Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de Educación Primaria

María M. Gea[1], *José A. Fernandes*[2], *Carmen Batanero*[3], *Antonio J. Benavides*[4]
[1]Universidad de Granada, *mmgea@ugr.es*
[2]Universidad de Minho, *jfernandes@ie.uminho.pt*
[3]Universidad de Granada, *batanero@ugr.es*
[4]Universidad de Granada, *bena_92_17@hotmail.com*

Resumen. *El estudio del azar y la probabilidad forman parte del currículo de matemáticas en España desde la etapa de Educación primaria (6-12 años), siendo clave para la formación de los estudiantes la capacidad de hacer estimaciones sencillas basadas en la experiencia de situaciones aleatorias. En este texto se describe una experiencia de aula sobre el azar, llevada a cabo con alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria (10-11 años). El propósito de la enseñanza es enfrentar al alumno a una experiencia aleatoria sencilla, como es el lanzamiento de una moneda, con la que puede desarrollar su razonamiento probabilístico, a la vez que evaluar su intuición sobre el azar mediante diversas preguntas guiadas que conforman un cuestionario diseñado para la propia experiencia. Los resultados obtenidos muestran dificultades de los alumnos en el desempeño de ideas sobre el azar e intuiciones erróneas sobre el tema, principalmente al inventar una secuenciación aleatoria de resultados del lanzamiento de una moneda.*

Palabras clave: *azar; intuición; Educación Primaria; secuencia de enseñanza.*

Abstract. *The study of chance and probability takes part of the mathematics curriculum in Spain from the stage of primary education (6-12 years), being key issue in the students' training the ability to make simple estimates based on the experience of random situations. In this text a classroom experience on chance aimed at students in the third cycle of primary education (10-11 years) is described. The purpose of this experience is to confront the student to a single random experience, as is the toss of a coin, with which to develop their probabilistic reasoning, while assessing their intuition about chance through various guided questions that make a questionnaire designed for this experience. The results show students' difficulties in carrying out ideas about chance and erroneous intuitions about this topic, mainly when they propose a possible random sequencing of results by the toss of a coin.*

Keywords: *chance; intuition; Primary Education; sequence of teaching*.

Introducción

La enseñanza de la estadística y probabilidad se ha incorporado a los programas educativos de la mayoría de los países desarrollados (MECD, 2014; Ministério da Educação, 2007; Ministério da Educação e Ciência, 2013; NCTM, 2000), dando respuesta a la necesidad de desarrollar en todo ciudadano lo que se conoce como cultura estadística.

En este sentido, una adecuada intuición sobre el azar contribuye al desarrollo de la cultura estadística en el ser humano, que en su día a día se enfrenta a muchas situaciones en las que debe tomar decisiones en ambiente de incertidumbre. Creencias como números favoritos, preferencias por un color o expresiones como "tentar a la suerte", son ejemplos de ideas erróneas que nada tienen que ver con una adecuada intuición sobre el azar (Batanero, 2013).

Diversos investigadores manifiestan la importancia de introducir nociones probabilísticas desde los primeros años de escolaridad (Godino, Batanero, & Cañizares, 1991; Borovcnik & Peard, 1996; Batanero, 2013), que faciliten a nuestros estudiantes la adquisición progresiva de otros conceptos más complejos. Como indica Fischbein (1975), la poca visibilidad que el azar posee en la enseñanza de la matemática responde a muchas de las dificultades que manifiestan los estudiantes, que poseen una visión muy determinista del mundo.

La enseñanza del azar y la probabilidad comienza en España en la Educación primaria (6-12 años), incluyendo como contenidos en esta etapa educativa el estudio del carácter aleatorio de algunas experiencias sencillas y la iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades. De este modo, el alumno debe ser capaz de razonar sobre diferentes experimentos sencillos, hacer estimaciones y valorar sus estrategias comprobando sus resultados. Para aplicar de manera integrada todos estos conocimientos, la normativa recomienda desempeñar una metodología práctica.

