se **transformada Z** desse sinal, e denota-se por $X(z)$ (ou, por vezes, por $[\mathcal{Z}x](z)$), a função definida pela série

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

A transformada está definida apenas para os valores de $z \in \mathbb{C}$ pertencentes à região de convergência da série referida. Sendo esta série uma série de Laurent, sabemos que a sua região de convergência (RC) é uma região anelar da forma

$$R_1 < |z| < R_2$$

onde $R_1 \geq 0$ e $R_2 \leq \infty$, podendo ser ainda uma anel “degenerado” da forma $|z| < R_2$ ou $|z| > R_1$ ou mesmo todo o plano complexo (ou ainda o conjunto vazio). Também sabemos que, para os valores de z pertencentes à região de convergência, a série converge absolutamente e define uma função analítica (i.e. infinitamente diferenciável). As singularidades de $X(z)$ estão fora da região de convergência.



- Se $x(n) = 0$ para $n > 0$ (sequência anti-causal) então

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(-n)z^n$$

é uma série de Taylor (i.e. tem apenas potências positivas de z) pelo que a sua região de convergência será do tipo $|z| < R_2$, isto é, será o interior dum círculo. Neste caso, tem-se $X(0) = x(0)$.

- Se $x(n) = 0$ para $n > N$ ($N \in \mathbb{N}$), então teremos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(-n)z^n + \sum_{n=1}^N z^{-n}$$

A região de convergência desta série será do tipo da anterior, havendo no entanto que excluir o ponto $z = 0$, isto é, será da forma $0 < |z| < R_2$. Neste caso, $\lim_{z \rightarrow 0} X(z) = \infty$.

- Se $x(n) = 0$ para $n < 0$ (sequência causal) então

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(z^{-1})^n$$

e a sua região de convergência será do tipo $|z^{-1}| < R_1$ isto é, $|z| > R_1$, ou seja, será o exterior de um círculo.

Neste caso, $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$.

- Se $x(n) = 0$ para $n < -M$, ($M \in \mathbb{N}$), então

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(z^{-1})^n + \sum_{n=1}^M x(-n)z^n$$

e a sua região de convergência será do tipo da anterior, havendo no entanto que excluir o ponto no infinito, i.e. a região será da forma $R_1 < |z| < \infty$.

Neste caso, $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty$.



- 1 Seja $x(n) = a^n u(n)$. Então, tem-se

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

para valores de z tais que $|az^{-1}| < 1$ ou seja para $|z| > |a|$.

- 2 Seja $x(n) = -a^n u(-n - 1)$. Então, tem-se

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = 1 - \frac{a}{a - z} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

para valores de z tais que $|a^{-1}z| < 1$ ou seja para $|z| < |a|$.

Nota: A transformada Z de ambas as sequências $a^n u(n)$ e $-a^n u(-n-1)$ tem a mesma expressão algébrica $\frac{z}{z-a}$. No entanto, as suas regiões de convergência são diferentes. Isto mostra que, ao determinar a transformada Z, é importante indicar qual a correspondente RC.

- ③ Vimos que $\mathcal{Z}[a^n u(n)](z) = \frac{z}{z-a}$ (com RC $|z| > |a|$). A transformada Z de

$$x(n) = na^{n-1}u(n)$$

é dada pela expressão que se obtém derivando $\frac{z}{z-a}$ em ordem a a , i.e. é dada por

$$\frac{z}{(z-a)^2}$$

com a mesma RC, isto é, válida para $|z| > |a|$.

- ④ De modo análogo, tem-se que a transformada Z de

$$x(n) = \binom{n}{m} a^{n-m} u(n)$$

é dada por

$$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

Relação com a TFTD

Seja $x(n)$ um sinal e

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

a sua transformada Z. Se o círculo unitário

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\omega}, \omega \in [-\pi, \pi)\}$$

estiver na região de convergência de $X(z)$, então a transformada de Fourier de $x(n)$ pode obter-se de $X(z)$ considerando $z = e^{i\omega}$:

$$\hat{x}(\omega) = [X(z)]_{z=e^{i\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$$



Propriedades

A transformada Z goza das seguintes propriedades (no que se segue, supomos que a região de convergência de $X(z)$ é da forma $R_1 < |z| < R_2$):

- 1 $\mathcal{Z}[a_1x_1 + a_2x_2](z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$; RC : $\text{RC}_{x_1} \cap \text{RC}_{x_2}$ (no mínimo)
- 2 $\mathcal{Z}[x(n - k)](z) = z^{-k}X(z)$; RC : RC_x (excepto $z = 0$ se $k > 0$ e $z = \infty$ se $k < 0$).
- 3 $\mathcal{Z}[a^n x(n)](z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$; RC : $|a|R_1 < |z| < |a|R_2$
- 4 $\mathcal{Z}[x(-n)](z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$; RC : $\frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}$
- 5 $\mathcal{Z}[\overline{x(n)}](z) = \overline{X(\bar{z})}$; RC : RC_x
- 6 $\mathcal{Z}[nx(n)](z) = -z \frac{dX(z)}{dz}$; RC : RC_x
- 7 $\mathcal{Z}[x_1 * x_2](z) = X_1(z)X_2(z)$; RC : $\text{RC}_{x_1} \cap \text{RC}_{x_2}$ (no mínimo)

Função de transferência

Considere-se um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$. Sendo $x(n)$ um sinal de entrada e $y(n)$ a respectiva resposta, então, como sabemos, tem-se

$$y(n) = [h * x](n).$$

Assim sendo, tem-se a seguinte relação entre as transformada Z do sinal de entrada, $X(z)$, ea transformada da sua resposta, $Y(z)$,

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

onde $H(z)$ é a transformada Z da resposta impulsional $h(n)$ do sistema. A função $H(z)$ é chamada **função de transferência** do sistema.



Estabilidade

Sabemos que um sistema LIT é estável sse $h(n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i.e. sse

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Seja $H(z)$ a função de transferência do sistema, i.e. a transformada Z de $h(n)$.

Um ponto $z \in \mathbb{C}$ está na região de convergência de $H(z)$ sse a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ convergir absolutamente, i.e. sse

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z|^{-n} < \infty.$$

Então, é imediato reconhecer que:

O sistema será estável se e só se o círculo unitário $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pertencer à região de convergência da sua função de transferência, $H(z)$.



Causalidade

Por outro lado, sabemos que o sistema é causal sse a sua resposta impulsional $h(n)$ for uma sequência causal, i.e. tivermos $h(n) = 0$ para $n < 0$.

Isto significa que a transformada Z de $h(n)$, i.e., a função de transferência $H(z)$, terá uma região de convergência da forma $R_1 < |z| \leq \infty$ (ou seja, tem-se uma região de convergência da forma $|z| > R_1$ e, além disso, $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = h(0) < \infty$).

Então, um sistema será causal e estável sse a sua região de convergência for da forma $|z| > R_1$ com $R_1 < 1$.



Transformada inversa

Sendo $X(z)$ a transformada Z da sequência $x(n)$ então é sabido¹¹ que os coeficientes $x(n)$ são dados por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

onde C é um contorno fechado simples (por exemplo, um círculo) com $z = 0$ no seu interior, contido na região de convergência e percorrido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

A fórmula anterior pode, assim, ser usada para inverter a transformada Z, i.e. para determinar a sequência cuja transformada tem uma expressão dada (e sabida a RC).

¹¹Trata-se de um resultado conhecido sobre séries de Laurent que deve relembrar...
aceitar!

Para o cálculo do integral anterior pode recorrer-se ao chamado **Teorema dos resíduos**, que recordamos:

Se C é um contorno fechado simples (percorrido no sentido directo) e $f(z)$ é uma função analítica em C e no seu interior excepto num número finito de singularidades z_1, \dots, z_N , então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \text{res}(f; z_k)$$

onde $\text{res}(f; z_k)$ designa o resíduo da função f em z_k .

No caso especialmente importante em que $X(z)$ é uma fracção racional, i.e. em que

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

com $P(z)$ e $Q(z)$ polinómios em z (ou em z^{-1}), as singularidades da função integranda $f(z) = X(z)z^{n-1}$ a que aplicamos o Teorema dos resíduos serão pólos.

Convém então recordar como se calculam os resíduos quando as singularidades são desse tipo.



Tem-se:

- se z_k é um pólo simples de $f(z)$, então

$$\operatorname{res}(f; z_k) = [f(z)(z - z_k)]_{z=z_k}$$

- se z_k é um pólo de ordem m , então

$$\operatorname{res}(f; z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_k)^m]_{z=z_k}$$



Exemplo

Considere-se um sinal cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|.$$

Tem-se

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z}{z-a} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$$

em que o contorno C é um círculo centrado na origem e de raio superior a a . Então:

- para $n \geq 0$, a única singularidade de $f(z) = \frac{z^n}{z-a}$ situada no interior do contorno é $z = a$, sendo $\text{res}[f; a] = a^n$; então, temos $x(n) = a^n$, para $n \geq 0$.
- para $n = -1$, tem-se que $f(z) = \frac{z^{-1}}{z-a} = \frac{1}{z(z-a)}$ tem dois pólos simples ($z = 0$ e $z = a$) no interior de C . Para $z = a$, vem $\text{res}[f; a] = \frac{1}{a}$ e para $z = 0$, vem $\text{res}[f; 0] = -\frac{1}{a}$. Então, aplicando o Teorema dos resíduos, concluímos que $x(-1) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$

- Para $n = -2$, teríamos de calcular os resíduos de $f(z) = \frac{1}{z^2(z-a)}$ em $z = 0$ (pólo duplo) e em $z = a$ (pólo simples). Teríamos que $\text{res}[f; a] = \frac{1}{a^2}$ e $\text{res}[f; 0] = -\frac{1}{a^2}$, pelo que $x(-2) = 0$.
- O processo poderia continuar... mas é muito maçador!

Nota: Quando $n < 0$, é possível efectuar uma mudança de variável no integral, definida por $p = z^{-1}$, de modo a facilitar o seu cálculo; como vamos descrever outros processos de inverter a transformada Z que são, em geral, mais simples de usar, não daremos mais pormenores sobre esse processo.



Série de potências

Se a transformada $X(z)$ estiver expressa como uma série de potências

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)z^{-n}$$

com os coeficientes $c(n)$ dados explicitamente, então, naturalmente $x(n) = c(n), \forall n$ e o problema da inversão estará resolvido.¹² O mesmo acontece, se for possível (recorrendo a expansões conhecidas, por exemplo) exprimir $X(z)$ numa série de potências, mesmo que ela não esteja dada inicialmente nessa forma. Por exemplo, suponhamos que

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$$

Usando a expansão conhecida para $\log(1 + x)$, obtemos

$$\log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

donde concluímos que $x(n) = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u(n-1)$.

¹²Estamos implicitamente a usar a unicidade da representação de uma função em série de Laurent.



Decomposição em fracções parciais Consideramos agora o caso em que $X(z)$ é uma fracção racional da forma

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

com $P(z)$ e $Q(z)$ polinómios em z com $\text{grau}(P) \leq \text{grau}(Q)$.¹³ Consideremos a função

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{P(z)}{zQ(z)}.$$

Começemos por supor que $Q(z)$ tem N as raízes simples r_1, \dots, r_N . Então, $F(z)$ tem $N + 1$ pólos simples em $z = r_1, \dots, z = r_N$ e $z = 0$ e é possível expandir $F(z)$ na forma

$$F(z) = \frac{A}{z} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - r_k}$$

onde

$$A = \text{res}[F; 0] = [F(z)z]_{z=0} = X(0), A_k = \text{res}[F; r_k] = [F(z)(z - r_k)]_{z=r_k}$$

¹³Se inicialmente tivermos um polinómio do numerador com grau superior ao do denominador, haverá que começar por efectuar a divisão para extrair a parte inteira.

Nesse caso, tem-se

$$X(z) = A + \sum_{k=1}^N A_k \frac{z}{z - r_k}$$

Naturalmente, dependendo da região de convergência, haverá diversas inversas possíveis.

