Universidade do Minho
Instituto de Educação

Nuno André Barbosa e Castro

A comunicação escrita no ensino de matemática. Experiência realizada com uma turma do 10º ano de escolaridade durante o estudo das funções

outubro de 2014

UMinho|2014
Nuno André Barbosa e Castro **A comunicação escrita no ensino de matemática. Experiência realizada com uma turma do 10º ano de escolaridade durante o estudo das funções**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Nuno André Barbosa e Castro

A comunicação escrita no ensino de matemática. Experiência realizada com uma turma do 10º ano de escolaridade durante o estudo das funções

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

outubro de 2014

DECLARAÇÃO

Nome: Nuno André Barbosa e Castro

Endereço eletrónico: andrecastro.soa@gmail.com

Telefone: 917460013

Número do Bilhete de Identidade: 13606513

Título do Relatório:

A comunicação escrita no ensino de matemática. Experiência realizada com uma turma do 10º ano de escolaridade durante o estudo das funções

Supervisor:

Doutora Maria Helena Martinho

Ano de conclusão: 2014

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Universidade do Minho, 31 de outubro de 2014

AGRADECIMENTOS

À minha supervisora, Doutora Maria Helena Martinho pela disponibilidade que sempre demostrou para me atender, muitas vezes sem qualquer aviso, pelas chamadas de atenção, pelos ensinamentos me muito me ajudarão enquanto futuro professor e, principalmente, pela calma transmitida nos momentos mais agitados.

Ao meu orientador, Mestre Paulo Ferreira Correia, pelo muito interesse e disponibilidade para me ouvir e transmitir toda a sua experiencia, pelas muitas ideias e sugestões, pela exigência, sempre procurando que os estagiários dessem o melhor de si próprios, e pelo exemplo de devoção à escola e aos alunos.

Ao meu colega de estágio, Jorge Vieira, pela troca de ideias, pelo feedback, pelas queixas ouvidas, pelas conversas e gargalhadas.

À escola que me recebeu de braços abertos para realizar este estágio.

Aos alunos da turma em estudo, por todo o empenho, colaboração e simpatia que revelaram durante a implementação do projeto e ao longo de todo o estágio.

A todos os amigos, os que motivaram, os que opinaram, os que simplesmente me ajudaram a arejar a cabeça, cujos nomes esgotavam esta página.

A realização deste mestrado foi apoiada financeiramente por fundos nacionais através da FCT– Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto LiDEs – a literacia das disciplinas escolares: Características e desafios para mais *engagement* e aprendizagem (FCOMP-01-0124-FEDER-041405 (Refª. FCT, EXPL/MHC-CED/0645/2013)).

A COMUNICAÇÃO ESCRITA NO ENSINO DA MATEMÁTICA. EXPERIENCIA REALIZADA COM UMA TURMA DO 10º ANO DE ESCOLARIDADE DURANTE O ESTUDO DE FUNÇÕES.

Nuno André Casto

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2014

RESUMO

Este estudo refere-se a uma intervenção de ensino centrada na comunicação escrita dos alunos de uma turma do 10º ano de escolaridade, numa escola secundária no concelho de Barcelos, durante o ensino do tema de funções.

Os objetivos do estudo eram: analisar a capacidade de comunicação dos alunos e a justificação de resultados em tarefas realizadas em grupo, identificar dificuldades na escrita matemática e o tipo de linguagem preferida pelos alunos; analisar a evolução dos alunos à medida que lhes eram pedidas produções escritas.

Pretendeu-se com este estudo motivar os alunos a escrever as suas ideias e justificações, desenvolver as suas capacidades comunicativas ao longo das tarefas, na procura de uma aprendizagem mais significativa. Recorreu-se sempre que possível a uma metodologia de trabalho de grupo e analisaram-se com cuidado as discussões ocorridas entre os elementos dos grupos na decisão sobre o que incluir na justificação escrita dos resultados obtidos. Relativamente às estratégias de investigação e avaliação da ação, foram recolhidas produções escritas referentes a três tarefas propostas durante as aulas e uma ficha de avaliação. Foram também observadas aulas e analisadas as gravações das interações entre os elementos dos grupos, durante a realização das tarefas.

Na análise das produções escritas e das gravações, foi tido em conta o domínio da linguagem, a capacidade de converter os pensamentos em palavras ou símbolos, o encadeamento de ideias e a capacidade de interpretação de enunciados.

Foram detetadas algumas dificuldades em escolher as palavras certas para justificar os resultados, especialmente quando de tratavam de conceitos matemáticos. Os alunos apresentaram relutância quando lhes eram solicitadas justificações. Vários alunos apresentaram dificuldades na interpretação, especialmente de representações simbólicas. Os dados foram inconclusivos em relação à evolução dos alunos, pois o tempo de intervenção não se revelou suficiente para tais conclusões.

WRITTEN COMMUNICATION IN MATHEMATICS'S TEACHING. EXPERIENCE HELD WITH A CLASS OF THE 10TH GRADE DURING THE STUDY OF FUNCTIONS.

Nuno André Castro
Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
University of Minho, 2014

ABSTRACT

This study refers to a teaching intervention focused on written communication of students in a class of 10th grade of a middle school in the district of Barcelos, while teaching the theme of functions.

The study objectives were: to analyze the student's communication skills and the away students justify their results during group tasks; to identify difficulties in mathematical writing and the favorite sort of language; review the progress of the students as they were asked to write justification and explanations.

With this study, I intent to motivate students to write their ideas and justifications, develop their communication skills through the tasks, looking for a more meaningful learning. It was used, whenever possible, a methodology of group work and it was analyzed carefully the discussions held between the members of the groups, while they were deciding how to justify their results. Regarding research strategies and evaluation of the action, written productions of the three proposed tasks during classes were collected, as well as an assessment test. It was also observed and analyzed the recordings of the interactions between elements of groups during the refereed tasks.

In the analysis of written productions and recordings, it was taken into account the domain of language, the ability to convert thoughts into words or symbols, the chaining of ideas and the ability to interpret utterances.

There were detected some difficulties to chose the right words for the justifications of the results, especially when dealt with mathematical concepts. Students showed reluctance to write the justification when they were requested. Several students had difficulties in interpretation, especially of symbolic representations. The data were inconclusive about the development of pupils.

INDÍCE

INDÍCE DE FIGURAS

INDÍCE DE TABELAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se o tema, descrevem-se as suas finalidades e objetivos, a pertinência do estudo no ensino de Matemática e encontra-se uma breve descição da estrutura do trabalho.

1.1 Tema e finalidades

Desde o início da minha formação na área de educação matemática, um tema despertou imediatamente a minha atenção: a comunicação. Este parece ser, também, um interesse partilhado pela investigação na educação matemática. O que me cativa mais neste âmbito é a convicção com que a escola demonstra os seus propósitos. Esta tem como um grande objetivo educar os seus alunos para que se tornem cidadãos ativos, com todos os conhecimentos necessários para enfrentar os desafios do dia-a-dia e do mercado de trabalho. Ora, a arte de bem comunicar é considerada uma competência indispensável do mundo atual, sendo extremamente relevante, na minha opinião, que as aulas de matemática desempenhem também o seu papel neste processo de aprendizagem.

O programa de matemática para o ensino secundário dá esta mesma indicação aos professores de matemática:

> A matemática contribui para a construção da língua com a qual o jovem comunica e se relaciona com os outros, e para a qual a Matemática fornece instrumentos de compreensão mais profunda, facilitando a seleção, avaliação e integração das mensagens necessárias e uteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento cientifico a ser mobilizado sempre que necessário. (Ministério da Educação, 2001, p. 3)

A comunicação é, ainda, muito importante na própria educação matemática, sendo considerada não só um objetivo curricular, mas também uma ferramenta através da qual o aluno se apropria do conhecimento matemático e desenvolve as suas competências. De facto, a comunicação é tida nos programas de matemática portugueses como uma das capacidades transversais que deve ser desenvolvida no ensino da matemática. O programa de matemática refere que os alunos devem aprender a usar corretamente o vocabulário específico da matemática e a sua simbologia, assim como apresentar os textos de forma clara e organizada

(Ministério da Educação, 2001). Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (2007) enfatiza o papel da comunicação na educação matemática, referindo a importância de os alunos aprenderem a organizar e consolidar o pensamento matemático através da comunicação, a comunicar o seu pensamento de forma clara e coerente e usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas com precisão. É defendido que a necessidade de comunicar ajuda os alunos a clarificar o seu raciocínio matemático e, muitas vezes, a perceber as suas próprias dificuldades. Neste sentido, Freitas (2006) defende que a escrita proporciona aos alunos um registo dos seus pensamentos e ideias, tornando-os, assim, mais autónomos, na medida em que os ajuda a construir o seu conhecimento. Recomenda-se assim, que os professores peçam, com alguma regularidade, que os alunos realizem trabalhos escritos, tais como composições, relatórios, reflexões ou mesmo demonstrações (ME, 2001). Dias e Santos (2006) defendem que é através de um processo de comunicação, entre professor e aluno, que se faz toda a regulação pedagógica, refletindo também a importância da comunicação para uma avaliação eficaz, pois só com uma comunicação de qualidade é que os alunos e professores se entenderão mutuamente, permitindo que o processo de avaliação se desenvolva.

A intervenção pedagógica que resultou neste trabalho desenvolveu-se numa turma do 10º ano de escolaridade, onde foram implementadas tarefas com o objetivo de analisar e desenvolver a capacidade de comunicação escrita matemática dos seus alunos. Particularmente, pretendia-se avaliar a linguagem, as justificações, as interpretações e, ainda, a influência do trabalho em grupo para o desenvolvimento desta capacidade. Na turma onde trabalhei, foi possível observar, numa fase inicial, que os alunos, apesar de conseguirem ter boas ideias e raciocínios corretos, por vezes, sentem dificuldades em pô-las no papel, em justificá-las e em transmiti-las, seja ao professor ou aos colegas. Esta foi uma das razões que me levou a definir este tema definitivamente. A transversalidade do tema foi outro aspeto que influenciou a minha escolha, uma vez que desta forma poderei usufruir dos conhecimentos adquiridos durante este estudo em qualquer tema que tenha de ensinar ao longo da minha futura atividade profissional.
Acredito que com uma melhor compreensão sobre a comunicação escrita dos alunos terei mais facilidade em criar situações que possibilitem aos alunos desenvolverem a sua capacidade de comunicar e, consequentemente, melhorar o processo ensino-aprendizagem por mim orientado.

Durante a construção deste estudo pretendia perceber qual é o papel da escrita no desenvolvimento do conhecimento e da aprendizagem da matemática dos alunos. As conclusões deste estudo têm como objetivo responder às seguintes questões:

Q1: Como é que os alunos escrevem e organizam o seu raciocínio, quando justificam as respostas?

Q2: Que dificuldades revelam na escrita matemática? Qual o tipo de linguagem com que os alunos se sentem mais à vontade.

Q3: Como evoluem os alunos nas suas justificações e na escrita matemática ao longo das várias tarefas escritas realizadas?

1.2 Pertinência do estudo

O programa de matemática do ensino básico (2007), em vigor durante a formação dos alunos em estudo neste relatório, destaca a comunicação matemática como uma importante capacidade transversal a desenvolver durante toda a aprendizagem da matemática. Torna-se assim importante tentar perceber como os alunos comunicam matematicamente e o que pode ser feito para melhor desenvolver essa capacidade no ensino, pois os alunos devem-se tornar capazes de mostrar os seus pensamentos matemáticos de forma organizada e clara, comunicando eficazmente as suas ideias, assim como interpretando as ideias dos outros, sejam eles professores ou colegas.

Ponte et al (2007) refere que a vertente escrita da comunicação matemática tem vindo a ganhar visibilidade no ensino da matemática, defendendo, assim, que é de grande importância estudar como se processa a comunicação no ensino-aprendizagem e perceber se os alunos dispõem de suficientes oportunidades em sala de aula para desenvolver esta capacidade. De facto, a comunicação escrita marca de forma decisiva a natureza do processo de ensino-aprendizagem da matemática, tendo sido um dos temas mais valorizados durante a minha formação para futuro professor de matemática. Muito do tempo dos alunos é passado a ler e interpretar o que o professor escreve e a responder por escrito a questões, em especial nos momentos de avaliação, onde é fundamental a interpretação dos enunciados e a construção de respostas claras. Para o NCTM (2007, p. 66) "a comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática", pois é através dela que os alunos se apercebem do que realmente sabem e aprenderam num determinado momento, defendendo assim a influência da comunicação também na própria autoavaliação dos alunos.

Recentemente, tem-se dado importância a um papel mais ativo dos alunos nas aulas de matemática. Pretende-se que seja ultrapassada a ideia de um ensino expositivo por parte do professor e que o aluno participe e se envolva cada vez mais nas atividades matemáticas. Sem se desenvolver a capacidade de comunicação dos alunos seria impossível atingir tal objetivo. É, então, necessário que a investigação sobre educação matemática se debruce sobre este tema de forma a se perceber como ultrapassar as dificuldades dos alunos na comunicação escrita, como é o caso deste estudo, mas também oral, pois as duas estão intimamente ligadas.

Neste estudo pretendeu-se perceber como reagem os alunos quando lhes é pedida uma tarefa escrita e como decidem o que escrever quando esse trabalho é feito em grupo. Na última semana da intervenção foi feita uma ficha de avaliação, que será aqui usada para perceber se as tarefas escritas feitas em grupo permitiram a evolução dos alunos, tanto na escrita como nos seus próprios conhecimentos matemáticos.

1.3 Estrutura do relatório

Este relatório de estágio está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo é feita a introdução, onde se apresenta o tema e as suas finalidades, os objetivos do estudo e justifica-se a sua pertinência.

O capítulo II é dedicado ao Enquadramento Contextual e Teórico. Nele justifica-se a relevância do projeto atendendo ao contexto e à literatura especializada. Começa pela caraterização do contexto onde o projeto foi implementado, fazendo-se a descrição da escola e da turma envolvida. De seguida, faz-se uma revisão de literatura sobre comunicação escrita matemática. Nesta secção apresenta-se um conjunto de ideias sobre a comunicação no ensino de matemática, discute-se a sua importância na aprendizagem dos alunos e aprofunda-se o tema da comunicação escrita matemática, das diferentes representações e linguagens. Apresenta-se brevemente os temas “justificação” e “interpretação”. Por fim, descrevem-se as metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas durante a intervenção pedagógica.

No capítulo III, Intervenção, começa-se por definir as estratégias de investigação e avaliação da ação. De seguida, são apresentados os dados recolhidos na intervenção pedagógica, centrados na escrita matemática dos alunos, nas suas resoluções e justificação. São analisadas as suas produções escritas e os diálogos ocorridos entre os alunos durante a realização das tarefas de grupo.

Por fim, o capítulo IV, Conclusões, Implicações, Recomendações e Limitações. Apresenta e discute as principais conclusões do estudo, com vista a responder às questões de investigação que motivaram este estudo. São feitas referências às limitações deste estudo e são apresentadas algumas recomendações para estudos futuros sobre esta temática.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo é dedicado ao enquadramento contextual e ao enquadramento teórico relativos ao estudo realizado. Assim ele é composto por duas partes. Na primeira faz-se a descrição da turma e da escola onde o estudo decorreu, referindo as principais características que poderão ter influência no estudo. A segunda parte explora a literatura sobre este tema, resumindo as principais ideias dos autores revistos.

2.1 Contextual da intervenção

Neste subcapítulo, caracteriza-se a escola e a turma onde se desenvolveu a intervenção pedagógica centrada na comunicação escrita matemática e nas dificuldades dos alunos para justificar os seus resultados e ideias.

2.1.1 Caracterização da escola

Este estudo foi realizado numa escola secundaria/3, situada no concelho de Barcelos, no ano letivo de 2013/2014. A escola encontra-se numa zona habitacional perto do centro de Barcelos, com vista para um amplo espaço arborizado e para o Rio Cávado. A cidade é uma das cidades portuguesas com maior percentagem de jovens e é caracterizada por vários locais históricos, culturais e religiosos que nela se encontram, assim como, por um dos maiores símbolos turísticos portugueses, o "galo de Barcelos".

No último relatório de avaliação externa pode-se constatar que a escola é normalmente frequentada tanto por alunos da zona urbana onde está inserida, como por um grande número de alunos vindos de outras freguesias do concelho (Inspeção Geral de Educação, 2009).

Esta sofreu recentemente um processo de renovação, tendo as obras sido finalizadas antes do início do ano letivo, permitindo aos alunos usufruir plenamente, desde início, das suas instalações. A escola, é agora constituída por um bloco central, onde se encontram, estre outros espaços, a sala dos professores, a biblioteca, a direção e a secretaria. Este bloco possui ligação interior com os outros três blocos onde acontecem as aulas e com o pavilhão gimnodesportivo. Como resultado, tornou-se numa escola moderna e num espaço bastante agradável para se frequentar, com fácil acesso entre todos os espaços. Todos os blocos estão bem equipados para cobrir as necessidades dos alunos nas diferentes disciplinas, desde a existência de vários laboratórios até ao elevando número de computadores e projetores multimédia disponíveis para serem requisitados e usados na sala de aula.

A IGE avaliou, no seu relatório de avaliação externa de escolas, realizado em 2009, a escola com nível "bom" em relação aos resultados, à prestação do serviço educativo, à organização escolar, à liderança, à capacidade de autorregulação e à melhoria da escola. No mesmo relatório é referido que a população escolar ronda os mil e duzentos alunos, distribuídos entre vinte e duas turmas do ensino básico e trintar e três do ensino secundário. Cerca de 40% dos alunos era subsidiado pelos serviços de ação social, apenas 25% dos alunos dispunham de computador e internet em casa. Conhecia-se a profissão de 55% dos encarregados de educação, dos quais 43% eram operários, artífices e trabalhadores da indústria, 20% pertenciam a quadros superiores e dirigentes, 19% trabalhava nos serviços e comércio, 11% eram técnicos ou tinham profissões de nível intermédio, 6% eram trabalhadores não qualificados.

Da leitura do projeto educativo (2005) desta escola destaca-se o seu objetivo de "educar para os valores", que a escola tenta atingir incentivando os alunos a participar em todas as suas atividades escolares de forma a estimular a sua capacidade de autonomia, responsabilidade, sentido critico e espirito de abertura e criatividade. Assim, é normal, por exemplo, a promoção de visitas de estudo e intercâmbios estudantis para escolas estrangeiras.

A escola esforça-se por acolher bem toda a comunidade, organizando, para isso, várias atividades ao longo do ano, como por exemplo a semana aberta, onde salas temáticas oriundas de todas as áreas de ensino se abrem a alunos, internos e externos, tentando oferecer-lhes uma visão mais cativante das disciplinas.

É notório o esforço para responder às necessidades de todos os alunos, por exemplo, através do vasto leque de projetos, alguns deles na área da matemática, como por exemplo o MATxyz, no qual colaborei durante o ano letivo 2013/2014 no estágio ao qual se refere este relatório. Este projeto tem como objetivo ajudar os alunos do terceiro ciclo no estudo da matemática e surge da necessidade de prestar apoio especialmente aos alunos que demostram mais dificuldades. Os seus objetivos são garantir que todos os alunos do 3ª ciclo possam usufruir de apoio pedagógico acrescido, desde o início do ano letivo, prestar apoio diferenciado e mais individualizado aos alunos e atender aos diferentes ritmos de aprendizagem, já que estes são distribuídos por vários grupos, em função do seu nível de desempenho.

É de realçar o bom ambiente vivido entre os professores da escola, nomeadamente no grupo de matemática, que foi aquele que melhor conheci. É frequente a partilha de opiniões e de materiais, permitindo que os professores aprofundem a reflexão sobre as suas práticas de ensino e contribuindo para o enriquecimento da qualidade de ensino. O espaço dedicado ao grupo está muito bem servido, com uma grande leque de manuais escolares e materiais que vão sendo construídos e cujo uso é livre. Fui observando que os vários manuais são consultados na preparação de aulas, de forma a obter um conhecimento mais abrangente sobre os temas e as diferentes estratégias para os abordar.

