Sobre a teoria da relatividade geral

De *A. Einstein.*

Tradução de
Irene Brito

Resumo: Tradução a partir do original alemão "Zur allgemeinen Relativitätstheorie", A. Einstein, Sitzungsberichte XLIV der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 778-786, 4.11.1915 (Sobre a teoria da relatividade geral, A. Einstein, Atas XLIV da Academia Prussiana das Ciências de Berlim).
Em anexo a esta tradução são apresentadas as equações de "Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" (O fundamento formal da teoria de relatividade geral, A. Einstein, Atas XLI, 1066-1077, 1914) citadas neste artigo (por "loc. cit.").

Nos últimos anos esforcei-me por fundar uma teoria de relatividade geral no pressuposto da relatividade de movimentos não uniformes também. De facto pensei ter descoberto a única lei de gravitação, que corresponde ao sentido do postulado da relatividade geral, e procurei mostrar a necessidade desta solução num trabalho[1] que apareceu nestas atas do ano anterior.

Uma nova crítica mostrou-me que essa necessidade, no caminho lá adotado, não é possível ser demonstrada de forma absoluta; mas que isto parecia ser o caso devia-se a um erro. O postulado da relatividade, que eu lá exigia, é sempre satisfeito, desde que se baseie no princípio Hamiltoniano; mas na verdade não fornece um pretexto para determinar a função Hamiltoniana H do campo de gravitação. De facto, a escolha de H restringida pela equação (77) loc. cit. só exprime que H deve ser um invariante em relação a transformações lineares, cuja exigência não tem nada a haver com a relatividade da aceleração. Além disso, a escolha tomada através da equação (78) loc. cit. não é de maneira alguma fixada pela equação (77).

Por estas razões perdi completamente a confiança nas equações de campo estabelecidas por mim e procurei um caminho que limitasse as possibilidades

[1] O fundamento formal da teoria de relatividade geral. Atas XLI, 1914, p.1066-1077. No que se segue, as equações deste tratado serão distinguidas das do presente trabalho adicionando "loc. cit." à citação.

de uma forma natural. Assim voltei à exigência de uma covariância geral das equações de campo, da qual me tinha separado, a muito custo, só há três anos quando trabalhava com o meu amigo Grossmann. De facto, na altura, já estávamos muito próximos da solução do problema exposta a seguir.

Assim como a teoria de relatividade restrita se baseia no postulado de que as suas equações devem ser covariantes em relação a transformações lineares ortogonais, assim se assenta a teoria aqui exposta no postulado de covariância de todos os sistemas de equações em relação a transformações com o determinante de substituição 1.

Da magia desta teoria ninguém que realmente a percebeu conseguirá escapar; ela significa um verdadeiro triunfo do método de cálculo diferencial geral estabelecido por Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci e Levi-Civita.

§1 Leis de formulação covariante

Como no meu trabalho do ano passado apresentei detalhadamente os métodos do cálculo diferencial absoluto, posso aqui resumir as leis de formulação covariante que aqui vão ser usados; só precisamos de analisar o que se vai alterar na teoria de covariantes, ao permitir só substituições do determinante 1.

A equação válida para quaisquer substituições[2]

$$d\tau' = \frac{\partial(x_1' \cdots x_4')}{\partial(x_1 \cdots x_4)} d\tau$$

transforma-se, como consequência da premissa da nossa teoria

$$\frac{\partial(x_1' \cdots x_4')}{\partial(x_1 \cdots x_4)} = 1, \tag{1}$$

em

$$d\tau' = d\tau; \tag{2}$$

o elemento de volume de dimensão quatro $d\tau$ é então um invariante. Como, além disso (equação (17) loc. cit.) $\sqrt{-g}d\tau$ é um invariante em relação a substituições arbitrárias, então o grupo que nos interessa é também

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} \tag{3}$$

[2][Nota da tradutora: x_1, x_2, x_3, x_4 são as coordenadas no espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}$.]

O determinante dos $g_{\mu\nu}$ é então um invariante. Graças ao caráter escalar de $\sqrt{-g}$, as fórmulas fundamentais da formulação covariante permitem uma simplificação em relação às que são válidas para covariância geral, que, dito de forma breve, se baseia no facto de nas fórmulas fundamentais os fatores $\sqrt{-g}$ e $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ já não aparecerem, e a diferença entre tensores e V-tensores[3] desaparece. Em particular resulta o seguinte:

1. Em vez dos tensores $G_{iklm} = \sqrt{-g}\delta_{iklm}$
   e $G_{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta_{iklm}$
   ((19) e (21a) loc. cit.) aparecem agora os tensores mais simples

$$G_{iklm} = G^{iklm} = \delta_{iklm} \tag{4}$$

2. As fórmulas fundamentais (29) loc. cit. e (30) loc. cit. para a extensão de tensores não podem ser substituídas por fórmulas mais simples, por causa da nossa premissa, mas sim a equação da definição da divergência, que consiste na combinação das equações (30) loc.cit. e (31) loc. cit.. Ela pode escrever-se assim[4]