- Se considerarmos a região de convergência $|z| > R_1$ onde $R_1 = \max\{|r_i|\}$, a inversa (que será uma sequência causal) será dada por

$$x(n) = A\delta(n) + \sum_{k=1}^N A_k r_k^n u(n)$$

- Se consideramos a região $|z| < R_2$, onde $R_2 = \min\{|r_i|\}$, a inversa (que será uma sequência anti-causal) será dada por

$$x(n) = A\delta(n) - \sum_{k=1}^N A_k r_k^n u(-n - 1)$$

- O caso de uma região de convergência anelar do tipo

$$R = \{z : R'_1 < |z| < R'_2\}$$

(em que R não contém pólos de $X(z)$) trata-se separando

$$\sum_{k=1}^N A_k \frac{z}{z - r_k}$$

em duas partes, adequadamente; ver exemplo seguinte.

Exemplo

Seja

$$X(z) = \frac{z + 2}{2z^2 - 7z + 3}$$

As raízes de $Q(z) = 2z^2 - 7z + 3$ são $r_1 = 1/2$ e $r_2 = 3$. Então tem-se:

- $$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{z + 2}{2z(z - 1/2)(z - 3)}$$

- $A = X(0) = \frac{2}{3}$

- $A_1 = \left[\frac{z+2}{2z(z-3)} \right]_{z=1/2} = -1, \quad A_2 = \left[\frac{z+2}{2(z-1/2)} \right]_{z=3} = \frac{1}{3}$

Em resumo, temos

$$X(z) = \frac{2}{3} - \frac{z}{z - 1/2} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 3}.$$

- Para a região de convergência $|z| > 3$, temos

$$x(n) = \frac{2}{3}\delta(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}3^n u(n)$$

- Na região $|z| < \frac{1}{2}$, temos

$$x(n) = \frac{2}{3}\delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n - 1) - \frac{1}{3}3^n u(-n - 1)$$

- Na região $\frac{1}{2} < |z| < 3$, temos

$$x(n) = \frac{2}{3}\delta(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{3}3^n u(-n - 1)$$

Pólos múltiplos

Se, por exemplo, uma das raízes r_k de $Q(z)$ tiver multiplicidade m , então o termo $\frac{A_k}{z-r_k}$ será substituído por

$$\sum_{\ell=1}^m \frac{B_\ell}{(z-r_k)^\ell}$$

em que

$$B_\ell = \frac{1}{(m-\ell)!} \left[\frac{d^{m-\ell}}{dz^{m-\ell}} \left((z-r_k)^m F(z) \right) \right]_{z=r_k}$$

Para a inversão de fracções da forma $\frac{z}{(z-r_k)^\ell}$ ($\ell > 1$) pode usar-se o facto de a transformada de $\binom{n}{m} a^{n-m} u(n)$ ser dada por $\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$, para $|z| > |a|$, e de a transformada de $-\binom{n}{m} a^{n-m} u(-n-1)$ ser $\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$, para $|z| < |a|$; ver tabela da transformada Z.

Exemplo

Seja $X(z) = \frac{z}{(z-1/2)(z-1)^2}$.

Então, vem: $F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1/2)(z-1)^2}$

$$A = X(0) = 0$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{(z-1)^2} \right]_{z=1/2} = 4$$

$$B_1 = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z-1/2)} \right) \right]_{z=1} = -4$$

$$B_2 = \left[\frac{1}{z-1/2} \right]_{z=1} = 2$$

$$X(z) = zF(z) = 4 \frac{z}{z-1/2} - 4 \frac{z}{z-1} + 2 \frac{z}{(z-1)^2}$$

Assim, por exemplo, para $|z| > 1$, tem-se

$$\begin{aligned} x(n) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 4u(n) + 2nu(n) \\ &= \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 + 2n \right] u(n) \end{aligned}$$

Se o sistema é definido por uma equação às diferenças do tipo

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^{M-1} b_k y(n-k),$$

se calcularmos a transformada Z de ambos os membros da equação e usarmos as propriedades dessa transformada, vem

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} X(z) + \sum_{k=1}^{M-1} b_k z^{-k} Y(z)$$

i.e. vem

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{M-1} b_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}\right) X(z).$$

ou seja, tem-se

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M-1} b_k z^{-k}}$$



A equação anterior mostra que $H(z)$ é uma função racional em z^{-1} (quociente de dois polinómios em z^{-1}) a qual pode, se preferirmos, ser transformada no quociente de dois polinómios em z ,

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

onde

$$P(z) = z^N(a_0z^{N-1} + \dots + a_{N-1})$$

e

$$Q(z) = z^M(z^{M-1} + \dots + b_{M-1}).$$

A determinação da resposta impulsional $h(n)$ (para uma dada região de convergência) pode então obter-se pelos processos descritos anteriormente para a inversão da transformada Z de uma função racional.



Sistemas de fase mínima

Um sistema diz-se **invertível** se for possível recuperar o sinal de entrada $x(n)$ a partir do sinal resposta $y(n)$, i.e. se existir um sistema T_{inv} (dito inverso de T) tal que

$$T_{inv} T = I,$$

onde I é o sistema identidade ($Ix = x$, para todo o x).

Se T e T_{inv} forem ambos causais e estáveis diremos que T tem **fase mínima**.

Em resumo: **O sistema tem fase mínima se for invertível, causal e estável e o seu inverso também for causal e estável.** ¹⁴

¹⁴A razão de se falar em fase mínima tem a ver com o facto de se poder provar que, de entre todos os sistemas causais e estáveis com a mesma magnitude de resposta em frequência, o sistema de fase mínima é o que minimiza o chamado *group delay*, o qual é definido como o simétrico da derivada da fase, i.e. $-\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$, com $\phi(\omega)$ a fase de $\hat{h}(\omega)$.

No caso de um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$, supondo que T_{inv} tem resposta impulsional $h_{inv}(n)$, a equação $T_{inv}T = I$ é equivalente a ter-se

$$(h_{inv} * h)(n) = \delta(n).$$

Calculando a transformada Z de ambos os membros dessa equação, vem $H_{inv}(z)H(z) = 1$, donde se segue que

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)}.$$

Consideremos o caso em que $H(z)$ é uma função racional

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

(com grau de $P(z)$ igual ao grau de $Q(z)$). Então,

$$H_{inv}(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}.$$



Nesse caso:

- $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ é causal e estável sse os zeros de $Q(z)$ (pólos de $H(z)$) estiverem no interior do círculo unitário;
- $H_{inv} = \frac{Q(z)}{P(z)}$ é causal e estável sse os zeros de $P(z)$ (pólos de $H_{inv}(z)$, zeros de $H(z)$) estiverem no interior do círculo unitário.

Então:

O sistema terá fase mínima sse os zeros e pólos de $H(z)$ (ou seja zeros do numerador e denominador de $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$) estiverem no interior do círculo unitário.



Série de Fourier

Estamos de volta aos sinais contínuos!

Começamos por analisar o caso de sinais periódicos (por simplicidade, começamos com sinais de período 2π).

Relembremos que o espaço $L^2[-\pi, \pi]$ é o espaço de Hilbert das funções periódicas de período 2π e tais que $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle < \infty$, onde o produto interno $\langle f, g \rangle$ é definido por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Mais propriamente, trata-se, com já referimos, de classes de equivalência de funções, em que identificamos quaisquer duas funções que difiram apenas num conjunto de medida nula com sendo a mesma; assim a periodicidade significa apenas que $f(t) = f(t + 2k\pi)$ (para q.t. t); quando referirmos que uma dada função é contínua, estamos a dizer que há um representante contínuo na sua classe e que é esse que estamos a considerar. Em particular, nesse caso, ter-se-á $f(\pi) = f(-\pi)$.



Já referimos que se pode provar que as funções definidas por

$$\mathbf{e}_n(t) = e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

constituem uma base o.n. de $L^2[-\pi, \pi]$. Assim, dada uma função $f \in L^2[-\pi, \pi]$, a sucessão das somas parciais

$$S_N(t) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{int}$$

onde

$$\hat{f}_n = \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

converge para a função f no sentido da norma em $L^2[-\pi, \pi]$, i.e. tem-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0.$$

Com esse sentido, escrevemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}.$$

A série

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}$$

em que

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

é chamada **série de Fourier** de f e os \hat{f}_n são chamados **coeficientes de Fourier** de f .

Comparando com o que já falámos para sinais discretos, vemos que série $S_f(t)$ é a TFTD do sinal discreto $x(n) = \hat{f}_{-n}$ e os coeficientes de Fourier de f , \hat{f}_n , são obtidos pela TFTDI da função $f(t)$ calculada em $-n$, i.e. $\hat{f}_n = (\mathcal{F}^{-1} f)(-n)$.

Nota: Devido à periodicidade de f e das funções e^{int} , o integral que define os coeficientes de Fourier, $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ pode ser substituído por qualquer integral da forma $\frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) e^{-int} dt$, por exemplo, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.



Os problemas associados com a convergência pontual (e uniforme) da série de Fourier, nomeadamente a discussão sobre as condições mínimas que garantem este tipo de convergência despertaram o interesse dos matemáticos durante mais de dois séculos e tiveram um impacto profundo nos fundamentos da Análise. Damos aqui um pequeno resumo de alguns resultados sobre a convergência da série de Fourier.

- Pode provar-se que, sendo $f \in L^2[-\pi, \pi]$, então a sucessão das somas parciais $S_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{int}$ onde \hat{f}_n , são os coeficientes de Fourier de f , **converge pontualmente para $f(t)$ para quase todo o t** , i.e. podemos escrever

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{int} = f(t) \quad (\text{p.q.t. } t)$$

Trata-se do chamado Teorema de Carleson, cuja demonstração, apresentada por Lennart Carleson em 1996, é extremamente difícil; este resultado foi depois estendido para $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$, por R. Hunt, em 1968.



Relembre:

- Uma função f diz-se *seccionalmente contínua* se, em cada intervalo limitado $[a, b]$, ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas elas de 1ª espécie (i.e. tipo salto).
- Uma função diz-se *seccionalmente diferenciável* se for seccionalmente contínua e a sua derivada for também seccionalmente contínua.¹⁵
- Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de variação limitada em $[a, b]$ se existir uma constante M tal que, para qualquer partição $\mathcal{T} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$, se tenha

$$V_{\mathcal{T}}(f) := \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq M.$$

¹⁵Note-se que a derivada f' pode não estar definida em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$; por exemplo, não existe nos pontos onde f é descontínua.

Convergência pontual da série de Fourier

Têm-se os seguintes resultados:

- Se a função f for seccionalmente diferenciável, então a sua série de Fourier converge, em cada ponto t , para $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.
- Em particular, nessas condições, a série de Fourier converge pontualmente para $f(t)$ em cada ponto t que seja ponto de continuidade de f .
- Além disso, a convergência é uniforme em todo o intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .
- Os resultados anteriores mantêm-se válidos se substituirmos a condição “ f seccionalmente diferenciável” por “ f de variação limitada (em $[-\pi, \pi]$)”.



O seguinte resultado é importante porque estabelece a unicidade de série de Fourier.

Teorema

Sejam $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ e sejam \hat{f}_n e \hat{g}_n os respectivos coeficientes de Fourier. Então, tem-se $\hat{f}_n = \hat{g}_n$ para todo o n se e só se $f = g$, i.e. se e só se $f(t) = g(t)$ (para q.t. t).



A representação de f através da sua série de Fourier tem duas características importantes:

- 1 a primeira é que ela nos dá a *decomposição* de f numa soma (infinita) de componentes ortogonais $w_n(t) = \hat{f}_n e^{int}$
- 2 além disso, as funções $e_n(t) = e^{int}$ usadas nessa decomposição são, todas elas, obtidas a partir de uma função básica $e(t) := e^{it}$ à custa de *contrações inteiras*, isto é, tem-se

$$e_n(t) = e(nt), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Em resumo, podemos dizer que:

Toda a função periódica de período 2π de quadrado integrável é gerada pela sobreposição de contrações inteiras de uma função básica $e(t) = e^{it}$.

Da ortonormalidade das funções e_n segue-se, de imediato (pela identidade de Plancherel) que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty.\end{aligned}$$

Temos, assim, que a sequência dos coeficientes de Fourier de $f \in L^2[-\pi, \pi]$ é de quadrado somável ou seja, está no espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$.



