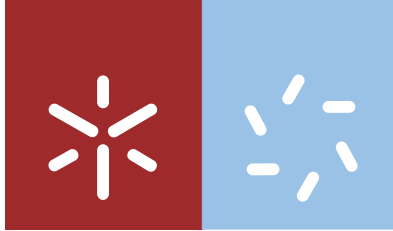


Universidade do Minho
Escola de Ciências

Maria Madalena Azevedo Faria

Osciladores harmónicos



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Maria Madalena Azevedo Faria

Osciladores harmónicos

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores
Área de Especialização em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Rui Manuel da Silva Ralha

DECLARAÇÃO

Nome: **Maria Madalena Azevedo Faria**

Endereço Eletrónico: madalena.a.faria@gmail.com

Número do Bilhete de Identidade: 9873556

Telemóvel: 966151331

Título de mestrado: **Osciladores harmónicos**

Supervisor: **Rui Manuel da Silva Ralha**

Ano de conclusão: **2015**

Designação do Mestrado: **Mestrado em Ciências - Formação Contínua de professores**

Área de Especialização em Matemática

Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA DISSERTAÇÃO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 30 de Janeiro de 2015

Assinatura: _____

Agradecimentos

Embora uma tese seja, na sua generalidade e finalidade, um trabalho individual, há contributos que não posso deixar de realçar. A todos os que, de uma forma ou de outra, possibilitaram a realização da minha tese, deixo aqui o meu agradecimento sincero.

Em primeiro lugar agradeço ao Professor Rui Ralha a forma como orientou o meu trabalho. As notas dominantes da sua orientação foram o apoio, disponibilidade, simpatia, incentivo e partilha de muitos dos seus conhecimentos. De realçar, igualmente, a cordialidade com que sempre me recebeu.

Agradeço também às minhas amigas, em particular à Cristina e à Márcia, pela amizade, companheirismo, partilha de experiências e pelo apoio incondicional. Um agradecimento especial às minhas colegas e amigas da direção da minha escola, pelo apoio e disponibilidade que sempre demonstraram.

Um agradecimento especial às minhas filhas, Mariana e Margarida, pela paciência, compreensão e ternura sempre manifestadas quando eu estava ocupada e não as podia acompanhar.

Por último, e não menos importante, quero agradecer ao meu marido que me apoiou incondicionalmente e me acompanhou nesta fase da minha vida.

Mais uma vez, a todos os meus mais sinceros agradecimentos.

OSCILADORES HARMÓNICOS

Resumo

Para além da estruturação do pensamento e do desenvolvimento do raciocínio abstrato, é finalidade da disciplina de Matemática no Ensino Secundário a modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real. O novo Programa Nacional de Matemática no Ensino Secundário introduz o tema “Aplicações aos osciladores harmónicos” no currículo do 12º ano, com entrada em vigor prevista para o ano letivo 2017/2018. Concretamente, o que está previsto no novo Programa é que, no estudo de funções do tipo $t \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi)$, que já era feito anteriormente, seja agora feita interpretação física dos vários parâmetros envolvidos.

O que se disse antes constitui a motivação para o título “Osciladores harmónicos” desta tese que, obviamente, não pretende ser um documento de trabalho para os alunos do 12º ano de escolaridade mas pode servir como ajuda para os respetivos professores.

Neste trabalho são explorados sobretudo problemas com molas onde se despreza o atrito. Contudo, como o atrito está presente em todos os sistemas reais, reservamos uma secção ao estudo destes sistemas e das equações diferenciais a eles associadas.

Dado o enquadramento deste estudo, incluímos também um conjunto de tarefas exemplificativas do que pode ser, na prática, a inclusão dos “Osciladores harmónicos” no 12º ano de escolaridade.

Palavras-chave: modelação matemática, ensino secundário

Abstract

In addition to the structuring of thought and the development of abstract reasoning, it is the purpose of the subject of Maths in Secondary Education the modelling and the application of mathematics to the real world. The new National Programme for Mathematics in Secondary Education, in Portugal, introduced the subject "Applications to harmonic oscillators" in the curriculum of the 12th year, with its entry into force scheduled for the school year 2017/2018. Specifically, what is envisaged in the new programme is that, in the study of functions $t \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi)$, which was already previously done, the physical interpretation of the various parameters involved will now be done too.

What we said before is the motivation for the title – "Harmonic oscillators" – of this thesis which obviously is not intended as a learning tool for students in the 12th grade but can serve as an aid to their teachers.

This thesis explores mostly problems with springs ignoring friction. However, as friction is present in every real system, we devoted a section to the study of these systems and to the differential equations associated with them.

Given the framework of this study, we have also included a set of sample tasks of what, in practical terms, the inclusion of "Harmonic oscillators" in the 12th grade can be.

Key words: mathematical modelling, secondary education

ÍNDICE

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
1. Introdução	11
2. Equações Diferenciais.....	13
2.1. Definição de equação diferencial	13
2.2. Soluções de uma equação diferencial ordinária	14
2.3. Breve classificação de equações diferenciais ordinárias	16
2.4. Alguns teoremas fundamentais	17
3. Equação diferencial ordinária linear de coeficientes constantes.....	21
3.1. Equações diferenciais ordinárias da forma $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\omega > 0$	21
3.2. Período e Amplitude.....	23
4. Movimento Harmónico Simples.....	25
4.1. Lei de Hooke	26
4.2. Uma mola com atrito	42
5. Tarefas para a sala de aula.....	50
Bibliografia	54

1. Introdução

No âmbito da revisão do Currículo Nacional iniciada em 2011, e em continuidade com o Programa de Matemática para o Ensino Básico, publicado no Diário da República, despacho n.º 9888-A/2013, 2ª série, n.º 143, de 26 de julho de 2013, o Ministério da Educação e Ciência publicou a 20 de Janeiro de 2014 o documento “Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Ensino Secundário” onde *...pretende definir um padrão coerente que imprima rigor ao que é ensinado nas escolas, garantindo simultaneamente aos professores autonomia pedagógica e liberdade de usar conhecimentos e experiência acumulada para auxiliar os alunos a atingir o seu melhor desempenho* [6].

As diretivas contidas neste documento entrarão em vigor no ano letivo de 2015/2016 no que diz respeito ao 10º ano de escolaridade, e progressivamente nos anos seguintes para o 11º e 12º anos, conforme está definido no Despacho n.º 159717/2012, de 14 de dezembro.

Tal como é salientado no documento do Ministério, para além da estruturação do pensamento e do desenvolvimento do raciocínio abstrato, é finalidade da disciplina de Matemática no Ensino Secundário a modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real. Neste sentido, o Programa proposto em [6], tal como já acontece aliás com o atual Programa, dá especial relevância à modelação matemática. Por exemplo, no documento do Ministério pode ler-se *...a função exponencial é especialmente indicada para modelar o decaimento de uma substância radioativa ou o crescimento de uma população de bactérias porque, em ambas as situações, a análise do fenómeno em estudo permite concluir que a taxa de variação da grandeza observada pode ser considerada, dentro de certas condições, proporcional à quantidade que está num dado momento presente numa amostra, o que se traduz, ao utilizar-se um modelo baseado em funções diferenciáveis, pela proporcionalidade entre a função que representa o fenómeno e a respetiva derivada.*

De forma análoga, o Programa agora proposto prevê, no 12º ano, *...o estudo de situações em que uma função é proporcional, com constante de proporcionalidade negativa, à respetiva derivada de segunda ordem. É desta forma possível justificar a utilização de funções trigonométricas na modelação de alguns sistemas que exibem comportamento oscilatório. Em particular, é proposto, neste contexto, o estudo de como a segunda lei de Newton e a lei de Hooke permitem deduzir que certos sistemas envolvendo massas atuadas por molas apresentam um comportamento de oscilador harmónico.*

O trabalho que se apresenta nesta dissertação tem este enquadramento e motivação. O tema a tratar é o da modelação matemática dos sistemas que exibem comportamento oscilatório, com exploração de alguns exemplos. Os chamados osciladores harmónicos são muito importantes em Física porque modelam as pequenas deslocções de qualquer massa em estado de equilíbrio quando sujeita a uma força. Os osciladores harmónicos ocorrem com frequência em fenómenos naturais (são a fonte de praticamente todas as vibrações sinusoidais e ondas) e são também explorados em invenções humanas como os relógios mecânicos e circuitos de rádio. Exemplos concretos são os pêndulos (com pequenos ângulos de oscilação), massas ligadas a molas (aqui entra a lei de Hooke) e sistemas acústicos.

Tal como é referido em [7], os osciladores harmónicos não são propriamente um novo tópico no Programa do 12º ano. Trata-se antes de uma questão de nomenclatura no estudo de funções $t \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi)$. Na prática, o que os autores da proposta do Ministério sugerem é que, no estudo das funções, seja feita a interpretação dos vários parâmetros envolvidos.

A um nível superior, o tema integra-se na área das equações diferenciais lineares de segunda ordem. Embora este seja um assunto que deve fazer parte, em princípio, da formação inicial, ao nível de Licenciatura, de um professor de Matemática do Ensino Secundário, é pertinente revisitá-lo, explorando novos aspetos, do âmbito da modelação matemática e simulação numérica, no contexto de uma tese do Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores.

Concretamente, para além de uma síntese de textos sobre o tema dos osciladores harmónicos, apresentam-se alguns resultados numéricos e gráficos que ilustram o comportamento das soluções no contexto dos exemplos explorados.

No último capítulo, incluímos um conjunto de tarefas que podem ser usadas na sala de aula ou como exercícios para os alunos. Este conjunto contém os exercícios propostos, a título de exemplo, em [7], no âmbito da temática dos osciladores harmónicos e outros que são da nossa autoria.

2. Equações Diferenciais

2.1. Definição de equação diferencial

Uma **equação diferencial** é uma equação cuja incógnita é uma função e onde figura pelo menos uma das derivadas dessa função.

As equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com o número de variáveis independentes que nela figuram, a saber:

- **Equação diferencial ordinária** diz respeito a uma função de uma única variável independente;
- **Equação diferencial parcial** envolve uma função de duas ou mais variáveis e as derivadas parciais dessa função.

