

## A resolução de tarefas matemáticas com recurso ao Sketchpad

Floriano Viseu<sup>1</sup>

### Resumo

A utilização de recursos tecnológicos no estudo de conteúdos matemáticos proporciona a realização de atividades que somente com papel e lápis não se tornariam tão eficientes, tais como, por exemplo, a exploração dos dados de uma tarefa e a determinação e prova de conjecturas. Entre tais recursos, os de geometria dinâmica, como é o caso do Geomert's Sketchpad (GSP), potencializam, a partir da construção de um dado objeto matemático, a exploração de propriedades e de regularidades que contemplam esse objeto através da sua 'manipulação'. Para evidenciar as potencialidades da utilização deste *software*, exploram-se, com recurso ao GSP, problemas de Geometria (triângulo equilátero, triângulo duplicado e o teorema de Pitágoras) e de Álgebra (área máxima de retângulos com o mesmo perímetro e volume máximo de uma caixa).

Palavras-chave: Matemática. Resolução de tarefas. *Softwares* dinâmicos. Prova de resultados matemáticos.

Com a crescente evolução tecnológica, existe uma diversidade de recursos que podem ser integrados nas atividades de ensino e de aprendizagem. Dos vários recursos tecnológicos disponíveis, o computador, pelas suas características, oferece uma diversidade de programas que possibilitam abordagens enriquecedoras dos conceitos matemáticos. A sua utilização na aula de matemática reforça o papel da linguagem gráfica e das múltiplas representações dos conceitos matemáticos, potenciando quer a realização de atividades mais desafiantes do que a resolução de exercícios para a aplicação dos conhecimentos apreendidos, quer o desenvolvimento de capacidades de

<sup>1</sup> Doutor em Educação, Especialização em Didática da Matemática, pela Universidade de Lisboa. Professor Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho. Investigador do Centro de Investigação em Educação (CIEEd). Contato: fviseu@ie.uminho.pt.

ordem mais elevada do que o cálculo e a memorização (FERNANDES, ALVES, VISEU & LACAZ, 2006). O computador é um recurso que pode ser utilizado individualmente ou juntamente com outros equipamentos tecnológicos, independentemente do tipo de *software* que armazena. Existem *softwares* específicos para serem utilizados no ensino de conceitos matemáticos, permitindo a professores e alunos autorregular o processo de ensino e de aprendizagem. Uma utilização adequada do computador favorece o desenvolvimento de competências, tais como a responsabilidade, a autoconfiança e a autonomia. No aspecto relacional, promove a solidariedade entre os vários intervenientes na sala de aula e a relação aluno-aluno e professor-aluno.

Ponte e Canavarro (1997) defendem que a utilização do computador na aula de matemática favorece o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e de comunicação. Ao constituir-se uma ferramenta essencial para as atividades de ensino e de aprendizagem (NCTM, 2008), o computador, e outros recursos tecnológicos, permite explorar e testar conjecturas, visualizar diferentes formas de representação de conceitos matemáticos, e estabelecer conexões entre as múltiplas representações dos conceitos matemáticos, o que tem implicações no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

A utilização de recursos tecnológicos no ensino-aprendizagem de Matemática é cada vez mais exigida no contexto da sociedade em que vivemos. A sua utilização nas aulas de Matemática possibilita a realização de cálculos de um modo eficiente, facilita a organização e análise de dados, fornece imagens visuais de conceitos matemáticos e apoia a atividade exploratória e investigativa dos alunos. Através do uso da tecnologia, os alunos podem raciocinar sobre a mudança de parâmetros e modelar e resolver problemas mais complexos que de outra forma não se poderiam resolver (NCTM, 2008). O uso da tecnologia contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, da autonomia, do pensamento crítico e de uma atitude positiva em relação à Matemática. Porém, o progressivo aumento do uso da tecnologia não deve substituir o cálculo de papel e lápis, mas antes conciliar os diferentes processos de cálculo, sem esquecer o cálculo mental, e proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem de cunho laboratorial (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2002).

A variedade de tarefas matemáticas a propor ao aluno é alargada pelo uso de recursos tecnológicos. Estes instrumentos transformam-se em ferramentas importantes na realização de atividades que exijam o uso de diferentes capacidades relacionadas com o pensamento matemático. Vários documen-

tos com orientações curriculares para a educação matemática, nomeadamente da APM (1998) e NCTM (2008), salientam a relevância da utilização educativa de recursos tecnológicos, como a calculadora e o computador, nos diversos níveis de ensino. O recurso a *softwares* educativos tem mostrado que o computador pode ser um mediador no desenvolvimento de conceitos matemáticos. Permitem abordar os conteúdos diversificando as formas de os apresentar, alargando assim as condições de aprendizagem dos alunos. *Softwares* como o Geomert's Sकेchpad (GSP) surgiram combinando as suas potencialidades para o trabalho de conceitos algébricos e geométricos. O GSP permite relacionar as informações dadas algebricamente com as múltiplas representações (gráficos, tabelas e expressões analíticas), servindo, como referem Ponte, Branco e Matos (2009), de base à resolução de problemas e modelação de situações reais, o que constitui importantes suportes para a aprendizagem. Tal recurso favorece a interação entre os alunos na apresentação e discussão dos seus resultados, ao poderem construir, rever, modificar as suas construções e testar as suas conjecturas, envolvendo-se na sua própria aprendizagem (KING & SCHATTSCHEIDER, 2003).