2.1.2 Caracterização da turma

Um dos aspetos mais importantes para construir e pôr em prática o projeto de investigação é conhecer a turma na qual ele é desenvolvido. Como já foi dito, a intervenção pedagógica aconteceu numa turma do 10º ano de escolaridade da escola mencionada anteriormente. No momento da construção do projeto, faziam parte da turma 25 alunos, aos quais se veio a juntar, a tempo da intervenção pedagógica mais um aluno, que tinha estado a realizar um intercâmbio internacional no primeiro período do ano letivo, ao abrigo de um dos projetos da escola. Desses alunos, 11 eram raparigas e os restantes 15 rapazes, com uma média de idades de 14.9, que é a média esperada neste ano de escolaridade. Neste trabalho os alunos serão designados por A1, A2, ..., A26. Apenas se regista uma reprovação no historial da turma, quando um deles reprovou no 3º ano de escolaridade. Apenas um aluno afirma não ter acesso a computador e internet em casa. Relativamente a problemas de saúde não se regista nenhum problema grave, apenas 5 alunos com dificuldades de visão e 2 com alergias. Quase todos os alunos optam por ocupar os seus tempos livres a ver televisão ou no computador e mais de metade da turma acrescenta a prática desportiva à sua lista de passatempos. No 10º ano é obrigatório o uso da calculadora gráfica, no entanto um dos alunos passou o ano sem a conseguir adquirir. Relativamente à situação de emprego dos pais, a grande maioria tem ambos os pais empregados, sendo que dois alunos têm o pai desempregado e 5 a mãe desempregada.

Nas aulas de apoio estava inscrito apenas um aluno, dezasseis alunos dizem que a matemática é a sua disciplina favorita e dezassete afirmam que estudam todos os dias. Ainda assim, quatro alunos dizem que a matemática é a disciplina onde têm mais dificuldades. Os alunos desta turma estão muito habituados a trabalhar em grupo, o que só pode ser valorizado e aproveitado. Por isso mesmo pretendi continuar com essa organização de sala de aula durante as aulas referentes à minha intervenção. No geral, é uma turma bastante boa e interessada. Todos os alunos querem continuar os estudos até ao ensino superior e quase todos mostram o empenho necessário para tal, mostrando-se normalmente uma turma trabalhadora e participativa, salvo algumas exceções. A turma chegou ao final do ano com uma média geral na disciplina de matemática de 14,6 valores e não se registou nenhuma negativa.

No início e ao longo do ano, observei que vários alunos demonstram algumas dificuldades na comunicação matemática, nomeadamente, quando se lhes pede para explicarem os seus raciocínios ou escreverem as justificações. Este aspeto teve influência na escolha do meu tema e justifica em parte a pertinência do trabalho que desenvolvi.

2.2 Comunicação escrita matemática.

Este subcapítulo é dedicado à comunicação escrita matemática. Nesta secção apresenta-se um conjunto de ideias sobre a comunicação no ensino de matemática, discute-se a sua importância na aprendizagem dos alunos e aprofunda-se o tema da comunicação escrita matemática, das diferentes representações e linguagens. Aprofundam-se brevemente os temas "justificação" e "interpretação", que já vão sendo referenciados ao longo do enquadramento, mas que requerem atenção, devido à sua importância no estudo da comunicação escrita.

A comunicação no ensino de matemática

Hoje em dia, já não se procura que os alunos de matemática se tornem apenas máquinas de calcular, simplesmente repetindo, vezes sem conta, os algoritmos apreendidos para resolver exercícios. Tal como indica o programa de matemática para o ensino secundário (2001), existe mais para explorar, na sala de aula, incluindo algumas capacidades transversais, como é o caso da comunicação matemática. Na opinião de Santos (2005) foi o estudo sobre a resolução de problemas apresentado por Polya (1978) que rompeu com a ideia de uma metodologia de ensino de matemática baseada em exercícios mecânicos e atividades rotineiras, falando da resolução de problemas matemáticos como um processo dinâmico onde a comunicação entre alunos e professores assume um papel indispensável.

A capacidade de comunicação é tida como objetivo no currículo escolar de vários países, inclusive na disciplina de matemática. Ao longo deste capitulo vai-se tentar perceber o que se entende por comunicação e qual o seu papel na educação matemática.

Comunicação significa transmissão ou partilha de algo, tornar comum alguma informação. É através da comunicação que os indivíduos partilham diferentes informações entre si. No ensino da matemática, a comunicação é entendida por Santos (2005) como todas as formas de discursos e linguagens, utilizadas por alunos e professores para representar, informar, falar, argumentar e negociar significados. Vários autores enfatizam a sua importância como objetivo curricular e uma ferramenta muito útil no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Por exemplo, Lampert e Cobb (2003) referem que a comunicação em sala de aula pode ser vista como um objetivo curricular e, ao mesmo tempo, como uma metodologia de ensino, chamando a atenção, que estas duas vertentes não podem viver isoladamente, pois os alunos precisam de aprender a comunicar matematicamente, ao mesmo tempo que precisam de comunicar para aprender matemática. Por outras palavras, Menezes (2000) concorda, dizendo que a comunicação é ao mesmo tempo um meio e uma finalidade no ensino da matemática.

De facto, a comunicação vinha a ganhar espaço nos programas de matemática. Apesar dos últimos programas e metas não atribuírem qualquer importância explícita, tem ocorrido uma maturação gradual da ideia de que existe uma relação de dependência entre o conhecimento matemático e a sua linguagem própria e não se pode estar indiferente a essa evolução sob pena de afetar a aprendizagem dos alunos. Esta capacidade deve ser desenvolvida transversalmente durante todo o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Durante esse processo, a comunicação pode surgir de forma oral ou escrita, em qualquer situação onde o aluno sinta a necessidade de expressar as suas ideias ou interpretar e compreender as ideias dos outros. O desenvolvimento da comunicação matemática é essencial para que os alunos possam participar de forma construtiva nas discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos (PMEB, 2007).

Importância da comunicação na aprendizagem da matemática

Existem várias razões que justificam a importância de desenvolver a capacidade comunicativa dos alunos de matemática, em especial, da escrita, que é o objeto de estudo neste relatório. Por exemplo, Sandra Santos (2005) refere que a linguagem escrita tem o poder de atuar como mediadora na construção de conhecimento, a partir das experiências individuais e coletivas dos alunos, tendo em vista a apropriação dos conceitos que surgem na aula de matemática. Freitas (2006) reforça, afirmando que a escrita obriga o aluno a refletir sobre a sua própria aprendizagem, produzindo assim outros sentidos para a matemática. Sempre que lhe é pedido para escrever, o aluno necessita de refletir de forma crítica sobre o próprio pensamento e experiências matemáticas, assumindo uma postura ativa no seu processo de aprendizagem, ou seja, fazendo uso de uma pedagogia construtivista. Pimm (1999) e Smole e Diniz (2001) enfatizam esta ideia quando afirmam que uma comunicação eficaz na sala de aula provoca a reflexão do aluno e permite-lhe construir esquemas mais elaborados de pensamento e ações, que lhes permitem aprender com mais qualidade e profundidade. A produção de textos pode ser, como defende Cândido (2001), um poderoso meio de criação de redes de significados, que favorece a compreensão dos conhecimentos e procedimentos matemáticos. O NCTM partilha desta opinião, referindo a comunicação escrita como forma de "ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento, uma vez que os obriga a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca das noções desenvolvidas na aula" (2007, p. 67). Neste sentido, deve ser incentivada com alguma regularidade a realização de trabalhos onde os alunos precisem de ler e escrever sobre matemática, por exemplo, trabalhos escritos normalmente designados por composições matemáticas ou relatórios matemáticos (Ministério da educação, 2001). O desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos é considerado um importante objetivo curricular também na opinião de Sousa e Cebolo (2001), que defendem que deve ser exigido que os alunos procurem explicitar os seus raciocínios com clareza. Lê-se no programa de matemática (2001, p.12) que os trabalhos escritos "devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspeto gráfico cuidado".

Adu-Gyamfi, Michael e Faulconer (2010) são da opinião de que os estudantes aos quais são dadas oportunidades e encorajamento para falar, escrever, ler e ouvir na aula de matemática beneficiam duplamente na sua aprendizagem, por um lado, comunicam para aprender matemática e, por outro, aprendem a comunicar matematicamente. Desenvolver uma comunicação em sala de aula que ofereça aos alunos tais possibilidades, pode, segundo Fernandes (2007), impulsionar a desejada mudança na realidade do ensino de matemática, substituindo o paradigma da transmissão pelo paradigma da interação, sendo que para o autor, é o professor o grande promotor do desenvolvimento da comunicação matemática nos alunos.

A comunicação escrita é provavelmente a ferramenta mais comum e mais importante nos momentos de avaliação. É preciso fazer uso dela durante os testes escritos, pois, segundo Menezes (2000) não faz sentido avaliar os alunos em algo que não foi trabalhado nas aulas. Mas a comunicação escrita é também essencial para que os professores se apercebam dos progressos e das dificuldades dos alunos, e decidam, a partir daí, o que devem fazer para melhor satisfazer as suas necessidades (Fernandes, 2005). Barbosa, Nacarato e Penha (2008) observam que a comunicação escrita tem vindo a desempenhar um importante papel na avaliação da aprendizagem dos alunos, pois facilmente o professor percebe, a partir dos textos matemáticos dos alunos, se houve apropriação dos conceitos trabalhados e que significados lhes foram atribuídos.

A comunicação escrita matemática

Este trabalho foca-se essencialmente na comunicação escrita dos alunos. No entanto, é também preciso ter sempre presentes dois aspetos, os quais se tem inevitavelmente de considerar quando se pensa neste tema. O primeiro é que a comunicação escrita e a comunicação oral estão necessariamente interligadas, confundindo-se muitas vezes dentro do conceito geral de comunicação. O outro é a importância do papel que o professor desempenha no desenvolvimento desta capacidade. Santos (2005) observa que se torna interessante perceber qual o lugar-chave que o professor ocupa na gestão destas várias interações, orais ou escritas, que vão ocorrendo e de que modo as potencializa para melhor desenvolver as capacidades dos alunos, matemáticas ou comunicativas.

Em sala de aula, a comunicação pode ocorrer de formas diferentes, podendo haver comunicação do professor para os alunos, dos alunos para o professor e ainda entre os próprios alunos, tudo isto oralmente, ou através da escrita. A oralidade serve de suporte ao pensamento matemático, mas a escrita, incluindo todas as suas representações, tem um papel fundamental para complementar o processo de ensino-aprendizagem da matemática. A utilização das duas ajudará os alunos a refletirem sobre a compreensão da disciplina e dos seus conceitos (Ponte et al, 2007). Assim, segundo os autores, é requerido cada vez mais aos alunos que realizem trabalhos escritos e que expliquem o seu raciocínio por escrito, admitindo no entanto que na prática as produções escritas dos alunos mostram-se normalmente bastante pobres, pois reduzem-se aos cálculos necessários à resolução da tarefa proposta. A maioria dos alunos mostra resistência à escrita. As maiores dificuldades demostradas são a conversão do pensamento em palavras, mais concretamente, a escolha das palavras, a organização das frases e o encadeamento de ideias. Carvalho e Pimenta (2005) chamam mesmo a atenção de que muitas vezes o insucesso não resulta da falta de conhecimentos, estando mais relacionado com a incapacidade de os verbalizar. Os alunos precisam da ajuda dos professores para desenvolver esta capacidade de comunicar matematicamente por escrito. Estes devem ajudar os alunos a serem mais precisos e organizados, interpretando cuidadosamente o que estes sabem, a partir do que dizem ou escrevem (NCTM, 2007). É importante que sejam valorizadas as produções dos alunos, que se procure conhecer o que eles escrevem, dando oportunidades para a partilha de resoluções e, valorizando os processos de construção e não apenas os produtos (Sousa & Cebolo, 2009). Para estes mesmos autores a comunicação matemática deve ser desenvolvida na sala de aula, através de produções escritas dos alunos e da explicação das mesmas.

Segundo Bandeira (2009) a valorização da representação escrita possibilita provocar o pensamento matemático dos alunos, e com o tempo, permite-lhes reconhecer os conceitos matemáticos e passar a utilizá-los no seu quotidiano. Smole (2001) concorda com esta ideia e acrescenta que a produção de texto pode ainda fornecer ao professor importantes informações sobre o nível de compreensão dos conteúdos matemáticos, pois essa compreensão está intimamente ligada à capacidade de comunicá-lo. Ponte, Boavida, Graça e Abrantes referem, em 1997, que as produções escritas produzidas pelos alunos quando tentam resolver problemas, investigar ou construir algum projeto, podem ser uma importante forma de aprendizagem, assim como um elemento significativo de avaliação.

Da mesma forma que é preciso treino para se falar bem, também é preciso bastante treino para se aprender a escrever matemática. O exercício da escrita é aperfeiçoado com a prática: quanto mais os alunos escreverem, mais fluentes se tornarão, ao mesmo tempo que ampliarão a sua aprendizagem enquanto escrevem (S. Santos, 2005). Tal como na comunicação em geral, também a escrita favorece a descoberta de conhecimento e o estabelecimento de conexões. A linguagem escrita atua como mediadora entre as experiências individuais e a apropriação dos conceitos abstratos estudados. A escrita é potencializadora da construção do conhecimento, atuando como um catalisador para uma maior compreensão da linguagem utilizada em sala de aula. Possibilita ao aluno explicitar as suas conceções e valores relativamente à matemática.

Para que os alunos possam desenvolver de forma eficaz a sua capacidade de escrita é fundamental que seja dado o devido feedback às suas produções escritas. Os alunos devem ter a oportunidade de verem as suas ideias serem captadas, examinadas, usufruindo de um feedback bem refletido e estruturado. É necessário que os alunos sejam encorajados a reconsiderar e aprofundar os seus conhecimentos. Segundo Barbosa, Nacarato e Penha (2008) a análise das tarefas escritas realizadas pelos alunos exibem evidências do nível de elaboração conceitual dos alunos, assim como alguns indícios acerca do relacionamento entre o aluno, a disciplina e as atividades da sala de aula. A partir da observação das produções escritas dos alunos pode inclusivamente ser feita uma reflexão sobre as práticas de ensino, de forma a alterar planificações se tal se mostrar necessário, tendo em vista uma melhor aprendizagem dos alunos em futuras aulas. Sandra Santos (2005) refere que "uma tarefa escrita bem pensada pode fornecer um feedback valioso ao professor, sobre a aprendizagem dos alunos, sobretudo numa aula em que a turma esteve muito passiva ou muito agitada". A escrita está ao serviço de uma avaliação que "não deverá ser meramente feita aos alunos; mas pelo contrário, ela deverá ser feita para os alunos, para os orientar e melhorar a sua aprendizagem" (NCTM, 2007, p.23). Estes precisam que as avaliações os ajudem a melhorar o que sabem e também a comunicar melhor o que sabem, estimulando-os e motivando-os para a aprendizagem da matemática."Toda a regulação pedagógica faz-se através de um processo de comunicação, seja este feito através de um diálogo presencial, seja por escrito, nesse caso através de anotações, isto é por uma escrita avaliativa ou feedback" (Santos, 2006, p.1).

Adu-Gyamfi, Michael e Faulconer (2010) chamam a atenção de que escrever matemática requer dos alunos capacidades diferentes e adicionais, em relação à escrita em outras disciplinas, que devem ser desenvolvidas durantes as aulas. Os alunos devem ganhar o domínio sobre as várias representações matemáticas: numérica, simbólica, gráfica e verbal. Devido às dificuldades que se observam, em sala de aula, onde existem muitos casos de alunos com pouco domínio de linguagem matemática, adivinha-se que estes alunos terão sempre muitas dificuldades para entender e resolver os vários problemas matemáticos com os quais se deparam durante as aulas. O domínio da linguagem matemática influencia também no momento de ler os enunciados. Uma das razões para as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas parece estar relacionada com a leitura e interpretação dos enunciados, escritos com a linguagem específica da matemática.

Apesar de também se poder comunicar matematicamente utilizando a língua natural, é a escrita matemática simbólica que universaliza a comunicação matemática. Os alunos precisam de perceber a necessidade das definições exatas e ganhar gosto pelo poder comunicativo dos termos matemáticos convencionais (NCTM, 2008, p.70). Mas é preciso que a linguagem rigorosa e o seu formalismo devem surgir da necessidade pelo seu uso e não ser imposta, sem dar justificação. É importante proporcionar aos alunos, em primeiro lugar, o desenvolvimento da comunicação através das suas próprias palavras (Sousa & Cebolo, 2009), de forma a ultrapassar as dificuldades que eles sentem para ler e escrever na aula de matemática, para evitar que a abundância de símbolos os impeça de compreender o que está escrito, de escrever o que sabem, ou pior, de fazer matemática (Carrasco, 2000, p. 192).

A Linguagem matemática e as suas representações

Vários autores refletem sobre a forma de comunicar matematicamente e referem-se nos seus trabalhos à forma como os alunos comunicam nas aulas de matemática. Neste subcapítulo vai-se explorar um pouco o que cada um destes autores defende em relação à linguagem matemática e às representações utilizadas pelos alunos de matemática.

A linguagem matemática de que se fala é um sistema simbólico e formal, cujo domínio está associado à construção do conhecimento matemático (Santos, 2005). Pode-se dizer que dela faz parte um conjunto de símbolos, próprios e codificados, comuns à comunidade matemática, que os utiliza para comunicar (Menezes, 2000). A linguagem é referida pelo mesmo autor como um "meio utilizado por uma comunidade para transmitir mensagens" (Menezes, 2000, p. 3). Pode ser dito, em relação à matemática, que ela própria é a língua universal da ciência e que faz uso de uma linguagem própria, permitindo a comunicação entre os que a estudam (Corrêa, 2005). O conceito de linguagem matemática surge muitas vezes associado ao conceito de comunicação matemática, sendo caracterizada por Pirie (1998, p. 8) como "o mecanismo através do qual os professores e os alunos procuram, em conjunto, expressar a sua compreensão matemática". A linguagem tem, como ponto de partida e de chegada, a comunicação, considerando-se que possui uma raiz social e comunicativa, que lhe confere a capacidade de traduzir o raciocínio, realizar trabalhos de grupos, conhecer e intervir em situações socioculturalmente abertas. Além de ser um fator de desenvolvimento intelectual do aluno, é também um instrumento fundamental na sua formação social (Corrêa, 2005). Para Cabrita e Fonseca (2012) a comunicação matemática é indissociável da linguagem matemática. Nas aulas de matemática a comunicação escrita torna-se difícil, pois a linguagem matemática engloba, além da língua materna, uma linguagem específica, a linguagem simbólica matemática, que os alunos precisam de aprender a usar. Segundo Ntenza (2006) a escrita nas aulas de matemática pode ser caracterizada de duas formas: escrita simbólica, composta por símbolos e escrita matemática, onde a matemática é transmitida através de palavras na língua materna.

Quando se escreve matemática recorremos muito frequentemente ao uso de símbolos. De facto, a linguagem matemática é constituída por um vasto conjunto de símbolos, podendo-se, por isso, afirmar que a matemática possui uma escrita simbólica específica. Coura (2008) caracteriza a linguagem matemática pela tentativa de abstrair as relações matemáticas e por potencializar generalizações das conclusões e resultados, conferindo-lhes um elevado nível de formalidade, diferenciando-se assim das linguagens naturais. É com a ajuda dos símbolos que se torna possível converter os conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis. Para Klusener (2003) a linguagem simbólica é uma ferramenta comunicativa que permite falar da matemática como sendo uma linguagem universal.

