Universidade do Minho
Instituto de Educação

Graciela Moro

O ensino de Álgebra Linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira: perspetivas e contributos da prática colaborativa

novembro de 2021

O ensino de Álgebra Linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira: perspetivas e contributos da prática colaborativa
Graciela Moro

UMinho | 2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Graciela Moro

O ensino de Álgebra Linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira: perspetivas e contributos da prática colaborativa

Tese de Doutoramento
Doutoramento em Ciências de Educação
Especialidade em Educação Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu
e da
Doutora Ivanete Zuchi Siple

novembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceber saúde, sabedoria e persistência na condução deste trabalho.

Agradeço imensamente aos meus orientadores por acreditarem neste trabalho e na minha capacidade de o desenvolver. Em especial ao meu orientador, o Professor Floriano Viseu, que se tornou um amigo. Desde o primeiro contacto, na definição do projeto, procurou incentivar-me e teve todo o zelo para que tudo ocorresse da melhor forma possível. Aprendi muito com você professor, tanto no trato humano, quanto no profissionalismo com que concebeu a orientação. Quero ser como você quando eu tiver os meus mestrandos e doutorandos. À minha orientadora, amiga e colega Ivanete Zuchi Siple, a minha gratidão por todo o apoio. Que a nossa parceria na pesquisa renda muitos frutos.

Um especial agradecimento aos professores participantes do estudo, em especial os do grupo de trabalho colaborativo, por todas as reflexões e aprendizagens que me proporcionaram.

Aos meus colegas de doutoramento, em particular à Eliane, ao Marnei, à Fabíola e à Lidiane, muito obrigada pela amizade, pelo apoio e pelas aprendizagens partilhadas.

Ao meu companheiro de vida, meu amor Marcello, e à minha filha Gabriella, obrigada por todo o amor, pelo apoio e por embarcarem incondicionalmente comigo nesta aventura. Ter vocês ao meu lado, tornou tudo mais leve.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

O ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR NOS CURSOS DE GRADUAÇÃO DE UMA UNIVERSIDADE BRASILEIRA: PERSPETIVAS E CONTRIBUTOS DA PRÁTICA COLABORATIVA

RESUMO

O ensino de Álgebra Linear tende a seguir os pressupostos que valorizam a pedagogia tradicional, privilegiando o raciocínio axiomático, despertando nos estudantes o sentimento de aprender um tema que parece não ser significativo. Um dos grandes desafios passa por inovar a prática tradicional do professor que muitas vezes trabalha isoladamente tendo como principal fonte de inspiração o livro didático, que geralmente apresenta uma abordagem formal e descontextualizada. De modo a alterar este status, o trabalho colaborativo entre os professores que lecionam essa disciplina propicia oportunidades para um trabalho entre pares – identificação de situações problemáticas do ensino e da aprendizagem, elaboração de propostas de ensino e reflexão sobre essas propostas. Assim, este estudo teve como objetivos caracterizar o ensino de Álgebra Linear de professores numa universidade brasileira e averiguar o contributo do trabalho colaborativo entre professores desta instituição no ensino de Álgebra Linear. Para concretizar tais objetivos delinearam-se as seguintes questões de investigação: Como os docentes ensinam Álgebra Linear? Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear? Que perspetivas têm os docentes sobre o trabalho colaborativo? Que problemáticas identificam os professores de um grupo de trabalho colaborativo na sua prática de ensino de Álgebra Linear? Como essas problemáticas são tratadas? Quais as potencialidades e os constrangimentos do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear? Adotando uma abordagem qualitativa e interpretativa, o estudo desdobrou-se em duas fases. Na primeira, participaram 15 professores que ensinam/ensinaram Álgebra Linear. Desse grupo de professores, constituiu-se um grupo de trabalho com características colaborativas, com seis professores, com o propósito de identificar situações problema do seu ensino de Álgebra Linear e de planificar e discutir momentos da sua prática de ensino. O trabalho realizado neste grupo constituiu a segunda fase desta investigação, que teve por objetivo averiguar o contributo do trabalho colaborativo no ensino desta disciplina. Para este fim adotou-se um design de estudo de caso sobre dois desses professores. De modo a atender aos propósitos da investigação, os dados foram recolhidos através de entrevistas, da observação e da análise documental.

Este estudo conclui que o ensino de Álgebra Linear é apoiado por estratégias de ensino direto, que se repercute na transmissão do conteúdo de forma sistematizada e expositiva, alternada com a resolução de exercícios realizada pelo professor, competindo aos alunos um papel de reprodutores da informação veiculada na sala de aula. As dificuldades no ensino incidem sobre como ensinar os tópicos de Álgebra Linear de modo que os alunos os consigam compreender, em particular, os espaços vetoriais; como explorar as aplicações contextualizadas dos tópicos de Álgebra Linear e os materiais tecnológicos com a finalidade de envolver e motivar os alunos no processo de aprendizagem. O trabalho em colaboração entre pares, na preparação e reflexão sobre as práticas de ensino não parece fazer parte da prática dos professores, sendo que a maioria trabalha isoladamente e eventualmente troca ideias sobre a prática em conversas informais. A perspetiva dos professores é que o trabalho colaborativo se concretiza quando um grupo de pessoas trabalha em conjunto. Ao integrar um grupo de trabalho com características colaborativas essa noção paulatinamente se altera. Os professores sentem-se apoiados para enfrentar as problemáticas que os desafiam no ensino da Álgebra Linear, concretizando estratégias de ensino que procuram envolver os alunos nas suas aulas através de tarefas de contextualização, do uso do GeoGebra e de uma avaliação diversificada das atividades dos alunos. Os constrangimentos que surgem no desenvolvimento do trabalho colaborativo incidem sobre o tempo disponível dos professores para se dedicarem nas ações do grupo, o uso de tecnologia, o gerenciamento do cronograma da disciplina e a dinâmica do trabalho no grupo. Conclui-se que o espaço de discussão e reflexão promovido num grupo de trabalho colaborativo sobre a sua prática potencializa a tomada de consciência do professor sobre as suas dificuldades e as dos seus alunos.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Aprendizagem; Ensino; Prática profissional; Trabalho Colaborativo.

