Universidade do Minho
Escola de Ciências

Pedro Alexandre Fernandes de Lima Ramos

Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais

Outubro de 2014

Pedro Alexandre Fernandes de Lima Ramos Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais

UMinho | 2014

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Pedro Alexandre Fernandes de Lima Ramos

Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais

Dissertação de Mestrado
Estatística

Trabalho efectuado sob a orientação de
Doutora Ana Patrícia Gonçalves
Doutora Irene Ribeiro Brito

Outubro de 2014

DECLARAÇÃO

Nome: Pedro Alexandre Fernandes de Lima Ramos

Correio electrónico: palrww@gmail.com

Tlm.: 964557011

Número do Bilhete de Identidade:11652588-6ZZ6

Título da dissertação:

Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais

Ano de conclusão: 2014

Orientador:

Doutora Ana Patrícia Gonçalves; Doutora Irene Ribeiro Brito

Designação do Mestrado:

Estatística

Área de Especialização:

Estatística

Escola de Ciências

Departamento de Matemática Aplicada

Guimarães, __/ __ /_____

Assinatura: ____

Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Ana Patrícia Gonçalves e à Professora Doutora Irene Brito por tudo o que me ensinaram e pela total disponibilidade e simpatia com que me orientaram ao longo da produção desta tese.

Agradeço igualmente aos meus pais e à minha irmã.

Resumo

O principal objetivo desta tese é o estudo dos princípios de cálculo de prémios e das medidas de risco mais utilizadas.

Para que tal seja levado a cabo de uma forma consistente e detalhada, é necessário explorar determinados conceitos relativos à Teoria da Ruína, como a noção de processo de Poisson homogéneo, o modelo de risco de Crámer-Lundberg, o coeficiente de ajustamento, a probabilidade de ruína, entre outros, conceitos esses definidos e formalizados no segundo capítulo. São calculados os valores que estes últimos podem assumir em situações concretas, como, por exemplo, o valor da probabilidade de ruína quando as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial.

No terceiro capítulo, vários princípios de cálculo de prémios são definidos, juntamente com as respetivas propriedades e com exemplos de cálculo nos quais se aplicam tais princípios.

O quarto capítulo incide sobre as denominadas medidas de risco. Ao longo deste capítulo, apresentam-se as medidas de risco mais utilizadas, as suas propriedades são discutidas e os seus valores determinados para situações específicas.

No quinto capítulo, calculam-se os valores do prémio de acordo com vários princípios para seis distribuições absolutamente contínuas concretas. Posteriormente, determinam-se os valores de quatro medidas de risco para cada uma dessas distribuições. Por fim, determinam-se vários valores para a probabilidade de ruína referente a três tipos de modelos especificados. Nete capítulo, todos os cálculos resultam da utilização de programas especialmente concebidos para o efeito, presentes nos anexos. Os resultados são cuidadosamente comparados e analisados.

Abstract

The main objective of this thesis is the study of premium calculation principles and risk measures.

In orther to do so consistently it is necessary to explore some concepts related to Ruin Theory set out in the second chapter, such as the homogeneous Poisson processes, the Crámer-Lundberg risk model, the adjustment coefficient, the ruin probability, among others. Several examples are presented in which calculations are made to find out these quantities in specific cases, such as the ruin probability when the claims follow an exponential distribution.

In the third chapter, multiple premium calculation principles are defined along with their properties and some practical examples.

The fourth chapter is about risk measures. Throughout this chapter various risk measures are described, their properties discussed and their values calculated in specific situations.

In the fifth chapter, six absolutely continuous claim distributions are specified. Then the premium is calculated according to several premium principles for each claim distribution. Afterwards, four risk measures are calculated for all six claim distributions. Finally, several values for the ruin probability of three model types are presented. These calculations are obtained by running programs especially designed to this purpose. These programs appear in the accompanying documents. The results they supply are compared and analysed.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Desde sempre que o ser humano teve de lidar com o risco e a incerteza de eventos futuros. Nesse sentido, o conceito de seguro remonta ao tempo dos romanos, que deram o primeiro passo para o que hoje se denomina de seguro de vida, e, no século $XVII$, Fermat e Pascal idealizaram a Teoria das Probabilidades. No século XV o sistema de seguros europeu faliu, graças a técnicas de gestão do risco intuitivas e pouco elaboradas. De aí em diante os matemáticos principiaram a debruçar-se neste assunto, o que gradualmente conduziu à origem das ciências atuariais.

As ciências atuariais são, assim, as ciências das técnicas específicas de análise de riscos e expetativas, principalmente na administração de seguros e fundos de pensão. Dividem-se em dois ramos: vida e não-vida. O primeiro trata das questões de longo prazo, como reformas, pensões e seguros. O segundo está relacionado com características de curto prazo, como os seguros de automóveis e de responsabilidade civil. O presente trabalho explora conceitos, técnicas e resultados no âmbito das ciências atuariais, desde, por exemplo, o modelo de risco de Crámer-Lundberg aos princípios de cálculo de prémios e às medidas de risco.

No capítulo 2 do presente trabalho, aborda-se essencialmente o modelo de Crámer-Lundberg, tambem designado de modelo clássico de risco, quer em tempo contínuo, quer em tempo discreto. São explorados conceitos fundamentais como a probabilidade de ruína, o coeficiente de ajustamento, entre outros. Vários exemplos específicos são efetivamente calculados.

No capítulo 3, estudam-se os ditos prémios que as seguradoras requerem aos clientes como contrapartida por lhes assegurarem determinados riscos. São apresentados diferentes princípios para o cálculo do prémio. São igualmente apresentadas propriedades importantes que um princípio pode ou não verificar, sendo que se demontra a quais dessas propriedades cada um dos princípios obedece. Neste capítulo também figuram vários exemplos concretos nos quais os prémios são calculados de acordo com diversos princípios.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo de algumas medidas de risco. Trata-se de um conceito relativamente recente e que pode ser encarado como uma medida para o quão perigoso é para a seguradora suportar um risco determinado. Analisa-se o significado de cada medida de risco apresentada, sua definição, propriedades, vantagens e desvantagens e exemplos práticos de cálculo.

No capítulo 5, calculam-se os valores do prémio de acordo com os princípios explorados e os valores das medidas de risco associados a várias distribuições absolutamente contínuas. Determinam-se igualmente valores aproximados para a probabilidade de ruína associada a modelos (clássicos) de risco concretos. Todo o cálculo, neste capítulo, é de cariz computacional, isto é, resulta da aplicação de programas que se desenvolveram especialmente para o efeito, programas esses presentes nos anexos. Os resultados são cuidadosamente analisados.

Capítulo 2

Teoria da Ruína

Neste capítulo apresentam-se os conceitos de base relativos à Teoria da Ruína. Principia-se, na secção 2.1, por caracterizar um caso particular dos processos estocásticos, os denominados processos de Poisson homogéneos. Tal conceito é fundamental na secção 2.2 ao nível da descrição do modelo clássico de risco ou modelo de Crámer-Lundberg. Por seu turno, na secção 2.3, define-se, entre outros conceitos, o coeficiente de ajustamento, que é essencial na determinação da probabilidade de ruína, presente na secção 2.4. Na secção 2.5 aborda-se a noção de perda agregada máxima no âmbito do modelo clássico de risco em tempo contínuo. Na secção 2.6, explora-se sumariamente a denominada Teoria do Renovamento. Por fim, ao nível da secção 2.7, descreve-se sucintamente um modelo de risco em tempo discreto.

2.1 Processos de Poisson homogéneos

Definição 2.1.1. Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias $\{Y(t) : t \in T\}$ definidas no mesmo espaço amostral, indexadas por um parâmetro t variando num conjunto T, designado por conjunto de índices do processo.

Considere-se $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $T \neq \emptyset$ um conjunto normalmente representando o tempo. A cada $t \in T$ associa-se uma variável aleatória $X(t)$, função de Ω em E, onde E é o conjunto dos estados do processo. Um processo estocástico não é mais, então, do que uma família de variáveis aleatórias indexadas por t.

Se $T = \{t : t \geq 0\}$, o processo diz-se de parâmetro ou tempo contínuo. Se T é um conjunto finito ou numerável, o processo diz-se de parâmetro ou tempo discreto.

Quanto ao conjunto dos estados E, o processo é discreto se este último for finito ou numerável; contínuo se for infinito não numerável.

Se um processo estocástico de tempo contínuo for tal que $X(0) \equiv 0$ e, para quaisquer instantes $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, as variáveis aleatórias $X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ forem independentes, então o processo tem incrementos independentes.

Por outro lado, quando as variáveis aleatórias $X(t_1 + h) - X(t_1)$ e $X(t_2 + h) - X(t_2)$ são identicamente distribuídas, para quaisquer t_1 e t_2 e para todo $h > 0$, o processo tem incrementos estacionários.

Um caso particular de processos estocásticos são os processos de contagem:

Definição 2.1.2. Um processo estocástico $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um processo de contagem se, fixado $t > 0$, $N(t)$ representa, por exemplo, o número de acontecimentos no intervalo de tempo $(0, t]$, ou seja, $N(t)$ toma valores em $\mathbb{N}_0$.

Por seu turno, um caso particular de processos de contagem são os processos de Poisson homogéneos:

Definição 2.1.3. Um processo de contagem $\{N(t) : t \geq 0\}$ com $N(0) \equiv 0$ diz-se um processo de Poisson homogéneo de intensidade $\lambda > 0$ se verifica as seguintes condições:

1) $\{N(t) : t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários e independentes;

2) Para qualquer $t > 0$, $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt, ou seja, $\forall t > 0$, $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, isto é, $P\left(N(t) = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Um processo de Poisson homogéneo verifica a propriedade seguinte.

Lema 2.1.1. *Num processo de Poisson homogéneo, o número de ocorrências (no caso desta tese, indemnizações) em qualquer intervalo de tempo de amplitude h tem distribuição de Poisson de parâmetro λh, independentemente da localização desse intervalo e da história passada do processo, ou seja, independentemente do valor tomado pelas variáveis aleatórias indexadas a tempos anteriores ao dito intervalo de tempo. Formalizando:*

$$P(N(t+h) - N(t) = k \mid N(s),\ \forall s \leq t) = \frac{e^{-\lambda h}\left(\lambda h\right)^k}{k!},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \forall t > 0.$$

Demonstração

$$P(N(t+h)-N(t) = k \mid N(s),\ \forall s \leq t) = P(N(h)-N(0) = k) = P(N(h) = k) = \frac{e^{-\lambda h}\left(\lambda h\right)^k}{k!}$$

A primeira igualdade é consequência do ponto 1) da Definição 2.1.3; a segunda, resulta do facto de $N(0) \equiv 0$; a terceira, justifica-se pelo ponto 2) da Definição 2.1.3. ■

O processo de Poisson homogéneo é, como já se referiu, um exemplo de um processo de contagem. Para $t > 0$, $N(t)$ conta o número de ocorrências associadas a um fenómeno aleatório no intervalo de tempo $(0, t]$. No caso concreto inerente a este trabalho, o fenómeno aleatório será a ocorrência de indemnizações a serem suportadas por uma seguradora. Ou seja, para t fixo, $N(t)$ representa o número de indemnizações efetuadas por uma seguradora no intervalo de tempo $(0, t]$. A totalidade do montante das indemnizações até ao instante t é representado por $S(t)$, onde, para $t > 0$,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{2.1.0.1}$$

$N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, $\lambda > 0$ e $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias não negativas (com $P(X_i = 0) = 0$) independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X e independentes de $N(t)$ para todo $t \geq 0$, em que cada X_i representa o montante da i-ésima indemnização.

Definição 2.1.4. Seja $\{N(t) : t \geq 0\}$ um processo de Poisson homogéneo e $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $N(t)$, para cada $t \geq 0$. Um processo $\{Y(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Poisson composto quando $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$.

Logo, $S(t)$ é um processo de Poisson composto.

No decorrer deste capítulo, se nada se disser em contrário, utiliza-se a seguinte notação: $N(t)$ representa um processo de Poisson homogéneo de intensidade $\lambda > 0$; $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, onde $\{X_i\}_{i \geq 1}$ é a sucessão das indemnizações individuais identicamente distribuídas a uma variável aleatória X não negativa, com $\mu_1 = E[X]$, independentes entre si e independentes de $N(t)$ para todo $t > 0$; $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, N uma variável aleatória discreta tomando valores em $\mathbb{N}_0$ e independente de X.

Posto isto, considere-se, para $i \geq 1$, t_i o instante da i-ésima indemnização. A sucessão $T_1 = t_1,\ T_2 = t_2 - t_1,\ \ldots,\ T_n = t_n - t_{n-1}$ diz-se a sucessão dos tempos entre indemnizações. Note-se que $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são os pontos de descontinuidade das funções $t \longrightarrow N(t)$ e $t \longrightarrow S(t)$. Neste caso, $T_1, \ldots, T_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, seguindo todas elas uma distribuição exponencial de média λ^{-1}. A sucessão $t_1 = T_1,\ t_2 = T_1 + T_2,\ \ldots,\ t_n = T_1 + \ldots + T_n$ é a sucessão dos tempos de espera.

2.2 O modelo clássico de risco em tempo contínuo

O modelo clássico de risco em tempo contínuo para a atividade seguradora é um processo estocástico $\{U(t) : t \geq 0\}$, onde, para cada $t \geq 0$, $U(t) = u + ct - S(t)$, sendo que:

1) $U(t)$ é a reserva de risco, ou seja, o montante da seguradora no instante t, relativamente ao risco em causa;

2) u é o montante inicial da seguradora, isto é, $u = U(0)$;

3) c representa o montante arrecadado pela seguradora em prémios por unidade de tempo (no modelo clássico este valor é considerado invariável no tempo);

4) $S(t)$ representa o montante das indemnizações que a seguradora teve de assegurar até ao instante t.

A função de distribuição das indemnizações individuais X, representa-se por $F_X(x)$, sendo que $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Uma trajetória ou concretização de um Processo de Poisson homogéneo $N(t)$ é representada na Figura 2.1. Os processos $S(t)$ e $U(t)$ correspondentes encontram-se representados nas Figuras 2.2 e 2.3, respetivamente.

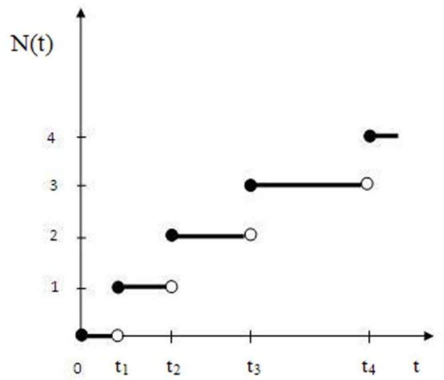

Figura 2.1: Processo de Poisson $N(t)$

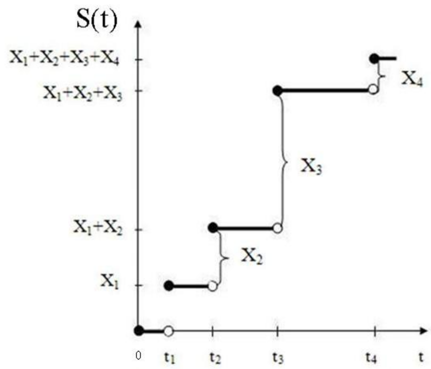

Figura 2.2: Indemnizações agregadas $S(t)$

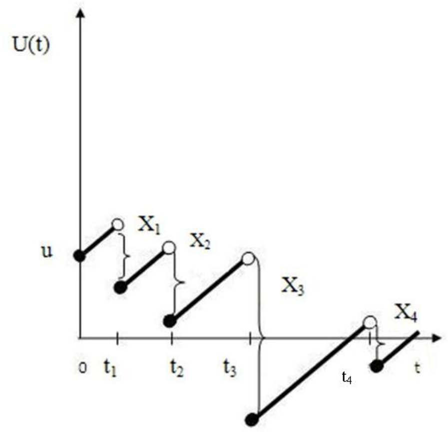

Figura 2.3: Modelo clássico de risco $U(t)$

2.3 Coeficiente de ajustamento

No intuito de descrever adequadamente o conceito de coeficiente de ajustamento é conveniente apresentar o seguinte conjunto de resultados.

Definição 2.3.1. A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é definida por $M_X(t) = E[e^{tX}]$, desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $-t_0 > 0$.

Lema 2.3.1. *(Equação de Wald)* $E[S] = E[X]E[N]$.

Demonstração

$$E[S] = E\left[E[S \mid N]\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)nE[X] = E[X]E[N]. \qquad \blacksquare$$

Lema 2.3.2. $M_S(r) = M_N\left(\ln\left(M_X(r)\right)\right)$.

Demonstração

$$M_S(r) = E[e^{rS}] = E[E[e^{rS} \mid N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{r\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N=n\right] P(N=n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{r\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_X(r)\right)^n P(N=n)$$
$$= E\left[\left(e^{N\ln\left(M_X(r)\right)}\right)\right] = M_N\left(\ln\left(M_X(r)\right)\right). \qquad \blacksquare$$

Lema 2.3.3. *Seja X uma variável aleatória seguindo uma distribuição de Poisson de parâmetro $\beta > 0$, isto é, $X \sim Poisson(\beta)$. Então, $M_X(r) = e^{\beta(e^r-1)}$.*

Demonstração

$$M_X(r) = E[e^{rX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{rk}e^{-\beta}\beta^k}{k!} = e^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta e^r)^k}{k!} = e^{-\beta}e^{\beta e^r} = e^{\beta(e^r-1)}. \quad \blacksquare$$

Lema 2.3.4. *Seja $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, N seguindo uma distribuição de Poisson, $\{X_i\}_{i\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X não negativa, X e N independentes. Então,*

$$M_S(r) = e^{\lambda(M_X(r)-1)}.$$

Demonstração

Combinando o Lema 2.3.2 com o Lema 2.3.3 conclui-se o pretendido. $\blacksquare$

Lema 2.3.5. $Var[S] = E[N]Var[X] + E[X]^2 Var[N]$.

Demonstração

$$\begin{aligned}
Var[S] &= E\left[S^2\right] - E\left[S\right]^2 = E\left[E\left[S^2 \mid N\right]\right] - \left(E\left[E\left[S \mid N\right]\right]\right)^2 \\
&= E\left[Var[S \mid N] + E\left[S \mid N\right]^2\right] - \left(E\left[E\left[S \mid N\right]\right]\right)^2 \\
&= E\left[Var[S \mid N]\right] + E\left[E\left[S \mid N\right]^2\right] - \left(E\left[E\left[S \mid N\right]\right]\right)^2 \\
&= E[Var[S \mid N]] + Var[E[S \mid N]] \\
&= E[NVar[X]] + Var[NE[X]] \\
&= E[N]Var[X] + E[X]^2 Var[N]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 2.3.2. O coeficiente de segurança associado a um determinado modelo (clássico) de risco é o número $\theta > 0$ tal que $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$.

Definição 2.3.3. O coeficiente de ajustamento define-se como sendo a única raiz positiva $r = R$ da equação $1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$.

Fazendo uso da Definição 2.3.2, vem que a igualdade da Definição 2.3.3 é equivalente a $rc = \lambda[M_X(r) - 1]$, isto é, $e^{rc} = M_S(r)$, $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $N \sim Poisson(\lambda)$. Ou seja, o coeficiente de ajustamento representa o equilíbrio, o ajustamento entre o que a seguradora arrecada em prémios (rc) e o que despende em indemnizações ($M_S(r)$). De agora em diante R representa sempre o coeficiente de segurança.

Pode-se mostrar que a equação $1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$ da Definição 2.3.3 tem apenas uma solução positiva. Ora, essa equação é equivalente a

$$M_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r. \tag{2.3.0.1}$$

Note-se que o segundo membro da equação anterior é uma reta de declive $\frac{c}{\lambda}$ com 1 como ordenada na origem; o primeiro é tal que $\lim_{r\to\infty} M_X(r) = +\infty$. Por outro lado,

$$M_X(0) = 1;$$

$$\frac{dM_X}{dr}(r) = \frac{d(E[e^{rX}])}{dr}(r) = E[Xe^{rX}] > 0, \text{ pois } X > 0;$$

$$\frac{d^2M_X}{dr^2}(r) = \frac{d(E[Xe^{rX}])}{dr} = E[X^2e^{rX}] > 0.$$

A derivada no ponto $r = 0$ do primeiro membro de (2.3.0.1) é:

$$\frac{dM_X}{dr}(0) = E[X] = \mu_1 > 0.$$

Por seu turno, a derivada no ponto $r = 0$ do segundo membro de (2.3.0.1) é $\frac{c}{\lambda}$.

Isto é, a função de $\{r : r \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada r atribui $M_X(r)$ interseta o eixo das ordenadas em 1, é crescente, côncava e tende para infinito. Mais à frente, mostra-se que para evitar a ruína se deve verificar a inequação $c > \lambda\mu_1$. Daqui infere-se que $\frac{c}{\lambda} > \frac{dM_X}{dr}(0)$. Então, na vizinhança de zero, a função de $\{r : r \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada r atribui $M_X(r)$ tem ordenadas inferiores à reta que figura no segundo membro da equação (2.3.0.1) e que também interseta o eixo das ordenadas em 1. Por tudo isto, (2.3.0.1), tem duas soluções: $r = 0$ e um número R estritamente positivo, a que se chama de coeficiente de ajustamento.

De seguida, calcula-se o coeficiente de ajustamento no caso em que as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial. Trata-se de um dos poucos casos em que é possível obter-se uma expressão explícita para R.

Exemplo 2.3.1. Considerem-se: $U(t) = u + ct - S(t)$, $X \sim Exp(\beta)$, $\beta > 0$. Pretende-se calcular o coeficiente de ajustamento. Ora, $E[X] = \frac{1}{\beta}$ e

$$M_X(r) = E\left[e^{rX}\right] = \int_0^\infty e^{rX}\beta e^{-\beta x}dx = \frac{\beta}{\beta - r}, \quad \beta > r. \tag{2.3.0.2}$$

Logo, $1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r) \Longleftrightarrow 1 + \frac{(1+\theta)}{\beta} r = \frac{\beta}{\beta - r} \Rightarrow R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$.

R está bem definido poque $\theta > 0$.

Definição 2.3.4. (Distribuição limite) Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias com funções de distribuição $(F_{X_n})_n$. Seja X uma variável aleatória e $F_X(x)$ a respetiva função de distribuição. Se $(F_{X_n})_n$ converge para $F_X(x)$, quando $n \to \infty$, em todos os pontos x nos quais $F_X(x)$ é contínua, diz-se que X_n converge em distribuição para X. A distribuição de X é a distribuição limite de X_n.

Lema 2.3.6. *Se $\mu_1 = E[X]$ e $E\left[X^2\right]$ são finitos e $c > \lambda\mu_1$, então $U(t) \to +\infty$ com t.*

Demonstração. Fixando t, a variável aleatória $U(t)$ tem valor esperado e variância, respetivamente,

$$\begin{aligned} u_t &= E\left[U(t)\right] = E\left[u + ct - S(t)\right] = u + \theta\lambda\mu t, \\ \sigma_t^2 &= Var\left[U(t)\right] = \lambda\mu_2 t, \end{aligned}$$

com $\mu_2 = E[X^2]$.

Prova-se facilmente, pelo Teorema central do limite, que a distribuição assimptótica de $U(t)$ é normal, ou seja, a distribuição hipotética que é a distribuição limite da sequência de variáveis aleatórias $\{U(t) : t \geq 0\}$ é normal.

Então, para um valor M finito, é válida a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} F_{U(t)}(M) = \lim_{t\to\infty} P\left(U(t) \leq M\right) &= \lim_{t\to\infty} P\left(\frac{U(t) - u_t}{\sigma_t} \leq \frac{M - u_t}{\sigma_t}\right) \\ &\approx \Phi(-\infty) = 0, \end{aligned}$$

onde $F_{U(t)}(M)$ representa o valor da função de distribuição da variável aleatória $U(t)$ em M e $\Phi(.)$ a função de distribuição normal $(0,1)$. Em suma, $\lim_{t\to\infty} P\left(U(t) \leq M\right) = 0$, o que prova o pretendido. ■

2.4 A probabilidade de ruína

O tempo de ruína T é uma variável aleatória assim definida: $T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$. Ou seja, é o menor dos tempos nos quais a seguradora não só não tem capital disponível como está em dívida para com outrém. Sublinhe-se que se considera $T = \infty$ se $\forall t \geq 0, U(t) \geq 0$.

A probabilidade de ruína $\psi(u)$ para um montante inicial da seguradora $u = U(0)$ define-se como sendo $\psi(u) = P\left(T < \infty \mid U(0) = u\right)$. A probabilidade de sobrevivência, por seu turno, é definida por $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Teorema 2.4.1. *(Teorema Fundamental de Risco) Para* $u \geq 0$, $\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T<\infty]}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[e^{-RU(t)}] &= E\left[e^{-Ru}\right] E\left[e^{-cRt}\right] M_{S(t)}(R) = e^{-Ru}e^{-cRt}e^{\lambda t(M_X(R)-1)} \\ &= e^{-Ru}e^{-cRt}e^{tRc} = e^{-Ru}. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade utiliza-se o Lema 2.3.4.

Por outro lado,

$$E\left[e^{-RU(t)}\right] = P(t > T)\, E\left[e^{-RU(t)} \mid t > T\right] + P(t \leq T)\, E\left[e^{-RU(t)} \mid t \leq T\right].$$

Mas, para $t > T$, $U(t) = U(T) + c(t-T) - (S(t) - S(T))$. Então:

$$\begin{aligned} E\left[e^{-RU(t)} \mid t > T\right] &= E\left[e^{-RU(T)-Rc(t-T)+R(S(t)-S(T))} \mid t > T\right] \\ &= E\left[e^{-RU(T)-R(1+\theta)\lambda\mu_1(t-T)} \mid t > T\right] \underbrace{E\left[e^{R(S(t)-S(T))}\right]}_{M_{S(t)-S(T)}(R)}. \end{aligned}$$

Como $S(t)$ e $S(T)$ são processos de Poisson compostos independentes (ver [11]), então $(S(t) - S(T))$ é um Processo de Poisson Composto com parâmetro $\lambda(t-T)$.

Ora,

$$\begin{aligned} & E\left[e^{-RU(T)-R(1+\theta)\lambda\mu_1(t-T)} \mid t > T\right] M_{S(t)-S(T)}(R) \\ &= E\left[e^{-RU(T)-R(1+\theta)\lambda\mu_1(t-T)+\lambda(t-T)(M_X(R)-1)} \mid t > T\right] \\ &= E\left[e^{-RU(T)-R(1+\theta)\lambda\mu_1(t-T)+\lambda(t-T)(\frac{cR}{\lambda})} \mid t > T\right] \\ &= E\left[e^{-RU(T)} \mid t > T\right]. \end{aligned}$$

Na primeira igualdade utilizam-se os Lemas 2.3.2 e 2.3.3, na segunda, (2.3.0.1).

Então:

$$e^{-Ru} = E\left[e^{-RU(t)}\right] = P(t > T)E\left[e^{-RU(T)} \mid t > T\right] + P(t \leq T)E\left[e^{-RU(t)} \mid t \leq T\right].$$

Fazendo $t \to \infty$, $E\left[e^{-RU(t)} \mid t \leq T\right] \to 0$, pelo Lema 2.3.6. Daqui vem:

$$e^{-Ru} = \psi(u)E\left[e^{-RU(T)} \mid T < \infty\right] \Leftrightarrow \psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)} \mid T < \infty\right]}. \qquad \blacksquare$$

Tendo em conta que $R > 0$ e que T designa o tempo de ruína (e, portanto, $U(T) < 0$), então $e^{-RU(T)} \geq 1$, de onde se conclui de imediato:

Corolário 2.4.1. *(Desigualdade de Lundberg) Para* $u \geq 0$, $\psi(u) < e^{-Ru}$.

Da desigualdade de Lundberg vem que $\lim_{u\to+\infty}\psi(u)=0$, isto é, $\psi(u)$ é uma função que tende para zero quando u tende para infinito.

Teorema 2.4.2. *Se X tem suporte limitado, de tal forma que $F_X(m)=1$, para algum m finito, então $\psi(u)>e^{-R(u+m)}$.*

Demonstração. Supondo que existe ruína, a reserva no instante da ruína é superior a $-m$ uma vez que a reserva era positiva antes da última indemnização que a provocou, ou seja, $U(T)>-m$, dado $T<\infty$. Vem, então, que

$$e^{-RU(T)}<e^{Rm}\Longrightarrow E\left[e^{-RU(T)}\mid T<\infty\right]<e^{Rm},$$

do que resulta $\psi(u)>e^{-Ru}e^{-Rm}=e^{-R(u+m)}$. ■

Lema 2.4.1. *Considere-se $\{U(t):t\geq 0\}$ o modelo clássico de risco. Então, se o prémio arrecadado pela seguradora por unidade de tempo para suportar um determinado risco for inferior ou igual ao valor esperado da totalidade das indemnizações por unidade de tempo, ou seja, se $c\leq\lambda\mu_1$, então a ruína do processo acontece quase certamente, isto é, $P(T<\infty\mid U(0)=u)=\psi(u)=1$.*

Demonstração Pelo Lema 2.1.1, e fazendo $h=1$, o número de indemnizações por unidade de tempo segue uma distribuição $N\sim Poisson(\lambda)$. Consequentemente, a totalidade de indemnizações por unidade de tempo segue uma distribuição $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$. Pela Definição 2.3.1, $E[S]=E[X]E[N]=\lambda\mu_1$. Se $c<\lambda\mu_1$, então o declive de $1+(1+\theta)\mu_1 r$ é inferior a $\frac{dM_X}{dr}(0)=\mu_1$, pelo que apenas $R=0$ é solução da equação da Definição 2.3.3. Se $c=\lambda\mu_1$, então a equação da Definição 2.3.3 é equivalente a $1+\mu_1 r=M_X(r)$, que tem apenas a solução $R=0$. Por outro lado, se $R=0$, então, pelo Teorema 2.4.1, resulta que $\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T<\infty]}=1$. ■

Do resultado anterior conclui-se que, para evitar a ruína, o prémio c deverá ser estritamente superior a $E[S]=\lambda\mu_1$, isto é, $c>\lambda\mu_1$. Desta forma, faz sentido definir $c=(1+\theta)\lambda\mu_1$, onde θ é um coeficiente de segurança obrigatoriamente superior a 0 para evitar uma situação de ruína.

No exemplo que se segue, calcula-se explicitamente o valor da probabilidade de ruína no caso em que as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial.

Exemplo 2.4.1. Considerem-se: $U(t)=u+ct-S(t)$ e $X\sim Exp(\beta)$, $\beta>0$. Pretende-se calcular $\psi(u)$.

Sejam T o instante de ruína, $\mu^- = \lim_{t \to T^-} U(t)$, X_i o valor da indemnização que causou a ruína. Então, se $y > 0$, $X_i > \mu^- + y \Leftrightarrow -U(T) > y$. Pelo que:

$$P\left(-U(T) > y \mid T < \infty\right) = P\left(X_i > \mu^- + y \mid X_i > \mu^-\right) = P\left(X_i > y\right) = e^{-\beta y}.$$

Daqui resulta que a variável aleatória $-U(T) \mid T < \infty$ tem distribuição exponencial. Note-se que a segunda igualdade é possível pela perda de memória da variável aleatória exponencial. Logo,

$$E\left[e^{-RU(T)} \mid T < \infty\right] = \frac{\beta}{\beta - R}.$$

Pelo Exemplo 2.3.1, $R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$. Resulta que $\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{\frac{-\beta\theta u}{1+\theta}}$, pelo Teorema 2.4.1.

Teorema 2.4.3. *Se X é absolutamente contínua, com função densidade de probabilidade $f_X(x)$ e função distribuição de probabilidade $F_X(x)$, então, para todo $y > 0$:*

$$P\left(U(T) \in (-y - dy, -y)\,,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right) = \frac{\lambda}{c}\left[1 - F_X(y)\right] dy. \tag{2.4.0.1}$$

Demonstração Como já foi referido $N(t)$ é um processo de Poisson e como tal verifica as duas seguintes propriedades:

P1) $\forall t, \exists \lambda > 0 : P\left(N(]t, t+h]) \geq 1\right) = \lambda h + o(h)$. [1]

P2) $\forall t, P\left(N(]t, t+h]) \geq 2\right) = o(h)$.

A propriedade P1) diz simplesmente que a probabilidade de existirem indemnizações a pagar no intervalo de tempo entre t exclusivé e $t+h$ inclusivé é igual à quantidade $\lambda h + o(h)$, para todo o valor de t. A propriedade P2) afirma que a probabilidade de ocorrerem duas ou mais indemnizações no intervalo de tempo entre t exclusivé e $t+h$ inclusivé é igual à quantidade $o(h)$, para todo o valor de t.