Neste trabalho apenas vão ser abordadas as equações diferenciais ordinárias (EDO).

Seja x uma função definida num intervalo I real da variável independente t . Denotaremos por $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ e $\ddot{\ddot{x}}(t)$ ou simplesmente x , \dot{x} , \ddot{x} e $\ddot{\ddot{x}}$, se não houver perigo de confusão, respetivamente a função, primeira, segunda e terceira derivadas.

São exemplos de equações diferenciais as seguintes equações:

- $x + \dot{x} = 0$

Esta é uma EDO onde figura a primeira derivada da função x .

- $x\ddot{x} + xt = \sin x$

É uma EDO onde figura a função x , a variável independente t e a segunda derivada da função x .

A função x e a variável independente t podem figurar na EDO ou não.

2.2. Soluções de uma equação diferencial ordinária

A **ordem** de uma EDO é igual à maior ordem das derivadas que nela figuram.

Uma função definida num intervalo I é **solução** de uma EDO em I se possuir derivadas em I até à ordem da EDO e quando substituída na equação inicial, transforma-a numa identidade.

Exemplo 2:

- A função $x = \frac{3t^2}{2} - 2t$ é solução da equação $\dot{x} - 3t = -2$.
- Qualquer função da forma $x = \frac{3t^2}{2} - 2t + c$, sendo c uma constante real arbitrária, também é solução da mesma EDO.

A figura 2.1 apresenta a representação gráfica de três soluções da equação $\dot{x} - 3t = -2$.

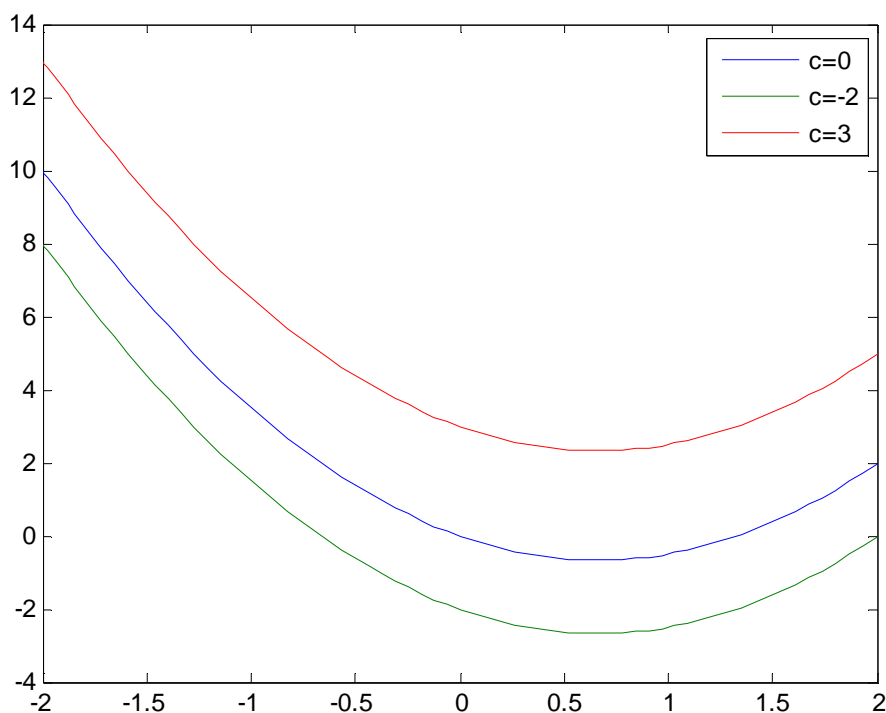


Fig 2.1: função $\frac{3t^2}{2} - 2t + c$ para $c = 0, c = -2$ e $c = 3$

Como se pode observar, a EDO $\dot{x} - 3t = -2$ tem várias soluções. Até se pode afirmar que tem infinitas soluções, uma vez que, para cada valor da constante arbitrária c , existe uma solução da equação.

Se a ordem de uma EDO é n , então a família $\phi(t, x, c_1, \dots, c_n)$ é a **solução geral** da equação se todo o elemento da família é solução e toda a solução sai da família por concretização das constantes.

No caso da EDO dada, a solução geral é conjunto das funções da forma $x = \frac{3t^2}{2} - 2t + c$. Esta expressão envolve uma única constante arbitrária por ser de primeira ordem a EDO. Já no caso da equação $\dot{x} = -2x^{\frac{3}{2}}$, a solução geral é o conjunto das funções da forma $x = \frac{1}{(c+t)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ e ainda a solução $x = 0$.

Quando se atribuem valores às constantes arbitrárias que aparecem na solução geral de uma equação obtém-se uma **solução particular**.

Chamam-se **condições iniciais** às condições relativas à função incógnita e às suas derivadas, para um mesmo valor da variável independente. Estas condições, em número igual à ordem da EDO, determinam o valor das constantes, isto é, uma solução particular.

Vejamos uma ilustração do que acabou de ser dito.

Exemplo 3: Para a EDO $\ddot{x} - 1 = 0$, vamos determinar:

1. a solução geral;
2. uma solução particular que satisfaça as seguintes condições iniciais: $x = 1$ e $\dot{x} = 1$ quando $t = 0$.

Resolução:

1. De $\ddot{x} = 1$ obtemos, por integração de ambos os membros em ordem a t ,

$$\dot{x} = t + c_1 \tag{1.1}$$

e, integrando de novo, resulta a solução geral

$$x = \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2 \quad (1.2)$$

com c_1 e c_2 duas constantes arbitrárias.

2. As condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$ determinam as constantes c_1 e c_2 . Com efeito, fazendo $t = 0$ nas equações (1.1) e (1.2) resulta $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$, respetivamente.

Em resumo, a solução do problema de valores iniciais, constituído pela EDO e pelas condições iniciais dadas, é a solução particular $x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1$.

2.3. Breve classificação de equações diferenciais ordinárias

Outros conceitos úteis neste trabalho são os de EDO linear, homogénea e autónoma. Passamos a definir cada um deles.

Uma EDO diz-se **linear** se pode ser escrita na forma

$$\dot{x} = f(t)x + g(t),$$

sendo esta de 1ª ordem, ou

$$\ddot{x} = f(t)\dot{x} + h(t)x + g(t), \quad (1.3)$$

sendo esta de 2ª ordem, e assim sucessivamente.

As funções $f(t)$ e $h(t)$ são designadas por coeficientes da EDO e no caso de serem funções constantes (eventualmente nulas) diz-se que a EDO tem coeficientes constantes.

No caso de g ser a função identicamente nula, a EDO diz-se **homogénea**.

Na tabela 1 apresentamos algumas equações diferenciais para ilustrar as definições dadas anteriormente.

EDO	Ordem	Linear	Homogénea	EDO homogénea associada
$\ddot{x} + 3x = 0$	2	Sim	Sim	
$\ddot{x} + x^3 = 0$	2	Não		
$\ddot{x} + e^x t = 2$	2	Não		
$\dot{x} + e^t x = t$	1	Sim	Não	$\dot{x} + e^t x = 0$

Tabela 1

Uma EDO diz-se **autónoma** quando nela não figura de forma explícita a variável independente. No caso da equação (1.3) isto é dizer que f, h e g são funções constantes. Muitas leis físicas, onde a variável independente é o tempo, expressam-se em termos de equações autónomas porque se assume que essas leis são idênticas para qualquer instante de tempo passado ou futuro, isto é, são invariantes com o tempo. Na tabela 2 dão-se alguns exemplos para ilustrar esta definição.

Autónomas	Não autónomas
$\ddot{x} = 1$	$\dot{x} = t + 1$
$\dot{x} = x + 2$	$\ddot{x} = 2\dot{x} - t$

Tabela 2

2.4. Alguns teoremas fundamentais

Apresentámos antes (exemplo 3) um problema de valores iniciais para o qual calculámos uma solução. Olhando cuidadosamente a resolução não será difícil convencermo-nos de que a solução encontrada é única. Parte importante da teoria das equações diferenciais são os teoremas da existência e unicidade

das soluções dos problemas. Um tratamento completo deste assunto está fora do âmbito desta tese e pode ser encontrado por exemplo em [1]. Em particular, nesta referência podem ser encontradas as demonstrações dos vários resultados teóricos que apresentamos.

Para o caso particular de problemas de valores iniciais associados a equações lineares de 2ª ordem temos o seguinte

Teorema 1

Se f , g e h são funções contínuas no intervalo $]a, b[$ que contem o ponto t_0 então a EDO $\ddot{x} = f(t)\dot{x} + h(t)x + g(t)$ admite uma e uma só solução ϕ no intervalo $]a, b[$ que verifica as condições iniciais $\phi(t_0) = x_0$ e $\phi'(t_0) = \dot{x}_0$, para quaisquer números x_0 e \dot{x}_0 .

A EDO $\ddot{x} - 1 = 0$ do Exemplo 3 cumpre as condições do Teorema 1 uma vez que os coeficientes são funções contínuas (neste caso constantes) e temos assim a certeza de que é única a solução particular encontrada para o problema de valores iniciais enunciado.

A mesma equação é autónoma e, como tal, o seguinte resultado pode aplicar-se para determinar outras soluções.

Teorema 2 (mudança de fase)

Se $x = \phi(t)$ é uma solução de uma EDO autónoma e ε um número real qualquer, então $x = \phi(t + \varepsilon)$ também é solução da equação dada.

Como exemplo, consideremos a equação $\ddot{x} = x$. Uma vez que $x = e^t$ é solução da EDO $\ddot{x} = x$, também $x = e^{t+\varepsilon} = ce^t$, com $c > 0$, é solução.

Teorema 3 (da superposição homogénea)

Se $x = \phi_1(t)$ e $x = \phi_2(t)$ são soluções de uma equação linear e homogénea, então $x = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$ também é solução, quaisquer que sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Para uma EDO linear e homogénea, de 2ª ordem, pode mostrar-se que todas as soluções são da forma anterior, isto é, combinações lineares das soluções ϕ_1 e ϕ_2 , desde que elas sejam funções linearmente independentes (isto é, não pode ter-se $\phi_2(t) = c\phi_1(t)$, c constante, para t no intervalo onde ϕ_1 e ϕ_2 estão definidas).