Reciprocamente (como já referimos quando falámos da TFTD), dada uma sequência $c(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, se considerarmos a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{int}$$

ela converge, no sentido da norma em $L^2[-\pi, \pi]$, para uma função $f \in L^2[-\pi, \pi]$, isto é, temos

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{int} \in L^2[-\pi, \pi].$$

Além disso, a sequência dos coeficientes de Fourier dessa função f é precisamente a sequência inicial $c(n)$ ou seja, tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt = c(n).$$

Pode provar-se o seguinte resultado, conhecido como **Lema de Riemann-Lebesgue**:

Se $f \in L^2[-\pi, \pi]$, então os seus coeficientes de Fourier satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}_n = 0.$$

- Tem-se também o seguinte resultado mais forte:

Se $f^{(r)}$ é contínua e de variação limitada (onde $f^{(r)}$, $r \geq 0$, denota a r -ésima derivada de f), então existe uma constante K tal que $|\hat{f}_n| \leq \frac{K}{|n|^{r+1}}$.

- Existe uma espécie de recíproco do resultado anterior:

Se os coeficientes de Fourier de f , \hat{f}_n , satisfazem $|\hat{f}_n| \leq K \frac{1}{|n|^{r+1+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$, com K independente de n , então a função f é pelo menos r vezes continuamente diferenciável, podendo a sua série de Fourier ser obtida derivando termo a termo a série de Fourier de f , i.e.

$$f^{(r)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n (in)^r e^{int}.$$



Funções periódicas de período T

A teoria das séries de Fourier para funções periódicas de período 2π pode, naturalmente, estender-se para funções periódicas de período arbitrário. Se $f \in L^2[0, T]$, então a sua série de Fourier será dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in \frac{2\pi}{T} t},$$

onde

$$\hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Neste caso, as funções $e^{in \frac{2\pi}{T} t}$ formam uma base ortonormada de $L^2[0, T]$, relativamente ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R})$

Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Chama-se **transformada de Fourier** de f à função definida por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

A transformada de Fourier de f é também denotada por $\mathcal{F}f$.¹⁶ Temos

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

pelo que, de facto, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, a função $\hat{f}(\omega)$ está definida para todo o ω .

¹⁶É preciso ter em atenção que a definição de \hat{f} não é uniforme na diversa literatura matemática, pelo que é preciso ter cuidado ao consultar bibliografia; outras definições usuais são $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt$ ou $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$.

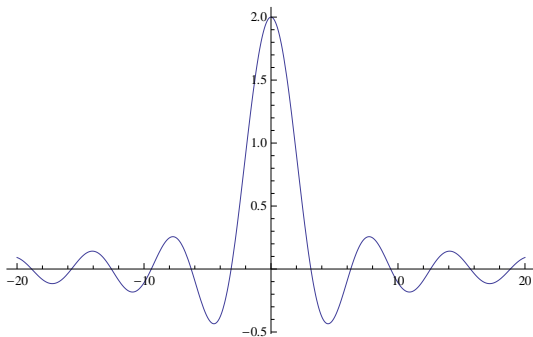
Note-se, no entanto, que a transformada de Fourier de uma função de $L^1(\mathbb{R})$ não está necessariamente em $L^1(\mathbb{R})$. Por exemplo, consideremos a função

$$\chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |t| > 1, \end{cases}$$

a qual está, naturalmente, em $L^1(\mathbb{R})$. A sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi) = 2 \operatorname{sinc}(\omega) := \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega}$$

e pode mostrar-se que esta função não é uma função do espaço $L^1(\mathbb{R})$.

Gráfico da função $2 \operatorname{sinc}(\omega)$ 

A demonstração de que a função $\operatorname{sinc}(\omega)$ não pertence a $L^1(\mathbb{R})$ pode ser vista, e.g. em H. A. Priestley, *Introduction to Integration* (1997), p. 113-114.

Embora as transformadas de funções de $L^1(\mathbb{R})$ não estejam necessariamente em $L^1(\mathbb{R})$, elas comportam-se “bem” noutros aspectos.

Teorema

Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Então:

- 1 $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad |\widehat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$
- 2 \widehat{f} é uma função uniformemente contínua em \mathbb{R}
- 3 $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |\widehat{f}(\omega)| = 0$ (Lema de Riemann-Lebesgue).



Uma das propriedades notáveis da transformada de Fourier é a relação entre derivação e multiplicação por um monómio.

Teorema

- ① Seja f tal que $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, para $k = 0, 1, \dots, r$. Então, a transformada de Fourier de f , \widehat{f} , é r -vezes continuamente diferenciável e tem-se

$$\frac{d^k \widehat{f}(\omega)}{d\omega^k} = (-i)^k \widehat{(t^k f)}(\omega); \quad k = 1, \dots, r.$$

- ② Suponhamos que $f \in C^r(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e que todas as derivadas $f^{(k)}$; $k = 1, 2, \dots, r$, estão em $L^1(\mathbb{R})$. Então,

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega); \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

$$(\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |\omega|^r \widehat{f}(\omega) = 0)$$

- ③ Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ tem suporte compacto, então \widehat{f} é infinitamente diferenciável.

Segue-se uma lista de outras propriedades básicas da transformada de Fourier, cujas demonstrações podem, ser vistas, e.g. no já citado livro de H.A. Priestley.

Começamos por introduzir três operadores:

Translação : $(T_a f)(t) := f(t - a), \quad a \in \mathbb{R}.$

Modulação : $(E_a f)(t) := e^{iat} f(t), \quad a \in \mathbb{R}.$

Dilatação : $(D_a f)(t) := |a|^{-1/2} f(t/a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$

(Note-se que chamamos operador de dilatação ao operador definido acima, ainda que o resultado possa corresponder (quando $|a| > 1$) a uma contracção da função sobre o qual actua.) Temos, então, o seguinte resultado.

$$\widehat{T_a f}(\omega) = (\widehat{E_{-a} f})(\omega) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$$

$$\widehat{E_a f}(\omega) = (\widehat{T_a f})(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$$

$$\widehat{D_a f}(\omega) = (\widehat{D_{\frac{1}{a}} f})(\omega) = |a|^{1/2} \hat{f}(a\omega).$$



Produto de Convolução

Dadas duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - y) g(y) dy,$$

existe (para quase todo o t) e define uma função em $L^1(\mathbb{R})$, chamada **produto de convolução de f e g** . Facilmente se verifica que o produto de convolução é comutativo e associativo. Além disso, tem-se o seguinte resultado.

Teorema

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega)$$

ou seja, a transformada de Fourier transforma convoluções em produtos



Dada uma função $g \in L^1(\mathbb{R})$, chama-se transformada de Fourier inversa de g e denota-se por \check{g} ou $\mathcal{F}^{-1}g$, a função definida por

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

O teorema da inversão diz que, se f e \hat{f} estão em $L^1(\mathbb{R})$, então a transformada inversa de \hat{f} é a própria função f . Mais precisamente, tem-se

Teorema

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então tem-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{para q.t. } t);$$

em particular, a igualdade pontual é válida em todos os pontos de continuidade de f . Assim, se f for contínua, a igualdade é válida para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Nota Note-se que, como o integral do lado direito define uma função *contínua*, a qual coincide com f (q.s.), então existe sempre um representante contínuo na classe a que f pertence. Nesse sentido, dizemos muitas vezes que, se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então f é uma função contínua.



Como consequência imediata do teorema anterior, tem-se o seguinte teorema importante.

Teorema

Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ duas funções tais que $\hat{f} = \hat{g}$. Então, tem-se

$$f(t) = g(t) \quad (\text{q.t. } t).$$



Pode também provar-se o seguinte resultado, que estabelece uma relação entre o decaimento de $|\widehat{f}(\omega)|$ e a regularidade global de f .

Teorema

Se f é tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|(1 + |\omega|^r) d\omega < +\infty,$$

então as derivadas de ordem k ; $k = 1, \dots, r$ de f existem e são contínuas q.s. e tem-se

$$f^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^k \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{q.t. } t).$$

Em particular, o resultado anterior verifica-se se existe uma constante K e $\epsilon > 0$ tais que

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{r+1+\epsilon}}.$$

Também se conclui de imediato do resultado anterior que, se \widehat{f} tem suporte compacto, então f é (i.e. coincide q.s. com) uma função infinitamente diferenciável.

Como vimos, a transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ não está necessariamente em $L^1(\mathbb{R})$. A teoria é, assim, um pouco assimétrica.

Isto motiva-nos a estender a definição de transformada de Fourier ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, das funções mensuráveis de quadrado integrável.

A primeira dificuldade é que, estando f em $L^2(\mathbb{R})$, mas não em $L^1(\mathbb{R})$, o integral que define a transformada de Fourier não existe.

A transformada de Fourier para $f \in L^2(\mathbb{R})$ vai ser definida como um limite de transformadas de funções de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.



O teorema seguinte mostra-nos que o produto interno e a norma em $L^2(\mathbb{R})$ são preservados (a menos de uma constante) pela transformada de Fourier.

Teorema (Fórmulas de Parseval e Plancherel) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então tem-se a seguinte **fórmula de Parseval**:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

Em particular, é válida a seguinte identidade, conhecida por **identidade de Plancherel**:

$$\|\hat{f}\| = \sqrt{2\pi} \|f\|.$$

Pode mostrar-se que o conjunto $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$. Assim, dada qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ convergente para f , isto é, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Sendo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, será de Cauchy, ou seja, teremos $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$. Então, ter-se-á, aplicando a linearidade da transformada de Fourier e a fórmula de Plancherel

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\| = \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\| = \sqrt{2\pi} \|f_n - f_m\|,$$

o que mostra que a sucessão $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$, formada pelas transformadas de Fourier das funções f_n , também é uma sucessão de Cauchy. Como $L^2(\mathbb{R})$ é completo, esta sucessão convergirá, então, para uma certa função de $L^2(\mathbb{R})$.

Será natural chamar a esta função limite ¹⁷ **transformada de Fourier da função f** e denotá-la por $\mathcal{F}f$ ou \widehat{f} , como habitualmente.

¹⁷De notar que a função limite depende apenas de f e não da sucessão particular $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ escolhida.

Uma forma possível de escolher as funções f_n é tomar

$f_n(t) = f(t)\chi_{[-n,n]}(t)$, onde χ_A designa a função característica do conjunto A , i.e. $\chi(t) = 1$ se $t \in A$ e $\chi(t) = 0$ se $t \notin A$.

Se escrevermos l.i.m. $g_n(t) = g(t)$ com o significado de que $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ ¹⁸, podemos então escrever que

$$\widehat{f}(\omega) = \text{l.i.m.} \widehat{f}_n(\omega) = \text{l.i.m.} \int_{-n}^n f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Com um abuso de notação conveniente, continuaremos, no entanto, a escrever, quando $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

com o entendimento de que se trata de um processo limite como descrevemos acima.

¹⁸l.i.m. é usado para designar “limit in the mean”, em inglês.



Convém referir que esta extensão da transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$ satisfaz as fórmulas de Plancherel-Parseval e, de um modo geral, as propriedades anteriormente referidas para transformadas de funções em $L^1(\mathbb{R})$.

É também possível inverter a transformada de Fourier, do seguinte modo. Definindo a transformada de Fourier inversa de f por

$$\mathcal{F}^{-1}f(t) = \check{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(onde o lado direito deve ser interpretado, de modo análogo ao que fizemos para definir a transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$, como um processo limite) então tem-se o seguinte resultado

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Princípio de Incerteza de Heisenberg

Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt \times \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{4} \|f\|^2 \|\hat{f}\|^2 = \frac{\pi}{2} \|f\|^4$$

Nota: Se $\|f\| = 1$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt \times \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2}$$

O mínimo é atingido para a função (normalizada):

$$g_{t_0 \omega_0}(t) := \pi^{-1/4} e^{i\omega_0 t} e^{-(t-t_0)^2/2}$$



Por vezes (embora raramente!) será útil considerar transformadas de Fourier de distribuições. Nas notas sobre distribuições, refere-se, ainda que de forma muito breve, como se pode estender o uso da transformada de Fourier para as distribuições.