A Geometria é, por excelência, uma área da Matemática que permite explorar as potencialidades dinâmicas e gráficas de ambientes computacionais de aprendizagem. Os ambientes computacionais para o ensino da Geometria permitem realizar construções geométricas, no ecrã do computador, utilizando explicitamente as propriedades das figuras, e possibilitam a manipulação direta dessas construções, conservando as propriedades utilizadas. Para De Corte (1992), estes ambientes devem ter como referência o desenvolvimento de três componentes: (1) a competência, caracterizada pelo desenvolvimento de capacidades num determinado domínio; (2) a aquisição, que consiste na obtenção de processos de aprendizagem que conduzam ao desenvolvimento de competências; (3) a intervenção, que se resume à aplicação de métodos de ensino e de estratégias adequadas para colocar em prática os processos de aprendizagem.

Segundo de Villiers (1997), os programas de geometria dinâmica são 'poderosos' por funcionarem como um meio de verificação de conjecturas. Nesta atividade, Jones (1998) considera que os ambientes de geometria dinâmica introduzem critérios específicos de validação para a resolução de problemas de construção, visto que uma solução só é válida se e só se não for possível estragá-la por arrastamento. Schwartz (1992) sustenta que tais ambientes são exploratórios, pois as ferramentas que disponibiliza propiciam a formu-

lação de hipóteses que funcionam como “espelhos intelectuais” (p. 223), no sentido em que os alunos podem experimentar as suas ideias, através da manipulação das construções. O movimento e a modificação de construções realizadas em ambientes de geometria dinâmica facilitam, como defende Laborde (1993), a visualização de propriedades e de relações geométricas, conservando-as invariantes. Os ambientes de aprendizagem proporcionados pelos *softwares* dinâmicos, contrariamente aos processos tradicionais (papel e lápis), permitem a manipulação de uma maior variedade de ações e de objetos, o que possibilita a realização de outras tarefas mais complexas. Os alunos libertam-se assim de tarefas de natureza mecânica para darem espaço à formulação e validação de conjecturas (JUNQUEIRA, 1995). Tais ambientes fazem com que os alunos possam compreender, de uma forma mais aprofundada, as relações entre os conceitos geométricos, estimulando o raciocínio abstrato.

Vários estudos têm sido desenvolvidos nesta área, como, por exemplo, o que foi realizado por Viseu, Nogueira e Santos (2009) com o objetivo de averiguar como alunos do 9.º ano de escolaridade aprendem, com recurso ao GSP, o tema ângulos numa circunferência. Neste estudo, foram os alunos que determinaram as propriedades da circunferência recorrendo ao GSP. Os autores concluem que: (1) a maioria dos alunos valorizou o uso do GSP nas construções e a possibilidade de pensar por si próprio; (2) o recurso ao GSP, como ferramenta de suporte nas construções, permitiu que os alunos estabelecessem as relações pretendidas e as validassem através da sua aplicação; (3) o uso do GSP incentivou os alunos a aplicar os seus conhecimentos a situações do quotidiano, o que lhes permitiu olhar com mais atenção para o mundo que os rodeia na procura de situações em que possam aplicar o que aprendem; (4) na transição da exploração para a generalização, tornou-se crucial a natureza exploratória das tarefas, bem como a possibilidade de manipular as construções efetuadas e de comparar os dados, fruto da dinâmica que o GSP proporciona.

Os ambientes de geometria dinâmica são propícios à descoberta de propriedades e de relações geométricas, favorecendo a aprendizagem, beneficiando a aquisição de conhecimentos e incluindo a produção de provas. A possibilidade de arrastamento de uma figura é uma característica destes ambientes, o que possibilita a exploração de vários exemplos, a observação de propriedades, casos específicos, contraexemplos, atividades que se ligam à formulação e justificação de conjecturas. As construções com recurso a

ambientes de geometria dinâmica tornam-se muito mais poderosas do que a construção tradicional (papel e lápis) (JUNQUEIRA, 1995).

Num estudo realizado por Piteira (2000), com uma turma do 8.º ano e outra do 9.º ano de escolaridade, de duas escolas diferentes, com o objetivo de analisar a atividade matemática desenvolvida pelos alunos com o Sketchpad, a investigadora observou que os menus deste *software* fizeram com que os alunos, em determinadas situações, tivessem de pensar como construir novas figuras, avaliassem o que tinham construído e pensassem sobre as conclusões a obter. A autora considera que estas atividades ajudaram os alunos a manusearem os objetos geométricos até chegarem a conclusões sobre as suas propriedades e relações geométricas. O estudo fez emergir potencialidades do GSP, tais como facilitador na construção de significados geométricos, potenciar a compreensão das relações estabelecidas através das interações entre alunos e professores e da consciencialização dos alunos das atividades que realizam. Para a autora, os ambientes de geometria dinâmica incentivam os alunos a expor e clarificar, numa perspetiva de partilha e negociação, as suas ideias, dificuldades e respectivas reavaliações.

Apesar das vantagens enunciadas sobre a utilização de *softwares* de geometria dinâmica, é importante refletir sobre a verdadeira contribuição das tecnologias informáticas para a atividade matemática. Segundo Loureiro e Bastos (2002), nem sempre o recurso aos ambientes de geometria dinâmica são úteis para a demonstração. Já para Coelho e Saraiva (2002), não são só as especificidades dos ambientes de geometria dinâmica que contribuem para estimular a atividade matemática, mas “todo um contexto de ensino/aprendizagem, com realce para as interações estabelecidas entre professores, alunos e o próprio AGD (elemento mediador na construção do conhecimento matemático), aos modelos didáticos ensaiados e às características exploratórias das tarefas propostas” (p. 56). Compete ao professor, segundo Rodrigues (2001), atender à escolha dos materiais tecnológicos quando da preparação da sua atividade, adotando uma análise crítica, tendo em conta os seguintes fatores: (1) adequação aos seus alunos, ao currículo, ao rigor pretendido de exploração, extensão e densidade; (2) facilidade de utilização do recurso; (3) o potencial pedagógico; (4) tipo de eficácia, utilidade e necessidade. Perante a integração de recursos tecnológicos no processo de ensino-aprendizagem coloca-se ao professor o desafio de utilizar esses recursos de forma a promover o pensamento matemático e o desenvolvimento de conceitos (FITZALLEN, 2005).