No caso da EDO linear e homogénea de 1ª ordem, se $x = \phi_1(t)$ é uma solução da equação e c_1 uma constante arbitrária, então $x = c_1\phi_1(t)$ dá-nos todas as soluções da equação.

Do que acabou de ser dito conclui-se que a obtenção da solução geral de uma equação linear e homogénea passa pela determinação de soluções particulares linearmente independentes. E no caso da equação não ser homogénea? O teorema seguinte (ver, por exemplo, [1], p.79) dá a resposta a esta questão.

Teorema 4 (da superposição não homogénea)

Seja $x = \phi_P(t)$ uma solução particular de uma EDO linear não homogénea e $x = \phi_H(t)$ uma solução qualquer da correspondente equação homogénea, então $x = \phi_P(t) + \phi_H(t)$ é solução da EDO linear dada. Além disto, todas as soluções da equação não homogénea têm a forma anterior.

Vimos anteriormente que uma EDO linear homogénea de 1ª ordem admite as soluções do tipo $x = c_1\phi_1(t)$, $c_1 \in \mathbb{R}$, onde $\phi_1(t)$ é uma qualquer solução particular da equação. O Teorema 4 permite-nos agora afirmar que no caso da equação não ser homogénea, todas as soluções são da forma $x = \phi_P(t) + c_1\phi_1(t)$, sendo $x = \phi_P(t)$ uma solução particular da equação não homogénea.

No caso de equações diferenciais lineares de 2ª ordem não homogéneas, todas as soluções são da forma $x = \phi_P(t) + c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Vejamos um exemplo de aplicação dos resultados anteriores na resolução de uma equação.

Exemplo 4: Para determinar a solução geral da equação $\ddot{x} + 16x = 32$, comecemos por notar que a função constante $x = 2$ é uma solução particular $\phi_p(t)$ da equação dada. Por outro lado, a solução geral da correspondente equação homogénea ($\ddot{x} + 16x = 0$) é $x = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$. Do Teorema 4 concluímos que a solução geral da equação dada, não homogénea, é $x = 2 + c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Equação diferencial ordinária linear de coeficientes constantes

3.1. Equações diferenciais ordinárias da forma $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\omega > 0$

A expressão

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega > 0 \quad (1.4)$$

representa uma família infinitas equações, uma para cada escolha do valor do parâmetro ω . Na tabela 3 dão-se alguns exemplos de equações desta forma.

Equação	Parâmetro ω
$\ddot{x} = -x$	$\omega = 1$
$\ddot{x} = -\frac{1}{4}x$	$\omega = \frac{1}{2}$
$\ddot{x} = -16x$	$\omega = 4$

Tabela 3

Estas equações são equações diferenciais lineares, com coeficientes constantes, homogêneas e autónomas. Pelo exposto anteriormente, sabemos que $x = \phi_1(t) = \sin(\omega t)$ e $x = \phi_2(t) = \cos(\omega t)$ são soluções da equação. Uma vez que $x = \sin(\omega t)$ e $x = \cos(\omega t)$ são linearmente independentes, concluímos do que se disse antes que todas as soluções das equações do tipo (1.4) são dadas por

$$x = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Podemos dar outras formas à expressão desta solução geral. Uma vez que

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t + \delta) &= A[\sin(\omega t) \cos(\delta) + \sin(\delta) \cos(\omega t)] \\ &= A \cos(\delta) \sin(\omega t) + A \sin(\delta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

é fácil perceber que esta expressão não contém funções que não sejam da forma (1.5). Com efeito, fixadas constantes arbitrárias ω e δ na expressão (1.6), a mesma solução particular é dada pela expressão (1.5) com $c_1 = A \cos(\delta)$ e $c_2 = A \sin(\delta)$.

Reciprocamente, a qualquer solução da forma (1.5) pode dar-se a forma (1.6). Com efeito, de

$$c_1 = A \cos(\delta)$$

e

$$c_2 = A \sin(\delta)$$

resulta

$$A = \pm \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

e

$$\cos(\delta) = \frac{c_1}{A}$$

$$\sin(\delta) = \frac{c_2}{A}.$$

Das duas últimas igualdades obtém-se

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)$$

onde \tan^{-1} denota a função inversa da função tangente em $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

No caso de ser $c_1 = 0$, podemos escolher $\delta = \frac{\pi}{2}$, de onde resulta, $A = c_2$ uma vez que

$$A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos(\omega t).$$

De forma análoga, à solução geral dada em (1.5) e (1.6) pode dar-se a forma

$$A \cos(\omega t + \delta). \tag{1.7}$$

Seguindo [1] e [2], usaremos a expressão dada em (1.6) para representar a solução geral (em [6] é usada a expressão (1.7)).

3.2. Período e Amplitude

Uma vantagem importante de escrever as soluções na forma dada em (1.6) ou (1.7) é a de poder concluir imediatamente que a função toma valores entre $-A$ e A . O valor de $A > 0$ é designado por **amplitude** das soluções. Vamos de seguida representar graficamente algumas destas soluções (particulares).

Comecemos por representar, no mesmo referencial, os gráficos das duas funções $A \sin(\omega t + \delta)$ com $\delta = 0$, $A = 1$ e ω os valores 2 e 3, respetivamente.

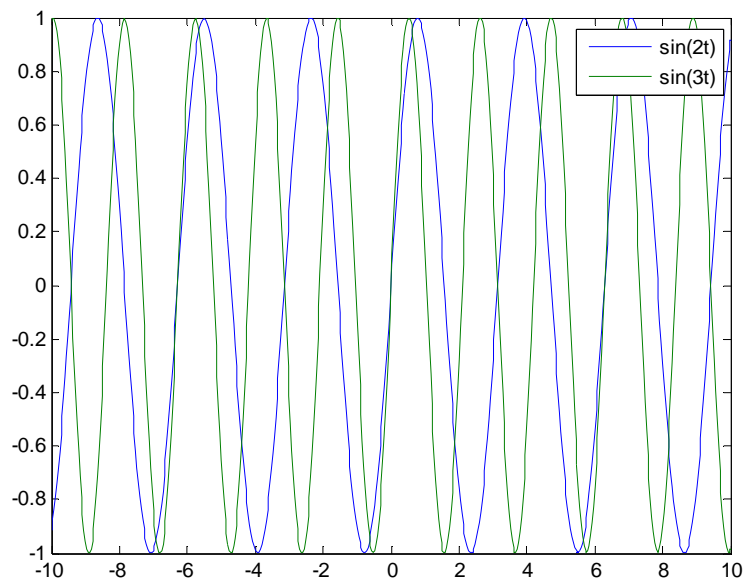


Fig. 3.1: $\delta = 0$, $A = 1$, $\omega = 2$ e $\delta = 0$, $A = 1$, $\omega = 3$

Da visualização do gráfico anterior, onde se representou a função $\sin(2t)$ e $\sin(3t)$, pode-se ver que ambas têm contradomínio no intervalo $[-1, 1]$, e à medida que os valores de t variam, a função $\sin(2t)$ repete-se em intervalos de comprimento π enquanto que a função $\sin(3t)$ repete-se em intervalos de comprimento $\frac{2\pi}{3}$. O valor $\frac{2\pi}{\omega}$ é o **período** da função. O inverso aritmético $\frac{\omega}{2\pi}$ do período designa-se por **frequência** já que representa o número de oscilações completas por unidade de tempo. O valor de ω é por vezes designado por **pulsação** (ver exercício 3, página 41 de [7])

Analisamos de seguida o efeito da variação do parâmetro δ . Na figura 3.2 estão representadas as funções $\sin(2t)$ ($A = 1$, $\omega = 2$ e $\delta = 0$) e $\sin(2t + 3)$ ($A = 1$, $\omega = 2$ e $\delta = 3$).

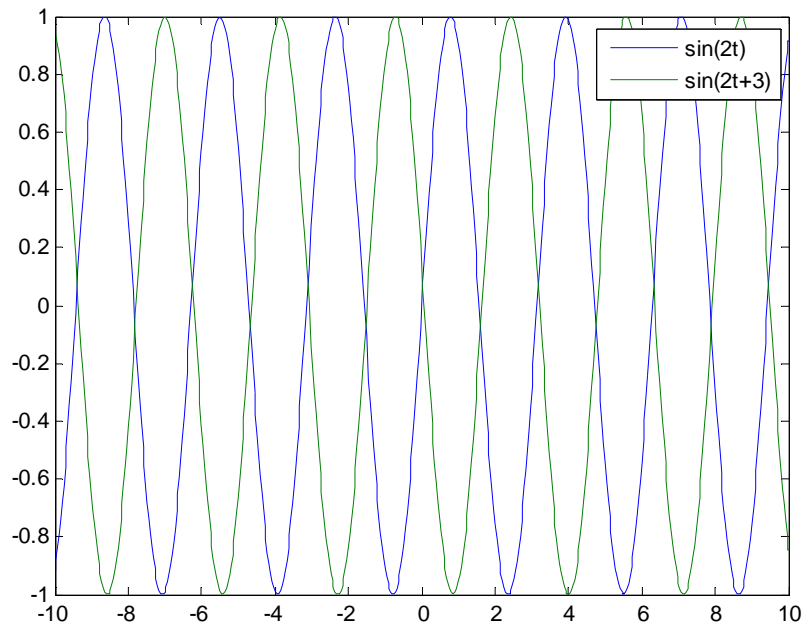


Fig. 3.2: funções $\sin(2t)$ e $\sin(2t + 3)$

Comparando as duas representações, observa-se que o gráfico de $\sin(2t + 3)$ obtém-se do gráfico de $\sin(2t)$ deslocando-o $\frac{3}{2}$ da unidade para a esquerda.

Em geral, o gráfico de $x = A \sin(\omega t + \delta)$ obtém-se deslocando o gráfico de $x = A \sin(\omega t)$, $\frac{\delta}{\omega}$ unidades para a esquerda, se $\delta > 0$. Assim, ao número δ chama-se **fase** da solução.