En este trabajo abordamos el estudio de las intuiciones sobre el azar de un grupo de estudiantes de quinto curso de Educación Primaria, desde una perspectiva reflexiva según la investigación educativa sobre el tema. Se trata de una investigación experimental basada en una experiencia de aula, que responde a las directrices curriculares descritas anteriormente y los avances que la investigación educativa ha aportado sobre estos conceptos. En lo que sigue analizamos los fundamentos de nuestro estudio, explicamos la metodología llevada a cabo, describimos los resultados obtenidos y finalizamos con algunas conclusiones e implicaciones para la enseñanza.

Fundamentación

Marco teórico

Nuestro trabajo se fundamenta en el marco teórico del Enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2007) que considera la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas un equilibrio entre la dualidad personal e institucional que posee el significado de un objeto matemático. Se considera *objeto matemático* a toda entidad que interviene en una tarea, ya sea la tipología de problemas que dan significado al objeto, el lenguaje con el que se trabaja (notaciones, términos, etc.), los conceptos que se vinculan al mismo, los diferentes procedimientos que se llevan a cabo, las reglas (propiedades o proposiciones) que se formulan o los argumentos y demostraciones que se utilizan.

El estudiante mostrará una adecuada intuición sobre el azar en la medida en que se haya apropiado del significado institucional (en nuestro caso la escuela primaria) de este objeto matemático. El EOS establece que la comprensión de un objeto matemático es progresiva y que no puede ser observada directamente, pero su práctica personal (significado personal) será la que permita investigar y observar sí estas intuiciones son adecuadas en la medida en que se aproximen al significado marcado por la institución (significado institucional). Por lo tanto, la evaluación de las intuiciones sería el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales mediante las prácticas que el estudiante realiza (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Antecedentes

La investigación sobre el razonamiento del ser humano en ambiente de incertidumbre ha ocupado un lugar destacado en el campo de la psicología, en concreto, en su desempeño en situaciones en las que interviene el azar (Kahneman, Slovic, & Tversky, 1982; Konold, 1989, 1995). Los resultados más destacados se refieren al uso de heurísticas que el sujeto utiliza para reducir o limitar la información procedente de la situación a la que se enfrenta (Batanero, 2001). Savard (2014) presenta una clasificación de todas ellas, junto a los autores que se han interesado por su análisis. Destacamos una de estas heurísticas que la autora denomina “resultado próximo” en que se considera que el resultado de la siguiente experiencia mantiene la tendencia de resultados obtenidos, o por el contrario, se piensa que el siguiente resultado cambia la tendencia de la secuencia (conocido como la *falacia del jugador*).

La epistemología del concepto de azar ha explicado algunas dificultades asociadas a su desempeño, pues algunos sujetos muestran concepciones que corresponden a las diferentes etapas por las que el concepto ha evolucionado hasta la formalización axiomática de Kolmogorov que actualmente conocemos (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005). En su origen, el azar se correspondía con la ausencia de causa que motivaba un suceso, por lo que si un hecho no obedecía a una causa o ley conocida era calificado como aleatorio. Esta concepción se mantuvo hasta la Edad Media, donde la teoría de juegos tuvo un desarrollo considerable con los conceptos de equiprobabilidad e independencia. Llegados a este punto, la evolución en el significado de la aleatoriedad implica la diferenciación de dos conceptos que hasta el momento se consideraron equivalentes y no lo son: el patrón de la secuencia de resultados producida en un experimento y el proceso de generación, conocido como experiencia aleatoria (Batanero & Serrano, 1995; Batanero, 2001).