De modo a ilustrar as potencialidades do GSP no desenvolvimento de atividades de ensino e de aprendizagem, apresenta-se a resolução com este recurso, com base nas atividades de exploração e de prova, das seguintes tarefas: triângulo equilátero, triângulo duplicado, teorema de Pitágoras, área máxima de retângulos com o mesmo perímetro e volume máximo de uma caixa.

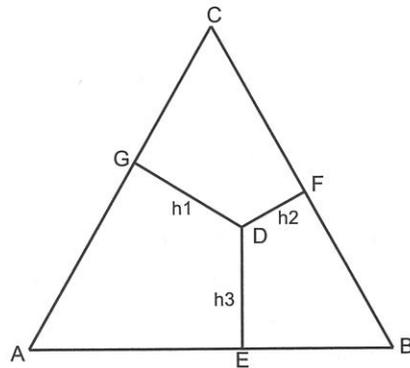
### Triângulo equilátero

Determinar a relação entre a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior de um triângulo equilátero aos seus três lados e a altura do triângulo.

#### Exploração

Considerar um triângulo equilátero ABC, de altura h, e um ponto no seu interior (D). As distâncias de D a cada um dos lados do triângulo são determinadas pelas medidas dos segmentos de reta h1, h2 e h3 (segmentos perpendiculares a esses lados).

Figura 1 - Representação dos segmentos que determinam as distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados



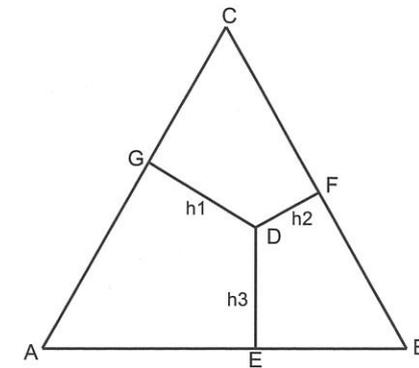
Fonte: O autor.

Com recurso ao Sketchpad, determinam-se as distâncias de D a cada um dos lados do triângulo e somam-se esses valores. Movendo este ponto, verifica-se que a soma das distâncias de D aos lados do triângulo é constante, tal como comprovam os valores recolhidos numa tabela:

Figura 2 - Recolha de dados que traduzem a regularidade entre a soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados

h1 = 3,16 cm  
 h2 = 3,59 cm  
 h3 = 1,24 cm  
 h1+h2+h3 = 8,00 cm

h1	h2	h3	h1+h2+h3
3,23 cm	1,78 cm	2,99 cm	8,00 cm
3,92 cm	1,75 cm	2,73 cm	8,00 cm
3,26 cm	2,55 cm	2,20 cm	8,00 cm
2,38 cm	3,82 cm	1,80 cm	8,00 cm
1,23 cm	3,41 cm	3,36 cm	8,00 cm
1,27 cm	2,76 cm	3,97 cm	8,00 cm
1,06 cm	1,49 cm	5,45 cm	8,00 cm
2,01 cm	2,12 cm	3,86 cm	8,00 cm
2,53 cm	2,51 cm	2,96 cm	8,00 cm
3,16 cm	3,59 cm	1,24 cm	8,00 cm



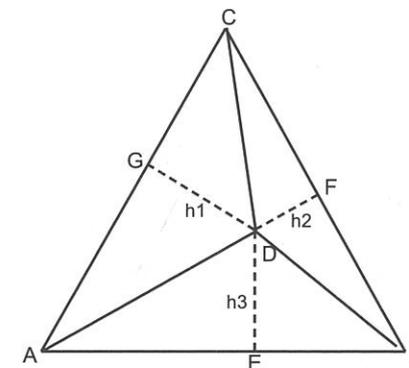
Fonte: O autor.

Em contexto de sala de aula, antes de efetuar a soma de tais distâncias, o professor pode questionar os alunos sobre os possíveis valores que essa soma pode assumir.

#### Prova

Para provar a conjectura formulada, decompõe-se o triângulo equilátero ABC em três triângulos (ADC, ADB e BDC). Cada um destes triângulos tem, em relação aos respectivos lados do triângulo ABC, de altura os segmentos h1, h2 e h3:

Figura 3 - Transformação dos dados do problema na procura de provar a conjectura estabelecida



Fonte: O autor.

Determinando as áreas dos quatro triângulos verifica-se que:

$$A[ABC] = A[ADB] + A[BDC] + A[ADC]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{\overline{AB} \times h_3}{2} + \frac{\overline{BC} \times h_2}{2} + \frac{\overline{AC} \times h_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{\overline{AB} \times h_3}{2} + \frac{\overline{BC} \times h_2}{2} + \frac{\overline{AC} \times h_1}{2}$$

Como o triângulo ABC é equilátero,  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ , então,

$$\frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{\overline{AB} \times (h_1 + h_2 + h_3)}{2} \Leftrightarrow h = h_1 + h_2 + h_3 \text{ que é constante,}$$

independentemente da localização do ponto D no interior do triângulo ABC.