4. Movimento Harmónico Simples

Movimento oscilatório ou movimento periódico é todo o movimento de um sistema que se repete continuamente em intervalos de tempo iguais (o chamado período). O movimento harmónico simples é um caso particular de movimento periódico oscilatório em que a partícula executa movimentos de ida e volta em torno de uma mesma posição, ou seja, é um movimento periódico em que ocorrem deslocamentos simétricos em torno de um ponto.

Em física clássica (...) um oscilador harmónico corresponde a um sistema que quando tirado da posição de equilíbrio apresenta uma força restauradora F proporcional ao deslocamento x de acordo com a Lei de Hooke [8]:

$$F = -kx$$

No movimento harmónico simples a força restauradora está sempre dirigida para a posição de equilíbrio e portanto sempre oposta ao deslocamento.

São exemplos de movimentos harmónicos simples os seguintes movimentos:

- circular uniforme;
- da Terra em torno do Sol;
- de uma lâmina vibrante;
- vibrações acústicas;
- de um pêndulo;
- de uma massa presa à extremidade de uma mola;

O nome de movimento harmónico simples surge quando F é a única força que atua no sistema sendo o seu deslocamento uma senoidal do tempo. Amplitude e frequência constantes são características deste sistema.

4.1. Lei de Hooke

Considere-se uma partícula de massa m apoiada sobre uma superfície sem atrito e fixa à extremidade de uma mola, como sugere a figura 4.1.

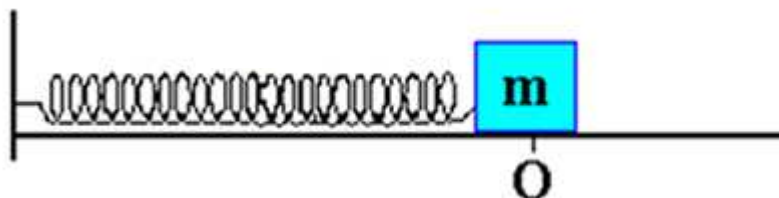


Fig.4.1. Partícula de massa m fixa à extremidade de uma mola.

Denotemos por x o deslocamento da partícula sobre a superfície unidimensional em que se apoia, relativamente a um referencial que tem a origem das coordenadas (neste caso só uma) na posição de equilíbrio. Por outras palavras, é $x = 0$ para a posição da partícula quando nenhuma força atua sobre ela.

Quando se aplica uma força externa sobre a partícula deslocando-a para a direita (sempre sobre a superfície de apoio), a mola é esticada x unidades de comprimento, como se ilustra na figura 4.2.

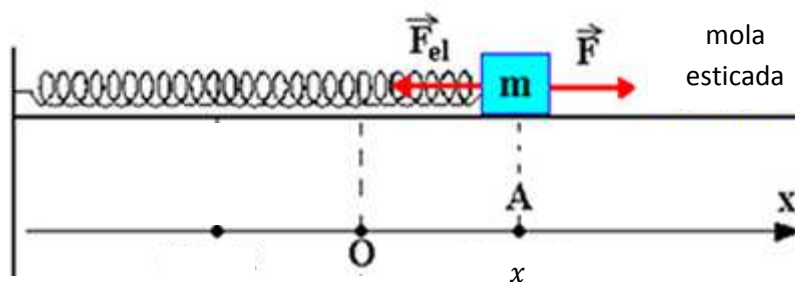


Fig.4.2. Uma força foi exercida sobre a partícula de massa m e a mola foi esticada

Se a partícula for deslocada para a esquerda, a mola é comprimida x unidades de comprimento (ver figura 4.3).

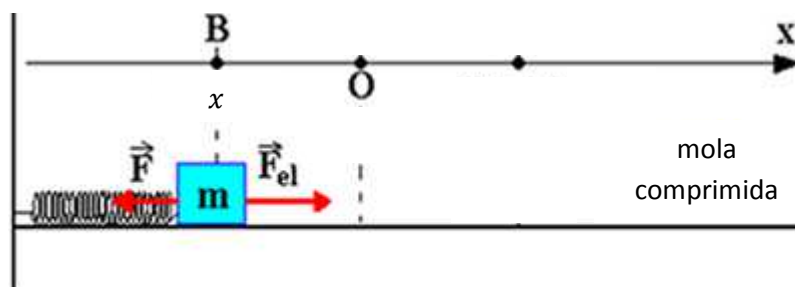


Fig.4.3. Uma força foi exercida sobre a partícula de massa m e a mola foi comprimida

Em qualquer dos casos, ficando apenas sujeito à força F exercida pela mola (estamos a admitir, em particular, a inexistência de atritos), a partícula executará um movimento harmónico simples em torno da posição de equilíbrio. F é uma força restauradora sempre contrária ao movimento da partícula que obedece à relação

$$F = -kx, \quad k > 0 \quad (2.1)$$

que é conhecida por Lei de Hooke⁽¹⁾ e pode ser aplicada desde que o limite elástico do material não seja excedido. Quando se ultrapassa determinado valor da força, a relação de proporcionalidade deixa de existir, uma vez que a mola perde a sua elasticidade e a deformação passa a ser permanente.

Na equação (2.1), da lei de Hooke, k é uma constante positiva que se costuma designar por constante de rigidez da mola ou simplesmente constante da mola. Esta rigidez depende da composição do aço (ou outro material) com o qual a mola é feita, o processo usado na sua manufatura, a espessura do arame, o número de elos da mola, entre outras. No sistema internacional de unidades, expressam-se os comprimentos em metro, as forças em Newton (quilogramas.metro/segundo²), logo

(1) Em 1660 o físico inglês Robert Hooke (1635-1703), observando o comportamento mecânico de uma mola, descobriu que as deformações elásticas obedecem a uma lei muito simples. Hooke observou que quanto maior fosse o peso de um corpo suspenso numa das extremidades da mola (cuja outra extremidade era presa a um suporte fixo) maior era a deformação, neste caso aumento de comprimento, sofrida pela mola. Analisando outros sistemas elásticos, Hooke verificou que existia sempre proporcionalidade entre a força deformante e a deformação elástica produzida. Pôde então enunciar o resultado das suas observações sob a forma de uma lei geral. Tal lei, que é conhecida atualmente como lei de Hooke, e que foi publicada em 1676, é a seguinte: as forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas [8].

a constante k expressa-se na unidade N/m (Newton/metro).

Conjugando a expressão (2.1) para a força F com a segunda lei de Newton⁽²⁾

$$F = m\ddot{x} \quad (2.2)$$

(Força = massa \times aceleração)

obtemos

$$-kx = m\ddot{x},$$

ou seja

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (2.3)$$

Esta relação expressa a proporcionalidade direta que existe entre x e \ddot{x} (em particular, $|x|$ e $|\ddot{x}|$ atingem simultaneamente valores máximos e mínimos) e permite concluir que a aceleração da partícula presa à mola tem sempre sentido contrário ao do movimento.

A EDO (2.3) é da forma (1.4) com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e cujas soluções se podem portanto escrever na forma

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right) \quad (2.4)$$

onde $A, \delta \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Os valores destas constantes são determinados a partir de condições iniciais. Por exemplo, se no instante $t = 0$, é $x = x_0$ e $\dot{x} = 0$, tem-se

$$\begin{cases} x_0 = A \sin(\delta) \\ 0 = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\delta) \end{cases}$$

(²) Isaac Newton (1643-1727) foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrónomo, alquimista, filósofo natural e teólogo. Sua obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* é considerada uma das mais influentes na História da Ciência. Publicada em 1687, esta obra inclui a lei da gravitação universal e as três leis de Newton que fundamentaram a mecânica clássica [9].

que admite, entre outras, as soluções $\begin{cases} A = x_0 \\ \delta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} A = -x_0 \\ \delta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$. Por aqui se vê, que podemos considerar $A \geq 0$, sem perda de generalidade.

Em particular, para $A = 0$ obtém-se a solução $x = 0$ que corresponde à inexistência de movimento, isto é, a partícula não sai da sua posição de equilíbrio, por não existir qualquer força a atuar sobre ela.

Para $A > 0$, a partícula oscila em torno do ponto de equilíbrio com movimento harmónico simples de amplitude A . De acordo com o que dissemos antes sobre a aplicabilidade da lei de Hooke, esta só é válida para valores de A suficientemente pequenos, isto é, que correspondam a forças que não produzam deformações permanentes na mola.

O período da oscilação é independente da amplitude das oscilações e vale

$$p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(que se expressa em unidades de tempo).

Da relação anterior pode-se concluir que o período aumenta com o quociente $\frac{m}{k}$, o que significa que partículas com maior massa levam mais tempo a completar uma oscilação, para uma dada constante da mola.

Vejamos um exemplo de aplicação do que acabou de ser escrito ([5], pág. 48).

Problema 1: uma mola de constante $k = 56.0 \text{ N/m}$ tem um peso de chumbo, com massa de 1.00 kg , preso na extremidade (Fig.2.4). O peso é puxado em $+5.5 \text{ cm}$ a partir do ponto de equilíbrio e depois é solto de modo a adquirir uma velocidade inicial de -0.32 m/s . Qual é a equação de movimento da oscilação resultante? Qual é a amplitude das oscilações? Qual é a sua fase?

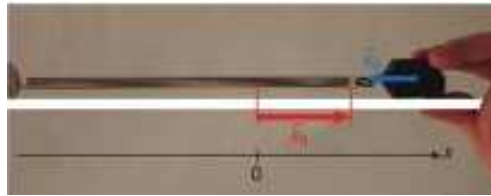


Fig. 4.4

Estamos perante um problema que envolve um movimento harmónico simples. A equação geral do movimento harmónico simples

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

neste caso é

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

ou seja

$$\ddot{x} = -56x.$$

As soluções desta equação são da forma

$$x = c_1 \sin(\sqrt{56}t) + c_2 \cos(\sqrt{56}t)$$

ou

$$x = A \sin(\sqrt{56}t + \delta).$$

Das condições iniciais

$$x(0) = 0.055 \text{ m e } \dot{x}(0) = -0.32 \text{ m/s}$$

Resulta $c_1 = -\frac{0.32}{\sqrt{56}}$ e $c_2 = 0.055$ e também os valores da amplitude

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \approx 0.0697 \text{ m} = 6.97 \text{ cm}$$

e da fase

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \approx -52^\circ.$$

Até agora, nos problemas com molas, considerámos a origem do referencial na posição ocupada pela partícula na posição de equilíbrio. Podemos, é claro, considerar um outro ponto para origem da coordenada o que se traduzirá em alguma diferença na equação do movimento.