TEACHING LINEAR ALGEBRA IN UNDERGRADUATE COURSES AT A BRAZILIAN UNIVERSITY: PERSPECTIVES AND CONTRIBUTIONS OF COLLABORATIVE WORK

ABSTRACT

The teaching of linear algebra tends to follow the assumptions that value traditional pedagogy, favoring axiomatic reasoning, and bringing out in students the feeling of learning a topic that does not seem to be significant. One of the greatest challenges is to improve the traditional practice of professors who often work in isolation, having a textbook as their main source of inspiration, which usually has a formal and decontextualized approach. In order to change this status, collaborative work among professors who teach this subject provides opportunities to work among peers – identifying problematic situations in teaching and learning, preparing teaching proposals and reflecting on these proposals. Thus, this study characterizes the teaching of linear algebra by professors at a Brazilian university and investigates the contribution of collaborative work among professors from this institution in the teaching of linear algebra. To achieve these goals, the following research questions were outlined: How do professors teach linear algebra? What difficulties do professors have in teaching linear algebra? What points of view do professors have on collaborative work? What issues do professors in the collaborative work group identify in their teaching practice in linear algebra? How are these issues handled? What are the possibilities and constraints of collaborative work in teaching linear algebra? Adopting a qualitative and interpretive approach, the study was divided into two phases. In the first phase, fifteen professors who teach/taught linear algebra participated. From this group of professors, a working group of six professors with collaborative characteristics was formed, in order to identify problem situations in their teaching of linear algebra and to plan and discuss their teaching practice. The work carried out in this group constituted the second phase of this investigation, which investigated the contribution of collaborative work in teaching this course. For this purpose, a case study design on two of these professors was adopted. In order to meet the purposes of the investigation, data were collected through interviews, observation and document analysis.

This study concludes that the teaching of linear algebra is supported by direct teaching strategies, which affect the transmission of content in a systematic and expository way, in conjunction with the resolution of exercises performed by the professor, with students playing the role of reproducers of the information conveyed in the classroom. Difficulties in teaching focus on how to teach linear algebra topics so that students can understand them, in particular, vector spaces; how to explore contextualized applications of linear algebra topics and technological materials in order to engage and motivate students in the learning process. Collaborative work among peers, in preparing and reflecting on teaching practices, does not seem to be part of the professors' practice, with most of them working in isolation and eventually exchanging ideas about the practice in informal conversations. The point of view of the professors is that collaborative work is realized when a group of people work together. When joining a work group with collaborative characteristics, this notion gradually changes. Professors feel supported to face the problems that challenge them in teaching linear algebra, implementing teaching strategies that seek to involve students in their classes through contextualization tasks, the use of GeoGebra and a diversified assessment of student activities. The constraints that arise in the development of collaborative work affect the time available for professors to dedicate themselves to group actions, the use of technology, the management of the course's schedule and the dynamics of group work. In conclusion, the space for discussion and reflection promoted in a collaborative work group about their practice enhances the professors' awareness of their difficulties and those of their students.

Keywords: Linear algebra; Learning; Teaching; Professional practice; Collaborative work.

ÍNDICE

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Quadros

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este estudo debruça-se sobre o ensino de Álgebra Linear em cursos de uma universidade brasileira. Como se trata de uma área da Matemática organizada por conteúdos abstratos, nem sempre se torna fácil ao professor de os tornar compreensíveis aos seus alunos. Por sua vez, ao ser uma disciplina transversal a vários cursos, como, por exemplo, de formação de professores ou de engenharia, o professor vê-se impelido a recorrer às mesmas estratégias de ensino sem atender à especificidade do curso que leciona. Acontece que as estratégias de ensino que valorizem o conteúdo e a reprodução de técnicas, independentemente do curso em que se leciona, repercutem-se no fraco desempenho dos alunos. As recomendações atuais para o ensino de Álgebra Linear contrariam este tipo de estratégias, valorizando as que poem em relevo a atividade do aluno, a integração de tarefas contextualizadas e a utilização de artefactos tecnológicos que ajudem o aluno a visualizar o significado de conceitos que estuda. Tais recomendações não se tornam fáceis de concretizar quando o professor pauta a sua ação profissional por atividades individualistas, para além da sua formação relativa à Álgebra Linear. Mesmo quando procura minimizar o insucesso dos seus alunos, a diversidade das demandas profissionais impossibilita o professor de inovar a sua prática de modo a elevar a compreensão dos discentes dos conteúdos com que se deparam. Tais inquietações levaram-me a desenvolver este estudo, acreditando que existem formas de envolver os professores a trabalhar com os seus pares, como, por exemplo, o trabalho colaborativo, em torno de problemáticas que emergem da sua prática pedagógica. Partindo desta crença, este capítulo apresenta as motivações pessoais que me levaram a incidir sobre o ensino de Álgebra Linear, com foco no trabalho colaborativo entre professores sobre situações desse ensino, o contexto em que o estudo se insere, a sua relevância, os objetivos e as questões de investigação, e, finalmente, descreve a organização da presente tese.

1.1. Motivações pessoais

Este trabalho de investigação debruça-se sobre a prática de ensino de professores que ministram a disciplina de Álgebra Linear numa universidade brasileira, tendo como foco o contributo do trabalho colaborativo entre um grupo de professores. Trata-se de uma temática relevante face às mudanças curriculares, culturais e tecnológicas que colocam em xeque as práticas tradicionais e o desenvolvimento profissional dos professores. A mudança da prática tradicional do professor que ensina Álgebra Linear é um dos grandes desafios no ensino dessa disciplina, já permeada por muitas dificuldades tanto do ponto de vista de ensino quanto da aprendizagem dos alunos. O trabalho colaborativo entre os professores pode-se revelar uma atividade profissional propícia para tal mudança, representando um ambiente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor que ensina Álgebra Linear (Boavida & Ponte, 2002; Robutti et al., 2016).

A escolha do tema deste estudo resulta da minha paixão pelo ensino da Álgebra Linear, bem como da consciencialização da necessidade de mudança na minha prática docente, após ministrar essa disciplina por mais de uma década, resultante das dificuldades de ensinar essa disciplina e da procura de perceber as dificuldades de aprendizagem reveladas pelos alunos. Minhas inquietações com o ensino de Álgebra Linear não são recentes muito menos exclusivas. Ao longo da minha prática docente já experienciei, durante três anos, a coordenação de um projeto de ensino de Álgebra Linear cujo objetivo foi criar ações que possibilitassem manter a qualidade de ensino e aprendizagem, inseridas num grupo de trabalho entre os docentes que atuavam nessa disciplina. O trabalho neste grupo consistia no planeamento do plano de ensino (tipo, quantidade e datas das avaliações, bibliografia a ser utilizada), a elaboração de avaliações comuns a todos os professores e a partilha de materiais didáticos (livros, apostilas e listas de tarefas) utilizados na disciplina. Entretanto, não havia uma preocupação do grupo em discutir e refletir sobre as estratégias de ensino da disciplina. Um ponto menos conseguido na execução do projeto foi o facto da metodologia adotada não ter obtido sucesso para minimizar os altos índices de evasão da disciplina. No entanto, mesmo não obtendo uma resposta de sucesso, os índices divulgados nesta instituição em que exerço a minha atividade profissional corroboraram com a necessidade de pesquisas sobre as causas dos altos índices de evasão dos seus cursos na área de Ciências Exatas (Figueiredo et al., 2014) e me inspiraram a continuar as pesquisas nessa área.