### Triângulo duplicado

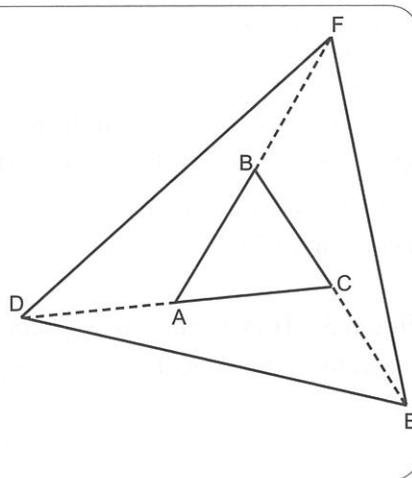
Figura 4 – Tradução dos dados do enunciado do Triângulo Duplicado

Considerar um triângulo qualquer ABC. Construir um novo triângulo FDE prolongando os lados de ABC, como mostra a figura, sabendo que:

$$\overline{DA} = 2\overline{BA}, \quad \overline{EB} = 2\overline{CB}$$

$$\overline{FC} = 2\overline{AC}$$

Que relação há entre as áreas dos triângulos FDE e ABC? Provar essa relação.



Fonte: O autor.

### Exploração

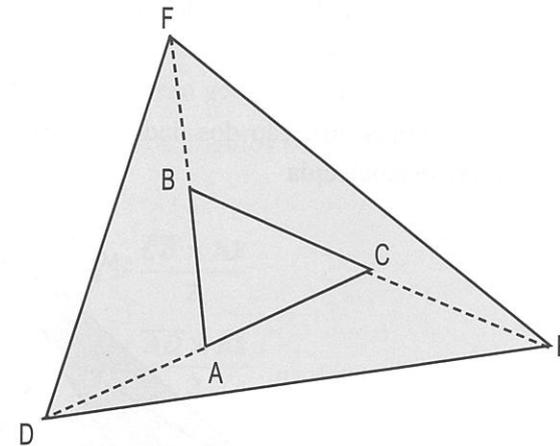
Recorrendo ao Sketchpad, determinam-se as áreas dos triângulos ABC e DEF. Verifica-se que, quaisquer que sejam as medidas do triângulo de partida, a área do triângulo DEF é sete vezes a área do triângulo ABC, como informam os dados recolhidos apresentados na seguinte figura:

Figura 5 - Representação e recolha dos dados do problema Triângulo Duplicado

Área  $\Delta ABC = 16,89 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta DFE = 118,24 \text{ cm}^2$   
 (Área  $\Delta DFE$ ) = 7,00  
 (Área  $\Delta ABC$ ) = 7,00

Área $\Delta ABC$	Área $\Delta DFE$	(Área $\Delta DFE$ ) (Área $\Delta ABC$ )
13,20 $\text{cm}^2$	92,37 $\text{cm}^2$	7,00
13,98 $\text{cm}^2$	97,84 $\text{cm}^2$	7,00
15,18 $\text{cm}^2$	106,25 $\text{cm}^2$	7,00
15,87 $\text{cm}^2$	109,68 $\text{cm}^2$	7,00
17,41 $\text{cm}^2$	121,86 $\text{cm}^2$	7,00
18,83 $\text{cm}^2$	130,39 $\text{cm}^2$	7,00
18,07 $\text{cm}^2$	126,46 $\text{cm}^2$	7,00
17,00 $\text{cm}^2$	119,01 $\text{cm}^2$	7,00
18,74 $\text{cm}^2$	117,19 $\text{cm}^2$	7,00
16,89 $\text{cm}^2$	118,24 $\text{cm}^2$	7,00

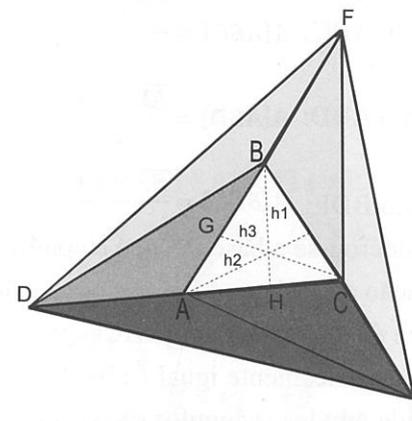
Fonte: O autor.



Para se perceber a obtenção deste resultado, decompõe-se o triângulo DEF a partir dos vértices do triângulo ABC da seguinte forma:

Figura 6 - Transformação dos dados do problema na procura de estabelecer conjecturas

Área  $\Delta DBF = 7,79 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta DAB = 7,79 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta DAE = 7,79 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta ACE = 7,79 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta ECF = 7,79 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta CFB = 7,79 \text{ cm}^2$   
 Área  $\Delta ABC = 7,79 \text{ cm}^2$



$$\frac{(\text{Área } \Delta DBF) + (\text{Área } \Delta DAB) + (\text{Área } \Delta DAE) + (\text{Área } \Delta ACE) + (\text{Área } \Delta ECF) + (\text{Área } \Delta CFB) + (\text{Área } \Delta ABC)}{(\text{Área } \Delta ABC)} = 7,00$$

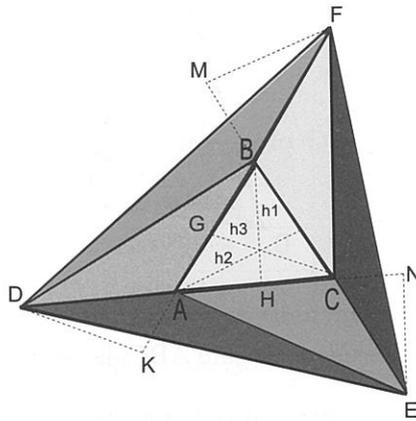
Fonte: O autor.