Vejamos o caso de uma mola, com constante k , em que uma das extremidades está presa a uma parede e na outra está fixa uma partícula de massa m . A mola e a partícula estão deitadas no chão movendo-se a mola paralelamente a este. Pretende-se encontrar a equação do movimento tomando como origem da coordenada y o ponto em que a mola está presa à parede e o sentido positivo do referencial coincidindo com alongamentos da mola.

Nas figuras 4.5 e 4.6 ilustram-se os casos em que a mola é esticada e comprimida, respetivamente. Usamos l para representar o comprimento natural da mola e x o valor do deslocamento da partícula. No primeiro caso (mola esticada) é $x > 0$ e no segundo caso (mola comprimida) é $x < 0$.

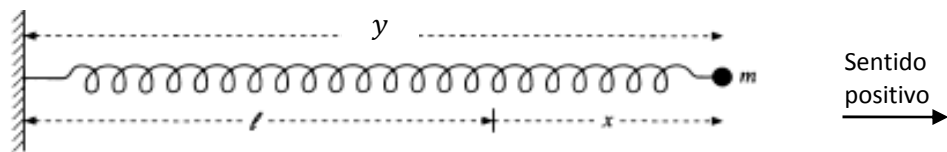


Fig. 4.5

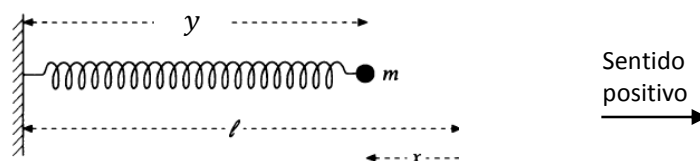


Fig. 4.6

De acordo com a lei de Hooke, a força exercida sobre a partícula é contrária ao sentido do movimento e, em ambos os casos, dada por $F = -kx$. Assim, sendo $x = y - l$, podemos escrever

$$F = -kx = -k(y - l) \quad (2.5)$$

Combinando esta relação com a 2ª lei de Newton, e atendendo a que $\ddot{x} = \ddot{y}$, tem-se

$$m\ddot{x} = -k(y - l)$$

$$m\ddot{y} = -ky + kl$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y + \frac{k}{m}l$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}l. \quad (2.6)$$

Podemos agora comparar as equações (2.6) e (2.3) e perceber a diferença entre elas resultante da mudança da origem das coordenadas. Ao contrário do que acontece com a equação (2.3), a equação (2.6) é não homogênea e, de acordo com o Teorema 4, será necessário obter uma solução particular que adicionada à solução geral da correspondente equação homogênea (2.3) nos dá a solução geral da equação (2.6).

Facilmente se conclui que $y = l$ é uma solução particular da equação (2.6) que adicionada à solução em (2.4) nos dá

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right) + l, \quad (2.7)$$

onde $A > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Tal como em (2.4), os valores destas constantes são determinados de acordo com condições iniciais. Daqui resulta que a partícula está em repouso quando $y = l$ ($A = 0$). Naturalmente, também tal como em (2.4), as soluções da forma (2.7) têm período de $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Acabamos de mostrar o papel importante de uma escolha adequada do referencial. Esta escolha é determinante na determinação da EDO e respetiva equação do movimento.

Vejamos um exemplo em que a escolha do referencial é diferente de todas as situações até agora descritas.

Observemos a figura 4.7 onde l representa o comprimento natural da mola, z o valor do deslocamento da partícula no referencial escolhido, x o deslocamento da partícula na horizontal e θ o ângulo que a mola faz com o referencial. O ponto O é a origem do referencial.

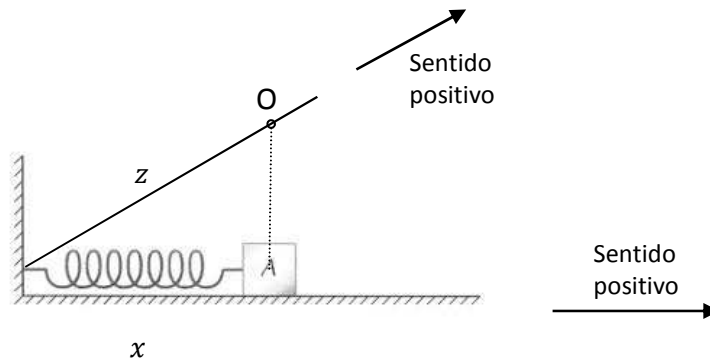


Fig. 4.7

A mola pode ser esticada ou comprimida e em ambos os casos, tem-se

$$x = z \cos \theta. \quad (2.8)$$

A equação $m\ddot{x} = -kx$ dá lugar à equação

$$m\ddot{z} \cos \theta = -(k \cos \theta) z$$

ou seja

$$m\ddot{z} = -kz,$$

e, como se vê, curiosamente, a equação do movimento não depende do ângulo θ . A solução geral é

$$z = A' \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \delta' \right) \quad (2.9)$$

onde A' e δ' são constantes arbitrárias, a determinar de acordo com as condições iniciais. Por outro lado, usando a relação (2.8) na expressão (2.4), obtemos

$$z = \frac{A}{\cos \theta} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \delta \right) \quad (2.10)$$

As expressões (2.9) e (2.10) representam as mesmas funções, com $\delta' = \delta$ e $A' = \frac{A}{\cos \theta}$.

Nos casos estudados anteriormente, a mola estava apoiada sobre um plano horizontal e a única força que considerámos atuar sobre a partícula é a exercida pela mola quando deslocada da sua posição de equilíbrio. Vamos agora analisar o caso em também o peso da partícula é levado em conta, isto é, uma das extremidades da mola está fixa no teto e a partícula, na outra extremidade, tem um movimento vertical e está sujeita à ação da gravidade. Tal como até aqui, continuaremos a representar por k a constante da mola e por m a massa da partícula.

Quando se toma como coordenada a distância da partícula ao teto, qual será a equação do movimento correspondente?

As figuras 4.8 e 4.9 ilustram as situações em que a mola é esticada e comprimida, respetivamente. Continuaremos a denotar o comprimento da mola por l , tomaremos como origem do referencial o ponto em que a mola está presa no teto e usamos y para valor do deslocamento da partícula.

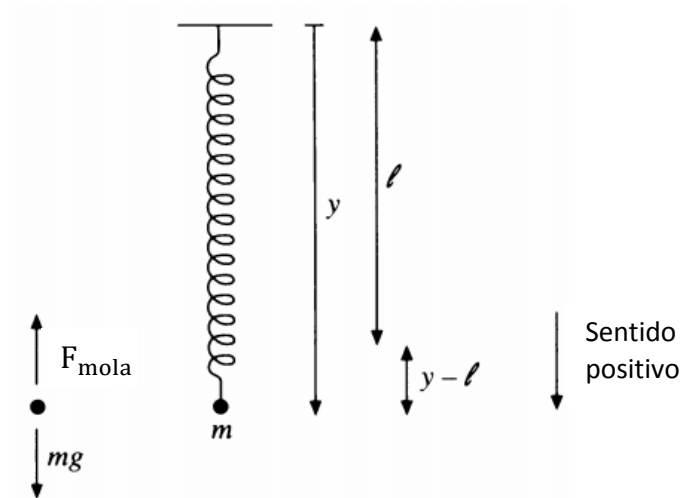


Fig. 4.8

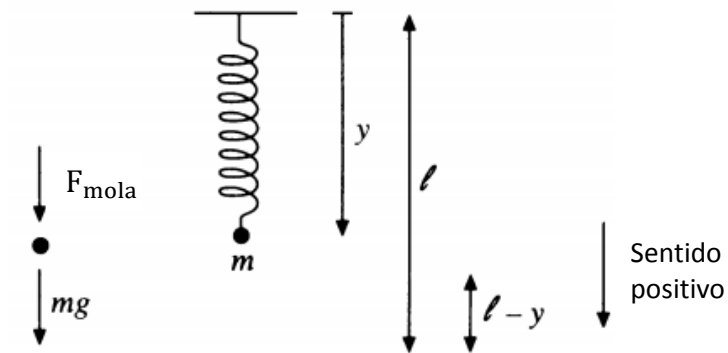


Fig. 4.9

A força F_{mola} , exercida pela mola, é sempre contrária ao movimento da partícula, e podemos escrever, analogamente a (2.5),

$$F_{mola} = -k(y - l).$$

A força F que atua sobre a partícula é, neste caso, a soma da força da mola e da força da gravidade, isto é,

$$F = -k(y - l) + mg.$$

De novo, a 2ª lei de Newton dá

$$m\ddot{y} = -k(y - l) + mg$$

e a equação do movimento é

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}(y - l) + g \quad (2.11)$$

que se pode escrever na forma

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}l + g. \quad (2.12)$$

Uma vez mais, estamos perante uma EDO linear e não homogénea de que

$$y = l + \frac{mg}{k}$$

é uma solução particular. Uma vez que a solução geral da equação homogénea correspondente à equação (2.12) é

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right),$$

será

$$x = l + \frac{mg}{k} + A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right)$$

a solução geral da equação (2.12).

E se considerarmos a origem do referencial a posição de repouso da partícula, qual é a equação do movimento? Observemos a figura 4.10, onde $d = \frac{mg}{k}$ é o deslocamento produzido pela ação da gravidade e, portanto, a partícula está em repouso na posição $y = l + \frac{mg}{k}$.