Para aquilo que necessitamos aqui, é importante recordar, em particular, que se tem

$$\hat{\delta} = 1,$$

onde a distribuição δ (chamada delta-Dirac) satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) = \phi(0)$$



Uma função f diz-se de **banda limitada** se existe uma constante $\Omega > 0$ para a qual se tem

$$\hat{f}(\omega) = 0, \quad \text{para } |\omega| > \Omega.$$

Se Ω é o menor valor para o qual tal se verifica, dizemos que f tem largura de banda 2Ω ; o valor $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ é chamado **frequência de Nyquist** e $2\nu = \frac{\Omega}{\pi}$ é dito **taxa (de amostragem) de Nyquist**.

Teorema de Amostragem de Shannon

Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ uma função contínua, de banda limitada com largura de banda 2Ω e satisfazendo uma condição de decaimento da forma

$$|f(t)| \leq \frac{K}{1 + |t|^{1+\epsilon}} \quad (3)$$

Seja $T := \frac{\pi}{\Omega}$ ¹⁹. Então, tem-se

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{sinc}(\Omega(t - nT)), \quad t \in \mathbb{R}$$

¹⁹Note que T é o inverso da taxa de Nyquist, por vezes referido como período de Nyquist

Demonstração

A condição de decaimento (3) garante que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Uma vez que \hat{f} é contínua e de suporte compacto, tem-se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. O teorema de inversão permite-nos então escrever, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \stackrel{A}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Seja $F(\omega)$ a extensão periódica (de período 2Ω) de $\hat{f}(\omega)$ a todo o \mathbb{R} , i.e. $F(\omega)$ é a função periódica de período 2Ω que, em $[-\Omega, \Omega]$, coincide com $\hat{f}(\omega)$.

A função $F \in L^2[-\Omega, \Omega]$ e admite, portanto, uma expansão em série de Fourier, a qual coincide com $F(\omega)$ q.s.



Tem-se, assim

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n e^{2n\pi i/(2\Omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n e^{n\pi i/\Omega}, \quad (\text{q.t.}\omega), \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{F}_n &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{-n\pi i/\Omega} d\omega \stackrel{\text{B}}{=} \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{-n\pi i\omega/\Omega} d\omega \\ &= \frac{2\pi}{2\Omega} f(-n\pi/\Omega) = \frac{2\pi}{2\Omega} f(-nT), \end{aligned} \quad (6)$$

onde, na penúltima igualdade, usámos a Equação (4) e na última, a definição de T .

Em particular, temos então, para q.t. $\omega \in [-\Omega, \Omega]$,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi}{2\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-in\omega T}$$

Substituindo esta expressão de $\hat{f}(\omega)$ na Equação (4), vem

$$f(t) = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-in\omega T} \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

A condição (3) garante que a série dentro do integral converge uniformemente podendo ser integrada termo a termo (i.e. podemos trocar o sinal do somatório com o sinal de integral) e vem, então

$$f(t) = \frac{1}{2\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i(t-nT)\omega} d\omega.$$

Para estabelecer o resultado final basta apenas mostrar que

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i(t-nT)\omega} d\omega = 2\Omega \operatorname{sinc}(\Omega(t - nT))$$

onde $\operatorname{sinc}(x) := \frac{\operatorname{sen}x}{x}$, o que deixamos ao cuidado dos alunos.

- O teorema de amostragem mostra que um sinal de banda limitada com largura de banda 2Ω pode ser totalmente reconstruído a partir do conhecimento dos valores de uma amostra dos seus valores num conjunto discreto de pontos:

$$f(nT), n \in \mathbb{Z}, \quad \text{com } T = \frac{\pi}{\Omega}$$

- Quando se obtém uma amostra $f(nT)$ de um sinal $f(t)$, T é o chamado **período de amostragem** e a quantidade T^{-1} é dita **taxa de amostragem**.
- O teorema mostra que um sinal de banda limitada com largura de banda 2Ω pode ser totalmente reconstruído se usarmos uma taxa de amostragem igual à taxa de amostragem de Nyquist, $\frac{\Omega}{\pi}$.



Sub-amostragem

Suponhamos agora que se tem uma amostra $f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$ de um sinal f , obtida com um certo período de amostragem $T = \frac{\pi}{\Omega}$ (ou seja uma taxa de amostragem $\frac{\Omega}{\pi}$), mas que o sinal é de banda limitada mas com uma largura de banda $\Omega' > \Omega$, ou seja, que o sinal foi “sub-amostrado” (a taxa de amostragem usada foi inferior à taxa de Nyquist).

Se analisarmos a demonstração do Teorema de amostragem, vemos que as igualdades assinaladas com (A) e (B) são as únicas onde se usa o facto de $\hat{f}(\omega)$ se anular para $|\omega| > \Omega$.

Suponhamos que a sub-amostragem é relativamente “moderada”, por exemplo, que se tem $\Omega' < 3\Omega$. Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} f(nT) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega'}^{\Omega'} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-3\Omega}^{-\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} d\omega + \int_{\Omega}^{3\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} d\omega \right) \end{aligned}$$

Efectuando uma mudança de variável no primeiro e terceiro integrais, facilmente se verifica que

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\hat{f}(\omega - 2\Omega) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega + 2\Omega) \right) e^{inT\omega} d\omega$$

Então, a função $g \in L^2(\mathbb{R})$ cuja transformada de Fourier é dada por

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega - 2\Omega) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega + 2\Omega), & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases} \quad (7)$$

tem largura de banda Ω e satisfaz

$$g(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{g}(\omega) e^{inT\omega} d\omega = f(nT).$$

Assim, a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{sinc}(\Omega(t - n\pi))$$

representa, neste caso, não a função f , mas sim a função g cuja transformada de Fourier se obtém da de f através de (7). Este efeito (indesejável) é conhecido conhecido por **fenómeno de aliasing**.



Transformada de Fourier Discreta (TFD)

Consideramos agora o caso em que o sinal é discreto no tempo e finito, i.e. é um vector $x = (x(n))_{n=0}^{N-1} = (x(0), \dots, x(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. Dado $x \in \mathbb{C}^N$ chama-se **Transformada de Fourier Discreta** de x , e denota-se por $\mathcal{F}_N x$ ou \hat{x} , o vector de \mathbb{C}^N dado por

$$(\mathcal{F}_N x)(n) = \hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i kn/N}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8)$$

Se designarmos por ω_N a seguinte N -ésima raiz da unidade

$$\omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}, \quad (9)$$

então a TFD de x vem dada por

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega_N^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (10)$$



Dado um sinal $x(n) = (x(0), \dots, x(N-1)) \in \mathbb{C}^N$, chama-se transformada de Fourier discreta inversa (TFDI) desse sinal, e denota-se por $\mathcal{F}_N^{-1}x$ ou \check{x} , o vector de \mathbb{C}^N definido por

$$(\mathcal{F}_N^{-1}x)(n) = \check{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega_n^{kn}, n = 0, \dots, N-1. \quad (11)$$

Teorema (da inversão)

Se aplicarmos a transformada de Fourier discreta inversa à transformada de Fourier discreta de um sinal, recuperamos o sinal original, i.e. tem-se

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) \omega_N^{nk}, n = 0, \dots, N-1.$$

Dem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) \omega_N^{nk} &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{nk} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) \omega_N^{-km} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-m)} \end{aligned}$$

Mas, se $n \neq m$, tem-se

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-m)} = \frac{\omega_N^{N(n-m)} - 1}{\omega_N^{n-m} - 1} = 0,$$

uma vez que $\omega_N^{Nr} = (\omega_N^N)^r = 1^r = 1$.



Por outro lado, quando $n = m$, tem-se

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-m)} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N,$$

o que estabelece o resultado.



Consideremos agora um inteiro arbitrário $m \in \mathbb{Z}$ e vejamos o que acontece quando usamos a fórmula que define a TFD do sinal x , $\hat{x}(m)$, para esse valor de m (e não apenas para $0, 1, \dots, N-1$). Começemos por notar que $m \in \mathbb{Z}$ pode ser sempre escrito na forma $m = n + jN$, com $j \in \mathbb{Z}$ e $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Vem, então,

$$\begin{aligned}\hat{x}(m) = \hat{x}(n + jN) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega_N^{-k(n+jN)} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega_N^{-kn} (\omega_N^N)^j \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega_N^{-kn} = \hat{x}(n).\end{aligned}$$

Isto que mostra que se aplicarmos a fórmula da TFD para qualquer inteiro obtemos uma sequência que satisfaz $\hat{x}(n + jN) = \hat{x}(n)$, isto é, obtemos uma sequência que é periódica de período N .

De modo análogo, podemos usar a fórmula da TFDI de um sinal para qualquer inteiro em \mathbb{Z} , sendo o resultado uma sequência periódica de período N .

Além disso, facilmente se verifica que a fórmula de inversão aplicada à sequência periódica obtida pela TFD define uma sequência periódica de período N que é a extensão periódica de período N do sinal original $x = (x(0), \dots, x(N-1))$, i.e., é tal que

$$x(n + jN) = x(n), n = 0, \dots, N-1, j \in \mathbb{Z}.$$

Nota: No que se segue, passamos a identificar sempre os sinais finitos de tamanho N , $x = (x(0), \dots, x(N-1))$ com as suas extensões periódicas de período N , i.e. com os sinais $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que $x(n + jN) = x(n), j \in \mathbb{Z}$.²⁰, usando o mesmo símbolo para os representar.

²⁰Se preferirmos, podemos escrever, em alternativa, $x(m) = x(m \bmod N)$

Isto significa que tanto podemos ver a TFD (e a TFDI) como uma aplicação de \mathbb{C}^N em \mathbb{C}^N ou como uma aplicação de $\ell(\mathbb{Z}_N)$ em $\ell(\mathbb{Z}_N)$, onde $\ell(\mathbb{Z}_N)$ designa o conjunto dos sinais (discretos) periódicos de período N . Sendo as sequências $x(n)$ e $\hat{x}(n)$ periódicas de período N , os domínios das somas (8) e (11) que definem a TFD e TFDI, respectivamente, podem ser trasladados arbitrariamente. Em particular, se N for ímpar, i.e. $N = 2M + 1$, podemos considerar

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=-M}^M x(k) \omega_N^{-km}, \quad x(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) \omega_N^{km}.$$

A TFD (vista como uma aplicação de \mathbb{C}^N em \mathbb{C}^N) pode ser definida usando a seguinte matriz quadrada de ordem N (a que chamamos **matriz da DFT de ordem N**),

$$M_N = (m_{kn}), \quad m_{kn} = \omega_N^{kn}; \quad k, n = 0, \dots, N-1,$$

i.e.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

É imediato reconhecer (basta atender à fórmula que define a transformada, recordar como se efectua o produto de matrizes e usar o facto de que $\omega_N^{-kn} = \overline{\omega_N^{kn}}$) que

$$\mathcal{F}_N x = \hat{x} = \overline{M_N} x.$$

Propriedades da TFD

Seja $\mathcal{F}_N : \ell(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_N)$. Então \mathcal{F}_N goza das seguintes propriedades, cuja demonstração é deixada como exercício.

- ① \mathcal{F}_N é linear, i.e. $\mathcal{F}_N(ax + by) = a\mathcal{F}_N x + b\mathcal{F}_N y$
- ② Se $x \in \ell(\mathbb{Z}_N)$ e $y \in \ell(\mathbb{Z}_N)$ é tal que $y(n) = x(n + k)$, então

$$\hat{y}(n) = \omega_N^{kn} \hat{x}(n).$$

- ③ Dados $x, y \in \ell(\mathbb{Z}_N)$, chama-se **produto de convolução (circular)** desses sinais, e denota-se por $x * y$, a sequência (periódica de período N) definida por

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n - k).$$

Tem-se o seguinte resultado:

$$[\mathcal{F}_N(x * y)](n) = \hat{x}(n)\hat{y}(n)$$

Propriedades da TFD (cont.)