Las heurísticas y el análisis epistemológico del concepto de azar orientan al profesor en la enseñanza y aprendizaje del azar pero, como indica Batanero (2013), una experiencia aleatoria es compleja en sí misma, a diferencia de una experiencia determinista. El azar es un proceso *no reversible*, es decir, si lanzamos una moneda y obtenemos cara, no podemos volver al inicio del experimento y repetirlo de nuevo (bajo las mismas condiciones iniciales) garantizando obtener el mismo resultado. Por contra, si un alumno dispone de dos caramelos y añade tres caramelos, podrá separar (restar) a la cantidad total (cinco caramelos) tres caramelos y obtener la cantidad inicial, pudiendo repetir el proceso cuantas veces quiera para analizar la situación de aprendizaje.

En la investigación educativa, Piaget e Inhelder (1951) recomiendan que la enseñanza y aprendizaje del azar debiera posponerse a una etapa avanzada de desarrollo del estudiante (11 a 15 años). Fischbein (1975), por su parte, concede gran importancia a la intuición sobre el azar y trata de demostrar que antes de los 7 años los estudiantes son capaces de distinguir fenómenos aleatorios y deterministas. Según el autor, la enseñanza tiene un efecto positivo en la construcción de las intuiciones sobre el azar, que el estudiante va forjando a medida que se enfrenta a prácticas adecuadas.

Pfannkuch y Ziedins (2014) discuten diferentes enfoques de enseñanza de la probabilidad y destacan la modelización como mejor propuesta. Los autores manifiestan la importancia de que los estudiantes descubran los modelos de probabilidad a través de la reflexión pues: "la idea de una probabilidad y su estimación está por consiguiente íntimamente ligada a una secuencia de experiencias, un proceso observado en un período determinado y la ley de los grandes números" (Pfannkuch & Ziedins, 2014, p. 110). Eichler y Vogel (2014) se centran en la modelización y diferencian tres situaciones en las que hacer uso de la simulación para la enseñanza de la probabilidad: 1) explorar modelos existentes, 2) descubrir un modelo desconocido, y 3) generar datos de un modelo. En el este trabajo nos interesamos por la primera opción, puesto que la simulación permite analizar la realidad de un experimento concreto, como es el lanzamiento de una moneda, conectando el mundo teórico de la probabilidad y el mundo empírico de los datos (Eichler & Vogel, 2014).

Los estudios sobre el desempeño de los estudiantes sobre el azar muestran diversas dificultades y errores, uno de ellos muy curioso que se asocia al término "predecir" un resultado. Como indica Savard (2014), al pedir a los estudiantes que propongan un resultado, como por ejemplo en el lanzamiento de la moneda, muchos estudiantes consideran el hecho de predecir como el de asegurar que ocurra con seguridad dicho resultado.

Green (1983, 1991) analiza el modelo aleatorio más simple posible (sucesión de experiencias Bernoulli) según diferentes tareas dirigidas a estudiantes. En una tarea pide predecir las secuencias de resultados de lanzar 50 veces una moneda equilibrada. Los estudiantes muestran la fuerza de la equiprobabilidad en los patrones que proponen, poca variabilidad aleatoria en las secuencias propuestas, y la falacia del jugador. La apreciación de la aleatoriedad resulta igualmente insatisfactoria en otras tareas similares, como en la que se pide elegir entre dos patrones de 150 lanzamientos de una moneda aquella que consideren aleatoria. En otros estudios podemos encontrar resultados similares con estudiantes de secundaria (e. g., Batanero & Serrano, 1999).

Falk, Falk y Levin (1980) llevaron a cabo un estudio con escolares de entre 4 y 11 años de edad mediante el uso de ruletas. En el análisis de sus respuestas, fueron pocos los estudiantes que mantuvieron su patrón de respuesta a lo largo de las cuestiones formuladas, dando muestra de una incoherencia sistemática. Algunas de las respuestas indicadas por los estudiantes se basan en principios irrelevantes como, por ejemplo, la opción más próxima al lugar ocupado por el puntero de la ruleta según un color pretendido; la opción situada a su lado izquierdo por ser zurdo; la opción más bonita; el color del club de fútbol preferido; etc.