Do que, no intervalo $]0, dt]$, um intervalo de amplitude infinitesimal, vem:

$P\left(N(]0, 0+dt]) = 0\right) = P\left(N(dt) = 0\right) = 1 - P\left(N(dt) \geq 1\right) = 1 - \lambda dt - o(dt) \approx 1 - \lambda dt$, por $P1$);

$P\left(N(]0, 0+dt]) \geq 2\right) = P\left(N(dt) \geq 2\right) = o(dt)$, por $P2$);

$P\left(N(dt) = 1\right) = 1 - P\left(N(dt) = 0\right) - P\left(N(dt) \geq 2\right) \approx 1 - 1 + \lambda dt + o(dt) - o(dt) = \lambda dt.$

[1] Se $h \to 0$, então $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

Uma vez que um Processo de Poisson homogéneo é um processo sem memória, a probabilidade de ocorrência de uma indemnização num intervalo de tempo de amplitude dt é igual a λdt e é independente de t e da história do processo até então. Assim, entre 0 e dt, existem duas possiblidades. Ou, com probabilidade $1-\lambda dt$, não surgem indemnizações a pagar e o capital da seguradora aumenta de u para $u+cdt$; ou, com probabilidade λdt, ocorre uma indemnização. Nesta última possibilidade, a indemização pode ser inferior ou igual a u e o processo continua com capital $u+cdt-X$; ou, então, é superior a u e dá-se uma situação de ruína, sendo que $U(T)\in(-\infty,-y) \Longleftrightarrow X>u+y$. Desta forma,

$$G(u,y)=P\left(U(T)\in(-\infty,-y)\,,\ T<\infty \mid U(0)=u\right)$$

pode ser escrito como:

$$G(u,y)=(1-\lambda dt)G(u+cdt,y)+\lambda dt\left[\int_0^u G(u-x,y)f_X(x)dx+\int_{u+y}^{\infty}f_X(x)dx\right]. \quad (2.4.0.2)$$

Por outro lado, utilizando a definição de derivada parcial num ponto, vem

$$G(u+cdt,y)=G(u,y)+cdt\frac{\partial G}{\partial u}(u,y).$$

Substituindo esta última equação em (2.4.0.2) e dividindo por cdt, obtém-se:

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,y)=\frac{\lambda}{c}\left[G(u,y)-\int_0^u G(u-x,y)f_X(x)dx-\int_{u+y}^{\infty}f_X(x)dx\right].$$

Integrando em $u\in[0,z]$, vem que

$$G(z,y)-G(0,y)=$$
$$\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z G(u,y)du-\int_0^z\int_0^u G(u-x,y)f_X(x)dxdu-\int_0^z\int_{u+y}^{\infty}f_X(x)dxdu\right].$$

No que diz respeito ao primeiro integral duplo, trocando a ordem de integração, fazendo a mudança de variável $v=u-x$ e trocando de novo a ordem de integração, conclui-se:

$$\int_0^z\int_0^u G(u-x,y)f_X(x)dxdu=\int_0^z\int_0^{z-v}G(v,y)f_X(x)dxdv=\int_0^z G(v,y)F_X(z-v)dv.$$

Quanto ao segundo integral duplo, a mudança de variável $v=u+y$ conduz a

$$\int_0^z\int_{u+y}^{\infty}f_X(x)dxdu=\int_y^{z+y}\left[1-F_X(v)\right]dv.$$

Assim,

$$G(z,y)-G(0,y)=\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z G(u,y)\left[1-F_X(z-u)\right]du-\int_y^{z+y}\left[1-F_X(u)\right]du\right].$$

Fazendo $z \to \infty$, vem

$$G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_y^{\infty} [1 - F_X(u)]\, du,$$

o que implica

$$P\left(U(T) \in (-y - dy, -y)\,,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right) = \frac{\lambda}{c}\,[1 - F_X(y)]\, dy. \qquad \blacksquare$$

Corolário 2.4.2. *A probabilidade de ruína para $u = 0$ é igual a*

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}. \tag{2.4.0.3}$$

Demonstração Integrando (2.4.0.1) em $y \in (0, \infty)$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= P(T < \infty \mid U(0) = 0) = P\left(U(T) \in (-\infty, 0)\,,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right) \\
&= \int_0^{\infty} P\left(U(T) \in (-y - dy, -y)\,,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right) dy \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{c}\,[1 - F_X(y)]\, dy = \frac{\lambda \mu_1}{c} = \frac{1}{1+\theta}.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

A última igualdade resulta da Definição 2.3.2.

Considere-se, agora, a variável aleatória L_1: "montante pelo qual as reservas, pela primeira vez, descem abaixo do nível inicial de onde partem, dado que tal acontece". Ou seja, se t_1 for o instante no qual, pela primeira vez, as reservas são inferiores ao montante de partida, posto que tal acontece, então $L_1 = u - U(t_1) = S(t_1) - ct_1$. Obviamente, L_1 tem a mesma distribuição do montante pelo qual o processo entraria em ruína (pela primeira vez e caso acontecesse) se se verificasse que $u = 0$. Pelo que:

$$\begin{aligned}
f_{L_1}(y) &= P\left(L_1 = y\right) = P\left(U(T) = -y \mid T < \infty, U(0) = 0\right) \\
&= \frac{P\left(U(T) = -y,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right)}{P\left(T < \infty \mid U(0) = 0\right)} \\
&= P\left(U(T) = -y,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right) \frac{1}{\psi(0)} \\
&= \frac{P\left(U(T) \in (-y - dy, -y)\,,\ T < \infty \mid U(0) = 0\right)}{dy} \frac{1}{\psi(0)} \\
&= \frac{\lambda}{dy \frac{1}{1+\theta}(1+\theta)\lambda\mu_1}\,[1 - F_X(y)]\, dy = \frac{1}{\mu_1}\,[1 - F_X(y)]\,.
\end{aligned} \tag{2.4.0.4}$$

Na penúltima igualdade, utiliza-se (2.4.0.3) e o Teorema 2.4.3. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
M_{L_1}(t) = E[e^{tL_1}] &= \int_0^\infty e^{ty}\frac{1}{\mu_1}[1-F_X(y)]dy \\
&= \frac{1}{\mu_1}\left[\left[\frac{(1-F_X(y))e^{ty}}{t}\right]_0^\infty + \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{ty}f_X(y)dy\right] \\
&= \frac{1}{\mu_1 t}\left[[e^{ty}-e^{ty}F_X(y)]_0^\infty + M_X(t)\right] \\
&= \frac{1}{\mu_1 t}(M_X(t)-1). \qquad (2.4.0.5)
\end{aligned}$$

Relembre-se que X é absolutamente contínua, sendo $f_X(x)$ a respetiva função densidade de probabilidade.

Teorema 2.4.4. *Para* $u \geq 0$*,*

$$\psi^{'}(u) = \frac{\lambda}{c}\left[\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x)dF_X(x) - (1-F_X(u))\right]. \qquad (2.4.0.6)$$

Demonstração Ora,

$$\psi(u) = P\left(T<\infty,\ N(dt)=0\right) + P\left(T<\infty,\ N(dt)=1\right) + P\left(T<\infty,\ N(dt)\geq 2\right).$$

Pelo que,

$$P\left(T<\infty,\ N(dt)=0\right) = P\left(T<\infty \mid N(dt)=0\right)P\left(N(dt)=0\right)$$
$$= P\left(T<\infty \mid U(dt)=u+cdt\right)P\left(N(dt)=0\right) = \psi(u+cdt)(1-\lambda dt).$$

Por outro lado, pode ter ocorrido uma só indemnização representada por X no intervalo $(0,dt]$ e esta poderá, ou não, ter provocado ruína:

$$P\left(T<\infty,\ N(dt)=1\right)$$
$$= P\left(T<\infty,\ X>u+cdt \mid N(dt)=1\right)\lambda dt + P\left(T<\infty,\ X\leq u+cdt \mid N(dt)=1\right)\lambda dt$$
$$= \lambda dt\left(1-F_X(u+cdt)\right) + \lambda dt\int_0^{u+cdt}\psi(u+cdt-x)dF_X(x).$$

Por fim, $P\left(T<\infty,\ N(dt)\geq 2\right) = o(dt)$. Em suma:

$$\psi(u) = (1-\lambda dt)\psi(u+cdt) + \lambda dt\int_0^{u+cdt}\psi(u+cdt-x)dF_X(x) + \lambda dt\left(1-F_X(u+cdt)\right) + o(dt).$$

Usando a igualdade anterior:

$$\begin{aligned}
\psi^{'}(u) &= lim_{dt\to 0}\frac{\psi(u+cdt)-\psi(u)}{cdt} \\
&= lim_{dt\to 0}\frac{\lambda}{c}\left[\psi(u+cdt) - \int_0^{u+cdt}\psi(u+cdt-x)dF_X(x) - \left(1-F_X\left(u+cdt\right)\right)\right] \\
&- \frac{o(dt)}{cdt} = \frac{\lambda}{c}\left[\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x)dF_X(x) - (1-F_X(u))\right].
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade, usa-se o facto de ψ ser contínua, que é consequência da definição de ψ. ■

2.5 A perda agregada máxima

No que se segue θ é o coeficiente de segurança e $\mu_1 = E[X]$.

Definição 2.5.1. Define-se perda agregada máxima como sendo a variável aleatória $L = \max_{t \geq 0}\{S(t) - ct\}$.

Noutras palavras, L representa o excesso máximo das indemnizações sobre os prémios recebidos. De outra forma, poder-se-á afirmar que L é o máximo do processo $\{L(t) : t \geq 0\}$, a perda agregada até o instante t: $L(t) = S(t) - ct$.

Teorema 2.5.1. *Para todo $u \geq 0$, $\psi(u) = 1 - F_L(u)$.*

Demonstração Para $U(0) = u$, verifica-se que $L > u$ se e só se acontece ruína, ou seja, $\exists t : U(t) < 0$. Logo, $P(L > u) = 1 - F_L(u) = \psi(u)$. ■

Teorema 2.5.2. *A função probabilidade de ruína é decrescente.*

Demonstração Sejam u_1 e u_2, com $u_1 \leq u_2$. Então $\psi(u_1) = 1-F_L(u_1) \geq 1-F_L(u_2) = \psi(u_2)$, uma vez que F_L é crescente. ■

Já se conseguiu demonstrar que $\psi(u)$ é uma função contínua, decrescente tal que $\lim_{u\to+\infty} \psi(u) = 0$ e que $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, como ilustra a figura seguinte.

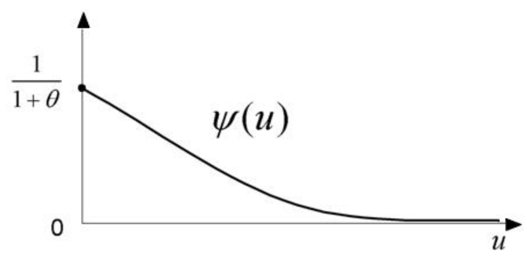

Figura 2.4: Probabilidade de Ruína Eventual

No intuito de clarificar o corolário seguinte é conveniente apresentar a definição de variável aleatória mista.

Definição 2.5.2. Sejam X uma variável aleatória e D o conjunto numerável dos pontos de descontinuidade de F_X, a função de distribuição de X. Se $D \neq \emptyset$ e $P(X \in D) < 1$, então X diz-se uma variável aleatória mista.

Corolário 2.5.1. *A variável aleatória L é mista, tendo ponto de massa de probabilidade em $L = 0$ e $P[L = 0] = \frac{\theta}{1+\theta}$.*

Demonstração Uma vez que $S(t) - ct = 0$ para $t = 0$ e que L é o máximo de $S(t) - ct$, com $t \geq 0$, então resulta que $L \geq 0$. Logo, $P[L = 0] = P[L \leq 0] = \frac{\theta}{1+\theta}$, pelo Teorema 2.5.1 e por (2.4.0.3).

Por outro lado, no Teorema 2.4.4, provou-se que $\psi(u)$ tem densidade, pelo que L é contínua para $u > 0$. Conclui-se que L é uma variável aleatória mista, tendo um ponto de massa em $L = 0$, sendo contínua para $u > 0$. ■

A perda agregada $L(t)$ juntamente com a perda agregada máxima L relativa à trajetória representada nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 encontra-se caracterizada na Figura 2.5:

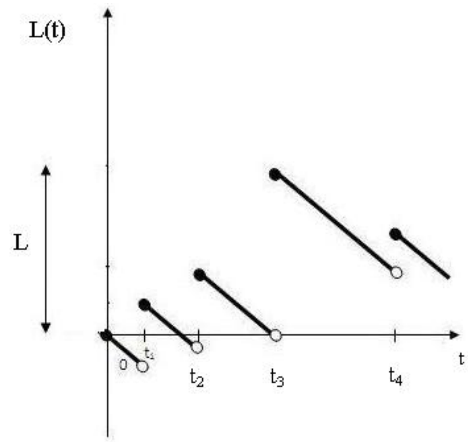

Figura 2.5: Processo da perda agregada com perda agregada máxima

Teorema 2.5.3. *A variável aleatória L possui a seguinte função geradora de momentos, para $r < \ln(1+\theta)$:*

$$M_L(r) = \frac{\theta \mu_1 r}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}. \tag{2.5.0.1}$$

Demonstração Considerem-se os instantes em que o processo $U(t)$ atinge novos recordes mínimos. A título de exemplo, no caso concreto representado na Figura 2.6, tais instantes são t_1, t_2, t_3 e inclusivamente $t = 0$, o instante do recorde número 0. Estes instantes correspondem aos momentos em que o processo de perda agregada $L(t)$ atinge novos recordes máximos.

Sejam, agora, as variáveis aleatórias L_i, $i \geq 1$, com L_i representando o montante pelo qual o i-ésimo recorde mínimo de $U(t)$ excede, em valor absoluto, o $(i-1)$-ésimo. Ora, L pode ser escrita como o somatório de K variáveis aleatórias L_i, ou seja, $L = \sum_{i=1}^{K} L_i$. Note-se que K é uma variável aleatória.

A título de exemplo, na Figura 2.6 verifica-se $L = L_1 + L_2 + L_3$.

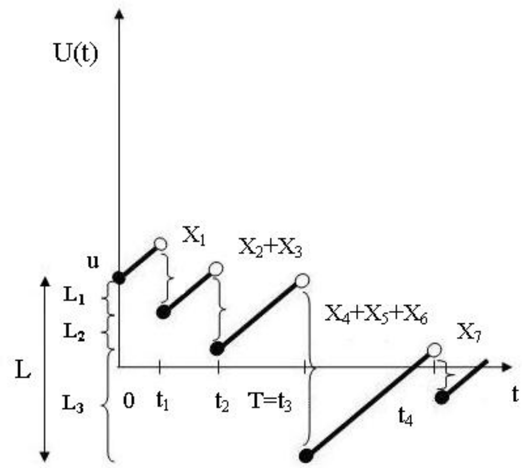

Figura 2.6: Processo U(t) com perda agregada máxima

Atribua-se a designação de sucesso ao acontecimento: "o recorde mínimo prévio do processo U foi o último". Considere-se p como a probabilidade deste acontecimento, isto é, a probabilidade de sucesso. Pelo facto do processo de Poisson homogéneo não ter memória, a probabilidade de que o recorde mínimo prévio seja o último é a mesma em qualquer instante. Ou seja, a probabilidade de serem necessárias k indemnizações para se alcançar um sucesso é $(1-p)^k p$. Logo, K segue uma distribuição geométrica. O parâmetro de K é igual a p, que é igual à probabilidade de sobrevivência do processo caso este partisse de $u = 0$, ou seja, $1 - \psi(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$. Também pelo facto do processo de Poisson homogéneo não ter memória, L_i, $i \geq 1$, são independentes e identicamente distribuídas, do que se conclui, atendendo a (2.4.0.4), que $f_{L_i}(y) = \frac{1}{\mu_1}[1 - F_X(y)]$, $\forall i \geq 1$. Uma vez que $L = \sum_{i=1}^{K} L_i$, segue-se que L tem uma distribuição geométrica composta e pode-se utilizar a fórmula de Beekman (ver [7]), isto é,

$$1 - \psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n H^{n*}(u), \tag{2.5.0.2}$$

com $p = \frac{\theta}{1+\theta}$ e $H(x) = 1 - \frac{1}{\mu_1}\int_x^\infty [1 - F_X(y)]\, dy$.

Como K é uma distribuição geométrica, vem

$$M_K(r) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{rk} p(1-p)^k = p \sum_{k=1}^{\infty} e^{rk}(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^r(1-p)\right]^k .$$

Conclui-se que $M_K(r)$ pode ser escrita à custa da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica de razão $e^r(1-p)$. Portanto,

$$M_K(r) = p \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \left(e^r(1-p)\right)^k}{1 - e^r(1-p)} = \frac{p}{1 - e^r(1-p)},$$

desde que $|e^r(1-p)| < 1 \Longleftrightarrow r < \ln(1+\theta)$.

Repare-se que na primeira igualdade se utilizou a expressão para a soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica. Continuando, e utilizando o facto de $p = \frac{\theta}{1+\theta}$, obtém-se

$$M_K(r) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}e^r} = \frac{\theta}{1+\theta-e^r}.$$

Ora, sendo L uma variável aleatória composta, e utilizando o Lema 2.3.2, vem:

$$M_L(r) = M_K\left(ln(M_{L_1}(r))\right) = \frac{\theta}{1+\theta-e^{\ln\left(M_{L_1}(r)\right)}} = \frac{\theta}{1+\theta-M_{L_1}(r)}.$$

Por (2.4.0.5), $M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r}(M_X(r) - 1)$, de onde se segue o resultado. ∎

Teorema 2.5.4. *A variável aleatória L possui o seguinte valor esperado e a seguinte variância:*

$$E[L] = \frac{\lambda E\left[X^2\right]}{2(c-\lambda\mu_1)};\ Var[L] = \frac{\lambda\left[4E\left[X^3\right](c-\lambda\mu_1) + 3\lambda\left(E\left[X^2\right]\right)^2\right]}{12(c-\lambda\mu_1)^2}.$$

Demonstração

Na demonstração do teorema anterior ficou provado que:

$$H(y) = P(L_i \le y) = 1 - \frac{1}{\mu_1}\int_y^\infty [1 - F_X(x)]\, dx = \frac{1}{\mu_1}\int_0^y [1 - F_X(x)]\, dx.$$

Pelo que o momento de ordem k é dado por

$$\begin{aligned}
E\left[L_i^k\right] &= \int_0^\infty x^k P(L_i = x)dx = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty x^k\left[1 - F_X(x)\right]dx \\
&= \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty x^k \int_x^\infty f_X(y)dydx = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty f_X(y)\int_0^y x^k dxdy \\
&= \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty \frac{y^{k+1}}{k+1} f_X(y)dy = \frac{1}{\mu_1}\frac{E\left[X^{k+1}\right]}{k+1}.
\end{aligned}$$

Do que resulta:

$$E\left[L_i\right] = \frac{1}{\mu_1}\frac{E\left[X^2\right]}{2};$$

$$Var\left[L_i\right] = E\left[L_i^2\right] - \left(E\left[L_i\right]\right)^2 = \frac{4E\left[X^3\right]\mu_1 - 3\left(E\left[X^2\right]\right)^2}{12\mu_1^2}.$$

Ora, tendo L uma distribuição geométrica composta, vem que, utilizando os Lemas 2.3.1 e 2.3.5:

$$E[L] = E[L_i]E[K] = \frac{1}{\mu_1}\frac{E\left[X^2\right]}{2}\frac{\psi(0)}{1-\psi(0)} = \frac{\lambda E\left[X^2\right]}{2(c-\lambda\mu_1)};$$

$$\begin{aligned}
Var[L] &= Var[L_i]E[K] + (E[L_i])^2 Var[K] \\
&= \left[\frac{E\left[X^3\right]}{3\mu_1} - \left(\frac{\left(E\left[X^2\right]\right)^2}{4\mu_1^2}\right)\right]\frac{\psi(0)}{1-\psi(0)} + \left(\frac{E\left[X^2\right]}{2\mu_1}\right)^2 \frac{\psi(0)}{(1-\psi(0))^2} \\
&= \frac{\lambda\left[4E\left[X^3\right](c-\lambda\mu_1) + 3\lambda\left(E\left[X^2\right]\right)^2\right]}{12(c-\lambda\mu_1)^2}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.5.5. *Verifica-se a seguinte igualdade:*

$$\int_0^\infty -\psi^{'}(u)e^{ur}du = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(M_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}. \tag{2.5.0.3}$$

Demonstração

Utilizando (2.5.0.1), é válida a seguinte decomposição da função geradora de momentos de L:

$$\begin{aligned}
M_L(r) &= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(M_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)} \\
&= P[L=0] + \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(M_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}.
\end{aligned} \tag{2.5.0.4}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
M_L(r) &= P(L=0)E\left[e^{rL} \mid L=0\right] + P(L>0)E\left[e^{rL} \mid L>0\right] \\
&= P(L=0) + P(L>0)\int_0^\infty e^{ru}\frac{f_L(u)}{P(L>0)}du = P(L=0) + \int_0^\infty e^{ru} f_L(u)du
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $u > 0$, $f_L(u) = -\psi^{'}(u)$, pelo que

$$M_L(r) = Pr[L=0] + \int_0^\infty e^{ru}(-\psi^{'}(u))du. \tag{2.5.0.5}$$

De (2.5.0.4) e (2.5.0.5) conclui-se o pretendido. ■

Nos dois próximos exemplos apresenta-se outra situação em que é possivel determinar explicitamente $\psi(u)$, fazendo uso do Teorema anterior e, por conseguinte, do conceito de perda agregada máxima. Relembre-se que já se calculou explicitamente a probabilidade de ruína no caso das indemnizações individuais seguirem uma distribuição exponencial.

Exemplo 2.5.1. Considere-se que X é uma mistura de exponenciais:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0,$$

com $A_i > 0$, $\beta_i > 0$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$.

Ora,

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r}, \quad \beta_1 > r, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Substituindo esta expressão em (2.5.0.3) fica-se, no segundo membro, com um quociente de polinómios em r, sendo n o grau do denominador:

$$\int_0^\infty -\psi^{'}(u) e^{ur} du = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i r_i}{r_i - r}, \tag{2.5.0.6}$$

com C_i constantes, r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, as raízes do polinómio do denominador do segundo membro e $r_i > r$.

$$\text{Dada a forma da equação (2.5.0.6), considere-se } \psi(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_i u}. \tag{2.5.0.7}$$

Derivando esta expressão, vem:

$$\int_0^\infty -\psi^{'}(u) e^{ur} du = \int_0^\infty e^{ur} \sum_{i=1}^{n} C_i r_i e^{-r_i u} du = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i r_i}{r_i - r}.$$

Ou seja, no caso em questão, $\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_i u}$ é solução de (2.5.0.6).

Exemplo 2.5.2. Concretize-se o exemplo anterior. Seja X uma mistura de duas exponenciais com $f_X(x) = \frac{3}{2} e^{-3x} + \frac{7}{2} e^{-7x}$. Claramente:

$$M_X(r) = \frac{\frac{3}{2}}{3 - r} + \frac{\frac{7}{2}}{7 - r} \text{ e } \mu_1 = E[X] = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{7} = \frac{5}{21}.$$

Como $n = 2$, vem:

$$\frac{1}{1+\theta} \frac{\theta(M_X(r) - 1)}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)} = \sum_{i=1}^{2} \frac{C_i r_i}{r_i - r}.$$

Substituindo, nesta equação, $M_X(r)$ e μ_1 pelas expressões anteriores e considerando $\theta = \frac{2}{5}$:

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(M_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)} = \frac{6}{7}\frac{5-r}{6-7r+r^2} = \frac{C_1}{1-r} + \frac{6C_2}{6-r}$$
$$\Longrightarrow C_1 = \frac{24}{35} \quad e \quad C_2 = \frac{1}{35}.$$

Pelo que, por (2.5.0.7), $\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}$, com $u \geq 0$.

2.6 Teoria do Renovamento

Seja $H(x)$ a função de distribuição de uma variável aleatória, com suporte $D_H = (0, \infty)$, $H(0) = 0$ e $H(\infty) = 1$. Uma equação de renovamento tem a forma

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)dH(y),$$

com $x \geq 0$, $H(x)$ e $z(x)$ conhecidas.

Considere-se $\{t_i\}_{i\geq 1}$, a sucessão dos tempos das i-ésimas indemnizações. Então $T_1 = t_1, T_2 = t_2 - t_1, \ldots, T_n = t_n - t_{n-1}$ são os intervalos de tempo entre renovamentos sucessivos e são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a uma variável T, com função de distribuição H.

Assim, $W_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ é o ponto do n-ésimo renovamento e $\{W_n : n \geq 0\}$ o processo de renovamento. Note-se que $\{W_n : n \geq 0\}$ coincide com o conjunto dos tempos de espera. Se $\widetilde{N}(y)$ for o número de renovamentos ocorridos em $[0, y]$ vem:

$$\widetilde{N}(y) > a \Leftrightarrow t_a \in [0,y] \Leftrightarrow P\left(\widetilde{N}(y) > a\right) = P\left(t_a \in [0,y]\right) \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^{a} T_i < y\right) = H^{*a}(y),$$

onde $H^{*a}(y)$ representa a convolução da função de distribuição das variáveis aleatórias $T_1, \ldots, T_a$. Desta forma, considerando $V(y)$ o número esperado de renovamentos ocorridos em $[0, y]$, vem:

$$V(y) = E\left[\widetilde{N}(y)\right] = \sum_{a=1}^{\infty} aP\left(\widetilde{N}(y) = a\right) = \sum_{a=0}^{\infty} P\left(T_1 + T_2 + \ldots + T_a < y\right).$$

Pretende-se, agora, determinar a equação de renovamento para V. Note-se que, para $x < y$, $E[\widetilde{N}(x) \mid T_1 = y] = 1$. De facto, se $x < y$ e o primeiro renovamento coincide com y, então o número esperado de renovamentos no intervalo $[0, x]$ é igual a 1, concretamente a origem, o renovamento zero. Para $x > y$, $E[\widetilde{N}(x) \mid T_1 = y] = 1 + E[\widetilde{N}(x-y)] = 1 + V(x-y)$. Ou seja, no caso de $x \geq y$, o número esperado de renovamentos posto que o primeiro coincide com y iguala o número esperado de renovamentos ocorridos no intervalo $[y, x]$ mais um, isto é, mais o renovamento na origem, considerado o renovamento zero. Desta forma:

$$E[\widetilde{N}(x) \mid T_1 = y] = 1 + V(x-y)\mathbf{1}_{x \geq y}(x), \text{ onde,}$$

sendo A um conjunto, vem que

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Ou seja,

$$V(x) = 1 + \int_0^x V(x-y)dH(y) = 1 + \int_0^x V(x-y)P[T = y]dy. \tag{2.6.0.1}$$

O valor esperado para o número de renovamentos no intervalo $[0, x]$ é igual à soma de 1 (renovamento zero) com o somatório do produto da probabilidade do primeiro renovamento ser igual a $y \leq x$ com o número de renovamentos ocorridos entre y inclusivé e x inclusivé (o número de renovamentos caso $T_1 = y$ menos 1), com y a variar entre 0 inclusivé e x inclusivé, para todo o $x \geq 0$.

Definição 2.6.1. Um processo diz-se extinguível ou transiente se $H(\infty) < 1$, isto é, se $\lim_{y \to \infty} P(T < y) < 1$.

Neste caso, H é a função de subdistribuição de T. A quantidade $1 - H(\infty)$ é a probabilidade de extinção. Por outro lado, $H^n(\infty) = \lim_{y \to \infty} P(T_1 + \ldots + T_n < y)$ é a probabilidade do processo não ter sido extinto antes do n-ésimo renovamento. Pelo que $(1 - H(\infty))H^n(\infty)$ é a probabilidade do n-ésimo renovamento ser exatamente o último.

Teorema 2.6.1. *Seja M a duração do processo, ou seja, o instante em que se extingue. M é tal que $P(M \leq t) = (1 - H(\infty))V(t) = (1 - H(\infty)) \sum_{n=0}^{\infty} H^{*n}(t)$.*

Demonstração Ver [7]. ■

2.7 Um modelo de risco a tempo discreto

Nesta secção faz-se referência a um modelo que é a versão discreta do modelo a tempo contínuo anterior. Considera-se a reserva ao fim de n anos como função da soma das indemnizações ocorridas nesse tempo, com o montante de prémios recebidos proporcional ao montante anual de prémios. Os resultados relativos ao modelo a tempo discreto considerado são análogos aos do modelo em tempo contínuo já descrito.

Definição 2.7.1. Para $n \in \mathbb{N}_0$, seja U_n a reserva associada a um risco de uma seguradora ao fim de um período n (após o n-ésimo ano, por exemplo). Denotando a reserva inicial por $U(0) = u$ e supondo o prémio global P_n ao fim de n anos como proporcional ao montante de prémios c em cada período (prémios anuais, por exemplo), ou seja, $P_n = cn$, vem $U = u + cn - S_n$, onde S_n corresponde à soma das indemnizações ocorridas nos primeiros n períodos relativos ao risco considerado, isto é, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Definição 2.7.2. Define-se instante de ruína como $T = min\{n \geq 0 : U_n < 0\}$, com a convenção de que $T = \infty$ é equivalente a $U_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.7.3. O coeficiente de ajustamento define-se como a única raiz positiva $r = R$ da equação $e^{-cr} M_X(r) = 1$.

Note-se que $e^{-cr} M_X(r) = 1 \Longleftrightarrow \ln(e^{-cr} M_X(r)) = 0 \Longleftrightarrow \ln(M_X(r)) = cr$. Ora, seja $S = X_1 + \ldots + X_N$, $N \sim Poisson(\lambda)$. Então $M_X(r) = e^{\lambda(M_X(r)-1)}$. Do que $\ln(M_X(r)) - cr = 0 \Longleftrightarrow \ln\left(e^{\lambda(M_X(r)-1)}\right) - cr = 0 \Longleftrightarrow \lambda(M_X(r) - 1) = cr$. Em suma, se S seguir uma distribuição de Poisson composta, então $e^{-cr} M_X(r) = 1 \Longleftrightarrow \lambda(M_X(r) - 1) = cr$. Repare-se que esta é uma das equações utilizadas para determinar o coeficiente de ajustamento no modelo contínuo abordado anteriormente.

Teorema 2.7.1. *Para uma reserva inicial* $u \geq 0$, $\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < \infty]}$.

Demonstração Análoga à demostração do Teorema 2.4.1. ■

Capítulo 3

Cálculo de prémios

3.1 Introdução

Um prémio é o pagamento que o detentor da apólice efetua para cobrir um determinado risco. Quando se refere a um risco X, está-se a referir à variável aleatória positiva que representa o valor das possíveis indemnizações que a seguradora poderá ter de assegurar. Denota-se por $\pi[X]$ o prémio cobrado pela seguradora para comportar o risco X. Este último é, assim, uma função de X e a regra que atribui um valor numérico a $\pi[X]$ é o que se chama de princípio de cálculo de prémio.

Neste capítulo, por vezes as possíveis indemnizações a serem suportadas pela seguradarora são o resultado do somatório de n indemnizações individuais, isto é, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, onde $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é a sucessão das indemnizações individuais, independentes entre si. É o dito modelo de risco individual. Neste caso, após o cálculo do prémio global $\pi[S_n]$, cumpre distribuí-lo pelas apólices individuais. Noutras palavras, calcula-se $\pi[X_i]$, para todo $1 \leq i \leq n$. Note-se que nem sempre $\pi[X_i] = \frac{\pi[S_n]}{n}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Todavia, no presente capítulo, apresentam-se igualmente cálculos relativos a prémios no âmbito do modelo de risco coletivo. Neste caso, $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, onde N é uma variável aleatória discreta positiva tomando apenas valores inteiros e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é a sucessão das indemnizações individuais identicamente distribuídas a uma variável aleatória X positiva, independentes entre si e independentes de N. A variável aleatória S diz-se composta e representa os possíveis valores para a totalidade das indemnizações que a seguradora poderá ter de suportar ao nível de um determinado risco. Em contrapartida, por assegurar S, a seguradora requere um prémio $\pi[S]$.