- 4 Têm-se as seguintes fórmulas (*Plancherel-Parseval*):

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\overline{y(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)}$$

e

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{x}(n)|^2.$$

- 5 Se x é real, então

$$\hat{x}(N - k) = \overline{\hat{x}(k)}.$$

Em particular, se N é par, precisamos apenas de calcular $\hat{x}(0), \dots, \hat{x}(N/2)$.



Suponhamos que $f \in L^2[0, T]$ e que conhecemos os seus valores $x(n) := f(t_n)$ nos N pontos igualmente espaçados

$$t_n := n \frac{T}{N}; n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (12)$$

e que pretendemos usar esta informação para aproximar os coeficientes de Fourier \hat{f}_n de f . Por outras palavras, pretendemos calcular

$$\hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt. \quad (13)$$

Se aproximarmos o integral em (13) por uma soma de Riemann baseada nos pontos t_k , obtemos

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &\approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-\frac{2\pi i n t_k}{T}} \times \frac{T}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i n k / N}. \end{aligned} \quad (14)$$



A fórmula anterior mostra que o n -ésimo coeficiente de Fourier de f pode ser aproximado por

$$\frac{1}{N} \hat{x}(n),$$

onde $(\hat{x}(k))_{k=0}^{N-1}$ é a transformada de Fourier discreta (em N pontos) do vector $(x(n))_{n=0}^{N-1} = (f(n\frac{T}{N}))_{n=0}^{N-1}$.

Nota: A aproximação descrita pela fórmula anterior tem de ser interpretada cuidadosamente.

Note que o lado direito da fórmula (14) tem período N na variável n e que o mesmo não se passa com a sequência dos coeficientes de Fourier de f , (\hat{f}_n) (como sabemos, $\hat{f}_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$). A aproximação (14) é geralmente usada apenas para estimar os coeficientes \hat{f}_n para $|n| \ll N$, e.g. para $|n| \leq N/8$; para uma justificação desta regra empírica, veja e.g. J.S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, CRC Press (1996).



The Fast Fourier Transform – the most valuable algorithm of our lifetime.

Strang, 1993

O cálculo da TFD em N pontos, através do uso da fórmula (15) (ou usando a matriz M_T) requer $(N - 1)^2$ multiplicações e $N(N - 1)$ adições, i.e. envolve um número de operações da ordem $\mathcal{O}(N^2)$. Para N grande, tal cálculo envolve, portanto, um grande esforço computacional.

Em 1965, Cooley e Tukey ²¹ propuseram um algoritmo para calcular a TFD que reduz o número de operações envolvidas para $\mathcal{O}(N \log_2 N)$, quando $N = 2^r$.

Este algoritmo, que ficou conhecido como *Fast Fourier Transform*, teve um grande impacto e foi responsável pela utilização intensiva de TFD's em quase todas as áreas da computação científica, com particular ênfase em processamento de sinal digital.

De facto, a ideia básica da FFT tinha já sido descoberta por Gauss em 1805, num contexto muito diferente. Contudo, foi com a publicação de Cooley e Tukey que se popularizou o uso da TFD.

²¹Cooley, J.W. e Tukey, J.W., *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. of. Comput., 1965, **19**, 297-301

FFT de decimação no tempo de raiz 2

Têm surgido, entretanto, muitas variantes ao algoritmo básico da FFT proposto inicialmente por Cooley e Tukey.

Vamos descrever aqui, de modo breve, um dos algoritmos mais usados, o chamado *algoritmo de FFT de decimação no tempo de raiz 2*.

No que se segue, assumimos que N é uma potência de 2, i.e. que $N = 2^r$, com r um inteiro positivo.

Recordamos a fórmula de cálculo da TFD em N pontos de um vector

$$x = (x(k))_{k=0}^{N-1},$$

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega_N^{-kn}, \quad (15)$$

onde $\omega_N = e^{2\pi i/N}$. Por simplicidade, introduzimos a seguinte notação:

$$X_n := \hat{x}(n).$$



Podemos partir a fórmula (15) em duas somas, considerando os termos de índice par e de índice ímpar separadamente:

$$\begin{aligned}
 X_n &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)\omega_N^{-2mn} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)\omega_N^{-(2m+1)n} \\
 &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)\omega_N^{-2mn} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)\omega_N^{-2mn}\omega_N^{-n} \\
 &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)\omega_{N/2}^{-mn} + \omega_N^{-n} \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)\omega_{N/2}^{-mn},
 \end{aligned}$$

uma vez que $\omega_N^2 = \left(e^{\frac{2\pi i}{N}}\right)^2 = \left(e^{\frac{4\pi i}{N}}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{N/2}}\right) = \omega_{N/2}$.



Podemos, então, escrever

$$X_n = X_n^0 + \omega_N^{-n} X_n^1; n = 0, \dots, N - 1$$

onde, para $j = 0, 1$,

$$X_n^j = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m + j)(\omega_{N/2})^{-mn}, \quad (16)$$

i.e. X^0 e X^1 são as TFD's em $N/2$ pontos dos sinais (de comprimento $N/2$) formados pelas componentes de índice par e ímpar, respectivamente, do sinal original.

Embora o índice n se estenda de $n = 0$ até $n = N - 1$, uma vez que as seqüências X^0 e X^1 são periódicas de período $N/2$ e que $\omega_N^{-(n+N/2)} = \omega_N^{-n} \omega_N^{-N/2} = \omega_N^{-n} e^{(2\pi i) \times (-N/2)} = \omega_N^{-n} e^{-i\pi} = -\omega_N^{-n}$ podemos escrever

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X_n^0 + \omega_N^{-n} X_n^1 \\ X_{n+N/2} &= X_n^0 - \omega_N^{-n} X_n^1 \end{aligned} \right\}; n = 0, \dots, N/2 - 1, \quad (17)$$



A TFD $(X_n)_{n=0}^{N-1}$ escrita em termos das fórmulas (17)-(16) pode ser visualizada como

$$\begin{array}{r}
 X_n^0 \longrightarrow X_n^0 + \omega_N^{-n} X_n^1 \\
 \quad \quad \quad \times \\
 X_n^1 \longrightarrow X_n^0 - \omega_N^{-n} X_n^1
 \end{array} \tag{18}$$

onde $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$. Este diagrama é conhecido como uma *borboleta*.

A borboleta (18) descreve a construção de uma DFT em \mathbb{Z}_N em termos de duas DTF's em $\mathbb{Z}_{N/2}$, X^0 e X^1 . Do mesmo modo, X^0 e X^1 podem ser construídas em termos de um par de transformadas em $\mathbb{Z}_{N/4}$. Por exemplo,

$$X_n^0 = X_n^{00} + \omega_{N/2}^n X_n^{01}$$

e

$$X_{n+N/4}^0 = X_n^{00} - \omega_{N/2}^n X_n^{01},$$

para $n = 0, 1, \dots, N/4 - 1$, onde X^{00} é a TFD de $(x(0), x(4), \dots, x(N-4))$ e X^{01} é a TFD de $(x(2), x(6), \dots, x(N-2))$. Como $N = 2^r$, este processo pode repetir-se e, após $k = \log_2 N - 1$ passos, alcançamos um ponto em que precisamos de calcular $N/2$ TFD's em 2 pontos. Estas transformadas em 2 pontos consistem simplesmente na soma e subtração de dois números.

Computacionalmente, é conveniente calcular as transformadas em 2 pontos primeiro, depois as transformadas em 4 pontos, etc. Uma análise cuidadosa (e maçadora!) do número de operações envolvidas neste processo mostra que ele é da ordem de $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.



Tabela de “Transformadas” de Fourier

Nome	Domínio de f	Transformada $F = \hat{f}$ (e Inversa)	Domínio de \hat{f}
TF	\mathbb{R}	$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$	\mathbb{R}
SF	\mathbb{T}_T $([0, T])$	$\hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-2\pi i n t/T} dt$ $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{2\pi i n t/T}$	\mathbb{Z}
TFTD	\mathbb{Z}	$\hat{f}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)e^{-in\omega}$ $f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\omega)e^{int\omega} d\omega$	$\mathbb{T}_{2\pi}$ $([0, 2\pi])$
TFD	\mathbb{Z}_N $(\{0, \dots, N-1\})$	$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k n/N}$ $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n e^{2\pi i k n/N}$	\mathbb{Z}_N $(\{0, \dots, N-1\})$



Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, a sua transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

dá-nos o chamado **espectro** desse sinal, sendo ω a variável que representa a **frequência** (angular).

Note-se que, *formalmente*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \langle f, e_{\omega} \rangle$$

onde

$$e_{\omega}(t) := e^{i\omega t}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$$

Energia do sinal é preservada (a menos de uma constante):

$$E(f) = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} E(\hat{f})$$

Sinal pode ser “recuperado” sabido o seu espectro:

$$f(t) = (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(t)$$

$$\hat{f}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t)$$

Representação no tempo / Representação na frequência

Função janela

$$f \longrightarrow Rf(t, \omega)$$

Ao conjunto

$$\{(t, \omega) : t, \omega \in \mathbb{R}\}$$

chamamos **plano tempo-frequência**.

Função Janela

Seja $g \in L^2(\mathbb{R})$.

- Se $tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dizemos que g é uma **janela no tempo**.
- Se $\omega\hat{g}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, dizemos que g é uma **janela na frequência**.
- Se g for uma janela no tempo e uma janela na frequência, dizemos apenas que g é uma **função janela**.

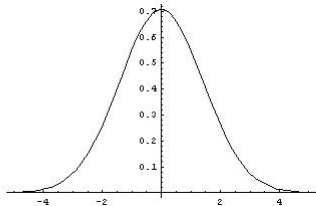
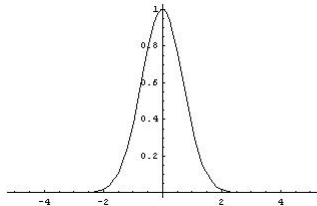


Se g é uma função janela, então:

- $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$
- g é contínua e g' existe (q.s.) e é uma função de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemplo

$$G_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0$$



Centro e raio de uma janela

Seja g uma função janela. Define-se:

- Centro de g :

$$\mu_g = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt$$

- Raio de g :

$$\sigma_g := \frac{1}{\|g\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_g)^2 |g(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

- Centro e raio da função \hat{g} são definidos de modo análogo:

$$\mu_{\hat{g}} := \frac{1}{\|\hat{g}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\sigma_{\hat{g}} := \frac{1}{\|\hat{g}\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mu_{\hat{g}})^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

- O centro μ_g é o valor médio da distribuição com função densidade de probabilidade $|g(t)|^2 / \|g\|^2$ (medida de localização de g).
- O raio σ_g é o desvio padrão dessa mesma distribuição (medida de dispersão de g em torno do seu centro).
- O centro e raio de \hat{g} têm o mesmo significado para \hat{g} .

Dada uma função janela g , considere-se o funcional linear $\Gamma_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\Gamma_g(f) = \langle f, g \rangle, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (19)$$

Γ_g dá uma “certa informação” acerca de f .²²

²²De certo modo, a grandeza de $\Gamma_g(f) = \langle f, g \rangle$ dá-nos uma medida da semelhança entre f e g .

Temos, então

$$\begin{aligned}\Gamma_g(f) &= \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \\ &\approx \int_{\mu_g - \sigma_g}^{\mu_g + \sigma_g} f(t) \overline{g(t)} dt.\end{aligned}$$

Mas, atendendo à fórmula de Parseval,

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_{\hat{g}} - \sigma_{\hat{g}}}^{\mu_{\hat{g}} + \sigma_{\hat{g}}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.\end{aligned}$$

Assim, a região rectangular

$$R = [\mu_g - \sigma_g, \mu_g + \sigma_g] \times [\mu_{\hat{g}} - \sigma_{\hat{g}}, \mu_{\hat{g}} + \sigma_{\hat{g}}] \quad (20)$$

é a região do plano tempo-frequência onde $\Gamma_g(f)$ dá informação significativa acerca de f e \hat{f} . A região (20) é chamada **janela tempo-frequência** ou **diagrama de Heisenberg** de g .

