

IDEIAS SOBRE EQUIVALÊNCIA ESTOCÁSTICA DE ESTUDANTES FUTUROS EDUCADORES E PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO

José António Fernandes
Diana Sofia Jesus

Universidade do Minho

jfernandes@ie.uminho.pt
b6017@iep.uminho.pt

RESUMO: No contexto do aprofundamento da temática da estocástica preconizado nos programas escolares de muitos países, entre os quais se encontra Portugal, neste trabalho estudam-se as ideias sobre equivalência estocástica de estudantes recém-ingressados na universidade no curso do 1º ciclo conducente a cursos do 2º ciclo de formação de futuros educadores e professores do ensino básico. Participaram no estudo 79 estudantes da Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, que foram confrontados com várias situações de equivalência estocástica apresentadas na forma de questionário. As resoluções escritas dos alunos foram analisadas a partir das respostas selecionadas pelos estudantes na parte de escolha múltipla e da codificação dos argumentos por eles apresentados para justificarem a escolha efetuada. Em termos de resultados, em geral, obtiveram-se percentagens elevadas (sempre superiores a 50%) de seleção das respostas corretas nas diferentes situações apresentadas. Contudo, na grande maioria dos casos, a seleção dessas respostas é baseada em argumentos pouco consistentes ou mesmo inválidos, como seja afirmar a equiprobabilidade em experiências compostas a partir da equiprobabilidade em experiências em simples, concluir a equiprobabilidade a partir da enumeração incompleta dos casos favoráveis e/ou possíveis ou repetir no todo ou em parte o próprio enunciado.

Introdução

Atualmente, um mundo cada vez mais influenciado pela ciência e pela tecnologia, em que a mudança é cada vez mais rápida e envolve maior incerteza, implica que os indivíduos compreendam ideias e raciocínios probabilísticos (Munisamy & Doraisamy, 1998) para se poderem integrar e participar nesse mundo de forma esclarecida. Os conceitos de probabilidades surgem associados a diversas áreas, como, por exemplo, no estudo do movimento das partículas na Química, ao nível da Mecânica Quântica na Física, na Estatística ou em situações quotidianas em que temos de tomar decisões tendo em conta a maior ou menor probabilidade de determinados acontecimentos, e que podem ir desde a escolha da profissão a seguir à compra de determinado produto.

O tema de probabilidades faz parte da formação dos alunos no ensino básico, logo desde os primeiros anos, explorando a noção de experiência aleatória, os termos “certo”,

“possível” ou “provável” e os conceitos clássico e frequentista de probabilidade (Ministério da Educação, 2007), e prossegue no ensino secundário com a exploração de novos conteúdos, como a “probabilidade da união”, a “probabilidade conjunta”, a “probabilidade condicionada” e a “independência” (Ministério da Educação, 2002).

As ideias probabilísticas dos alunos, nos diferentes anos de escolaridade, têm sido objeto de estudo por vários autores. Falk, Falk e Levin (1980) conduziram um estudo com crianças dos 4 aos 11 anos de idade, envolvendo três tipos de objetos aleatórios estruturalmente equivalentes (urnas com bolas, roletas e rapas). Nesse estudo, a seleção das respostas corretas aumentou com a idade e a variável “número de elementos da cor recompensada” foi a que melhor explicou essa variação. Em geral, foram também poucos os sujeitos em que se verificou coincidência do padrão de resposta ao longo das várias questões, sendo alguns princípios subjacentes às respostas mesmo irrelevantes, escolhendo-se, por exemplo, o objeto mais próximo, a roleta que se localizava na cor pretendida, o objeto situado do lado esquerdo porque se é esquerdino, o objeto mais bonito e a cor do clube de futebol preferido. Por volta do 7-8 anos, alguns sujeitos escolheram a alternativa com menos elementos da cor recompensada e outros adotaram a diferença entre o número de elementos das duas cores como critério de escolha.

A comparação de probabilidades foi objeto de um estudo levado a cabo por Cañizares e Batanero (1997), com alunos de idades compreendidas entre os 10 e os 14 anos, a quem foi aplicado um questionário contendo diferentes situações com urnas e fichas de diferentes cores, sendo pedido aos alunos que elessem o acontecimento de maior probabilidade, entre dois acontecimentos propostos. As estratégias subjacentes às respostas dos alunos foram variadas, tendo sido classificadas pelas autoras em três grupos: estratégias de uma só variável (comparação do número de casos possíveis, do número de casos favoráveis ou do número de casos não favoráveis), estratégias de duas variáveis (estratégias aditivas, de proporcionalidade e multiplicativas) e outras estratégias (referência à sorte e à possibilidade de obter qualquer dos dois resultados). A alusão à sorte na avaliação de probabilidades pareceu ajustar-se ao “enviesamento de equiprobabilidade” (Lecoutre e Durant, 1988) ou à “estratégia do resultado” (Konold, 1991). Fernandes (1999), num estudo com alunos do 8º e 11º anos, observou estratégias semelhantes para justificar as respostas e, em geral, a percentagem de respostas corretas aumentou com o nível de escolaridade e com o desempenho em matemática.