O mesmo autor defende, no entanto, que o pensamento ocorre em palavras e não em símbolos. Assim será importante possibilitar ao aluno o desenvolvimento dos conceitos matemáticos através da língua materna e só depois utilizar a linguagem simbólica. Também Carrasco (2003) defende esta mesma ideia, pois segundo ele, os alunos antes de conseguirem usar uma linguagem formal precisam de conseguir falar e escrever sobre matemática utilizando a linguagem natural. Assim é recomendável o uso da linguagem natural como primeiro passo para a compreensão das teorias matemáticas. O termo "escrita matemática" é empregue por Ntenza (2004) para se referir a estruturas gramaticais e formas de argumentação, onde a língua materna é utilizada para transmitir as ideias matemáticas, contrastando com a escrita simbólica que é constituída por símbolos e vocabulário específico, como foi visto anteriormente.

Na prática, em sala de aula, várias vezes, surge a necessidade de recorrer simultaneamente a palavras na língua materna e aos símbolos matemáticos quando os intervenientes da aula precisam de comunicar qualquer ideia. Fala-se assim de textos híbridos, constituídos principalmente por palavras, que dão significado ao texto e permitem transmitir e compreender a matemática, que aparecem misturadas com alguns símbolos. Assim, de acordo com Menezes (2000) a linguagem matemática é hibrida pois resulta da mistura da linguagem simbólica matemática com a linguagem natural, neste caso o português.

No processo de escrita, onde recorrem à linguagem matemática, os alunos fazem uso de vários tipos de representações. Assim, pode-se dizer que a linguagem matemática é composta por representações de vários tipos que permitem aos indivíduos, em especial, aos alunos, representar as suas ideias matemáticas, por exemplo, através de símbolos, palavras, desenhos ou gráficos. Goldin (2003) caracteriza as representações por um conjunto de sinais, caracteres, ícones ou objetos que substituem algo. As representações ajudam os alunos na comunicação de pensamentos e ideias aos seus pares. Segundo Martins (2012) são consideradas ferramentas essenciais à aprendizagem da matemática, pois através delas têm a oportunidade de representar ideias (e utilizá-las), sendo assim prestado um grande auxílio à capacidade de pensamento matemático dos alunos (NTCM, 2007).

As representações são separadas por Duval (2003) em categorias entre as quais: língua natural (quando se representa uma ideia matemática através das palavras na língua materna), escritas algébricas e formais (quando a ideia é representada por símbolos, números, letras ou sinais), figuras geométricas e, representações gráficas. Menezes (1999) fala ainda de uma forma de expressão pictórica, quando se recorre, por exemplo, a gráficos, diagramas ou desenhos (Menezes, 1999).

Neste trabalho, para efeitos de análise dos dados recolhidos vai ser considerado que a linguagem matemática é uma linguagem hibrida composta pela língua materna e pela linguagem simbólica matemática. Ou seja, os alunos, quando escrevem, fazem uso da linguagem matemática recorrendo, às representações, que serão distinguidas por: representações simbólicas, que dizem respeito ao uso da simbologia matemática; representações verbais, que é a língua materna utilizada pelos alunos para transmitirem uma ideia matemática; representações icónicas e representações gráficas, que aparecem quando os alunos utilizam imagens ou gráficos, para comunicar com o professor ou colegas.

Ponte e Serrazina (2000) são da opinião que as representações usuais da matemática têm um papel importante, mas acrescentam que é mais vantajoso que, primeiramente, os alunos façam uso de representações próprias. O NCTM (2007) partilha desta opinião, considerando que devem ser dadas oportunidades aos alunos para usarem as suas próprias representações, permitindo-lhes a compreensão das relações matemáticas, a comunicação de ideias, identificação de conexões e aplicação da matemática a problemas de contexto real. Este tipo de representações podem ser pouco precisas, mas dão um forte apoio à compreensão e resolução de problemas, além de funcionarem como ponto de partida para a utilização de outras representações ditas convencionais.

É importante que os alunos conheçam e saibam como usar cada representação. Este conhecimento permitirá ao aluno escolher qual a melhor forma de transmitir o que pretende. Os alunos devem ter a oportunidade de usar os vários tipos de representações durante a resolução de tarefas para perceber a sua natureza e o seu valor na matemática, aprendendo a escolher qual é preferível em relação a outra, em cada situação (Bishop & Goffree, 1986). Duval (2003) refere ainda que a variedade de representações utilizadas no ensino-aprendizagem da matemática ajuda o professor a conhecer a forma de pensar, dos alunos, sobre um conceito ou uma relação.

Interpretação

Ao longo deste relatório fala-se de como os alunos comunicam matematicamente por escrito, como justificam e explicam as suas ideias por escrito quando realizam uma tarefa matemática. Mas para que os alunos cheguem a essa fase, tem de passar pela etapa de interpretação dos enunciados das tarefas, que pode por vezes provocar dificuldades e influenciar a forma com os alunos escrevem ou resolvem as tarefas. A leitura está intimamente relacionada com a escrita (Menezes, 1996) e a capacidade de interpretação é um requerimento para a literacia matemática (Moje et al, 2004). A interpretação de um enunciado implica o conhecimento da linguagem (Costa, 2007) e pode, assim, dar um sinal sobre a capacidade de comunicação escrita de cada aluno. Para Martins (2012), para avaliar a capacidade comunicativa dos alunos na aula de matemática é preciso perceber se eles têm a capacidade de compreender e interpretar ideias apresentadas por escrito. Também Polya (1995), na sua reflexão sobre a resolução de problemas enfatiza o papel da interpretação pois, segundo ele, uma das etapas durante tais resoluções é a compreensão do problema e do seu enunciado. A interpretação e leitura são então capacidades básicas que os alunos precisam de desenvolver para poderem comunicar com eficácia e são hoje vistas como um objetivo geral do ensino de matemática (Guerreiro, 2011). É através da leitura que se aprende a compreender as diferentes formas de linguagem e se cria autonomia na aprendizagem.

É vulgar dizer que os alunos apresentam dificuldades na leitura e interpretação dos problemas. Estas dificuldades estão associadas à pouca competência de leitura, que pode ter consequências na aprendizagem dos alunos. Costa (2007) refere que, dificuldades relacionadas com a linguagem escrita levam os alunos a desistir e que muitas das vezes a dificuldade é apenas perceber o enunciado das tarefas. A matemática tem algumas especificidades, pois a sua linguagem é constituída por uma série de termos e sinais específicos da disciplina. Nos textos matemáticos, cada símbolo carrega a sua informação e é compreendido segundo as rigorosas convenções matemáticas (Wilson, 2011). Para Duval (2006), a passagem de uma ideia de uma representação para outra, por exemplo, da representação simbólica para a língua materna, é uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos.

Os alunos precisam de ser familiarizados com os significados destes símbolos e termos, de forma a poder perceber o sentido e compreender o significado durante as leituras de enunciados e expressões. Segundo Wilson (2011), a linguagem matemática várias vezes põe os alunos numa posição de obedecer aos comandos implícitos da simbologia matemática e, é essencial ter o domínio sobre esta linguagem, pois é a principal ferramenta utilizada pelos matemáticos para resolver a maior parte dos problemas matemáticos.

Justificação

Hoje em dia, observa-se na educação maior preocupação com a compreensão e o raciocínio dos alunos, capacidades que podem ser desenvolvidas apelando à justificação e argumentação nas atividades matemáticas (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Já aqui foi visto que, tanto o programa de matemática para o ensino secundário (2001) como o NCTM (2007) dão indicações aos professores para que estes peçam frequentemente aos alunos que realizem tarefas onde seja necessário explicar, justificar e argumentar. Uma das razões para tal é a necessidade dos alunos interagirem mais no processo ensino-aprendizagem enquanto participantes ativos, aprendendo a comunicar uns com os outros e com o professor. Para que isso aconteça, é preciso que lhes seja dado tempo para, entre outras atividades, pensar e justificar as suas ideias.

Adams e Pegg (2012) apontam a justificação como uma das atividades que mais desenvolve a escrita no ensino de matemática. Pretende-se que os alunos expliquem e justifiquem as suas soluções e as suas formas de pensamento, para que melhor compreendam a matemática, ideia que Domingos (2005) insere nas normas socias do ensino da disciplina. Do recurso à justificação é que se retira grande vantagem para a aprendizagem dos alunos. Para Draper (2010), o conhecimento em matemática é gerado através da prova e da justificação, utilizando as leis da matemática e a lógica para lhes dar sentido. Ao pedir-lhes para escrever um texto coerente durante alguma tarefa está-se a pedir para transmitir ao leitor exatamente aquilo que está a pensar. Este tipo de atividade obriga os alunos a refletir globalmente sobre as tarefas realizadas, a forma como as abordam e sobre as relações entre as principais ideias matemáticas envolvidas, podendo assim originar mais reflexão do que uma tarefa onde se pede apenas uma resposta direta. Na opinião de Adams e Pegg (2012), escrever justificações requer reflexão e clarificação dos pensamentos, o que pode ajudar os alunos a consolidar a sua forma de pensar. Ponte et al (2007) defendem que a construção de significados acontece à medida que os alunos falam ou escrevem sobre matemática, usando a linguagem para expressar os seus pensamentos.

Algumas das dificuldades dos alunos de matemática surgem da fragilidade de construir uma justificação coerente e exibir uma reflexão sobre os seus próprios raciocínios, quando a tarefa a realizar o pede. Por exemplo, os alunos até podem facilmente formular uma conjetura, mas normalmente, verifica-se que não é fácil para eles justificar a formulação da mesma. É preciso ter a capacidade de estabelecer uma ligação entre o próprio conhecimento e o que se pretende justificar (Magalhães & Martinho, 2010). Estas dificuldades podem ser atenuadas com trabalho na sala de aula. As mesmas autoras defendem que as atividades que procurem promover e estimular a argumentação têm o poder de responsabilizar os alunos para fundamentar os seus pensamentos e procurar o "porquê" dos resultados apresentados. As atividades de investigação são das que melhor desempenham este papel na aprendizagem dos alunos.

A metodologia de justificação pode ser uma importante ferramenta no ensino de matemática, na medida em que permite adquirir o "conhecimento do porquê" além do conhecimento dos conteúdos (Magalhães & Martinho, 2010).

2.3 Metodologias de ensino e aprendizagem

Toda a recolha de dados efetuada no âmbito desta pesquisa foi realizada em ambiente de sala de aula. Para atingir os objetivos pretendidos para uma aula é essencial que se reflita sobre as práticas de ensino e se planeie cuidadosamente a aula.

Os dois aspetos que mais influenciaram os momentos da recolha de dados durante a intervenção pedagógica supervisionada realizada foram a seleção de tarefas adequadas ao estudo e a organização em grupos que foi aplicada, não só na realização das tarefas analisadas, mas também em praticamente todas as aulas que orientei.

O *tipo de tarefas* propostas aos alunos é um dos mais fortes condicionantes da educação matemática. Quando se pretende provocar algum tipo de comunicação ou interação no desenvolver das atividades dos alunos, é necessário que o professor faça uma escolha criteriosa das tarefas a aplicar. Devem ser escolhidas as tarefas que mais estimulem os seus alunos. As categorias pelas quais são dispostas as tarefas hoje em dia são: exercícios, problemas, explorações e investigações. Ponte (2005) organiza as tarefas segundo o seguinte quadro:

Figura 1. Esquema de tarefas

Para proporcionar aos alunos a oportunidade de comunicar, as tarefas mais indicadas são aquelas que estão centradas na resolução de problema ou na investigação, pois são as de maior grau de exigência e as que mais incitam os alunos a questionar, segundo Sousa e Cebolo (2009).

A escolha das tarefas por si só não dá garantia que serão recolhidos os frutos pretendidos da atividade, há também que ter em atenção a forma como ela é explorada, pois aspetos como o tempo disponibilizado ou a organização pela qual se dispõe a sala podem influenciar. Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha e Portela (2008) defendem que uma tarefa rica do ponto de vista matemático pode perder o seu sentido se não for dado o devido tempo e lugar que permita os alunos explorar, discutir, argumentar e tirar conclusões.

Matos e Serrazina (1996) concluem que o *trabalho de grupo* pode potencializar a reflexão e aumentar a discussão entre os alunos aumentando a eficácia educativa das atividades de resolução de problemas. Várias vantagens são apontadas à organização de grupos durante as aulas de matemática, entre as quais as necessidades sentidas pelos alunos de refletir sobre os próprios conhecimentos quando precisam de explicar o seu raciocínio aos colegas de grupo.

Esta metodologia requer um maior esforço e atenção por parte do professor, mas tal como defende Fernandes (2007) a realização de tarefas em grupo permite gerar discussões que facilitam o desenvolvimento do processo de raciocínio dos alunos. Deve-se, no entanto, ter sempre em atenção quando e como deve intervir, de forma a não condicionar o raciocínio ou o espírito crítico dos elementos do grupo, sendo talvez esta a grande dificuldade sentida no processo de comunicação entre alunos e professor.

CAPÍTULO III
INTERVENÇÃO

Neste capítulo, dividido em duas secções, apresenta-se a análise dos dados recolhidos na intervenção pedagógica. A primeira secção diz respeito à descrição das estratégias utilizadas na recolha e avaliação da ação, a segunda à análise dos dados em si. Esta última está dividida em subsecções, uma para cada tarefa e outra ainda relativa à ficha de avaliação por partes.

3.1 Estratégias de avaliação da ação

O objetivo deste trabalho passa por desenvolver nos alunos a capacidade de escrever matematicamente, explicitando os seus raciocínios e recorrendo à linguagem matemática para justificar as suas respostas. Serão pedidas aos alunos várias produções escritas, ao longo da intervenção. Com este estudo, pretende-se responder às seguintes questões:

Q1: Como é que os alunos escrevem e organizam o seu raciocínio, quando justificam as respostas?

Q2: Que dificuldades revelam na escrita matemática? Qual o tipo de linguagem com que os alunos se sentem mais à vontade?

Q3: Como evoluem os alunos nas suas justificações e na escrita matemática ao longo das várias tarefas escritas realizadas?

Para atingir os objetivos propostos, as estratégias utilizadas foram a observação e a análise documental. A observação foi realizada através da análise de vídeos e áudios que foram gravados ao longo das aulas em que era pedido aos alunos a realização de tarefas escritas. Em cada uma dessas aulas era colocada uma câmara de vídeo ou um gravador de áudio em 3 grupos, previamente selecionados, de acordo com as características dos seus elementos, após discussão entre o grupo de estágio. A escolha baseou-se em dois critérios: que os grupos escolhidos apresentassem um nível de desempenho diferente de grupo para grupo e que revelassem um bom nível de interação entre os seus elementos para enriquecer a posterior análise. Os documentos elaborados pelos grupos em cada uma das tarefas foram também recolhidos e alvos dessa mesma análise.

Pretendendo compreender como se processa a comunicação escrita dos alunos, foram pedidas aos alunos várias produções escritas, enquadradas no tema de funções da turma do

10º ano de escolaridade. Tinham como objetivo alimentar a analise que procura perceber como os alunos escrevem, como se processa a construção do texto e quais as dificuldades sentidas na escrita. O tipo de tarefas propostas foi, essencialmente, constituído por problemas, nos quais foi solicitada a justificação de todos os procedimentos efetuados.

3.2 Analise dos dados recolhidos na intervenção

Como referido, foram recolhidas 3 tarefas escritas com o propósito de analisar a comunicação escrita dos alunos. Todas as tarefas foram feitas em grupo, existindo gravações vídeo e áudio. Com essas gravações pretende-se perceber de que forma discutem os alunos sobre o que devem incluir ou não na resolução escrita que devem entregar no final da atividade. Foram ainda usadas as respostas a uma ficha de avaliação por partes realizada no final da intervenção pedagógica, que foi construída com o cuidado de perceber o domínio dos alunos sobre a escrita matemática.

No total eram 6 grupos, que se mantiveram em todas as tarefas e, que já trabalham com esta disposição normalmente, durante todas as aulas dedicadas à prática. Os grupos são designados por G1, G2, ..., G6. Cada grupo tem entre 4 e 5 alunos. Os alunos serão designados por A1, A2, ..., A26, sendo apenas uma parte deles referida neste trabalho. Os alunos foram distribuídos como mostra o esquema da figura 2.

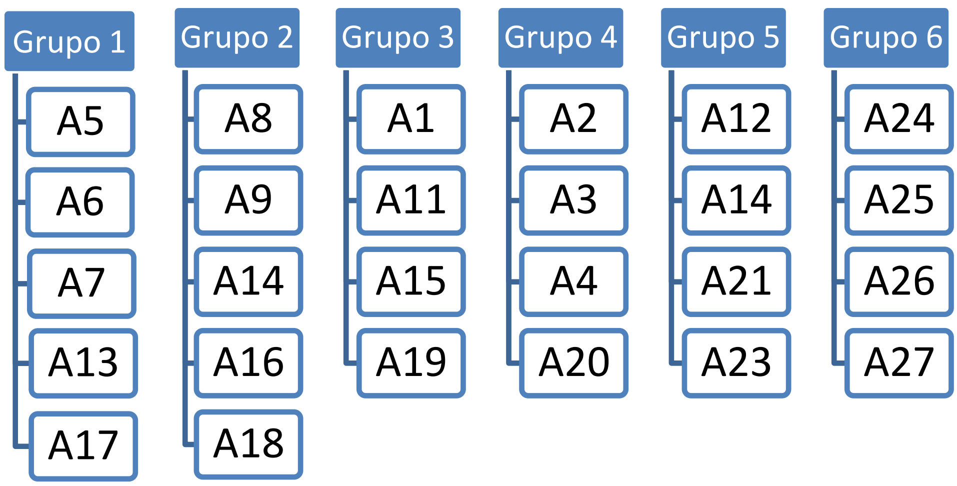


Figura 2. Esquema de distribuição dos alunos por grupo.

Os grupos selecionados para serem gravados foram inicialmente o grupo 1, 3 e 4. A partir da segunda tarefa o grupo 3 foi substituído pelo grupo 2 pois não havia interação suficiente para se proceder à análise. Foram recolhidas as resoluções de todos os grupos e todas foram analisadas e comparadas com as resoluções individuas na ficha de avaliação por partes.

3.2.1 Tarefa 1

A primeira tarefa escrita (figura 3) foi solicitada aos alunos na primeira aula da intervenção. A aula tinha como objetivo recordar o conceito de função e explorar algumas representações gráficas das funções. A tarefa foi introduzida no início da aula, partindo do princípio que pelo menos alguns alunos se recordariam do que é uma função. Foi pedido aos alunos para formar os grupos habituais e que cada grupo observasse quatro diagramas que foram projetados, reprensentando correspondências unívocas ou correspondências não unívocas. O objetivo da tarefa era que para cada diagrama, os grupos elaborassem um pequeno texto justificando se o diagrama representa ou não uma função. Deveriam ainda, no final, a partir dos resultados anteriores, tentar escrever uma possível definição para função. O enunciado pode ser observado na figura 3.

Na resolução dos alunos deveria ser dito que o diagrama “b” não pode representar uma função pois um dos elementos do conjunto de partida não tem correspondência no conjunto de chegada. O diagrama “c” também não pode representar uma função, pois, a um dos elementos do conjunto de partida correspondem dois elementos do conjunto de chegada. Nos diagramas “a” e “d” a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de de chegada, logo, ambos podem representar funções. Para definir função teria de referir que uma função é uma correspondencia entre dois conjuntos, onde a cada elemento do conjunto de partida (objeto) corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada (imagem).

Apesar de parecer uma tarefa relativamente rápida de realizar, os alunos demoraram imenso tempo na sua elaboração. Nas gravações observa-se que os alunos em geral perderam muito tempo com conversas paralelas, havendo apenas alguns curtos momentos onde discutiam um pouco sobre a tarefa e sobre o que escrever.

Quais dos seguintes diagramas representam funções? Elabora um pequeno texto, explicando a razão pela qual cada uma das relações é ou não função. Após a identificação escreve uma definição para função.