Metodología

Se diseña una secuencia de enseñanza basada en un experimento aleatorio (el lanzamiento de una moneda), con la intención de evaluar las intuiciones sobre el azar en una muestra de estudiantes de quinto curso de Educación primaria (10 a 11 años). La enseñanza también permitirá desarrollar estas intuiciones en los estudiantes, ya que se hace uso de conceptos previos (variable estadística, distribución unidimensional, resúmenes estadísticos, etc.) y representaciones gráficas (diagrama de puntos y de barras) que ellos mismos utilizarán para analizar los resultados y mostrar la adecuación de sus respuestas. Este es un aspecto innovador de la enseñanza, ya que propiciará que los estudiantes valoren su formación en cuanto al azar.

El primer paso en el diseño fue fundamentar el significado de referencia del azar, basándonos en la documentación curricular, el marco teórico y los antecedentes de investigación, todos ellos descritos anteriormente. Nos basamos en una tarea propuesta por Green (1991), reduciendo a diez los lanzamientos de la moneda para adaptar el tiempo de nuestra enseñanza a dos sesiones de 50 minutos cada una. En la primera sesión, los estudiantes predicen resultados, contestan a preguntas sobre la certeza de obtener un resultado concreto y proponen un patrón de resultados aleatorios del experimento. En la segunda sesión, se lanza realmente la moneda diez veces y se pide al alumno interpretar los resultados obtenidos (los suyos junto a los de los compañeros), así como relacionarlos con los propuestos en la sesión anterior (los suyos junto a los de los compañeros). En ambas sesiones los alumnos respondieron individualmente a las preguntas del cuestionario y posteriormente ponían en común sus respuestas.

La intuición sobre el azar es un constructo inobservable (León & Montero, 2002), por lo que la observación participante del profesor en el aula se acompaña de una hoja de respuestas o cuestionario que el alumno cumplimenta a medida que desarrolla la enseñanza. Los resultados del estudio se han obtenido de las respuestas de 24 estudiantes (17 niños y 7 niñas) de un colegio de Granada, con una formación pobre en estadística y probabilidad según su profesora.

El análisis de los resultados es esencialmente cualitativo y exploratorio, tratando de compensar el tamaño limitado de muestra con un profundo análisis de contenido de las mismas (Weber, 1985), que permite realizar inferencias a través de la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione & Matalón, 1989). Los resultados del análisis se describen a continuación, siguiendo el transcurso de la secuencia de enseñanza e informando de los aspectos más característicos de su evolución, según la observación del profesor.

Resultados y discusión

Comenzamos la primera sesión de enseñanza preguntando si alguna vez habían lanzado una moneda y observado su resultado, donde la mayoría contestaron que sí. Pedimos que la lanzasen una vez la moneda en clase para experimentar el resultado (primera pregunta del cuestionario: C1.1) y que anotasen sus resultado. Los alumnos pudieron observar que no todos obtuvieron igual resultado. A continuación, cada uno contestó a las primeras cuatro preguntas del cuestionario, que describimos a continuación:

> C1.2. Si lanzas de nuevo la moneda, ¿obtendrás otra vez el mismo resultado? ¿Por qué?

Esperamos que el alumno conteste que es posible obtener el mismo o distinto resultado, pues el experimento no tiene memoria de lo ocurrido. Encontramos muchas respuestas incorrectas de los alumnos que muestran una concepción causal de la aleatoriedad en los estudiantes (Batanero & Serrano, 1995). En mayor medida se refieren a la suerte: "Sí, porque puede ser que alguna vez tengas suerte y te salga lo mismo dos veces" (PFC); al desconocimiento de las causa que produce los resultados: "No, porque a mí nunca me salen dos seguidas iguales" (PLFP); o a la necesidad de ocurrir un mismo resultado por el hecho de tratarse de una experiencia aleatoria: "Sí, porque si la tiro igual que antes saldrá lo mismo" (CGM).