Por fim, também se fará uso do modelo clássico de risco em tempo discreto. Neste caso específico a unidade de tempo é normalmente um ano, c é o prémio $\pi[S]$, $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $N \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$. A variável aleatória S, neste caso, representa os possíveis valores para a totalidade das indemnizações a serem suportadas pela seguradora no período de uma unidade de tempo. Note-se que, nestes casos, se opera com o prémio $\pi[S]$, com S também uma variável aleatória composta.

3.2 Princípios de cálculo de prémios

Nesta secção apresentam-se vários princípios para o cálculo de prémios. Sublinhe-se que, como já se referiu, a variável aleatória positiva X que figura nas definições é geral, podendo representar uma variável aleatória que não é função de outras (Exemplo 3.2.1); ou uma variável aleatória que resulta da soma de n variáveis aleatórias, ao nível do modelo de risco individual, isto é, $X = S_n$ (Exemplo 3.2.4); ou, então, uma variável aleatória composta, $X = S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, normalmente inserida no contexto de um modelo clássico de risco (Exemplo 3.2.2).

Principia-se pelo princípio de cálculo mais elementar, o princípio do prémio líquido, evoluindo-se posteriormente para princípios mais complexos.

3.2.1 O princípio do prémio líquido

O princípio de cálculo de prémios mais simples é o princípio do prémio líquido ou prémio puro. Atesta simplesmente que o prémio P deve ser calculado da seguinte forma, com X um risco não negativo: $\pi[X] = E[X]$.

O valor esperado da variável aleatória das possíveis indemnizações a serem suportadas pela seguradora é igual ao prémio que esta cobra para cobrir o risco X. Este prémio, assim calculado, não protege a seguradora contra indemnizações elevadas e não tem em conta o seu natural intento de obtenção de lucro.

3.2.2 O princípio da esperança matemática

Para melhorar o princípio anterior, define-se um "parâmetro de segurança" α e calcula-se o prémio da seguinte forma: $\pi[X] = (1 + \alpha)E[X]$, $\alpha > 0$.

3.2.3 O princípio da utilidade esperada

O princípio da esperança matemática tem óbvias limitações, sobretudo relacionadas com o facto da esperança matemática ser uma medida de tendência central. Para as atenuar Bernoulli introduziu um conceito novo, o conceito de utilidade, que constituiu o marco inicial da teoria da utilidade esperada. Bernoulli argumentou que o valor que um indivíduo atribui à sua riqueza não é o próprio valor monetário desta, mas sim o seu valor "moral" ou utilidade. Nas suas palavras:

> " (...) a determinação do valor de um item não pode ser baseado no seu preço, mas sim na utilidade que ele fornece. O preço de um item depende somente do próprio item e é igual para todo o mundo; a utilidade, contudo, depende das circunstâncias particulares do indivíduo que faz a estimativa." (Bernoulli,1738).

Considerou ainda que, à medida que a riqueza aumenta, decresce a utilidade adicional devido ao aumento da riqueza. Mais formalmente, considera-se a utilidade como sendo uma função $u : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que a cada quantia monetária atribui a utilidade que o indivíduo lhe confere.

No fundo, o que o princípio da utilidade esperada afirma é que a utilidade que o segurado confere ao valor monetário do prémio que está disposto a pagar num seguro contra um risco X terá de ser inferior ou igual ao valor esperado das utilidades que atribui às quantias que X pode assumir. De onde que o prémio máximo P^+ que o segurado está disposto a pagar será, pelo princípio da utilidade esperada, soluçao da equação $u(P^+) = E[u(X)]$. Ou, então, tendo em conta o capital w que o segurado possui, é solução da equação $u(w - P^+) = E[u(w - X)]$. Formalmente:

Definição 3.2.1. O prémio máximo P^+ que um segurado com capital w está disposto a pagar num contrato de seguro contra um risco X é solução da seguinte equação de equilíbrio de utilidade $u(w - P^+) = E[u(w - X)]$.

Caso $u^{'}(x) \geq 0$ e $u^{''}(x) \leq 0$, isto é, caso a função de utilidade seja côncava, então $P >> E[X]$ e o indivíduo diz-se com aversão ao risco. Se $u^{'}(x) \geq 0$ e $u^{''}(x) \geq 0$, então a função de utilidade u é convexa e o decisor não tem aversão ao risco.

Definição 3.2.2. O coeficiente de aversão ao risco da função de utilidade u é definido por

$$r(x) = -\frac{u^{''}(x)}{u^{'}(x)}. \tag{3.2.3.1}$$

Refira-se ainda que existem várias classes de funções de utilidade:

1) Utilidade linear: $u(x) = x$;

2) Utilidade quadrática de parâmetro α: $u(x) = -(\alpha - x)^2,\ x \leq \alpha$;

3) Utilidade logarítmica de parâmetro α: $u(x) = \ln(\alpha + x),\ x > -\alpha$;

4) Utilidade exponencial de parâmetro α: $u(x) = -\alpha e^{-\alpha x},\ \alpha > 0$;

5) Utilidade de potência de parâmetro c: $u(x) = x^c,\ x > 0,\ 0 < c \leq 1$.

Do ponto de vista da seguradora, com função de utilidade u e capital w, esta aceita um seguro contra um risco X por um prémio P se $E[u(w+P-X)] \geq u(w)$. Isto é, a utilidade que a seguradora atribui ao seu capital inicial w deverá, no seu interesse, ser inferior ou igual ao valor esperado das utilidades que atribui aos diferentes possíveis montantes com que poderá ficar após a ocorrência dos eventos inerentes ao risco X, num determinado período de tempo. Daqui se define o seguinte:

Definição 3.2.3. O prémio mínimo P^- que uma seguradora com capital w pretende cobrar num contrato de seguro para cobrir um risco X é solução da seguinte equação: $u(w) = E[u(w + P^- - X)]$.

Exemplo 3.2.1. Uma seguradora tem uma função de utilidade $u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$, com $\alpha > 0$. Pretende-se determinar, pelo princípio da utilidade esperada, o prémio mínimo P^- que é pedido para um risco X, com $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$. Em primeiro lugar, cumpre determinar a função geradora de momentos de uma distribuição normal. Ora, sendo $Z \sim Normal(0,1)$, vem:

$$M_Z(t) = E\left[e^{Zt}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = e^{\frac{1}{2}t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}dz = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Utilizando a definição de função geradora de momentos, conclui-se que $M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx$. Mas $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, o que implica que $x = z\sigma + \mu$ e $\frac{dx}{dz} = \sigma$. Recorrendo a esta mudança de variável, resulta que

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\mu t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{z\sigma t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz = e^{\mu t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{z\sigma t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\ &= e^{\mu t}e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2} = e^{\left[\frac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t\right]}. \end{aligned} \qquad (3.2.3.2)$$

Por outro lado, utilizando a Definição 3.2.3, vem:

$$\begin{aligned} u(w) = E[u(w + P^- - X)] &\iff -\alpha e^{-\alpha w} = E[-\alpha e^{-\alpha(w+P^- -X)}] \\ &\iff e^{\alpha P^-} = M_X(\alpha) \\ &\iff P^- = \frac{1}{\alpha} \ln\left(M_X(\alpha)\right). \end{aligned}$$

Pelo que, combinando esta última expressão com (3.2.3.2), vem que

$$P^- = \frac{1}{\alpha} \ln\left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \mu\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \mu\alpha\right) = \frac{\sigma^2\alpha}{2} + \mu.$$

Ou seja, para assegurar o risco X, a seguradora solicitará ao segurado um prémio que, no mínimo, terá o valor de $\frac{\sigma^2\alpha}{2} + \mu$.

Exemplo 3.2.2. Considere-se que se está a operar no âmbito do modelo clássico de risco, com 1 ano como unidade temporal e com o número de indemnizações até o instante t representado por $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Então, como já se viu anteriormente, a totalidade das indemnizações por unidade de tempo (indemnizações anuais) em que a seguradora incorre é representada pela variável aleatória $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $N \sim Poisson(\lambda)$. Tome-se $\lambda = 1$. A função de utilidade da seguradora é $u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$, com $\alpha = 0.9$. As indemnizações individuais $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são independentes de N e independentes e identicamente distribuídas a $X \sim Exp(1)$. Pretende-se saber qual o prémio mínimo anual P^- que a seguradora deverá pedir pelo princípio da utilidade esperada.

Em primeiro lugar, note-se que, pelo Lema 2.4.1, se o prémio anual c for inferior ou igual a 1 ($E[X]\lambda = 1$), então a ruína será quase certa. Pelo que o prémio anual terá que ser estritamente superior a 1.

Ora, viu-se atrás que $u(w) = E[u(w + P^- - S)] \iff P^- = \frac{1}{\alpha} ln(M_S(\alpha))$. Então:

$$\begin{aligned} P^- &= \frac{1}{\alpha} \ln\left(M_N(\ln\left(M_X(\alpha)\right))\right) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(M_N\left(\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\ln\left(e^{\left[\frac{1}{1-\alpha}\right]}\right) + \ln\left(e^{[-1]}\right)\right] = \frac{1}{1-\alpha} = 10. \end{aligned}$$

Na primeira igualdade usa-se o Lema 2.3.2; na segunda, o cálculo da função geradora de momentos de uma distribuição exponencial, presente no Exemplo 2.3.1; na terceira, o Lema 2.3.3.

Então, no caso concreto, o modelo de risco adotado é: $U(t) = u + 10t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $N(t) \sim Poisson(t)$, com 1 ano como unidade temporal.

Note-se, para terminar, que, quando se aplica a função de utilidade exponencial, se verifica que $P^+ = P^- = \frac{1}{\alpha}\ln(M_X(\alpha))$. Com efeito,

$$\begin{aligned} u\left(w - P^+\right) = E[u(w-X)] &\Longleftrightarrow -\alpha e^{-\alpha\left(w-P^+\right)} = E[-\alpha e^{-\alpha(w-X)}] \\ &\Longleftrightarrow e^{\alpha P^+} = M_X(\alpha) \\ &\Longleftrightarrow P^+ = \frac{1}{\alpha}\ln(M_X(\alpha)). \end{aligned}$$

No Exemplo 3.2.1 provou-se que, na situação em questão, $P^- = \frac{1}{\alpha}\ln(M_X(\alpha))$.

3.2.4 O princípio exponencial

O princípio exponencial é assim definido para $\alpha > 0$: $\pi[X] = \frac{1}{\alpha}\ln(M_X(\alpha))$.

Constate-se que, no Exemplo 3.2.1 e no Exemplo 3.2.2, se aplicou o princípio da utilidade esperada com função utilidade exponencial $u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$, com $\alpha > 0$. Neste caso, como se viu, $P^- = \frac{1}{\alpha}\ln(M_X(\alpha))$. Pelo que pode-se igualmente dizer que se aplicou o dito princípio exponencial de parâmetro α.

De acordo com a Desigualdade de Lundberg (Corolário 2.4.1), a probabilidade de ruína nunca é superior a e^{-Ru}. Considerando ϵ como o limite superior da probabilidade de ruína para o montante inicial u, vem que $\psi(u) \leq \epsilon = e^{-Ru}$, o que implica

$$R = \frac{|\ln(\epsilon)|}{u}. \tag{3.2.4.1}$$

Mas $e^{Rc} = E[e^{RS}]$, por uma equação equivalente à da Definição 2.3.3, pelo que

$$c = \frac{1}{R}\ln(E[e^{RS}]). \tag{3.2.4.2}$$

Estabelecendo o prémio c desta forma, incorre-se numa probabilidade de ruína nunca superior a ϵ. Claramente, este prémio pode resultar da aplicação do princípio exponencial com parâmetro $R = \frac{|\ln(\epsilon)|}{u}$. Se S e $\sum_{i=1}^n X_i$ têm a mesma distribuição, n natural, atente-se no seguinte:

$$c = \frac{1}{R}\ln(E[e^{RS}]) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}\ln(E[e^{RX_i}]).$$

Ou seja, e segundo este princípio, após a determinação do prémio relativo a S, basta dividi-lo igualmente pelos pagamentos individuais X_i, supostos independentes. O prémio associado ao risco coletivo S é igual à soma dos prémios associados aos riscos individuais.

3.2.5 O princípio da variância

Outro princípio de cálculo do prémio é o princípio da variância, assim definido para $\alpha > 0$: $\pi[X] = E[X] + \alpha Var[X]$.

Note-se que, voltando ao prémio c definido em (3.2.4.2), desenvolvendo as funções exponencial e logarítmo em série de Taylor, vem:

$$M_S(R) = E[e^{RS}] = 1 + E[S]R + \frac{1}{2}E[S^2]R^2 + \frac{1}{6}E[S^3]R^3 + O(R^4) \tag{3.2.5.1}$$

$$\text{e} \quad \ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + O(z^4). \tag{3.2.5.2}$$

Então, usando (3.2.4.2), (3.2.5.1) e (3.2.5.2), tem-se que

$$\begin{aligned}
c = \pi[S] &= \frac{1}{R}\ln(M_S(R)) \\
&= \frac{1}{R}ln(1 + E[S]R + \frac{1}{2}E[S^2]R^2 + \frac{1}{6}E[S^3]R^3 + O(R^4)) \\
&= \frac{1}{R}(E[S]R + \frac{1}{2}E[S^2]R^2 + \frac{1}{6}E[S^3]R^3 + O(R^4) \\
&- \frac{1}{2}[E[S]^2R^2 + E[S]E[S^2]R^3 + O(R^4)] + \frac{1}{3}[E[S^3]R^3 + O(R^4)] + O(R^4)) \\
&= (E[S] + \frac{1}{2}(E[S^2] - E[S]^2)R + O(R^2)) \\
&\approx E[S] + \frac{R}{2}Var[S].
\end{aligned} \tag{3.2.5.3}$$

Ou seja, desprezando os termos de ordem superior a R^2, pode-se calcular c pelo princípio da variância, fazendo $\alpha = \frac{R}{2}$. Atente-se, agora, na definição seguinte.

Definição 3.2.4. A função geradora de cumulantes de uma variável aleatória X é definida por $K_X(r) = \ln(M_X(r))$, com r real.

Lema 3.2.1. *Seja X uma variável aleatória e $K_X(.)$ a respetiva função geradora de cumulantes. Determinando as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem de $K_X(r)$ e tomando $r = 0$, obtêm-se os primeiros três cumulantes de X, que se representam por K_k, $k = 1, 2, 3$ e satisfazem $K_1 = E[X], K_2 = Var[X], K_3 = E\left[(X - E[X])^3\right]$.*

Demonstração Por (3.2.5.1), vem:

$$M_X(r) = E[e^{rX}] = 1 + E[X]r + \frac{1}{2}E[X^2]r^2 + \frac{1}{6}E[X^3]r^3 + O(r^4).$$

Usando, agora, (3.2.5.1) e (3.2.5.2), e desprezando os termos de ordem superior a r^3:

$$\begin{aligned}
K_X(r) &= \ln\left(M_X(r)\right)\\
&= ln(1 + E[X]r + \frac{1}{2}E[X^2]r^2 + \frac{1}{6}E[X^3]r^3 + O(r^4))\\
&= E[X]r + \frac{1}{2}E[X^2]r^2 + \frac{1}{6}E[X^3]r^3 + O(r^4)\\
&- \frac{1}{2}[E[X]^2r^2 + E[X]E[X^2]r^3 + O(r^4)] + \frac{1}{3}[E[X^3]r^3 + O(r^4)] + O(r^4))\\
&\approx E[X]r + \frac{1}{2}Var[X]r^2 + E\left[(X - E[X])^3\right]\frac{1}{6}r^3. \qquad (3.2.5.4)
\end{aligned}$$

Derivando (3.2.5.4) em ordem a r:

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{dK_X}{dr}(r)\right|_{r=0} = E[X];\\
&\left.\frac{d^2K_X}{dr^2}(r)\right|_{r=0} = Var[X];\\
&\left.\frac{d^3K_X}{dr^3}(r)\right|_{r=0} = E\left[(X - E[X])^3\right]. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ora, em todos os prémios que são combinação linear de cumulantes (como é o caso do prémio definido por (3.2.5.3), que é combinação linear de K_1 e K_2), o prémio associado à variável aleatória da totalidade das indemnizações é igual à soma dos prémios associados aos riscos individuais.

3.2.6 O princípio do desvio padrão

O princípio do desvio padrão é definido por: $\pi[X] = E[X] + \alpha\sigma[X]$, onde $\alpha > 0$ e $\sigma[X]$ representa o desvio padrão do risco X.

Repare-se que, de acordo com este prémio, o excesso relativamente a $E[S]$ é proporcional ao desvio padrão de S.

Agora, e considerando 1 ano como a unidade de tempo, acrescente-se ao prémio c, calculado pelo princípio da variância (3.2.5.3), um dividendo anual iu, $0 \leq i \leq 1$, ou seja, uma percentagem do capital inicial. Vem que, se $c = \pi[S] = E[S] + \frac{R}{2}Var[S] + iu$ e $R = \frac{|\ln(\epsilon)|}{u}$, então

$$\pi[S] = E[S] + \frac{|\ln(\epsilon)|}{2u}Var[S] + iu. \qquad (3.2.6.1)$$

Agora, pretende-se escolher u por forma a que o prémio seja o mais competitivo possível, ou seja, o mais baixo possível. Então, derivando (3.2.6.1) em ordem a u, vem

$$\frac{\partial \pi[S]}{\partial u}(u) = 0 \Longleftrightarrow \frac{-2\left|\ln(\epsilon)\right|}{4u^2}Var[S] + i = 0$$
$$\Longrightarrow u = \sigma[S]\sqrt{\left|\ln(\epsilon)\right|/2i}, \quad \text{porque } u \geq 0.$$

Por outro lado:

$$\frac{\partial^2 \pi[S]}{\partial u^2}(u) = \frac{\left|\ln(\epsilon)\right| Var[S]}{u^3} > 0 \text{ para } u = \sigma[S]\sqrt{\left|\ln(\epsilon)\right|/2i}.$$

De onde vem que

$$u = \sigma[S]\sqrt{\left|\ln(\epsilon)\right|/2i} \tag{3.2.6.2}$$

minimiza (3.2.6.1).

Substituindo esta última equação em (3.2.6.1), vem:

$$\pi[S] = E[S] + \sigma[S]\sqrt{2i\left|\ln(\epsilon)\right|}. \tag{3.2.6.3}$$

Trata-se do prémio mais competitivo incorporando o dividendo em causa e originando uma probabilidade de ruína nunca superior a ϵ. Note-se que este prémio pode ser encarado como resultante da aplicação do princípio do desvio padrão com $\alpha = \sqrt{2i\left|\ln(\epsilon)\right|}$.

Neste prémio (ou seja, o prémio (3.2.6.1)), a soma dos prémios relativos aos riscos individuais independentes não iguala o prémio da soma desses riscos. Para determinar os prémios de n riscos independentes Bühlmann [8] sugeriu dois cálculos:

1) Cálculo do capital inicial ótimo

$$u = \sigma[S]\sqrt{\left|\ln(\epsilon)\right|/2i},$$

para S, i e ϵ.

2) Cálculo dos prémios para X_j, $1 \leq j \leq n$:

$$\pi[X_j] = E[X_j] + RVar[X_j], \quad R = \frac{\left|\ln(\epsilon)\right|}{u}. \tag{3.2.6.4}$$

Exemplo 3.2.3. Considere-se um portefólio consistindo em dois tipos, A e B, de riscos exponenciais de médias μ_1 e μ_2, respetivamente.

Tabela 3.1: Apólice hipotética.

Tipo	Número de riscos	Valor Esperado	Variância
A	n_1	μ_1	λ_1
B	n_2	μ_2	λ_1
Total	$n_1 + n_2$	$n_1\mu_1 + n_2\mu_2$	$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2$

Repare-se que $S_A = X_1 + \ldots + X_{n_1}$, X_j $(1 \leq j \leq n_1)$ independentes e identicamente distribuídas a $X \sim Exp\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$ e $S_B = Y_1 + \ldots + Y_{\mu_2}$, Y_j $(1 \leq j \leq \mu_2)$ independentes e identicamente distribuídas a $Y \sim Exp\left(\frac{1}{\mu_2}\right)$. Então se $S = S_A + S_B$ vem que

$$E[S] = E[S_A] + E[S_B] = n_1 E[X] + n_2 E[Y] = n_1\mu_1 + n_2\mu_2;$$

$$Var[S] = Var[S_A] + Var[S_B] = n_1 Var[X] + n_2 Var[Y] = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2.$$

Nas tabelas seguintes encontram-se os valores de u (definido em (3.2.6.2)) e de R (definido em (3.2.4.1)) ótimos bem como o prémio do portefólio (definido em (3.2.6.3)), os prémios para cada tipo de risco A e B (definidos em (3.2.6.2) e (3.2.6.4)) e os prémios da variância para A e B (definidos em (3.2.5.3)), tudo para um valor ϵ e para um valor de i, isto é, ϵ é um limite superior para a probabilidade de ruína e i uma determinada percentagem do capital inicial u requerida como retorno.

Tabela 3.2: R e u ótimos mais Prémio (3.2.6.3) para S

Princípio	Prémio do portfolio (3.2.6.3)	u ótimo (3.2.6.2)	R ótimo (3.2.4.1)
i	$n_1\mu_1 + n_2\mu_2$ $+\sqrt{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2}\sqrt{2i\left\|\ln(\epsilon)\right\|}$	$\sqrt{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2}$ $\times\sqrt{\left\|\ln(\epsilon)\right\|/2i}$	$\left(\sqrt{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2}\sqrt{\left\|\ln(\epsilon)\right\|/2i}\right)^{-1}$ $\times\left\|\ln(\epsilon)\right\|$

Para preencher a Tabela 3.2 faz-se:

$$u = \sigma[S]\sqrt{|\ln(\epsilon)|/2i} = \sqrt{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2}\sqrt{|\ln(\epsilon)|/2i};$$

$$R = \frac{1}{u}|\ln(\epsilon)| = \left(\sqrt{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2}\sqrt{|\ln(\epsilon)|/2i}\right)^{-1}|\ln(\epsilon)|; \tag{3.2.6.5}$$

$$\pi[S] = E[S] + \sigma[S]\sqrt{2i|\ln(\epsilon)|} = n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \sqrt{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2}\sqrt{2i|\ln(\epsilon)|}.$$

Tabela 3.3: Diferentes prémios utilizando o valor de R da tabela anterior

	Prémio para A	Prémio para B	Prémio pelo P. da variância para S_A	Prémio pelo P. da variância para S_B
Princípio	(3.2.6.4)	(3.2.6.4)	(3.2.5.3)	(3.2.5.3)
i	$\mu_1 + R\lambda_1$	$\mu_2 + R\lambda_2$	$\mu_1 + \frac{R}{2}\lambda_1$	$\mu_2 + \frac{R}{2}\lambda_2$

Por seu turno, para preencher a Tabela 3.3, faz-se, utilizando (3.2.6.5):

$$\pi[S_A] = E[S_A] + RVar[S_A] = \mu_1 + R\lambda_1 \quad \text{e} \quad \pi[S_B] = E[S_B] + RVar[S_B] = \mu_2 + R\lambda_2.$$

Calculando agora $\pi[S_A]$ e $\pi[S_B]$ pelo princípio da variância, fazendo $\alpha = \frac{R}{2}$ e calculando R por (3.2.6.5):

$$\pi[S_A] = E[S_A] + \frac{R}{2}Var[S_A] = \mu_1 + \frac{R}{2}\lambda_1 \quad \text{e} \quad \pi[S_B] = E[S_B] + \frac{R}{2}Var[S_B] = \mu_2 + \frac{R}{2}\lambda_2.$$

Exemplo 3.2.4. Concretize-se o exemplo anterior. Considere-se um portefólio consistindo em dois tipos, A e B, de riscos exponenciais de médias 7 e 3, respetivamente.

Tabela 3.4: Apólice hipotética.

Tipo	Número de riscos	Valor Esperado	Variância
A	10	7	49
B	20	3	9
Total	30	130	670

Na tabela seguinte encontram-se os valores de u (definido em (3.2.6.2)) e de R (definido em (3.2.4.1)) ótimos bem como o prémio do portefólio pelo princípio definido em (3.2.6.3), os prémios para A e B (definidos em (3.2.6.2) e (3.2.6.4)) e os prémios da variância para A e B (definidos em (3.2.5.3)), tudo para diferentes valores de i e considerando $\epsilon = 0.01$.

Consultando a Tabela 3.5, note-se que, por exemplo, para $i = 0.02$, se verifica que $10 \times 7.8134 + 20 \times 3.1494 = 141.122$, aproximadamente o prémio do portefólio. Ou seja, utilizando a sugestão de Bühlmann, o prémio para S utilizando (3.2.6.3) é, aproximadamente, igual à soma dos prémios para os riscos individuais. Pelo contrário, se se aplicar (3.2.6.3) a A e B obtém-se, respetivamente, 10.0044 e 4.2876, sendo que $10 \times 10.0044 + 20 \times 4.2876 = 185.796 \neq 141.1$. Isto é, o prémio (3.2.6.3) associado ao portefólio S é significativamente distinto da soma dos prémios (3.2.6.3) para os riscos individuais, como se previa.

Tabela 3.5: Diferentes prémios e R e u ótimos.

Princípio	Prémio do portfolio (3.2.6.3)	u ótimo (3.2.6.2)	R ótimo (3.2.4.1)	Prémio para A/B (3.2.6.4)	Prémio pelo P. da variância para S_A/S_B (3.2.5.3)
$i = 0.02$	141.1	277.74	0.0166	7.8134/3.1494	7.4067/3.0747
$i = 0.05$	147.57	175.66	0.0262	8.2838/3.2358	7.6419/3.1179
$i = 0.25$	169.2778	78.5555	0.0586	9.8714/3.5274	8.4357/3.2637

Analisando a tabela são várias as conclusões. Logicamente, quanto maior for o valor de i, maior é o prémio que resulta da aplicação de (3.2.6.3), como, aliás, se pode constatar na Tabela 3.5. Por outro lado, o capital inicial ótimo obedece à relação $u = \sigma[S]\sqrt{|\ln(\epsilon)|/2i}$, pelo que, quanto mais elevado o valor de i, menor o valor de u. Noutras palavras, quanto maior o retorno do capital inicial desejado pela seguradora, menor o valor do capital inicial u que torna o prémio (3.2.6.1) mínimo. Uma vez que R e u (ótimos) são inversamente proporcionais, então, à medida que o valor de i aumenta, também o valor de R se torna mais elevado, o que implica que os demais prémios presentes na Tabela 3.5 aumentam igualmente de valor. Note-se que todos os prémios aumentam com o aumento de i, o que é compreensível, pois, quanto maior for o retorno do capital inicial desejado pela seguradora, logicamente, mais elevados são os valores dos prémios que têm de solicitar aos clientes.

3.2.7 O princípio de risco ajustado

Cumpre agora atentar nos princípios do risco ajustado. O prémio é assim calculado, para uma função g côncava e crescente com $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$:

$$P = \int_0^\infty g(1 - F_X(x))dx, \tag{3.2.7.1}$$

onde $F_X(x)$ é a função de distribuição de X. Note-se que X pode representar qualquer tipo de risco, um risco no âmbito do modelo de risco coletivo, ou no âmbito do modelo de risco individual, ou um risco X que não é função de outras variáveis aleatórias.

Conforme a função g utilizada, assim o nome do princípio:

- Princípio da função potência dual: $g(x) = 1 - (1-x)^{\alpha},\ \alpha \geq 1$;

- Princípio do desvio absoluto de Denneberg:

$$g(x) = (1+\alpha)x\mathbf{1}_{[0,0.5)}(x) + [\alpha + (1-\alpha x)]\,\mathbf{1}_{[0.5,1]}(x),\ 0 \leq \alpha \leq 1;$$

- Princípio de Gini: $g(x) = (1+\alpha)x - \alpha x^2,\ 0 \leq \alpha \leq 1$;

- Princípio da função raiz quadrada:

$$g(x) = x\mathbf{1}_{\{0\}}(\alpha) + \frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} - 1}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(\alpha);$$

- Princípio da transformada PH (Proportional Hazard): $g(x) = x^{\frac{1}{\rho}},\ \rho \geq 1$;

- Princípio da função exponencial:

$$g(x) = x\mathbf{1}_{\{0\}}(\alpha) + \frac{1 - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(\alpha);$$

- Princípio da função logarítmica:

$$g(x) = x\mathbf{1}_{\{0\}}(\alpha) + \frac{\ln(1+\alpha x)}{\ln(1+\alpha)}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(\alpha).$$

O Princípio da transformada PH (Proportional Hazard) é o mais utilizado. De agora em diante, sempre que se mencionar o princípio do risco ajustado, está-se, concretamente, a referir ao princípio da transformada PH. Fica-se, então, com

$$\pi[X] = \int_0^{\infty} [P(X > x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx, \tag{3.2.7.2}$$

com $\rho \geq 1$, ρ o índice de risco e F a funçao de distribuição do risco X. Ou, então, supondo a existência de uma variável aleatória X^* não negativa tal que a sua função de distribuição H é tal que $1 - H(x) = [1 - F(x)]^{\frac{1}{\rho}}$, vem que $\pi[X] = E[X^*]$.

3.2.8 O princípio da utilidade nula

No sentido de atribuir pesos superiores a indemnizações superiores, a seguradora adota uma função de utilidade u estritamente crescente e estritamente côncava ($u'(x) > 0$ e $u''(x) < 0$). Pretende-se que a utilidade do capital w que a seguradora possui inicialmente iguale o valor esperado da utilidade da quantia com que a seguradora fica após a ocorrência do risco X, ou seja, $\pi[X]$ é solução da equação:

$$u(w) = E[u(w + \pi[X] - X)]. \tag{3.2.8.1}$$

Assim, o prémio, aqui, depende da quantia inicial w da seguradora. O que se não verifica com a função de utilidade linear nem com a exponencial. Facto que, no caso da função de utilidade exponencial, conduz a:

$$-\alpha e^{-\alpha w} = E\left[-\alpha e^{-\alpha(w+\pi[X]-X)}\right] \Longleftrightarrow u(0) = E[u(\pi[X]-X)]. \tag{3.2.8.2}$$

3.2.9 O princípio de Esscher

O princípio de Esscher é assim definido para $h>0$: $\pi[X] = \frac{E[Xe^{hX}]}{M_X(h)}$.

Este prémio não é mais do que o prémio puro para uma variável aleatória X^*, relacionada com X da seguinte forma. Supondo X absolutamente contínua em $(0,\infty)$ e f a sua função densidade, X^* é tal que a sua função densidade g é dada por:

$$g(x) = \frac{e^{hx}f(x)}{M_X(h)}. \tag{3.2.9.1}$$

Então, para $h>0$, $\pi[X] = E[X^*] = \int_0^\infty x\frac{e^{hx}f(x)}{\int_0^\infty e^{hx}f(x)dx}dx = \frac{E[Xe^{hX}]}{M_X(h)}$.

*Obs.*1 A função de distribuição de X^* é dada, para $x \geq 0$, por $G(x) = \frac{\int_0^x e^{hy}f(y)dy}{M_X(h)}$.

*Obs.*2 A função G é igualmente denominada de transformada de Esscher de F_X com parâmetro h, sendo que F_X é a função de distribuição de X.

*Obs.*3 A função geradora de momentos de X^* satisfaz:

$$M_{X^*}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}. \tag{3.2.9.2}$$

Com efeito, $M_{X^*}(t) = E[e^{tX^*}] = \frac{\int_0^\infty e^{tx}e^{hx}f(x)dx}{M_X(h)} = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$.

3.2.10 O princípio do percentil

Este princípio estipula que $\pi[X] = min\{p : F_X(p) \geq 1-\epsilon\},\ 0 \leq \epsilon \leq 1$.

Neste princípio a probabilidade de uma perda, no risco X, é no máximo ϵ. Com efeito, para um risco X, $0 \leq \epsilon \leq 1$ e $p \geq 0$, note-se que $F_X(p) \geq 1-\epsilon \Longleftrightarrow P(X>p) \leq \epsilon$.

3.2.11 O princípio da perda máxima

O princípio da perda máxima determina que $\pi[X] = min\{p : F_X(p) = 1\}$.

Este princípio dá origem a um prémio que, preferencialmente, deverá ser o prémio máximo para o risco X. No fundo, este princípio preconiza que o valor do prémio deve igualar o valor máximo que o risco pode assumir, isto é, o prémio deve igualar a perda máxima possível.