Em situações com a mesma estrutura estocástica (lançamento simultâneo ou consecutivo de três moedas e de três dados), Fischbein, Nello e Marino (1991) estudaram as respostas e explicações dadas por alunos do 4º e 5º anos (com 9-11 anos de idade) e do 6º, 7º e 8º anos (com 11-14 anos de idade), tendo observado que a maioria dos alunos de cada grupo respondeu corretamente às duas questões propostas. Verificou-se, ainda, que a percentagem de respostas aumentou com o nível de escolaridade e o subgrupo de alunos com ensino prévio de probabilidades obteve a maior percentagem de respostas corretas. Em relação às explicações das respostas erradas, a ideia geral consistiu na possibilidade do indivíduo controlar os resultados. No caso das respostas corretas, as explicações dos alunos, mesmo do 6º, 7º e 8º anos, não denotaram a identificação de estruturas matemáticas equivalentes em situações práticas diferentes.

Munisamy & Doraisamy (1998) propuseram, com base num estudo com alunos do ensino secundário, uma hierarquia na compreensão dos conceitos de probabilidades organizada em três níveis: no nível um, os alunos possuíam conceitos intuitivos do acaso e de probabilidade e compreendiam a maior parte dos conceitos probabilísticos elementares, sendo a capacidade de dar respostas adequadas e precisas amplamente influenciada por variáveis psicológicas, tais como as heurísticas de julgamento probabilístico (Tversky & Kahneman, 1982), a tendência de alternância e os efeitos recentes positivo e negativo (Fischbein, 1975); no nível dois, os alunos possuíam uma compreensão global dos conceitos probabilísticos e a lei da adição foi considerada relevante e aplicada apropriadamente; e no nível três, os alunos compreendiam o conceito da lei da multiplicação em acontecimentos independentes e por extensão acontecimentos condicionados.

Mais recentemente, com o aprofundamento do ensino da estocástica nas escolas, alguma investigação tem-se centrado no estudo das ideias dos alunos do ensino básico e dos seus professores sobre conceitos que antes eram apenas explorados ao nível do ensino secundário, como é o caso da probabilidade condicionada, independência e probabilidade conjunta.

No caso da probabilidade condicionada e da independência, no estudo de Correia e Fernandes (2013) conclui-se que os alunos do 9º ano possuem um substrato intuitivo que permitirá desenvolver o ensino formal destes conceitos. No caso de futuros

professores do ensino primário, que tinham estudado o conceito de probabilidade condicionada no âmbito de pelo menos uma disciplina do curso, Contreras, Batanero, Díaz e Fernandes (2011) referem que, no contexto de uma tabela de dupla entrada, apresentaram respostas corretas cerca de dois em cada três alunos num item de probabilidade simples e cerca de dois em cada cinco alunos em dois itens, um de probabilidade conjunta e outro de probabilidade condicionada.

Agora no contexto de extração de bolas de um saco com bolas pretas e brancas, também Fernandes, Correia e Contreras (in press) referem que dois em cada três alunos do 9º ano responderam corretamente a dois itens de probabilidade condicionada, enquanto muito poucos desses alunos (6% ou menos) responderam corretamente a outros dois itens de probabilidade conjunta.

Num estudo de Fernandes e Barros (2005), com alunos do curso de Professores do Ensino Básico, variante Matemática e Ciências da Natureza, foi possível observar que os seus conhecimentos em estocástica eram escassos, recorrendo a estratégias intuitivas limitadas na comparação de probabilidades. Também Batanero, Godino e Roa (2004), num estudo realizado com alunos futuros professores do ensino primário e do ensino secundário, referem que o ensino de probabilidades para estes alunos é uma tarefa difícil e concluem que deve mostrar-se, durante a formação didática dos professores, a forma como realizar análises didáticas em probabilidades.