> C1.3. ¿Sabes cuántos resultados diferentes podemos obtener cuando lanzamos la moneda? ¿Por qué?

En esta categoría encontramos siete alumnos que dieron la posibilidad de caer de canto en la mesa. Sus respuestas se han categorizado como parcialmente correctas pues en este caso la moneda rodaría y finalmente caería de cara o de cruz. En general los restantes alumnos contestaron correctamente.

C1.4. ¿Crees que antes de lanzar una moneda podrías decir, con seguridad, cuál será el resultado que obtendrás? ¿Por qué?

Se espera que los alumnos indiquen que no se puede, con seguridad, adivinar el resultado de un lanzamiento. Utilizamos los términos “decir” y “con seguridad” para eliminar la confusión descrita por Savard (2014) en el significado que algunos estudiantes atribuyen al término predicción. Esta pregunta difiere de la C1.2, pues no pretendemos que se conteste según un resultado previo obtenido.

La mayoría de los alumnos contestan correctamente, aunque algunos se aventuran a indicar probabilidades en sus respuestas y los valores que aportan son todos erróneos. Estas respuestas se han categorizado como parcialmente correctas ya que indican que no es posible saber con seguridad el resultado de un lanzamiento, pero acompañan su respuesta con porcentajes de ocurrencia incorrectos: 0%, 10%, 55%, 65% y 75%, todos distintos del 50% que es el correcto. Estos resultados, aunque mejores que los obtenidos en la cuestión C1.2, son preocupantes porque los alumnos muestran dificultades al asignar la probabilidad como grado de ocurrencia a sucesos equiprobables, a pesar de que los alumnos perciben la aleatoriedad del experimento.

En la tabla 1 se resumen los resultados de las primeras preguntas del cuestionario donde podemos observar que los alumnos tienen bien asimiladas las preguntas C1.3 y C1.4, siendo totalmente contrarios los resultados en la pregunta C1.2, donde sólo poco más de la mitad de la clase ha contestado correctamente.

Tabla 1.

Respuestas (y porcentajes) a preguntas del cuestionario 1

Pregunta	Correcta	Incorrecta	Parcialmente correcta	Total de alumnos
C1.2	13(54,2)	11(45,8)		24(100)
C1.3	16(66,6)	1(4,2)	7(29,2)	24(100)
C1.4	17(70,8)	1(4,2)	6(25)	24(100)

C1.5. ¿Crees que podemos escribir los resultados de los 10 lanzamientos de la moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que saldrían) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda de verdad? ¿Por qué?

Todos los estudiantes respondieron afirmativamente a esta cuestión y a continuación rellenaron una tabla en el cuestionario donde proponían el patrón de los 10 lanzamientos. La clase finalizó con una puesta en común de los resultados proporcionados por los alumnos, según el total de caras y cruces de los patrones propuestos. Se pidió a los alumnos representar la distribución de caras en papel, donde algunos representaron el diagrama de puntos y otros el de barras, y comentaron en gran grupo las características de la distribución representada. No hubo ninguna duda puesto que todos los patrones propuestos respondían a secuencias cortas de caras y cruces y frecuencias equilibradas.

La siguiente sesión comenzó con el lanzamiento real de la moneda diez veces consecutivas y a continuación los alumnos compararon sus resultados. Como en el día anterior, representaron la distribución del número de caras y la compararon con la del día anterior. Observaron que la distribución de la secuencia real era menos simétrica que en la secuencia simulada así como la representatividad de la moda en una y otra distribución (Figura 1). Se pidió a los alumnos contar la racha (secuencia de resultados de igual tipo: o caras o cruces) más larga en las secuencias de resultados obtenidos y mostraron interés por representar también la variable longitud de la racha más larga (mayor número de resultados iguales obtenidos en los sucesivos lanzamientos), aunque la falta de tiempo hizo que sólo la representase el profesor en la pizarra, como se muestra en la figura 2. Los alumnos observaron que en la secuencia de resultados reales las rachas tenían una longitud más variable de las que ellos habían considerado.