3.3 Exemplos de cálculo de prémios

Pretende-se calcular os diversos valores do prémio de acordo com todos os princípios de prémio explorados, e pretende-se que tal seja feito em condições semelhantes. Opera-se segundo o modelo clássico de risco, com 1 ano como unidade temporal, isto é, $U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $u = U(0)$, $N(t)$ um processo de Poisson homogéneo, com $N(t) \sim Poisson(t)$, $t \geq 0$. Então, como já foi visto anteriormente, S é a variável aleatória da totalidade das indemnizações anuais possíveis, sendo que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $N \sim Poisson(1)$. Neste caso, considere-se que os termos da sucessão das indemnizações individuais $\{X_i\}_{i\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a $X \sim Exp(1)$. Pretendem-se obter os diversos valores de $c = \pi[S]$ obtidos pela utilização dos diferentes princípios de cálculo de prémios abordados.

Principie-se por notar que, de acordo com o Lema 2.4.1, o prémio tem de ser estritamente superior a 1 ($\lambda\mu_1 = 1$) para evitar uma ruína quase certa. No que se segue $\alpha = 0.1$.

Princípio do prémio líquido

Atendendo a (2.3.1), vem que $\pi[S] = E[S] = E[N]E[X] = 1$.

Princípio da esperança matemática

$\pi[S] = (1 + 0.1)E[S] = 1.1$

Princípio da utilidade esperada; princípio exponencial; princípio da utilidade nula

Pretende-se, agora, aplicar o princípio da utilidade esperada com $u(x) = -0.1e^{-0.1x}$, que é equivalente ao princípio exponencial fazendo $\alpha = 0.1$ e equivalente ao princípio da utilidade nula com $u(x) = -0.1e^{-0.1x}$. Ora, no Exemplo 2.3.1, mostrou-se que, neste caso, $P^- = \frac{1}{\alpha}\ln(M_S(\alpha)) = \frac{1}{1-\alpha}$. Pelo que $P^- = \frac{1}{1-0.1} \approx 1.111$.

Princípio da variância

Por (2.3.5), $Var[S] = E[N]Var[X] + E[X]^2Var[N] = 2$. Pelo que $\pi[S] = E[S] + 0.1Var[S] = 1.2$

Princípio do desvio padrão

$\pi[S] = E[S] + 0.1\sqrt{Var[S]} = 1.1$.

Princípio do risco ajustado

É necessário determinar uma expressão para a função de distribuição de S.

Lema 3.3.1. *Seja* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a* $X \sim Exp(1)$. *Então* $f_{X_1+\ldots+X_n}(s) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s}$, $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

A prova decorre por indução. Em primeiro lugar, note-se que a igualdade se verifica trivialmente para $n = 1$. Por outro lado, $X_1 + \ldots + X_{n+1} = \underbrace{X_1 + \ldots + X_n}_{Y} + X_{n+1}$. Admitindo que $n \in \mathbb{N}$ verifica a condição do Lema 3.3.1, vem que $f_Y(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$, pelo que

$$\begin{aligned} f_{Y+X_{n+1}}(s) &= f_Y(s) * f_X(s) = \int_0^s f_X(s-x)f_Y(x)dx = \int_0^s e^{(x-s)}\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-x}dx \\ &= \frac{s^n}{n!}e^{-s} = \frac{s^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)!}e^{-s}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução matemática, conclui-se o pretendido. ■

Lema 3.3.2. *Sejam* $\{X_i\}_{i\geq 1}$*uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a* $X \sim Exp(1)$ *e independentes de* N, $N \sim Poisson(1)$, $S = X_1 + \ldots + X_N$. *Então*

$$f_S(s) = \frac{e^{-(s+1)}}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!(n-1)!},\ s > 0. \tag{3.3.0.1}$$

Demonstração

Opera-se agora, para $s > 0$, no modelo coletivo de risco $S = X_1 + \ldots + X_N$, $N \sim Poisson(1)$, $X \sim Exp(1)$, isto é, X é somado um número aleatório de vezes. Utilizando o Lema 3.3.1, vem

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) f_{X_1+\ldots+X_n}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s} = \frac{e^{-(s+1)}}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!(n-1)!}. \end{aligned}$$

■

Ora,

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s \frac{e^{-(x+1)}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n-1)!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^s \frac{e^{-(x+1)}}{x}\frac{x^n}{n!(n-1)!}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\int_0^s e^{-x}x^{n-1}dx. \end{aligned}$$

Note-se que a segunda igualdade é possível porque $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n-1)!}$ é uniformemente convergente. Mas, integrando por partes:

$$\int_a^b e^{-x}x^{n-1}dx = \left[-e^{-x}x^{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1}\left[\prod_{j=1}^{k-1}(n-j)\right]e^{-x}x^{n-k} - \left[\prod_{j=1}^{n-1}(n-j)\right]e^{-x}\right]_a^b.$$

Deste modo, voltando ao cálculo de $F_S(s)$:

$$\begin{aligned}
F_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\int_0^s e^{-x}x^{n-1}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\left[-e^{-x}x^{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{k-1}(n-j)\right)e^{-x}x^{n-k} - \left(\prod_{j=1}^{n-1}(n-j)\right)e^{-x}\right]_0^s \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\left[-e^{-s}s^{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{k-1}(n-j)\right)e^{-s}s^{n-k} - \left(\prod_{j=1}^{n-1}(n-j)\right)e^{-s} + \prod_{j=1}^{n-1}(n-j)\right].
\end{aligned} \tag{3.3.0.2}$$

Para calcular $\pi[S]$, para $\rho \geq 1$, substitui-se (3.3.0.2) em $\pi[S] = \int_0^{\infty}[1-F_S(s)]^{\frac{1}{\rho}}ds$. Tal cálculo é complexo e não será efetuado nesta tese.

Princípio de Esscher

Calcula-se de seguida o prémio pelo princípio de Esscher, com $h > 0$.

$$\begin{aligned}
E[Se^{hS}] &= \int_0^{\infty} se^{hs}f_S(s)ds = \int_0^{\infty} se^{hs}\frac{e^{-(s+1)}}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!(n-1)!}ds \\
&= \int_0^{\infty} e^{(h-1)s-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!(n-1)!}ds = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\int_0^{\infty}e^{(h-1)s}s^n ds.
\end{aligned}$$

A quarta igualdade é possível porque $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!(n-1)!}$ é uniformemente convergente. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
E[e^{hS}] &= \int_0^{\infty} e^{hs}f_S(s)ds = \int_0^{\infty} e^{hs}\frac{e^{-(s+1)}}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!(n-1)!}ds \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{hs}\frac{e^{-s}e^{-1}}{s}\frac{s^n}{n!(n-1)!}ds = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\int_0^{\infty}e^{(h-1)s}s^{n-1}ds.
\end{aligned}$$

Desta forma:

$$\pi[S] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\int_0^{\infty}e^{(h-1)s}s^n ds}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\int_0^{\infty}e^{(h-1)s}s^{n-1}ds}.$$

Como é óbvio, o cálculo do prémio pela última expressão seria complexo. Apresenta-se, de seguida, outra abordagem possível ao problema. Relembre-se que o prémio pelo princípio de Esscher pode igualmente ser calculado como sendo o valor esperado de uma outra variável aleatória, denominada anteriormente de X^* e, no caso concreto, de S^* . Esta nova abordagem consiste, simplesmente, em notar que $E[S^*] = \frac{dK_{S^*}}{dt}(0)$, pelo Lema 3.2.1. Ora, e fazendo os cálculos considerando, agora, para generalizar, que cada um dos termos da sucessão $\{X_i\}_{i\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, e que $N \sim Poisson(\beta)$, $\beta > 0$, com $S = X_1 + \ldots + X_N$, vem, utilizando (3.2.9.2), que para $h > 0$

$$M_{S^*}(t) = \frac{M_S(t+h)}{M_S(h)} = \frac{M_N\left(\ln\left(M_X(t+h)\right)\right)}{M_N\left(\ln\left(M_X(t)\right)\right)} = \frac{e^{\beta(M_X(t+h)-1)}}{e^{\beta(M_X(h)-1)}} = \frac{e^{\beta E\left[e^{X(t+h)}\right]}}{e^{\beta E\left[e^{Xh}\right]}}.$$

Pelo que:

$$K_{S^*}(t) = \ln\left(\frac{e^{\beta E\left[e^{X(t+h)}\right]}}{e^{\beta E\left[e^{Xh}\right]}}\right) = \beta E\left[e^{X(t+h)}\right] - \beta E\left[e^{Xh}\right].$$

Logo, $\pi[S] = E[S^*] = \frac{dK_{S^*}}{dt}(0) = \beta E\left[Xe^{hX}\right]$.

Considerando, agora, $0 < h < 1$:

$$\pi[S] = \beta E\left[Xe^{hX}\right] = \beta\lambda\int_0^\infty xe^{hx}e^{-\lambda x}dx = \beta\lambda\int_0^\infty xe^{(h-\lambda)x}dx = \frac{\beta\lambda}{(h-1)^2}.$$

Demonstrou-se, desta forma:

Lema 3.3.3. *Seja $\{X_i\}_{i\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, e independentes de N, $N \sim Poisson(\beta)$, $\beta > 0$, e $S = X_1 + \ldots + X_N$. Então, pelo princípio de Esscher, $\pi[S] = \frac{\beta\lambda}{(h-1)^2}$, $\quad 0 < h < 1$.*

No caso concreto, $\lambda = 1$ e $\beta = 1$. Considerando, por exemplo, $h = \frac{1}{2}$, vem que $\pi[S] = \frac{1}{(\frac{1}{2}-1)^2} = 4$. Nos anexos, figura um programa que implementa este Lema.

Princípio do percentil

O prémio pelo princípio do percentil calcula-se resolvendo em ordem a s a seguinte equação, para $0 \leq \epsilon \leq 1$: $F_S(s) = 1 - \epsilon$.

O que, por (3.3.0.2), é equivalente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!(n-1)!}\left[-e^{-s}s^{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{k-1}(n-j)\right)e^{-s}s^{n-k} - \left(\prod_{j=1}^{n-1}(n-j)\right)e^{-s} + \prod_{j=1}^{n-1}(n-j)\right] = 1-\epsilon.$$

Está-se, uma vez mais, perante um cálculo muito complexo, que não será efetuado na presente tese.

3.4 Propriedades dos princípios de cálculo de prémios

De seguida, apresentam-se algumas propriedades possíveis dos princípios de prémios $\pi[X]$:

1) $\pi[X] \geq E[X]$ (carga não negativa);
2) Se existir x_m finito tal que x_m é máximo de X, então $\pi[X] \leq x_m$ (não existência de preço excessivo);
3) $\forall c > 0$, $\pi[X + c] = \pi[X] + c$ (consistência);
4) Se X e Y são independentes, então $\pi[X + Y] = \pi[X] + \pi[Y]$(aditividade);
5) $\forall X, Y$, $\pi[X] = \pi[\pi[X \mid Y]]$ (iteratividade);
6) Se $a > 0$, $\pi[aX] = a\pi[X]$ (invariância da escala ou homogeneidade).

No que se segue, sejam X um risco positivo, x_m (finito) máximo de X, $\alpha, c, a > 0$; em 4) X e Y são variáveis aleatórias independentes; em 5) variáveis aleatórias quaisquer.

3.4.1 Propriedades do princípio do prémio líquido

Relembre-se que, de acordo com este princípio, $\pi[X] = E[X]$. O princípio do prémio líquido satisfaz as seis propriedades enunciadas.

1) Claramente este princípio verifica a condição de carga não negativa.
2) O princípio do prémio líquido obedece igualmente a propriedade de preço não excessivo. Com efeito, $\pi[X] = E[X] = \int_\Omega XdP = \int_{\{X \leq x_m\}} XdP \leq x_m$.
3) O princípio do prémio líquido é consistente. Com efeito, $\pi[X + c] = E[X + c] = E[X] + c = \pi[X] + c$.
4) Este princípio é aditivo, pois $\pi[X + Y] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \pi[X] + \pi[Y]$. Note-se que aqui não é necessário invocar a independência entre X e Y uma vez que o resultado segue da linearidade do integral.
5) Esta propriedade é verificada, pois $\pi[\pi[X \mid Y]] = E[E[X \mid Y]] = E[X]$. A primeira igualdade resulta da aplicação da definição do prémio líquido. A segunda do facto de, para quaisquer variáveis aleatórias Z e W, se verificar que $E[Z] = E[E[Z \mid W]]$.

6) Por fim, o princípio em causa é também invariante à escala, pois $\pi[aX] = E[aX] = aE[X] = a\pi[X]$. Note-se que o resultado decorre da linearidade da esperança matemática.

3.4.2 Propriedades do princípio da esperança matemática

O princípio da esperança matemática estipula que $\pi[X] = (1+\alpha)E[X]$ e apenas verifica as condições da carga não negativa e da aditividade.

1) O princípio da esperança matemática satisfaz a condição da carga não negativa. Com efeito, $\pi[X] = (1+\alpha)E[X] \geq E[X]$, pois $\alpha > 0$.

2) Esta propriedade não é verificada. Por exemplo, se o risco X for tal que $P(X = a) = 1$, então $E[X] = a$ e $\pi[X] = (1+\alpha)E[X] = (1+\alpha)a > a$, uma vez que $\alpha > 0$.

3) Este princípio não é consistente. De facto,

$$\pi[X+c] = (1+\alpha)E[X+c] = \pi[X] + (1+\alpha)c > \pi[X] + c, \text{ pois } \alpha > 0.$$

4) O princípio é aditivo:

$$\pi[X+Y] = (1+\alpha)E[X+Y] = (1+\alpha)E[X] + (1+\alpha)E[Y] = \pi[X] + \pi[Y].$$

Note-se que este resultado também seria válido para variáveis aleatórias não independentes uma vez que somente se utiliza a linearidade da esperança matemática.

5) O princípio em causa não satisfaz esta propriedade. Senão repare-se:

$$\begin{aligned}\pi[\pi[X \mid Y]] &= \pi[(1+\alpha)E[X \mid Y]] = (1+\alpha)E[(1+\alpha)E[X \mid Y]] \\ &= (1+\alpha)^2 E[E[X \mid Y]] = (1+\alpha)^2 E[X] \neq (1+\alpha)E[X] = \pi[X].\end{aligned}$$

6) O princípio da esperança matemática obedece à propriedade da invariância da escala:

$$\pi[aX] = (1+\alpha)E[aX] = a(1+\alpha)E[X] = a\pi[X].$$

O resultado, mais uma vez, decorre da linearidade da esperança matemática.

3.4.3 Propriedades do princípio exponencial

O princípio exponencial determina que $\pi[X] = \frac{1}{\alpha}ln(M_X(\alpha))$. Este princípio apenas não obedece à condição da homogeneidade.

1) O princípio exponencial satisfaz a condição da carga negativa. Calculando $\pi[X]$ usando o desenvolvimento em série de Taylor da função exponencial e da função logarítmo vem:

$$\begin{aligned}\pi[X] &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X}\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\left(E[X]\alpha + \frac{1}{2}E\left[X^2\right]\alpha^2 + O(\alpha^3)\right)\\ &= E[X] + \frac{1}{2}E[X^2]\alpha + \ldots \geq E[X], \quad \text{porque } \alpha > 0.\end{aligned}$$

2) Este princípio satisfaz obviamente a condição do preço não excessivo. De facto, $\pi[X] = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X}\right]\right) \leq \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha x_m}\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(e^{\alpha x_m}\right) = x_m$.

3) A condição da consistência é satisfeita:

$$\pi[X+c] = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha(X+c)}\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(E\left[e^{\alpha X}\right]\right) + \ln\left(e^{\alpha c}\right)\right) = \pi[X] + c.$$

4) O princípio exponencial obedece à propriedade da aditividade. De facto,

$$\begin{aligned}\pi[X+Y] &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha(X+Y)}\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha(X)}\right]E\left[e^{\alpha(Y)}\right]\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X}\right]\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha Y}\right]\right) = \pi[X] + \pi[Y].\end{aligned}$$

A segunda igualdade advém do facto de X e Y serem independentes.

5) O princípio exponencial verifica a propriedade da iteratividade:

$$\begin{aligned}\pi\left[\pi[X \mid Y]\right] &= \pi\left[\frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X} \mid Y\right]\right)\right] = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha\pi[X|Y]}\right]\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\left(\alpha\frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X}|Y\right]\right)\right)}\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[E\left[e^{\alpha X} \mid Y\right]\right]\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X}\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(M_X(\alpha)\right) = \pi[X].\end{aligned}$$

É conveniente precisar que a quinta igualdade é, uma vez mais, consequência do facto de, para quaisquer variáveis aleatórias Z e W, se verificar que $E[Z] = E[E[Z \mid W]]$. Neste caso, tal relação aplica-se à variável aleatória composta $Z = e^{\alpha X}$ e à variável aleatória Y.

6) Não é um princípio homogéneo, pois $\pi[aX] = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha a X}\right]\right) \neq a\pi[X] = \frac{a}{\alpha}\ln\left(E\left[e^{\alpha X}\right]\right)$.

3.4.4 Propriedades do princípio da variância

O prémio $\pi[X]$ segundo o princípio da variância é assim calculado: $\pi[X] = E[X] + \alpha Var[X]$, $\alpha > 0$. Satisfaz três das propriedades enunciadas, concretamente a carga não negativa, a consistência e a aditividade.

1) O princípio da variância claramente verifica o princípio da carga não negativa. Como é óbvio, $\pi[X] = E[X] + \alpha Var[X] \geq E[X]$, uma vez que $\alpha > 0$.

2) A condição do preço não excessivo não é verificada. Considere-se o seguinte exemplo. O risco X é tal que $P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}$, $a, b > 0$, $a < b$. Então $E[X] = \frac{a+b}{2}$ e $Var[X] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

   Logo, $\pi[X] = \frac{a+b}{2} + \alpha\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 > b$ se $\alpha > \frac{2}{b-a}$.

3) O princípio é consistente. Com efeito, $\pi[X + c] = E[X + c] + \alpha Var[X + c] = E[X] + \alpha Var[X] + c = \pi[X] + c$.

4) Este princípio é aditivo, pois $\pi[X + Y] = E[X + Y] + \alpha Var[X + Y] = E[X] + E[Y] + \alpha Var[X] + \alpha Var[Y] = \pi[X] + \pi[Y]$. Note-se que a segunda igualdade apenas é possível pelo facto de X e Y serem independentes.

5) A condição da iteratividade não é satisfeita. De facto,

$$
\begin{aligned}
&\pi[\pi[X \mid Y]] = \pi\Big[E[X \mid Y] + \alpha Var[X \mid Y]\Big] \\
&= E\Big[E[X \mid Y] + \alpha Var[X \mid Y]\Big] + \alpha Var\Big[E[X \mid Y] + \alpha Var[X \mid Y]\Big] \\
&= E[E[X \mid Y]] + \alpha E[Var[X \mid Y]] + \alpha Var[E[X \mid Y]] + \alpha^2 Var[Var[X \mid Y]] \\
&+ 2\alpha^2 Cov\left(E[X \mid Y], Var[X \mid Y]\right) \\
&= E[X] + \alpha\left(E[Var[X \mid Y]] + Var[E[X \mid Y]]\right) + \alpha^2 Var[Var[X \mid Y]] \\
&+ 2\alpha^2 Cov\left(E[X \mid Y], Var[X \mid Y]\right) \\
&= E[X] + \alpha Var[X] + \alpha^2\left(Var[Var[X \mid Y]] + 2Cov\left(E[X \mid Y], Var[X \mid Y]\right)\right) \\
&= \pi[X] + \alpha^2\left(Var[Var[X \mid Y]] + 2Cov\left(E[X \mid Y], Var[X \mid Y]\right)\right) \\
&\neq \pi[X].
\end{aligned}
$$

   A quinta igualdade justifica-se pela fórmula da decomposição da variância: $Var[Z] = Var[E[Z \mid W]] + E[Var[Z \mid W]]$, Z e W variáveis aleatórias (ver Lema 2.3.5).

6) O princípio da variância não é invariante à escala. De facto, $\pi[aX] = E[aX] + \alpha Var[aX] = aE[X] + \alpha a^2 Var[X]$, pelo que pode-se verificar que $\pi[aX] \neq a\pi[X]$ se $a \neq \pm 1$.

3.4.5 Propriedades do princípio do desvio padrão

Este princípio, recorde-se, preconiza que o prémio deve ser assim calculado: $\pi[X] = E[X] + \alpha\sigma[X],\ \alpha > 0$. Satisfaz apenas três das propriedades enunciadas, nomeadamente a carga não negativa, a consistência e a invariância da escala.

1) O princípio do desvio padrão satisfaz a condição da carga não negativa. Claramente, $\pi[X] = E[X] + \alpha\sigma[X] \geq E[X]$, pois $\alpha > 0$.

2) A condição do preço não excessivo não é verificada. Considere-se o exemplo já abordado anteriormente. O risco X é tal que $P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}$, $a, b > 0$, $a < b$. Então $E[X] = \frac{a+b}{2}$ e $\sigma[X] = \left(E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{b-a}{2}$.
   Logo, $\pi[X] = \frac{a+b}{2} + \alpha\frac{b-a}{2} > b$ se $\alpha > 1$.

3) O princípio é consistente, uma vez que $\pi[X + c] = E[X + c] + \alpha\sigma[X + c] = E[X] + c + \alpha\sigma[X] = \pi[X] + c$.

4) Este princípio não obedece à condição da aditividade:

$$\begin{aligned}\pi[X+Y] &= E[X+Y] + \alpha\sqrt{Var[X+Y]} = E[X] + E[Y] + \alpha\sqrt{Var[X] + Var[Y]} \\ &\neq E[X] + \alpha\sqrt{Var[X]} + E[Y] + \alpha\sqrt{Var[Y]} = \pi[X] + \pi[Y].\end{aligned}$$

   A segunda igualdade advém do facto de X e Y serem variáveis aleatórias independentes. A não igualdade é consequência da falsidade da igualdade seguinte: $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5) O princípio não é iterativo. De facto,

$$\begin{aligned}&\pi\left[\pi[X \mid Y]\right] = \pi\left[E[X \mid Y] + \alpha\sqrt{Var[X \mid Y]}\right] \\ &= E\left[E[X \mid Y] + \alpha\sqrt{Var[X \mid Y]}\right] + \alpha\sqrt{Var\left[E[X \mid Y] + \alpha\sqrt{Var[X \mid Y]}\right]} \\ &= E[X] + \alpha E\left[\sqrt{Var[X \mid Y]}\right] \\ &+\alpha\Big(Var[E[X \mid Y]] + \alpha^2 Var\left[\sqrt{Var[X \mid Y]}\right] + 2\alpha Cov\Big(E[X \mid Y], \sqrt{Var[X \mid Y]}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

   Todavia, $\pi[X] = E[X] + \alpha\sqrt{Var[X]}$.

6) O princípio do desvio padrão obedece à condição da invariância na escala:

$$\pi[aX] = E[aX] + \alpha\sqrt{Var[aX]} = aE[X] + a\alpha\sqrt{Var[X]} = a\pi[X].$$

3.4.6 Propriedades do princípio do risco ajustado

Este princípio pode ser assim calculado: $\pi[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx$, $\rho \geq 1$. Não obedece às condições da aditividade e da iteratividade, obedecendo a todas as demais.

1) O princípio do risco ajustado satisfaz a propriedade da carga não negativa. Com efeito, para todo o x positivo verifica-se que $1 - F_X(x) \leq [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}}$, de onde resulta que $E[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx \leq \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx$.

2) A condição da não existência de preço excessivo é também satisfeita. Note-se x_m é tal que $P(X \leq x_m) = 1$ e $\forall y > x_m$, $F_X(y) = 1 \Longleftrightarrow 1 - F_X(y) = 0$. Por outro lado, se $0 < y \leq x_m$, $[1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}} \leq 1$. Então,

$$\pi[X] = \int_0^{x_m} [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx \leq \int_0^{x_m} 1dx = x_m.$$

3) O princípio em causa é consistente. Repare-se que:

$$\begin{aligned} \pi[X + c] &= \int_0^\infty [1 - F_{X+c}(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx = \int_0^\infty [1 - F_X(x - c)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx \\ &= \int_{-c}^\infty [1 - F_X(y)]^{\frac{1}{\rho}}\, dy = \int_{-c}^0 [1 - F_X(y)]^{\frac{1}{\rho}}\, dy + \int_0^\infty [1 - F_X(y)]^{\frac{1}{\rho}}\, dy \\ &= \int_{-c}^0 1dy + \pi[X] = c + \pi[X]. \end{aligned}$$

Na última igualdade usa-se o facto de X ser uma variável aleatória positiva e a definição do princípio do risco ajustado.

4) A condição da aditividade não se verifica. Senão, considere-se o seguinte exemplo. Os riscos X e Y são independentes e identicamente distribuídos de tal forma que $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Assim, $F_X(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,+\infty)}(x)$.

Pelo que, para $\rho = 2$:

$$\pi[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como Y é identicamente distribuído a X, $\pi[Y] = \pi[X] = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por outro lado, usando a convolução, $F_{X+Y}(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x)$.

Vem, então, que:

$$\begin{aligned} \pi[X + Y] &= \int_0^\infty [1 - F_{X+Y}(x)]^{\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{1}{4}}dx + \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{3}{4}}dx \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi[X] + \pi[Y]. \end{aligned}$$

5) O princípio em causa não verifica sempre a condição da iteratividade. Ver [5].

6) Este princípio obedece à condição da homogeneidade. Claramente $F_{aX}(x) = F_X(\frac{x}{a})$. Então:

$$\begin{aligned}\pi[aX] &= \int_0^\infty [1 - F_{aX}(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx = \int_0^\infty \left[1 - F_X\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}} dx \\ &= a\int_0^\infty [1 - F_X(w)]^{\frac{1}{\rho}}\, dw = a\pi[X].\end{aligned}$$

3.4.7 Propriedades do princípio da utilidade nula

O princípio da utilidade nula determina que o prémio $\pi[X]$ é solução da equação $u(w) = E\left[u(w + \pi[X] - X)\right]$. Satisfaz três das propriedades enunciadas, nomeadamente a propriedade da carga não negativa, da não existência de preço excessivo e da consistência.

1) O princípio em causa verifica a propriedade da carga não negativa. Para estudar a propriedade da carga não negativa no princípio da utilidade nula é necessário recorrer ao seguinte teorema:

Teorema 3.4.1. *(Desigualdade de Jensen) Seja u(x) uma funcão estritamente crescente e côncava, isto é, $u^{'}(x) > 0$ e $u^{''}(x) < 0$. Então, para toda a variável aleatória X, desde que os valores médios envolvidos existam, tem-se: $E[u(X)] \leq u(E[X])$.*

Demonstração Seja $u(x)$ tal que $u^{'}(x) > 0$ e $u^{''}(x) < 0$. Se $E[X] = \mu$ existe, considere-se a reta tangente a $u(x)$ no ponto $(\mu, u(\mu))$. Ou seja, a reta de equação: $u(x) = u(\mu) + u^{'}(\mu)(x - \mu)$. Então, $\forall x,\ u(x) \leq u(\mu) + u^{'}(\mu)(x - \mu)$.

Substituindo x pela variável aleatória X e aplicando a esperança matemática vem que $E[u(X)] \leq u(\mu) = u\left(E[X]\right)$. ■

Ora, o princípio de utilidade nula satisfaz o princípio da carga não negativa pois, utilizando a desigualdade de Jensen (e recordando que neste princípio u é estritamente côncava),

$$u(w) = E[u(w + \pi[X] - X)] \leq u(w + \pi[X] - E[X]).$$

De onde se conclui que $u(w) \leq u(w + \pi[X] - E[X])$. Como u é estritamente crescente, resulta que $w \leq w + \pi[X] - E[X]$, ou seja, $\pi[X] \geq E[X]$.

2) Este princípio obedece à condição da não existência de preço excessivo. Como x_m é o máximo de X, então

$$u(w) = E[u(w + \pi[X] - X)] \geq E[u(w + \pi[X] - x_m)] = u(w + \pi[X] - x_m).$$

Como $u^{'}(x) > 0$, ou seja, u é estritamente crescente, $w \geq w + \pi[X] - x_m$, o que implica que $\pi[X] \leq x_m$.

3) A propriedade da consistência é verificada. Note-se que $\pi[X+c]$ é solução da equação: $u(w) = E[u(w + \pi[X+c] - (X+c))]$. Mas como $\pi[X]$ é solução da equação $u(w) = E[u(w + \pi[X] - X)]$, resulta que $\pi[X+c] = \pi[X] + c$.

4) Em geral, este princípio não é aditivo, a menos de quando a função de utilidade é exponencial ou linear. Ver [5].

5) O princípio da utilidade nula não satisfaz sempre a condição da iteratividade. Para o provar, considerem-se duas variáveis aleatórias X e Y definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, onde $\mathcal{P}(\Omega)$ representa o conjunto das partes de Ω, e P uma medida de probabilidade de $\mathcal{F}$ em $[0,1]$ assim definida: $P(\{1\}) = 0.1$, $P(\{2\}) = 0.2$, $P(\{3\}) = 0.7$. Por seu turno, X é uma função de Ω em $\mathbb{R}$ tal que $X(w) = 2$ se w é ímpar e $X(w) = 1$ se w é par, $w \in \Omega$. A variável aleatória Y é uma função de Ω em $\mathbb{R}$ com $Y(1) = Y(2) = 2$ e $Y(3) = 10$. O capital inicial será $w = 0$ e a função de utilidade $u(x) = -(1-x)^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Então,

$$\begin{aligned}
&u(0) = E\left[u\left(\pi[X] - X\right)\right], \quad \pi[X] - X \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow -1 = -\left(1 - (\pi[X] - 1)\right)^2 P(\{2\}) - \left(1 - (\pi[X] - 2)\right)^2 P(\{1,3\}) \\
&\Longleftrightarrow -1 = -0.2\left(2 - \pi[X]\right)^2 - 0.8\left(3 - \pi[X]\right)^2 \\
&\Longrightarrow \pi[X] = 1.8834.
\end{aligned}$$

De seguida, cumpre definir a variável aleatória $Z(Y) = \pi[X \mid Y]$. Para tal é necessário calcular as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
&P(X = 1 \mid Y = 2) = \frac{P\left(X = 1,\ Y = 2\right)}{P\left(Y = 2\right)} = \frac{P\left(\{2\} \cap \{1,2\}\right)}{P\left(\{1,2\}\right)} = \frac{2}{3}; \\
&P(X = 2 \mid Y = 2) = \frac{P\left(\{1,3\} \cap \{1,2\}\right)}{P\left(\{1,2\}\right)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&u(0) = E\left[u\left(\pi[X \mid Y = 2] - X\right)\right], \quad \pi[X \mid Y = 2] - X \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow -1 = -\frac{2}{3}\left[4 - 4\pi[X \mid Y = 2] + \pi[X \mid Y = 2]^2\right] \\
&-\frac{1}{3}\left[9 - 6\pi[X \mid Y = 2] + \pi[X \mid Y = 2]^2\right] \\
&\Longrightarrow \pi[X \mid Y = 2] = 1.4514,
\end{aligned}$$

com $P\left(\pi[X \mid Y] = 1.4514\right) = P\left(Y^{-1}\left(\{2\}\right)\right) = \frac{3}{10}$.

Por outro lado,

$$P(X = 1 \mid Y = 10) = \frac{P\left(\{2\} \cap \{3\}\right)}{P\left(\{3\}\right)} = 0;$$

$$P(X = 2 \mid Y = 10) = \frac{P\left(\{1,3\} \cap \{3\}\right)}{P\left(\{3\}\right)} = 1.$$

Pelo que,

$$\begin{aligned} & u(0) = E\left[u\left(\pi[X \mid Y = 10] - X\right)\right], \quad \pi[X \mid Y = 10] - X \leq 1 \\ & \iff -1 = -\left[9 - 6\pi[X \mid Y = 10] + \pi[X \mid Y = 10]^2\right] \\ & \implies \pi[X \mid Y = 10] = 2, \end{aligned}$$

sendo que $P\left(\pi[X \mid Y] = 2\right) = P\left(Y^{-1}\left(\{10\}\right)\right) = \frac{7}{10}$.

Com $Z(Y) = \pi[X \mid Y]$ definida, calcula-se $\pi[Z]$:

$$\begin{aligned} & u(0) = E\left[u\left(\pi[Z] - Z\right)\right], \quad \pi[Z] - Z \leq 1 \\ & \iff -1 = -\frac{3}{10}\left(1 - \left(\pi[Z] - 1.4514\right)\right)^2 - \frac{7}{10}\left(1 - \left(\pi[Z] - 2\right)\right)^2 \\ & \implies \pi[Z] = \pi\left[\pi[X \mid Y]\right] = 1.8675 \neq \pi[X]. \end{aligned}$$

6) Não é invariante à escala. Sejam $u(x) = e^{-\beta x}$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\beta > 0$, $\mu, \sigma \geq 0$. Por se tratar de uma função de utilidade exponencial é válido o seguinte:

$$\begin{aligned} u(w) = E[u(w + \pi[X] - X)] & \iff 1 = e^{-\beta\pi[X]}E[e^{\beta X}] \\ & \iff \pi[X] = \beta^{-1}\ln\left(E[e^{\beta X}]\right) = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\beta. \end{aligned}$$

Por seu turno, $\pi[aX] = \mu a + \frac{1}{2}\sigma^2\beta a^2 \neq a\pi[X]$, se $a \neq \pm 1$.