Os estudos revistos antes mostram que os alunos do ensino básico, por um lado, apresentam dificuldades várias em probabilidades e, por outro lado, possuem um substrato intuitivo de alguns conceitos que tradicionalmente são ensinados apenas no ensino secundário. No caso dos alunos futuros professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico, conclui-se que o seu desempenho nos conceitos probabilísticos analisados (probabilidade simples, conjunta e condicionada) não se distingue muito do dos alunos.

Assim, no contexto de aprofundamento do ensino de probabilidades no ensino básico, no presente estudo investigam-se as ideias de alunos futuros educadores e professores do ensino básico sobre situações com a mesma estrutura estocástica, através de várias situações envolvendo a comparação de probabilidades em contextos variados.

Método

Participaram no estudo 79 alunos do 1º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, curso que dá acesso a cursos de

mestrado em Educação Pré-Escolar, em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e em Ensino do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico. Estes alunos tinham idades compreendidas entre os 18 e os 54 anos, com média de idades de 20,9 anos e desvio padrão de 5,74 anos, sendo a maioria dos alunos do sexo feminino (93,7%) como é habitual neste curso.

A formação matemática destes alunos à entrada na universidade era muito diversificada, salientando-se o estudo das disciplinas de Matemática A (31,6%), Matemática Aplicada às Ciências Sociais (27,8%) e Matemática de 9.º ano do ensino básico (30,4%) antes de ingressarem na universidade. No que diz respeito às dificuldades na aprendizagem das disciplinas de matemática na universidade, a grande maioria dos alunos afirmou ter muita dificuldade (41,8%) ou ter dificuldade (38,0%), enquanto poucos alunos afirmaram ter pouca dificuldade (17,7%) ou não ter dificuldade (2,5%). Estes alunos tinham estudado noções básicas de probabilidades, alguns apenas no 9º ano e outros também no ensino secundário, e muito poucos tinham estudado esta temática na universidade.

A recolha dos dados foi efetuada através de um questionário, aplicado numa das suas aulas, composto por quatro questões sobre equivalência estocástica em acontecimentos de experiências simples e compostas. Todas as questões apresentam o mesmo formato (ver Anexo), sendo cada uma constituída por dois itens: um de escolha múltipla e outro de resposta aberta, onde se pedia que o aluno apresentasse as razões da escolha da opção selecionada na parte de escolha múltipla.

Na análise de dados, as respostas aos itens de escolha múltipla foram classificadas em corretas e incorretas, e os raciocínios desenvolvidos pelos alunos foram categorizados aquando da sua análise, tendo-se determinado em ambos os casos frequências e usado tabelas para resumir a informação.

Apresentação de resultados

Cada uma das quatro questões propostas aos alunos sobre a equivalência estocástica envolvia um item de escolha múltipla com três opções de resposta e um item aberto em que era pedido para justificarem a sua escolha anterior.

No caso dos quatro itens de escolha múltipla, encontram-se registadas na Tabela I as opções selecionadas pelos alunos em cada um desses itens.

Tabela I. Frequência absoluta (em %) de seleção das opções de resposta em cada uma das quatro questões ($n = 79$)

Questões	Opções de resposta em cada questão		
	a)	b)	c)
1	5 (6)	10 (13)	64 (81)
2	11 (14)	28 (35)	40 (51)
3	9 (11)	15 (19)	55 (70)
4	4 (5)	2 (3)	73 (92)

Sendo a resposta correta em todos estes itens a opção c), constata-se que mais de metade dos alunos respondeu corretamente em todas as questões. De entre essas questões, revelaram-se mais difíceis para os alunos as questões 2 e 3.

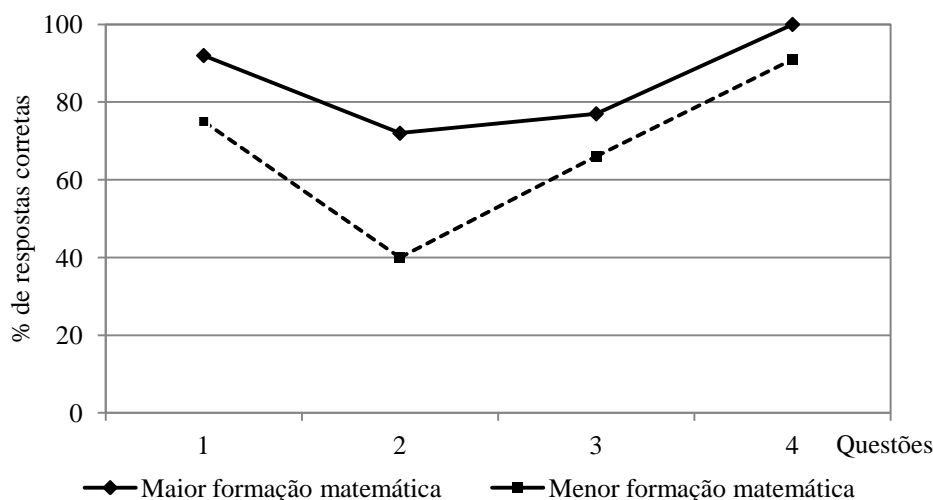
Na questão 2, que trata da extração simultânea ou sucessiva sem reposição de duas bolas de um saco contendo bolas brancas e pretas, as maiores dificuldades dos alunos estão associadas ao fato de se tratar de uma experiência aleatória composta envolvendo acontecimentos dependentes. Já no caso da questão 1, tratando-se também de uma experiência composta, mas agora envolvendo acontecimentos independentes, as dificuldades dos alunos atenuaram-se.