Depois da experiência que vivenciei, apercebi-me dos desafios de que se revestem os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear, levando-me a colocar algumas questões latentes à minha prática docente: Que metodologias podem favorecer o ensino e a aprendizagem dessa disciplina? De que maneira os professores podem contribuir para o desenvolvimento de estratégias para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear? Com o intuito de obter respostas para tais inquietações ‘mergulhei’ neste estudo investigativo que aborda o ensino de Álgebra Linear numa universidade brasileira, com uma perspetiva de promover o trabalho colaborativo entre pares.

1.2. O contexto do estudo

Com o objetivo de encontrar estratégias de ensino que pudessem favorecer a aprendizagem na Álgebra Linear e contribuir para minimizar os índices de evasão nesta disciplina, me propus a realizar um estudo com um grupo de professores de uma universidade brasileira. Para concretizar tal objetivo, comecei por efetuar um levantamento em todos os Centros de Ensino desta instituição, buscando professores que estavam a lecionar Álgebra Linear naquela altura ou já tivessem lecionado anteriormente e que estivessem disponíveis para cooperar com a investigação. Deste levantamento, encontrei 15 professores que se disponibilizaram a participar numa entrevista, em que procurei identificar: as estratégias que usavam no ensino de Álgebra Linear; as suas principais dificuldades neste ensino; e as suas experiências de trabalho com pares. A motivação para este levantamento foi identificar os professores que utilizassem alguma estratégia de ensino 'não tradicional' ou que tivessem interesse em constituir um grupo com características colaborativas para discutir o ensino da Álgebra Linear. A partir deste levantamento identifiquei um grupo de seis professores do Centro de Ensino em que atuo, que se disponibilizaram a participar e discutir as suas práticas de ensino.

A partir da conceção do grupo, passamos a reunir-nos periodicamente. Inicialmente, todos os elementos do grupo partilharam as suas experiências de ensino da Álgebra Linear. Com base nas dificuldades relatadas por cada um dos docentes, procurámos definir objetivos comuns de trabalho para o grupo. A dinâmica de trabalho consistiu na planificação de aulas e de tarefas avaliativas, na concretização dessas atividades e na reflexão no grupo com o objetivo de identificar as dificuldades e possíveis melhorias. O trabalho neste grupo teve a duração de dois semestres letivos, proporcionando uma importante fonte de informações para o desenvolvimento desse estudo.

1.3. A relevância do estudo

A importância da disciplina de Álgebra Linear ocupa um lugar central no cenário de ensino e aprendizagem de Matemática, devido às conexões com outras áreas de conhecimento.

> A importância da Álgebra Linear tem crescido nas últimas décadas, os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento da informática e como seria de se esperar, esse desenvolvimento estimulou um notável crescimento de interesse em Álgebra Linear. Sua importância vai desde as ciências sociais às ciências exatas, permitindo seu uso diário em áreas como economia, aviação, exploração petrolífera e circuitos eletrônicos. (Nieto & Lopes, 2006, p. 611).

Nos cursos de formação de professores de Matemática, a Álgebra Linear é uma poderosa ferramenta tanto para o desenvolvimento do pensamento matemático, como para o reconhecimento de aplicações em problemas de diversas áreas, tais como, por exemplo, na Biologia, na Economia e na Computação.

> A Álgebra Linear é também uma disciplina propícia para explorar o potencial didático das ferramentas tecnológicas e, nesse caso, os aspetos numéricos se tornam relevantes além da estrutura algébrica. O conhecimento de Álgebra Linear irá ajudar o professor na sala de aula, ao ensinar conteúdos da própria Matemática sabendo das aplicações em outras áreas, o que abre oportunidades para interação didática interdisciplinar, fundamentada em linguagem matemática. (SBEM, 2013, p. 31)

Apesar da sua grande aplicabilidade, "o ensino da Álgebra Linear a nível universitário é quase universalmente considerado uma experiência frustrante para professores e alunos" (Hillel, 2000, p. 191), devido às dificuldades de aprendizagem dos alunos nesta disciplina. Esta constatação é corroborada por Dorier (2002), que considera que

> o ensino da Álgebra Linear é universalmente reconhecido como difícil. Os estudantes geralmente sentem-se pousando em outro planeta, eles são surpreendidos com o número de novas definições e a falta de conexão com o conhecimento anterior. Por outro lado, os professores muitas vezes sentem-se frustrados e desarmados, quando confrontados com a incapacidade de seus alunos para lidar com as ideias que eles consideram ser tão simples. (Dorier, 2002, pp. 875-876)

Os desafios que os alunos podem enfrentar ao aprender conceitos fundamentais em Álgebra Linear são bem documentados. A Álgebra Linear é uma disciplina complexa para os alunos por uma variedade de razões, incluindo: a generalização do raciocínio das formas geométricas (Harel, 1990; Hillel, 2000); a compreensão das diferentes notações simbólicas da Álgebra Linear (Harel & Kaput, 1991; Larson & Zandieh, 2013); a utilização de definições formais da Álgebra Linear (Dorier et al., 2000a); e a coordenação entre as diferentes linguagens, pensamentos e representações envolvidos em Álgebra Linear (Dogan-Dunlap, 2010; Hillel, 2000; Sierpinska, 2000).

A dificuldade nessa disciplina não é inerente apenas à aprendizagem do aluno, também se manifesta na prática docente. Nieto e Lopes (2006) salientam que ministrar Álgebra Linear não é uma tarefa fácil e constitui-se um desafio para os professores. As inquietações por parte de quem ensina essa disciplina, que não são recentes, envolvem questões relacionadas com o currículo e com o uso de metodologias de ensino diferenciadas, que incorporem, em particular, materiais tecnológicos nas estratégias de ensino, dentre outras. Vários pesquisadores, ao redor do mundo, têm compartilhado experiências e sugestões para o ensino de Álgebra Linear, com o intuito de minimizar as dificuldades e torná-la mais acessível aos alunos. Tais sugestões envolvem: trabalhar com o conhecimento prévio dos alunos; adiar a formalização; enfatizar o papel das diferentes representações dos conceitos de Álgebra Linear (Artigue et al., 2000); a utilização de uma abordagem progressiva da abstração de acordo com os três princípios pedagógicos (da concretização, da necessidade e da generalização) (Harel, 2000); e enfatizar a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear (Gonçalves, 2018; Harel, 1989, 2000; Konyalioglu et al., 2011).