3.4.8 Propriedades do princípio de Esscher

O princípio de Esscher, como já se referiu, preconiza que o prémio deverá ser calculado pela equação $\pi[X] = \frac{E[Xe^{hX}]}{M_X(h)}$, $h > 0$. Somente não verifica duas das propriedades enunciadas, a saber, a iteratividade e a homogeneidade.

1) O princípio de Esscher satisfaz a propriedade da carga não negativa. É conveniente referir um resultado de que se fará uso posteriormente. Com X um risco admitindo uma função geradora de momentos, o momento de ordem r de X é dado por $E[X^r] =$

$\frac{d^r}{dt^r}M_X(0)$. Com efeito, basta desenvolver e^{tX} em série de Taylor para concluir que $M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{E[X^i t^i]}{i!}$. Derivando esta série r vezes em ordem a t e igualando depois t a 0, conclui-se o resultado em causa.

Note-se que, quando $h = 0$, $\pi[X] = E[X]$. Mas $\pi[X] = E[X^*]$ (ver subsecção 3.2.9). Logo, $\pi[X] = E[X] = E[X^*]$. Então, utilizando (3.2.9.2) na segunda igualdade:

$$\begin{aligned} E[(X^*)^r] &= \frac{d^r M_{X^*}}{dt^r}(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r}\frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{M_X(h)}\frac{d^r}{dt^r}M_X(t+h)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{1}{M_X(h)}\frac{d^r}{dt^r}E\left[e^{(t+h)X}\right]\bigg|_{t=0} = \frac{1}{M_X(h)}E\left[X^r e^{hX}e^{tX}\right]\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{1}{M_X(h)}E\left[X^r e^{hX}\right] = \frac{1}{M_X(h)}\frac{d^r}{dh^r}M_X(h), \end{aligned} \tag{3.4.8.1}$$

pelo que, fazendo $r = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}\pi[X] &= \frac{d}{dh}E[X^*] = \frac{d}{dh}\left(\frac{1}{M_X(h)}\frac{d}{dh}M_X(h)\right) \\ &= \frac{1}{(M_X(h))^2}\left(\frac{d}{dh}\left(\frac{d}{dh}M_X(h)\right)M_X(h) - \left(\frac{d}{dh}M_X(h)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{M_X(h)}\frac{d^2}{dh^2}M_X(h) - \frac{1}{(M_X(h))^2}\left(\frac{d}{dh}M_X(h)\right)^2 \\ &= E\left[(X^*)^2\right] - E[X^*]^2 \\ &= Var[X^*] > 0. \end{aligned}$$

Note-se que na quinta igualdade se utilizou (3.4.8.1).

Ou seja, $\pi[X]$ é uma função crescente de h e $\pi[X] = E[X]$ quando $h = 0$. De onde resulta que $\pi[X] \geq E[X]$.

2) O princípio em causa obedece igualmente à condição da não existência de preço excessivo. Claramente, $Xe^{hX} \leq x_m e^{hX}$, pelo que $E[Xe^{hX}] \leq E[x_m e^{hX}] = x_m M_X(h)$. Dividindo esta última inequação por $M_X(h)$, vem:

$$\pi[X] = \frac{E[Xe^{hX}]}{M_X(h)} \leq \frac{E[x_m e^{hX}]}{M_X(h)} = x_m.$$

3) O princípio de Esscher é consistente. De facto,

$$\begin{aligned} \pi[X+c] &= \frac{E[(X+c)e^{h(X+c)}]}{E[e^{h(X+c)}]} = \frac{E[Xe^{hX}]e^{hc} + cE[e^{hX}]e^{hc}}{M_X(h)e^{hc}} \\ &= \frac{E[Xe^{hX}]}{M_X(h)} + c = \pi[X] + c. \end{aligned}$$

4) Este princípio também é aditivo:

$$\begin{aligned}\pi[X+Y] &= \frac{E[(X+Y)e^{h(X+Y)}]}{E[e^{h(X+Y)}]} = \frac{E[Xe^{hX}]M_Y(h)+M_X(h)E[Ye^{hY}]}{M_X(h)M_Y(h)} \\ &= \frac{E[Xe^{hX}]}{M_X(h)} + \frac{E[Ye^{hY}]}{M_Y(h)} = \pi[X]+\pi[Y].\end{aligned}$$

Note-se que na segunda igualdade se usa o facto de X e Y serem variáveis aleatórias independentes.

5) O princípio de Esscher não verifica sempre a propriedade da iteratividade. Recorrendo ao exemplo do item 5) da subsecção 3.4.7, para $h>0$, vem

$$\pi[X] = \frac{E\left[Xe^{hX}\right]}{E\left[e^{hX}\right]} = \frac{\frac{e^h}{5}+\frac{8e^{2h}}{5}}{\frac{e^h}{5}+\frac{4e^{2h}}{5}}.$$

Pretende-se agora definir a variável aleatória $Z(Y)=\pi[X\mid Y]$. Então:

$$\pi[X\mid Y=y] = \frac{E\left[Xe^{hX}\mid Y=y\right]}{E\left[e^{hX}\mid Y=y\right]}, \text{ sendo que:}$$

$$\begin{aligned}E[e^{hX}\mid Y=2] &= e^hP(X=1\mid Y=2)+e^{2h}P(X=2\mid Y=2) \\ &= e^h\frac{P\left(X^{-1}(\{1\})\cap Y^{-1}(\{2\})\right)}{P\left(Y^{-1}(\{2\})\right)} + e^{2h}\frac{P\left(X^{-1}(\{2\})\cap Y^{-1}(\{2\})\right)}{P\left(Y^{-1}(\{2\})\right)} \\ &= e^h\frac{P(\{2\}\cap\{1,2\})}{P(\{1,2\})} + e^{2h}\frac{P(\{1,3\}\cap\{1,2\})}{P(\{1,2\})} \\ &= \frac{2}{3}e^h+\frac{1}{3}e^{2h}; \\ E[Xe^{hX}\mid Y=2] &= \frac{2}{3}e^h+\frac{2}{3}e^{2h}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\pi[X\mid Y=2] = \frac{\frac{2}{3}e^h+\frac{2}{3}e^{2h}}{\frac{2}{3}e^h+\frac{1}{3}e^{2h}} \quad \text{e}$$

$$P\left(\pi[X\mid Y] = \frac{\frac{2}{3}e^h+\frac{2}{3}e^{2h}}{\frac{2}{3}e^h+\frac{1}{3}e^{2h}}\right) = P\left(Y^{-1}(\{2\})\right) = P(\{1,2\}) = \frac{3}{10}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}E[e^{hX}\mid Y=10] &= e^{1h}P(X=1\mid Y=10)+e^{2h}P(X=2\mid Y=10) \\ &= e^{1h}\frac{P(\{2\}\cap\{3\})}{P(\{3\})} + e^{2h}\frac{P(\{1,3\}\cap\{3\})}{P(\{3\})} = e^{2h}.\end{aligned}$$

Logo, $E[Xe^{hX}\mid Y=10]=2e^{2h}$ e $\pi[X\mid Y=10]=\frac{2e^{2h}}{e^{2h}}=2$, com $P(\pi[X\mid Y]=2) = P\left(Y^{-1}(\{10\})\right) = P(\{3\}) = \frac{7}{10}$.

A variável aleatória $Z = \pi[X \mid Y]$ já está definida e $\pi\left[\pi[X \mid Y]\right] = \pi[Z] = \frac{E[Ze^{hZ}]}{E[e^{hZ}]}$, com:

$$E[Ze^{hZ}] = \frac{3}{10}\frac{\frac{2}{3}e^h + \frac{2}{3}e^{2h}}{\frac{2}{3}e^h + \frac{1}{3}e^{2h}} exp\left[\frac{\frac{2}{3}e^h + \frac{2}{3}e^{2h}}{\frac{2}{3}e^h + \frac{1}{3}e^{2h}}\right] + \frac{7}{10}2e^{2h},$$

$$E[e^{hZ}] = \frac{3}{10} exp\left[\frac{\frac{2}{3}e^h + \frac{2}{3}e^{2h}}{\frac{2}{3}e^h + \frac{1}{3}e^{2h}}\right] + \frac{7}{10}e^{2h}.$$

Como é óbvio, o quociente destas duas últimas expressões não iguala $\pi[X] = \frac{\frac{e^h}{5}+\frac{8e^{2h}}{5}}{\frac{e^h}{5}+\frac{4e^{2h}}{5}}$ para todo o valor de $h > 0$. Com efeito, basta tomar $h = \frac{1}{2}$ e resulta que $\pi[X] \approx 1.8683$ e $\pi\left[\pi[X \mid Y]\right] \approx 0.5723$.

6) Não se verifica a condição da invariância à escala. Com efeito,

$$\pi_{aX}(h) = \frac{E[aXe^{haX}]}{E[e^{haX}]} = \frac{aE[Xe^{ahX}]}{E[e^{ahX}]} = a\pi_X(ah) \neq a\pi_X(h),$$

pelo que $\pi_{aX}(h) \neq a\pi_X(h)$, a menos do caso em que a toma o valor 1.

3.4.9 Propriedades do princípio do percentil

O princípio do percentil, que refere que o prémio se calcula pela equação $\pi[X] = min\{p : F_X(p) \geq 1-\epsilon\}$, $0 \leq \epsilon \leq 1$, apenas satisfaz duas das propriedades enunciadas, nomeadamente a propriedade da não existência de preço excessivo e a consistência.

1) O princípio do percentil não satisfaz a propriedade da carga não negativa. Senão, atente-se no exemplo seguinte. Sejam $X \sim Exp(\frac{1}{2})$ (pelo que $E[X] = 2$) e tome-se $\epsilon = \frac{2}{5}$. Então, $\pi[X]$ é a solução positiva da seguinte equação resolvida em ordem a p:

$$\int_0^p f_X(x)dx = 1-\epsilon \Longleftrightarrow \int_0^p \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = 1-\epsilon.$$

Conclui-se que $\pi[X] = p = -2\ln(\epsilon)$, isto é, $\pi[X] = -2\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln\left(\frac{25}{4}\right) < 2 = E[X]$.

2) O princípio do percentil obedece à condição da não existência de preço excessivo. De facto, seja x_m tal que $P(X \leq x_m) = 1$ e $0 \leq \epsilon \leq 1$. Ora, se $\pi[X] = s$, então $F_X(s) \geq 1-\epsilon$, pela definição do princípio do percentil. Pelo que $1-\epsilon \leq P(X \leq s) \leq P(X \leq x_m) = 1$, o que implica que $s \leq x_m$.

3) O princípio do percentil é consistente. De facto,

$$\begin{aligned}\pi[X+c] &= min\{p : F_{X+c}(p) \geq 1-\epsilon\} = min\{p : P(X \leq p-c) \geq 1-\epsilon\} \\ &= min\{s : P(X \leq s) \geq 1-\epsilon\} + c = \pi[X] + c.\end{aligned}$$

4) Este princípio não é aditivo. Considere-se o exemplo presente na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Variáveis aleatórias independentes

$P_{X,Y}(x_k, y_j)$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$P_Y(y_j)$
$y_1 = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$y_2 = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$y_3 = 2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$P_X(x_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Como é facilmente constatável, X e Y são variáveis aleatórias independentes uma vez que $P_{X,Y}(x_k, y_j) = P_X(x_k)P_Y(y_j)$, $\forall k, j$.

Claramente, $F_X(x) = \frac{1}{6}\mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x)$.

Considerando $\epsilon = \frac{1}{2}$, vem que $\pi[X] = min\left\{p : F_X(p) \geq \frac{1}{2}\right\} = 1$.

Analogamente, $F_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1)}(y) + \frac{5}{6}\mathbf{1}_{[1,2)}(y) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(y)$, de onde se conclui que $\pi[Y] = min\left\{p : F_Y(p) \geq \frac{1}{2}\right\} = 0$.

Por fim, recorrendo à convolução,

$$F_{X+Y}(s) = \frac{1}{12}\mathbf{1}_{[0,1)}(s) + \frac{11}{36}\mathbf{1}_{[1,2)}(s) + \frac{25}{36}\mathbf{1}_{[2,3)}(s) + \frac{11}{12}\mathbf{1}_{[3,4)}(s) + \mathbf{1}_{[4,+\infty)}(s).$$

Consequentemente, $\pi[X+Y] = min\left\{p : F_{X+Y}(p) \geq \frac{1}{2}\right\} = 2 \neq 1 = \pi[X] + \pi[Y]$.

5) Este princípio não obede à condição da iteratividade. Atente-se no exemplo seguinte. Considerem-se duas variáveis aleatórias X e Y definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e P medida de probabilidade de $\mathcal{F}$ em $[0, 1]$ assim definida: $P(\{1\}) = 0.3$, $P(\{2\}) = 0.5$, $P(\{3\}) = 0.2$. Por outro lado, X é uma função de Ω em $\mathbb{R}$ tal que $X(w) = 2$ se w é ímpar e $X(w) = 1$ se w é par, $w \in \Omega$. A variável aleatória Y é uma função de Ω em $\mathbb{R}$ com $Y(1) = Y(2) = 2$ e $Y(3) = 10$. Então, $F_X(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x)$.

Optando por $\epsilon = \frac{2}{5}$, vem que $\pi[X] = min\left\{p : F_X(p) \geq \frac{3}{5}\right\} = 2$.

Pretende-se, agora, definir a variável aleatória $Z(Y) = \pi[X \mid Y]$. Ora,

$$F_{X|Y}(x \mid Y = 2) = P(X \leq x \mid Y = 2) = \frac{5}{8}\mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x).$$

Pelo que $\pi[X \mid Y = 2] = min\left\{p : F_{X|Y}(p \mid Y = 2) \geq \frac{3}{5}\right\} = 1$. Por outro lado, $P\left(\pi[X \mid Y] = 1\right) = P\left(Y^{-1}\left(\{2\}\right)\right) = P\left(\{1, 2\}\right) = \frac{8}{10}$. Adicionalmente,

$$F_{X|Y}(x \mid Y = 10) = P\left(X \leq x \mid Y = 10\right) = \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x).$$

Pode-se, então, concluir que $\pi[X \mid Y = 10] = min\left\{p : F_{X|Y}(p \mid Y = 10) \geq \frac{3}{5}\right\} = 2$ e que $P\left(\pi[X \mid Y] = 2\right) = P\left(Y^{-1}\left(\{10\}\right)\right) = P\left(\{3\}\right) = \frac{2}{10}$. Vem, então,

$$F_Z(x) = \frac{4}{5}\mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x).$$

Isto é, $\pi[Z] = \pi\left[\pi[X \mid Y]\right] = min\left\{p : F_Z(p) \geq \frac{3}{5}\right\} = 1 \neq 2 = \pi[X]$.

6) O princípio do percentil não é homogéneo. Retomando o exemplo explorado em 1), $\pi[5X]$ é a solução da equação seguinte, resovida em ordem a p:

$$\int_0^p \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{5}\right)}dx = 1 - \frac{2}{5} \Longleftrightarrow p = -10\ln\left(\frac{22}{125}\right).$$

Isto é,

$$\pi[5X] = -10\ln\left(\frac{22}{125}\right) \neq 5\ln\left(\frac{25}{4}\right) = 5\pi[X].$$

3.4.10 Propriedades do princípio da perda máxima

O princípio da perda máxima, ou seja, o princípio que determina que o prémio deve ser calculado mediante a equação $\pi[X] = min\{p : F_X(p) = 1\}$, verifica todas as propriedades enunciadas.

1) O princípio da perda máxima obedece ao princípio da carga não negativa. Com efeito, seja $\pi[X] = p^{'}$. Então, $E[X] = \int_\Omega XdP \leq p^{'}$, uma vez que $P(X \leq p^{'}) = 1$.

2) É imediato concluir que este princípio verifica a propriedade do preço não excessivo. Obviamente, sendo $\pi[X]$ é igual ao valor máximo que X pode tomar, então $\pi[X]$ é inferior ou igual (concretamente, igual) ao valor máximo que X pode assumir, ou seja, x_m .

3) Este princípio é consistente:

$$\begin{aligned}\pi[X + c] &= min\left\{p : F_{X+c}(p) = 1\right\} = min\left\{p : P(X \leq p - c) = 1\right\}\\ &= min\left\{s : P(X \leq s) = 1\right\} + c = \pi[X] + c.\end{aligned}$$

4) O princípio em causa obedece à condição da aditividade. No seguinte, assume-se que X e Y são variáveis aleatórias absolutamente contínuas não negativas. Todavia, a validade do que se segue estende-se ao caso discreto, sendo a demonstração análoga. Ora, $\pi[X+Y]$ é o menor dos números p verificando $F_{X+Y}(p)=1$. Pretende-se provar que tal número é igual a $\pi[X]+\pi[Y]$. Em primeiro lugar, prova-se que $F_{X+Y}(\pi[X]+\pi[Y])=1$; depois, que é o menor dos números verificando tal condição. Ora, utilizando a operação da convolução,

$$F_{X+Y}(\pi[X]+\pi[Y])=\int_0^{\pi[X]+\pi[Y]} F_Y\left(\pi[X]+\pi[Y]-x\right) f_X(x)dx.$$

Seja g a função de $[0,\pi[X]+\pi[Y]]$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=F_Y\left(\pi[X]+\pi[Y]-x\right) f_X(x)$. Deste modo, $F_{X+Y}(\pi[X]+\pi[Y])=\int_0^{\pi[X]+\pi[Y]} g(x)dx$. Mas, $g(x)=f_X(x)\mathbf{1}_{[0,\pi[X]]}(x)$.

De facto, note-se que, se $0\leq x\leq \pi[X]$, então $\pi[X]+\pi[Y]-x\geq\pi[Y]$, ou seja, $F_Y\left(\pi[X]+\pi[Y]-x\right)=1$. Por outro lado, se $\pi[X]<x\leq\pi[X]+\pi[Y]$, então $f_X(x)=0$.

Pelo que, $F_{X+Y}(\pi[X]+\pi[Y])=\int_0^{\pi[X]} f_X(x)dx=F_X\left(\pi[X]\right)=1$. Posto isto, existe $\epsilon>0$ tal que $\pi[X]$, $\pi[Y]>\epsilon$. Suponha-se que existe $s_1=\pi[X]+\pi[Y]-\epsilon<\pi[X]+\pi[Y]$ verificando $F_{X+Y}(s_1)=1$, ou seja, $\int_0^{s_1} F_Y\left[(\pi[X]-x-\epsilon)+\pi[Y]\right] f_X(x)dx=1$. Sendo h a função de $[0,s_1]$ em $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=F_Y\left[(\pi[X]-x-\epsilon)+\pi[Y]\right] f_X(x)$, vem que $F_{X+Y}(s_1)=1\iff\int_0^{s_1} h(x)dx=1$, com

$$h(x)=f_X(x)\mathbf{1}_{[0,\pi[X]-\epsilon]}(x)+F_Y\left[(\pi[X]-x-\epsilon)+\pi[Y]\right] f_X(x)\mathbf{1}_{(\pi[X]-\epsilon,s_1)}(x).$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi[X]-\epsilon} f_X(x)dx+\int_{\pi[X]-\epsilon}^{s_1} F_Y\left[(\pi[X]-x-\epsilon)+\pi[Y]\right] f_X(x)dx=1\\ \iff&\int_{\pi[X]-\epsilon}^{s_1} F_Y\left[(\pi[X]-x-\epsilon)+\pi[Y]\right] f_X(x)dx=1-F_X\left(\pi[X]-\epsilon\right).\end{aligned}$$

Todavia, utilizando a integração por partes,

$$\int_{\pi[X]-\epsilon}^{s_1} F_Y[(\pi[X]-x-\epsilon)+\pi[Y]]\, f_X(x)dx=-F_X(\pi[X]-\epsilon)+\int_{\pi[X]-\epsilon}^{s_1} F_X(x)f_Y(s_1-x)\,dx,$$

o que implica que $\int_{\pi[X]-\epsilon}^{s_1} F_X(x)f_Y\left(s_1-x\right)dx=1$, isto é, $F_{X+Y}(s_1)>1$, o que é absurdo. Logo, $\pi\left[X+Y\right]=\pi[X]+\pi[Y]$.

5) É verificada a condição da iteratividade. Senão, repare-se:

$$\begin{aligned} Z = \pi[X \mid Y = y] &= min\,\{p : P(X \leq p \mid Y = y) = 1\} \\ &= min\left\{p : \frac{P(X \leq p\,,\, Y = y)}{P(Y = y)} = 1\right\} = min\{p : P(X \leq p\,,\, Y = y) = P(Y = y)\} \end{aligned}$$

Mas: $P(X \leq p\,,\, Y = y) = P(Y = y) \Longleftrightarrow P(X \leq p) = 1$. Pelo que:

$$\begin{aligned} \pi[Z] &= min\,\{p : P(X \leq p\,,\, Y = y) = P(Y = y)\} \\ &= min\,\{p : P(X \leq p) = 1\} = \pi[X]. \end{aligned}$$

6) Este princípio é invariável à escala:

$$\begin{aligned} \pi[aX] &= min\,\{p : F_{aX}(p) = 1\} = min\,\{p : P\,(aX \leq p) = 1\} \\ &= min\left\{p : P\left(X \leq \frac{p}{a}\right) = 1\right\} = a\,min\left\{\frac{p}{a} : P\left(X \leq \frac{p}{a}\right) = 1\right\} = a\pi[X]. \end{aligned}$$

3.5 Resumo

Na tabela seguinte, sumaria-se a informação da secção anterior.

Tabela 3.7: Vários princípios de prémios e suas propriedades

Princípio $\rightarrow$	3.2.1	3.2.2	3.2.4	3.2.5	3.2.6	3.2.7	3.2.8	3.2.9	3.2.10	3.2.11
Prop. $\downarrow$	μ	$\mu + \alpha\mu$	exp	σ^2	σ	$g(.)$	$u(.)$	Ess	$\%$	max
1	+	+	+	+	+	+	+	+	−	+
2	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+
3	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	−	−	−	+	−	+
5	+	−	+	−	−	−	−	−	−	+
6	+	+	−	−	+	+	−	−	−	+

O sinal "+" significa que a proposição é verificada; o sinal "−" que a proposição não é satisfeita.

Pode-se concluir que os princípios do prémio puro e da perda máxima são os únicos que verificam todas as seis propriedades descritas; contudo, estes dois principios são inviáveis do ponto de vista prático. O princípio exponencial apenas falha a condição da invariância da escala. O princípio de Esscher não verifica duas condições, a da iteratividade e a da invariância da escala. O princípio que menos propriedades satisfaz é o do percentil.

Poder-se-ia daqui concluir que o princípio mais aconselhável seria o exponencial. Todavia, tal parece não se verificar na prática.

O princípio do valor esperado é quase sempre usado em seguros de vida. Pelo contrário, é pouco utilizado em seguros de propriedades. Tal deve-se ao facto de, nestes últimos, ser normal a ocorrência de situações muito diversas e heterogéneas, o que desaconselha a utilização de uma medida central como a média.

O princípio do desvio-padrão, por sua vez, é provavelmente o mais frequente em seguros de propriedade, seguros automóvel, seguros de responsabilidade civil, seguros de roubo. Curiosamente, alguns autores sustentam que o princípio de cálculo de prémio deve ser obrigatoriamente aditivo, o que não se verifica com o princípio do desvio-padrão.

O princípio da variância e o princípio da utilidade nula são pouco utilizados. O primeiro por gerar prémios muito elevados. O último, não obstante o seu grande interesse teórico, acarreta significativas dificuldades práticas, que se prendem essencialmente com a escolha da função de utilidade.

Em jeito de conclusão, pode-se afirmar que a escolha de um principio de cálculo de prémio depende da importância que o decisor atribui a cada uma das propriedades descritas e que, consequentemente, não existe um princípio universal e objetivamente superior a todos os demais.

Capítulo 4

Medidas de risco

4.1 Introdução

De uma forma informal pode-se considerar que uma medida de risco para uma variável aleatória X é tão somente um número real que a ela se encontra associado. Por exemplo, um prémio para um risco X é uma medida de risco para X. A probabilidade de ruína para um montante inicial é um número que se pode considerar como associado à variável aleatória S da totalidade das indemnizações. Neste sentido, a probabilidade de ruína será uma medida de risco para S. Uma medida de risco para um risco X pretende, tão somente, quantificar a exposição ao risco que recai sobre a seguradora por suportar este risco. Pode ser pensada como a quantidade de ativos necessários à seguradora para suportar o risco X. No fundo, uma medida de risco de um risco X mede o quão "perigoso" este é. Quanto maior o valor da medida de risco associada a X, mais arriscado se torna assegurar esse risco. Mais globalmente, uma medida de risco pode ser uma função cujo domínio é um conjunto de riscos (num determinado horizonte temporal) que formam um portefólio. Formalmente:

Definição 4.1.1. Seja $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o conjunto de todas as variáveis aleatórias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Considere-se $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um conjunto de riscos num horizonte temporal específico, formando um portefólio. Então, uma medida de risco R pode ser vista como uma função $R : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

As seguradoras podem ter vários departamentos, cada um deles responsável por um tipo de seguro: seguro de vida, seguro automóvel, ... No que se segue é conveniente pensar em X e Y como os riscos associados a dois departamentos. Neste sentido $X + Y$ é a variável aleatória das possíveis perdas associadas à combinação dos dois riscos. Deverá existir algum tipo de coerência entre os valores resultantes da aplicação de uma medida de risco aos vários departamentos e o valor dessa mesma medida de risco para toda a seguradora. Para formalizar em que moldes se deve basear essa coerência, vem a seguinte definição.

Definição 4.1.2. Uma medida de risco coerente é uma medida de risco R que verifica as seguintes propriedades:

1) $\forall X, Y \in \mathcal{M}$, $R(X+Y) \leq R(X) + R(Y)$ (Sub-aditividade);

2) $\forall X, Y \in \mathcal{M}$, $X \leq Y$ (ou seja, $X(\lambda) \leq Y(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Omega$) $\Longrightarrow R(X) \leq R(Y)$ (Monotonicidade ou mais arriscado = maior perda);

3) $\forall X \in \mathcal{M}$ e $\forall c > 0$, $R(cX) = cR(X)$ (Homogeneidade positiva ou Proporcional ao tamanho);

4) $\forall X \in \mathcal{M}$ e $\forall c \in \mathbb{R}$, $R(X+c) = R(X) + c$ (Invariância por translações).

A Sub-aditividade significa que a medida de risco (e, portanto, o capital necessário para fazer face ao risco) para dois riscos combinados não será maior do que a medida de risco tratando os riscos separadamente. Esta propriedade impõe que a combinação de riscos deverá acarretar vantagens.

A monotonicidade afirma que, se um risco tem sempre perdas associadas superiores às de um outro risco, então a medida de risco do primeiro deverá ser superior à do segundo.

A homogeneidade positiva, por seu turno, significa que, por exemplo, se as possíveis indemnizações do suporte de um risco são sempre o dobro das associadas a um outro risco, então o valor da medida de risco do primeiro é o dobro da medida de risco do segundo.

Por fim, a invariância por translações indica que, quando perante dois riscos X e $X+c$, com $c \geq 0$, o capital adequado para lhes fazer face deverá ser o mesmo.

4.2 Exemplos de medidas de risco e respetivas propriedades

4.2.1 "Value-at-Risk", VaR

O valor em risco VaR é a medida de risco mais utilizada. Note-se que $VaR[X;p]$ representa o capital requerido para garantir, com um nível de confiança p, que a seguradora não se tornará tecnicamente insolvente pelo facto de assegurar o risco X. A título de exemplo considere-se o risco S, no âmbito, por exemplo, do modelo de risco coletivo.

Neste sentido, $F_S(x)$ é a função de distribuição de S, ou seja, a função de distribuição de possiveis indemnizações (suponha-se, ao longo do ano) que possam surgir em detrimento da seguradora se ter exposto ao risco em causa. Ora, $VaR[S;p]$ é o quantil de ordem p de S. De onde que, quando a seguradora tem um capital disponível de $VaR[S;p]$, pode absorver $p\%$ dos possíveis resultados que S possa tomar. Ou, de outro modo, existe uma probabilidade $1-p$ da seguradora entrar em insolvência no próximo ano em consequência de um valor adverso que S possa vir a assumir.

Note-se que, no que se segue, X e Y representam riscos quaiquer, independentemente da sua natureza, isto é, podem ser riscos no âmbito do modelo de risco individual ou, então, do modelo de risco coletivo ou nenhum dos dois.

Definição 4.2.1. Para um risco X, com função de distribuição F_X, o valor em risco num nível de confiança p, $p \in (0,1)$, é uma função (de p) $VaR[X,p] : \{p : 0 < p < 1\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$VaR[X;p] = inf\{c \in \mathbb{R} : P(X > c) \leq 1-p\} = \{c \in \mathbb{R} : P(X \leq c) \geq p\} = F_X^{-1}(p).$$

Note-se que $VaR[X;p] = Q_p(X)$, ou seja, o valor em risco associado a X, num nível de confiança p, iguala o quantil de ordem p de X. Daí que esta medida de risco também se denomine de medida de risco do quantil.

Esta medida de risco não é coerente, uma vez que falha a condição da sub-aditividade. De seguida verifica-se a adequação, ou a não adequação da presente medida de risco às quatro propriedades enunciadas na Definição 4.1.2.

1) Esta propriedade não é satisfeita. Senão, considere-se o risco Z tal que $F_Z(1) = 0.91$, $F_Z(90) = 0.95$ e $F_Z(100) = 0.96$.

   Claramente, $VaR[Z;0.95] = Q_{0.95}(Z) = 90$. Sejam X e Y dois riscos dados, respetivamente, por

   $$X = Z\mathbf{1}_{\{Z\leq 100\}};\ Y = Z\mathbf{1}_{\{Z>100\}}.$$

   Obviamente, $Z = X+Y$. Ora, $F_X(1) = P(X \leq 1) = P(Z \leq 1) + P(Z > 100) = 0.91 + 0.04 = 0.95$, pelo que $VaR[X;0.95] = 1$. Por outro lado, $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(Y = 0) = P(Z \leq 100) = 0.96$, do que $Q_{0.95}(Y) = VaR[Y;0.95] \leq 0$. Consequentemente, $VaR[Z;0.95] \geq VaR[X;0.95] + VaR[Y;0.95]$.

2) Esta condição é verificada. Sejam $0 < p < 1$ e X e Y duas variáveis aleatórias tais que $X \leq Y$, isto é, $X(\lambda) \leq Y(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Omega$, Ω o domínio de ambas. Logo:

$$VaR[X;p] = inf\{x : P(X \leq x) \geq p\} \leq inf\{x : P(Y \leq x) \geq p\} = VaR[Y;p].$$

3) A presente medida de risco obedece a esta propriedade. Sejam X um risco, $0 < p < 1$ e $c > 0$.

$$VaR[cX;p] = inf\{x : P(cX \leq x) \geq p\} = c\,inf\{x/c : P(X \leq x/c) \geq p\} = c\,VaR[X;p].$$

4) Esta condição é satisfeita. Sejam X um risco, $0 < p < 1$ e c um número real.

$$\begin{aligned} VaR[X+c;p] &= inf\{x : P(X+c \leq x) \geq p\} = inf\{x : P(X \leq x-c) \geq p\} \\ &= inf\{s : P(X \leq s) \geq p\} + c = VaR[X;p] + c. \end{aligned}$$

Convém, agora, fora do âmbito do conceito da coerência de uma medida de risco, referir a seguinte propriedade.

Definição 4.2.2. (Convexidade) Sejam X, $Y \in \mathcal{M}$ riscos não negativos e $0 < p < 1$. Uma medida de risco R diz-se convexa se e só se para todo o $\alpha \in [0,1]$:

$$R[\alpha X + (1-\alpha)Y;p] < \alpha R[X;p] + (1-\alpha)R[Y;p]. \tag{4.2.1.1}$$

Claramente VaR não é convexa pelo facto de não verificar a sub-aditividade.

Ainda no que a esta medida de risco diz respeito, é conveniente apresentar o teorema seguinte.