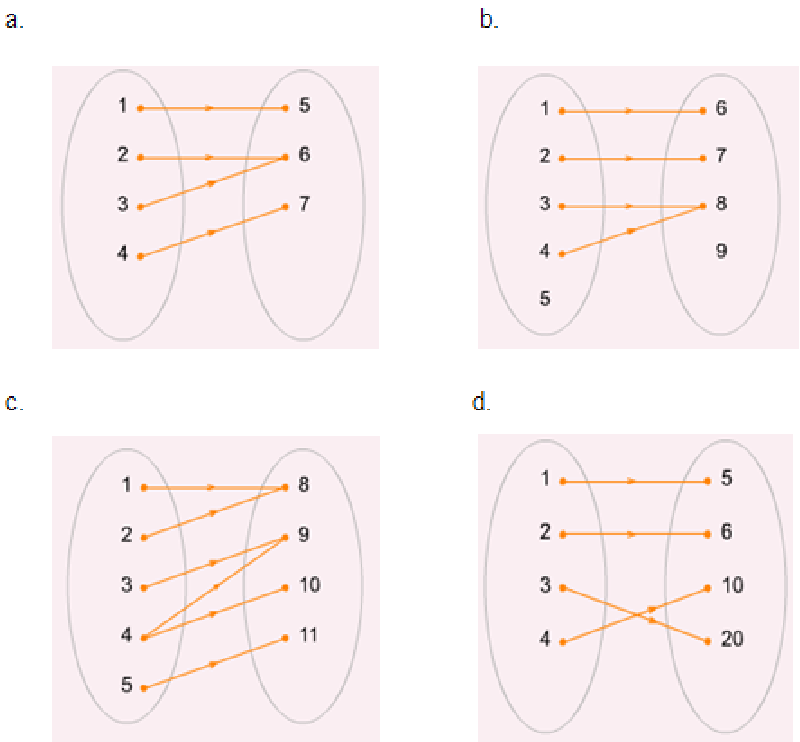


Figura 3. Enunciado da tarefa 1.

Todos os grupos escolheram corretamente quais os diagramas que podem representar e quais os que não podem representar uma função, variando um pouco apenas na justificação que deram. A interação entre os elementos dos grupos observados foi reduzida, salvando-se poucos momentos onde eles discutiam sobre o que escrever, pois normalmente um dos elementos ia escrevendo e só depois perguntava aos colegas se estava tudo bem. Apesar disso, esses poucos momentos contribuiram para retificar ideias erradas de alguns elementos e construir melhor as respostas. Durante a tarefa, a ajuda do professor foi solicitada várias vezes, o que parece ter sido essencial ao sucesso de alguns grupos. Por exemplo quando os elementos do grupo 3 pediram ajuda:

A1: Professor, a cada imagem corresponde um e um só elemento ou objeto? Ou é a cada objeto que corresponde uma e uma só imagem?
Professor: Qual achas que é?
A1: Parece-me a segunda mas não tenho a certeza. Está certo?
Professor: Sim.

Nenhum grupo recorreu à linguagem simbólica, aliás, como seria de esperar, pois era a primeira aula sobre funções e não tinha havido tempo de recordarem e se ambientarem aos símbolos referentes às funções. Assim, todos eles recorreram à representação verbal, sendo que o grupo 2 utilizou também uma representação pictórica, como se analisará mais a frente neste capítulo (figura 6).

O grupo 1 respondeu corretamente, indicando "a" e "d" como os diagramas que podem representar funções, e justificando que cada um dos objetos corresponde a uma só imagem. No entanto, existe alguma confusão com os conceitos na justificação de os diagramas "b" e "c" não poderem representar funções, nomeadamente os conceitos "objeto e imagem", que não foram aplicados corretamente, pois fazem parte da terminologia referente às funções, referindo representações que na verdade não correspondem a funções.

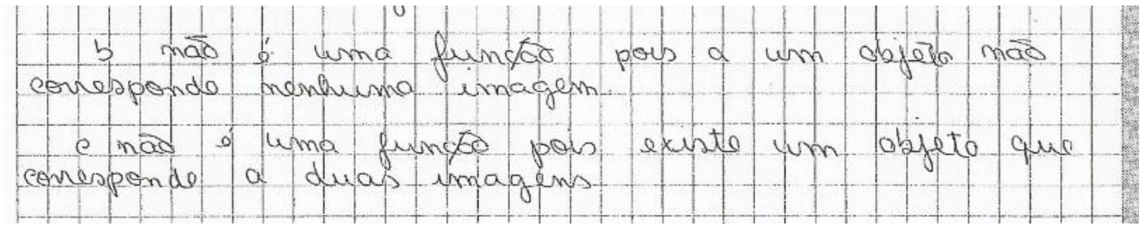

b não é uma função pois a um objeto não corresponde nenhuma imagem.
c não é uma função pois existe um objeto que corresponde a duas imagens.

Figura 4. Resolução da tarefa 1 pelo grupo 1.

A definição apresentada por este grupo é coerente, referindo todos os aspetos obrigatórios e ainda referindo que é uma correspondência. No entanto, definição, não está muito clara, dado que faltam algumas palavras que dariam mais sentido à frase, como se observa na figura 5. Falham ainda quando dizem que uma função é uma correspondência entre "um objeto e uma só imagem", quando na verdade é uma correspondência entre vários elementos de dois conjuntos.

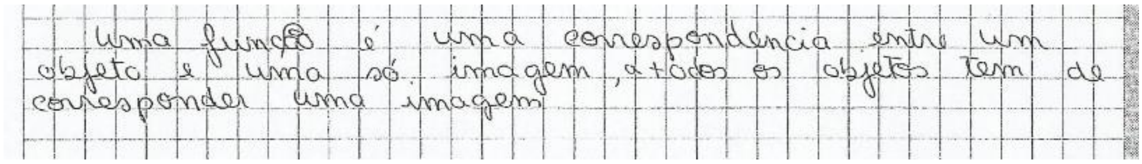

Uma função é uma correspondência entre um objeto e uma só imagem, e todos os objetos tem de corresponder uma imagem

Figura 5. Definição de função pelo grupo 1.

O grupo 2 respondeu corretamente e aliou a representação verbal à representação pictórica para justificar as suas respostas, pois completou o trabalho com o desenho de exemplos de diagramas, como se pode observar na figura 6, talvez por acharem que a sua justificação por palavras na representava o seu raciocínio. Este grupo justifica da mesma forma que os diagramas “b” e “c” não podem representar funções, justificação que não se aplica no caso do diagrama “b”. Tal como o grupo anterior, também usa conceitos referentes à terminologia das funções em justificações para diagramas que não representam funções. Neste caso, a palavra mal escolhida foi “original”, piorando a situação ao escreverem que designa um elemento do conjunto de partida da correspondência, o que só seria verdade caso o diagrama representasse uma funcão.

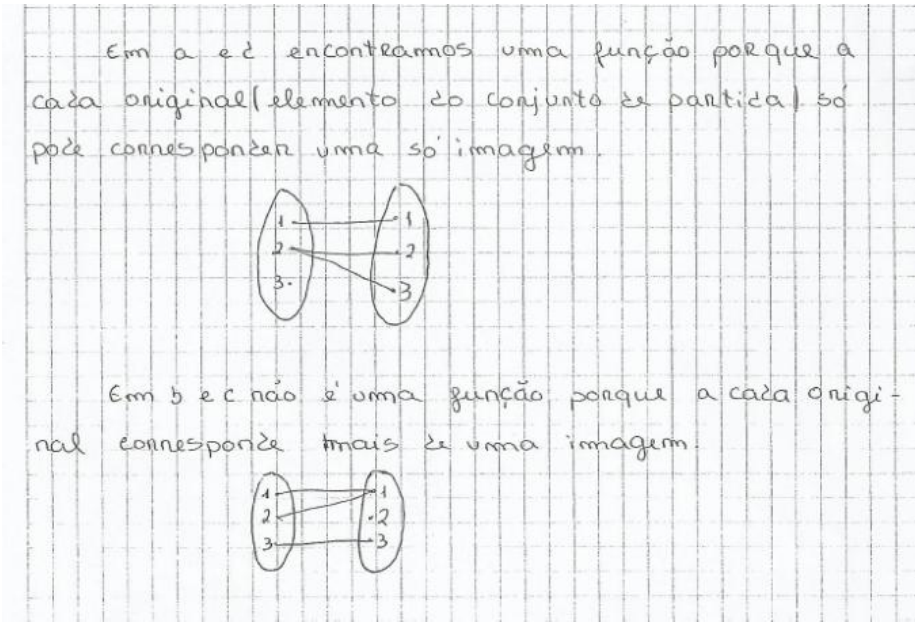


Figura 6. Resolução da tarefa 1 pelo grupo 2.

Este grupo não apresentou uma definição aceitável para função, confundindo definição com as representações que uma função pode ter (figura 7), demonstrando dificuldades para entender o enunciado e talvez não saber o que é uma definição.

Função: uma função é toda a corres pondencia
entre o dominio A e o conjunto de chegada B.

→ Uma função pode ser definida por:
→ um diagrama
→ uma tabela de valores
→ uma expressão analitica
→ um grafico

Figura 7. Resolução da tarefa 1 pelo grupo 2.

O grupo 3 não define claramente uma função como uma correspondência entre dois conjuntos, referindo apenas que a cada objeto corresponde uma e só uma imagem. Mostram conhecer os conceitos relacionados com o tema, "objeto" e "imagem", mas não explicam o seu significado. Apesar de ter escolhido bem quais os diagramas que podem ou não representar funções, não justificaram porque é que os diagramas "b" e "c" não podem representar uma função. Este grupo demonstrou pouco cuidado e pouca motivação para escrever, pois tentaram entregar o trabalho ao fim de uns minutos, quando ainda estava muito incompleto, tendo escrito apenas que "a cada imagem corresponde um e um só objeto". Na altura não foi aceite o trabalho e foi dito aos alunos para escrever a justificação para as suas escolhas, ao que eles reagiram mal, demonstrando pouca vontade de escrever.

A cada objeto corresponde uma e só uma imagem. Os diagramas
que correspondem a funções são: a e d. Nestas duas funções
a cada objeto corresponde a uma e só imagem

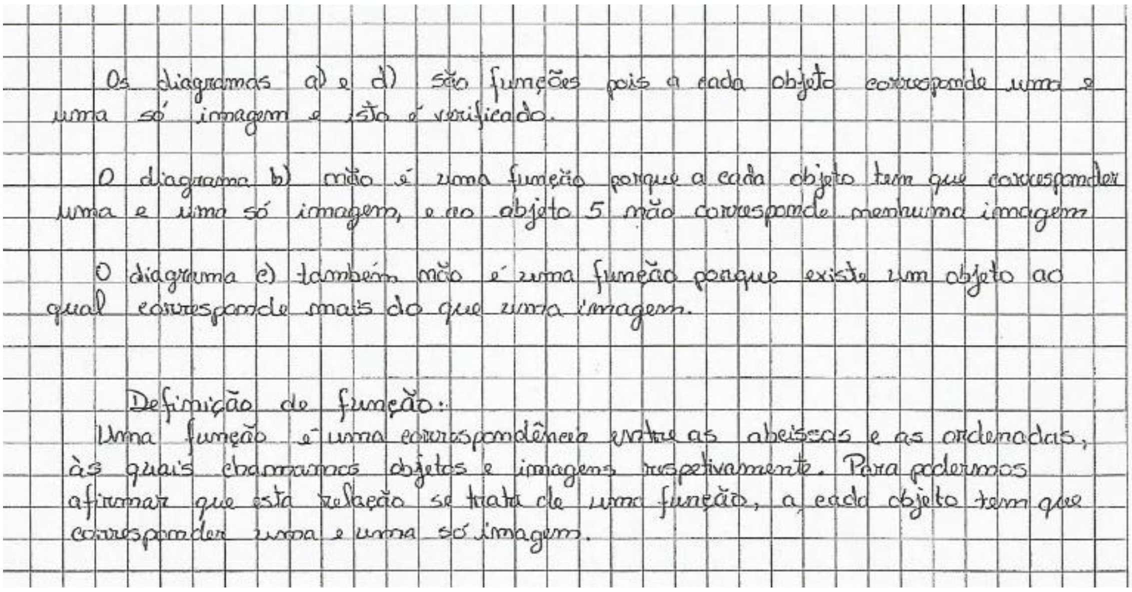
Figura 8. Resolução da tarefa 1 pelo grupo 3.

Durante a realização da tarefa foram observadas algumas dificuldades e confusões em relação a alguns conceitos. Por exemplo, quando, a certa altura, o aluno A1 estava a referir-se aos diagramas apresentados como diagramas de caule-e-folhas, termo utilizado para referir um tipo de diagrama que surge no tema de estatistica e não no tema de funções. A colaboração entre os elementos do grupo não foi muita, tendo o aluno A1 realizado praticamente todo o tabalho.

Um dos momentos de maior interesse registados nas gravações foi quando o aluno A1 solicitou ajuda para perceber se deveria escrever qua a cada imagem corresponde um e um só objeto ou se a cada objeto corresponde uma e uma só imagem. Esta dúvida surgiu também no grupo 4, com a diferença que neste grupo os alunos esclareceram as dúvidas através da discussão entre eles. De facto foi no grupo 4 que se registou a mais interessante discussão estre os seus elementos, como é possivél constatar no seguinte diálogo entre o professor e os alunos:

A2: Quais são os objetos e quais são as imagens?
A3: Os da direita são as imagens e os da esquerda os objetos.
A2: Pronto, então o "c" não pode ser uma função.
Professor: Porquê?
A2: Porque o número 4 tem duas imagens.
Professor: Certo, e os outros?
A3: Os outros podem todos!
Professor: De certeza?
A4: Mas ali o 5 não tem nenhum. (referindo-se ao diagrama "b")
Professor: E precisa de ter?
A3: Sim, todo o objeto tem de ter uma imagem, não é?
Professor: sim.
A3: Pronto, então risca-se também o "c"!

As resoluções dos grupos 5 e 6 são muito idênticas às já apresentadas sendo que a do grupo 5 se destaca por ser a que demostra uma melhor apresentação. No entanto, tal como nas resoluções anteriores observa-se o uso de terminologia de funções em casos onde os diagramas não representavam funções. Afirmam também que "os diagramas são funções", faltando neste caso o uso da palavra "representam" pois um diagrama não é função, apenas pode representar uma função. (figura 9)



Os diagramas a) e d) são funções pois a cada objeto corresponde uma e uma só imagem e isto é verificado.

O diagrama b) não é uma função porque a cada objeto tem que corresponder uma e uma só imagem, e ao objeto 5 não corresponde nenhuma imagem

O diagrama c) também não é uma função porque existe um objeto ao qual corresponde mais do que uma imagem.

Definição de função:
Uma função é uma correspondência entre as abcissas e as ordenadas, às quais chamamos objetos e imagens respetivamente. Para podermos afirmar que esta relação se trata de uma função, a cada objeto tem que corresponder uma e uma só imagem.

Figura 9. Resolução da tarefa 1 pelo grupo 5.

De facto, o uso errado dos conceitos de imagem e objeto, em situações onde não se tratavam de funções, foi geral a todos os grupos. Não sendo muito problemático, pode significar alguma falta de domínio da linguagem mais formal da matemática ou alguma falta de cuidado na sua escrita. No geral, os grupos conseguiram definir função, ainda que em alguns casos com pouca clareza e coerência. Não atingindo um nivél ideal, pode-se dizer que os alunos apresentam algum dominio sobre a escrita matemática, ainda que nesta tarefa tenham recorrido quase excusivamente à linguagem verbal, tendo conseguido converter o seu pensamento em palavras com relativo sucesso. No final da tarefa, houve uma síntese entre professor e alunos, tentando garantir que não tiham ficado dúvidas por esclarecer.

3.2.2 Tarefa 2

A tarefa 2 foi o segundo elemento recolhido, tendo sido realizada depois da lecionação da função afim. A tarefa consistiu num problema de comparação de preços onde se pretendia que os alunos recorressem à função afim e à sua representação gráfica para tirar conclusões e fazer escolhas entre os melhores preços. Foram dados trinta minutos aos alunos para a sua realização e foi-lhes solicitado a entrega de uma folha com a resolução do problema e as explicações a ele inerentes. Todos os grupos entregaram, apesar de ter sido necessário mais tempo que o previsto para a conclusão do trabalho. Na figura 10 pode ser observado o enunciado da tarefa, que foi entregue a cada aluno.

Tarefa 2: função afim

1. Um jovem estudante, em férias, chega à gare do caminho-de-ferro de uma vila portuguesa e precisa de utilizar o carro de aluguer para se deslocar com a sua bagagem, a uma aldeia situada no cimo da serra, a $30km$ da estação.
   Deparou-se com dois carros:
   - o Sr. Mota cobra 4€ pelo transporte da bagagem e 0,50€ por quilómetro.
   - o Sr. Passos cobra 0,80€ por quilómetro, mas não cobra nada pelo transporte de bagagem.

   Depois de pensar um pouco, o nosso jovem turista decidiu ir no carro do Sr. Mota.

a. Parece-lhe uma escolha acertada? Porquê?

b. As pessoas da aldeia Ver-o-Rio, que fica a $8km$ da estação, só querem ir no carro do Sr. Passos e os de Beira-Serra, que fica a pouco mais de $13km$, dizem que tanto lhes faz.
   Verifique se os habitantes das duas aldeias sabem gerir as suas despesas de transporte.

c. Designe por x a extensão do percurso (em km) e por $f(x)$ e $g(x)$ o custo das viagens com o Sr. Mota e com o Sr. Passos, respetivamente. Construa, num referencial ortogonal, os gráficos das funções no intervalo [0,40].
   Utilize o gráfico que construiu para justificar convenientemente as respostas às perguntas indicadas nas alíneas anteriores.

d. Escreva uma expressão que lhe permita calcular o custo do trajeto em função do número de quilómetros e do preço do transporte da bagagem, para cada um dos carros de aluguer.

Figura 10. Enunciado da tarefa 2.

Na primeira alínea era pedido aos alunos para descobrir se o jovem estudante tinha feito a escolha certa, justificando a sua resposta. Todos os grupos fizeram corretamente os cálculos e a maior parte deles escreveu uma pequena frase comparando os cálculos dos preços de cada motorista para justificar a resposta. Um exemplo disso foi a resolução do grupo 5, que pode ser vista na figura 11.

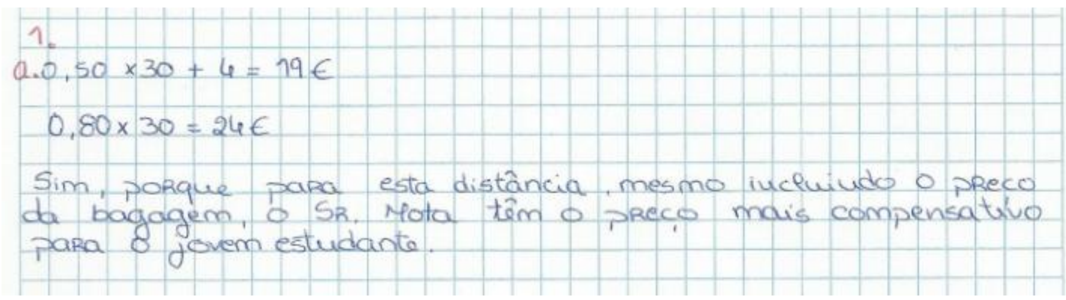

1.
a. 0,50 x 30 + 4 = 19€
0,80 x 30 = 24€
Sim, porque para esta distância, mesmo incluindo o preço da bagagem, o Sr. Mota têm o preço mais compensativo para o jovem estudante.

Figura 11. Resolução do G5 da alínea a) da tarefa 2.

Os outros grupos recorreram a estratégias semelhantes, utilizando a linguagem simbólica para mostrar os cálculos que fizeram seguido das justificações recorrendo à representação verbal para indicar e justificar a sua resposta. Os grupos construíram, portanto, um texto hibrido. A exceção foi o grupo 2 que se limitou a realizar os cálculos, sem dar resposta nenhuma e sem indicar a que se referia cada uma das contas, como se observa na figura 12.