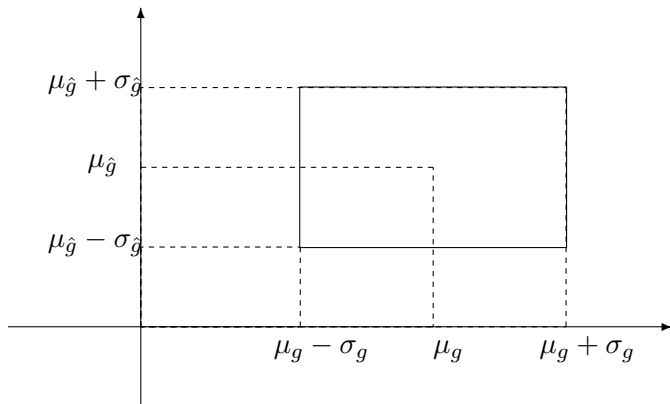


Figura: Diagrama de Heisenberg

Se g é uma função janela, então dizemos que g está localizada em torno do ponto $(\mu_g, \mu_{\hat{g}})$ do plano tempo-frequência com *incerteza* dada por

$$\gamma(g) := \sigma_g \sigma_{\hat{g}} \quad (21)$$

Pelo Princípio de incerteza de Heisenberg, tem-se:

$$\sigma_g \sigma_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$$

(i.e. a área da janela é limitada inferiormente). Também sabemos que o limite inferior é atingido (apenas) por Gaussianas.



Transformada de Fourier com janela

Seja g uma função janela. Chama-se **transformada de Fourier com janela** (associada à janela g) (ou transformada de Fourier em tempo curto) de $f \in L^2(\mathbb{R})$ à função

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t - \tau)} e^{-i\omega t} dt, \quad \tau, \omega \in \mathbb{R}$$

Nota Para cada τ , temos

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \omega) = \{\mathcal{F}(fT_\tau \bar{g})\}(\omega)$$

Temos também

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \omega) = \langle f, g_{\tau, \omega} \rangle$$

onde

$$g_{\tau, \omega}(t) = e^{i\omega t} g(t - \tau)$$

ou seja

$$g_{\tau, \omega}(t) = E_\omega T_\tau g$$



- Em geral, g é uma função real, pelo que, na definição, não há necessidade de considerar o conjugado de $g(t - \tau)$.
- Quando se usa uma Gaussiana para função janela na transformada de Fourier com janela, esta toma o nome de transformada de Gabor.
- Ao operador que, a cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, associa a função $\{\mathcal{F}_g f\}$ chamamos operador de transformada de Fourier com janela (associado à janela g).



Se g for uma função janela, com centro μ_g e raio σ_g , e tal que \hat{g} tem centro $\mu_{\hat{g}}$ e raio $\sigma_{\hat{g}}$, então facilmente se verifica que, para $\tau, \omega \in \mathbb{R}$, a função

$$g_{\tau, \omega} = E_{\omega} T_{\tau} g$$

é ainda uma função janela e tem-se:

- $\mu_{g_{\tau, \omega}} = \mu_g + \tau$
- $\sigma_{g_{\tau, \omega}} = \sigma_g$
- $\mu_{\widehat{g_{\tau, \omega}}} = \mu_{\hat{g}} + \omega$
- $\sigma_{\widehat{g_{\tau, \omega}}} = \sigma_{\hat{g}}$



Como

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \omega) = \langle f, g_{\tau; \omega} \rangle$$

podemos concluir que $\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \omega)$ nos dá informação sobre f e \hat{f} essencialmente na seguinte região do plano tempo-frequência

$$[\mu_g + \tau - \sigma_g, \mu_g + \tau + \sigma_g] \times [\mu_{\hat{g}} + \omega - \sigma_{\hat{g}}, \mu_{\hat{g}} + \omega + \sigma_{\hat{g}}].$$

Em particular, se escolhermos g de modo que $\mu_g = \mu_{\hat{g}} = 0$,²³ a transformada de Fourier com essa janela g no ponto (τ, ω) fornece informação na janela

$$J_{g_{\tau, \omega}} = [\tau - \sigma_g, \tau + \sigma_g] \times [\omega - \sigma_{\hat{g}}, \omega + \sigma_{\hat{g}}]$$

isto é, próximo do instante τ e da frequência ω .

²³O que pode ser sempre conseguido, através de uma translação e modulação convenientes.

Como já referimos, a área das janelas é limitada inferiormente, pelo princípio de incerteza de Heisenberg, pelo que localizações precisas no tempo e frequência são mutuamente exclusivas.

Notemos também, que uma vez escolhida uma função janela g , o tamanho das janelas $J_{g_{\tau,\omega}}$ (isto é, a sua largura e altura) não varia com o seu centro de localização, isto é, é sempre o mesmo para quaisquer valores de τ e de ω .

Assim, a resolução tempo-frequência é fixa em todo o plano.



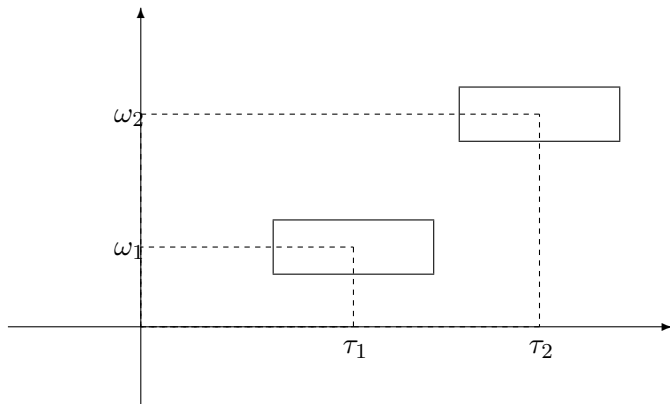
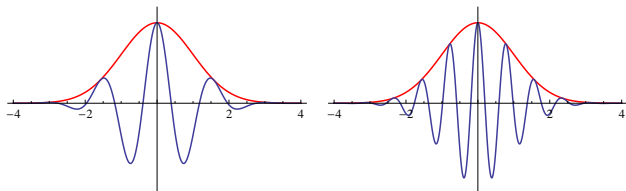


Figura: Janelas tempo-frequência

Transformada de Fourier com janela



Tamanho das janelas é sempre o mesmo!

Se tivermos um sinal com componentes quase estacionárias e pequenas variações bruscas, então para o primeiro tipo de componentes seria adequado o uso de janelas largas (fraca resolução no tempo, boa resolução na frequência), enquanto para analisar convenientemente as variações bruscas seriam necessárias janela estreitas (boa localização no tempo e consequente fraca resolução na frequência).

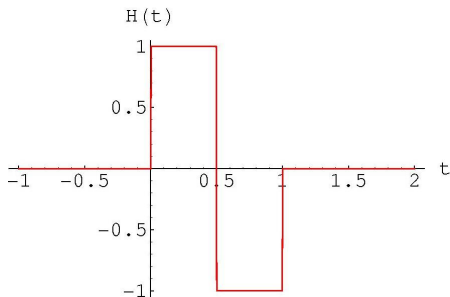
Vemos, assim, que a transformada de Fourier com janela não é apropriada para o estudo deste tipo de sinais.

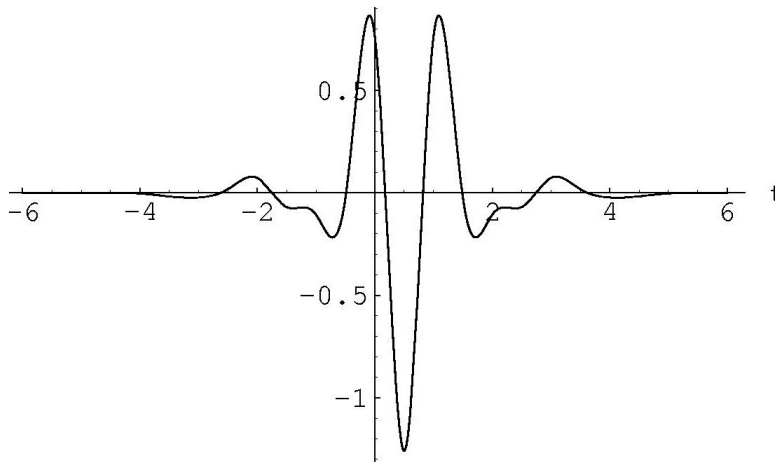
Ôndula ?

ôndula \equiv onda pequena

(“ondelette” em francês; no início da década de 1980 \rightarrow Jean Morlet)

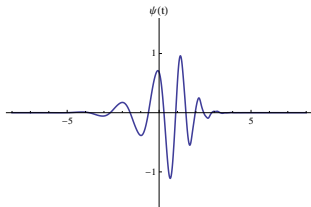
Exemplo Ôndula de Haar (1910!)



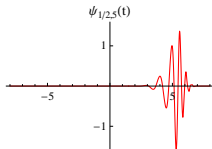
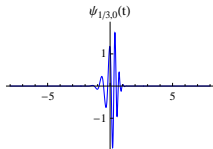
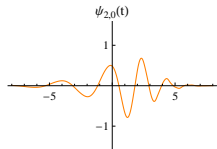
Exemplo Ôndula de Daubechies 4ψ 

Ideia da Transformada (Contínua) com Ôndula

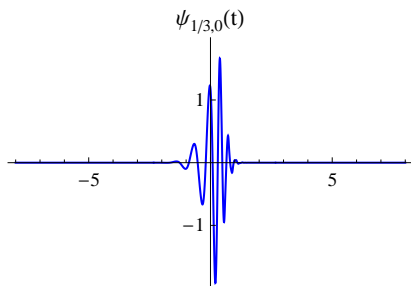
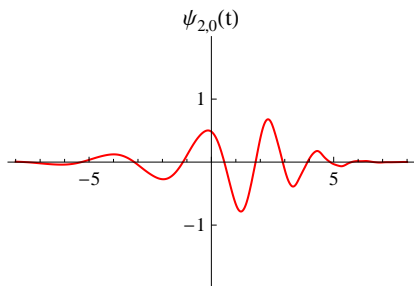
- Escolher uma janela ψ que é já oscilatória (\equiv frequência básica)



- Dilatar/comprimir (\equiv mudança escala \equiv mudança frequência) e transladar ψ : $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$



- Calcular $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$



As janelas *alargam* para valores de $|a|$ grandes (\equiv baixas frequências) e *estreitam* para valores pequenos de $|a|$ (\equiv frequências altas).

Definição de ôndula (CA)

Definição Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ diz-se uma **ôndula básica** ou **ôndula analisadora** se satisfizer a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (22)$$

A condição (22) é chamada **condição de admissibilidade** da ôndula ψ .
Ao valor da constante

$$C_{\psi} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (23)$$

chamamos **constante de admissibilidade** para a ôndula ψ .

Significado da condição de admissibilidade?

- Se $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, então $\hat{\psi}$ é uma função contínua e a condição de admissibilidade implica, nesse caso, que $\hat{\psi}(0) = 0$, ou seja, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (24)$$

- Se ψ satisfizer uma condição de decaimento um pouco mais forte do que pertencer a $L^1(\mathbb{R})$, por exemplo, se ψ for tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^\alpha |\psi(t)| dt < \infty, \quad \text{para um certo } \alpha > 0, \quad (25)$$

pode mostrar-se que a condição (24) implica que se verifique a condição de admissibilidade.

- Na prática**, imporemos a ψ condições de decaimento bastante mais exigentes do que a condição (25). Nesse caso, a condição de admissibilidade é equivalente à condição (24). Esta condição significa que ψ deve, de algum modo, oscilar, isto é, comportar-se como uma *onda*. Como exigimos a essa *onda* que decaia rapidamente para zero, chamamos-lhe *ôndula* (no sentido de *onda pequena*).

Transformada Contínua com Ôndula

Dada uma ôndula analisadora $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, consideremos a família de funções $\psi_{a,b}$ definidas do seguinte modo:

$$\psi_{a,b} := T_b D_a \psi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad (26)$$

ou seja,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (27)$$

Definição Dada uma ôndula analisadora $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, chama-se transformada contínua com ôndula ψ de f à função bi-dimensional definida por:

$$\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) := \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)} dt$$

Observações

- 1 Em tudo quanto se segue, usaremos a notação \mathbb{R}^* para designar o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 2 Ao número complexo $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$, para um valor fixo $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, chamaremos *coeficiente de ôndula* de f a respeito da ôndula ψ , no ponto (a, b) .
- 3 O operador integral \mathcal{W}_ψ definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\psi : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} \\ f &\mapsto \mathcal{W}_\psi f,\end{aligned}\tag{28}$$

é chamado *operador de transformada contínua com ôndula* associado à ôndula analisadora ψ .