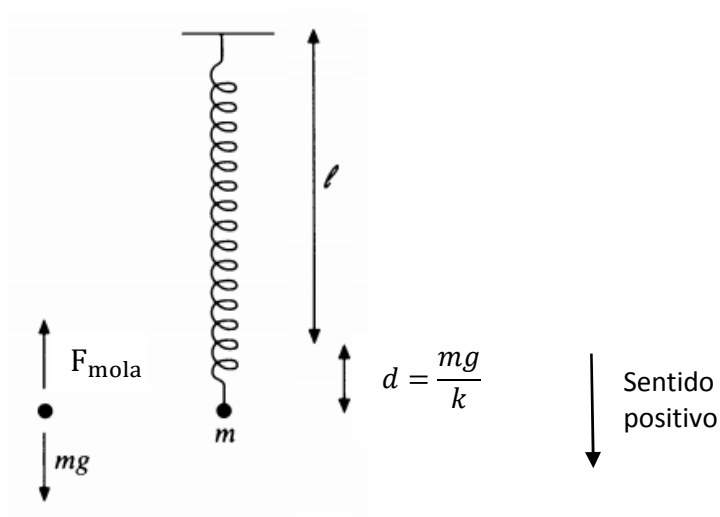


Fig. 4.10

A equação do movimento é, neste caso,

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

ou seja

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + g. \quad (2.13)$$

Uma solução particular é a solução constante

$$x = \frac{m}{k}g$$

e a solução da equação homogénea é

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right),$$

logo a solução geral da equação (2.13) é

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right) + \frac{m}{k}g.$$

As etapas usadas na resolução dos problemas até agora propostos servem também para a resolução de problemas mais complicados. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5: Uma partícula de massa m está pousada numa mesa e presa nas extremidades de duas molas. Estas estão fixas, nas extremidades opostas, a uma parede e perpendiculares a esta. Ambas as molas têm comprimento l mas constantes da mola, k_1 e k_2 , diferentes.

Vamos considerar a origem do referencial a posição de equilíbrio, e como coordenada da partícula, o deslocamento x , como mostra a figura 4.11.

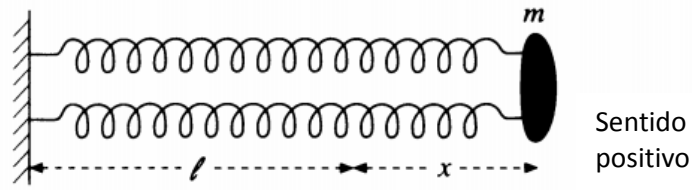


Fig. 4.11

Qual será a equação do movimento?

A força total F que atua sobre a partícula é a força resultante da soma das forças F_1 e F_2 exercidas pelas duas molas, ou seja,

$$F = F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x.$$

Novamente pela 2ª lei de Newton,

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x$$

e a equação do movimento é,

$$\ddot{x} = -\frac{k_1 + k_2}{m}x$$

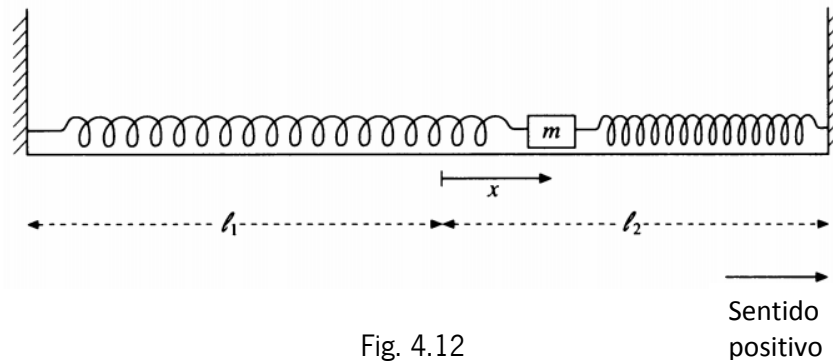
que pode ser escrita na forma

$$\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0. \quad (2.14)$$

Observamos que esta equação é também a equação do movimento produzido pela força de uma única mola com constante $k_1 + k_2$. Tendo em conta a solução dada em (2.4), podemos escrever, no contexto atual,

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t + \delta \right).$$

Exemplo 6: Um par de molas com comprimentos l_1 e l_2 e constantes da mola k_1 e k_2 , respetivamente, têm uma das suas extremidades ligadas a uma partícula, enquanto as restantes extremidades estão presas a paredes opostas, tal como se ilustra na figura 4.12. Do novo, se assume que as molas estão colocadas perpendicularmente às paredes.



assume-se que a soma dos comprimentos das molas é igual à distância entre as paredes a que as molas estão fixas. Sendo assim, quando uma mola é estendida a outra é comprimida.

Tomemos como origem das coordenadas a posição de equilíbrio e como coordenada da partícula o deslocamento relativamente a esta posição.

À semelhança do exemplo anterior, a força total que atua neste sistema é a força resultante da soma $F = F_1 + F_2$ das forças exercidas pelas molas. Tal como no exemplo anterior, é $F_1 = -k_1 x$ e $F_2 = -k_2 x$ (recordemos que a força exercida por cada mola tem sentido sempre contrário ao sentido do movimento da partícula) e obtém-se deste modo a mesma equação

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0.$$

Exemplo 7: Considerem-se duas partículas de igual massa m presas nas extremidades de uma mola de comprimento l e constante da mola k . A mola encontra-se colocada na horizontal tal como se ilustra na figura 4.13.

Denotamos por x e y as coordenadas das partículas relativamente ao referencial cuja origem é um ponto que está na reta sobre a qual se produz o movimento.

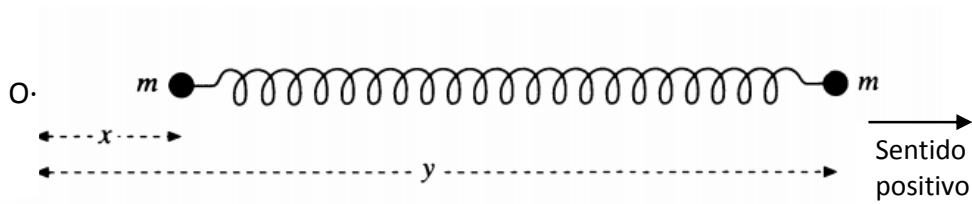


Fig. 4.13

Neste caso, o movimento das partículas vai ser descrito por um par de equações diferenciais.

De acordo com a lei de Hooke, a força que atua sobre a partícula de coordenada x é

$$F_x = k(y - x - l)$$

e a força que atua sobre a partícula de coordenada y é

$$F_y = -k(y - x - l)$$

uma vez que um alongamento da mola corresponde a um aumento de y e um decréscimo de x e, por outro lado, uma compressão da mola corresponde a um aumento de x e um decréscimo de y .

Uma vez mais, a 2ª lei de Newton permite escrever

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{k}{m}(y - x - l) \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m}(y - x - l)\end{aligned}$$

Para resolver este sistema de duas equações, vamos usar as seguintes mudanças de variáveis

$$u = y + x$$

e

$$v = y - x.$$

Com as novas variáveis, temos

$$\begin{cases} \ddot{u} = \ddot{y} + \ddot{x} \\ \ddot{v} = \ddot{y} - \ddot{x} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ \ddot{v} = -\frac{k}{m}(v - l) - \frac{k}{m}(v - l) \end{cases}$$

Observe-se que a primeira equação envolve apenas a variável u e tem a solução geral $u = c_1 t + c_2$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

A segunda equação, que envolve apenas a variável v , pode escrever-se na forma

$$\ddot{v} + \frac{2k}{m}v = 2\frac{k}{m}l$$

cuja solução é

$$v = A \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \delta\right) + l,$$

onde A e δ são constantes arbitrárias ($A > 0$).

Regressando às variáveis iniciais, resulta

$$\begin{cases} y + x = c_1 t + c_2 \\ y - x = A \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \delta\right) + l \end{cases}$$

donde obtemos

$$x = -\frac{A}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \delta\right) - \frac{l}{2}$$

e

$$y = \frac{A}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \delta\right) + \frac{l}{2} + c_1t + c_2.$$

4.2. Uma mola com atrito

A EDO (2.3) é usada para descrever o movimento de uma mola não considerando o atrito. Mas este existe em todos os sistemas reais.

Esta força é, muitas vezes, aproximadamente proporcional à velocidade e então introduz-se o termo “de amortecimento” da forma $\alpha\dot{x}$, onde a constante $\alpha > 0$ é o coeficiente de amortecimento e \dot{x} é a velocidade da partícula.

Uma vez que a força de atrito tem sentido oposto ao do movimento, a força total exercida sobre a partícula, é agora dada pela expressão $F = -kx - \alpha\dot{x}$. A nova equação é, portanto,

$$-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

que é equivalente a

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2.15}$$

À equação (2.15) chama-se equação do movimento oscilatório amortecido.

O caso mais simples de resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas ocorre quando os coeficientes da equação são constantes. É o caso da equação (2.15) que vamos resolver.

A equação (2.15) sugere o uso de uma solução do tipo $x = e^{rt}$ onde r é ainda uma constante desconhecida. Substituindo esta função e as suas derivadas

$$\dot{x} = re^{rt}$$

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}$$

na equação (2.15) obtemos

$$r^2 e^{rt} + \frac{\alpha}{m} r e^{rt} + \frac{k}{m} e^{rt} = 0$$

ou a equação equivalente

$$e^{rt} \left(r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{k}{m} \right) = 0.$$

Uma vez que $e^{rt} \neq 0$, qualquer que seja o valor de t , vem

$$r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{k}{m} = 0.$$

Estamos perante uma equação do 2º grau, chamada equação característica da equação (2.15), cujas raízes são

$$r = \frac{-\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2}}}{2}.$$

Faremos o estudo em separado dos três casos possíveis, a saber:

Caso I: $\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2} > 0$

Caso II: $\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2} = 0$

Caso III: $\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2} < 0$

Caso I: Duas raízes reais distintas da equação característica

Se o binómio discriminante é um número positivo, a equação tem duas raízes reais diferentes

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\alpha}{m} - \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2}} \right)$$

e

$$r_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\alpha}{m} + \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2}} \right).$$

Deste modo,

$$x_1 = e^{r_1 t} \text{ e } x_2 = e^{r_2 t}$$

são duas soluções linearmente independentes da equação (2.15).