Um dos grandes desafios do ensino de Álgebra Linear é inovar a prática tradicional do professor. Segundo Dubinsky (1997), as práticas tradicionais contribuem muito pouco para a compreensão dos alunos, pois em geral a abordagem padrão é a exposição das ideias ou a resolução de problemas passo a passo, realizadas pelo professor, esperando-se que os alunos consigam extrair princípios gerais, 'copiando' o que os seus professores fazem. Mas como alterar essa prática tão culturalmente presente em nosso ofício docente? Para Boavida e Ponte (2002), a colaboração é uma estratégia fundamental para enfrentar problemas de natureza complexa, como, por exemplo, a prática pedagógica, pois possibilita um contexto altamente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor. No trabalho colaborativo existe a vantagem de múltiplos olhares sobre a situação educacional o que, como consequência, permite que se produzam quadros interpretativos consistentes sobre a questão estudada e investigada. Vygotsky (1985) argumenta que as atividades realizadas em grupo, de forma conjunta, oferecem enormes vantagens, que não estão disponíveis em ambientes de aprendizagem individualizada. Assim, a formação de um grupo de trabalho colaborativo entre os professores que ministram a disciplina de Álgebra Linear pode-se revelar um ambiente propício à reflexão e à busca de soluções das problemáticas evidenciadas nos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

> Um grupo colaborativo é aqui entendido como um grupo em que a participação é voluntária, em que todos os indivíduos envolvidos buscam o crescimento profissional, compartilham confiança e respeito, apoiam o trabalho em grupo, se engajam em um propósito comum, criando e compartilhando significados sobre o que estão fazendo, sobre suas vidas e práticas profissionais. Nesse contexto, os participantes sentem-se à vontade para expressar suas ideias livremente, ouvir críticas e mudar pontos de vista, e as atividades não seguem apenas uma orientação determinada. Os participantes podem ter diferentes níveis de envolvimento, diferentes interesses e pontos de vista, contribuindo assim para uma grande variedade de ideias. (Ferreira & Miorim, 2011, p. 138)

Com base no entendimento que Ferreira e Miorim (2011) têm sobre o trabalho colaborativo, percebe-se que não é suficiente formar um grupo de pares sem que haja uma identificação e um envolvimento conjuntos com as problemáticas tratadas no seio deste grupo.

1.4. Objetivos e questões de investigação

A Álgebra Linear apresenta um imenso potencial de aplicações em muitos campos científicos, ocupando um papel fundamental na formação acadêmica dos alunos de Matemática e áreas afins. Entretanto, o alto nível de formalismo dessa disciplina, muitas vezes, não permite aos alunos estabelecer conexões com o que eles já sabem de Matemática (Dorier, 2002; Harel, 1989). Além disso, a abordagem axiomática desta disciplina desperta, nos estudantes, o sentimento de aprender um tema que lhes parece não ser significativo. Assim, a Álgebra Linear acaba por se tornar uma disciplina-problema em muitas instituições de Ensino Superior derivado ao fraco desempenho de muitos alunos que acabam por reprovar (Celestino, 2000; Figueiredo et al., 2014). Um dos grandes desafios passa por inovar esta prática tradicional do professor, denominado de ensino direto (Ponte, 2005b), que muitas vezes trabalha isoladamente tendo como fonte apenas o livro didático, o qual geralmente apresenta uma abordagem formalista e descontextualizada, não permitindo a discussão e a reflexão de outras abordagens e/ou metodologias que poderiam favorecer os processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Diante deste contexto, este estudo tem como objetivos caracterizar o ensino de Álgebra Linear de professores de uma universidade brasileira e averiguar o contributo do trabalho colaborativo entre professores dessa instituição no ensino de Álgebra Linear. Tendo em vista o objetivo proposto, formularam-se as seguintes questões de investigação:

- Como os docentes ensinam Álgebra Linear?
- Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear?
- Que perspetivas têm os professores sobre o trabalho colaborativo?
- Que problemáticas identificam os professores de um grupo de trabalho colaborativo na sua prática de ensino de Álgebra Linear? Como essas problemáticas são tratadas?
- Quais as potencialidades e os constrangimentos do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

1.5. Organização da tese

Esse estudo está organizado em nove capítulos, sendo o primeiro a Introdução, que contempla a problemática, as justificativas, os objetivos, as questões de investigação e a organização da tese.

O Capítulo 2 debruça-se sobre a sustentação teórica de processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear que embasaram a compreensão das perspetivas das práticas dos professores que ensinam esta disciplina, sobre as dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos, e sobre o debate de dimensões do conhecimento profissional do professor que ensina Álgebra Linear.

O Capítulo 3 descreve um percurso para superar a solitude e o individualismo que permeiam a prática docente – o Trabalho Colaborativo – conferindo apoio e recursos para lidar com os desafios que impõem as mudanças da sociedade atual. Assim, são caracterizados os aspetos que constituem o trabalho colaborativo, a promoção de formas de trabalho coletivo, os constrangimentos enfrentados e as potencialidades deste modo de trabalho na prática docente.

O Capítulo 4 apresenta os procedimentos metodológicos assumidos no desenvolvimento da investigação. Inicialmente, debruça-se sobre a definição do problema de estudo, a descrição das fases da investigação e das opções metodológicas que a sustentam. Na sequência, apresentam-se os participantes e os procedimentos para a sua escolha. Por fim, apresentam-se os métodos de recolha dos dados e como se procedeu a análise dos dados.

O Capítulo 5 descreve a trajetória de um grupo de trabalho colaborativo, incluindo a caracterização deste grupo e as diferentes fases do trabalho do grupo até ao culminar do que denomino de grupo de trabalho colaborativo.

O Capítulo 6 trata da análise das perceções de professores de uma universidade brasileira que ensinam ou ensinaram Álgebra Linear, apresentando uma caracterização desses professores, seguindo-se um seu olhar sobre a sua prática profissional e, por fim, sobre a sua prática de ensino em Álgebra Linear.

Nos dois capítulos consequentes, Capítulo 7 e Capítulo 8, desenvolvem-se dois estudos de caso, respetivamente, sobre os professores Téo e Nina. Estes capítulos têm por finalidade evidenciar as formas como Téo e Nina se integram nas atividades realizadas no seio do grupo de trabalho colaborativo em prol da sua prática docente de tópicos de Álgebra Linear.

O Capítulo 9 debruça-se sobre as discussões e as conclusões do estudo, as suas limitações e recomendações para futuras investigações.

Na sequência são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas na presente pesquisa, bem como os anexos que fazem parte da mesma.

CAPÍTULO 2

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

Este capítulo, constituído por três secções, debruça-se sobre os processos de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. Com o intuito de entender a natureza das dificuldades dos estudantes na aprendizagem de Álgebra Linear, inicialmente é apresentado um olhar sobre a teoria de Espaços Vetoriais com suas características de generalização e unificação do pensamento matemático. Em seguida, evidenciam-se alguns estudos que discutem as dificuldades de aprendizagem nessa disciplina. Face às dificuldades, são apresentadas algumas perspetivas que a literatura aponta para o ensino de Álgebra Linear e são analisados alguns estudos relacionados com a prática pedagógica do professor que ensina esta disciplina. Por fim, enquadra-se o conhecimento profissional do professor que ensina Álgebra Linear em torno de modelos que a investigação procura sustentar a sua ação didática.