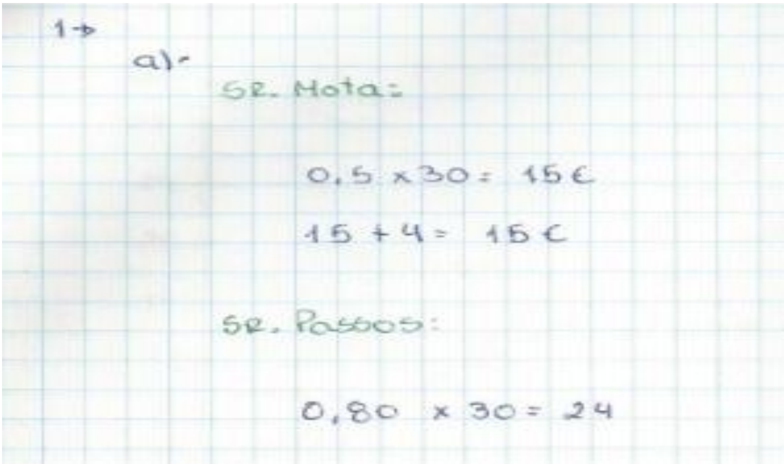


Figura 12. Resolução do G2 à alínea a) da tarefa 2.

A segunda alínea b) era parecida com a anterior e os alunos mais uma vez optaram por uma estratégia semelhante, apresentando os cálculos em linguagem simbólica e recorrendo à linguagem materna para transmitir uma pequena justificação. Desta vez, no enunciado não se pronunciava claramente sobre o transporte ou não de bagagem. Assim os grupos 1, 5 e 6 interpretaram que deviam estudar separadamente o caso de os passageiros transportarem bagagem e o caso de não transportarem bagagem, dando uma resposta mais completa. Como exemplo disso pode-se observar a resolução do grupo 1, na figura 13. Esta situação reflete a possibilidade de diferentes interpretações que os alunos podem fazer aos enunciados.

Figura 13. Resolução do G1 à alínea b) da tarefa 2.

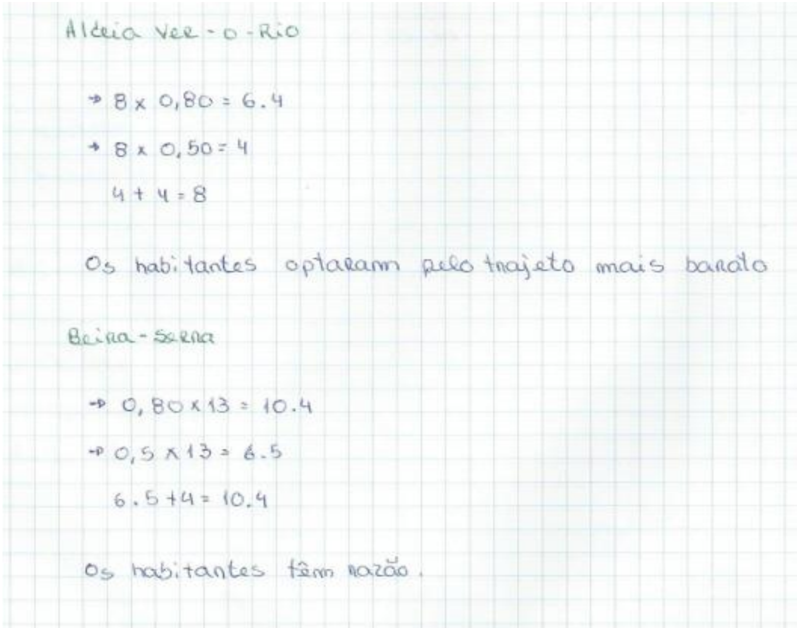
A realização do trabalho em grupo foi determinante para os alunos interpretarem o problema desta forma. Por exemplo, o grupo 1 voltou atrás na sua resolução quando um dos alunos se apercebeu da possibilidade de não se levar bagagem:

A5: Agora tens de fazer os cálculos para cada aldeia e para cada carro. Primeiro o do senhor Mota, para ver se é mais barato que o senhor Passos.
A6: E pronto, assim já chegámos às conclusões.
(Fazem os cálculos)
A5: Ah, mas imagina que eles não levam bagagem, já era diferente.
A7: E então? Temos de fazer os dois casos?
A5: Professor, eles levam sempre bagagem?
Professor: No enunciado não fala disso, podem partir do princípio que sim ou fazer para cada caso.
(refazem os cálculos)
A6: Assim, aos de Ver-o-Rio é melhor o senhor Passos, caso levem bagagem, senão já compensa o senhor Mota.

Outra dificuldade na interpretação desta alínea foi perceber se a viagem era entre cada aldeia e a estação ou entre cada aldeia e o cimo da serra, como mostra a seguinte transcrição:

A5: (depois de ler a segunda alínea) É a mesma coisa, não é?
A6: Sim, mas agora com 8 km e depois 13 km.
...
A5: Ah, não é assim.
A6: Porquê?
A5: Eles querem chegar à estação ou querem chegar à serra?

Também nesta alínea, o grupo 2 destacou-se pela sua resposta demasiado sucinta e pouco clara, apesar de apresentar os cálculos corretos, demostrando pouco interesse em justificar e explicar as suas ideias.


Aldeia Ver-o-Rio

→ 8 x 0,80 = 6.4

→ 8 x 0,50 = 4

4 + 4 = 8

Os habitantes optaram pelo trajeto mais barato

Beira-Serra

→ 0,80 x 13 = 10.4

→ 0,5 x 13 = 6.5

6.5 + 4 = 10.4

Os habitantes têm razão.

Figura 14. Resolução do G2 à alínea b) da tarefa 2.

Na alínea c) era pedida a representação gráfica das funções que modelam o problema e que se usasse essa representação para justificar a situação da alínea anterior. Todos os grupos construíram corretamente o gráfico. No entanto, apenas os grupos 1 e 2 fizeram um pequeno comentário referindo corretamente que para viagens curtas será melhor o carro do senhor Passos, mas para viagens maiores que 13 km já é melhor viajar com o senhor Mota (figura 15).

Figura 15. Resolução do G5 à alínea c) da tarefa 2.

Na última alínea era solicitada apenas a expressão que calcule o custo da viagem em cada um dos carros em função da distância percorrida. Todos os grupos responderam corretamente, apresentando a solução inevitavelmente com recurso a linguagem simbólica, o que não se revelou um problema.

Durante toda a tarefa não se observaram grandes dificuldades dos alunos. Regra geral, todas as respostas foram corretas e a linguagem matemática foi utilizada de forma correta para as transmitir, ainda que por vezes podessem ter sido transmitidas de forma mais completa e cuidada, principalmente pelo grupo 2. Nesta tarefa já se observou a presença de textos híbridos.

3.2.3 Tarefa 3

A tarefa 3 foi realizada pelos alunos já no final da intervenção pedagógica a que se refere este estudo e também ela foi realizada em grupo, com os mesmos grupos das anteriores tarefas. Desta vez, a tarefa era uma questão de escolha múltipla, onde os alunos, além de escolher a resposta certa, tinham de justificar, para cada hipótese, porque é que estava ou não certa. O objetivo seria perceber como é que os alunos, em grupo, percebiam o enunciado e escolhiam a resposta certa e como decidiam entre os elementos o que escrever para justificar a opção.

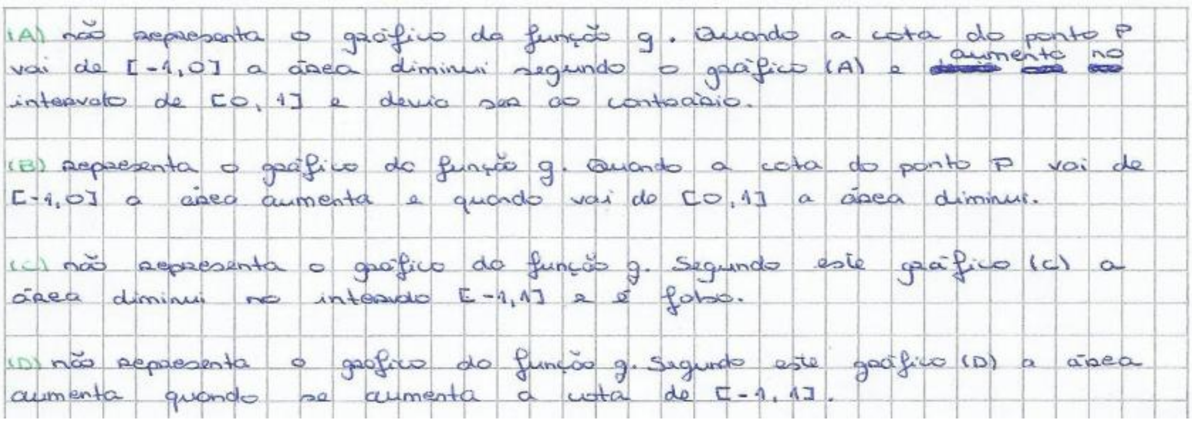
O tema da tarefa era a representação gráfica de uma função envolvendo a noção de área e de intersecção de sólidos geométricos com planos. O enunciado está no anexo 2.

A resposta correta para esta questão seria a (B) e, para cada uma das hipóteses que deveriam ser rejeitadas, existia uma grande quantidade de justificações válidas. Vamos ver de seguida quais as justificações utilizadas pelos alunos e como as escreveram.

Nesta tarefa, os alunos fizeram uma melhor gestão do tempo. Foram-lhes dados 15 minutos, sendo que os grupos mais demorados precisaram de aproximadamente 20, o que pode ser considerada uma boa evolução em relação às tarefas 1 e 2. Das gravações, observa-se boa interação e colaboração entre os elementos dos grupos para descobrir a resposta certa e algumas explicações dadas pelos alunos que mais rapidamente perceberam aos que sentiram mais dificuldades. Algumas dessas discussões serviram para esclarecer o enunciado, cuja leitura estava a gerar dificuldades a alguns alunos, como será evidenciado mais à frente. No entanto, no momento de escrever o texto para entregar era um dos elementos que escrevia ou que ditava a resposta para outro escrever, sempre sem grandes discussões sobre o que deveria ser escrito.

Todos os grupos apontaram na resposta certa, mas houve várias justificações diferentes entre os grupos. Todos eles recorreram à linguagem verbal para justificar as suas respostas.

O grupo 1 concluiu que a resposta correta era a “b” pensando na monotonia da função que dá a área da secção. As suas justificações são válidas, mas nota-se alguma falta de cuidado nos pormenores e na construção das frases, por exemplo, quando justifica que o gráfico “c” não corresponde à função (figura 16).


(A) não representa o gráfico da função g. Quando a cota do ponto P vai de [-1,0] a área diminui segundo o gráfico (A) e aumenta no intervalo de [0,1] e devia ser ao contrário.

(B) representa o gráfico da função g. Quando a cota do ponto P vai de [-1,0] a área aumenta e quando vai do [0,1] a área diminui.

(C) não representa o gráfico da função g. Segundo este gráfico (C) a área diminui no intervalo [-1,1] e é falso.

(D) não representa o gráfico da função g. Segundo este gráfico (D) a área aumenta quando se aumenta a cota de [-1,1].

Figura 16. Resolução da tarefa 3 pelo grupo 1.

O encadeamento de ideias em cada justificação é um pouco confuso. É preciso algum esforço para se compreender o que o grupo quer transmitir. O uso de algumas palavras também não é o ideal, por exemplo a palavra “vai” que deveria ser substituída por “varia”. De facto, a escrita e a utilização correta dos conceitos parece ser uma dificuldade, uma vez que na gravação da discussão, percebe-se que o grupo entendeu o problema, depois de algumas trocas de ideias.

> A5 – A área vai aumentando se o z diminuir. Aumenta mas depois volta a diminuir.
> A6 – Então é a "D".
> A5 – Não, não é nada a "D", se aumenta e depois diminui.
> ...
> A5 (depois de pensar um bocadinho) – É a "B" porque de -1 a 0 a área aumenta e de 0 a 1 diminui.

Apesar de haver alguma discussão para perceber o problema e chegar à resposta, a colaboração resumiu-se a isso, pois o aluno A5 escreveu as justificações sozinho.

A estratégia do grupo 2 foi observar a área nos extremos do domínio da função e o ponto 0, para concluir que a área tinha de ser igual nesses extremos e menor que no ponto de abcissa 0, escolhendo assim a única opção possível (figura 17).

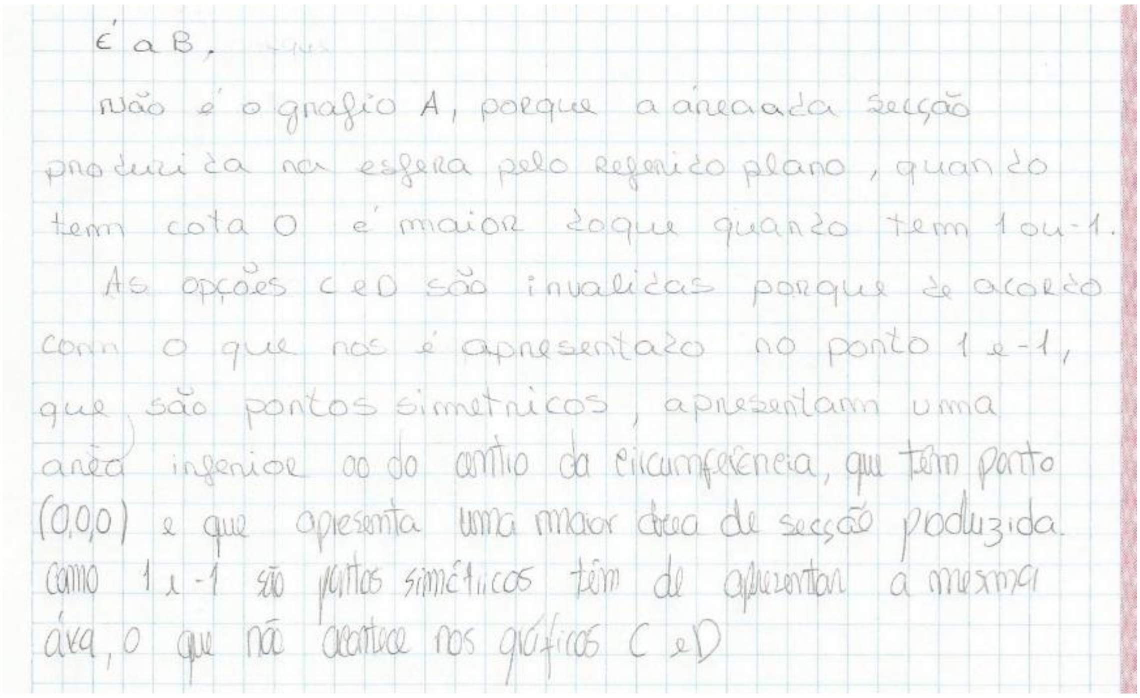

É a B.
Não é o grafico A, porque a area da secção
produzida na esfera pelo referido plano, quando
tem cota 0 é maior do que quando tem 1 ou -1.
As opções C e D são invalidas porque de acordo
com o que nos é apresentado no ponto 1 e -1,
que são pontos simetricos, apresentam uma
area inferior ao do centro da circunferencia, que tem ponto
(0,0,0) e que apresenta uma maior área de secção produzida
Como 1 e -1 são pontos simétricos têm de apresentar a mesma
área, o que não acontece nos gráficos C e D

Figura 17. Resolução da tarefa 3 pelo grupo 2.

Todas as justificações são válidas. No entanto, alguns pormenores não estão tão rigorosos como deveriam. Por exemplo, quando se referem ao centro da esfera, mas escrevendo "centro da circunferência". Também nessa frase, o grupo escreve "apresentam uma área inferior ao do centro da circunferência", o que não faz sentido. Percebe-se ainda assim que eles se referem à área do circulo quando o plano interseta a esfera no seu centro.

Este grupo sentiu algumas dificuldades para entender o enunciado. Um dos seus elementos leu em voz alta o enunciado tentando perceber, mas sem sucesso, até solicitar a ajuda do professor estagiário.

A8 – Cota "c". O que é a cota "c"?
A9 – A cota é o eixo dos zz não e?
A8 – Mas o que é a cota "c"?
...
A9 – justificação? Justificação de quê?
...
A8 – Professor, a cota "c" do ponto P? Que é isso?
Professor – Quer dizer "c" é o valor da cota do ponto P. É sempre igual?
A8 – Não, varia.
Professor – Pois, por isso que lhe chamas "c", é uma variável. Varia entre que valores?
...

A gravação evidencia ainda a dificuldade que os alunos têm em converter as suas ideias em palavras e em transmitir as suas ideias por escrito. Por exemplo, depois de terem concluído qual era a opção correta, o aluno A9 pergunta: "Agora como é que explicámos isto? Já sabemos como é, mas não sabemos escrever".

Também o grupo 4 recorreu aos valores da área nos pontos -1,0 e 1 para justificar as suas respostas. Mais uma vez os alunos demostraram pouca vontade e pouco cuidado nas justificações escritas. Este grupo limitou-se a escrever umas curtas justificações na própria folha de enunciado.

O grupo 4 não sentiu dificuldades na interpretação e houve interação para a escolha da resposta certa, no entanto também neste grupo, foi um dos elementos que escreveu tudo, praticamente sem discussão sobre o que seria escrito (figura 18).

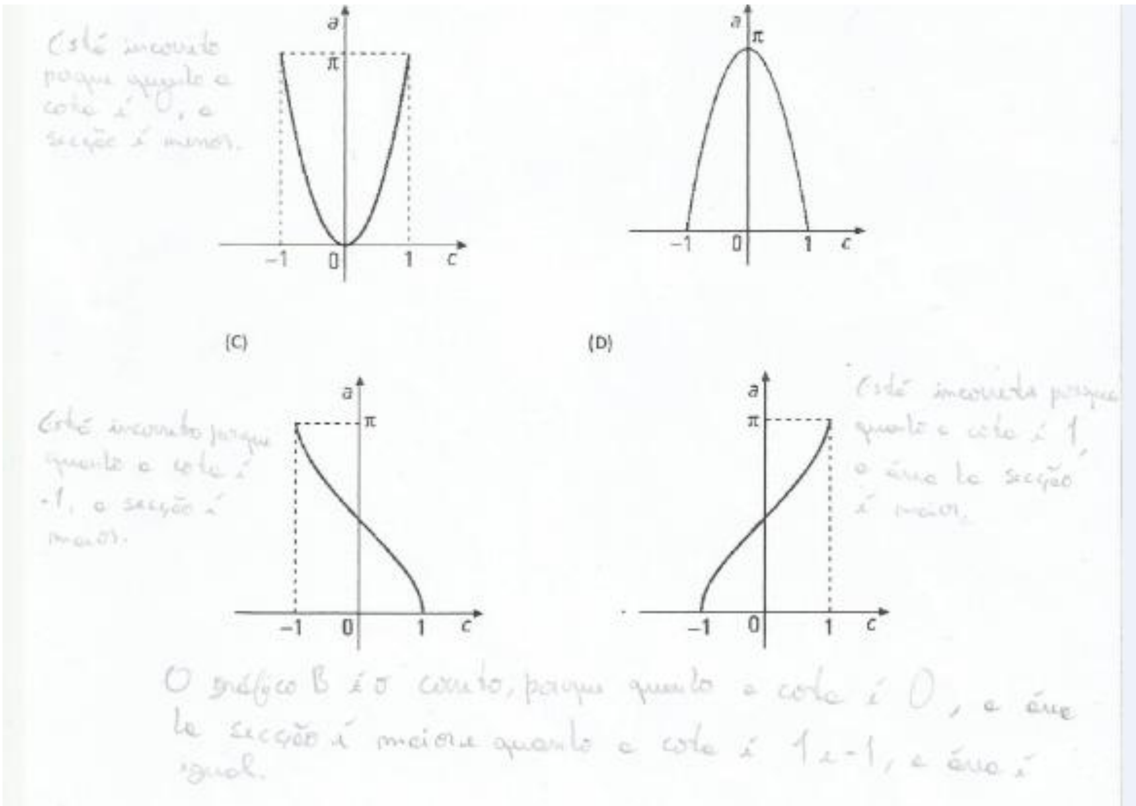
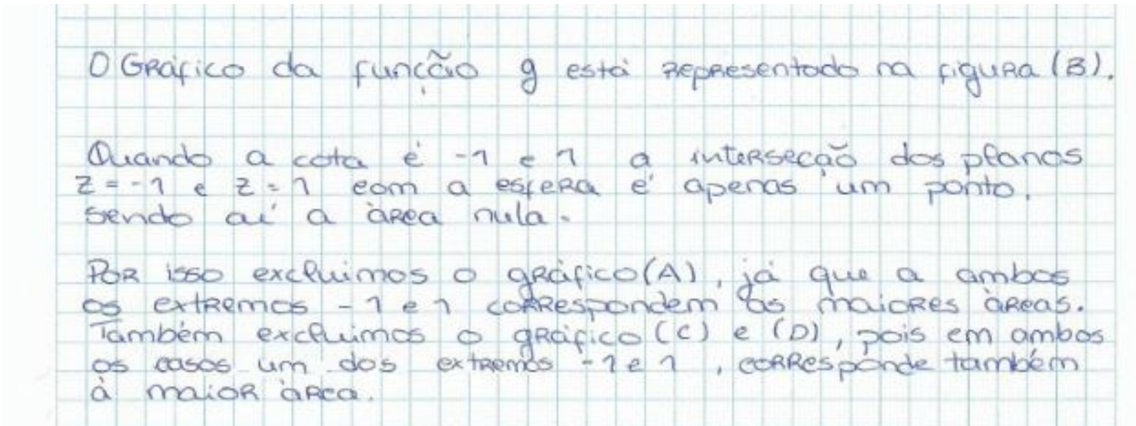


Figura 18. Resolução da tarefa 3 pelo grupo 4.