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \sum_s \frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\,\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s} + \cdots \begin{Bmatrix} s\,\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\tau s}\right] + \sum_{s\tau}\begin{Bmatrix} s\,\tau \\ s \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\cdots\alpha_l\tau}. \tag{5}$$

Agora, segundo (24) loc. cit. e (24a) loc. cit. tem-se

$$\sum_\tau \begin{Bmatrix} s\,\tau \\ s \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha s} g^{s\alpha}\left(\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial g_{s\tau}}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\sum g^{s\alpha}\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau} = \frac{\partial(lg\sqrt{-g})}{\partial x_\tau}. \tag{6}$$

Esta quantidade tem então, por (3), carácter vetorial. Como consequência, o último termo do lado direito de (5) é um tensor contravariante de ordem l. Por isso estamos autorizados a substituir (5) pela

[3][Nota da tradutora: V-tensores (tensores de volume) são tensores que são multiplicados por $\sqrt{-g}$.]

[4][Nota da tradutora: Em notação moderna a equação escreve-se da forma

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s} - [\Gamma^{\alpha_1}_{s\tau}A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s} + \cdots\Gamma^{\alpha_l}_{s\tau}A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\tau s}] - \Gamma^{s}_{s\tau}A^{\alpha_1\cdots\alpha_l\tau}.]$$

seguinte definição mais simples da divergência

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \sum \frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\,\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s} + \cdots \begin{Bmatrix} s\,\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\tau s}\right], \tag{5a}$$

o que queremos fazer consequentemente. Assim, a definição (37) loc. cit.

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}A^\mu\right)$$

seria substituída pela definição mais simples

$$\Phi = \sum_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu}, \tag{7}$$

a equação (40) loc. cit. para a divergência do seis-vetor[5] contravariante, pela mais simples

$$A^\mu = \sum_\nu \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{8}$$

Em vez de (41a) loc. cit., aparece devido ao que fixamos

$$A_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial A_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}A_\tau^\nu. \tag{9}$$

Uma comparação com (41b), mostra que, para a nossa fixação, a lei para a divergência é a mesma que a lei para a divergência do V-tensor, segundo o cálculo diferencial geral. É possível deduzir facilmente de (5) e (5a) que esta observação é válida para várias divergências de tensores.

3. A simplificação mais radical leva a nossa limitação a transformações do determinante 1 para os covariantes que podem ser construídos somente a partir de $g_{\mu\nu}$ e das suas derivadas. A Matemática ensina que estes covariantes podem ser todos deduzidos a partir do tensor de Riemann-Christoffel de ordem quatro, que (na sua forma covariante) é expresso por[6]

[5] [Nota da tradutora: $A^{\mu\nu}$ é designado por seis-vetor porque é um tensor antissimétrico e tem, assim, seis componentes independentes.]

[6] [Nota da tradutora: Em notação moderna o tensor é expresso por $R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right) + \Gamma^\sigma_{im}\Gamma^\rho_{kl} - \Gamma^\sigma_{il}\Gamma^\rho_{km}$ e (12) escreve-se da forma $G_{im} = g^{kl}R_{iklm}$.]

$$(ik,\ lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right)$$
$$+ \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix} i\,m \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,l \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,l \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,m \\ \sigma \end{bmatrix}\right). \tag{10}$$

O problema da gravitação implica que nos interessemos sobretudo por tensores de ordem dois, que podem ser construídos a partir deste tensor de ordem quatro e $g_{\mu\nu}$ através da multiplicação interna. Por causa das propriedades de simetria evidenciadas por (10) do tensor de Riemann

$$\left.\begin{array}{rcl} (ik,\ lm) & = & (lm,\ ik) \\ (ik,\ lm) & = & -(ki,\ lm) \end{array}\right\} \tag{11}$$

essa construção só pode ser efetuada de uma maneira; obtendo-se o tensor

$$G_{im} = \sum_{kl} g^{kl}(ik,\ lm). \tag{12}$$

Vamos deduzir este tensor para o nosso objetivo de uma forma mais vantajosa a partir de uma segunda expressão do tensor (10), proposta por Christoffel, nomeadamente[7]

$$\{ik,\ lm\} = \sum_{\rho} g^{k\rho}(i\rho,\ lm) = \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,m \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_l}$$
$$+ \sum_{\rho}\left(\begin{Bmatrix} i\,l \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho\,m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,m \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho\,l \\ k \end{Bmatrix}\right). \tag{13}$$