2.1. Um olhar sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear

A Álgebra Linear é um ramo da Matemática que envolve a teoria de espaços vetoriais e as transformações lineares entre esses espaços. O conceito de espaço vetorial é resultado de um longo processo de generalização e unificação que envolve várias partes da Matemática como a Geometria, a Análise e a Álgebra.

As raízes do desenvolvimento da teoria de espaços vetoriais podem ser encontradas no final do século XIX, onde os métodos de resolução de problemas lineares eram operacionais, mas não eram explicitamente teorizados ou unificados (Dorier, 2002). A questão de usar ou não usar uma abordagem axiomática estava mais vinculada à organização do conhecimento do que à eficiência na resolução de problemas. Entretanto, segundo Dorier (2002), a última fase da conceção da teoria de espaços vetoriais, que corresponde à reconstrução teórica dos métodos de resolução de problemas lineares, utilizando os conceitos e ferramentas de uma nova teoria central axiomática, só começou após 1930. É importante salientar que a axiomatização não foi desenvolvida para resolver novos problemas, mas para simplificar a solução de problemas oriundos de diversos contextos utilizando uma abordagem e linguagem única e generalista (Dorier, 2002; Harel & Trgalová, 1996). Muitos desses problemas poderiam ser resolvidos sem o uso da Álgebra Linear, mas a sua resolução poderia ser mais complexa. Assim, a Álgebra Linear tornou-se uma teoria universal, generalista e unificada, e simplificada para prover potencialmente a solução destes problemas. Por outro lado, essa simplificação só é visível para o especialista que reconhece a vantagem da generalização e aplicação em diversas áreas. Do ponto de vista didático, algumas pesquisas têm evidenciado que tal simplificação não é evidente, sendo fonte de muitas dificuldades na aprendizagem dos alunos, visto que a Álgebra Linear, geralmente, é o primeiro contacto dos alunos com a formalismo, sem qualquer preparação para o mesmo (Dorier, 2002; Harel, 1989). A dicotomia entre o sucesso e a dificuldade da axiomatização da Álgebra Linear tem impactado o currículo do ensino da Matemática em vários países, nos diferentes níveis de ensino.

De acordo com Dorier (2000), a teoria axiomática de espaços vetoriais de dimensão finita foi introduzida nos currículos de Matemática do Ensino Básico de muitos países, nos anos 60 com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), a partir da influência do grupo Bourbaki[1]. O objetivo do movimento era tornar o ensino da Matemática mais acessível a um maior número de alunos. Houve uma transformação completa no ensino da Geometria — "os axiomas de Euclides foram relocados por aqueles de espaços afins com uma forte ênfase no estudo das transformações lineares e afins" (Dorier, 2000, p. 12). A teoria formal de espaços vetoriais surgiu como um modelo para simplificar a solução de problemas lineares a partir de uma abordagem unificada e generalizada. Entretanto, não demorou muito para a comunidade de Educação Matemática perceber que aquela teoria com um poder simplificador, era na verdade uma fonte de graves dificuldades cognitivas. Aos poucos, o movimento foi fracassando e no início da década de 1980 a teoria dos espaços vetoriais desapareceu do Ensino Básico. A partir daí até aos dias de hoje, a Álgebra Linear dos espaços vetoriais está presente apenas no Ensino Superior, sendo uma disciplina básica do currículo da maioria dos cursos de graduação da área das Ciências Exatas. Em geral, é uma disciplina presente no primeiro ou segundo ano desses cursos e no Brasil é o primeiro contacto que os alunos de Ciências Exatas têm com uma teoria mais formal da Matemática. Com o fim do MMM, no Brasil e em outros países, como a França, não se estuda mais no Ensino Básico as estruturas algébricas. Estudam-se os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares em duas e três dimensões, que servem de ferramenta para o estudo dos conteúdos da Álgebra Linear. Mas é no Ensino Superior, especificamente na disciplina de Álgebra Linear, que os alunos da área das Ciências Exatas têm o primeiro contacto com as estruturas algébricas e com um raciocínio pautado por axiomas, teoremas e demonstrações. Nas universidades, dependendo do curso, há diferentes enfoques para a disciplina, desde uma abordagem mais formal, ou limitada ao $\mathbb{R}^n$ e ao cálculo matricial, ou apenas introduzido dentro de uma abordagem mais geométrica. O que é consenso para a maioria dos

[1] "[...] grupo de matemáticos, quase todos franceses, que se reuniu para escrever um tratado de Análise e acabou por reorganizar boa parte da Matemática desenvolvida até então, tomando como princípios a unidade da Matemática, as estruturas-mães (algébricas, topológicas e de ordem) e o método axiomático" (Esquincalha, 2012).

professores é que é uma disciplina difícil de ensinar por conta das dificuldades que os alunos têm de lidar com ideias que para eles parecem ser simples (Dorier, 2002).

Estudos realizados nas décadas de 1980 e 1990 por um grupo de pesquisadores franceses em Didática da Matemática, como Dorier, Robert, Robinet e Rogalski, apontam que a maior crítica dos alunos em relação à Álgebra Linear diz respeito ao uso do formalismo, à grande quantidade de novas definições e à falta de conexão com o que os alunos já sabem de Matemática, despertando o sentimento de estudar um tema que lhes parece não ser importante para a sua formação. Por outro lado, as críticas dos professores estão relacionadas com o uso equivocado pelos alunos de ferramentas básicas de lógica ou teoria de conjuntos e à falta de habilidade em geometria cartesiana elementar, o que não permite o recurso à intuição para construir representações geométricas dos conceitos básicos de espaços vetoriais (Dorier et al., 2000a). Estes autores chamam a atenção de que essas queixas correspondem a uma determinada realidade e que algumas tentativas para remediar essa situação até foram tomadas (na França), como oferecer um curso de Álgebra Linear com uma parte introdutória com ênfase na Geometria e/ou lógica e teoria de conjuntos, mas que não parecem ter melhorado significativamente o desempenho dos alunos.