O grupo que mais se destacou pela qualidade da sua escrita foi o grupo 5 apresentando a sua resposta de forma simples, clara e coerente (figura 19).



O Gráfico da função g está representado na figura (B).

Quando a cota é -1 e 1 a intersecção dos planos z = -1 e z = 1 com a esfera é apenas um ponto, sendo aí a área nula.

Por isso excluímos o gráfico (A), já que a ambos os extremos -1 e 1 correspondem as maiores áreas. Também excluímos o gráfico (C) e (D), pois em ambos os casos um dos extremos -1 e 1, corresponde também à maior área.

Figura 19. Resolução da tarefa 3 pelo grupo 5.

3.2.4 Ficha de avaliação por partes

Uma das ferramentas de avaliação utilizadas ao longo do ano letivo foi a realização de várias "fichas por partes". No final do ano seria calculada a média aritmética de todas as fichas e essa nota teria o peso de um teste na classificação final. Ficou definido que o professor estagiário construiria uma ficha no final da intervenção sobre a matéria lecionada. Esta oportunidade foi aproveitada para fornecer mais alguns elementos à investigação presente neste relatório. Assim, foram introduzidas na ficha algumas questões focadas na escrita matemática, onde era objetivo avaliar como os alunos escreviam num momento avaliativo de matemática e também como interpretavam a linguagem matemática. As questões não eram muito diferentes das tarefas já feitas em grupo durante as aulas, criando a possibilidade de perceber se os alunos evoluiram e comparar resoluções que tinham sido feitas em grupo com estas, agora feitas individualmente.

Assim foram escolhidas duas questões para analisar, tal como já tinha sido feito com as tarefas.

Questão 1

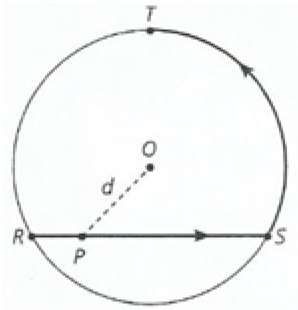
O modelo desta questão é em tudo parecido com a tarefa 3. Existe uma situação matemática modelada por uma função e pretende-se que os alunos escolham, entre quatro opções, qual o gráfico que a representa, justificando porque não podem ser escolhidas cada uma das restantes representações gráficas. O enunciado desta questão pode ser visto na figura 20.

O objetivo principal era, mais que avaliar se o aluno escolheu a opção certa, avaliar a sua capacidade de justificar e transmitir por escrito o seu raciocínio. Assim foram definidos critérios de classificação específicos para esta questão, que podem ser encontrados no anexo 1.

Os alunos foram classificados entre 0 a 30 pontos, e os resultados dos alunos nesta questão estão organizados na tabela 1.

1. Na figura está representada uma circunferência de centro O e que contém os pontos S, R e T.

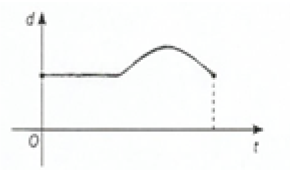
Um ponto P desloca-se ao longo do trajeto que a figura sugere: P inicia o percurso em R e termina-o em T, percorrendo, sucessivamente e sem parar, a corda $[RS]$ e o arco ST.



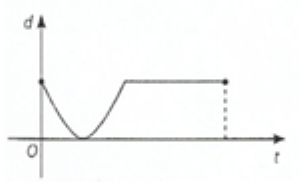
Para cada posição do ponto P, seja t o tempo decorrido desde o início do percurso e seja d a distância do ponto P ao ponto O.

Apenas um dos gráficos a seguir representados pode relacionar corretamente as variáveis t e d.

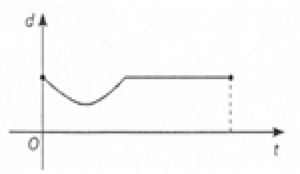
(A)



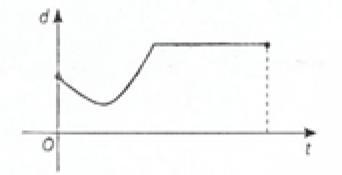
(B)



(C)



(D)



Num pequeno texto indique o gráfico que pode relacionar corretamente as variáveis t e d e apresente, para cada um dos gráficos rejeitados, uma razão pela qual o considerou incorreto.

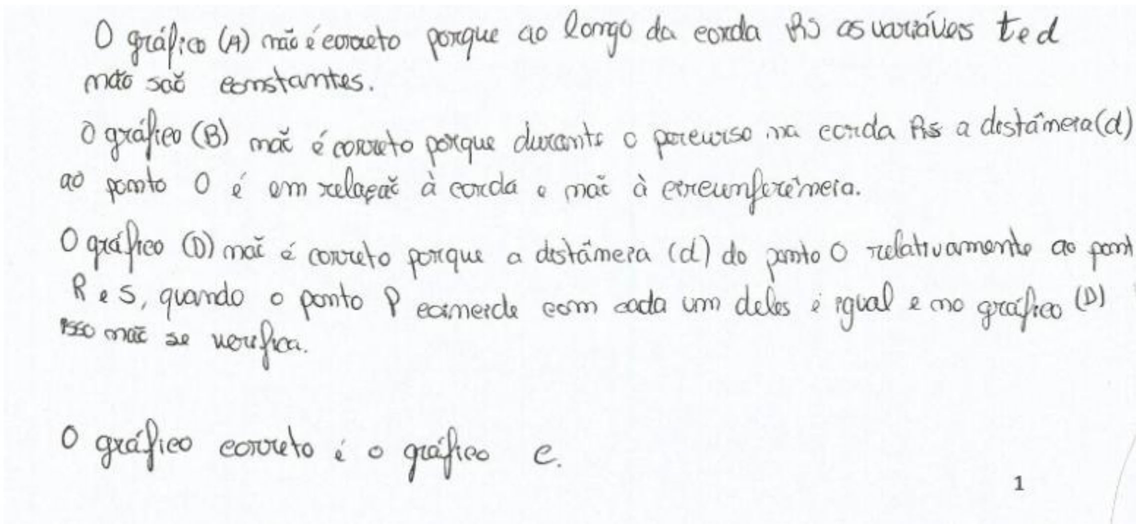
Figura 20. Enunciado da questão 1 da ficha por partes.

As classificações resultaram numa média de 25,5 pontos atribuídos aos alunos nesta questão, sendo que nenhum aluno obteve pontuação zero e nove obtiveram pontuação máxima. A linguagem verbal foi, obviamente, utilizada por todos os alunos e nenhum recorreu à linguagem simbólica para tentar justificar algum pormenor. Alguns dos conceitos matemáticos mais utilizados nas respostas foram: gráfico, variáveis, distância, ponto, reta, raio, circunferência, corda ou constante.

Tabela 1. Resultados dos alunos na questão 1 da ficha por partes.

30	30	11	30	5	27	27	26	23	30
27	29	30	20	19	17	30	27	14	28
29	10	30	30	29	30				

A justificações mais observadas em relação ao gráfico A diziam respeito ao gráfico ser constante na primeira fase, o que não se verifica na função uma vez que a distância varia. Em relação ao gráfico B falavam do pormenor de a distância nunca ser 0, contrariando o gráfico apresentado. Já em relação ao gráfico D falavam do ponto inicial e o ponto imediatamente antes de a distância ser constante, referindo que a esses pontos deveriam corresponder distâncias iguais, o que não se observa no gráfico. De seguida são apresentados três exemplos de resoluções que os alunos redigiram com algumas dessas justificações.


O gráfico (A) não é correto porque ao longo da corda RS as variáveis t e d não são constantes.

O gráfico (B) não é correto porque durante o percurso na corda RS a distância (d) ao ponto O é em relação à corda e não à circunferência.

O gráfico (D) não é correto porque a distância (d) do ponto O relativamente ao ponto R e S, quando o ponto P coincide com cada um deles é igual e no gráfico (D) isso não se verifica.

O gráfico correto é o gráfico C.

1

Figura 21. Resolução da questão 1 da ficha por partes pelo A10

O aluno A10, na sua resolução, respondeu corretamente ao dizer que a hipótese certa era a C (figura 21). A sua justificação em relação ao gráfico D está correta e foi escrita de forma clara e coerente. No entanto, as justificações em relação aos gráficos A e B não justificam de forma correta a situação. Em relação à opção A, o aluno diz que as variáveis “t” e “d” não são constantes, o que não justifica nada pois a variável “t” não é constante em momento nenhum. Neste caso, talvez o aluno tivesse pensado bem, não sendo capaz de traduzir eficazmente o seu raciocínio em palavras. O que o aluno escreve em relação ao gráfico B é verdadeiro, no entanto o gráfico “b” não reflete o caso da distância entre o centro e a circunferência como o aluno mostra acreditar. A este aluno foram atribuídos 10 valores, 5 por ter indicado a resposta correta mais 5 por ter dado um argumento válido e bem escrito.

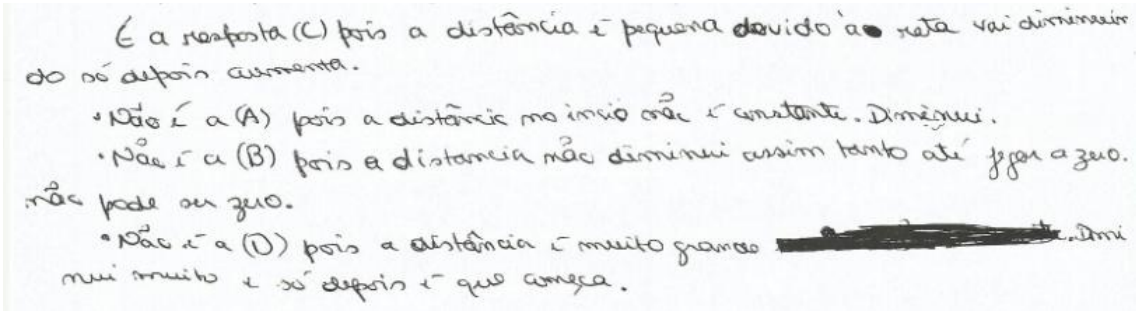


Figura 22. Resolução da questão 1 da ficha por partes pelo A11.

O Aluno A11 também indicou corretamente a opção certa (figura 22), apresentando justificações válidas, mas de dificil compreenção, em relação ao grafico A e B. Apresenta uma composição com pouco rigor, sem nenhum termo matemático o que faz com que seja dificil perceber ao que se refere. Foi-lhe atribuido o nivél dois em relação à escrita, de acordo com os critérios de classificação, já que foi considerado que a sua escrita foi pouco estruturada. Foi ainda penalizado ter escrito “reta” no lugar de corda, ou segmento de reta. Como resuldado obteve 17 pontos na sua resolução.

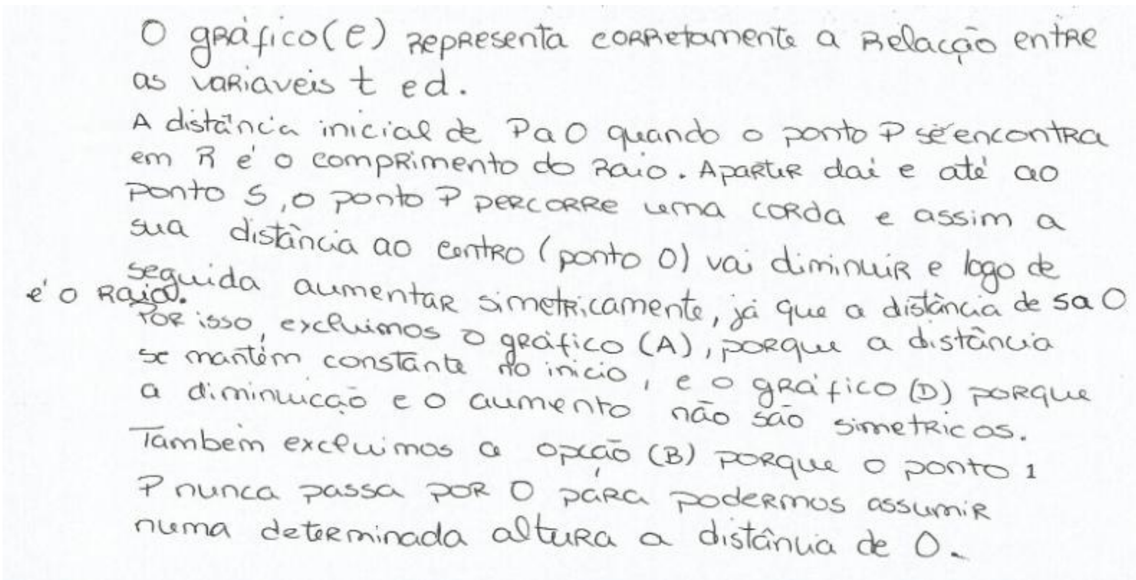


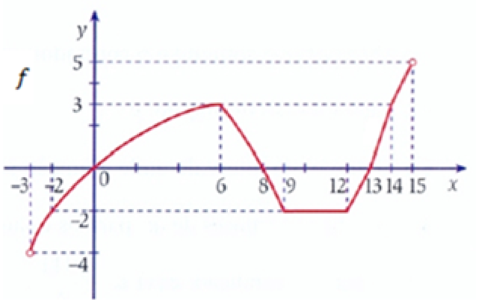
Figura 23. Resolução da questão 1 da ficha por partes pelo A12.

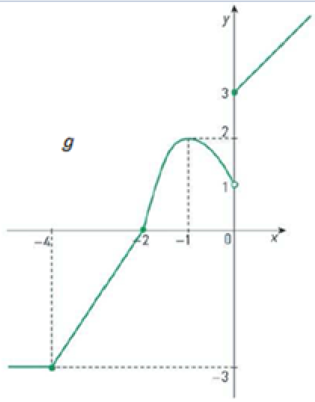
Uma das composições que obteve nota máxima foi elaborada pelo aluno A12 (figura 23). Todos os seus argumentos estão corretos e a composição foi, de facto, bem escrita. O aluno não se inibiu de usar com confiança os conceitos matemáticos, tais como, “variáveis”, “ponto”, “simetricamente” ou “centro”, dando a sua resposta de forma clara, correta e coerente.

Questão 2

Na segunda questão da ficha era pretendido que os alunos observassem duas representações gráficas com características semelhantes e nas várias alíneas eram questionados acerca de algumas dessas características das representações. Esta questão foi construída de forma a tentar perceber como os alunos interpretam os enunciados, tentado perceber se existem diferenças entre os enunciados escritos recorrendo a linguagem verbal ou os enunciados escritos utilizando a linguagem simbólica matemática. Assim, foram colocadas as mesmas questões em relação a cada uma das representações, mas utilizando, para cada um dos gráficos, linguagens diferentes, como se pode observar no enunciado da questão, na figura 24.

2. Considere as funções f e g representadas graficamente.





a) Indique os zeros da função f.

b) Indique os valores de x para os quais $g(x) = 0$.

c) Indique os valores de x tais que $f(x) > 0$.

d) Indique os valores de x para os quais a função g é positiva.

e) Comente as seguintes afirmações:

Afirmação I. A função f é injetiva. **Afirmação II**. $\forall\ a, b \in D_g \quad se \quad a \neq b \Rightarrow g(a) \neq g(b)$

Figura 24. Enunciado da questão 2 da ficha de avaliação por partes.

Como se pode observar na figura 24, as alíneas a) e b) apesar de escritas de forma diferente, procuram estudar a mesma característica em cada um dos gráficos. O mesmo se passa com o par de alíneas c) e d) e com as duas afirmações da alínea e). Estava aqui em causa a capacidade de interpretação dos alunos. Em linguagem verbal apareciam as alíneas a) e d) e a afirmação I. As alíneas b) e c) e a afirmação II estavam escritas recorrendo à linguagem simbólica.

Os resultados dos alunos podem ser observados nas tabelas 2 e 3 que fazem a contagem do número de alunos a responder corretamente a cada alínea.

Tabela 2. Número de respostas corretas nas alíneas a) e b)

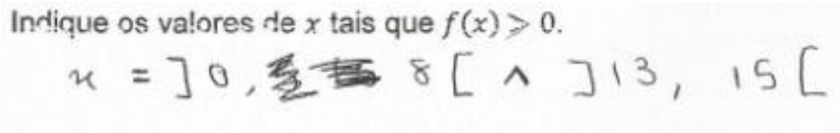
Respondeu corretamente apenas na alínea a) (linguagem verbal).	Respondeu corretamente apenas na aliena b) (linguagem simbólica).	Respondeu corretamente em ambas as alíneas.	Não respondeu corretamente em nenhum.
3	4	16	2

Tabela 3. Número de respostas corretas nas alíneas c) e d).

Respondeu corretamente apenas na alínea c) (linguagem simbólica)	Respondeu corretamente apenas na aliena d) (linguagem verbal)	Respondeu corretamente em ambas as alíneas	Não respondeu corretamente em nenhum
7	3	12	3

Daqui se observa que 7 alunos no primeiro par de alíneas e 10 alunos no segundo par apresentam níveis de eficácia diferentes dependendo da linguagem utilizada nas questões. No primeiro par não existe diferença significativa. Já as respostas ao segundo par de alíneas dão a entender que os alunos preferem a linguagem simbólica quando se procuram os valores positivos de uma função. Deve-se, no entanto, salvaguardar que algumas das respostas erradas se podem dever a enganos ou a erros de interpretação dos gráficos e não com a interpretação do enunciado em si.

A resolução do aluno A13 (figura 25) revela uma das dificuldades típicas dos alunos quando pretende escrever a reunião de dois intervalos em linguagem simbólica.


Indique os valores de x tais que $f(x) > 0$.

x =]0, 8[∧]13, 15[

Figura 25. Resolução da alínea c) da questão 2 da ficha por partes pelo A13.

Em vez de usar o símbolo “∪” o aluno escreveu o símbolo “∧” entre os dois intervalos reais.