Pelo Teorema 3,

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

com c_1 e c_2 constantes reais arbitrárias, é a solução geral da equação (2.15).

Caso II: Equação característica com uma raiz dupla

Se $\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2} = 0$, as raízes da equação característica são

$$r_1 = r_2 = -\frac{\alpha}{2m}$$

e obtemos a solução

$$x_1 = e^{-\frac{\alpha}{2m} t}.$$

Uma vez que necessitamos de uma solução linearmente independente da solução x_1 , ela terá de ser da forma $x_2 = v(t)x_1$, para alguma função, não constante, v , que vamos agora determinar.

Derivando x_2 (e omitindo, por simplicidade, a variável t) obtém-se

$$\dot{x}_2 = \dot{v}x_1 + v\dot{x}_1$$

e

$$\ddot{x}_2 = \ddot{v}x_1 + 2\dot{v}\dot{x}_1 + v\ddot{x}_1.$$

Substituindo na equação movimento, aparece

$$\ddot{v}x_1 + 2\dot{v}\dot{x}_1 + v\ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}(\dot{v}x_1 + v\dot{x}_1) + \frac{k}{m}vx_1 = 0$$

que é equivalente a

$$\ddot{v}x_1 + \dot{v}\left(2\dot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}x_1\right) + v\left(\ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1\right) = 0.$$

Sabemos que $\ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = 0$ uma vez que x_1 é solução da equação característica e a expressão $2\dot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}x_1$ também é nula porque $2\dot{x}_1 = -\frac{\alpha}{m}x_1$.

Ficamos assim com $\ddot{v}x_1 = 0$ o que implica ser $\ddot{v} = 0$. Após duas integrações, concluímos

que

$$v(t) = \beta_1 t + \beta_2,$$

com β_1, β_2 constantes arbitrárias. Usualmente, é escolhida a função $v(t) = t$ (que corresponde a $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$) e a solução geral é

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}(c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso III: Equação característica com raízes complexas

Se $\frac{\alpha^2 - 4km}{m^2} < 0$, então as raízes da equação característica são $p \pm qi$, onde i é a unidade imaginária e

$$p = -\frac{\alpha}{2m}, \quad q = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4km - \alpha^2}{m^2}}.$$

A solução geral (ver [1], pág. 298) é dada por

$$x(t) = c_1 e^{pt} \cos(qt) + c_2 e^{pt} \sin(qt), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A seguir dá-se um exemplo de cada um dos casos acabados de estudar para que se possa visualizar o gráfico associado a cada um.

Exercício 1 ([2], pág. 589): A deslocação de uma partícula na extremidade de uma mola oleada satisfaz a seguinte EDO $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$.

Resolva a equação e representa-a graficamente dadas as seguintes condições iniciais $x(0) = -0.5$ e $\dot{x}(0) = 3$.

A equação característica da EDO é

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

cujas raízes são $r = -1$ e $r = -2$.

A solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

Tendo em atenção as condições iniciais dadas, obtém-se $c_1 = 2$ e $c_2 = -2.5$, isto é

$$x(t) = 2e^{-t} - 2.5e^{-2t}$$

é a solução particular procurada e tem a representação gráfica que se apresenta a seguir.

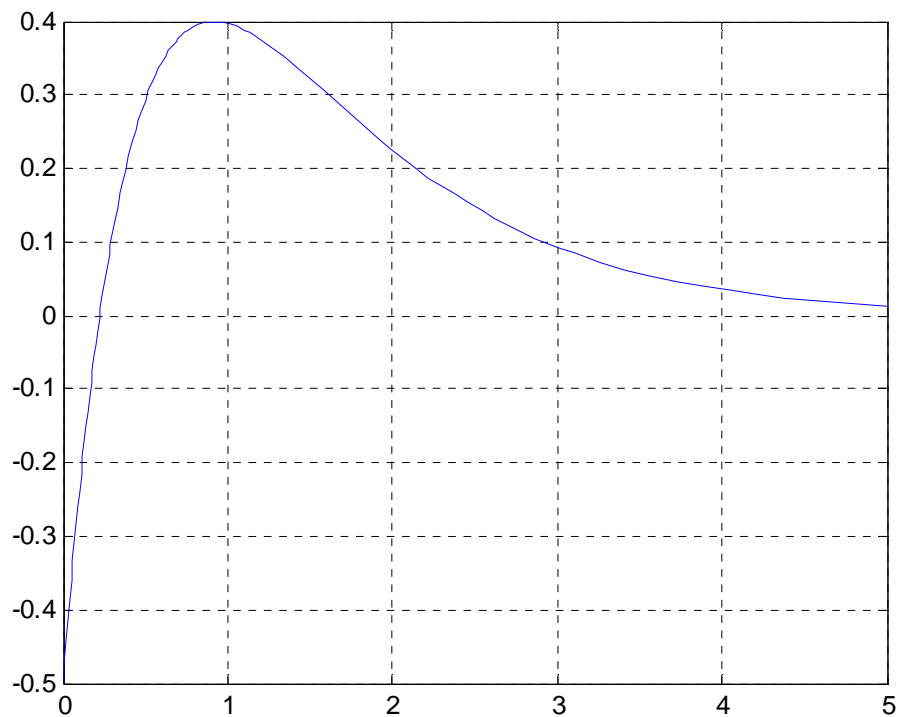


Fig. 4.14: solução da equação $x(t) = 2e^{-t} - 2.5e^{-2t}$

Exercício 2: Resolva a EDO $\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0$ e represente graficamente a solução particular dadas as condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -2$.

A equação característica

$$r^2 + 8r + 16 = 0$$

tem uma raiz dupla $r = -4$.

A solução geral é do tipo

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 + c_2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para as condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -2$, obtêm-se os valores de $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$

Uma solução particular é

$$x(t) = e^{-4t}(1 + 2t)$$

cujo gráfico se apresenta a seguir

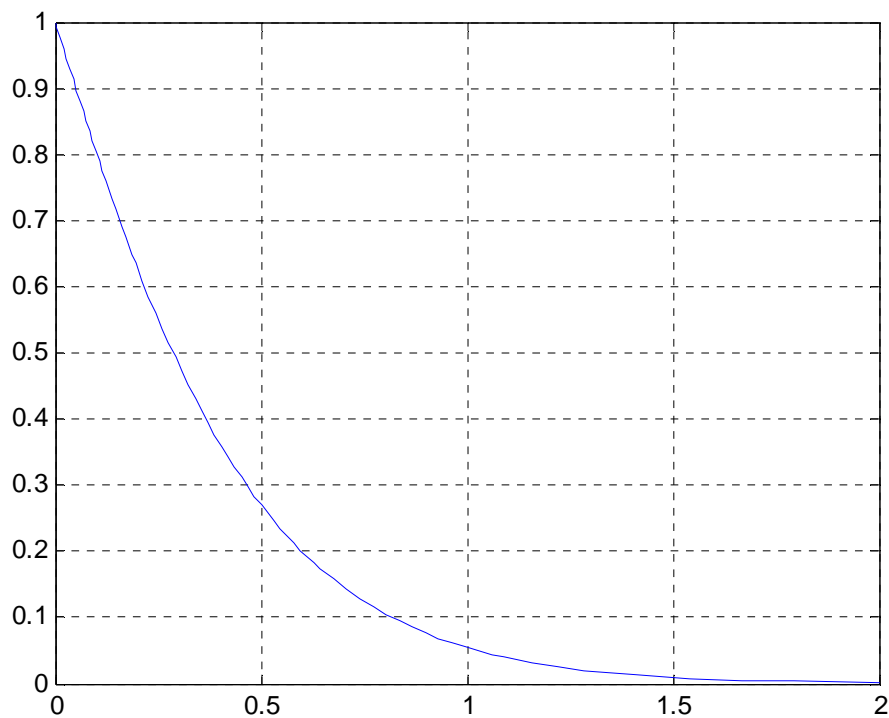


Fig. 4.15: solução da equação $x(t) = e^{-4t}(1 + 2t)$

Exercício 3 ([2], pág. 592): Resolva a EDO $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$ e represente graficamente a solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 30$.

Resolvendo a equação característica

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

obtêm-se raízes são $r = -2 - 3i$ e $r = -2 + 3i$.

A solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \cos(3t) + c_2 e^{-2t} \sin(3t).$$

Para as condições iniciais dadas, resulta $c_1 = 0$ e $c_2 = 10$, logo

$$x(t) = 10e^{-2t} \sin(3t)$$

é a solução do problema proposto cuja representação gráfica é

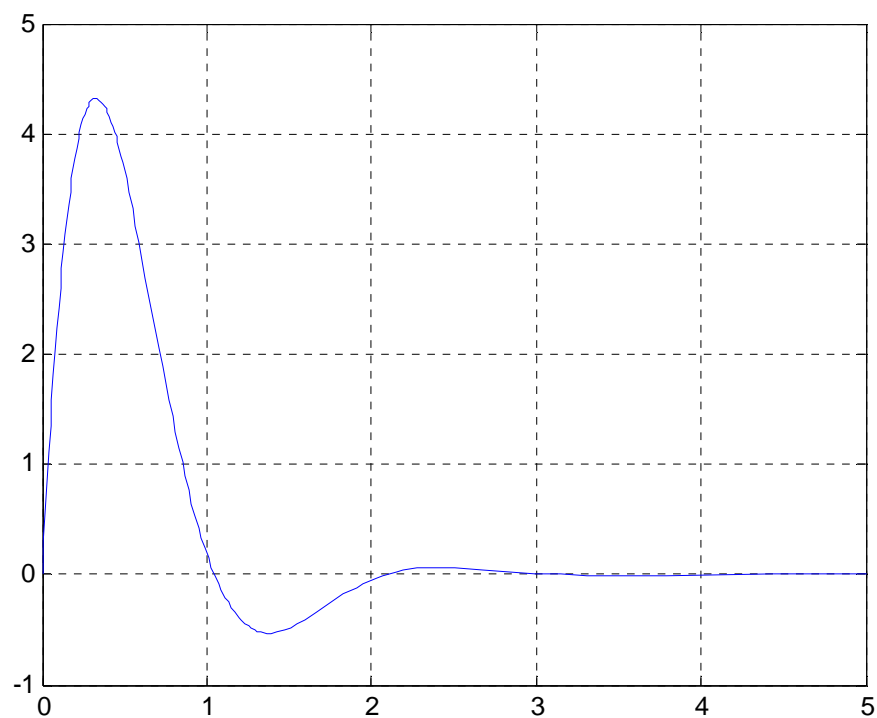


Fig. 4.16: solução da equação $x(t) = 10e^{-2t} \sin(3t)$

5. Tarefas para a sala de aula

Esta secção contém um conjunto de exercícios que tipificam os problemas que podem ser propostos aos alunos do 12º ano de escolaridade, no âmbito da lecionação do tema “Aplicações aos osciladores harmónicos”. Como já se disse, o que está previsto no novo Programa é que, no estudo de funções do tipo $t \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi)$, seja agora feita a interpretação física dos vários parâmetros envolvidos.