O triângulo DEF é assim decomposto em sete triângulos equivalentes. Os valores recolhidos na folha de cálculo que verificam a conjectura entre as áreas dos triângulos DEF e ABC são comprovados pela razão entre a soma das áreas dos triângulos que decompõem o triângulo DEF e a área do triângulo ABC.

*Prova*

Para provar a relação obtida, determinam-se as áreas de cada um dos triângulos, considerando  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  as alturas do triângulo ABC relativamente a cada uma das suas bases.

Figura 7 - Transformação dos dados do problema na procura de provar a conjectura estabelecida



Fonte: O autor.

· Área do triângulo ABC:  $A[ABC] = \frac{\overline{AC} \times h_1}{2}$

· Área do triângulo ABD:  $A[ABD] = \frac{\overline{AD} \times h_1}{2}$

· Área do triângulo BDF:  $A[BDF] = \frac{\overline{BF} \times h_3}{2}$  na determinação da área deste triângulo considerou-se a base BF que é congruente com AB. A altura do triângulo em relação a esta base é DK. A construção desta altura originou o triângulo ADK que é igual ao triângulo ACG, visto que, de um para o outro, têm um lado geometricamente igual ( $\overline{AD} = \overline{AC}$ ) e os ângulos adjacentes as estes lados em cada um dos triângulos são geometricamente iguais (visto serem verticalmente opostos; e porque os ângulos DKA e CGA são retos). Então  $\overline{DK} = h_3$ .

· Área do triângulo BCF:  $A[BCF] = \frac{\overline{BF} \times h_3}{2}$

· Área do triângulo CEF:  $A[CEF] = \frac{\overline{CE} \times h_2}{2}$  na determinação da área deste triângulo considerou-se a base CE que é congruente com BC. A altura

do triângulo em relação a esta base é FM. A construção desta altura originou o triângulo BMF que é igual ao triângulo AIB, visto que, de um para o outro, têm um lado geometricamente igual ( $\overline{AB} = \overline{BF}$ ) e os ângulos adjacentes as estes lados em cada um dos triângulos são geometricamente iguais (visto serem verticalmente opostos; e porque os ângulos AIB e BMF são retos). Então  $\overline{FM} = h_2$ .

· Área do triângulo ACE:  $A[ACE] = \frac{\overline{CE} \times h_2}{2}$

· Área do triângulo ADE:  $A[ADE] = \frac{\overline{AD} \times h_1}{2}$  na determinação da área

deste triângulo considerou-se a base AD que é congruente com AC. A altura do triângulo em relação a esta base é EN. A construção desta altura originou o triângulo ECN que é igual ao triângulo BCH, visto que, de um para o outro, têm um lado geometricamente igual ( $\overline{DA} = \overline{AC}$ ) e os ângulos adjacentes as estes lados em cada um dos triângulos são geometricamente iguais (visto serem verticalmente opostos; e porque os ângulos BHC e CNE são retos). Então  $\overline{EN} = h_1$ .

$$\begin{aligned} A[DEF] &= A[ABC] + A[ABD] + A[BDF] + A[BCF] + A[CEF] + A[ACE] + A[ADE] \\ &= \frac{\overline{AC} \times h_1}{2} + \frac{\overline{AD} \times h_1}{2} + \frac{\overline{BF} \times h_3}{2} + \frac{\overline{BF} \times h_3}{2} + \frac{\overline{CE} \times h_2}{2} + \frac{\overline{CE} \times h_2}{2} + \frac{\overline{AD} \times h_1}{2} \\ &= \frac{\overline{AC}}{2} (h_1 + h_1) + \frac{\overline{BF}}{2} (h_3 + h_3) + \frac{\overline{CE}}{2} (h_2 + h_2) + \frac{\overline{AD}}{2} \times h_1 \\ &= 2 \times \frac{\overline{AC} \times h_1}{2} + 2 \times \frac{\overline{AB} \times h_3}{2} + 2 \times \frac{\overline{BC} \times h_2}{2} + \frac{\overline{AD}}{2} \times h_1 \\ &= 2 \times A[ABC] + 2 \times A[ABC] + 2 \times A[ABC] + A[ABC] \\ &= 7 \times A[ABC]. \end{aligned}$$

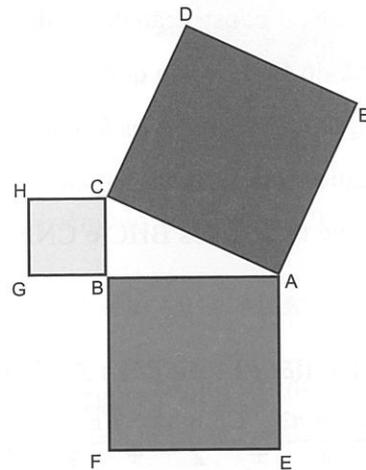
Prova-se assim que a área do triângulo DEF, formado a partir do triângulo ABC com as condições sugeridas, é sete vezes a área do triângulo ABC.

### Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos

Com o recurso ao Sketchpad, construíram-se o triângulo retângulo ABC e os quadrados (ACDE, BCHG e ABFE) sobre os seus lados. O software permite calcular o valor das áreas desses quadrados, assim como somar as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo:

Figura 8 - Relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo



Área BCKL = 3,93 cm<sup>2</sup>  
 Área BIJA = 19,99 cm<sup>2</sup>  
 Área ACDE = 23,92 cm<sup>2</sup>  
 (Área BCKL) + (Área BIJA) = 23,92 cm<sup>2</sup>

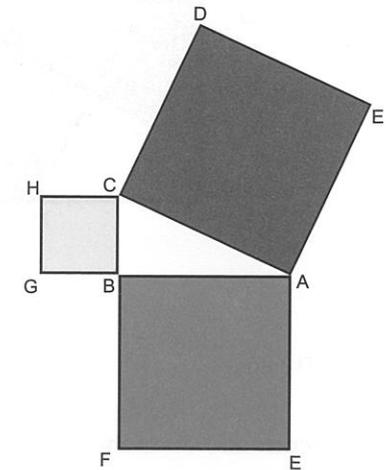
Fonte: O autor.

Constata-se que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo. Arrastando um dos vértices do triângulo, a conjectura estabelecida é reforçada através dos valores recolhidos numa tabela.

Figura 9 - Verificação em vários triângulos retângulos da relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os seus lados.

Area BCHG = 4,80 cm<sup>2</sup>  
 Area BFEA = 15,13 cm<sup>2</sup>  
 Area ACDE = 19,93 cm<sup>2</sup>  
 (Area BCHG)+(Area BFEA) = 19,93 cm<sup>2</sup>

Area BCHG	Area BFEA	Area ACDE	(Area BCHG)+(Area BFEA)
6,17 cm <sup>2</sup>	11,29 cm <sup>2</sup>	17,47 cm <sup>2</sup>	17,47 cm <sup>2</sup>
14,88 cm <sup>2</sup>	27,21 cm <sup>2</sup>	42,09 cm <sup>2</sup>	42,09 cm <sup>2</sup>
1,34 cm <sup>2</sup>	27,21 cm <sup>2</sup>	28,55 cm <sup>2</sup>	28,55 cm <sup>2</sup>
6,13 cm <sup>2</sup>	17,77 cm <sup>2</sup>	23,90 cm <sup>2</sup>	23,90 cm <sup>2</sup>
4,86 cm <sup>2</sup>	24,75 cm <sup>2</sup>	29,61 cm <sup>2</sup>	29,61 cm <sup>2</sup>
3,93 cm <sup>2</sup>	19,99 cm <sup>2</sup>	23,92 cm <sup>2</sup>	23,92 cm <sup>2</sup>
4,60 cm <sup>2</sup>	23,44 cm <sup>2</sup>	28,05 cm <sup>2</sup>	28,05 cm <sup>2</sup>
5,68 cm <sup>2</sup>	23,44 cm <sup>2</sup>	29,12 cm <sup>2</sup>	29,12 cm <sup>2</sup>
7,44 cm <sup>2</sup>	23,44 cm <sup>2</sup>	30,88 cm <sup>2</sup>	30,88 cm <sup>2</sup>
4,80 cm <sup>2</sup>	15,13 cm <sup>2</sup>	19,93 cm <sup>2</sup>	19,93 cm <sup>2</sup>



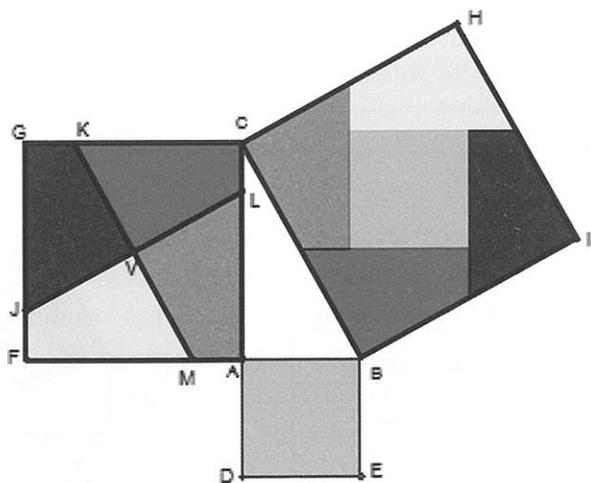
Fonte: O autor.

Como a recolha de um número finito de dados não permite validar a relação do teorema de Pitágoras, existem várias provas geométricas que se podem realizar com recurso ao GSP, como ilustra a prova que se apresenta.

#### Prova

Determinar o centro do quadrado ACGF, que é o ponto de interseção das diagonais do quadrado (V). De seguida, traçar por este ponto retas paralelas aos lados do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo. Com os pontos de interseção destas retas com os lados do quadrado ACGF, construir os quadriláteros AMVL, LVKC, KVJG e JVMF.

Figura 10 - Prova geométrica do Teorema de Pitágoras



Fonte: O autor.

Recorrendo ao menu do SGP das transformações geométricas, efetua-se uma translação dos quadriláteros que decompõem os quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo para o quadrado construído sobre a hipotenusa deste triângulo. Observa-se que este quadrado é composto pelos quadriláteros transladados, o que permite provar que  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$  qualquer que seja o triângulo retângulo que se considere.