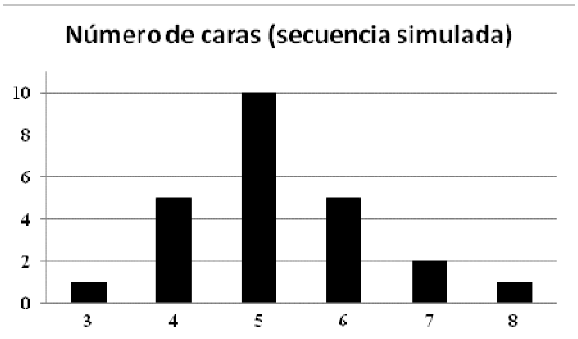
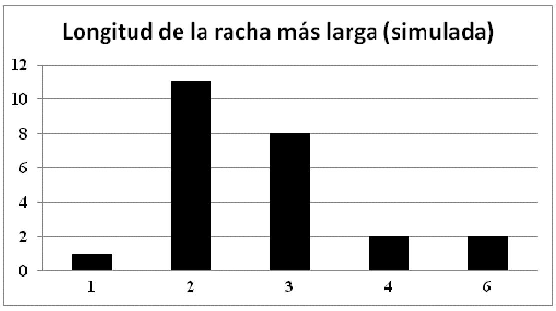


Figura 1. Representación de la variable “número de caras” según la experiencia.



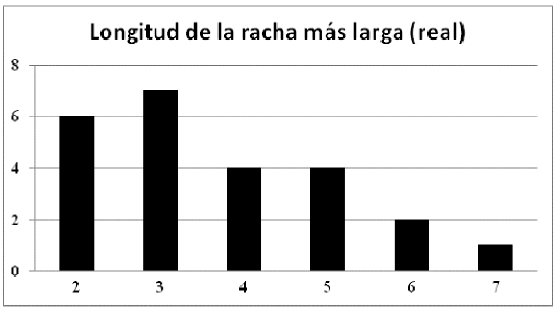


Figura 2. Representación de la variable “longitud de la racha más larga” según la experiencia.

Tras la interpretación de los gráficos que se muestran en la figura 1 y 2, los alumnos contestaron a las preguntas del cuestionario que describimos a continuación.

> C2.1. ¿Podríamos distinguir si una secuencia de lanzamientos de una moneda es aleatoria o es inventada, por ejemplo, como la que te inventaste ayer? ¿Por qué?

Esperamos que los alumnos indiquen que en la secuencia simulada las rachas son cortas mientras que en la secuencia real son más largas. También esperamos que los estudiantes perciban que en la secuencia real la proporción de caras y cruces no tiene por qué ser equilibrada (asociarse al valor 0,5). Los alumnos mostraron dificultad en responder a la pregunta y en su mayoría respondieron que no pueden distinguir si una secuencia es simulada o real. Otras respuestas se categorizaron como respuestas parcialmente correctas pues muestran un razonamiento aleatorio adecuado y no responden con precisión: “Sí, porque puede ser cara o cruz” (SMR); o bien porque no presentan error a pesar de no contestar completamente a lo que se pide: “Sí, porque han salido totalmente diferentes porque ayer nos lo inventamos y hoy no porque teníamos una moneda” (PLFP).

> C2.2. a) ¿Tenemos que obtener exactamente 5 caras y 5 cruces para que una secuencia de 10 lanzamientos de una moneda sea aleatoria? b) ¿Podríamos obtener 1 caras y 9 cruces? c) ¿y 2 caras y 8 cruces? ¿y 8 caras y 2 cruces? ¿Por qué?