Em relação às dificuldades manifestadas pelos estudantes quanto ao aspeto formal da teoria de espaços vetoriais, Dorier et al. (2000a) evidenciam que não se devem apenas ao formalismo em si, mas sobretudo à dificuldade em entender "o uso específico do formalismo dentro da teoria dos espaços vetoriais e a interpretação dos conceitos formais em relação a contextos mais intuitivos como geometria ou sistemas de equações lineares, nas quais eles historicamente emergiram" (p. 86). Entre os anos de 1987 e 1994, vários estudos de diagnóstico sobre as dificuldades dos estudantes foram conduzidos por Dorier, Robert, Robinet e Rogalski. Esses estudos não só envolviam a elaboração e validação de experiências de ensino, mas também uma reflexão epistemológica construída sobre a análise histórica da gênese dos conceitos de Álgebra Linear e sobre uma análise didática do ensino e das dificuldades dos alunos. Dorier et al. (2000a) constataram uma série de obstáculos em diferentes níveis que apareceram para todas as gerações sucessivas de estudantes envolvidos em seus estudos — o *obstáculo ao formalismo*. Segundo Dorier (2000), o obstáculo do formalismo é um obstáculo epistemológico, pois os estudantes têm as mesmas dificuldades que sucessivas gerações de estudiosos tiveram no desenvolvimento da estrutura axiomática. Exemplos do obstáculo do formalismo encontrados nos estudos de Dorier et al. (2000a) incluem:

1) o uso inadequado das noções de lógica e da linguagem da teoria de conjuntos – confusão entre inclusão e igualdade, entre implicação e equivalência ou entre hipótese e conclusão;

2) a permanência de conceitos de Álgebra Linear no estado conceito-objeto – o que é estudado na disciplina é visto como um objeto isolado, sem nunca se tornar ferramenta para a resolução de problemas (eles reconhecem a Álgebra Linear como ferramenta apenas para a solução de sistemas lineares);
3) dificuldades em lidar com conceitos abstratos, onde o uso da intuição e verificação pragmática não é possível;
4) dificuldades com o controle do que se está fazendo – confusão entre parâmetros e variáveis por exemplo, quando se resolve sistemas lineares;
5) dificuldades na compreensão de conceitos fundamentais como o de espaços vetoriais;
6) dificuldades em lidar com a quantidade de definições e teoremas;
7) dificuldades em realizar cálculos corretamente;
8) dificuldades em realizar demonstrações rigorosas.

Os autores verificaram também em seus estudos que os alunos com um bom conhecimento prévio em lógica elementar tiveram um melhor desempenho em Álgebra Linear, inferindo que a habilidade em lógica é necessária para entender o formalismo da teoria dos espaços vetoriais. Entretanto, provaram com os seus estudos que ao invés de oferecer um curso em lógica e teoria de conjuntos desconectado de qualquer conteúdo matemático específico, é muito mais efetivo enfatizar essas questões dentro da própria Álgebra Linear, em conexão com elementos anteriores de conhecimento mais intuitivos e significativos (especialmente em Geometria ou sistemas de equações lineares). Os autores também observaram que quando os alunos conseguem fazer a conexão entre os conceitos formais com as conceções mais intuitivas, conseguem construir demonstrações com maior facilidade. Por isso, a importância dos professores propiciarem aos alunos essas conexões para terem uma melhor aprendizagem baseada na intuição. Isso não implica apenas dar exemplos, mas mostrar qual a conexão existente entre eles, evidenciando o papel dos conceitos formais envolvidos.

Dorier et al. (2000a) sugerem que um caminho para promover essas conexões e possibilitar que os alunos ultrapassem o obstáculo do formalismo é utilizar o que eles denominam de 'alavancas-meta'. Os autores esclarecem que quando se fala sobre Matemática (uso de seus conceitos, funcionamento da matemática), se está usando um recurso-meta que poderá tornar-se uma 'alavanca' para o aluno compreender o tema abordado. Segundo os autores, quando esse recurso é passível de se tornar uma alavanca, ele se torna uma 'alavanca-meta'. Como exemplos desses recursos emergem o discurso do professor, os seus questionamentos, o grau de estrutura e de desafio de uma tarefa matemática, a apresentação de um tema num livro didático, dentre outros. Entretanto, segundo os autores, esses recursos vão-se tornar 'alavancas-meta' se conduzirem os alunos a uma reflexão sobre o seu conhecimento, os seus erros, os seus procedimentos. Tal significa que não se deve reduzir apenas a um discurso do professor seguido de uma atividade pelos alunos. Importa promover nos alunos a reflexão sobre o conhecimento previamente adquirido a fim de alcançarem um nível mais elevado de conhecimento.

Tal como os pesquisadores franceses, Hillel (2000) também aponta que a inexperiência com provas de resultados matemáticos e teorias baseadas em provas é um fator que causa dificuldade aos alunos. Este autor considera que as dificuldades relacionadas com as provas se devem, sobretudo, por o aluno "não compreender a necessidade de provas nem as várias técnicas de prova, não sendo capazes de lidar com os quantificadores, muitas vezes implícitos; confundir condições necessárias e suficientes; fazer generalizações apressadas com base em evidências muito instáveis e escassas" (p. 191).

Nesse sentido, o estudo de Alvarado e González (2010), realizado com alunos da Licenciatura em Matemáticas Aplicadas, com o objetivo de analisar as crenças, conceções e obstáculos dos estudantes em relação às demonstrações, constatou, entre outras, as seguintes inconsistências: os alunos utilizavam de forma indiferente uma implicação e sua recíproca ou a implicação $p \Rightarrow q$ e sua negação $\sim q \Rightarrow \sim p$, demonstrando não terem clareza na diferença entre hipótese e tese; acreditavam que o uso de exemplos particulares seria suficiente para provar a veracidade de uma afirmação; e utilizavam uma linguagem imprecisa.

Uhlig (2002) destaca que o desenvolvimento da prova formal é um dos aspetos mais importantes da Matemática Moderna, que aconteceu no século XIX, e que não nos devemos surpreender com a dificuldade que os alunos têm em provar resultados, visto que esse desenvolvimento intelectual relativamente recente, muitas vezes, não é totalmente apreciado nem mesmo por matemáticos. O autor sugere que as práticas de ensino devem fazer com que os alunos pensem matematicamente e reconheçam as generalidades por eles mesmos, conduzindo-os gradualmente ao entendimento do processo de abstração. Segundo ele, não se pode ter sucesso no ensino partindo de uma sequência rigorosa fundamentada em Definição-Lema-Prova-Teorema-Prova-Corolário (DLPTPC), sendo necessário preparar os alunos lentamente para a prova e o rigor matemático. Assim, o autor sugere trabalhar com exemplos conceituais e exploração intuitiva para abstrair a teoria formal. A exploração intuitiva dos conceitos abstratos a que o autor se refere pode ser promovida com questões do tipo: "O que acontece se? Por que isso acontece? Como ocorrem casos diferentes? O que é verdadeiro aqui? Se estas questões forem exploradas em profundidade na especificidade de um assunto, nós poderíamos obter ganhos nos 'teoremas'" (Uhlig, 2002, pp. 337-338). Essa sequência de questões exploratórias vem ao encontro do que os pesquisadores franceses definem como 'alavancas-meta', que podem levar os alunos a entenderem, construírem, raciocinarem, apreciarem os pontos essenciais do raciocínio axiomático e, posteriormente, prepará-los mentalmente para a sequência axiomática DLPTPC.

Em adição às fontes de dificuldade de aprendizagem em Álgebra Linear, estudos apontam as que são específicas dessa disciplina: dificuldades *conceituais* – relacionadas com a natureza formal do conhecimento em si – e *cognitivas* – referentes ao tipo de pensamento necessário para sua compreensão.