Teorema 4.2.1. *Sejam X um risco e $0 < p < 1$. Então, VaR de X é uma função crescente e contínua à esquerda.*

Dem. A função $VaR[X,p]$ é crescente. Com efeito, se $p_1 < p_2$, então $P(X \leq p_1) < P(X \leq p_2)$ e, portanto, $Q_X(p_1) < Q_X(p_2)$, isto é, $VaR[X,p_1] < VaR[X,p_2]$. Quanto à sua continuidade à esquerda, esta pode ser demonstrada considerando uma sequência arbitrária de números positivos $\{p_i\}_{i \geq 1}$ convergindo para p quando $i \to \infty$, com $p_i < p$ e $p_i < p_{i+1}$, $\forall i \geq 1$. Então $\{VaR[X;p_i]\}$ é uma sequência crescente. Caso o seu limite seja $VaR[X;p]$, a continuidade à esquerda fica provada. Vamos admitir que tal não se verifica. Consequentemente, terá que existir um número z tal que $VaR[X;p_i] \leq \lim_{i \to \infty} VaR[X;p_i] < z < VaR[X;p]$. Logo, $P(X \leq z) \geq p_i$, para todo $i \geq 1$. Ora, se $i \to \infty$, então $P(X \leq z) \geq p$. Logo, $z \geq VaR[X;p]$, uma contradição, que prova o desejado. ■

Para entender conceitos e notações posteriormente utilizadas é conveniente apresentar a definição de contrato de resseguro stop-loss bem como um teorema relativo ao dito prémio stop-loss. O intento destes contratos passa por cobrir a parte superior dos riscos.

Definição 4.2.3. Seja $X \geq 0$ o valor associado a uma perda. Então, num contrato de resseguro stop-loss, o pagamento de uma indemnização, para uma franquia d, é dado por $(X-d)_+ = (X-d)\,\mathbf{1}_{X>d}(x)$.

Teorema 4.2.2. *O prémio stop-loss, quer para o caso discreto quer para o absolutamente contínuo, dado um risco $X \geq 0$, e uma franquia d, é dado por:*

$$\pi_X(d) = E[(X-d)_+] = \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)]dx, \qquad (4.2.1.2)$$

onde F_X é a função de distribuição de X.

Demonstração

a) Caso absolutamente contínuo:

Pela definição de esperança matemática, é claro que $\pi_X(d) = \int_d^{\infty}(x-d)f_X(x)dx$, onde $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade de X.

Mas $x - d = \int_d^x 1dz$. Pelo que:

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= \int_d^{\infty} (x-d)f_X(x)dx = \int_d^{\infty}\int_d^x dz f_X(x)dx \\ &= \int_d^{\infty}\int_z^{\infty} f_X(x)dxdz = \int_d^{\infty} [F_X(x)]_z^{\infty} dz \\ &= \int_d^{\infty} [1 - F_X(z)]dz.\end{aligned}$$

Note-se que na terceira igualdade se utilizou o Teorema de Fubini para alterar a ordem de integração.

b) Caso discreto:

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= \sum_{x>d}(x-d)p_X(x) = \sum_{x>d}\int_d^x dz p_X(x) \\ &= \int_d^{\infty}\sum_{x>z} p_X(x)dz = \int_d^{\infty}[1 - F_X(z)]dz,\end{aligned}$$

onde $p_X(x)$ é função massa de probabilidade de X.

Sublinhe-se que a terceira igualdade é possível porque a série é absolutamente convergente, pois $p_X(x)$ é função massa de probabilidade. ■

Assuma-se, agora, que uma seguradora tem um capital k disponível para fazer face aos possíveis valores de S, ou seja, a possíveis indemnizações, no caso anuais. Tem ainda de pagar uma compensação anual ik. E, para completar a fórmula dos custos totais, é necessário considerar o valor esperado para a diferença entre a totalidade das indemnizações que irão ocorrer e a quantia inicial k com que a seguradora enfrenta o risco em causa. Somando estes dois termos, obtém-se uma fórmula para os custos totais dada por:

$$C(k) = ik + E[(S-k)_+]. \tag{4.2.1.3}$$

Pretende-se, agora, determinar o capital inicial k que a seguradora deverá possuir por forma a minimizar os custos totais. Então:

$$\begin{aligned} C^{'}(k) = 0 &\Longleftrightarrow i + \frac{d\left(\int_k^\infty (1-F_S(s))\,ds\right)}{dk} = 0 \Longleftrightarrow i + F_S(k) - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow F_S(k) = 1-i \Longleftrightarrow k = VaR[S;1-i] = F_S^{-1}(1-i). \end{aligned}$$

Por outro lado, $C^{''}(VaR[S;1-i]) = f_S(VaR[S;1-i]) > 0$.

Isto é, a quantia mínima inicial com que a seguradora deverá enfrentar o risco S é o valor em risco de S num nível de confiança $1-i$, ou seja, $k = VaR[S;1-i]$.

4.2.2 "Tail-Value-at-Risk", $TVaR$

No sentido de contornar o problema que constitui o facto de VaR não ser sub-aditiva, define-se outra medida de risco, que se designa por $TVaR$.

Definição 4.2.4. Para um risco X, o valor em risco de cauda com um nível de confiança p, $p \in (0,1)$, é uma função (de p) $TVaR[X;p] : \{p : 0 < p < 1\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;u]du.$$

Noutras palavras, $TVaR$ é a média dos valores de VaR de X para valores superiores a p. Se X for absolutamente contínua, esta medida de risco pode igualmente ser vista como a perda esperada, posto que essa perda será superior a $Q_X(p) = VaR[X;p]$. Senão note-se:

$$\begin{aligned} E\Big[X \mid X > VaR[X;p]\Big] &= \frac{1}{P\left(X > VaR[X;p]\right)}\int_{VaR[X;p]}^\infty x f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{1-F_X(VaR[X;p])}\int_{VaR[X;p]}^\infty x f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^\infty x f_X(x)dx. \end{aligned}$$

Considere-se a seguinte mudança de variável. Seja $y = F_X(x)$. Então, $x = Q_y(X)$. Por outro lado, $\frac{dy}{dx} = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$. Ou seja, $dx = \frac{dy}{f_X(x)}$.

Assim, se $x = VaR[X;p]$, então $y = F_X(VaR[X;p]) = F_X(Q_p(X)) = p$. Se, por seu turno, $x \to +\infty$, então $y \to F_X(+\infty) = 1$. Voltando, assim, ao cálculo anterior, vem:

$$\begin{aligned}
E\Big[X \mid X > VaR[X;p]\Big] &= \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} Q_y(X) f_X(x)\frac{dy}{f_X(x)} \\
&= \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} Q_y(X)dy = \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} VaR[X;y]dy \\
&= TVaR[X;p].
\end{aligned}$$

Logo, se X é absolutamente contínua, $TVaR[X;p]$ pode ser igualmente escrita como

$$\begin{aligned}
TVaR[X;p] &= E\Big[X \mid X > VaR[X;p]\Big] \\
&= VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} \left(x - VaR[X;p]\right) f_X(x)dx \\
&= VaR[X;p] + e\left(VaR[X;p]\right), \qquad (4.2.2.1)
\end{aligned}$$

com e uma função de $VaR[X;p]$, definida por

$$e\left(VaR[X;p]\right) = \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} \left(x - VaR[X;p]\right) f_X(x)dx.$$

Consequentemente, $TVaR$ é estritamente superior à correspondente VaR, sendo que a excede pelo valor esperado de todos os excessos possíveis das perdas relativamente a VaR.

Conclui-se que, dados $0 < p < 1$ e X um risco absolutamente contínuo, $TVaR[X;p]$ é o valor da indemnização ou da totalidade de indemnizações que se espera no caso desta ser superior a $VaR[X;p]$.

É uma medida aconselhável se se pretende lidar eficazmente com situações extremas, situações de algum modo catastróficas. Todavia, é pouco sensível a perdas em circunstâncias normais, perdas mais baixas ou intermédias. Com efeito, a título de exemplo, $TVaR[X;0.995]$, para um risco X qualquer, foca-se no que acontece nos 50 piores cenários de 10 000 simulações, ou seja, concentra-se em riscos elevados e eventos extremos. Pelo contrário VaR não se focaliza em eventos extremos.

A título de exemplo, dado um risco X, $VaR[X;0.995]$ focaliza-se nas piores 9950 perdas de 10 000 simulações. É o pior cenário sob circunstâncias normais. A Figura 4.1 ilustra este último exemplo.

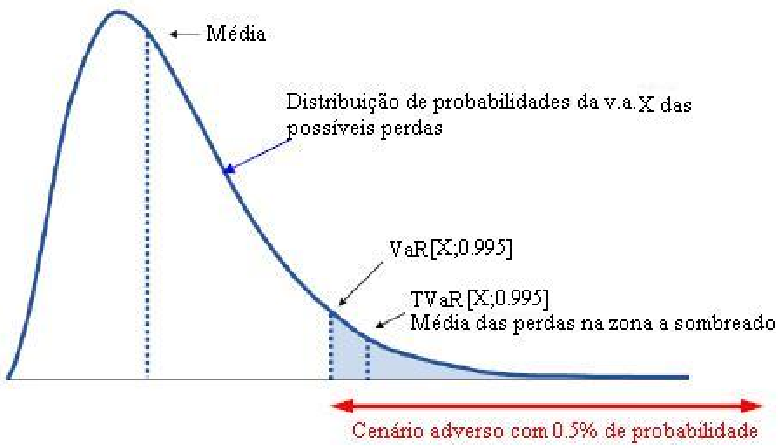

Figura 4.1: Representação gráfica gráfica de VaR[X;0.995] e TVaR[X;0.995]

Voltando a (4.2.1.3), pretende-se o valor do custo mínimo dividido por i, isto é, o valor da divisão entre C quando $k = VaR[S; 1-i]$ e i.

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}C\left(VaR[S;1-i]\right) &= \frac{1}{i}\Big[i \times VaR[S;1-i] + \int_{VaR[S;1-i]}^{\infty}\left(1-F_S(s)\right)ds\Big]\\ &= VaR[S;1-i] + \frac{1}{1-(1-i)}\int_{VaR[S;1-i]}^{\infty}\left(1-F_S(s)\right)ds\\ &= TVaR[S;1-i].\end{aligned}$$

A última igualdade será vista mais à frente e justifica-se pela equação 2) da secção 4.3 - Relações entre medidas de risco. Pode-se concluir que o custo mínimo dividido pelo dividendo i é igual ao valor em risco de cauda de S num nível de confiança $1-i$.

Em consequência, vem:

$$TVaR[S;p] = \inf_{k\geq 0}\left\{k + \frac{1}{1-p}\pi_S(k)\right\}.$$

De seguida, mostra-se que $TVaR$ é coerente.

1) $TVaR$ é sub-aditiva. Sejam X e Y riscos quaisquer, $0 < p < 1$, $d_1 = VaR[X,p]$, $d_2 = VaR[Y;p]$ e $d = d_1 + d_2$. Então:

$$\begin{aligned}TVaR[X+Y;p] &\leq d + \frac{1}{1-p}\pi_{X+Y}(d)\\ &= d_1 + d_2 + \frac{1}{1-p}E\left[(X+Y-d_1-d_2)_+\right]\\ &\leq d_1 + d_2 + \frac{1}{1-p}E\left[(X-d_1)_+ + (Y-d_2)_+\right]\end{aligned}$$

$$= d_1 + \frac{1}{1-p} E\left[(X-d_1)_+\right] + d_2 + \frac{1}{1-p} E\left[(Y-d_2)_+\right]$$
$$= TVaR[X;p] + TVaR[Y;p].$$

Nesta demonstração, usou-se o facto de, para toda a função f e g, se verificar $(f+g)_+ \leq f_+ + g_+$.

2) Esta condição é verificada. Sejam $0 < p < 1$ e X, $Y \in \mathcal{M}$ duas variáveis aleatórias tais que $X \leq Y$:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;z]dz < \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[Y;z]dz = TVaR[Y;p].$$

Sublinhe-se que a inequação é válida porque VaR obedece à monotonicidade, isto é, verifica-se que $VaR[X;z] \leq VaR[Y;z]$, sempre que $X \leq Y$.

3) Esta medida de risco obedece a esta propriedade. Sejam X um risco, $0 < p < 1$ e $c > 0$. Diretamente da homogeneidade positiva de VaR vem:

$$TVaR[cX;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[cX;y]dy = \frac{c}{1-p}\int_p^1 VaR[X;y]dy = cTVaR[X;p].$$

4) Esta condição é satisfeita. Sejam X um risco, $0 < p < 1$ e $c \in \mathbb{R}$:

$$TVaR[X+c;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X+c;y]dy = \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left(VaR[X;y]+c\right)dy$$
$$= \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;y]dy + \frac{1}{1-p}c(1-p) = TVaR[X;p] + c.$$

Repare-se que a segunda igualdade advém do facto de VaR satisfazer a condição da invariância por translações.

Refira-se que, contrariamente a VaR, $TVaR$ é convexa , e tal decorre, obviamente, da sua homogeneidade positiva e da sua sub-aditividade.

Teorema 4.2.3. *Sejam X um risco e $0 < p < 1$. Então, $TVaR$ de X num nível de confiança p é uma função (de p) $TVaR[X;p] : \{p : 0 < p < 1\} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à esquerda.*

Demonstração Já se provou que VaR é uma função de p crescente e contínua à esquerda, logo $TVaR$ está bem definida e é contínua à esquerda. Por outro lado, uma vez que

$$\frac{dTVaR[X;p]}{dp} = \frac{1}{(1-p)^2}\left[\int_p^1 VaR[X;p]dy - (1-p)VaR[X;p]\right] > 0,$$

vem que $TVaR$ é uma função crescente de p. ■

De seguida apresentam-se dois exemplos. No primeiro, calcula-se VaR e $TVaR$; no segundo, $TVaR$.

Exemplo 4.2.1. Seja X a variável aleatória das possíveis indemnizações, seguindo uma distribuição exponencial de média θ e, consequentemente, com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \frac{1}{\theta} exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \mathbf{1}_{x>0}(x)$. Pretende-se calcular $VaR[X;p]$ e $TVaR[X;p]$. Então, se $y > 0$:

$$F_X(y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) dx = 1 - exp\left(-\frac{y}{\theta}\right),$$

caso contrário, $F_X(y) = 0$.

Para calcular $VaR[X;p]$, resolve-se a seguinte equação em ordem a y:

$$\begin{aligned} F_X(y) = p &\Longleftrightarrow 1 - exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) = p \Longleftrightarrow y = -\theta \ln(1-p) \\ &\Longrightarrow VaR[X;p] = -\theta \ln(1-p). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} TVaR[X;p] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X;u]du = \frac{1}{1-p} \int_p^1 -\theta \ln(1-u) du \\ &= \theta \frac{1}{p-1} \left[(u-1)\ln(1-u) - u\right]_p^1 \\ &= \frac{\theta}{p-1} \ln\left(\lim_{A\to 1} (1-A)^{(A-1)}\right) + \frac{\theta + \theta(p-1)\ln(1-p) - \theta p}{(1-p)}. \end{aligned}$$

Este último limite é uma indeterminação do tipo 0^0. Seja $\lim_{A\to 1}(1-A)^{(A-1)} = y$. Então, aplicando o logarítmo a ambos os membros desta última igualdade, obtém-se:

$$\ln(y) = \lim_{A\to 1} (A-1)\ln(1-A) = \lim_{A\to 1} \frac{1}{\frac{1}{(A-1)}} \ln(1-A).$$

Agora, está-se perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pode-se, assim, aplicar a regra de l'Hôpital: $\ln(y) = \lim_{A\to 1} \frac{(A-1)^2}{(1-A)} = \lim_{A\to 1}(2-2A) = 0$.

Pelo que $\ln(y) = 0$, ou seja, $y = 1$. Finalmente:

$$\begin{aligned} TVaR[X;p] &= \frac{\theta}{p-1} \ln(1) + \frac{\theta + \theta(p-1)\ln(1-p) - \theta p}{(1-p)} \\ &= VaR[X;p] + \theta. \end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

Daqui se conclui que $VaR[X;p] = -\theta \ln(1-p)$ e $TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \theta$.

Exemplo 4.2.2. Seja $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$. Pretende-se calcular $TVaR[X;p]$, $0 < p < 1$. Ora,

$$TVaR[X;p] = E\Big[X \mid X > VaR[X;p]\Big] = \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy.$$

Denotando por ϕ a função densidade de probabilidade de $Z \sim Normal(0,1)$, isto é, $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$, e fazendo $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$, vem que

$$\begin{aligned} TVaR[X;p] &= \frac{1}{1-p}\int_{\frac{VaR[X;p]-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sigma z + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{1}{1-p}\left[\int_{\frac{VaR[X;p]-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sigma z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \mu \int_{\frac{VaR[X;p]-\mu}{\sigma}}^{\infty} \phi(z) dz\right]. \end{aligned}$$

Fazendo $u = \frac{z^2}{2}$ para o primeiro integral e, sendo Φ a função de distribuição de Z, notando que o segundo é igual a $\left(1 - \Phi\left(\frac{VaR[X;p]-\mu}{\sigma}\right)\right)$, vem que

$$TVaR[X;p] = \mu + \frac{\sigma}{1-p}\Phi\left(\frac{VaR[X;p]-\mu}{\sigma}\right). \tag{4.2.2.3}$$

4.2.3 "Conditional tail expectation", CTE

Esta medida de risco representa a perda média nos $100(1-p)\%$ piores casos possíveis, $0 < p < 1$.

Definição 4.2.5. Considerem-se X um risco e $0 < p < 1$. A medida CTE define-se como sendo a função (de p) $CTE[X;p] : \{p : 0 < p < 1\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$CTE[X;p] = E[X \mid X > VaR[X;p]].$$

Repare-se que, caso $F_X(x)$ seja absolutamente contínua, verifica-se que $CTE[X;p] = TVaR[X;p]$, $0 < p < 1$, gerando-se, assim, uma medida de risco coerente. Todavia, é possível demonstrar diretamente a sub-aditividade de CTE recorrendo ao lema seguinte:

Lema 4.2.1. *Sejam X uma variável aleatória no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ e $x \in X$ tais que $P(X > x) > 0$. Então, para todo o evento $A \subset \Omega$ tal que $P(A) = P(X > x)$,*

$$E[X \mid A] \leq E[X \mid X > x]. \tag{4.2.3.1}$$

Demonstração

Nas condições definidas no lema que se pretende provar, considere-se $B = X^{-1}\left((x, +\infty[\right)$.

Note-se que $P(B) = P(X > x) = P(A)$. Então,

$$\begin{aligned}
E\left[X \mid X > x\right] &= x + E\Big[X - x \mid X > x, A\Big]P(A \mid B) \\
&+ E\Big[X - x \mid X > x, \bar{A}\Big]P(\bar{A} \mid B) \\
&\geq x + E\Big[X - x \mid X > x, A\Big]P(A \mid B) \\
&= x + E\Big[X - x \mid X > x, A\Big]\frac{P\left(A \cap B\right)}{P(B)} \\
&= x + E\Big[X - x \mid X > x, A\Big]P(B \mid A) \\
&\geq x + E\Big[X - x \mid X > x, A\Big]P(B \mid A) \\
&+ E\Big[X - x \mid X \leq x, A\Big]P(\bar{B} \mid A) \\
&= E\left[X \mid A\right].
\end{aligned}$$

Sublinhe-se que $\bar{A} = A^c = \Omega - A$.

A primeira igualdade resulta do facto de $B = (A \cap B) \cup \big(\bar{A} \cap B\big)$. A terceira igualdade é consequência de $P(A) = P(X > x) = P(B)$. A segunda inequação é possível porque obviamente $E\Big[X - x \mid X \leq x, A\Big]$ é uma quantidade negativa. $\blacksquare$

Ora, sejam $X, Y \in \mathcal{M}$ duas variáveis aleatórias absolutamente contínuas no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$. Usando (4.2.3.1) e tendo em conta que $P\left(X > VaR[X;p]\right) = 1 - p$, vem:

$$\begin{aligned}
CTE[X+Y;p] &= E\Big[X \mid X+Y > VaR[X+Y;p]\Big] + E\Big[Y \mid X+Y > VaR[X+Y;p]\Big] \\
&\leq E\Big[X \mid X > VaR[X;p]\Big] + E\Big[Y \mid Y > VaR[Y;p]\Big] \\
&= CTE[X;p] + CTE[Y;p].
\end{aligned}$$

4.2.4 VaR condicional, CVaR

Dados um risco X e $0 < p < 1$, então, posto que o valor da indemnização se superioriza a $VaR[X;p]$, o valor esperado para esse acréscimo é a medida de risco $CVaR[X;p]$.

Definição 4.2.6. Considerem-se X um risco e $0 < p < 1$. A medida VaR condicional é uma função (de p) $CVaR[X,p] : \{p : 0 < p < 1\} \to \mathbb{R}$ definida deste modo:

$$CVaR[X;p] = E\Big[X - VaR[X;p] \mid X > VaR[X;p]\Big] = CTE[X;p] - VaR[X;p].$$

De seguida, estuda-se a coerência de $CVaR$ para riscos absolutamente contínuos.

1) A medida de risco $CVaR$ não obedece à propriedade em causa. Uma vez que $TVaR$ é sub-aditiva, dadas duas variáveis aleatórias X e Y absolutamente contínuas quaisquer, vem

$$E\Big[X+Y \,|\, X+Y > VaR[X+Y;p]\Big] \leq E\Big[X \,|\, X > VaR[X;p]\Big] + E\Big[Y \,|\, Y > VaR[Y;p]\Big],$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{1-p}\int_{VaR[X+Y;p]}^{\infty} s f_{X+Y}(s)ds \leq \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx + \frac{1}{1-p}\int_{VaR[Y;p]}^{\infty} y f_Y(y)dy. \tag{4.2.4.1}$$

Por outro lado, a sub-aditividade de $CVaR$ equivale a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-p}\int_{VaR[X+Y;p]}^{\infty} s f_{X+Y}(s)ds - VaR[X+Y;p] &\leq \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx \\ + \frac{1}{1-p}\int_{VaR[Y;p]}^{\infty} y f_Y(y)dy &- \left(VaR[X;p] + VaR[Y;p]\right).\end{aligned} \tag{4.2.4.2}$$

Se $VaR[X+Y;p] \geq VaR[X;p] + VaR[Y;p]$, uma vez que (4.2.4.1) se verifica, então (4.2.4.2) também se verifica. Caso contrário, (4.2.4.2) pode ou não ser satisfeita. Ora, VaR não é uma medida sub-aditiva, pelo que ou $VaR[X+Y;p] \geq VaR[X;p] + VaR[Y;p]$ é verdade ou $VaR[X+Y;p] < VaR[X;p] + VaR[Y;p]$ é verdade, ou seja, $CVaR$ não é sub-aditiva.

2) Esta medida não satisfaz a monotonicidade. Sejam X e Y riscos absolutamente contínuos tais que $X \leq Y$ e $0 < p < 1$. Uma vez que VaR e $TVaR$ satisfazem esta propriedade, então $VaR[X;p] \leq VaR[Y;p]$ e $TVaR[X;p] \leq TVaR[Y;p]$. Nestas condições $TVaR[X;p] - VaR[X;p] \leq TVaR[Y;p] - VaR[Y;p]$ pode-se verificar ou não, não é obrigatoriamente verdade para quaisquer riscos X e Y, pelo que CVaR não obedece à condição da monotonicidade.

3) Esta condição é verificada. Sejam X um risco absolutamente contínuo, $0 < p < 1$ e $c > 0$.

$$CVaR[cX;p] = TVaR[cX;p] - VaR[cX;p] = cTVaR[X;p] - cVaR[X;p] = cCVaR[X;p].$$

A segunda igualdade advém do facto de $TVaR$ e VaR verificarem a homogeneidade positiva.

4) Esta condição não é satisfeita. Sejam X um risco absolutamente contínuo, $0 < p < 1$ e $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} CVaR[X+c,p] &= TVaR[X+c;p] - VaR[X+c;p] \\ &= TVaR[X;p] + c - VaR[X;p] - c \\ &= TVaR[X;p] + VaR[X;p] = CVaR[X,p] \\ &\neq CVaR[X,p] + c, \text{ se } c \neq 0. \end{aligned}$$

A segunda igualdade é consequência de $TVaR$ e VaR verificarem a propriedade da invariância por translações.

4.2.5 "Expected shortfall", ES

Esta medida de risco, para um nível p, $0 < p < 1$, não é mais do que o valor do prémio num contrato stop-loss (ver (4.2.1.2)) com retenção igual a $VaR[X;p]$.

Definição 4.2.7. Para um risco X, a um nível p, $0 < p < 1$, $ES[X;p]$ é uma função (de p) $ES[X,p] : \{p : 0 < p < 1\} \to \mathbb{R}$ assim definida:

$$ES[X;p] = E\left[(X - VaR[X;p])_+\right] = \pi\left(VaR[X;p]\right) = \int_{VaR[X;p]}^{+\infty} [1 - F_X(x)]\, dx.$$

A medida de risco ES não é coerente.

Esta medida de risco satisfaz a condição da homogeneidade positiva. Sejam $c > 0$, $0 < p < 1$ e $X \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} ES[cX;p] &= \int_{VaR[cX;p]}^{\infty} (1 - F_{cX}(s))\, ds = \int_{VaR[cX;p]}^{\infty} (1 - P(cX \leq s))\, ds \\ &= \int_{VaR[cX;p]}^{\infty} \left(1 - P\left(X \leq \frac{s}{c}\right)\right) ds. \end{aligned}$$

Recorre-se, agora, a uma mudança de variável. Seja $y = \frac{s}{c}$. Se $s = VaR[cX;p]$, então $y = \frac{1}{c}VaR[cX;p]$. Isto é, uma vez que VaR satisfaz a homogeneidade positiva, $y = \frac{1}{c}VaR[cX;p] = \frac{1}{c}cVaR[X;p] = VaR[X;p]$. Por outro lado, se $s \to \infty$, então $y \to \infty$. Ora, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c}$, do que, $ds = cdy$. Logo:

$$\begin{aligned} ES[cX;p] &= \int_{VaR[cX;p]}^{\infty} \left(1 - P\left[X \leq \frac{s}{c}\right]\right) ds = c\int_{VaR[X;p]}^{\infty} (1 - P[X \leq y])\, dy \\ &= \int_{VaR[X;p]}^{\infty} (1 - F_X(y))\, dy = cES[X;p]. \end{aligned}$$

A medida de risco ES não obedece à propriedade da invariância por translações. Sejam $c \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$ e $X \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} ES[X+c;p] &= \int_{VaR[X+c;p]}^{\infty} (1 - F_{X+c}(s))\, ds = \int_{VaR[X+c;p]}^{\infty} (1 - P(X + c \leq s))\, ds \\ &= \int_{VaR[X+c;p]}^{\infty} (1 - P(X \leq s - c))\, ds. \end{aligned}$$

Considere-se uma nova variável $y = s - c$. Se $s = VaR[X + c; p]$, então $y = VaR[X + c; p] - c$. Como VaR obedece à presente propriedade, $y = VaR[X; p] + c - c = VaR[X; p]$. Se $s \to \infty$, vem que $y \to \infty$. Por outro lado, $\frac{dy}{ds} = 1$, isto é, $dy = ds$. Pelo que:

$$\begin{aligned} ES[X+c;p] &= \int_{VaR[X+c;p]}^{\infty} (1 - P(X \leq s - c))\, ds = \int_{VaR[X;p]}^{\infty} (1 - P(X \leq y))\, dy \\ &= ES[X;p] \neq ES[X;p] + c, \text{ se } c \neq 0. \end{aligned}$$

4.2.6 Medida de Risco Padrão

Outra medida de risco R é a denominada Medida de Risco Padrão e é definida como se segue:

Definição 4.2.8. Sejam X um risco e u uma função de utilidade. A Medida de Risco padrão R é assim definida: $R(X) = -E[u(X - E[X])]$.

Exemplo 4.2.3. Considerem-se X um risco e $u(x) = ax - bx^2$ a função de utilidade, com a e b números reais não nulos simultâneamente. Pretende-se calcular $R(X)$:

$$\begin{aligned} R(X) &= -E[a(X - E[X]) - b(X - E[X])^2] \\ &= -E[aX - aE[X] - bX^2 + 2bXE[X] - bE[X]^2] \\ &= -aE[X] + aE[X] + bE[X^2] - 2bE[X]^2 + bE[X]^2 \\ &= bE[X^2] - bE[X]^2 = bVar[X]. \end{aligned}$$

4.3 Relações entre medidas de risco

Apresentam-se de seguida as relações existentes entre as várias medidas de risco. Para o que se segue, então, X é um risco absolutamente contínuo, $0 < p < 1$, $F_X(x)$ é a função de distribuição de X e $\overline{F}_X(x) = Pr[X > x] = 1 - F_X(x)$.

Lema 4.3.1. *Verificam-se as seguintes igualdades:*

1) $TVar[X;p] = Var[X;p] + \frac{1}{1-p} ES[X;p]$;

2) $CTE[X;p] = Var[X;p] + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X;p])} ES[X;p]$;

3) $CVaR[X;p] = \frac{ES[X;p]}{\overline{F}_X(VaR[X;p])}$.

Demonstração

1) Referiu-se que $TVaR[X;p] = E\Big[X \mid X > VaR[X;p]\Big] = \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx$, na secção 4.2.2, com $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade de X. Então,

$$
\begin{aligned}
& VaR[X;p] + \frac{1}{1-p} ES[X;p] = \\
& = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} \left(x - VaR[X;p]\right) f_X(x)dx \\
& = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}\left[\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - VaR[X;p]\int_{VaR[X;p]}^{\infty} f_X(x)dx\right] \\
& = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}\left[\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - VaR[X;p]\left(1 - F_X(VaR[X;p])\right)\right] \\
& = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}\left[\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - VaR[X;p] + VaR[X;p]p\right] \\
& = VaR[X;p] - \frac{1}{(1-p)} VaR[X;p] + \frac{1}{(1-p)} VaR[X;p]p \\
& + \frac{1}{(1-p)}\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx = TVaR[X;p].
\end{aligned}
$$

2) Desenvolvendo a definição de ES,

$$
\begin{aligned}
ES[X;p] = E\left[(X - VaR[X;p])_+\right] &= \int_{VaR[X;p]}^{\infty} \left(x - VaR[X;p]\right) f_X(x)dx \\
&= \int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - VaR[X;p] + VaR[X;p]p \\
&= \int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - (1-p)VaR[X;p].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& VaR[X;p] + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X;p])} ES[X;p] \\
& = VaR[X;p] + \frac{1}{1 - F_X(VaR[X;p])}\left[\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - (1-p)VaR[X;p]\right] \\
& = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}\left[\int_{VaR[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx - (1-p)VaR[X;p]\right] \\
& = \frac{1}{1-p}\int_{Var[X;p]}^{\infty} x f_X(x)dx = E\left[X \mid X > VaR[X;p]\right] = CTE[X;p].
\end{aligned}
$$

3) É sabido que $CVaR[X;p] = CTE[X;p] - VaR[X;p]$. Utilizando a relação 2), vem,

$$\begin{aligned} CVaR[X;p] &= VaR[X;p] + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X;p])} ES[X;p] - VaR[X;p] \\ &= \frac{ES[X;p]}{\overline{F}_X(VaR[X;p])}. \end{aligned}$$ ■

Capítulo 5

Aplicações

No presente capítulo, todos os valores apresentados resultam da aplicação de programas escritos em linguagem R, programas esses que se encontram nos anexos. São calculados prémios, de acordo com múltiplos princípios, as principais medidas de risco e probabilidades de ruína, tudo para situações concretas especificadas. Note-se que as distribuições da secção 5.1 não têm qualquer relação com as distribuições da secção 5.2.

5.1 Cálculo computacional de prémios e de medidas de risco

Nesta secção, calculam-se os prémios pelos princípios abordados anteriormente, bem como os valores assumidos pelas principais medidas de risco, tudo para seis distribuições absolutamente contínuas. Para tal, foram concebidos programas em linguagem R, presentes nos ANEXOS 3.

5.1.1 Apresentação das distribuições

Todas as distribuições possuem um valor esperado igual ou aproximado a 1200 e uma variância igual ou aproximada a 2400, à exceção de X_1, em que a média iguala 1200 e a variância 1200^2. As distribuições são as seguintes:

$$X_1 \sim Exp(\tfrac{1}{1200}) \qquad\qquad X_4 \sim Normal(1200, 2400);$$

$$X_2 \sim Logistic\left(1200, \tfrac{\sqrt{7200}}{\pi}\right) \qquad\qquad X_5 \sim Pareto(1152.9688, 25.15);$$

$$X_3 \sim Gamma(600, \tfrac{1}{2}) \qquad\qquad X_6 \sim lnN(7.0892, 0.0408).$$

Observando, na Figura 5.1, as respetivas funções de densidade de probabilidade, constata-se que algumas são relativamente semelhantes.