O seguinte teorema enuncia algumas propriedades do operador \mathcal{W}_ψ .

Teorema

O operador \mathcal{W}_ψ é um operador linear limitado de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ que satisfaz as seguintes propriedades de invariância:

- ① $\{\mathcal{W}_\psi T_\tau f\}(a, b) = \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b - \tau)$ (invariância por translação);
- ② $\{\mathcal{W}_\psi D_c f\}(a, b) = \{\mathcal{W}_\psi f\}(a/c, b/c)$ (invariância por dilatação).

Dem: A linearidade de \mathcal{W}_ψ é uma consequência imediata do facto de \mathcal{W}_ψ ser um operador integral.

Temos, como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| = |\langle f, \psi_{a,b} \rangle| \leq \|f\| \|\psi_{a,b}\| = \|f\| \|\psi\|,$$

donde se conclui de imediato que

$$\|\mathcal{W}_\psi f\|_\infty \leq C \|f\|, \quad (29)$$

onde $C = \|\psi\|$.

As propriedades de invariância por translação e dilatação demonstram-se facilmente usando a definição e fazendo simples mudanças de variável no

Localização tempo-frequência da TCO

Suponhamos que a ôndula analisadora ψ é uma função janela, com centro μ_ψ e raio σ_ψ , e tendo $\mu_{\widehat{\psi}}$ e $\sigma_{\widehat{\psi}}$, respectivamente, como centro e raio da sua transformada de Fourier $\widehat{\psi}$. Sendo

$$\psi_{a,b} := T_b D_a \psi,$$

facilmente se verifica que

$$\mu_{\psi_{a,b}} = b + a\mu_\psi, \quad \sigma_{\psi_{a,b}} = |a| \sigma_\psi. \quad (30)$$

Além disso, como

$$\widehat{\psi_{a,b}} = \widehat{T_b D_a \psi} = E_{-b} D_{1/a} \widehat{\psi},$$

tem-se também

$$\mu_{\widehat{\psi_{a,b}}} = \frac{1}{a} \mu_{\widehat{\psi}}, \quad \sigma_{\widehat{\psi_{a,b}}} = \frac{1}{|a|} \sigma_{\widehat{\psi}}. \quad (31)$$

Localização tempo-frequência da TCO

Vemos, assim, que a transformada contínua com ôndula ψ , $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$, fornece informação local sobre f e \hat{f} na seguinte região do plano:

$$[b + a\mu_\psi - |a|\sigma_\psi, b + a\mu_\psi + |a|\sigma_\psi] \times \left[\frac{1}{a}\mu_{\hat{\psi}} - \frac{1}{|a|}\sigma_{\hat{\psi}}, \frac{1}{a}\mu_{\hat{\psi}} + \frac{1}{|a|}\sigma_{\hat{\psi}} \right].$$

Em particular, se escolhermos ψ de modo que $\mu_\psi = 0$ e $\mu_{\hat{\psi}} = 1$, então $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ dá-nos informação sobre f e \hat{f} na seguinte janela:

$$J_{a,b} = [b - |a|\sigma_\psi, b + |a|\sigma_\psi] \times \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{|a|}\sigma_{\hat{\psi}}, \frac{1}{a} + \frac{1}{|a|}\sigma_{\hat{\psi}} \right], \quad (32)$$

isto é, informação sobre f próximo do instante b (com “precisão” $|a|\sigma_\psi$) e informação sobre \hat{f} próximo da frequência $\frac{1}{a}$ (com precisão $\frac{1}{|a|}\sigma_{\hat{\psi}}$).



Localização tempo-frequência da TCO

Assim, temos:

- Pequenos valores de $|a|$ correspondem a uma informação numa escala fina àcerca de f e numa escala grosseira àcerca de \hat{f} .
- Grandes valores de $|a|$ correspondem a uma informação numa escala grosseira àcerca de f e numa escala fina sobre \hat{f} .
- As janelas *alargam* para valores de $|a|$ grandes (o que corresponde a baixas frequências $|\omega| = \frac{1}{|a|}$) e *estreitam* para valores pequenos de $|a|$ (frequências altas).

Resumindo, podemos dizer que a transformada contínua com ôndula fornece uma descrição tempo-escala (ou tempo-frequência) de um sinal, com janelas cuja largura se ajusta à escala (e à frequência).

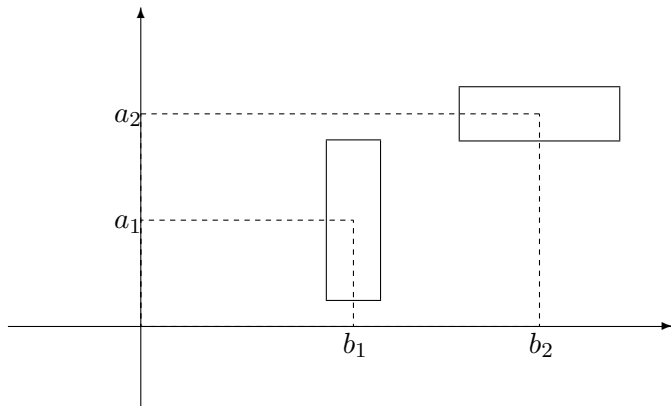


Nota

A área das janelas é constante e dada por

$$2|a| \sigma_\psi \cdot 2 \frac{1}{|a|} \sigma_{\hat{\psi}} = 4 \sigma_\psi \sigma_{\hat{\psi}}$$

a qual, pelo princípio de incerteza de Heisenberg, nunca poderá ser inferior a 2.



Notas

- 1 A frequência aparece aqui como o inverso da escala, isto é, $\omega = \frac{1}{a}$, porque supusemos $\mu_{\hat{\psi}} = 1$. Se $\mu_{\hat{\psi}} \neq 1$, a relação entre *escala* e *frequência* não é tão clara. Em particular, se ψ for uma função real, então ter-se-á $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$, ou seja, $|\hat{\psi}|$ será uma função par, pelo que teremos $\mu_{\hat{\psi}} = 0$. Neste caso, no entanto, será mais natural tomar como medidas de localização o centro e o raio da função $\hat{\psi}_+ := \hat{\psi}\chi_{[0,+\infty)}$; veja, e.g. A. K. Louis and P. Maaß and A. Rieder, *Wavelets: Theory and Applications*, John Wiley and Sons (1998).
- 2 Convém salientar que existem outras formas (todas elas com “sentido”) de relacionar escalas com frequências; veja, e.g. J. M. Lilly and S. C. Olhede, Higher-order properties of analytic wavelets, *IEEE T. Signal Proces.* (2009), **57**, 146-160

Vamos ver agora que, se ψ satisfaz a condição de admissibilidade, então é possível “inverter” a transformada $\mathcal{W}_\psi f$.

Relembremos (ver aulas práticas) que, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, definimos a **involução** de f como $\tilde{f}(t) := f(-t)$ e que se tem

$$\widehat{\tilde{f}}(\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}.$$

Seja $\psi_a = D_a \psi$ e seja $\widetilde{\psi}_a$ a involução de ψ_a . Então, podemos facilmente verificar as seguintes afirmações.

- $$\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) = \left(f * \widetilde{\psi}_a \right)(b).$$

- $$\widehat{\widetilde{\psi}_a}(\omega) = \overline{\widehat{\psi}_a(\omega)} = |a|^{1/2} \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}$$

- $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \implies f * \widetilde{\psi}_a \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\left(\widehat{f * \widetilde{\psi}_a} \right)(\omega) = \widehat{f}(\omega) |a|^{1/2} \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}.$$



Teorema Seja $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ uma ôndula básica com constante de admissibilidade C_ψ . Então, dada qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Dem: Temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|^2 db \right\} \frac{da}{a^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |(f * \widetilde{\psi}_a)(b)|^2 db \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |(\widehat{f * \widetilde{\psi}_a})(\omega)|^2 d\omega \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 |a| d\omega \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\omega)|^2}{|a|} da \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{|u|} du \right\} d\omega \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} &= C_{\psi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= C_{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Na demonstração acima, a alteração da ordem de integração é permitida pela aplicação do teorema de Fubini-Tonelli, uma vez que a função integranda é não negativa.

A fórmula acima pode ser interpretada como uma fórmula de conservação (a menos do produto por uma constante) da energia do sinal depois de transformado pela transformada contínua com ôndula. Mais precisamente, a fórmula mostra que o operador $\mathbf{W}_{\psi} := \frac{1}{\sqrt{C_{\psi}}} \mathcal{W}_{\psi}$, isto é, o operador definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\psi} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{dad b}{a^2}\right) \\ f(t) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{C_{\psi}}} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \end{aligned} \tag{33}$$

é uma isometria.

Teorema Nas condições do teorema anterior, tem-se que, para quaisquer funções $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \overline{\{\mathcal{W}_{\psi} g\}(a, b)} db \frac{da}{a^2} = C_{\psi} \langle f, g \rangle. \quad (34)$$

Dem: Análoga à do teorema anterior; ao cuidado dos alunos.

Notas

- 1 A fórmula (34) costuma escrever-se como

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle \frac{dad b}{a^2}, \quad (35)$$

ou simplesmente como

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, \quad (36)$$

devendo haver o cuidado de interpretar (36) com o significado (34).

- 2 Pode ainda provar-se que se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então a fórmula de inversão (36) é válida em todo o ponto $t \in \mathbb{R}$.

Otras variantes da fórmula de inversão (34) são possíveis. Em particular, se exigirmos a ψ que satisfaça a seguinte condição de admissibilidade, **mais forte** do que a condição (22),

$$\int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (37)$$

então é possível recuperar f dos valores $\{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b)$ com $b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, ou seja, temos

$$f(t) = \frac{2}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right\} \frac{da}{a^2}, \quad (38)$$

onde C_{ψ} é a constante dada por (22); veja. e.g. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.



Notas

- Se ψ for uma função real, a igualdade dos dois integrais em (37) é automaticamente satisfeita, pelo que, nesse caso, exigir a condição de admissibilidade mais forte (37) resume-se a exigir que

$$\int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty. \quad (39)$$

- A fórmula (38) pode ser interpretada como:
 - uma fórmula de *reconstrução* de f sabida a sua transformada contínua $\{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b)$ para todos os valores de $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$;
 - uma fórmula de *decomposição* de f como “sobreposição” das funções $\psi_{a,b}$, sendo os “coeficientes” dessa decomposição os valores da transformada contínua.

Aspectos Computacionais

Na prática, se dispusermos apenas de uma amostra $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$ obtida por amostragem uniforme da função f , $x_n = f(n\delta t)$; $n = 0, \dots, N - 1$, o integral que define a TCO tem de ser discretizado e é, então, substituído por uma simples soma. Por razões de eficiência computacional, é conveniente calcular a transformada apenas para N valores do parâmetro de translação b , $b = k\delta t$; $k = 0, \dots, N - 1$. A transformada é calculada também apenas para um número finito de escalas $a = a_j$; $j = 0, 1, \dots, M - 1$. Assim, na prática, a TCO do sinal x é simplesmente uma matriz $M \times N$, $\mathbf{W}_x = (w_{jk})$ onde

$$w_{jk} = \frac{\delta t}{\sqrt{a_j}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \bar{\psi} \left((n - k) \frac{\delta t}{a_j} \right)$$



Escalas

As escalas são geralmente escolhidas como potências fraccionárias de 2:

$$a_j = \alpha 2^{\frac{j}{n_V}}; j = 0, 1, \dots, n_V \times n_O, \quad (40)$$

onde n_O denota o número de *oitavas* (i.e. potências de 2) e n_V o número de *vozes* calculadas por oitava (i.e., $M = n_V \times n_O + 1$) e onde α é a menor escala usada.

No Mathematica, por defeito, $n_O = \lfloor \log_2(\frac{N}{2}) \rfloor$ e $n_V = 4$. O valor de α depende da ôndula usada.