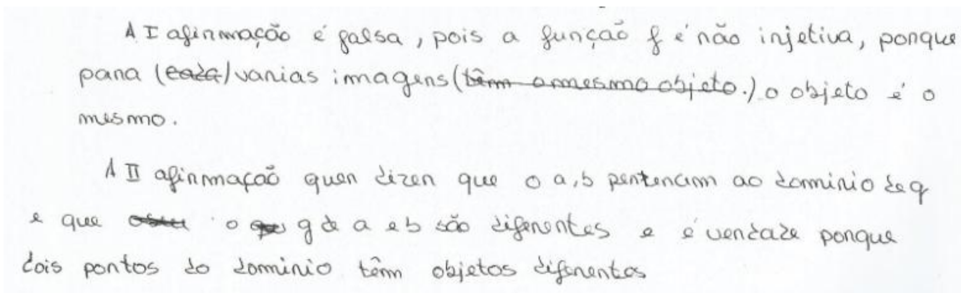
A alínea e) tinha como particularidade que, além de se avaliar a interpretação dos alunos, também se lhes pedia que justificassem a resposta. Nesta alínea as diferenças já foram mais significativas (tabela 4), apresentando um desequilíbrio maior entre linguagem simbólica e linguagem verbal. Este desequilíbrio pode ter sido causado pelas dificuldades que os alunos normalmente sentem em relação à característica em estudo, a injetividade, e, pela própria linguagem simbólica aqui utilizada, uma vez que é bem mais complexa.

Tabela 4. Número de respostas corretas na alínea e).

Respondeu corretamente apenas á afirmação I (linguagem verbal)	Respondeu corretamente apenas na aliena d) (linguagem simbólica)	Respondeu corretamente em ambas as afirmações	Não respondeu corretamente a nenhuma afirmação
15	0	7	3

Nesta questão, 15 alunos responderam corretamente apenas quando a afirmação estava escrita em linguagem verbal, sendo que nenhum aluno respondeu corretamente apenas na afirmação escrita em linguagem simbólica.

O aluno A14 foi um dos casos que respondeu erradamente a cada uma das afirmações (figura 26).


A I afirmação é falsa, pois a função f é não injetiva, porque para ~~cada~~ varias imagens (~~têm o mesmo objeto~~.) o objeto é o mesmo.

A II afirmação quer dizer que o a, b pertencem ao domínio de g e que ~~...~~ o g de a e b são diferentes e é verdade porque dois pontos do domínio têm objetos diferentes

Figura 26. Resolução da alínea e) da questão 2 da ficha por partes pelo A14.

Em relação à primeira afirmação, além de não apresentar exemplos que justifiquem a sua afirmação, o aluno A14 ainda troca os conceitos de imagem por objeto, de tal forma que a situação nem sequer poderia corresponder a uma função. Em relação à segunda, limita-se a tentar traduzir a linguagem simbólica para verbal e ainda volta a escrever "objeto" onde deveria ter escrito "imagem".

O aluno A12 respondeu corretamente a ambas as afirmações, apresentando justificações adequadas e coerentes, apresentando ainda exemplos para os pontos onde as funções não são injetivas. O aluno apresentou estes exemplos com o auxílio da linguagem simbólica (figura 27).

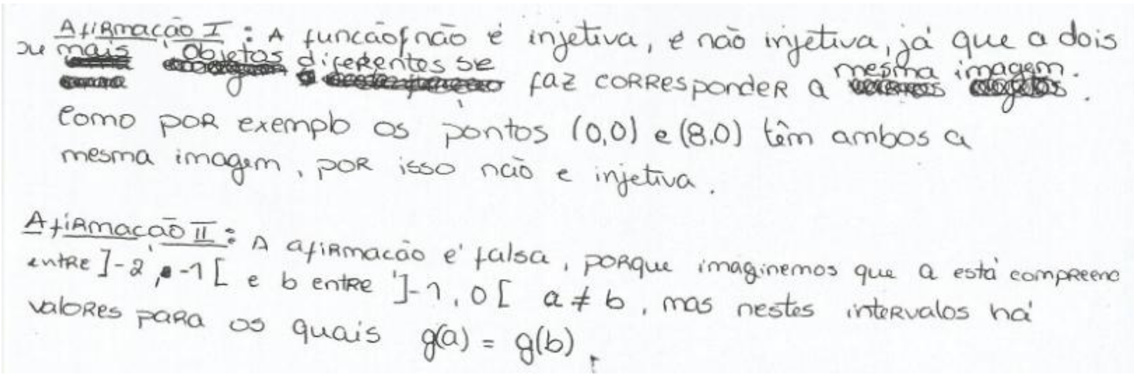


Figura 27. Resolução da alínea e) da questão 2 da ficha por partes pelo A12.

Alguns alunos que responderam corretamente à primeira afirmação, mas nem sequer esboçaram uma justificação para a segunda, como é o caso do aluno A15 (figura 28).

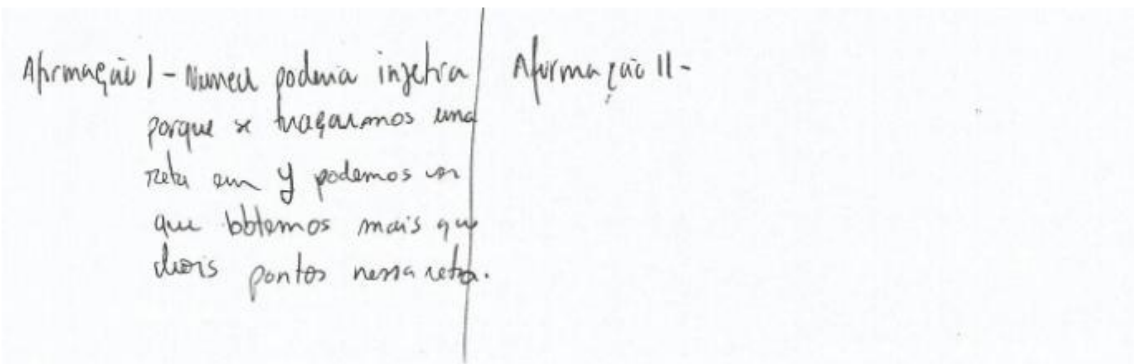
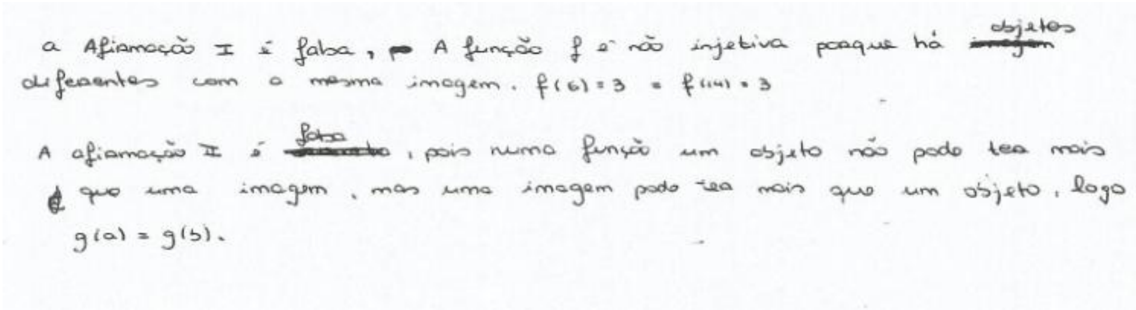


Figura 28. Resolução da alínea e) da questão 2 da ficha por partes pelo A15.

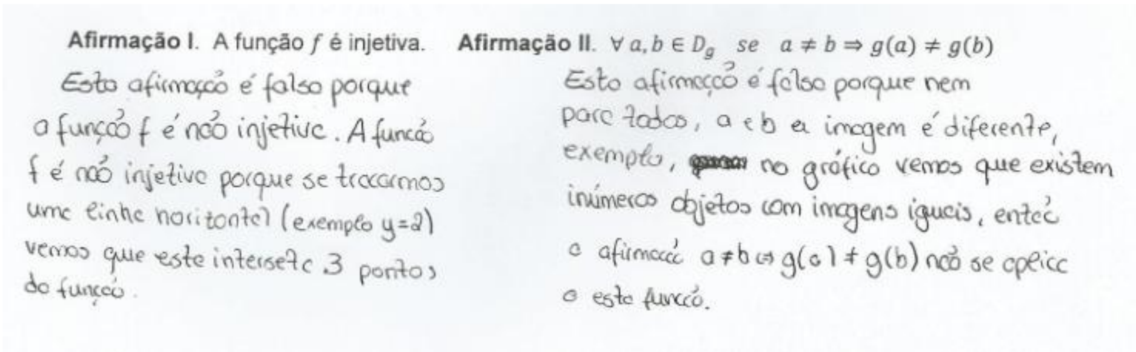
O aluno A5 não sentiu dificuldades em comentar corretamente a primeira afirmação (figura 29). No comentário à segunda afirmação demostra ter interpretado relativamente bem, percebendo que estava em causa a igualdade entre imagens e objetos, mas não conseguiu responder corretamente. Dá ideia que não se apercebeu que se pretendia estudar novamente a Injetividade, caso contrário era de esperar que respondesse corretamente, tal como tinha feito relativamente à primeira afirmação.


a Afirmação I é falsa, A função f é não injetiva porque há ~~imagem~~ objetos diferentes com a mesma imagem. f(6) = 3 = f(14) = 3

A afirmação II é falsa, pois numa função um objeto não pode ter mais que uma imagem, mas uma imagem pode ter mais que um objeto, logo g(a) = g(b).

Figura 29. Resolução da alínea e) da questão 2 da ficha por partes pelo A5.

A resolução do aluno A16 destoa um pouco da generalidade das resoluções (figura 30). As justificações estão corretas. Para justificar a não injetividade da função f recorre ao "truque" da reta horizontal. A resposta é algo informal, mas foi suficiente para ser considerada correta. Este foi um dos casos que respondeu corretamente às duas afirmações. Em relação à segunda, a resposta carece de exemplos de pontos com abcissas iguais mas ordenadas diferentes, mas demostra claramente ter percebido o enunciado, assim como concluir sobre a Injetividade de uma função.


Afirmação I. A função f é injetiva.

Esta afirmação é falsa porque a função f é não injetiva. A função f é não injetiva porque se traçarmos uma linha horizontal (exemplo y=2) vemos que esta intersecta 3 pontos da função.

Afirmação II. $\forall a, b \in D_g$ se $a \neq b \Rightarrow g(a) \neq g(b)$

Esta afirmação é falsa porque nem para todos, a e b a imagem é diferente, exemplo, no gráfico vemos que existem inúmeros objetos com imagens iguais, então a afirmação $a \neq b \Rightarrow g(a) \neq g(b)$ não se aplica a esta função.

Figura 30. Resolução da alínea e) da questão 2 da ficha por partes pelo A16.

A grande maioria procurou justificar as suas respostas utilizando a linguagem verbal para o fazer, ainda que pontualmente alguns tenham recorridos à simbologia matemática, como se observa nos exemplos de resoluções anteriormente apresentados.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES, RECOMENTAÇÕES E LIMITAÇÕES

Este capítulo divide-se em três secções. A primeira refere-se às principais conclusões retiradas do estudo, a segunda às implicações que este projeto pode ter no âmbito da educação matemática e na terceira expõe-se limitações sentidas e fazem-se algumas recomendações para futuras investigações.

4.1 Conclusões

Neste subcapítulo apresentam-se os principais resultados resultantes da análise realizada, tendo como referência as questões estabelecidas inicialmente. Faz-se a discussão dos resultados à luz da revisão de literatura apresentada no enquadramento contextual e teórico.

4.1.1 Questão 1: Como é que os alunos escrevem e organizam o seu raciocínio, quando justificam as suas respostas?

Da análise efetuada no estudo, retira-se, em primeiro lugar, que os alunos não gostam de justificar as suas respostas e escrever nas aulas de matemática, tal como esperado, pois normalmente os alunos mostram-se resistentes à escrita e as suas produções escritas resumem-se aos cálculos necessários à resolução das tarefas, como referia Ponte et al (2007). As reações dos elementos do grupo 3 são um claro exemplo disso, pois mostravam-se constantemente contrariados.

Em relação às representações (Duval, 2003; Menezes, 1999), o tipo de representação mais usado ao longo das tarefas realizadas em grupo foi a representação verbal, o que é natural, pois as tarefas foram escolhidas de forma a provocar os alunos a escrever bastante. A representação simbólica foi, regra geral usada apenas em situações onde se tinha de recorrer cálculos para chegar à resposta, como é o caso da tarefa 2, ou alguns símbolos que apareciam nos textos relativos à tarefa 3. Neste último caso, pode-se falar em textos híbridos. A representação icónica foi usada apenas por um grupo na tarefa 1.

Através da análise das gravações áudio, percebe-se que, regra geral, a colaboração entre os elementos dos grupos, não era muita. Discutia-se alguns pormenores sobre a tarefa em questão, mas no momento de escrever as respostas, na maior parte das vezes um dos elementos escrevia tudo e no fim os restantes elementos simplesmente liam e concordavam.

Os alunos procuraram introduzir alguns conceitos matemáticos, mas nem sempre com o sucesso desejável, por exemplo, o caso da tarefa 1, onde todos os grupos utilizavam as palavras “objeto” e “imagem” para diagramas que não representavam funções, ou ainda quando utilizavam conceitos matemáticos, sem explicar os seus significados. Estas situações indicam alguma falta de domínio da linguagem matemática e fornecem ao professor informações importantes sobre a compreensão e a apropriação dos conceitos pelos alunos e sobre as dificuldades por eles sentidas de acordo os autores citados neste estudo (Barbosa, Nacarato & Penha, 2008; Smole, 2001) provocando uma reflexão sobre as práticas de ensino.

Por outro lado, ainda em relação à tarefa 1, todos os grupos conseguiram definir função de forma correta, o que pode ser interpretado como um sinal de que conseguem converter os seus pensamentos em palavras de forma, pelo menos, satisfatória e que apresentam algum domínio sobre a escrita matemática, apesar de nem todos os grupos o fazer da forma mais simples e clara.

Na tarefa 2 foi recorrente a observação dos textos híbridos a que se refere Menezes (2000), pois as questões obrigavam a cálculos, efetuados com o uso da representação simbólica, mas seguidos do uso da representação verbal para as pequenas justificações pedidas, resultando na mistura da linguagem simbólica com a linguagem natural.

A tarefa 3 requeria textos maiores e foi normal que os grupos encadeassem as suas ideias de forma mais confusa. Nesta tarefa surgiram mais dúvidas, tendo essa situação originado mais discussão entre os grupos sobre o que escrever. Todos os grupos responderam corretamente e deram justificações aceitáveis, facto que pode ser justificado por os alunos estarem organizados em grupo durante a realização da tarefa.

4.1.2 Questão 2: Que dificuldades revelam na escrita matemática? Qual o tipo de linguagem com que os alunos se sentem mais à vontade?

Este estudo permitiu registar algumas dificuldades reveladas pelos alunos em relação à comunicação escrita. Nem sempre os alunos conseguem ser claros, encadear as suas ideias de forma coerente e transmitir o que sabem.

Uma das suas principais dificuldades diz respeito ao pouco domínio sobre os conceitos próprios da matemática, que leva os alunos, por vezes, a escrever frases com pouco sentido ou utilizar termos que não se aplicam à situação, como se observa nas resoluções da tarefa 1 e 3. Na tarefa 3 era necessário escrever um texto para justificar a opção tomada e foi natural surgirem algumas dificuldades nas várias resoluções a nível da escolha de palavras e organização de frases, ou seja, na conversão de pensamentos em palavras, refletindo a dificuldade em construir justificações coerentes e talvez em estabelecer ligações entre o próprio conhecimento e o que se pretende justificar, dificuldades também observadas por Magalhães e Martinho (2010). Embora se compreendesse a ideia que os alunos pretendiam exprimir, uma análise mais rigorosa a nível da linguagem e da matemática, deixava a descoberto algumas frases com pouco sentido, como por exemplo, a que foi escrita pelo grupo "apresentam uma área inferior ao do centro da circunferência".

As gravações evidenciaram a dificuldade em justificar, admitida pelos alunos, indo ao encontro da opinião de Carvalho e Pimenta (2005) quando referem que o insucesso resulta muitas vezes com a incapacidade de verbalizar os conhecimentos e não da falta dos mesmos. Numa das passagens, durante a realização da tarefa 3, um aluno do grupo 4 admite muito claramente que sabia a resposta, mas não conseguia escrever a justificação, exibindo assim as suas dificuldades para converter os pensamentos em palavras.

A utilização de algumas representações simbólicas revelou também dificuldades, nas poucas vezes que os alunos a ela recorreram. Exemplo disso foi a confusão entre o uso do símbolo "$\wedge$ " e o símbolo " $\cap$ " foi observada mais que uma vez, quando os alunos queria escrever a interseção entre dois intervalos de números reais.

Foi da análise à ficha por partes que mais dificuldades surgiram, o que é facilmente explicado, pois ao contrário das tarefas anteriores, as questões da ficha por partes não foram respondidas em grupo. Nas alíneas c) e d), por exemplo, salta rapidamente à vista as diferenças de respostas corretas entre uma e outra, sendo que ambas questionavam os alunos sobre a mesma coisa. A diferença é que o enunciado da c) recorria à representação simbólica, enquanto na alínea d) o enunciado estava escrito exclusivamente recorrendo à representação verbal. Os alunos tiveram mais facilidade em interpretar a primeira, sendo que 7 alunos responderam corretamente apenas a essa alínea. Na alínea e) o desequilíbrio foi mais significativo, mas os alunos tenderam a errar mais relativamente à representação simbólica. Neste caso, 15 dos 25 alunos responderam corretamente apenas à questão colocada utilizando a representação simbólica. A dificuldade da maior parte destes 15 alunos foi é relacionada com a interpretação, já que vários deles não responderam ao que foi pedido, ou nem sequer responderam mesmo, na segunda afirmação, mas não sentiram dificuldades em responder à primeira. Tal com refere Costa (2007) muitas vezes a dificuldade é perceber os enunciados e esse tipo de dificuldades pode levar os alunos a desistir de responder. Segundo o mesmo autor, a interpretação de um enunciado implica o conhecimento da linguagem, o que nos dá um sinal que os alunos não conhecem o significado dos símbolos utilizados no enunciado. Estes dados são algo contraditórios, pois nas alíneas c) e d) os alunos preferiram a representação simbólica enquanto na alínea e) preferiram a representação verbal, tornando impossível concluir sobre que tipo de linguagem os alunos preferem. Percebe-se a dificuldade na passagem da representação simbólica para a língua materna e vice-versa, que é, segundo Duval (2006) uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos.

De facto, a interpretação foi um dos aspetos que suscitou mais problemas aos alunos. Um bom exemplo disso acontece durante a realização da tarefa 3, quando o grupo 2 que teve dificuldade em entender o significado da letra que representava a variável da função e onde foi necessária a intervenção do professor. Foi, também, o caso da tarefa 2. Esta tarefa foi a que provocou menos dificuldades aos alunos, ainda assim, na sua alínea b) gerou-se confusão em praticamente todos os grupos, que não conseguiam perceber qual era a origem e o destino em questão. Neste caso, discussão entre os elementos dos grupos ou com o professor foi suficiente para dissolver esta dúvida de interpretação e permitir aos alunos resolver a tarefa escrita, confirmando a ideia de que a interpretação é um requerimento para a resolução de tarefas matemáticas (Moje et al, 2004) e que para avaliar a capacidade comunicativa dos alunos é preciso perceber eles conseguem compreender e interpretar o que lhes é apresentado por escrito (Martins, 2012).

4.1.3 Questão 3: Como evoluem os alunos nas suas justificações e na escrita matemática ao longo das várias tarefas escritas realizadas?