Na questão 3, que trata das experiências de girar duas roletas divididas em partes iguais e com o mesmo número de partes brancas e negras, bastantes alunos atribuíram maiores chances ao caso da roleta dividida num maior número de partes.

Finalmente, na questão 4, em que os alunos sentiram menos dificuldades, apesar de envolver uma experiência aleatória simples, tal como a questão 3, o facto de o número de casos favoráveis e possíveis ser o mesmo na roleta e no saco, com certeza, facilitou aos alunos a seleção da resposta correta.

Considerando a formação matemática dos alunos à entrada na universidade, dividimo-los em dois grupos: o grupo dos alunos que tinham estudado matemática a um nível mais profundo (alunos que tinham concluído a disciplina de Matemática A) e o grupo dos alunos que tinham estudado matemática a um nível menos profundo (alunos que tinham concluído a disciplina de MACS, Matemática B, Métodos Quantitativos, Matemática Profissional ou Matemática do 9º ano). Na Figura 1 apresentam-se as percentagens de respostas corretas de cada um destes dois grupos em cada uma das quatro questões.

Figura I. Percentagem de respostas corretas em cada uma das quatro questões segundo a formação matemática à entrada na universidade.



Por observação da Figura I verifica-se que os alunos com maior formação a matemática à entrada na universidade obtiveram, sistematicamente, maiores percentagens de respostas corretas em todas as questões. De entre as quatro questões, salienta-se uma maior variação entre os dois grupos de alunos na questão 2, que foi a questão que se relevou mais difícil.

Seguidamente, na Tabela II, apresentam-se as justificações referidas pelos alunos para explicarem as suas respostas selecionadas nos itens de escolha múltipla.

Tabela II. Número de alunos segundo as justificações em cada uma das quatro questões ($n = 79$)

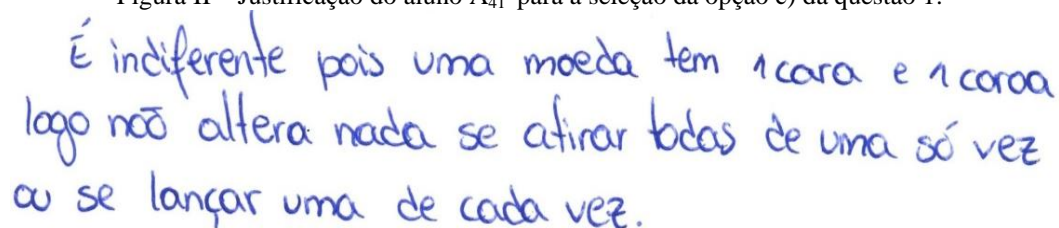
Justificações	Questões				Total
	1	2	3	4	
Comparar casos favoráveis, casos desfavoráveis e casos possíveis em experiências simples	8	17	32	33	90
Comparar casos favoráveis, casos desfavoráveis e casos possíveis em experiências compostas	12	12	–	–	24
Probabilidade de acontecimentos em experiências simples	22	11	38	34	105
Probabilidade de acontecimentos em experiências compostas	8	12	–	–	20
Reafirmar algo referido no enunciado	17	15	6	7	45
Referência à sorte	7	5	–	3	15
Possibilidade de controlar a obtenção do resultado pretendido	2	1	–	–	3
Interpretar o enunciado de forma errada	2	1	1	1	5
Outra	1	5	1	1	8
Sem justificação	–	–	1	–	1

Analisando as justificações, segundo a ordem da Tabela II, verifica-se que a justificação *comparar casos favoráveis, casos desfavoráveis e casos possíveis em*

experiências simples foi uma das mais utilizadas pelos alunos (28%), tendo sido mais referida na questão 3 (36%) e na questão 4 (37%), e menos na questão 1 (9%) e na questão 2 (19%).