Operadores de projecção ortogonal

Seja $((V_j), \phi)$ uma AMR. Como $V_j \subset V_{j+1}$ e $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$, tem-se que, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists v_J \in V_J : \|f - v_J\| < \epsilon.$$

Seja P_j o operador de projecção ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ em V_j , i.e.

$$P_j f = \sum_k \langle f, \phi_{j;k} \rangle \phi_{j;k}$$

(uma vez que $\{\phi_{j;k} : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base o.n. de V_j) e seja

$$v_j = P_j f.$$

Seja Q_j o operador de projecção ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ em W_j , i.e.

$$Q_j f = \sum_k \langle f, \psi_{j;k} \rangle \psi_{j;k}$$

e seja

$$w_j = Q_j f.$$



Podem provar-se os seguintes resultados sobre os operadores P_j e Q_j :

- $\|f - v_j\| \leq \|f - v\|, \forall v \in V_j$
- $\|f - w_j\| \leq \|f - w\|, \forall w \in W_j$
- $Q_j = P_{j+1} - P_j$
- $P_j P_{j+1} = P_j$
- $Q_j P_{j+1} = Q_j$

Então, tem-se

$$\begin{aligned}
 v_J &= P_J f = P_{J-1} f + (P_J - P_{J-1}) f \\
 &= v_{J-1} + w_{J-1} \\
 &= v_{J-2} + w_{J-2} + w_{J-1} \\
 &= \cdots = v_{J-M} + w_{J-M} + \cdots + w_{J-1}, \quad M > 0,
 \end{aligned}$$



Por outro lado, desde que M seja escolhido suficientemente grande, tem-se

$$\|v_{J-M}\| < \epsilon$$

(uma vez que $\bigcap V_j = \{0\}$).

Assim, toda a função de $L^2(\mathbb{R})$ pode ser representada razoavelmente como uma soma finita de funções dos subespaços mutuamente ortogonais W_j , com um resto v_{J-M} interpretado como uma versão grosseira de f :

$$P_J f = v_J = v_{j-M} + w_{J-M} + \dots w_{J-1}$$

A decomposição anterior indica-nos quais os sucessivos pormenores que se devem juntar a essa versão *esborratada*, v_{J-M} , de f para se chegar a uma aproximação *fina* v_J dessa função.



Supondo conhecida a aproximação $v_J = P_J f \in V_J$ para f , como obter a decomposição anterior ,i.e. como obter v_{J-M} e w_{J-M}, \dots, w_{J-1} ?

Sejam

$$\mathbf{a}^j = (a_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad a_k^j := \langle f, \phi_{j;k} \rangle$$

e

$$\mathbf{d}^j = (d_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad d_k^j := \langle f, \psi_{j;k} \rangle.$$

O que se pretende é obter a decomposição

$$v_J = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{J-M} \phi_{J-M;k} + \sum_{j=J-M}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j;k}, \quad (41)$$

ou seja, obter

$$\mathbf{a}^{J-M} \text{ e } \mathbf{d}^j; j = J - M, \dots, J - 1$$

partindo da sequência inicial $\mathbf{a}^J = (a_k^J)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Temos

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{1;n}(t)$$

(equação dupla escala) Então,

$$\begin{aligned} \phi_{j-1;k}(t) &= 2^{(j-1)/2} \phi(2^{j-1}t - k) \\ &= 2^{(j-1)/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{1;n}(2^{j-1}t - k) \\ &= 2^{(j-1)/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n 2^{1/2} \phi(2(2^{j-1}t - k) - n) \\ &= 2^{j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2^j t - (2k + n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{j;2k+n}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \phi_{j;n}(t) \end{aligned}$$

Então, vem

$$\begin{aligned}a_k^{j-1} &= \langle f, \phi_{j-1;k} \rangle \\ &= \langle f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \phi_{j;n} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{n-2k} \langle f, \phi_{j;n} \rangle\end{aligned}$$

i.e.

$$a_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{n-2k} a_n^j$$

(42)



De modo análogo:

$$\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi_{1,n}, \quad g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}$$

$$\psi_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \phi_{j;n},$$

e

$$d_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{n-2k} a_n^j \quad (43)$$

Partindo da sequência $\mathbf{a}^J = (a_n^J)$, as fórmulas (42) e (43) podem ser usadas, recursivamente, para obter as sequências $\mathbf{a}^{J-M}, \mathbf{d}^{J-1}, \dots, \mathbf{d}^{J-M}$, isto é, para obter a decomposição desejada para v_J .

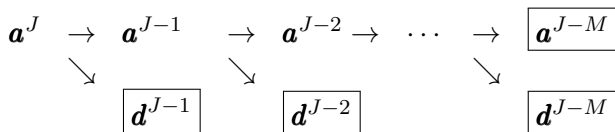


Figura: Esquema de decomposição

A transformada que acabámos de descrever pode ser invertida facilmente. Temos, para cada j ,

$$\begin{aligned} P_j f &= v_j = v_{j-1} + w_{j-1} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{j-1} \phi_{j-1;l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l^{j-1} \psi_{j-1;l} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_k^j &= \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{j-1} \langle \phi_{j-1;l}, \phi_{j,k} \rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l^{j-1} \langle \psi_{j-1;l}, \phi_{j,k} \rangle \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1;l}, \phi_{j,k} \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \phi_{j;n}, \phi_{j,k} \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \langle \phi_{j;n}, \phi_{j,k} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \delta_{n,k} = h_{k-2l}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\langle \psi_{j-1;l}, \phi_{j;k} \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2l} \phi_{j;n}, \phi_{j;k} \right\rangle = g_{k-2l}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} a_k^j &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} a_l^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} d_l^{j-1} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(h_{k-2l} a_l^{j-1} + g_{k-2l} d_l^{j-1} \right) \end{aligned}$$

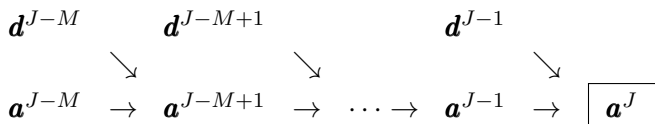


Figura: Esquema de reconstrução

Observações

- Ao implementar os algoritmos, todas as sequências infinitas terão sempre de ser truncadas. Assim, ao aplicar o algoritmo de decomposição, a sequência inicial será uma sequência finita, ou seja, um determinado vector de comprimento N , $(a_0^J, a_1^J, \dots, a_{N-1}^J)$. Também, ou o filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é já finito ou, se estivermos a trabalhar com uma ôndula de suporte não compacto, terá de ser truncado para um determinado vector de comprimento L : $(h_{-m}, h_{-m+1}, \dots, h_{-m+L-1})$.
- Como a sequência inicial tem um comprimento finito, é necessário saber como tratar com os pontos fronteiros. Por exemplo, as fórmulas que dão a_0^{J-1} e $a_{N/2-1}^{J-1}$ ²⁴ são:

$$a_0^{J-1} = \sum_{n=-m}^{-m+L-1} \overline{h_n} a_n^J \quad \text{e} \quad a_{N/2-1}^{J-1} = \sum_{n=-m+N-2}^{n=N+L-m-3} \overline{h_{n-N+2}} a_n^J \quad (44)$$

Assim, torna-se necessário “aumentar” o vector inicial, juntando-lhe m componentes no início e $L - 2 - m$ componentes no final. Os valores dessas componentes podem ser escolhidos de diversas maneiras, correspondendo a diversas *condições de fronteira*.

Condições de fronteira

- Uma possibilidade consiste em considerá-los iguais a zero
- Outra hipótese, é tomá-los iguais aos valores fronteiros, isto é, considerar

$$a_{-m} = \dots = a_{-1} = a_0 \quad \text{e} \quad a_N = \dots = a_{N+L-m-3} = a_{N-1}.$$

- Poderemos também imaginar uma “reflexão” na fronteira, isto é, tomar

$$a_{-i} = a_{i-1} \quad \text{e} \quad a_{N-1+i} = a_{N-i}, \quad i > 0.$$

- Uma escolha muito usual é considerar a extensão periódica do vector, isto é, tomar:

$$a_{i+N} = a_i, \quad \forall i.$$

Complexidade da TRO

- Com escolha apropriada das condições de fronteira, as fórmulas (42) e (43) mostram que no primeiro passo de decomposição são calculados (aproximadamente) $N/2$ coeficientes a_k^{J-1} e $N/2$ coeficientes d_k^{J-1} . O passo de decomposição seguinte é apenas efectuado sobre os coeficientes a_k^{J-1} que representam a parte em V_{J-1} e assim sucessivamente. Assim, à medida que a decomposição prossegue, serão efectuadas cada vez menos operações. Se o comprimento do filtro é L , o número de operações envolvidas é da ordem de

$$L \times \left(N + \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots \right) = 2NL.$$

Assim, o número de operações envolvidas no algoritmo da transformada rápida com ôndula é $O(N)$. Trata-se, portanto, de um algoritmo bastante rápido, à semelhança do que acontece com a Transformada de Fourier Rápida.

- Um problema interessante é saber como determinar os coeficientes a_k^J da função do espaço V_J que aproxima a função dada f , para iniciar o processo de decomposição. Teoricamente, deveríamos escolher a melhor aproximação de f em V_J , isto é, considerar

$$a_k^J = \langle f, \phi_{J;k} \rangle. \quad (45)$$

Na prática, a função $f(t)$ nem sempre é conhecida (sendo, por vezes, apenas conhecida uma amostra dos seus valores) e, além disso, os produtos internos são dispendiosos de calcular. Assim, estes produtos internos são raramente calculados. Frequentemente, dispomos de uma série de valores da função f obtidos em pontos de amostragem igualmente espaçados $k/2^J$.

Em muitas aplicações, considera-se simplesmente

$$a_k^J = f(2^{-J}k). \quad (46)$$



Recorde...

- Dado um sinal digital $x = x(k)$, chama-se **decimação por dois**, e denota-se por $x \downarrow 2$, o sinal obtido de x “retendo” apenas os seus termos de ordem par, i.e.

$$(x \downarrow 2)(k) = x(2k)$$

- Dado um sinal x , chama-se **interpolação por dois** desse sinal, e denota-se por $x \uparrow 2$, o sinal obtido de x inserindo zeros entre cada dois dos seus termos, i.e.

$$(x \uparrow 2)(k) = \begin{cases} x(k/2) & \text{se } k \text{ é par} \\ 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- O símbolo \tilde{x} é usado para representar involução, isto é, conjugação e inversão no tempo, ou seja,

$$\tilde{x}(k) = \overline{x(-k)}.$$

Consideremos então o sinal $\mathbf{a}^j = (a_k^j)$ dos coeficientes da aproximação v_j na base $\phi_{j;k}$ de V_j . A fórmula

$$a_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{n-2k} a_n^j$$

mostra que a sequência \mathbf{a}^{j-1} é obtida de \mathbf{a}^j do seguinte modo:

$$\mathbf{a}^{j-1} = (\tilde{h} * \mathbf{a}^j) \downarrow 2, \quad (47)$$

onde $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é o filtro da função escala ϕ . De modo análogo, uma vez que

$$d_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{n-2k} a_n^j$$

tem-se

$$\mathbf{d}^{j-1} = (\tilde{g} * \mathbf{a}^j) \downarrow 2.$$

Por outro lado, a fórmula que define a reconstrução

$$a_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(h_{k-2l} a_l^{j-1} + g_{k-2l} d_l^{j-1} \right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} a_l^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} d_l^{j-1}$$

pode ser escrita como

$$\mathbf{a}^j = h * (\mathbf{a}^{j-1}) \uparrow 2 + g * (\mathbf{d}^{j-1}) \uparrow 2. \quad (48)$$

Quer dizer:

- Em cada passo do algoritmo de decomposição do sinal original, é feita a filtragem desse sinal com os filtros \tilde{h} e \tilde{g} , fazendo-se a decimação por dois dos sinais obtidos.
- Na fase de reconstrução, é feita interpolação por dois de cada um dos sinais obtidos na decomposição, filtram-se os sinais com os filtros h e g e somam-se os sinais obtidos.