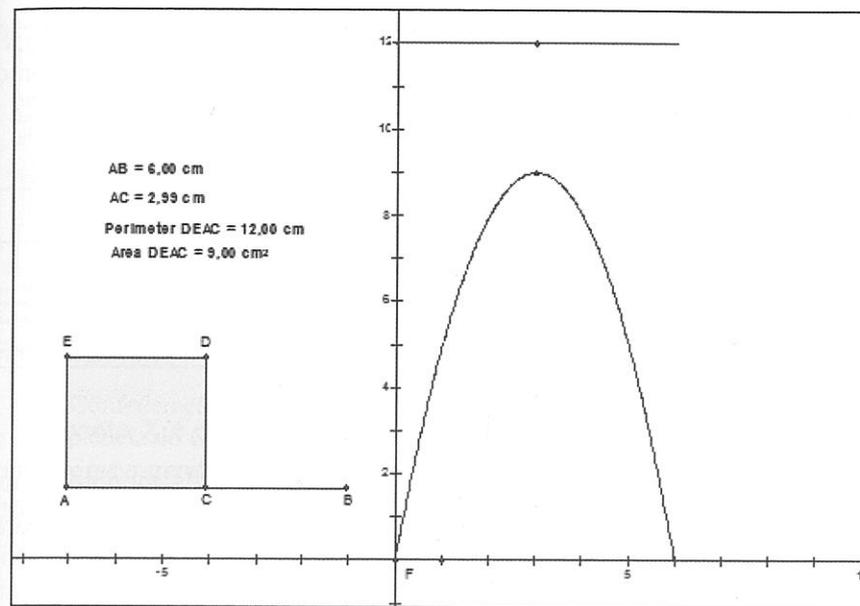
### Área máxima de retângulos com o mesmo perímetro

De entre os retângulos com o mesmo perímetro de 12cm, qual o que tem maior área?

Qualquer retângulo com perímetro de 12 cm faz com que a soma da largura pelo seu comprimento seja de 6 cm:  $2c + 2l = 12 \Leftrightarrow c + l = 6$ . Fazendo variar uma das dimensões do retângulo para valores próximos de zero, por exemplo  $l$ , a outra dimensão ( $c$ ) assume valores próximos de 6. A variação conjunta das dimensões dos retângulos com perímetro de 12 cm traduz-se na construção, com recurso ao GSP, de retângulos que à medida que uma das dimensões se aproxima de zero a outra dimensão aproximar-se-á de 6. Esses retângulos são obtidos a partir da construção de um segmento de reta com 6 cm de comprimento (AB) e de um ponto arbitrário (C) sobre esse segmento. Para formar os retângulos, considera-se uma circunferência com centro em

C e abertura até ao ponto B. Traça-se uma perpendicular a AB no ponto C e através do ponto de intersecção entre essa perpendicular e a circunferência (D) obtêm-se os pontos de referência para formar os retângulos que se geram a partir do deslocamento do ponto C.

Figura 11 - Representação dos dados do problema 'Área máxima de retângulos com o mesmo perímetro'



Fonte: O autor.

Com o GSP representa-se o ponto que tem de coordenadas (medida de AC, perímetro do retângulo). Selecionando o ponto C e o ponto representado no sistema de eixos cartesiano, através do Locus (comando do GSP que constrói um lugar geométrico definido por objetos relacionados por alguma propriedade) obtém-se o segmento de reta que representa os perímetros constantes dos retângulos que se podem formar.

Do mesmo modo, representa-se o ponto com coordenadas (medida de AC, área do retângulo). Selecionando o ponto C e este ponto representado no sistema de eixos cartesianos, através da função Locus obtém-se parte da parábola que representa a variação das áreas dos retângulos que se podem formar. Ao deslocar-se o ponto que percorre a parábola, a área máxima é de  $9 \text{ cm}^2$ , o que indica tratar-se da área de um quadrado de 3 cm de lado.

*Prova*

Se  $P = 12 \Leftrightarrow 2c + 2l = 12 \Leftrightarrow c + l = 6 \Leftrightarrow l = 6 - c$

Então  $A = c \times l = c \times (6 - c) = -c^2 + 6c = -(c - 3)^2 + 9$ , que graficamente é representado por uma parábola com concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem de coordenadas (3, 9). O valor máximo da área é  $9 \text{ cm}^2$  para  $c=3\text{cm}$ , o que significa que se trata de um quadrado com lado de 3 cm.

Outra forma de provar a conjectura estabelecida é através da aplicação de conhecimentos adquiridos no estudo da derivada de uma função. Como  $A = -c^2 + 6c$ ,  $A' = -2c + 6$ . Esta função anula-se quando  $c=3$ .

<b>c</b>	0		3		6
<b>A'</b>		+	0	-	-6
<b>A</b>		↗	9	↘	

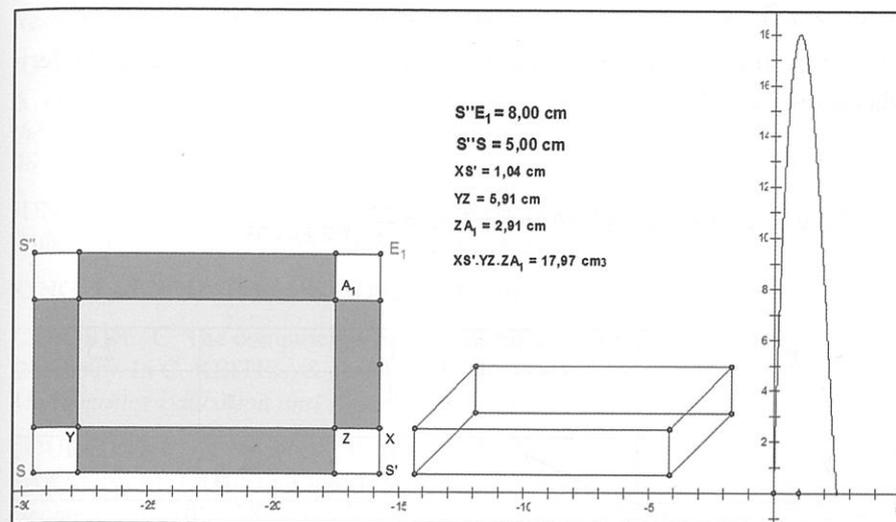
A análise da variação de sinal da função derivada e da monotonia da função correspondente permite verificar que a área máxima é de  $9 \text{ cm}^2$  para  $c = 3 \text{ cm}$ .