A distribuição de Pareto só assume valores superiores ou iguais a 1152.9688. Na Figura 5.1, a semirreta vertical apresentada não é parte do gráfico da função de densidade de probabilidade de X_5.

Somente se consideram os valores positivos da distribuição normal. Deste último facto, conclui-se que, em rigor, se deveria optar pela distribuição normal truncada. Todavia, a diferença entre X_4 e a respetiva distribuição truncada é claramente desprezível.

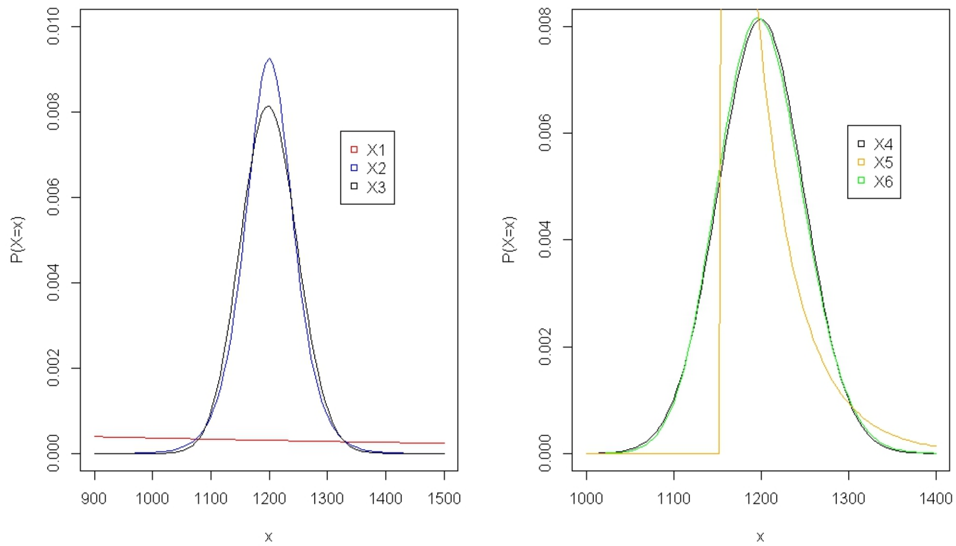

Figura 5.1: Funções densidade de probablidade de X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6

Claramente, X_1 é mais propensa a assumir valores muito elevados. Sublinhe-se, uma vez mais, que a variância de X_1 é consideravelmente superior às variâncias das restantes distribuições. Esta maior ou menor propensão de uma distribuição em assumir valores elevados pode ser expressa pelo conceito de cauda pesada; quanto maior essa propensão, mais pesada é a cauda da distribuição. Existem várias formas de averiguar o "peso" da cauda de uma distribuição. Nesta tese, faz-se uso de três possíveis abordagens.

A mais intuitiva e pouco elaborada de todas passa, simplesmente, pela constatação de que, no caso concreto, e por exemplo, $P(X_5 > 1700) = 5.7401 \times 10^{-5}$, $P(X_2 > 1700) = 2.9113 \times 10^{-5}$ e $P(X_i > 1700) = 0,\ i \in \{3, 4, 6\}$.

Este "processo" parece indicar que, colocando X_1 de parte, por possuir uma variância muito superior à das demais distribuições, a cauda mais pesada é a de X_5, seguida da de X_2.

Todavia, este método é bastante rudimentar e falível. Uma outra metodologia recorre à noção de função de excesso médio.

Definição 5.1.1. Dada uma variável aleatória X não negativa com valor esperado finito e função de distribuição $F_X(.)$, a função de excesso médio de X é uma função definida por

$$e(x) = E\left[X - x \mid X > x\right] = \frac{\int_x^{+\infty} (1 - F_X(u))\, du}{1 - F_X(x)}, \text{ para } x_m < x < x_M,$$

onde $x_m = inf\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > 0\right\}$ e $x_M = sup\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < 1\right\}$.

Note-se que, pela perda de memória da distribuição exponencial, se conclui que, neste caso, $e(x) = \frac{1}{\beta}$ para todo o valor de x, sendo β o parâmetro da distribuição (ver [13]).

Uma definição possível e mais elaborada do que a anterior para o conceito de cauda pesada é a seguinte: se o gráfico da função de excesso médio de uma distribuição for crescente, ou, pelo menos, for crescente em $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, então essa distribuição tem a cauda mais pesada do que a distribuição exponencial, a distribuição de referência, e a distribuição diz-se de cauda pesada; se for decrescente, pelo menos em $[a, +\infty)$, tem cauda menos pesada do que a distribuição exponencial e diz-se de cauda leve.

Recorrendo a ([13]) constata-se que, segundo esta abordagem, X_5 e X_6 são distribuições com cauda pesada, sendo X_3 de cauda não pesada ou leve.

Por fim, também se averigua o "peso" da cauda de uma distribuição recorrendo ao respetivo coeficiente de assimetria (ver [7]).

Definição 5.1.2. O coeficiente de assimetria de uma distribuição X define-se como

$$\gamma_X = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3},$$

com $\mu = E[X]$ e $\sigma^2 = Var[X]$.

Ora, se $\gamma_X > 0$, os valores extremos de $X - \mu$ possuem uma probablidade significativa de ocorrrência e X diz-se de cauda pesada. Quanto maior o valor de γ_X, mais pesada é a cauda da distribuição.

Esta metodologia indica que as distribuições com cauda mais pesada são, por ordem decrescente, X_5, X_6, e X_3. Senão, atente-se, então, na Tabela 5.1:

Tabela 5.1: Coeficiente de assimetria das distribuições

Distribuição	Coeficiente de assimetria
X_2	0
X_3	0.0816
X_4	0
X_5	2.2653
X_6	0.1225

Combinando os três métodos descritos, conclui-se que X_5 e X_6 são distribuições com cauda pesada e que as distribuições com cauda mais pesada são, por ordem decrescente, X_5, X_6, X_3 e X_2.

5.1.2 Valores do prémio segundo os diferentes princípios de cálculo

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 estão presentes os diversos valores que o prémio pode assumir para cada risco, tendo em conta o princípio adotado.

Uma vez que todos os riscos podem assumir um conjunto ilimitado de valores, não existe, para nenhuma distribuição, um prémio pelo princípio da perda máxima. Utilizam-se os seguintes valores para parâmetros já explorados: $\alpha_1 = 0.1$ (princípios da esperança matemática, da variância e do desvio padrão), $\alpha_2 = 7 \times 10^{-4}$ (princípio exponencial e princípio da utilidade nula com utilidade exponencial), $h = 7 \times 10^{-4}$ (princípio de Esscher), $\rho = 2$ (princípio do risco ajustado), $\epsilon = 0.25$ (princípio do percentil), $p = 0.9$ (nível de confiança nas medidas de risco).

Note-se que "*n.e*" significa que não existe um prémio atribuído.

Pode-se concluir que existe uma concordância significativa entre a hierarquia preconizada para as distribuições quanto ao "peso" da cauda e os valores dos prémios. Com efeito, colocando X_1 de parte, a distribuição de Pareto é a que apresenta o prémio mais elevado qualquer que seja o princípio utilizado, excetuando quando se aplica o princípio do percentil. Quanto mais pesada a cauda da variável aleatória que representa as possíveis indemnizações a serem atribuídas pela seguradora, maior parece ser o valor do prémio, independentemente do princípio de cálculo do prémio utilizado.

Esta relação não é, todavia, uma relação forte. Senão repare-se, por exemplo, nos prémios relativos à distribuição X_6.

Tabela 5.2: Valores do prémio de acordo com vários princípios

Princ.→ Dist. ↓	μ	$\mu+\alpha\mu$	exp	σ^2	σ
X_1	1200	1320	2617.974	145200	1320
X_2	1200	1320	1200.84	1440	1204.899
X_3	1200	1320	1200.841	1440	1204.899
X_4	1200	1320	1200.84	1440	1204.899
X_5	1200.711	1320.782	$n.e.$	1448.332	1205.687
X_6	1199.947	1319.941	$n.e.$	1439.833	1204.844

Tabela 5.3: Valores do prémio de acordo com vários princípios

Princ.→ Dist. ↓	$g(.)$	$u(.)$	Ess	%
X_1	2400	2617.974	7500	1663.553
X_2	1237.443	1200.84	$n.e.$	1229.673
X_3	1235.204	1200.841	$n.e.$	1232.67
X_4	1234.504	1200.84	1201.68	1233.043
X_5	1252.577	$n.e.$	$n.e.$	1218.306
X_6	1235.505	$n.e.$	$n.e.$	1232.401

Os princípios em questão atribuem valores relativamente semelhantes a distribuições que pouco diferem umas das outras no seu valor esperado e na sua variância. Claramente, os valores do prémio para a distribuição exponencial diferem substancialmente dos demais. Os princípios que geram valores mais heterogéneos são os do risco ajustado, do percentil e de Esscher, se bem que, neste último, só dois riscos têm um valor atribuído; nos demais pelo menos um dos integrais envolvidos no cálculo diverge.

Para o risco X_1, os princípios da variância e de Esscher produzem prémios muito superiores aos gerados pelos restantes princípios. De resto, o princípio da variância é o que gera os prémios mais elevados em todas as distribuições.

5.1.3 Valores das medidas de risco

Na Tabela 5.4 encontram-se os valores de quatro medidas de risco para as distribuições em causa, com o nível de confiança $p = 0.9$.

Tabela 5.4: Medidas de risco para X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6

M.Risco→ Dist. ↓	VaR	$TVaR$	ES	$CVaR$
X_1	2763.102	3963.102	120	1200
X_2	1259.346	1287.803	2.8457	28.4573
X_3	1263.196	1287.462	2.4267	24.2665
X_4	1208.97	1227.459	1.8489	18.489
X_5	1263.511	1315.83	5.2319	52.3193
X_6	1263.306	1288.128	2.4821	24.821

Uma vez mais, X_1 apresenta valores consideravelmente superiores aos relativos aos restantes riscos. De facto, como a probabilidade de este último risco assumir valores muito elevados (valores catastróficos, portanto) é relevante, a seguradora para lhe fazer face terá de estar munida de um montante mais elevado do que aquele que necessita para suportar os demais riscos, riscos que muito dificilmente se revelam calamitosos. De resto, existe uma concordância muito forte entre a hierarquia das distribuições quanto ao "peso" da cauda e os valores das medidas de risco. Relembre-se que se concluiu que a ordem decrescente das distribuições quanto ao "peso" da cauda é a seguinte: X_5, X_6, X_3 e X_2. Ora, esta ordem verifica-se exatamente para VaR e $TVaR$ e "quase" é verificada extamente para $CVaR$ e ES. Por outro lado, X_5 apresenta os valores mais elevados em todas as medidas de risco. Esta sintonia era expectável uma vez que, quanto maior for a probabilidade de um risco em assumir valores extremos, isto é, quanto mais pesada for a sua cauda, maior deve ser a quantia com que a seguradora o enfrenta.

Anteriormente mostrou-se que a medida $TVaR$ é mais adequada a riscos potencialmente catastróficos, enquanto que VaR é mais indicada para riscos que representam perdas em circunstâncias normais. Como tal $TVaR = 3963.102$ é a medida de risco ideal para enfrentar X_1 com um nível de confiança de 90%. Isto é, o valor esperado para a indemnização posto que será superior a $VaR[X_1; 0.9] = 2763.102$ é de 3963.102. Para enfrentar os outros riscos VaR é talvez mais adequada do que $TVaR$. Se assim for, a seguradora, estando inicialmente provida de um montante igual ao valor de $VaR[X_i;0.9]$, em 90% das realizações de X_i, $i \in \{2,3,4,5,6\}$, não incorrerá numa situação de prejuízo. Relembre-se que, X_1 de parte, a distribuição de Pareto apresenta valores significativamente superiores do que os restantes riscos. O segundo valor mais elevado de $CVaR$ verifica-se na distribuição logística; aqui, $CVaR = 28.4573$, o que significa que o valor esperado para o que o valor da indemnização acresce a $VaR[X_2,0.9] = 1259.346$, posto que esse acréscimo ocorre, é de 28.4573. O valor de ES é mais elevado em X_2. O facto de $ES[X_2;0.9] = 2.8457$ significa que o valor do prémio num contrato stop-loss com franquia $VaR[X_2;0.9] = 1259.346$ é igual a 2.8457.

5.2 Cálculo computacional da probabilidade de ruína

Pretende-se determinar aproximações para a probabilidade de ruína utilizando recursos computacionais. Especificamente, fazendo uso de programas concebidos para o efeito, escritos em linguagem de Programação R, presentes nos ANEXOS 1.

Considere a seguinte situação hipotética. Em média, ocorre um sinistro por cada cinco dias decorridos. A unidade temporal considerada é de um dia, $X \sim Gamma(900,1)$, $u = 600$, $\theta = 0.3$ e $\lambda = 1/5$. Note-se que se pretende determinar uma aproximação para a probabilidade de ruína do processo de Poisson homogéneo:

$$U(t) = 600 + (1+0.3)\frac{900}{5}t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ X_i \sim Gamma(900,1),\ N(t) \sim Poisson\left(\frac{t}{5}\right).$$

Fazem-se 10000 simulações, sendo que em cada uma delas existem 400 indemnizações. Obtém-se:

$R > Simulation.Gamma(0.2, 600, 900, 1, 0.3, 400, 10000)$

6152 4.559655 8.004714 168 0.6152

Em 6152 das 10000 simulações ocorreu a ruína. Nestas simulações, em média, a ruína surgiu (pela primeira vez) na 5ª indemnização e no máximo ocorreu na 168ª indemnização. É então pouco provável que a ruína surja após a indemnização nº 400. Pelo que, $\psi(600) \approx 0.6152$.

Por seu turno, a solução positiva da equação $1 + 1170r = \frac{1}{(1-r)^{900}}$ é o coeficiente de ajustamento (ver secção 2.3). Resolvendo esta equação recorrendo a um programa para tal concebido presente nos ANEXOS 2, vem que $R \approx 5.5887 \times 10^{-4}$. Pelo que, pela desigualdade de Lundberg, $\psi(600)$ será no máximo $e^{-600\times 5.5885\times 10^{-4}} = 0.7153$.

Considerem-se três tipos de modelos, com $u \geq 0$:

1) $U_1(t) = u + (1+0.3)\frac{900}{5}t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{1;i},\ X_{1;i} \sim Gamma(900,1),\ N(t) \sim Poisson\left(\frac{t}{5}\right)$;

2) $U_2(t) = u + (1+0.3)\frac{900}{5}t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{2;i},\ X_{2;i} \sim Pareto(870.9827, 31.016),\ N(t) \sim Poisson\left(\frac{t}{5}\right)$;

3) $U_3(t) = u + (1+0.3)\frac{900}{5}t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{3;i},\ X_{3;i} \sim Exp(\frac{1}{900}),\ N(t) \sim Poisson\left(\frac{t}{5}\right)$.

Atente-se nas tabelas seguintes:

Tabela 5.5: Probabilidade de ruína associada a $X_1 \sim Gamma(900,1)$.

u	200	600	1250	5000
$\psi_{400;U_1}(u)$	0.7233	0.6152	0.4296	0.051
$\psi_{L;U_1}(u)$	0.8943	0.7153	0.4975	0.0613

Tabela 5.6: Probabilidade de ruína associada a $X_2 \sim Pareto(870.9827, 31.016)$.

u	200	600	1250	5000
$\psi_{400;U_2}(u)$	0.7349	0.6185	0.4319	0.0535

Tabela 5.7: Probabilidade de ruína associada a $X_3 \sim Exp\left(\frac{1}{900}\right)$.

u	200	600	1250	5000
$\psi_{400;U_3}(u)$	0.7348	0.6574	0.5681	0.2127
$\psi_{U_3}(u)$	0.7308	0.6595	0.558	0.2134
$\psi_{L;U_3}(u)$	0.95	0.8574	0.7258	0.2775

Note-se que todas as distribuições das indemnizações particulares têm valor esperado igual a 900; a variância da distribuição de Pareto e a variância da distribuição gama igualam 900; a variância da distribuição exponencial é de 900^2.

Fazendo uso do programa referido, preenche-se a Tabela 5.5. Note-se que $\psi_{400;U_1}(u)$ representa a aproximação pela simulação para a probabilidade de ruína relativa a modelos do tipo $U_1(t)$ e $\psi_{L;U_1}(u)$ o limite máximo dessa mesma probabilidade de ruína obtido pela desigualdade de Lundberg.

A Tabela 5.6 apresenta a probabilidade de ruína de quatro modelos do tipo $U_2(t)$, mais concretamente os modelos do tipo referido para $u = 200$, $u = 600$, $u = 1250$ e $u = 5000$. Tais valores são obtidos mediante a utilização de um outro programa que figura nos ANEXOS 1, sendo representados por $\psi_{400;U_2}(u)$. Note-se que, neste caso, não se calculam valores pela desigualdade de Lundberg. De facto, tais são inexistentes, uma vez que a função geradora de momentos de uma variável aleatória seguindo uma distribuição de Pareto somente se encontra definida para valores negativos.

Quanto aos valores da Tabela 5.7, por um lado, advêm de mais um programa presente nos ANEXOS 1, dando origem aos valores representados por $\psi_{400;U_3}(u)$. Por outro lado, determinam-se pelas expressões dos exemplos 2.3.1 e 2.4.1, uma vez que dizem respeito a modelos do tipo $U_3(t)$, isto é, modelos em tudo iguais aos anteriores mas com as indemnizações individuais a seguirem, agora, uma distribuição $X_3 \sim Exp\left(\frac{1}{900}\right)$. Trata-se da probabilidade de ruína exata, representada por $\psi_{U_3}(u)$. Por fim, $\psi_{L;U_3}(u)$ é o limite máximo da probabilidade de ruína pela desigualdade de Lundberg.

Como é óbvio a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior for o capital inicial. Repare-se que, quando o desfazamento entre o capital inicial e a média das indemnizações particulares não é grande, a probabilidade de ruína não se aproxima de valores extremos. Pelo contrário, quando $u = 200$, a probabilidade de ruína nos três casos é de cerca de 70%. Inclusivamente, na simulação para a distribuição gama, quando a ruína ocorre, em média, é logo na 3.0099ª indemnização, o que é compreensível uma vez que em média essa primeira indemnização será de 900, com o processo a iniciar-se em $U(0) = 200$. Basta que a 1ª indemnização ocorra antes dos primeiros 2.991 dias para, na maior parte dos casos, ser suficiente para causar a ruína. Quando $u = 5000$ a ruína é pouco provável, verificando-se apenas, no caso da distribuição gama, em 501 das 10000 simulações.

Por outro lado, à medida que o capital inicial aumenta, a diferença entre a probabilidade de ruína para a distribuição exponencial e a probabilidade de ruína das outras duas distribuições também aumenta, com a distribuição exponencial a gerar probabilidades de ruína cada vez mais distantes das geradas pela distribuição gama e pela distribuição de Pareto. Constate-se que $\psi_{U_3}(5000) = 0.2134$ ao passo que $\psi_{400;U_1}(5000) = 0.051$ e $\psi_{400;U_2}(5000) = 0.0535$. Tal pode ser explicado pelo facto da distribuição exponencial ser mais propensa a assumir valores mais elevados. Uma forma possível de isto justificar passa por notar que todas as distribuições possuem o mesmo valor esparado, mas a variância da distribuição exponencial é de 900^2 ao passo que a da distribuição gama e a da distribuição de Pareto é de 900. Ou, então, tomando um valor significativamente superior a $\mu_1 = 900$, por exemplo 2000, notar que $P(X_3 > 2000) = 0.1083$ e $P(X_1 > 2000) = 0$ e $P(X_2 > 2000) = 0$. Pelo que mais facilmente o processo $U(t)$ incorre numa situação de ruína quando as indemnizações individuais são identicamente distribuídas a $X_3 \sim Exp\left(\frac{1}{900}\right)$.

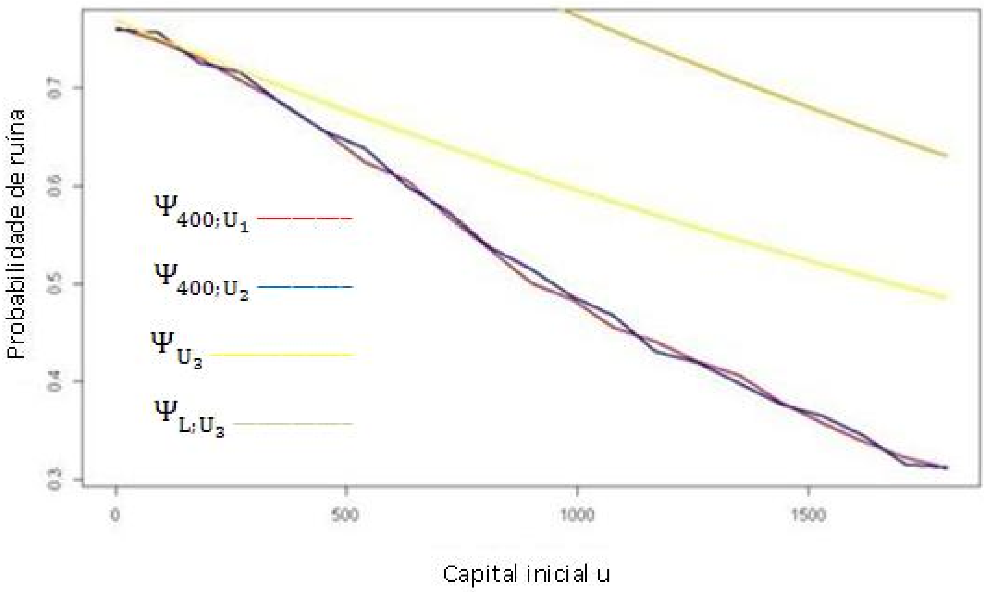

Figura 5.2: Probabilidade de ruína para $U_1(t)$, $U_2(t)$ e $U_3(t)$

Na Figura 5.2 encontram-se representados de forma exata: o gráfico da probabilidade de ruína teórica para diferentes valores do capital inicial quando as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial ($\psi_{U_3}(u)$); o gráfico com o valor máximo da probabilidade de ruína para a mesma situação, resultante da aplicação da desigualdade de Lundberg ($\psi_{L;U_3}(u)$). Figuram igualmente duas aproximações para dois gráficos: o da probabilidade de ruína para diferentes valores do capital inicial quando as indemnizações particulares seguem uma distribuição de Pareto ($\psi_{400;U_2}(u)$); e o da probabilidade de ruína quando as indemnizações individuais seguem uma distribuição gama ($\psi_{400;U_1}(u)$). São aproximações por dois motivos. Em primeiro lugar, resultam do cálculo de vinte e um pontos, posteriormente ligados por segmentos de reta. Em segundo lugar, esses pontos são calculados pelos programas dos ANEXOS 1, ou seja, são consequência de simulações computacionais.

De salientar ainda três aspetos. Em primeiro lugar, a distribuição de Pareto, no geral, parece exibir valores ligeiramente superiores para a probabilidade de ruína aos apresentados pela distribuição gama, o que é provavelmente consequência do facto de esta última ter a cauda menos pesada do que a primeira. Em segundo lugar, sublinhe-se a relativa proximidade entre os valores de $\psi_{U_3}(u)$ e $\psi_{L;U_3}(u)$, patente na Tabela 5.7 e na Figura 5.2, proximidade que é tanto maior quanto maior for o valor de u. Por fim, saliente-se a proximidade entre os valores teóricos $\psi_{U_3}(u)$ e os valores $\psi_{400;U_3}(u)$, provenientes da simulação computacional, o que confirma a eficácia deste método.

Capítulo 6

Conclusão

A utilização do modelo de risco de Crámer-Lundberg para modelar um processo no tempo em que o capital da seguradora varia como consequência do equilibrio entre indemnizações pagas e prémios arrecadados, permite a obtenção de pelo menos uma aproximação para a probabilidade de ruína. Possibilita igualmente que se estime qual o valor máximo esperado para os prejuízos em que a seguradora, neste processo, incorrerá ao longo do tempo, isto é, o valor esperado da perda agregada máxima. É um modelo que pode ser simulado computacionalmente com facilidade. Tem, todavia, algumas desvantagens, nomeadamente o facto de poder ser um pouco irrrealista quando, por exemplo, se considera que o valor para os prémios arrecadados por unidade de tempo é invariável. O facto das indemnizações serem independentes e identicamente distribuídas também desaconselha a utilização deste modelo nalgumas situações.

Existem alguns casos em que é possível determinar exata e explicitamente o valor da probabilidade de ruína, como, por exemplo, quando as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial, ou quando são identicamente distribuídas a uma mistura de exponenciais. Contudo, na maioria dos casos, tal não é possível. Um método fidedigno para, nestas situações, aproximar o valor da probabilidade de ruína, passa pela utilização de simulações computacionais. De qualquer das formas, facilmente se conclui que a probabilidade de ruína, dependendo do capital inicial, do parâmetro do processo de Poissson homogéneo associado, do coeficiente de segurança, do valor esperado para as indemnizações individuais e do coeficiente de ajustamento, parece igualmente ser sensível ao peso da cauda da distribuição das indemnizações particulares.

O cálculo de prémios pode ser complexo e intrincado; mas pode igualmente ser elementar. Existem múltiplos princípios à luz dos quais é efetuado. O princípio do prémio puro e o princípio da perda máxima são irrealistas; o primeiro por conduzir à ruína, o segundo por impor um prémio cujo valor iguala a indemnização máxima possível que pode recair sobre a seguradora. O princípio da variância dá azo a prémios muito elevados e, por isso, pouco competitivos, sendo desta forma pouco aconselhável. De resto, não existe um princípio objetiva e universalmente superior a todos os demais. A opção por um e não outro dependerá sobretudo da subjetividade de quem decide, mais concretamente da importância ou conveniência que este atribui a cada uma das propriedades dos princípios de cálculo de prémios. Por exemplo, se se considerar, num determinado contexto, que o princípio deve ser aditivo, ou seja, que a combinação de riscos tem de gerar um prémio igual ao somatório dos prémios quando se encaram os riscos individualmente, então, o princípio do desvio-padrão não será o adotado. Mas os princípios da esperança matemática, de Esscher e o princípio exponencial já serão elegíveis.

As medidas de risco quantificam o perigo que representa para a seguradora um risco determinado. As mais utilizadas são VaR e $TVaR$. A primeira é apropriada para mensurar o perigo associado a riscos insuscetíveis de se revelarem calamitosos. Todavia, não é subaditivia, uma particularidade que debelita seriamente esta medida. Com efeito, se uma seguradora decide combinar dois riscos é porque tal lhe proporciona vantagens. Ou seja, o perigo para a seguradora ao suportar os riscos combinados é inferior ao perigo que sobre ela recai quando faz face a todos os riscos considerados individualmente. Nesse sentido, adotar uma medida que quantifica o perigo de uma forma em que este é maior na situação em que se somam os riscos que se decidiram combinar, e não quando os riscos são tratados individualmente, é pouco conveniente. Desta forma, VaR não é uma medida coerente. Pelo contrário, $TVaR$ é sub-aditiva. Contudo, é mais adequada a riscos significativamente propensos a assumir valores extremos.

Os valores do prémio e sobretudo das medidas de risco parecem ser sensíveis ao peso da cauda da distribuição representando as possíveis indemnizações a assegurar. Tal é explicável por ser compreensível que, quanto maior for a probabilidade de um risco assumir valores considerados elevados, maior deve ser o prémio solicitado pela seguradora por o suportar e maior é o perigo que este para ela representa.