Nos exercícios de 1 a 15, sem nunca mencionar de forma explícita as equações diferenciais, as tarefas pedidas aos alunos são uma das seguintes: i) verificar se uma dada função satisfaz uma dada EDO; ii) dada a solução geral, determinar a solução particular que satisfaz condições iniciais dadas; iii) encontrar soluções de equações diferenciais muito simples; iv) dada a solução geral numa das três formas distintas possíveis, encontrar forma alternativa equivalente.

Nos restantes exercícios (16 a 20), adaptados dos exercícios propostos em [7], os alunos são desafiados a aplicar os conteúdos aprendidos lecionados em problemas que ilustram situações reais. As alíneas assinaladas com * correspondem a um nível de desempenho mais avançado.

1. Mostra que a função $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$ satisfaz a equação $f''(t) = -f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. Verifica que $f(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$ não satisfaz a igualdade $f''(t) = -f(t)$.

Encontra a igualdade que resulta da modificação da anterior e que é satisfeita pela função dada.

3. Verifica que a função $f(t) = \sin(3t) + 2 \cos(3t)$ é solução da equação $f''(t) = -9f(t)$ e que o mesmo acontece com $f(t) = -17\sin(3t) - \cos(3t)$.

4. Encontra uma função que satisfaça a equação $f''(t) = -9f(t)$, diferente da função utilizada no exercício 3. Haverá outras funções que também sejam solução da equação anterior?

5. Quantas funções haverá que satisfazem a equação $f''(t) = -9f(t)$?

6. Verifica que qualquer função da forma $f(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)$, onde c_1 e c_2 são constantes reais quaisquer, é solução da equação $f''(t) = -9f(t)$.
7. Dada a função $f(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)$ e as condições iniciais $f(0) = \sqrt{3}$ e $f'(0) = 3$, prova que $c_1 = 1$ e $c_2 = \sqrt{3}$.
8. Escreve a função $f(t) = \sin(3t) + \sqrt{3}\cos(3t)$ na forma $f(t) = A \sin(\omega t + \delta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, utilizando a relação $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
9. Mostra que a função escrita na forma alternativa determinada no exercício 8 também satisfaz a equação $f''(t) = -9f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
10. Mostra que a função $f(t) = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ não satisfaz uma equação da forma $f''(t) = -9f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
11. Qual é a relação entre o valor de ω determinado no exercício 8 e o coeficiente de $f(t)$ na equação $f''(t) = -9f(t)$?
12. Sendo $f(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, verifica que a amplitude de f é $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e a fase de f é $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$.
13. Se $g(t) = 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$, encontra uma expressão equivalente para $g(t)$ onde figure a função sin.
14. Prova que $g(t)$, determinada no exercício anterior, satisfaz a equação $g''(t) = -9g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
15. Indica todas as formas que conheces para a solução de uma equação do tipo $f''(t) = -\omega^2 f(t)$.

16. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 4[$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in [0, 4[$, é dada pela expressão $x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) - 1$.

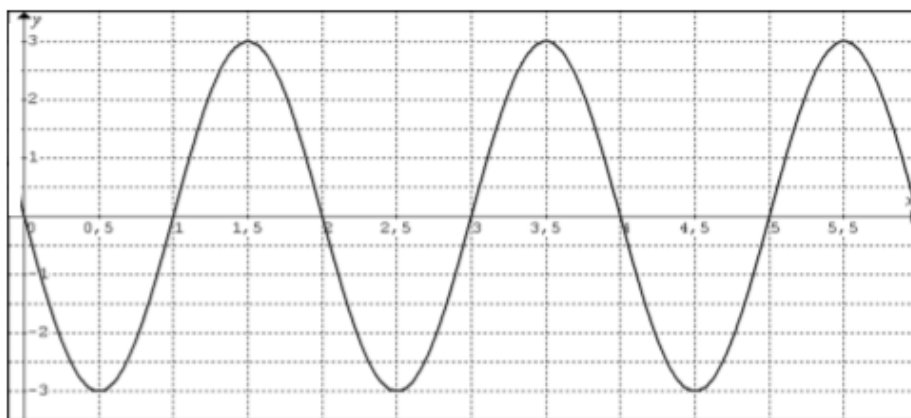
- 16.1. Indica a abcissa do ponto P nos instantes $t = 0$ e $t = 1$.
- 16.2. Determina a amplitude do movimento do ponto P.
- 16.3. Determina o período e a frequência deste oscilador harmónico.
- 16.4. Determina os valores de t para os quais a abcissa do ponto P dista da origem 2.5 unidades.
- 16.5. *Determina em que instantes o ponto P atinge a distância máxima da origem.

17. Uma mola está suspensa por uma extremidade, tendo na outra extremidade um corpo C. Após ter sido alongada na vertical, a mola inicia um movimento oscilatório no instante $t = 0$. A distância (em metros) do corpo C ao solo é dada em cada instante t (em segundos) pela expressão:

$$D(t) = 3 + 2 \cos(\pi t + \pi) \text{ para } t \in [0, 4[.$$

- 17.1. Determina a distância máxima e mínima do corpo C ao solo.
- 17.2. Indica o valor da amplitude do movimento de C.
- 17.3. Determina o período e a frequência deste oscilador.
- 17.4. Esboça o gráfico da função D e determina a respetiva fase.
- 17.5. Determina os instantes em que o corpo C está à distância de 4 metros do solo.

18. A representação gráfica do movimento de um oscilador harmónico f no intervalo $[0, 6]$ é a seguinte:



- 18.1. Determina a amplitude A , a pulsação ω , o período T e a fase φ .

- 18.2. Escreve uma expressão analítica $f(t)$ da função f representada.
- 18.3. Utilizando a expressão obtida em 18.2. determina os valores de t tais que $f(t) = 1$.
19. Um ponto P move-se no eixo das abcissas de forma que a sua abcissa no instante t (em segundos) é dada por $x(t) = \sin(\pi t) - \sqrt{3} \cos(\pi t)$.
- 19.1. *Prova que se trata de um oscilador harmónico.
- 19.2. Indica a amplitude, o período, a frequência do movimento, bem como a respetiva fase (também designada por ângulo de fase).
- 19.3. *Determina os instantes em que o módulo da velocidade de P é nulo.
- 19.4. Determina o valor real de k tal que $x''(t) = -kx(t)$.
20. Para $t \geq 0$, a abcissa $x(t)$, em metros, de um ponto material P no instante t (em segundos) que se desloca num eixo r satisfaz a equação diferencial $x''(t) = -5x(t) + 2$.
Apresenta todos os resultados com arredondamento às décimas da unidade.
- 20.1. Mostra que a função y definida pela expressão $y(t) = x(t) - \frac{2}{5}$ satisfaz a equação diferencial linear $y''(t) = -5y(t)$.
- 20.2. * Relativamente à origem do referencial usado para a abcissa $x(t)$, que ponto R deve ser escolhido como origem por forma a que a abcissa do ponto P seja dada por $y(t)$?
- 20.3. Mostra que a função $y(t) = a \cos(\sqrt{5}t) + b \sin(\sqrt{5}t)$, onde a e b são constantes reais, satisfaz a equação diferencial $y''(t) = -5y(t)$.
- 20.4. Admitindo que a função y é de facto da forma indicada em 20.3, calcula as constantes a e b , sabendo que no instante $t = 0$ o ponto P se encontra no ponto de abcissa 4 e que no instante $t = 10$ a velocidade do ponto P é de 10 metros por segundo, no sentido contrário ao eixo.
- 20.5. Calcula em que instantes o módulo da velocidade de P é máximo e em que instantes é nulo.
- 20.6. *Calcula a amplitude do movimento de P.
- 20.7. *Prova que existem constantes reais A e φ tais que para todo $t \geq 0$, $y(t) = A \cos(\sqrt{5}t + \varphi)$ e determine-as.

Bibliografia

[1] G. Fulford, P. Forrester and A. Jones, Modelling with Differential and Difference Equations, Cambridge University Press, 1997.

[2] D. Hughes – Hallet et al., Calculus, 4th edition, John Wiley & Sons Inc., 2005.

[3] S. J. Farlow, An Introduction to Differential Equations And Their Applications, Dover Publications, 2006.

[4] Proposta de novos Programas das disciplinas de Português, Matemática A e Física e Química A, Ministério da Educação. Disponível em <http://migre.me/onBzQ>, acessado em novembro de 2013.

[5] W. Bauer, G. D. Westfall, H. Dias, Física para Universitários - Relatividade, Oscilações, Ondas e Calor, McGraw Hill Brasil, 2013. Disponível em <http://migre.me/onBsG>, acessado em Outubro de 2014.

[6] Programas e metas curriculares, matemática A, Ensino secundário, Cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas, 2014. Disponível em <http://migre.me/oIClw>, acessado em Fevereiro de 2014.

[7] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura, M. C. Timóteo, Caderno de Apoio, 12.º ano. Disponível em <http://www.dgidc.min-edu.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=60>, acessado em Setembro de 2014.

[8] http://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_de_Hooke, acessado em Novembro de 2014.

[9] http://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton, acessado em Novembro de 2014.