Deste resulta o tensor G_{im}, ao multiplicá-lo por (multiplicação interna)

$$\delta_k^l = \sum_{\alpha} g_{k\alpha} g^{\alpha l} :$$

[7]Uma demonstração simples para o carácter tensorial desta expressão encontra-se na p. 1053 do meu trabalho citado várias vezes. [Nota da tradutora: “Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”, Atas XLI].

$$G_{im} = \{ik,\ lm\} = R_{im} + S_{im} \tag{13}$$

$$R_{im} = -\frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,m \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_\rho \begin{Bmatrix} i\,l \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho\,m \\ l \end{Bmatrix} \tag{13a}$$

$$S_{im} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \begin{Bmatrix} i\,m \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho\,l \\ l \end{Bmatrix} \tag{13b}$$

Restringindo-se a transformações do determinante 1, então não é só (G_{im}) um tensor, mas também (R_{im}) e (S_{im}) possuem carácter tensorial. De facto, segue da circunstância de $\sqrt{-g}$ ser um escalar, devido a (6), que $\begin{Bmatrix} i\,l \\ l \end{Bmatrix}$ é um quatro-vetor covariante. Mas (S_{im}) é, de acordo com (29) loc. cit., nada mais do que a extensão deste quatro-vetor, portanto também um tensor. Do carácter tensorial de (G_{im}) e (S_{im}) segue de (13) também o carácter tensorial de (R_{im}). Este último tensor tem para a teoria da gravitação grande importância.

§2 Observações sobre as leis diferenciais dos processos "materiais"

1. Teorema de impulsão-energia para a matéria (incluindo os processos eletromagnéticos no vácuo. Em vez da equação (42a) loc. cit. deve aparecer segundo as considerações do parágrafo anterior:

$$\sum_\nu \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_\tau^\nu + K_\nu; \tag{14}$$

onde T_σ^ν é um tensor usual, K_ν um quatro-vetor usual covariante (nenhum V-tensor, respetivamente V-vetor). A esta equação teremos que juntar uma observação importante para o que se segue. Esta equação de conservação levou-me, no passado, a considerar as quantidades

$$\frac{1}{2} \sum_\mu g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

como expressão natural para as componentes do campo de gravitação, apesar de, tendo em vista as fórmulas do cáclulo diferencial absoluto, ser melhor introduzir os símbolos de Christoffel

$$\begin{Bmatrix} \nu\,\sigma \\ \tau \end{Bmatrix}$$

em vez das outras quantidades. Isto foi um preconceito desastroso. Uma preferência do símbolo de Christoffel justifica-se sobretudo por causa da simetria dos dois índices de carácter covariante (aqui ν e σ) e porque o mesmo aparece nas equações importantes fundamentais da linha geodésica (23b) loc. cit., que, do ponto de vista físico, são as equações de movimento do ponto material num campo de gravitação. A equação (14) também não forma um contra-argumento, porque o primeiro termo do lado direito pode ser transformado em

$$\sum_{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \sigma\,\nu \\ \tau \end{Bmatrix} T^{\nu}_{\tau}.$$

Daí designamos no que se segue como componentes do campo de gravitação as quantidades

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \sigma \end{Bmatrix} = -\sum_{\alpha} g^{\sigma\alpha} \begin{bmatrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{bmatrix} = \\ -\frac{1}{2}\sum_{\alpha} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{15}$$

Se T^{ν}_{σ} designa o tensor de energia do acontecimento "material" total, então K_ν desaparece; o teorema da conservação (14) toma então a forma

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} T^{\beta}_{\alpha}. \tag{14a}$$

Fazemos notar que as equações de movimento (23b) loc.cit. do ponto material no campo de gravitação tomam a forma[8]

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{15}$$

2. Nas considerações dos parágrafos 10 e 11 do trabalho citado não se altera nada, só que agora as construções lá designadas por V-escalares e V-tensores têm carácter de escalares e tensores usuais.

[8] [Nota da tradutora: Estas são as equações das geodésicas em coordenadas $\{x_\mu\}$.]

§3 As equações de campo da gravitação

Depois do que foi dito é evidente fixar as equações de campo na forma[9]

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{16}$$

porque já sabemos que estas equações são covariantes em relação a transformações arbitrárias do determinante 1. De facto, estas equações satisfazem todas as condições que temos que estabelecer para elas. Escritas de forma detalhada, estas são, segundo (13a) e (15)

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{16a}$$

Queremos agora mostrar que estas equações de campo se podem escrever na forma hamiltoniana

$$\left.\begin{array}{c} \delta\left\{\int\left(\mathfrak{L} - \kappa\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)d\tau\right\} \\ \mathfrak{L} = \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha} \end{array}\right\} \tag{17}$$

em que $g^{\mu\nu}$ varia e $T_{\mu\nu}$ deve ser tratado como constante. É que (17) é equivalente às equações

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{18}$$

onde $\mathfrak{L}$ é pensada como função de $g^{\mu\nu}$ e $\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}(= g^{\mu\nu}_\sigma)$. Por outro lado, resultam de um cálculo longo, mas efetuado sem dificuldades, as relações

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \tag{19a}$$

Estas formam, juntamente com (18), as equações de campo (16a).