Esta justificação foi utilizada pelos alunos de formas diferentes. No que diz respeito às duas primeiras questões, os alunos concluíram relativamente ao acontecimento da experiência composta a partir da comparação entre casos favoráveis e possíveis de um acontecimento numa experiência simples (ver Figura II), sem necessariamente enumerar todos os casos favoráveis e todos os casos possíveis.

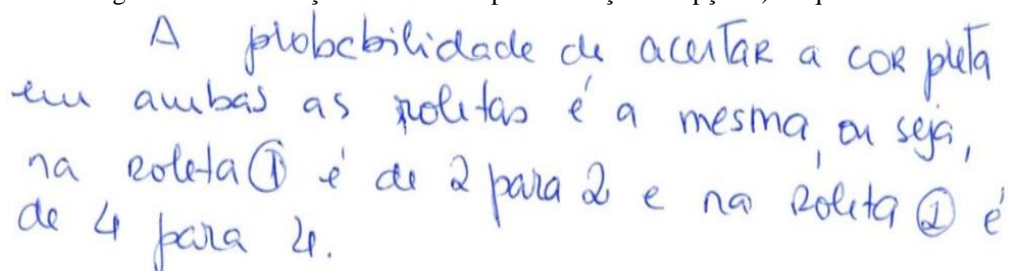
Figura II – Justificação do aluno A₄₁ para a seleção da opção c) da questão 1.



É indiferente pois uma moeda tem 1 cara e 1 coroa logo não altera nada se atirar todas de uma só vez ou se lançar uma de cada vez.

Nas duas últimas questões os alunos relacionaram os acontecimentos segundo duas perspetivas: numa compararam os casos favoráveis ao acontecimento com o total de casos possíveis ao acontecimento; noutra compararam os casos favoráveis ao acontecimento com os casos desfavoráveis (ver Figura III), considerando uma relação do tipo parte-parte que traduz uma vantagem (*odd*).

Figura III – Justificação do aluno A4 para a seleção da opção c) da questão 3.



A probabilidade de acertar a cor preta em ambas as roletas é a mesma, ou seja, na roleta ① é de 2 para 2 e na roleta ② é de 4 para 4.

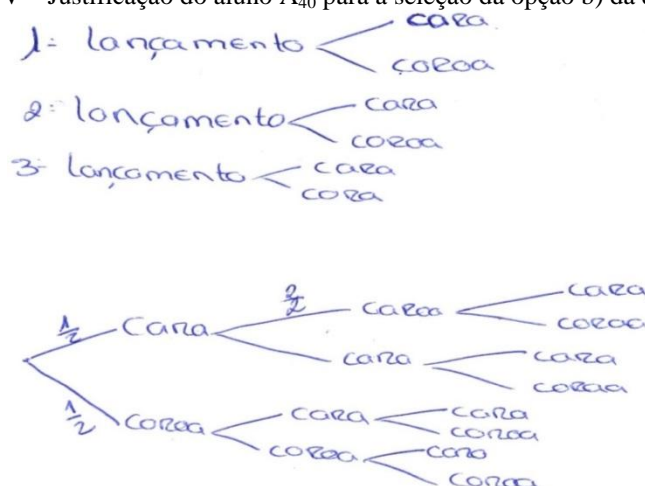
Esta justificação conduziu os alunos, em geral, à seleção da resposta correta, com exceção da questão 2, onde maioritariamente os alunos escolheram uma das opções incorretas (71%), afirmando haver maior probabilidade quando as bolas são retiradas sucessivamente (ver Figura IV).

Figura IV – Justificação do aluno A25 para a seleção da opção b) à questão 2.

Tem-se mais chance quando se tira uma bola de cada vez, sem colocar a primeira bola de novo no saco, porque tirando uma bola em 1º lugar as probabilidades de acertar numa bola branca são 1 em 7, retirando uma as probabilidades ficam 1 em 6.

A segunda justificação utilizada pelos alunos, *comparar casos favoráveis, casos desfavoráveis e casos possíveis em experiências compostas*, foi utilizada por poucos alunos (8%) para justificar as duas primeiras questões (as únicas questões que envolvem acontecimentos compostos) e levou a maioria dos alunos a optar pela resposta correta (75%), sendo essa tendência mais evidente na questão 1 (92%) do que na questão 2 (58%). Ainda no que diz respeito às estratégias utilizadas pelos alunos para comparar os casos favoráveis, desfavoráveis ou possíveis observou-se, por parte de alguns alunos, o recurso ao diagrama de árvore (ver Figura V), com maior frequência na questão 1, e a uma tabela de dupla entrada, tanto na questão 1 como na questão 2.