Volume máximo de uma caixa

Pretende-se construir uma caixa sem tampa retirando aos quatro cantos de uma folha de cartolina quatro quadrados iguais e dobrando, de seguida, a parte restante da folha. Qual deve ser o lado dos quadrados a retirar à folha de cartolina para que o volume da caixa construída seja máximo?

Na resolução deste problema, o GSP permite simular a planificação e a construção de caixas em função da dimensão dos quadrados que são cortados nos cantos de uma folha retangular.

Figura 12 - Representação dos dados do problema 'Volume máximo de uma caixa'



Fonte: O autor.

O ponto X é o elemento que determina a construção de tais quadrados, tornando-os geometricamente iguais. A variação deste ponto tem implicações nas dimensões das caixas a obter e na posição do ponto P no gráfico que representa no sistema de eixos cartesianos a variação do volume das caixas. Para este gráfico, representa-se o ponto P que tem de coordenadas  $(\overline{XS'}; \overline{XS'} \times \overline{YZ} \times \overline{ZA1})$  e de seguida seleccionam-se o ponto X e o ponto P, por esta ordem, para que, através do comando Locus, o GSP gere o gráfico pretendido. Deslocando o ponto P no gráfico obtido determina-se o valor do lado dos quadrados a retirar à folha de cartolina que faz com que o volume da caixa construída seja máximo (por observação do gráfico, o volume máximo é aproximadamente de  $18 \text{ cm}^3$  quando o corte dos quadrados é aproximadamente de 1 cm).

*Prova*

Considerando que as dimensões<sup>2</sup> da folha que gera as caixas são de 8 cm e 5 cm (dimensões presentes na construção no GSP), como os quadrados a cortar nos cantos da folha têm uma medida desconhecida (x), as

2 Para tornar mais realística a tarefa, pode-se admitir como dimensões das folhas as dimensões de uma folha A4 (21x29,7).

dimensões das caixas que se podem obter são representadas por  $(8-2x)$  cm,  $(5-2x)$  cm e  $x$  cm. O volume das caixas é obtido pela expressão:  
 $V = (8 - 2x) \cdot (5 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ ,  $x \in ]0; 2.5[$ .

Como se trata de um problema de otimização, estuda-se o sinal da derivada da função obtida:

$$V' = 12x^2 - 52x + 40$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{10}{3}, x \in ]0; 2.5[$$

$x$	0		1		2.5
$V'$		+	0	-	
$V$			18		

Constata-se que o volume máximo (18 cm<sup>3</sup>) das caixas que se formam em função dos cortes dos cantos da folha se obtém quando esse corte é de 1 cm.

### Referências bibliográficas

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

COELHO, I., & SARAIVA, J. Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. In M. J. SARAIVA, M. I. COELHO, & J. M. MATOS (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, (p. 7-33). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE), 2002.

DE CORTE, E. Aprender na escola com as novas tecnologias de informação. In V. D. TEODORO, & J. C. FREITAS (Orgs.), *Educação e computadores* (p. 89-159). Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação, 1992.

DE VILLIERS, M. The role of proof in investigate, computer-based geometry: some personal reflections. In J. King, & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on – Dynamic software in learning, teaching, and research* (p. 15-24). Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1997.

FERNANDES, J. A., ALVES, M. P., VISEU, F., & LACAZ, T. M. Tecnologias de Informação e Comunicação no Currículo de Matemática do Ensino Secundário após a Reforma Curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*, 4 (2), 291-329, 2006.

FITZALLEN, N. Integrating ICT into professional practice: A case study of four mathematics teachers. In P. CLARKSON, D. GRONN, M. HORNE, A. MCDONOUGH, R. PIERCE, & A. ROCHE (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice* (p. 353-360). Sydney: MERGA, 2005.

JONES, K. The mediation of learning within a dynamic geometry environment. In A. OLIVIER, & K. NEWSTEAD (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, p. 96-103), 1998.

JUNQUEIRA, M. *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos – Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM, 1995.

KING, J., & SCHATTSCHEIDER, D. *Geometria dinâmica*. Lisboa: APM, 2003.

LABORDE, C. The computer as part of learning environment: the case of Geometry. In C. KEITEL, & K. RUTHVEN (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (p. 48-67). Berlin: Springer-Verlag, 1993.

LOUREIRO, C., & BASTOS, R. Demonstração - uma questão polémica. In M. J. SARAIVA, M. I. COELHO, & J. M. MATOS (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (p. 105-128). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE), 2002.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Programa de Matemática A* (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação, 2002.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM: Lisboa, 2008.

PITEIRA, G. *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa), 2000.

PONTE, J. P., & CANAVARRO, P. *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

PONTE, J. P., BRANCO, N., & MATOS, A. *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC, 2009.

RODRIGUES, E. F. *Formação de Professores para a utilização das TIC no Ensino: Definição de Competências e Metodologias de Formação*, 2001. Acedido em 5 de Novembro, 2010, de <http://www.educ.fc.ul.pt/recentes/mpfip/comunica.htm>.

SCHWARTZ, J. L. A caixa mágica newtoniana. In V. D. TEODORO, & J. C. FREITAS (Orgs.), *Educação e computadores* (p. 219-226). Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação, 1992.

VISEU, F., NOGUEIRA, D., & SANTOS, E. Como alunos do 9.º ano aprendem, com recurso à tecnologia, o tema ângulos numa circunferência. In B. D. SILVA, L. S. ALMEIDA, A. BARCA, & M. PERALBO (Orgs.), *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (p. 2818-2831). Braga: Universidade do Minho, 2009.