[9][Nota da tradutora: Einstein viria a corrigir estas equações no artigo “Die Feldgleichungen der Gravitation” (As equações de campo da gravitação).]

Agora também pode provar-se facilmente, que o princípio da conservação da energia e do impulso é satisfeito. Se se multiplicar (18) por $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ e somar sobre os índices μ e ν, obtém-se após transformações comuns

$$\sum_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\mathfrak{L}}{\partial x_\sigma} = -\kappa \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma}.$$

Por outro lado, segundo (14), tem-se para o tensor de energia total da matéria que

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T^{\lambda}_{\sigma}}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu}.$$

Das duas últimas equações resulta que

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T^{\lambda}_{\sigma} + t^{\lambda}_{\sigma}) = 0, \tag{20}$$

onde

$$t^{\lambda}_{\sigma} = \frac{1}{2\kappa}\left(\mathfrak{L}\delta^{\lambda}_{\sigma} - \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\lambda}}\right) \tag{20a}$$

designa o "tensor de energia" do campo gravitacional, que, de resto, só perante transformações lineares tem carácter de tensor. De (20a) e (19a) obtém-se depois de uma transformação simples

$$t^{\lambda}_{\sigma} = \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\sigma} \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} \tag{20b}$$

Finalmente, é ainda de interesse deduzir duas equações escalares que resultam das equações de campo. Se multiplicarmos (16a) por $g^{\mu\nu}$ e somarmos sobre μ e ν, então obtemos depois de uma transformação simples

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\beta}_{\tau\alpha} + \sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right) = -\kappa\sum_{\sigma} T^{\sigma}_{\sigma}. \tag{21}$$

Por outro lado, se multiplicarmos (16a) por $g^{\nu\lambda}$ e se somarmos sobre ν, então obtemos

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) - \sum_{\alpha\beta\nu} g^{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = -\kappa T^{\lambda}_{\mu},$$

ou, com respeito a (20b)

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\mu \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\kappa(T^\lambda_\mu + t^\lambda_\nu).$$

Daqui resulta ainda, tendo em conta (20), após uma transformação simples, a equação

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\right] = 0. \tag{22}$$

Mas nós exigimos, continuando um pouco, que

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha} = 0, \tag{22a}$$

de modo que (21) fica

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right) = -\kappa \sum_\sigma T^\sigma_\sigma. \tag{21a}$$

Da equação (21a) resulta que é impossível escolher o sistema de coordenadas de tal forma que $\sqrt{-g}$ seja igual a 1; porque o escalar do tensor de energia não pode ser anulado[10].

A equação (22a) é uma relação à qual estão subjugados só os $g_{\mu\nu}$ e que já não seria válida num novo sistema de coordenadas se resultasse de uma transformação proibida do sistema de coordenadas usado inicialmente. Esta equação exprime assim, como o sistema de coordenadas deve ser adaptado à variedade.

§4 Algumas observações sobre as qualidades físicas da teoria

As equações (22a) dão como primeira aproximação

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

[10][Nota da tradutora: Einstein viria a considerar $\sqrt{-g} = 1$ na sua versão final da teoria.]

Deste modo, o sistema de coordenadas ainda não está fixado, enquanto são necessárias 4 equações para a determinação do mesmo. Por isso, podemos estabelecer de modo arbitrário para primeira aproximação

$$\sum_{\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{22}$$

Além disso, queremos introduzir, para a simplificação da apresentação, o tempo imaginário como quarta variável. Então as equações de campo (16a) adotam como primeira aproximação a forma

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{16b}$$

da qual se torna evidente, que contém a Lei de Newton como aproximação.

O facto de que a relatividade do movimento de acordo com a nova teoria é efetivamente percebido, resulta de que entre as transformações permitidas estarem as que correspondem a uma rotação do novo sistema em relação ao antigo com velocidade angular arbitrariamente alterável, assim como transformações em que o ponto inicial do novo sistema realiza um movimento arbitrariamente prescrito no sistema antigo.

De facto, as substituições

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\tau + y\sin\tau \\ y' &= -x\sin\tau + y\cos\tau \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x' &= x - \tau_1 \\ y' &= y - \tau_2 \\ z' &= z - \tau_3 \\ t' &= t, \end{aligned}$$

onde τ, respetivamente τ_1, τ_2, τ_3 são funções arbitrárias de t, são substituições do determinante 1.

Distribuído no dia 11 de novembro.