Figura V – Justificação do aluno A40 para a seleção da opção b) da questão 1.



A terceira justificação, *probabilidade de acontecimentos em experiências simples*, foi a mais referida pelos alunos (33%), tendo sido usada para justificar respostas dos alunos em qualquer das questões. Na maioria das questões, esta estratégia, conduziu os alunos à seleção da resposta correta, com exceção da questão 2, onde os alunos responderam maioritariamente de forma incorreta, afirmando ser maior a probabilidade

quando as bolas são retiradas sucessivamente. Apesar de ambas as questões 1 e 2 envolverem acontecimentos de experiências compostas, a maior incidência de respostas erradas na questão 2 pode explicar-se pelo facto de os acontecimentos envolvidos serem dependentes, enquanto na questão 1 são independentes.

Ainda nas questões 1 e 2, os alunos tiraram conclusões acerca do acontecimento da experiência composta com base na probabilidade de acontecimentos das experiências simples implicadas, tendo apresentado as probabilidades, em alguns casos, sob a forma de percentagem (ver Figura VI) ou, noutros casos, sob a forma de fração (ver Figura VII).

Figura VI – Justificação do aluno A38 para a seleção da opção c) da questão 1.

Uma vez que todas as moedas obtêm tanto cara como coroa, é indiferente lançar três moedas de uma vez ou uma moeda três vezes, uma vez que a probabilidade de sair cara é nas duas hipóteses 50%.

Figura VII – Justificação do aluno A37 para a seleção da opção b) da questão 2.

→ Na primeira tentativa, a Ana tem a seguinte chance:

$\frac{7}{3}$ → bolas no total (casos possíveis)
 $\frac{3}{3}$ → bolas brancas (casos favoráveis)

→ Na segunda tentativa, a Ana tem mais chance, porque...:

$\frac{6}{3}$

→ Na terceira tentativa, independentemente das bolas que já saíram, a Ana tem ainda mais chance que saia uma bola branca:

$\frac{5}{3}$

Na justificação *probabilidade de acontecimentos em experiências compostas*, referida por poucos alunos (6%), combinaram-se as probabilidades dos acontecimentos das experiências simples para obter a probabilidade do acontecimento da experiência composta (ver Figura VIII), ainda que em alguns casos isso tenha sido feito de forma inadequada (ver Figura IX).

Figura VIII – Justificação do A31 para a seleção da opção c) da questão 1.

lançar três moedas de uma só vez

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

lançar a mesma moeda 3 vezes seguidas

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Figura IX – Justificação do aluno A46 para seleção da opção c) da questão 2.

duas bolas de uma vez : $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

bola de cada vez : $\frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{5}{56}$

duas bolas de uma vez : $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

bola de cada vez : $\frac{3^{2^e}}{8} + \frac{2^{2^e}}{7} = \frac{37}{56}$

Esta justificação foi referida com maior frequência na questão 2 (60%) do que na questão 1 (40%), conduzindo, na maioria dos casos, à seleção da resposta correta (60%).

Prosseguindo para a justificação seguinte, *reafirmar algo referido no enunciado*, verifica-se que ela foi referida por bastantes alunos (14%), com maior incidência nas questões 1 e 2, provavelmente pela maior complexidade destas questões (ver Figura X). Em todas as questões, esta justificação levou os alunos a optar pela resposta correta.

Figura X – Justificação do aluno A38 para a seleção da opção c) da questão 4.

ambos os jogos têm as mesmas probabilidades de ganhar

A justificação *referência à sorte*, referida pelos alunos nas questões 1, 2 e 4, foi afirmada por poucos alunos (5%) e conduziu sempre à seleção da resposta correta (ver Figura XI).

Figura XI – Justificação do aluno A79 para a seleção da opção c) da questão 2.

Respondi desta forma à pergunta sembr que este caso é
uma questão de sorte, não existe uma forma predeterminada
de dizer a moeda que fez o obter corre.

Na atribuição da realização de acontecimentos à sorte está implícito que qualquer deles tem a mesma possibilidade de ser sucedido. Ora, como no caso da equivalência estocástica, aqui tratada, está em questão a comparação de dois acontecimentos equiprováveis, explica-se assim que este tipo de justificação tenha conduzido à seleção da resposta correta.