ANEXOS

ANEXOS 1

```
Simulation.Gamma <- function(lambda, u, alpha, beta, theta, nclaims, nsim){
# X ~ Gamma(alpha, beta); θ - coeficiente de segurança.
c = (1 + theta) * lambda * (alpha/beta)
Ruin_pos = rep(Inf, nsim)
for(i in c(1 : nsim)){
T_entre_claims = rexp(nclaims, lambda)
T_espera = c()
T_espera[1] = T_entre_claims[1]
for(j in c(2 : nclaims)){
T_espera[j] = T_espera[j - 1] + T_entre_claims[j]
}
Claims = rgamma(nclaims, shape = alpha, rate = beta)
S = c()
S[1] = Claims[1]
for(j in c(2 : nclaims)){
S[j] = S[j - 1] + Claims[j]
}
U = c()
for(j in c(1 : nclaims)){
U[j] = u + c * T_espera[j] - S[j]
}
aux1 = which(U < 0)
if(length(aux1)! = 0){
Ruin_pos[i] = min(aux1)
}
}
aux2 = which(Ruin_pos < Inf)
Sol = Ruin_pos[aux2]
cat(length(Sol), mean(Sol), sd(Sol), max(Sol), (length(Sol)/nsim))
}
```

$Simulation.Pareto < -function(lambda,\ u,\ x_m,\ alpha,\ theta,\ nclaims,\ nsim)\{$

$\#\ X \sim Pareto(x_m,\ alpha);\ \theta -\ coeficiente\ de\ segurança.$

$c = (1 + theta) * lambda * (\alpha * xm)\ /(\alpha - 1)$

$Ruin\_pos = rep(Inf,\ nsim)$

$for(i\ in\ c(1 : nsim))\{$

$T\_entre\_claims = rexp(nclaims,\ lambda)$

$T\_espera = c()$

$T\_espera[1] = T\_entre\_claims[1]$

$for(j\ in\ c(2 : nclaims))\{$

$T\_espera[j] = T\_espera[j-1] + T\_entre\_claims[j]$

$\}$

$Claims = rpareto(nclaims, xm, \alpha)$

$S = c()$

$S[1] = Claims[1]$

$for(j\ in\ c(2 : nclaims))\{$

$S[j] = S[j-1] + Claims[j]$

$\}$

$U = c()$

$for(j\ in\ c(1 : nclaims))\{$

$U[j] = u + c * T\_espera[j] - S[j]$

$\}$

$aux1 = which(U < 0)$

$if(length(aux1)! = 0)\{$

$Ruin\_pos[i] = min(aux1)$

$\}$

$\}$

$aux2 = which(Ruin\_pos < Inf)$

$Sol = Ruin\_pos[aux2]$

$cat(length(Sol),\ mean(Sol),\ sd(Sol),\ max(Sol),\ (length(Sol)/nsim))$

$\}$

```
Simulation.Exp <- function(lambda, u, β, theta, nclaims, nsim){
# X ~ Exp(β); θ − coeficiente de segurança.
c = (1 + theta) * lambda * (1/beta)
Ruin_pos = rep(Inf, nsim)
for(i in c(1 : nsim)){
T_entre_claims = rexp(nclaims, lambda)
T_espera = c()
T_espera[1] = T_entre_claims[1]
for(j in c(2 : nclaims)){
T_espera[j] = T_espera[j − 1] + T_entre_claims[j]
}
Claims = rexp(nclaims, beta)
S = c()
S[1] = Claims[1]
for(j in c(2 : nclaims)){
S[j] = S[j − 1] + Claims[j]
}
U = c()
for(j in c(1 : nclaims)){
U[j] = u + c * T_espera[j] − S[j]
}
aux1 = which(U < 0)
if(length(aux1)! = 0){
Ruin_pos[i] = min(aux1)
}
}
aux2 = which(Ruin_pos < Inf)
Sol = Ruin_pos[aux2]
cat(length(Sol), mean(Sol), sd(Sol), max(Sol), (length(Sol)/nsim))
}
```

ANEXOS 2

$equation < -function(a)\{$

$i = 0$

$prod = 1$

$while(prod >= 0)\{$

$j = i + 10 \wedge (-6)$

$xleft = i$

$xright = j$

$yleft = 1 + a * xleft - (1 - xleft) \wedge (-900)$

$yright = 1 + a * xright - (1 - xright) \wedge (-900)$

$prod = yleft * yright$

$i = j$

$\}$

$sol = (xleft + xright)/2$

$print(sol)$

$\}$

$> equation(1170)$

0.0005585

ANEXOS 3

Risco com distribuição Exponencial

$Exponential.Claims < -function(beta, alpha1, rho, alpha2, h, epsilon, p)\{$

$\#Claims \sim Exp(beta);\ alpha1 - P.\ Esperança\ Matemática,\ P.\ da\ variância\ e\ P.\ Desvio\ padrão;$

$\#rho - P.\ do\ risco\ ajustado,\ com\ \pi[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}}\, dx = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-\beta x}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}}\, dx = \frac{\rho}{\beta};$

$\#alpha2 - P.\ utilidade\ nula\ com\ função\ de\ utilidade\ exponencial\ de\ parâmetro\ alpha2;$

$\#h - P.Esscher.\ Se\ h < \beta,\ então\ E\left[e^{hX}\right] = \int_0^\infty \beta e^{-\beta x} e^{hx} dx = \frac{\beta}{\beta - h}\ e\ E\left[Xe^{hX}\right] =$

$\#\int_0^\infty x\beta e^{-\beta x} e^{hx} dx = \frac{\beta}{(h-\beta)^2},\ ou\ seja,\ \pi[X] = \frac{1}{\beta - h};\ epsilon - P.\ do\ percentil,\ com$

$\#F_X(x) = 1 - \epsilon \iff \left(1 - e^{-\beta x}\right) = 1 - \epsilon \iff x = \pi[X] = \frac{-\ln \epsilon}{\beta}.$

$\#p - Medidas\ de\ risco;\ TVaR\ calculada\ por\ (4.2.2.2);\ as\ demais\ pelas\ fórmulas\ da\ secção\ 4.3.$

$aux1 = 0$

$if(beta <= 0)\{$

$cat(\text{"}O\ valor\ de\ beta\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.\text{"},\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$aux1 = 1$

$\}$

$aux2 = 0$

$if(alpha1 <= 0)\{$

$cat(\text{"}O\ valor\ de\ alpha1\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.\text{"},\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$aux2 = 1$

$\}$

$if(aux1 == 0)\{$

$P1 = (1/beta)$

$cat(\text{"}O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ do\ prémio\ liquido\ é\ de\text{"},\ P1,\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$\}$

$if((aux1 == 0)\&(aux2 == 0))\{$

$P2 = (1/beta) + (1/beta) * alpha1$

$P3 = (1/beta) + (1/((beta) \wedge 2)) * alpha1$

$P4 = (1/beta) + (1/beta) * alpha1$

$cat(\text{"}O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ da\ esperança\ matemática\ \ de\text{"},\ P2,\ \text{"} \setminus n\text{"})$

```
cat("O valor do prémio pelo princípio da variância é de", P3, " \n")
cat("O valor do prémio pelo princípio do desvio padrão é de", P4, " \n")
}
aux3 = 0
if(rho < 1){
cat("O valor de rho tem de ser superior ou igual a 1.", " \n")
aux3 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux3 == 0)){
P5 = rho/beta
cat("O valor do prémio pelo princípio de risco ajustado é de", P5, " \n")
}
aux4 = 0
if(alpha2 <= 0){
cat("O valor de alpha2 tem de ser estritamente superior a 0.", " \n")
aux4 = 1
}
aux5 = 0
if(beta <= alpha2){
cat("O valor de alpha2 tem de ser estritamente inferior ao valor de beta.", " \n")
aux5 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux4 == 0)&(aux5 == 0)){
P6 = (1/alpha2) * log(beta/(beta - alpha2))
cat("O valor do prémio pelo princípio da utilidade nula com função de utilidade
exponencial é de", P6, " \n")
}
aux6 = 0
if(h <= 0){
cat("O valor de h tem de ser estritamente superior a 0.", " \n")
aux6 = 1
}
aux7 = 0
```

```
if(h >= beta){
cat("O valor de h tem de ser estritamente inferior ao valor de beta", "\n")
aux7 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux6 == 0)&(aux7 == 0)){
P7 = 1/(beta - h)
cat("O valor do prémio pelo princípio de Esscher  de", P7, "\n")
}
aux8 = 0
if(epsilon < 0){
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux8 = 1
}
aux9 = 0
if(epsilon > 1){
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux9 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux8 == 0)&(aux9 == 0)){
P8 = ((-1)/(beta)) * log(epsilon)
cat("O valor do prémio pelo princípio do percentil  de", P8, "\n")
}
aux10 = 0
if(p < 0){
cat("O valor de p tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux10 = 1
}
aux11 = 0
if(p > 1){
cat("O valor de p tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux11 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux10 == 0)&(aux11 == 0)){
```

$VaR = qexp(p, beta)$

$cat("O\ valor\ de\ VaR[X,\ p]$ é $de",\ VaR,\ "\setminus n")$

$TVaR = VaR + (1/beta)$

$cat("O\ valor\ de\ TVaR[X,\ p]$ é $de",\ TVaR,\ "\setminus n")$

$ES = (1 - p) * (TVaR - VaR)$

$cat("O\ valor\ de\ ES[X,\ p]$é $de",\ ES,\ "\setminus n")$

$CVaR = ES/(1 - pexp(VaR, beta))$

$cat("O\ valor\ de\ CVaR[X,\ p]$ é $de",\ CVaR,\ "\setminus n")$

}

}

Risco com distribuição Logística

$Logistic.Claims < -function(mu, s, alpha1, alpha2, rho, h, epsilon, p)\{$

$\#Claims\ Logistic(mu, s);\ alpha1 - P.Esperança\ Matemática,\ P.\ da\ variância\ e\ P.\ Desvio\ padrão;$

$\#alpha2{-}P.utilidade\ nula\ com\ função\ de\ utilidade\ exponencial\ de\ parâmetro\ alpha2;\ rho{-}P.risco\ ajustado;$

$\#h - P.Esscher;\ epsilon - P.do\ percentil; p - VaR[X, p],\ TVaR[X, p],\ CVaR[X, p],\ ES[X, p].$

$aux1 = 0$

$if(s <= 0)\{$

$cat("O\ valor\ de\ s\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.",\ "\setminus n")$

$aux1 = 1$

}

$if(aux1 == 0)\{$

$P1 = mu$

$cat("O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ do\ prémio\ liquido$ é $de",\ P1,\ "\setminus n")$

}

$aux2 = 0$

$if(alpha1 <= 0)\{$

$cat("O\ valor\ de\ alpha1\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.",\ "\setminus n")$

$aux2 = 1$

```
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)){
P2 = P1 + P1 * alpha1
P3 = P1 + alpha1 * (s ∧ 2) * (pi ∧ 2)/3
P4 = P1 + alpha1 * s * pi/sqrt(3)
cat("O valor do prémio pelo princípio da esperança matemática é de", P2, "\n")
cat("O valor do prémio pelo princípio da variância é de", P3, "\n")
cat("O valor do prémio pelo princípio do desvio padrão é de", P4, "\n")
}
aux4 = 0
if(alpha2 <= 0){
cat("O valor de alpha2 tem de ser estritamente superior a 0", "\n")
aux4 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux4 == 0)){
if((alpha2 * s >= 1) | (alpha2 * s <= −1)){
cat("Não existe prémio pelo princípio da utilidade nula com utilidade exponencial com o parâmetro escolhido", "\n")
} else{
P5 = (1/alpha2) * log(exp(mu * alpha2) * beta(1 − alpha2 * s, 1 + alpha2 * s))
cat("O valor do prémio pelo princípio da utilidade nula com utilidade exponencial é de", P5, "\n")
}
}
aux5 = 0
if(rho < 1){
cat("O valor de rho tem de ser superior ou igual a 1.", "\n")
aux5 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux5 == 0)){
integrand1 = function(x){(1 − (1/(1 + exp((−x + mu)/s)))) ∧ (1/rho)}
P6 = integrate(integrand1, 0, Inf)[1]$value
cat("O valor do prémio pelo princípio do risco ajustado é de", P6, "\n")
}
```

```
aux6 = 0
if(epsilon < 0){ cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", " \
n")
aux6 = 1
}
aux7 = 0
if(epsilon > 1){
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", " \ n")
aux7 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux6 == 0)&(aux7 == 0)){
P8 = qlogis(1 − epsilon, mu, s)
cat("O valor do prémio pelo princípio do percentil é de", P8, " \ n")
}
aux8 = 0
if(h <= 0){
cat("O valor de h tem de ser estritamente superior a 0.", " \ n")
aux8 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux8 == 0)){
if((h ∗ s >= 1) | (h ∗ s <= −1)){
cat("Não existe prémio pelo princípio de Essher com o parâmetro escolhido", " \ n")
} else{
P7den = (1/h) ∗ log(exp(mu ∗ h) ∗ beta(1 − h ∗ s, 1 + h ∗ s))
}
integrand2 = function(x){x ∗ exp(h ∗ x) ∗ (exp((−x + mu)/s))/(s ∗ (1 + exp((−x + mu)/s)) ∧ 2)}
P7num = integrate(integrand2, 0, Inf)
P7 = P7num[1]$value/P7den
cat("O valor do prémio pelo princípio de Esscher é de", P7, " \ n")
}
VaR = qlogis(p, mu, s)
integrand3 = function(x){x ∗ dlogis(x, mu, s)}
int = integrate(integrand3, VaR, Inf)
```

$TVaR = int[1]\$value * (1-p) \wedge (-1)$

$cat("O\ valor\ de\ VaR[X,p]$ é $de",\ VaR,\ " \setminus n")$

$cat("O\ valor\ de\ TVaR[X,p]$ é $de",\ TVaR,\ " \setminus n")$

$ES = (1-p) * (TVaR - VaR)$

$cat("O\ valor\ de\ ES[X,p]$ é $de",\ ES,\ " \setminus n")$

$CVaR = ES/(1 - plogis(VaR, mu, s))$

$cat("O\ valor\ de\ CVaR[X,p]$ é $de",\ CVaR,\ " \setminus n")$

$\}$

Risco com distribuição de Gamma

$Gamma.Claims <-function(lambda, r, alpha1, alpha2, rho, h, epsilon, p)\{$

$\#Claims \sim Gamma(lambda, r);\ alpha1 - P.Esperança\ Matemática,\ P.\ da\ variância\ e\ P.Desvio$

$\#padrão;\ alpha2 - P.\ utilidade\, nula\ com\ função\ de\ utilidade\ exponencial\ de\ parâmetro\ alpha2:$

$\#para\ valores\ r > alpha2,\ E[e^{Xalpha2}] = \frac{r^2}{\Gamma(lambda)} \int_0^{+\infty} x^{lambda-1} e^{(alpha2-r)x} dx$

$\#Mudança\ de\ variável:\ y = (r - aux2)x, \quad dx = \frac{dy}{r - alpha2}$

$\#E\left[e^{Xalpha2}\right] = \frac{r^{lambda}\Gamma(lambda)}{\Gamma(lambda)(r-alpha2)^{lambda}} = \left(\frac{r}{r-alpha2}\right)^{lambda}$

$\#\pi[X] = \frac{1}{alpha2} \ln\left[\left(\frac{r}{r-alpha2}\right)^{lambda}\right];$

$\#h - P.Esscher:\ para\ valores\ r > h,\ E[e^{hX}] = \left(\frac{r}{r-h}\right)^{lambda}$

$\#E[Xe^{hX}] = \frac{r^2}{\Gamma(lambda)} \int_0^{+\infty} x^{lambda} e^{(h-r)x} dx = \frac{r^{lambda}\Gamma(lambda+1)}{\Gamma(lambda)(r-h)^{lambda+1}}$

$\#\pi[X] = \frac{r^{lambda}\Gamma(lambda+1)}{\Gamma(lambda)(r-h)^{lambda+1}} \left(\frac{r-h}{r}\right)^{lambda} = \frac{\Gamma(lambda+1)}{\Gamma(lambda)(r-h)};$

$\#epsilon - P.\ do\ percentil.$

$\#p - VaR[X,p],\ TVaR[X,p],\ CVaR[X,p],\ ES[X,p].$

$aux1 = 0$

$if(lambda <= 0)\{$

$cat("O\ valor\ de\ ;lambda\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.",\ " \setminus n")$

$aux1 = 1$

$\}$

$aux2 = 0$

$if(r <= 0)\{$

$cat("O\ valor\ de\ k\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.",\ " \setminus n")$

```
aux2 = 1
}
aux3 = 0
if(alpha1 <= 0){
cat("O valor de alpha1 tem de ser estritamente superior a 0.", "\n")
aux3 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)){
P1 = lambda/r
cat("O valor do prémio pelo princípio do prémio liquido é de", P1, "\n")
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux3 == 0)){
P2 = P1 + P1 * alpha1
P3 = P1 + alpha1 * (lambda/(r ^ 2))
P4 = P1 + alpha1 * sqrt(lambda)/r
cat("O valor do prémio pelo princípio da esperança matemática é de", P2, "\n")
cat("O valor do prémio pelo princípio da variância é de", P3, "\n")
cat("O valor do prémio pelo princípio do desvio padrão é de", P4, "\n")
}
aux4 = 0
if(alpha2 <= 0){
cat("O valor de alpha2 tem de ser estritamente superior a 0", "\n")
aux4 = 1
}
aux4.2 = 0
if(alpha2 >= r){
cat("O prémio pelo princípio da utilidade nula com utilidade exponencial não está definido para
estes valores.", "\n")
aux4.2 = 1
}
aux4.3 = 0
if(rho < 1){
cat("O valor de rho tem de ser superior ou igual a 1.", "\n")
```

```
aux4.3 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux4.3 == 0)){
integrand1 = function(x){(1 − pgamma(x, lambda, r)) ∧ (1/rho)}
P6 = integrate(integrand1, 0, Inf)[1]$value
cat("O valor do prémio pelo princípio do risco ajustado é de", P6, " \ n")
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux4 == 0)&(aux4.2 == 0)){
P5 = (lambda/alpha2) ∗ log(r/(r − alpha2))
cat("O valor do prémio pelo princípio da utilidade nula com utilidade exponencial é de", P5, " \ n")
}
aux5 = 0
if(h <= 0){
cat("O valor de h tem de ser estritamente superior a 0.", " \ n")
aux5 = 1
}
aux6 = 0
if(h >= r){
cat("O prémio pelo princípio de Esscher não está definido para estes valores.", " \ n")
aux6 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux5 == 0)&(aux6 == 0)){
P6 = ((2 ∧ (lambda + 1)) ∗ (10 ∧ lambda) ∗ exp(−20)/dgamma(10, lambda + 1, 2))/
(((2 ∧ lambda) ∗ (10 ∧ (lambda − 1)) ∗ exp(−20)/dgamma(10, lambda, 2)) ∗ (r − h))
cat("O valor do prémio pelo princípio de Esscher é de", P6, " \ n")
}
aux7 = 0
if(epsilon < 0){
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", " \ n")
aux7 = 1
}
aux8 = 0
if(epsilon > 1){
```

```
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux8 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux7 == 0)&(aux8 == 0)){
P7 = qgamma(1 - epsilon, lambda, r)
cat("O valor do prémio pelo princípio do percentil é de", P7, "\n")
}
aux9 = 0
if(p < 0){
cat("O valor de p tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux9 = 1
}
aux10 = 0
if(p > 1){
cat("O valor de p tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")
aux10 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux9 == 0)&(aux10 == 0)){
VaR = qgamma(p, lambda, r)
cat("O valor de VaR[X,",p,"]  de", VaR, "\n")
integrand2 = function(x){x * dgamma(x, lambda, r)}
int = integrate(integrand2, VaR, Inf)
TVaR = int[1]$value * (1 - p) ^ (-1)
cat("O valor de TVaR[X,",p,"]  de", TVaR, "\n")
ES = (1 - p) * (TVaR - VaR)
cat("O valor de ES[X,",p,"]  de", ES, "\n")
CVaR = ES/(1 - pgamma(VaR, lambda, r))
cat("O valor de CVaR[X,",p,"]  de", CVaR, "\n")
}
}
```

Risco com distribuição Normal

$Normal.Claims <-function(mu,\ sigma2,\ alpha1,\ rho,\ alpha2,\ h,\ epsilon,\ p)\{$

$\#Claims \sim Normal(mu, sigma2); alpha1 - P.\ Esperança\ Matemática,\ P.\ da\ variância\ e\ P.\ Desvio$

$\#\ padrão; rho{-}P.\ do\ risco\ ajustado:\ utiliza{-}se\ a\ equação\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-mu}{\sqrt{sigma2}}\right),\ com\ \Phi\ a\ f.\ de\ distribuição\ de$

$\#Z \sim Normal(0,1);$

$\#alpha2 - P.\ utilidade\ nula\ com\ função\ de\ utilidade\ exponencial\ de\ parâmetro\ alpha2,\ com$

$\#\pi[X] = \frac{1}{alpha2}\ln\left(M_X(alpha2)\right) = \frac{1}{alpha2}\left(mu\, aplpha2 + \frac{1}{2}sigma2\, alpha2^2\right) = mu + \frac{sigma2\, alpha2}{2};$

$\#h - P.\ Esscher,\ com\ \pi[X] = E[X^*] = \frac{d}{dt}k_{X^*}(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\ln\left(M_X(t+h)\right) - \ln\left(M_X(h)\right)\right)\Big|_{t=0}$

$\# = mu + sigma2\, h;\ epsilon - P.\ do\ percentil.$

$\#p - Medidas\ de\ risco;\ TVaR\ calculada\ por\ (4.2.2.3);\ as\ demais\ pelas\ fórmulas\ da\ secção\ 4.3.$

$aux1 = 0$

$if(sigma2 < 0)\{$

$cat(''O\ valor\ de\ sigma2\ tem\ de\ ser\ superior\ ou\ igual\ a\ 0.'', ''\setminus n'')$

$aux1 = 1$

$\}$

$if(aux1 == 0)\{$

$P1 = mu$

$cat(''O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ do\ prémio\ liquido\ é\ de'',\ P1,\ ''\setminus n'')$

$\}$

$aux2 = 0$

$if(alpha1 <= 0)\{$

$cat(''O\ valor\ de\ alpha1\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.'',\ ''\setminus n'')$

$aux2 = 1$

$\}$

$if((aux1 == 0)\&(aux2 == 0))\{$

$P2 = P1 + P1 * alpha1$

$P3 = P1 + alpha1 * sigma2$

$P4 = P1 + alpha1 * sqrt(sigma2)$

$cat(''O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ da\ esperança\ matemática\ é\ de'',\ P2,\ ''\setminus n'')$

$cat(''O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ da\ variância\ é\ de'',\ P3,\ ''\setminus n'')$

```
cat("O valor do prémio pelo princípio do desvio padrão éde", P4, " \ n")
}
aux3 = 0
if(rho < 1){
cat("O valor de rho tem de ser superior ou igual a 1.", " \ n")
aux3 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux3 == 0)){
integrand = function(x){(1 − pnorm(x, mu, sigma2)) ∧ (1/rho)}
P5 = integrate(integrand, 0, Inf)[1]$value
cat("O valor do prémio pelo princípio de risco ajustado é de", P5, " \ n")
}
aux4 = 0
if(alpha2 <= 0){
cat("O prémio pelo princípio da utilidade nula com utilidade exponencial não está definido
para estes valores.", " \ n")
aux4 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux4 == 0)){
P6 = mu + (sigma2 ∗ alpha2/2)
cat("O valor do prémio pelo princípio da utilidade nula com utilidade exponencial é de", P6, " \ n")
}
aux5 = 0
if(h <= 0){
cat("O valor de h tem de ser estritamente superior a 0.", " \ n")
aux5 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux5 == 0)){
P7 = mu + h ∗ sigma2
cat("O valor do prémio pelo princípio de Esscher é de", P7, " \ n")
}
aux6 = 0
if(epsilon < 0){
```

$cat(''O\ valor\ de\ epsilon\ tem\ de\ ser\ superior\ ou\ igual\ a\ 0\ e\ inferior\ ou\ igual\ a\ 1.'',\ ''\backslash n'')$

$aux6 = 1$

$\}$

$aux7 = 0$

$if(epsilon > 1)\{$

$cat(''O\ valor\ de\ epsilon\ tem\ de\ ser\ superior\ ou\ igual\ a\ 0\ e\ inferior\ ou\ igual\ a\ 1.'',\ ''\backslash n'')$

$aux7 = 1$

$\}$

$if((aux1 == 0)\&(aux6 == 0)\&(aux7 == 0))\{$

$P8 = qnorm(1 - epsilon, mu, sigma2)$

$cat(''O\ valor\ do\ \text{prémio}\ pelo\ \text{princípio}\ do\ percentil\ \text{é}\ de'',\ P8,\ ''\backslash n'')$

$\}$

$aux8 = 0$

$if(p < 0)\{\ cat(''O\ valor\ de\ p\ tem\ de\ ser\ superior\ ou\ igual\ a\ 0\ e\ inferior\ ou\ igual\ a\ 1.'',\ ''\backslash n'')$

$aux8 = 1$

$\}$

$aux9 = 0$

$if(p > 1)\{$

$cat(''O\ valor\ de\ p\ tem\ de\ ser\ superior\ ou\ igual\ a\ 0\ e\ inferior\ ou\ igual\ a\ 1.'',\ ''\backslash n'')$

$aux9 = 1$

$\}$

$library(truncnorm)$

$if((aux1 == 0)\ \&\ (aux8 == 0)\ \&\ (aux9 == 0))\{$

$VaR = qtruncnorm(p,\ 0,\ Inf,\ mu,\ sqrt(sigma2))$

$cat(''O\ valor\ de\ VaR[X\,p]\ \text{é}\ de'',\ VaR,\ ''\backslash n'')$

$TVaR = mu + ((sqrt(sigma2))/(1 - p)) * dnorm((aux10 - mu)/sigma2, 0, 1)$

$cat(''O\ valor\ de\ TVaR[X\,p]\ \ de'',\ TVaR,\ ''\backslash n'')$

$ES = (1 - p) * (TVaR - VaR)$

$cat(''O\ valor\ de\ ES[X\,p]\ \text{é}\ de'',\ ES,\ ''\backslash n'')$

$CVaR = ES/(1 - ptruncnorm(VaR, 0, Inf, mu, sqrt(sigma2)))$

$cat(''O\ valor\ de\ CVaR[X\,p]\ \text{é}\ de'',\ CVaR,\ ''\backslash n'')$

$\}$

$\}$

Risco com distribuição de Pareto

$Pareto.Claims < -function(xm,\ alpha,\ alpha1,\ rho,\ epsilon, p)\{$

$\#Claims \sim Pareto(xm, alpha);\ alpha1 - P.\ E.\ Matemática,\ P.\ da\ variância\ e\ P.\ Desvio\ padrão;$
$\#rho - P.\ do\ risco\ ajustado,\ com\ \pi[X] = x_m + \int_{x_m}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^{alpha}\right)\right]^{\frac{1}{rho}} dx = \frac{x_m}{\frac{alpha}{rho} - 1},\ se\ \frac{alpha}{rho} >$
$1;\ epsilon - P.\ do\ percentil,\ com\ \pi[X]\ solução\ da\ equação:\ F_X(x) = 1 - epsilon \Longleftrightarrow$
$\#1 - \left(\frac{xm}{x}\right)^{alpha} = 1 - epsilon \Longleftrightarrow x = \pi[X] = \frac{xm}{epsilon^{1/alpha}};\ p - Medidas\ de\ risco.$

$aux1 = 0$

$if(xm <= 0)\{$

$cat(\text{"}O\ valor\ de\ xm\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.\text{"},\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$aux1 = 1$

$\}$

$aux2 = 0$

$if(alpha <= 0)\{$

$cat(\text{"}O\ valor\ de\ alpha\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.\text{"},\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$aux2 = 1$

$\}$

$if((aux1 == 0) \& (alpha > 0) \& (alpha <= 1))\{$

$cat(\text{"}O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ do\ prémio\ liquido\ não\ se\ encontra\ definido.\text{"},\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$aux3 = 1$

$\}\ else\{$

$aux3 = 0$

$P1 = (alpha * xm)/(alpha - 1)$

$cat(\text{"}O\ valor\ do\ prémio\ pelo\ princípio\ do\ prémio\ liquido\ é\ de\text{"},\ P1,\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$\}$

$aux4 = 0$

$if(alpha1 <= 0)\{$

$cat(\text{"}O\ valor\ de\ alpha1\ tem\ de\ ser\ estritamente\ superior\ a\ 0.\text{"},\ \text{"} \setminus n\text{"})$

$aux4 = 1$

```
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux3 == 0)&(aux4 == 0)){
P2 = (alpha * xm)/(alpha - 1) + alpha1 * (alpha * xm)/(alpha - 1)
cat("O valor do prémio pelo princípio da esperança matemática é de", P2, " \ n")
}
aux5 = 0
if((alpha > 0)&(alpha <= 2)){
cat("Os valores dos prémios pelos princípios da variância e do desvio padrão não se encontram
definidos.", " \ n")
aux5 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux5 == 0)){
Var = (xm^2) * alpha/((alpha - 2) * (alpha - 1)^2)
P3 = (alpha * xm)/(alpha - 1) + alpha1 * Var
P4 = (alpha * xm)/(alpha - 1) + alpha1 * sqrt(Var)
cat("O valor do prémio pelo princípio da variância é de", P3, " \ n")
cat("O valor do prémio pelo princípio do desvio padrão é de", P4, " \ n")
}
aux6 = 0
if(rho < 1){
cat("O valor de rho tem de ser superior ou igual a 1.", " \ n")
aux6 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux6 == 0)){
if((alpha/rho) > 1){
P5 = (xm/((alpha/rho) - 1)) + xm
cat("O valor do prémio pelo princípio do risco ajustado é de", P5, " \ n")
}
if((alpha/rho) <= 1){
cat("Não existe prémio pelo princípio do risco ajustado", " \ n")
}
}
aux7 = 0
```

```
if(epsilon < 0){

cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")

aux7 = 1

}

aux8 = 0

if(epsilon > 1){

cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", "\n")

aux8 = 1

}

if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux7 == 0)&(aux8 == 0)){

P6 = xm/(epsilon ∧ (1/alpha))

cat("O valor do prémio pelo princípio do percentil é de", P6, "\n")

}

library(VGAM)

VaR = qpareto(p, xm, alpha)

integrand = function(x){x * dpareto(x, xm, alpha)}

int = integrate(integrand, VaR, Inf)

TVaR = int[1]$value * (1 − p) ∧ (−1)

cat("O valor de VaR[X, p] é de", VaR, "\n")

cat("O valor de TVaR[X, p] é de", TVaR, "\n")

ES = (1 − p) * (TVaR − VaR)

cat("O valor de ES[X, p] é de", ES, "\n")

CVaR = ES/(1 − ppareto(VaR, xm, alpha))

cat("O valor de CVaR[X, p] é de", CVaR, "\n")

}
```

Risco com distribuição Log-normal

```
LogNormal.Claims < −function(mu, sigma, alpha1, rho, epsilon, p){


#Claims lnN(mu, sigma); alpha1 − P. Esperança Matemática, P. da variância e P. Desvio padrão;

#rho − P.utilidade nula; epsilon − P. do percentil; p − Medidas de risco.
```

```
aux0 = 0
if(mu < 0){
cat("Os valores das possíveis indemnizações não são negativos.", "\n")
aux0 = 1
}
aux1 = 0
if(sigma < 0){
cat("O valor de sigma tem de ser superior ou igual a 0.", "\n")
aux1 = 1
}
if((aux0 == 0)&(aux1 == 0)){
P1 = exp(mu + ((sigma^2)/2))
cat("O valor do prémio pelo princípio do prémio liquido é de", P1, "\n")
}
aux2 = 0
if(alpha1 <= 0){
cat("O valor de alpha1 tem de ser estritamente superior a 0.", "\n")
aux2 = 1
}
if((aux0 == 0)&(aux1 == 0)&(aux2 == 0)){
P2 = P1 + P1 * alpha1
P3 = P1 + alpha1 * exp(2 * mu + sigma ^ 2) * (exp(sigma ^ 2) - 1)
P4 = P1 + alpha1 * sqrt(exp(2 * mu + sigma ^ 2) * (exp(sigma ^ 2) - 1))
cat("O valor do prémio pelo princípio da esperança matemática é de", P2, "\n")
cat("O valor do prémio pelo princípio da variância é de", P3, "\n")
cat("O valor do prémio pelo princípio do desvio padrão é de", P4, "\n")
}
aux3 = 0
if(rho < 1){
cat("O valor de rho tem de ser superior ou igual a 1", "\n")
aux3 = 1
}
```

```
if((aux0 == 0)&(aux1 == 0)&(aux3 == 0)){
integrand1 = function(x){(1 - plnorm(x, mu, sigma)) ∧ (1/rho)}
aux4 = integrate(integrand1, 0, Inf)
P5 = aux4[1]$value
cat("O valor do prémio pelo princípio da utilidade nula é de", P5, " \ n")
}
aux5 = 0
if(epsilon < 0){
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", " \ n")
aux5 = 1
}
aux6 = 0
if(epsilon > 1){
cat("O valor de epsilon tem de ser superior ou igual a 0 e inferior ou igual a 1.", " \ n")
aux6 = 1
}
if((aux0 == 0)&(aux1 == 0)&(aux5 == 0)&(aux6 == 0)){
P6 = qlnorm(1 - epsilon, mu, sigma)
cat("O valor do prémio pelo princípio do percentil é de", P6, " \ n")
}
VaR = qlnorm(p, mu, sigma)
integrand2 = function(x){dlnorm(x, mu, sigma) * x}
aux6 = integrate(integrand2, VaR, Inf)
TVaR = aux6[1]$value * (1 - p) ∧ (-1)
cat("O valor de VaR[X, p] é de", VaR, " \ n")
cat("O valor de TVaR[X, p] é de", TVaR, " \ n")
ES = (1 - p) * (TVaR - VaR)
cat("O valor de ES[X, p] é de", ES, " \ n")
CVaR = ES/(1 - plnorm(VaR, mu, sigma))
cat("O valor de CVaR[X, p] é de", CVaR, " \ n")
}
```

ANEXOS 4

Programa Lema3.3.3.

```
Lema2.3.3. <- function(lambda, beta, h){
```

$\#S = X_1 + \ldots + X_N,\ N \sim Poisson(\beta),\ \{X_i\}_{i\geq 1}$ *i.i.d. e independentes de* N, *com* $X_i \sim Exp(\lambda)$.

#Pretende-se calcular o valor do prémio pelo princípio de Esscher.

```
aux1 = 0
if(lambda <= 0){
print("O valor de lambda tem de ser estritamente superior a 0.")
aux1 = 1
}
aux2 = 0
if(beta <= 0){
print("O valor de beta tem de ser estritamente superior a 0.")
aux2 = 1
}
aux3 = 0
if(h <= 0){
print("O valor de h tem de verificar : 0 < h < 1.")
aux3 = 1
}
aux4 = 0
if(h >= 1){
print("O valor de h tem de verificar : 0 < h < 1.")
aux4 = 1
}
if((aux1 == 0)&(aux2 == 0)&(aux3 == 0)&(aux4 == 0)){
P = (beta * lambda)/((h - 1) ∧ 2)
cat("O valor do prmio é de", P)
}
}
```

Bibliografia

[1] KARLIN, S. and Taylor, H. : A first course in stochastic processes. Academic Press, 1975.

[2] CHUNG, K.: A Course in Probability Theory, 2nd ed., New York, Academic Press, 1974.

[3] SHIRYAYEV, A. N.: Probability, New York, Springer, Verlag, 1984.

[4] DICKSON, D.: Insurance Risk and Ruin, Cambridge, Cambridge University Press , 2005.

[5] KAAS, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, R.: Modern Actuarial Risk Theory, 2nd ed., Springer, 2009.

[6] REIS, A.: Teuria da Ruína , ISEG, Dezembro de 2001.

[7] CENTENO, M.: Teoria do Risco na Atividade Seguradora, Oeiras, Celta editora, 2003.

[8] KLUGMAN, S., Panjer, H. and Willmot, G.: Loss Models, 4th ed., Society of Actuaries.

[9] DENUIT, M., Goovaerts, M., Dhaene, J., Dahene, J and Kaas, R.: Actuarial Theory for Dependent Risks, Wiley, 2005.

[10] BUHLMANN, H.: Mathematical Methods in Risk Theory, 2nd ed., New York, Springer, 1996.

[11] SHIRIYAEV, A.: Graduate texts in Mathematics, 2nd ed., Moscovo, Springer.

[12] BOWERS, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D and Nesbitt, C.: Actuarial Mathematics,2nd ed., Schaumburg, The Society of Actuaries, 1997.

[13] BURNECKi, A., Misiorek, R. and Weron: Loss Distributions, Munich Personal RePEc Archive, 2010.

[14] RUDIN, W.: Principles of Mathematichal Analysis, 3nd ed., MGH, 1976.

[15] OLIVEIRA, E.: Medidas Coerentes de Risco, IMPA, 2009.

[16] TRUFIN, J., Hansjoerg, A. and Denuit, M: Properties of a Risk Measure Derived from Ruin Theory, The Geneva Risk and Insurance Review, 2011, vol.36, issue 2, pages 174-188.