Esperamos que los alumnos contesten que no tiene por qué obtenerse 5 caras y 5 cruces en la secuencia real (cuestión C2.2a), pudiendo encontrar 1 cara y 9 cruces (cuestión C2.2b), 2 caras y 8 cruces o bien 8 caras y 2 cruces (cuestión C2.2c). Los alumnos salvo uno contestan todos correctamente a la primera pregunta (C2.2a), indicando que no tenemos que encontrar 5 caras y 5 cruces en la secuencia real. Sólo un alumno responde que, en general, se puede obtener lo que sea. Los alumnos muestran más dificultad al valorar las otras posibilidades de ocurrencia (preguntas C2.2b y C2.2c) pues contestan de modo impreciso, no dando las razones de su respuesta: “No porque no te puede salir solo una cara; No porque no te puede salir solo dos caras; No porque no te pueden salir solo dos cruces” (AAC).

> C2.3. Después de todos los gráficos que has construido, contesta razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Tiene tu clase buena intuición para adivinar una secuencia aleatoria de 10 lanzamientos de una moneda? ¿Por qué?

Esta pregunta completa a las anteriores pues se pide que el alumno reflexione sobre los gráficos construidos y la experiencia desarrollada. Esperamos que indiquen que no han tenido buena intuición, según las rachas cortas y el equilibrio entre las frecuencias de resultados que proponían en sus secuencias simuladas.

Los alumnos, en general, responden de modo incorrecto pues son imprecisos y no se basan en los gráficos construidos, generalmente se refieren a la suerte como muestran estos ejemplos: "No, porque no es muy fácil saber lo que vas a sacar" (JAR); "Sí, porque algunos tienen suerte y algunos no" (NFS). Consideramos respuestas parcialmente correctas cuando se basan en las gráficas elaboradas aunque con imprecisiones en su interpretación, como por ejemplo: "No, porque casi todos pusieron 5 y esta vez salieron casi la mitad de 5" (JFJH).

En la tabla 2 se resumen los resultados de las respuestas, donde podemos observar el alto porcentaje de error de las preguntas C2.1 y C2.3, donde los estudiantes muestran dificultad en argumentar o justificar si una secuencia es simulada o real, siendo fácil para los estudiantes razonar sobre ejemplos concretos como los que fundamentan las cuestiones C2.2a, C2.2b y C2.2c. Resultados similares se encontraron en la investigación de Green (1983), en la que se pide predecir resultados en una secuencia de 50 lanzamientos.

La formulación de argumentaciones adecuadas puede promoverse enfrentando al estudiante a una amplia tipología de problemas, impregnados de una riqueza de representaciones, donde los conceptos se vinculen con diferentes procedimientos y propiedades, que promuevan la argumentación (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Tabla 2.

Respuestas (y porcentajes) a preguntas del cuestionario 2

Pregunta	Correcta	Incorrecta	Parcialemnte correcta	Total de alumnos
C2.1	3(12,5)	13(54,2)	8(33,3)	24(100)
C2.2a	23(95,8)		1(4,2)	24(100)
C2.2b	20(83,3)	4(16,7)		24(100)
C2.2c	20(83,3)	4(16,7)		24(100)
C2.3	3(12,5)	15(62,5)	6 (25)	24(100)

El cuestionario finaliza con una pregunta donde se pedía a los alumnos escribir lo que habían aprendido. Las respuestas se resumen en la tabla 3, donde se observa la valoración positiva de la experiencia, generalmente porque consideran el experimento aleatorio importante (37,3%) y porque reconocen que no es fácil disponer de una intuición adecuada ante situaciones de azar (29,2%).

Tabla 3.

Categorías de respuestas (y porcentajes) del alumno según su aprendizaje en la experiencia

Respuestas de los alumnos al interés de la práctica	Frecuencia
No es fácil adivinar; La intuición algunas veces acierta	7(29,2)
Da igual aleatorio o inventado	1(4,2)
Pensar más rápido	1(4,2)
Tener probabilidades en el azar	1(4,2)
Obtener información	1(4,2)
Monedas importantes	9(37,3)
Lo que hemos hecho es interesante	2(8,3)
La suerte para lanzar	2(8,3)

Reflexión final

Este trabajo describe los resultados de una secuencia de enseñanza diseñada para evaluar y desarrollar la intuición sobre el azar en alumnos de Educación primaria, basada en la experiencia aleatoria del lanzamiento de una moneda. Diversas preguntas dirigen las dos sesiones que conforman la secuencia de enseñanza, que los alumnos van respondiendo en un cuestionario diseñado específicamente para cada sesión.