Já a justificação *possibilidade de controlar a obtenção do resultado pretendido*, afirmada por muito poucos alunos (1%), refere-se à possibilidade de poder, de alguma forma, controlar a obtenção do resultado da experiência aleatória através da manipulação dos objetos (moedas ou bolas). Esta justificação levou a que os alunos optassem sempre pela seleção da resposta errada. Na questão 1, os dois alunos afirmaram a maior probabilidade ao lançar a mesma moeda sucessivamente (ver Figura XII), enquanto na questão 2 o aluno afirmou a maior probabilidade quando se tiram as duas bolas ao mesmo tempo.

Figura XII – Justificação do aluno A₃₃ para a seleção da opção b) da questão 1.

Acho a resposta „quando lança a mesma moeda três vezes seguidas, a mais correcta porque acho que temos mais oportunidade de sair três caras. Se lança-se as três moedas de uma só vez, havia menos probabilidade pois batiam umas nas outras e concerteza que não iam sair as três caras.

Também poucos alunos (2%) *interpretaram o enunciado de forma errada*, considerando na questão 1 existir a possibilidade de lançar as moedas mais do que uma vez (ver Figura XIII), parecendo indiciar alguma interferência da lei dos grandes números, e na questão 2 haver a possibilidade de retirar mais do que duas bolas do saco.

Figura XIII – Justificação do aluno A₆₉ para a seleção da opção b) da questão 1.

Quanto mais vezes lançar a moeda, mais probabilidade tem de obter três caras.

Na categoria *outra*, que contém também poucos alunos (3%), incluem-se as justificações não incluídas nas categorias anteriores e cujo enunciado não apresenta um raciocínio claro que permita ser categorizado. Estas situações ocorreram, sobretudo, na questão 2, com 63% dos casos, que foi a questão que se revelou mais difícil para os alunos.

Conclusão e implicações

No conjunto de todas as questões exploradas no presente estudo, a percentagem de respostas corretas variou entre o mínimo de 51% e o máximo de 92%, com uma média global de 73%. Além disso, verificou-se que os alunos com uma formação matemática prévia superior obtiveram percentagens de respostas corretas também superiores em todas as questões. No estudo de estudo de Fernandes (1999), em que participaram alunos do 8º ano e 11º ano, também se verificou que ao maior desempenho a matemática correspondeu um maior número de respostas corretas.

Embora se trate de uma percentagem razoável de respostas corretas, tratando-se de itens de escolha múltipla que pretendem avaliar situações de equivalência estocástica, é da maior importância avaliar as justificações dos alunos para essas escolhas.

Quando nos centramos nas justificações apresentadas pelos alunos para a escolha das diferentes opções dos itens de escolha, a situação antes referida torna-se muito mais negativa. Nas justificações *comparar casos favoráveis, casos desfavoráveis e casos possíveis em experiências simples e probabilidade de acontecimentos em experiências simples*, quando aplicadas às questões 1 e 2, significou que os alunos avaliaram acontecimentos de experiências compostas a partir de acontecimentos simples, tal como se verificou no estudo de Fernandes (1999). Atente-se que as justificações correspondentes a estas, mas relativas a experiências compostas, foram menos referidas pelos alunos. Fernandes e Barros (2005) também verificaram que futuros professores do 1º e 2º ciclo do ensino básico sentem dificuldades em formular acontecimentos e compreender acontecimentos compostos.

Já as justificações *reafirmar algo referido no enunciado, referência à sorte, possibilidade de controlar a obtenção do resultado pretendido e interpretar o enunciado de forma errada*, pela sua natureza não explicativa, acarretam maiores preocupações. Reafirmar algo referido no enunciado, referido por mais de metade dos alunos nas quatro questões, pode significar que as respostas foram dadas mais ou menos ao acaso.

As justificações referência à sorte e referência ao controlo tendem a estar associadas a respostas distintas: no primeiro caso, a não racionalidade subjacente à sorte leva a concluir que qualquer resultado pode acontecer e, por conseguinte, a afirmar a

equiprobabilidade; enquanto, no segundo caso, a possibilidade de controlo de um resultado, em que subjazem razões causais, leva a afirmá-lo. Nos estudos de Cañizares e Batanero (1997) e de Fernandes (1999) verificou-se que alguns alunos adotaram estas justificações.