Ao longo desta intervenção constatou-se que os alunos, de tarefa para tarefa, estranhavam menos que lhes fosse pedido para justificar respostas e escrever explicações. Entre as tarefas não se denotou uma melhoria muito significativa na forma de escrever, mas acredito que o período de tempo entre elas foi curto para que os alunos apresentarem melhorias significativas. Ter realizado as tarefas em grupo, pode ter permitido aos alunos desenvolverem as suas capacidades, pois em alguns momentos ficou gravado que os elementos do grupo se corregiam mutuamente. Além disso as tarefas pediam tipos de justificações diferentes entre si. Na ficha por partes, já apareceu uma questão com uma estrutura parecida com a tarefa 3. Os resultados dessa questão foram bastante positivos, tendo os alunos, em média, alcançado 25,5 pontos em 3 possíveis, não tendo nenhum aluno deixado a resposta em branco. Acredito que estes resultados teriam sido bastante mais baixos sem a realização da tarefa 3. Na resposta a esta questão já foram utilizados vários conceitos matemáticos, como: gráfico, variáveis, distância, ponto, reta, raio, circunferência, corda ou constante. Este estudo teve por base que o exercício da escrita desenvolve tanto a capacidade de escrita matemática como os próprios conhecimentos dos alunos (S. Santos, 2005; Freitas, 2006; Pimm, 1999; Smole & Diniz, 2001; Cândido, 2001). Infelizmente, os dados recolhidos na intervenção não permitem confirmar essa ideia. No entanto, as várias produções escritas permitiram um maior conhecimento sobre a escrita dos alunos e as suas dificuldades, que ajudou o professor a planear as suas aulas de forma a tentar atenuar algumas dessas dificuldades, tal como defendiam Fernandes (2005) e Nacarato e Penha (2008).

4.2 Implicações no ensino e aprendizagem

Várias ideias podem ser retiradas deste estudo para tentar construir um processo ensino aprendizagem que melhor desenvolva as capacidades matemáticas dos alunos, em especial a capacidade de comunicação, o tema central aqui em destaque.

A comunicação tem um papel mais importante na educação matemática do que se possa pensar à primeira vista. Tal como Lambert e Cobb (2003) referem, a comunicação é ao mesmo tempo uma metodologia e um objetivo curricular. É, por exemplo, através dela que os professores ensinam os alunos, assim como, é também pela comunicação que os alunos transmitem o nível dos seus conhecimentos.

Várias vezes se refere, neste estudo, que a comunicação é um importante mecanismo para o desenvolvimento das capacidades dos alunos, como por exemplo o raciocínio matemático e o domínio dos conceitos que fazem parte da disciplina. No PMEB (2007) lê-se que o desenvolvimento da comunicação é essencial para que os alunos possam participar ativamente e de forma construtiva no seu processo de aprendizagem. Neste processo, comunicação escrita tem especial importância, pois para escrever o que sabe, o aluno, antes de escrever para os outros, entra em diálogo consigo próprio, sendo obrigado a refletir sobre os seus conhecimentos e possibilitando a criação de uma rede de significados (Ponte et al, 2007). Para tal, é necessário criar oportunidades aos alunos para pôr em prática a escrita matemática, nas mais variadas situações, seja trabalho de grupo ou individual, seja em tarefas de investigação, exploração e resolução de problemas.

A linguagem matemática é composta por diferentes representações, entre as quais a língua materna e a representação simbólica. Os alunos precisam de estar familiarizados com ambas as representações, para conseguirem mostrar o que sabem e, também, interpretar enunciados e textos matemáticos. O pouco domínio da linguagem é muitas vezes a causa do insucesso nesta disciplina.

Neste estudo verificou-se que as produções escritas dão importantes informações aos professores sobre os conhecimentos dos alunos, tal como Sandra Santos (2005) defende. Ao longo da intervenção tentou-se provocar os alunos a justificar as suas ideias e tentar escrevê-las, acreditando-se que esta estratégia poderá ter, a longo prazo, efeitos positivos nas aprendizagens dos alunos.

4.3 Recomendações e limitações

A análise realizada neste estudo deu enfâse forma como os alunos justificam as suas respostas e que tipo de representações é utilizado nessas mesmas justificações. Devido ao pouco tempo em que a intervenção pedagógica ocorre, ao número de aulas e a necessidade de cumprir o programa, não foi possível propor mais tarefas para analisar o "*feedback*" dado e tentar perceber como desenvolver realmente as capacidades dos alunos. Faltou assim responder à questão de investigação número 3 e verificar se existiu evolução nos alunos e de que forma ele aconteceu. O ideal seria analisar várias produções escritas ao longo de um ano letivo, procurando comparar as produções antes e após *feedback*. Uma ideia que seria interessante pôr em prática seria solicitar não só as justificações de resultados, mas também as várias explicações de procedimentos realizados ao longo de uma tarefa escrita.

A turma onde o estudo se desenvolveu já estava bastante habituada a trabalhar em grupo, e resolveu-se aproveitar essa situação para perceber como os alunos decidiam o que escrever em situações de trabalho de grupo. Porém, talvez essa decisão tenha sido um entrave a perceber quais são as reais dificuldades dos elementos dos grupos que menos contribuíam durante a resolução das tarefas de grupo, pois normalmente foi aluno com menos dificuldades a escrever os textos e justificar os resultados.

Uma sugestão interessante, para futuros estudos, seria estudar a escrita dos alunos durante tarefas onde exista interação dos alunos com as tecnologias ao serviço do ensino de matemática, tais como a calculadora gráfica ou o *GeoGebra*. O objetivo seria perceber como os alunos entendem as informações que estas ferramentas nos facultam e como conseguem comunicar por escrito as conclusões delas retiradas, assim como justificar os resultados obtidos através delas.

BIBLIOGRAFIA

Adams, A. E., & Pegg, J. (2012). Teachers' enactment of content literacy strategies in secondary science and mathematics classes. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 56*(2), 151–161.

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M., & Faulconer, J. (2010). Assesing Understanding Through Reading and Writing in Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Acedido em: 10 Março de 2014, em: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/adugyamfi.pdf

Alves, C., & Fonseca, L. (2012) Comunicação escrita de alunos do 6.º ano de escolaridade. In: H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. I. Silvestre & C. Nunes (Org). *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 581-594). Coimbra: Associação de Professores de Matemática.

Bandeira, E. (2009). Linguagem escrita em aulas de matemática: Uma experiência em sala de aula. In: *X encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Acedido em: 13 Março de 2014, em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_25.pdf

Bishop, A., J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.) *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico: Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'água.

Cabrita, I., & Fonseca, L. (2012). Capacidades transversais em educação matemática. In: H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. I. Silvestre & C. Nunes (Org). *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 539-544). Coimbra: Associação de Professores de Matemática.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In: K. S. Smole & M. I. Diniz, M. I. (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática (pp. 15-28).* Porto Alegre: Artmed.

Carrasco, L. (2000). Leitura e escrita na matemática. In: L. Neves (Org.). *Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas (pp. 190-202).* Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS.

Carrasco, L. (2003). Ler, escrever e compreender matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: I. Neves (Org.). *Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas* (pp. 177-189). São Paulo: Ed. Universidade/UFRGS.

Carvalho, J., & Pimenta, J. (2005). Escrever para aprender, escrever para exprimir o aprendido. In: B. Silva, L. Almeida (Orgs), *Atas do congresso Galaico-Português de psicopedagogia* (pp. 1877-1886). Braga: Universidade do Minho.

Costa, A. (2007). *A importância da Língua Portuguesa na aprendizagem da Matemática*. Dissertação de Mestrado em Estudos da Criança - Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática. Braga: Universidade do Minho.

Coura, F. (2008). *A escrita matemática em uma turma de 6º série do ensino fundamental.* Dissertação de mestrado – pós graduação em educação. Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG.

Domingos, A. (2005). Normas sociomatemáticas nas aulas do ensino superior. In: A. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres, J. Duarte, T. O. Duarte (Eds.), *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 403-413). Setúbal: Associação de Professores de Matemática.

Draper, R. J. (2010). *(Re)Imagining content-area literacy instruction*. New York: Teachers College Press.

Duval, R. (2003). Registos de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In S. Machado (Org), *Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of comprehension in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Fernandes, D. (2005). *A Avaliação das Aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas.* Lisboa: Texto Editores.

Fernandes, D. (2007). Um Imperativo Ético. *Educação e Matemática*, *94,* 1.

Freitas, M. (2006). *A Escrita no processo de formação contínua do professor de matemática*. Tese de doutoramento em educação matemática. Campinas: Faculdade de Educação, Unicamp.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento em Educação (Didática da Matemática). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

IGE (2009). *Avaliação externa das escolas: Relatório da escola Secundaria de Barcelos – Barcelos*. Acedido em 4 de Novembro de 2013 em: http://www.esec-barcelos.rcts.pt/aval_ext/Relatorio_ES_de_Barcelos_403799.pdf

Klusener, R. (2003). Leitura e escrita na matemática. In: I. Neves (Org.). *Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas* (pp. 192-206). São Paulo: Ed. Universidade/UFRGS.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and learning in the mathematics classroom. In J. Kilpatrick & D. Shifter (Eds). *Research Companion to the NCTM Standards.* (pp. 237-249). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2010). A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Uma experiência numa turma do 11º ano. Em H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Org.), *Atas do XXI SIEM* (pp. 156-171). Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Martins, P. (2012). *Comunicação escrita matemática de alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade de Lisboa.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Menezes, L. (1996). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* (pp. 105-116). Lisboa: Secção de Educação Matemática - Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Menezes, L. (2000). *Matemática, linguagem e comunicação*. Conferência proferida no ProfMat 99, Portimão, Portugal. Acedido em Abril 2014, em: www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm em Abril 2014.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A (10º ano)*. Lisboa: Ministério da Educação.

Moje, E., Ciechanowski, K., Kramer, K., Ellis, L., Carrilo, R., & Collazo, T. (2004). Working toward third space in content area literacy: An examination of everyday funds of knowledge and discourse. *Reading Research Quarterly, 39*(1), 38–70.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ntenza, S. (2004). Teacher's perceptions of the benefits of children writing in mathematics classrooms. *For the learning of Mathematics, Kingston, 24*(1), 13-19.

Ntenza, S. (2006). Investigating forms of children‟s writing in grade 7 mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 321-345.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspeto do método matemático.* Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática da Matemática: Ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J., & Serrazina, M. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Projeto Educativo da Escola Secundária de Barcelos (2005). Acedido em 10 de Dezembro de 2013 em: http://www.esbarcelos.pt/doc.php?co=1178

Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. In *atas do Profmat2006*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Santos, S. (2005). Exploração da linguagem escrita nas aulas de matemática. Em: A. Nacarato & C. Lopes (Org.). *Escritas e leituras na Educação Matemática* (pp. 127-141). Belo Horizonte: Autêntica.

Santos, V. (2005). Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: A. Nacarato & C. Lopes (eds.). *Escritas e Leituras na Educação Matemática* (pp. 117-125). Belo Horizonte: Autêntica.

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2008). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Smole, K., & Diniz, M. (2001). *Ler escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Sousa, F., Cebolo, V., Alvez, B., & Mamede, E. (2009). *Comunicação matemática: Contributos do PFCM na reflexão das práticas de professores*. Acedido em 13 Abril 2014 em: http://www.apm.pt/files/_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf

Wilson, A. (2011). A social semiotics framework for conceptualizing content area literacies. *Journal of Adolescent and Adult Literacy*. *54*, 435-444.

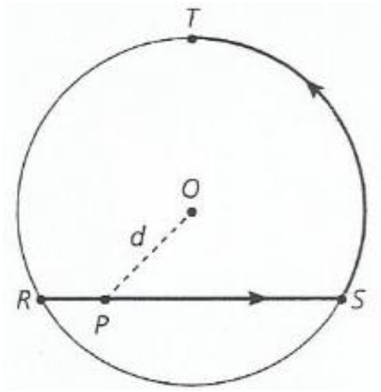
ANEXOS

ANEXO I

Ficha por Partes

NOME: Nº 10ºB

1. Na figura está representada uma circunferência de centro O e que contém os pontos S, R e T.

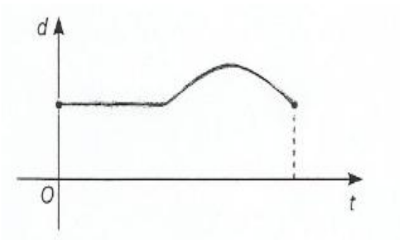


Um ponto P desloca-se ao longo do trajeto que a figura sugere: P inicia o percurso em R e termina-o em T, percorrendo, sucessivamente e sem parar, a corda $[RS]$ e o arco ST.

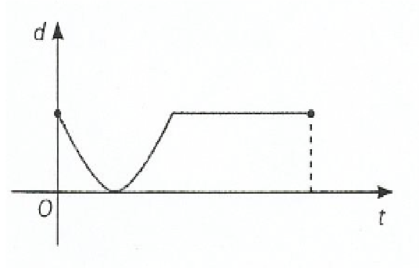
Para cada posição do ponto P, seja t o tempo decorrido desde o início do percurso e seja d a distância do ponto P ao ponto O.

Apenas um dos gráficos a seguir representados pode relacionar corretamente as variáveis t e d.

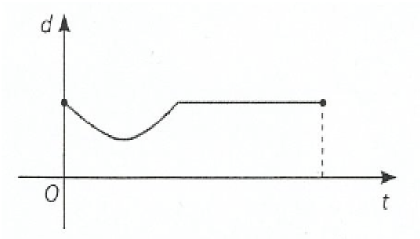
(A)



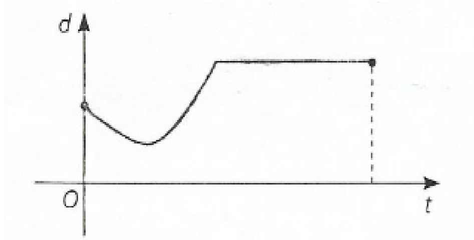
(B)



(C)

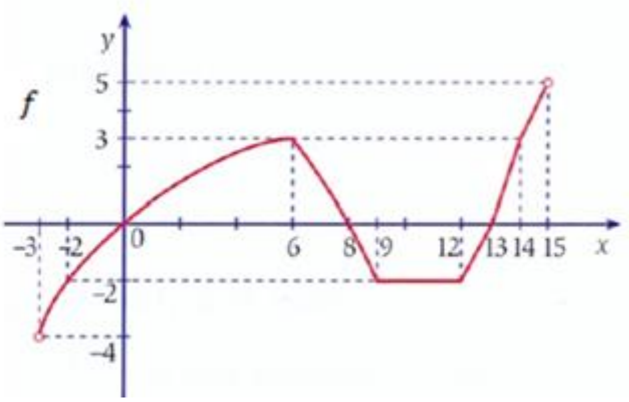


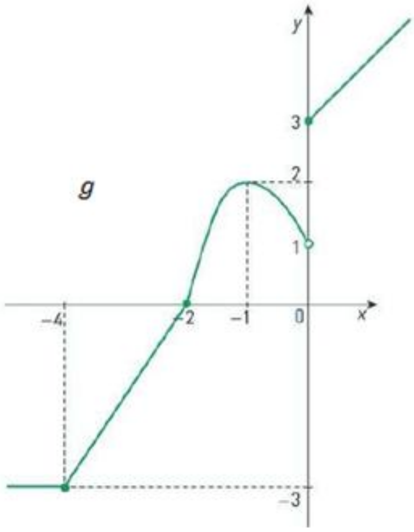
(D)



Num pequeno texto indique o gráfico que pode relacionar corretamente as variáveis t e d e apresente, para cada um dos gráficos rejeitados, uma razão pela qual o considerou incorreto.

2. Considere as funções f e g representadas graficamente.





a) Indique os zeros da função f.

b) Indique os valores de x para os quais $g(x) = 0$.

c) Indique os valores de x tais que $f(x) > 0$.

d) Indique os valores de x para os quais a função g é positiva.

e) Comente as seguintes afirmações:

Afirmação I. A função f é injetiva. **Afirmação II**. $\forall\, a, b \in D_g \quad se \quad a \neq b \Rightarrow g(a) \neq g(b)$

f) Indique o domínio de f e o contradomínio de g.

3. Um canalizador, o senhor António, cobra pelo seu trabalho ao domicilio uma taxa de $3{,}75€$ acrescida de $7€$ por cada hora de trabalho.

Para responder aos itens que se seguem, considere que o canalizador trabalha no máximo 8 horas por dia.

O senhor António foi arranjar a canalização da cozinha da dona Augusta.

a) Represente por uma expressão analítica a função C que relaciona o número de horas de trabalho t, com o valor a pagar, em euros, pelo serviço prestado à dona Augusta.

b) Calcule, **analiticamente**, $C(1{,}5)$ e explique o seu significado no contexto do problema.

4. O Manuel encontrou um gafanhoto em cima de um muro. Quando o gafanhoto saltou, a sua altura a em relação ao chão (em centímetros), variou com o tempo t (em segundos) de acordo com a seguinte equação:

$$a(t) = -30t^2 + 20t + 80.$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine a altura máxima atingida pelo gafanhoto.

Reproduza o gráfico obtido na calculadora **atendendo ao contexto** da situação apresentada. Pela observação do gráfico, deverá ser possível identificar o domínio, o contradomínio e as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de a com os eixos coordenados.

Questão	**1**	**2a)**	**2b)**	**2c)**	**2d)**	**2e)**	**2f)**	**3a)**	**3b)**	**4**
Cotação	3	1,5	1,5	2	2	2	2	1,5	1,5	3

O professor estagiário, *André Castro*

O orientador, *Paulo F. Correia*

Critérios de classificação da questão 2 da ficha por partes.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Nos itens que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Níveis	**Descritores**
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e /ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda frequente de inteligibilidade e/ou desempenho.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. Cada erro de carácter matemático, que não implique perda de sentido na explicação, implica a perda de um ponto.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Questão 1……………………………………………………………………………………30 Pontos

Indicar a hipótese correta………………………………………5 Pontos

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Apresentar um argumento correto.	5	4	3
Apresentar dois argumentos corretos.	15	13	11
Apresentar três argumentos corretos.	25	22	19

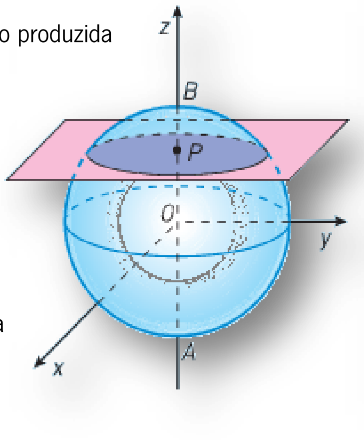
ANEXO II

Tarefa 3

Tarefa 3

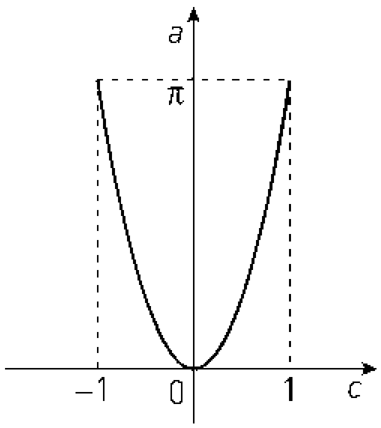
Considere num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$ que está contido no eixo Oz.

Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy. Seja g a função que faz corresponder à cota c do ponto P a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano.

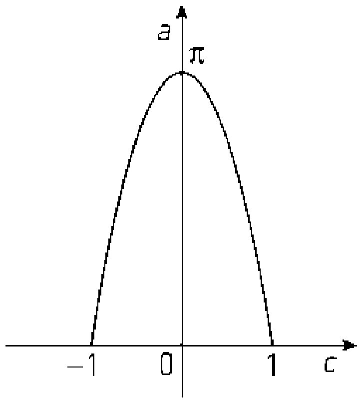


Em qual das figuras seguintes pode estar o gráfico da função g? Numa pequena composição explique porque não pode ser nenhum dos outros três, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

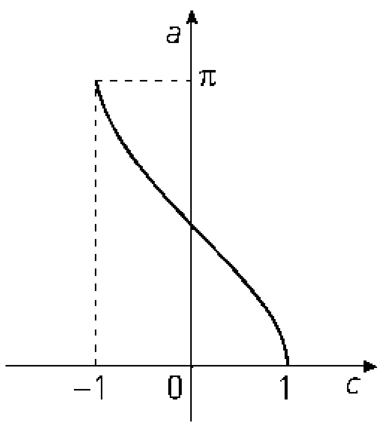
(A)



(B)



(C)



(D)