Los alumnos estuvieron motivados en clase y valoran la importancia de este tipo de experiencias aleatorias, donde un alto porcentaje de participantes reconoce la dificultad de adivinar resultados que puedan obtenerse en una secuencia simulada. Como indica Batanero (2013), los niños en las primeras edades aprenden a través de la propia experiencia, y estas prácticas dan al niño no sólo conocimientos técnicos sino también estratégicos por lo que son de gran utilidad para su formación. La experiencia diseñada parte de los conocimientos del estudiante, observándose, como en investigaciones precedentes (e.g., Falk, Falk, & Levin, 1980), que razonamientos de los estudiantes basados en principios irrelevantes, influenciados por sus creencias en la evaluación del azar, nada tienen que ver con la adecuada adquisición del concepto de azar (Batanero, 2013).

Los resultados obtenidos en esta investigación informan del significado personal que los estudiantes poseen sobre el azar, al evaluar sus intuiciones sobre este concepto en una situación práctica. La experiencia permite al profesor medir la correspondencia de este significado personal con el significado institucional pretendido (Godino, Batanero, &

Font, 2007), e informan de dificultades y errores que muestran nuestros estudiantes en el desempeño de este concepto, como por ejemplo, la heurística del resultado próximo o falacia del jugador (Savard, 2014) que se manifiesta en nuestro estudio, donde el estudiante considera que el resultado de la siguiente experiencia cambia la tendencia de los resultados obtenidos. Por otra parte, se describe una secuencia de enseñanza que puede ser implementada en cualquier nivel inicial de introducción al azar y la probabilidad. En este sentido, la revisión de investigaciones que se presenta en este trabajo también ayudará al profesor en la comprensión del razonamiento probabilístico de sus estudiantes. Por ejemplo, Green (1983) observa la tendencia de sus estudiantes en indicar rachas cortas en las secuencias simuladas, resultado que se manifiesta en nuestro estudio.

Este trabajo puede ser completado con otras experiencias relacionadas, como por ejemplo, con el uso de la tecnología a través de applets, que reforzarán los contenidos trabajados en clase a la vez que permitirán a los estudiantes avanzar en su aprendizaje. Como sugieren Eichler y Vogel (2014), el uso de la simulación en el aula permite explorar modelos existentes a través de experimentos concretos, en nuestro caso el lanzamiento de una moneda.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Correia (Eds.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., & Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, *5*, 15-28.

Batanero, C., & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 558-567.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The Nature of Chance and Probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Borovcnik, M., & Peard, R (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.). *International handbook in mathematics education* (pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 75-99). Berlin, Heidelberg: Springer.

Falk, R., Falk, R., & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 181-204.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Ghiglione, R., & Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Godino, J. D., & Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1991). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Green, D. R. (1983) A Survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds), *Proceedings of the ICOTS 1* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Green, D. R (1991) *A longitudinal study of pupil's probability concepts*. Loughborough, UK: University of Loughborough.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, *6*, 59-98.

Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, *49*(2), 203-209.

León, O. G., & Montero, I. (2002). *Métodos de investigación*. Madrid: Mc Graw Hill.

MECD. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Pfannkuch, M., & Ziedins, I. (2014). A modelling perspective on probability. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 101-116). Berlin, Heidelberg: Springer.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Savard, A. (2014). Developing probabilistic Thinking: What about people's conceptions?. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 283-298). Berlin, Heidelberg: Springer.

Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis*. Londres: Sage.