As equações de campo da gravitação

De *A. Einstein.*

Tradução de
Irene Brito
Universidade do Minho
e-mail: `ireneb@math.uminho.pt`

Resumo: Tradução a partir do original alemão “Die Feldgleichungen der Gravitation”, A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844-847, 25.11.1915 (As equações de campo da gravitação, A. Einstein, Atas da Academia Prussiana das Ciências de Berlim). Este artigo é continuação do trabalho “Zur allgemeinen Relativitätstheorie” de A. Einstein publicado nas Atas XLIV da Academia Prussiana das Ciências de Berlim com o título “Sobre a teoria da relatividade geral”. Em particular, o artigo faz referência às pp. 778-786 e às equações (21) e (22) do trabalho publicado nas Atas XLIV, e cita estas equações como (21) loc.cit. e (22) loc.cit.. A tradução do trabalho publicado nas Atas XLIV junta-se aqui a seguir à tradução deste artigo.

Em duas comunicações publicadas recentemente[1] mostrei como é possível obter as equações de campo da gravitação, que correspondem ao postulado da relatividade geral, isto é, que na sua versão geral são covariantes em relação a quaisquer substituições das variáveis do espaço-tempo.

Aí, o processo de desenvolvimento foi o seguinte. Primeiro encontrei equações, que contêm a teoria newtoniana como aproximação e que eram covariantes em relação a quaisquer substituições do determinante[2] 1. Depois descobri que a estas equações correspondem equações covariantes gerais se desaparecer o escalar do tensor de energia da “matéria”. O sistema de coordenadas era assim definido segundo a regra simples de $\sqrt{-g}$ ter que ser igual a 1, pelo que as equações da teoria se simplificam notavelmente. Mas aí, como já referido, teria que ser introduzida a hipótese de o escalar do tensor de energia da matéria desaparecer.

Recentemente, tenho agora a opinião de que se pode passar sem as hipóteses sobre o tensor de energia da matéria, se se introduzir nas equações de

[1] Atas XLIV, p.778 e XLVI, p.799, 1915.

[2] [Nota da tradutora: Isto significa que $\sqrt{-g} = 1$.]

campo o tensor de energia da matéria de uma maneira diferente da apresentada nas minhas duas comunicações anteriores. As equações de campo para o vácuo, na qual fundamentei a explicação sobre o movimento do periélio do Mercúrio, não se alteram com esta modificação. Eu apresento aqui outra vez toda a abordagem, para que o leitor não necessite de ver constantemente as comunicações anteriores.

A partir do covariante de Riemann de ordem quatro deduz-se os seguintes covariantes de ordem dois:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \tag{1}$$

$$R_{im} = -\sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,m \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} i\,l \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\,\rho \\ l \end{Bmatrix} \tag{1a}$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} i\,m \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho\,l \\ l \end{Bmatrix} \tag{1b}$$

Obtemos as dez equações covariantes gerais dos campos de gravitação em espaços, em que falta "matéria", fixando

$$G_{im} = 0. \tag{2}$$

Estas equações podem ser apresentadas de maneira mais simples, se se escolher o sistema de referência de modo que $\sqrt{-g} = 1$. Então desaparece S_{im} por causa de (1b), de maneira que, em vez de (2) se obtém

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^l_{i\rho} \Gamma^\rho_{ml} = 0 \tag{3}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3a}$$

Aqui é estabelecido que

$$\Gamma^l_{im} = -\begin{Bmatrix} i\,m \\ l \end{Bmatrix} \tag{4}$$

cujas grandezas designamos por "componentes" do campo de gravitação.

Se no espaço considerado existe "matéria", então aparece o seu tensor de energia no lado direito de (2), respetivamente, de (3). Nós estabelecemos que[3]

$$G_{im} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \tag{2a}$$

em que

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma} = T; \tag{5}$$

T é o escalar do tensor de energia da "matéria", o lado direito de (2a) é um tensor. Se distinguirmos outra vez o sistema de coordenadas de modo usual, então obtemos em lugar de (2a) as equações equivalentes

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma_{im}^{l}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma_{i\rho}^{l} \Gamma_{ml}^{\rho} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \tag{6}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3a}$$

Como sempre, assumimos que a divergência do tensor de energia-momento desaparece no sentido do cálculo diferencial geral (teorema do impulso). Distinguindo a escolha de coordenadas segundo (3a) isto leva a que os T_{im} devem satisfazer as condições

$$\sum_{\tau} \frac{\partial T_{\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu} \tag{7}$$

ou

$$\sum_{\tau} \frac{\partial T_{\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = -\sum_{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} T_{\mu}^{\nu}. \tag{7a}$$

Multiplicando (6) por $\dfrac{\partial g^{im}}{\partial x_{\sigma}}$ e somando sobre i e m, então, respeitando (7) e a seguinte relação de (3a)

$$\frac{1}{2} \sum_{im} g_{im} \frac{\partial g^{im}}{\partial x_{\sigma}} = -\frac{\partial lg \sqrt{-g}}{\partial x_{\sigma}} = 0$$

obtém-se[4] o teorema de conservação para a matéria e o campo de gravitação na forma

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(T_{\sigma}^{\lambda} + t_{\sigma}^{\lambda} \right) = 0, \tag{8}$$

[3][Nota da tradutora: $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, onde c é a velocidade da luz e G é a constante gravitacional.]

[4]Sobre a dedução cf. Atas XLIV, 1915, p.784/785. Peço ao leitor que consulte também o desenvolvimento apresentado na p.785 para comparação com o que se segue.

em que t_σ^λ (o "tensor de energia" do campo de gravitação) é dado por

$$\kappa t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \sum g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda. \tag{8a}$$

As razões que me levaram a introduzir o segundo termo do lado direito de (2a) e (6) clarificam-se só a partir das seguintes reflexões, que são análogas às apresentadas no sítio há pouco referido (p.785).

Se multiplicarmos (6) por g^{im} e somarmos sobre os índices i e m, então obtemos após um cálculo simples

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \kappa(T + t) = 0, \tag{9}$$

em que, correspondentemente a (5), é usada para abreviatura

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} t_{\rho\sigma} = \sum_\sigma t_\sigma^\sigma = t. \tag{8b}$$

Observe-se que o nosso termo adicional tem como consequência, que em (9) o tensor de energia do campo gravitacional aparece ao lado do da matéria de forma igual, o que não é o caso na equação (21) loc.cit..

Além disso, deduz-se, em vez da equação (22) loc.cit. do mesmo modo lá indicado com a ajuda da equação de energia, as relações

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \kappa(T + t)\right] = 0. \tag{10}$$

O nosso termo adicional implica que estas equações não contêm nenhuma condição nova em relação a (9), de tal modo que o tensor da matéria não precisa de obedecer a outra hipótese senão à de que corresponde ao teorema do impulso.

Com isto está finalmente concluída a teoria da relatividade geral como construção lógica. O postulado de relatividade na sua versão geral, que transforma as coordenadas de espaço-tempo em parâmetros sem significado do ponto de vista físico, leva com necessidade obrigatória a uma determinada teoria de gravitação, que explica o movimento do periélio do Mercúrio. Pelo contrário, o postulado geral da relatividade não consegue revelar nada sobre a essência dos processos restantes da natureza além do que a relatividade restrita já não tenha explicado. A minha opinião a este respeito, apresentada recentemente, estava errada. Cada teoria física que está de acordo com a teoria da relatividade restrita pode, por meio do cálculo diferencial absoluto, ser integrada no sistema da teoria da relatividade geral, sem que esta última apresentasse algum critério para a legitimidade dessa teoria.

Distribuído no dia 2 de dezembro.