Em relação às *dificuldades conceituais*, Hillel (2000) cita a existência de diversas linguagens para descrever os objetos e as operações matemáticas e o problema da representação. Segundo o autor, existem três tipos de linguagens em Álgebra Linear: (1) *a abstrata* – inclui a linguagem e os conceitos da teoria geral formalizada (espaços vetoriais, transformações lineares); (2) *a algébrica* – inclui a linguagem e os conceitos da teoria mais geral do $\mathbb{R}^n$ (n-uplas, matrizes, soluções de sistemas lineares); (3) *a geométrica* – inclui a linguagem e conceitos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (ponto, reta, plano, transformações geométricas). Essas linguagens coexistem, mas não são equivalentes, e algumas vezes é necessário fazer a conversão entre elas.

De acordo com Hillel (2000), para cada linguagem, vetores, operações com vetores e transformações têm uma representação, terminologia e notação específicas. Por exemplo, um vetor pode ser representado geometricamente como uma seta, algebricamente como n-upla de números ou símbolos, ou de forma abstrata como um elemento de um espaço vetorial. Saber fazer a conversão entre as linguagens e saber quando e em que contexto uma linguagem é mais adequada que a outra é uma fonte de dificuldades para os alunos (Hillel, 2000). Apesar disso, muitas vezes os professores e os próprios livros didáticos tomam essas conversões como naturais e óbvias, alternando entre as diferentes linguagens e modos de representação, sem as fazer através de um caminho explícito e sem levar em consideração o tempo necessário para os alunos assimilarem essas conversões (Dorier et al., 2000b)

Hillel (2000) destaca que para lidar com os conceitos da Álgebra Linear é essencial o estudante entender como os vetores e as transformações podem ser representados dentro da mesma linguagem ou em todas as linguagens. No entanto, essa representação não é única, pois depende da escolha de uma base (referencial) ou de um sistema de coordenadas. Entender essa dependência é um grande desafio para os alunos. Além de serem capazes, por exemplo, de encontrar uma representação matricial para um operador linear numa determinada base, eles precisam de ser capazes de determinar qual é a base mais adequada para resolver determinado problema e ainda estabelecer as relações entre duas matrizes representando o mesmo operador (em bases diferentes). Para Hillel (2000), a maior confusão dos estudantes está na transição da representação abstrata para a representação algébrica, quando se trabalha com o $\mathbb{R}^n$, pelo facto de que neste caso uma n-upla é representada por outra n-upla em relação a uma determinada base. Quando os alunos veem vetores pela primeira vez, na Geometria Analítica, eles são identificados como uma lista de números. Porém, quando os vetores são escritos em bases diferentes, essa identificação fica fortemente abalada, pois uma n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pode representar um vetor onde os x_i's são as suas *componentes* ou pode representar um vetor em relação a uma base β e nesse caso os x_i's representam as *coordenadas* desse vetor em relação à base β. Os estudantes ficam presos à ideia de n-upla como vetor e não abandonam essa ideia (Hillel, 2000). O autor destaca que outro obstáculo para os alunos é a transição de espaços do $\mathbb{R}^n$ para espaços mais gerais, uma vez que nesses espaços não há a representação geométrica e é necessário os alunos aceitarem como vetores outros objetos matemáticos tais como funções, matrizes e polinômios. Segundo o autor, para os alunos serem bem-sucedidos, devem não somente ter adquirido capacidade de conversão, mas também ter uma atitude reflexiva sobre as inconsistências entre as representações a que recorrem e os conceitos. O autor sugere ainda que um caminho para auxiliar os alunos a lidar com essas dificuldades é promover discussões sobre o problema matemático em questão, no sentido de abrir um debate sobre a natureza e o *status* da linguagem utilizada.

Uma outra autora que se debruça sobre as dificuldades de aprendizagem em Álgebra Linear é Sierpinska (2000), para quem uma das razões para as *dificuldades cognitivas* dos alunos em relação à natureza formal da Álgebra Linear se deve à tendência que os alunos têm em confiar num pensamento mais *prático* do que *teórico*. Em suas investigações, a pesquisadora indica essa característica do pensamento dos estudantes como responsável em parte pelo seu entendimento errôneo e das suas dificuldades frente a certos problemas, especialmente em estender uma transformação de uma base para uma transformação linear do plano como um todo (problema da extensão linear). Em particular, as dificuldades estavam relacionadas com as representações gráficas e dinâmicas que estavam observando e manipulando no software Cabri. A sua relação com estas representações foi muito mais fenomenológica do que analítica. Segundo a autora, a característica mais marcante do pensamento prático dos alunos foi a sua tendência em basear a compreensão de conceitos abstratos a partir de exemplos prototípicos (por exemplo, as transformações lineares eram entendidas como rotações, dilatações, projeções, etc.) ao invés de usar definições. Sierpinska (2000) considera que esta forma de entender a noção de transformação linear é um avanço em oposição ao obstáculo do formalismo, entretanto não é satisfatória uma vez que é esperado que os alunos aprendam outras noções elementares como, por exemplo, a representação matricial de uma transformação linear em relação a uma base, cuja dificuldade de entendimento é equivalente ou maior ao problema da extensão linear. Segundo a autora, em sua experimentação essa última noção permaneceu apenas no nível do procedimento.

Relacionado com a abstração e paralelo com as três linguagens identificadas por Hillel, Sierpinska (2000) distingue três tipos de pensamento (raciocínio) em Álgebra Linear: o sintético-geométrico, o analítico-aritmético e o analítico-estrutural. A principal diferença entre o modo de pensamento sintético e o modo analítico é que no sintético o estudante tenta descrever os objetos matemáticos sem os definir, enquanto que no analítico tenta entender os objetos através da sua definição e propriedades. Por exemplo, no modo sintético, uma reta é descrita como um "objeto pré-determinado de uma determinada forma, em algum lugar do espaço (...). Pode-se falar das propriedades da linha reta, mas essas propriedades apenas descreverão a linha, elas não definirão" (Sierpinska, 2000, p. 233). No modo analítico, uma linha reta é definida como "uma relação específica entre as coordenadas de pontos" (Sierpinska, 2000, p. 233). Assim, o modo sintético corresponde ao modo prático de pensar, enquanto o analítico corresponde ao modo teórico de pensar.

Para entender a diferença entre os três modos de pensamento, consideremos, por exemplo, que um estudante estuda os tipos de solução de um sistema linear não homogêneo cuja matriz dos coeficientes é de ordem 3×3. Se interpretar a solução a partir da posição que três planos ocupam no espaço, ele está utilizando o modo de pensamento sintético-geométrico; se pensar na solução a partir da matriz reduzida por linhas desse sistema, está utilizando o analítico-aritmético; e se pensar na solução em termos da inversa, está no modo analítico-estrutural.