Conclui-se, assim, que os alunos recém-ingressados na universidade num curso do 1º ciclo, conducente a cursos do 2º ciclo de formação de futuros educadores e professores do ensino básico, apresentaram muitas dificuldades na identificação de situações estocasticamente equivalentes, as quais são particularmente notórias a partir das justificações apresentadas às escolhas feitas.

Muito embora estes alunos venham a ter ainda no 1º ciclo a unidade curricular de Números e Probabilidades, em que uma parte é dedicada ao estudo das probabilidades, tal não garante que as dificuldades, agora relatadas, desapareçam. No caso da probabilidade simples, conjunta e condicionada, Contreras, Estrada, Díaz e Batanero (2010) concluíram que futuros professores do ensino primário, mesmo após terem frequentado uma unidade curricular sobre matemática e a sua didática, que incluía conteúdos de probabilidades, demonstraram muitas dificuldades e cometeram muitos erros.

Assim, colocar a ênfase em mais ensino não parece ser suficiente, devendo ser também adotadas novas formas de ensino, em que se valorizem mais as ideias e menos os cálculos (Borovcnik, 2012).

Referências bibliográficas

- Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, vol. 12(1).
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.
- Cañizares, M. J., & Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Uno*, 14, 99-114.
- Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C., & Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 271-280). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C. & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 9th to 13th February 2011.
- Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2013). Caracterização das intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada. In J. A. Fernandes, F. Viseu,

- M. H. Martinho, & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp.47-68). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1º e 2º ciclos do ensino básico. *Revista Portuguesa de Educação*, 18(1), 117-150.
- Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J. A., Correia, P. F., & Contreras, M. J. (in press). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n. 4.
- Falk, R., Falk, R., & Levin, I. (1980). A potencial for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Fischbein, E., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Lecoutre, M.-P., & Durant, J-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.
- Munisamy, S., & Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 39-45.
- Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (2002). *Matemática A, 12.º ano*. Lisboa: Autor.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.

Anexo

1. Num jogo com moedas, o Filipe ganha o jogo quando obtém três caras.

Quando é que o Filipe tem mais chances de ganhar?

- Quando lança três moedas de uma só vez.
 Quando lança a mesma moeda três vezes seguidas.
 É indiferente lançar três moedas de uma só vez ou lançar a mesma moeda três vezes seguidas.

Como pensaste para responder à pergunta?

2. Num jogo, a Ana tira, sem ver, duas bolas de um saco, contendo três bolas brancas e quatro bolas pretas, como se mostra na figura.



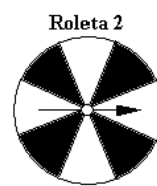
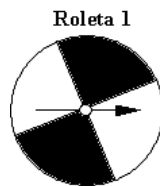
A Ana ganha o jogo quando tira duas bolas brancas do saco.

Quando é que a Ana tem mais chances de ganhar?

- Quando tira duas bolas de uma só vez.
 Quando tira uma bola de cada vez, sem colocar a primeira bola de novo no saco.
 É indiferente tirar duas bolas de uma só vez ou tirar uma bola de cada vez, sem colocar a primeira bola de novo no saco.

Como pensaste para responder à pergunta?

3. Na figura estão desenhadas duas roletas: a roleta 1 dividida em quatro partes iguais, das quais duas partes são brancas e as outras duas são pretas, e a roleta 2 dividida em oito partes iguais, das quais quatro partes são brancas e as outras quatro são pretas.



Roda-se cada uma das roletas e regista-se a cor assinalada pelo ponteiro de cada roleta quando para.

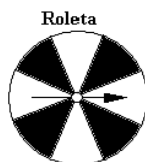
Num jogo, a Catarina ganha o jogo se o ponteiro assinalar a cor preta.

Quando é que a Catarina tem mais chances de ganhar?

- Quando joga com a roleta 1.
 Quando joga com a roleta 2.
 É indiferente jogar com a roleta 1 ou com a roleta 2.

Como pensaste para responder à pergunta?

4. Num jogo, a Rosa pode jogar com uma roleta dividida em oito partes iguais, das quais quatro partes são brancas e as outras quatro são pretas, ou tirar, sem ver, uma bola de um saco com oito bolas iguais numeradas de 1 a 8.



O Ricardo ganha o jogo se, ao rodar a roleta, o ponteiro assinalar a cor preta ou se, ao tirar uma bola do saco, sair uma bola com número ímpar.

Quando é que o Ricardo tem mais chances de ganhar?

- Quando joga com a roleta.
 Quando joga com o saco.
 É indiferente jogar com a roleta ou com o saco.

Como pensaste para responder à pergunta?