Sierpinska (2000) aponta que no pensamento analítico-aritmético, um "objeto é definido por uma fórmula que permite que alguém a compute" (p. 234) e que este nível de pensamento "visa simplificar os cálculos e torná-los precisos" (p. 234). No pensamento analítico-estrutural a autora aponta que um "objeto é melhor definido por um conjunto de propriedades" (p. 234) e que o objetivo é "ampliar nosso conhecimento sobre os conceitos" (p. 234). Por exemplo, no modo analítico-aritmético o importante são as técnicas para o cálculo da inversa de uma matriz, enquanto que no pensamento analítico estrutural isso é um pormenor, o importante são as propriedades que definem que essa matriz tem inversa.

De acordo com Sierpinska (2000), cada modo de pensamento usa um sistema de representação específico: o modo sintético-geométrico usa a linguagem das figuras planas e suas representações gráficas usuais; no modo analítico-aritmético "as figuras planas são entendidas como conjuntos de n-uplas de números satisfazendo certas condições que são escritas, por exemplo, em forma de sistemas de equações ou desigualdades" (Sierpinska, 2000, p. 235); e o modo analítico-estrutural "sintetiza elementos algébricos das representações analíticas em conjuntos estruturais" (Sierpinska, 2000, p. 235). Por exemplo, neste último modo, um sistema de m equações e n incógnitas seria representado da forma $Ax = b$, e a preocupação seria com as condições sobre a matriz A e o vetor b, para a existência de uma única solução.

Para Sierpinska (2000), os estudantes encontram dificuldades nos três modos de pensamento em Álgebra Linear, o que se deve por cada um deles levar a diferentes significados (que não são igualmente acessíveis aos estudantes) das noções envolvidas, visto que cada um deles está relacionando com uma perspetiva teórica diferente. Sierpinska chama a atenção que muitos livros didáticos de Álgebra Linear geralmente oferecem argumentos estruturais para justificar certas declarações básicas e que embora sejam curtos e elegantes (os argumentos), "eles representam um nível de sofisticação teórica que deixa um aluno principiante com a sensação de que nada foi provado, ou que o facto provado é de pouca importância" (Sierpinska, 2000, p. 236). Segundo a autora, o pensamento analítico-aritmético também é um obstáculo, pois, por exemplo, se os alunos precisam fazer uma demonstração usando este tipo de pensamento, o caminho para começar a prova é bem claro, mas tendem a ter dificuldades para finalizar devido aos procedimentos que têm que efetuar. Além disso, a utilização de argumentos sintético-geométricos, ao invés de ajudar na visualização dos conceitos da Álgebra Linear pode ser mais um desafio para os alunos. Por exemplo, é um problema visualizar a relação entre a representação gráfica e a solução analítica de um sistema de equações.

Segundo Sierpinska (2000), para muitos alunos é um obstáculo transitar de um modo de raciocínio para outro e mesmo aqueles que conseguem fazer, até certo ponto, essa transição, não conseguem perceber quando devem usar um modo de pensamento ou outro. Eles acabam usando formas intermediárias entre os três modos, as quais lhes parecem fazer mais sentido. A autora não vê os três modos de pensamento como etapas do desenvolvimento do pensamento algébrico. Na sua visão, os três modos de pensamento são "igualmente úteis, cada um em seu próprio contexto e para propósitos específicos, e especialmente quando eles estão em interação" (Sierpinska, 2000, p. 233). Os modos de pensamento descritos por Sierpinska têm uma ligação com os modos de descrição (linguagens) de Hillel, mas não são exatamente a mesma coisa. É possível, por exemplo, trabalhar com um problema no $\mathbb{R}^n$ (como um sistema linear), que corresponde a utilizar a linguagem algébrica, e utilizar diversos tipos de pensamento para resolver o problema.

Na análise precedente emergiram as dificuldades de aprendizagem e as principais razões para essas dificuldades. De seguida, foca-se a atenção em trabalhos que analisam as produções dos estudantes, que, em geral, fazem referência aos trabalhos e ao contexto teórico discutido.

Destacamos a pesquisa de Britton e Henderson (2009), cujo objetivo foi investigar as dificuldades conceituais que os estudantes têm em Álgebra Linear, em particular sobre o conceito de subespaço. O estudo foi realizado com aproximadamente 500 estudantes de cursos de engenharia e de algumas ciências, enquanto frequentavam um segundo curso de Álgebra Linear. Segundo os autores, no primeiro curso, que envolve retas e planos, matrizes, determinantes, sistemas lineares, autovalores e autovetores, em geral os alunos não têm dificuldades. Os autores examinaram as resoluções dos alunos em duas questões: na primeira tinham que mostrar que o conjunto $V = \{t(1,2,3), t \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ e na segunda tinham que mostrar que o conjunto X de todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0,0)$ é um subespaço de F, onde F é o espaço das funções reais de domínio $\mathbb{R}$. Parece ser uma tarefa simples provar que estes conjuntos são fechados para a adição e multiplicação por escalar, entretanto envolve a compreensão de uma definição abstrata (subespaço vetorial), alguma compreensão da teoria de conjuntos e a capacidade de escrever matematicamente com uma lógica correta. Relacionando com as linguagens descritas por Hillel (2000), é necessário que os alunos se movam da linguagem abstrata (a definição de subespaço em si) para a linguagem algébrica no qual a questão é enquadrada. Além disso, enquanto que a primeira questão tem uma interpretação geométrica (é uma reta), a segunda questão é mais abstrata. Para avançar nesta questão é necessário que os alunos entendam uma função como um objeto matemático, como um elemento de um espaço vetorial, e desvincular da ideia de função como uma fórmula/gráfico – parte tão importante do estudo das funções no Ensino Básico.

Os autores observaram que alguns alunos verificaram a definição de subespaço vetorial para casos particulares ao invés de generalizar (o que não é um erro específico da Álgebra Linear, é um erro comum em provas matemáticas), mas não foi um erro dominante. Como referem os autores, "reconhecer a necessidade de estabelecer um argumento geral é apenas o primeiro passo" (Britton & Henderson, 2009, p. 971). Entretanto, os principais erros estavam relacionados com o entendimento e interpretação da linguagem simbólica (por exemplo, muitos alunos ao invés de verificarem que para um conjunto ser fechado para a adição, a soma de quaisquer dois de seus vetores também deve ser um elemento seu, verificavam que a soma de dois vetores é um vetor) e à inclusão de extratos de problemas semelhantes memorizados a partir das aulas. Além disso, os autores observaram que foi um desafio para os estudantes ver as funções como vetores ao verificarem o fechamento.

Stewart e Thomas (2003) também realizaram um estudo para examinar o entendimento conceitual da Álgebra Linear, a partir de um questionário composto por questões conceituais relacionadas com as representações geométrica, matricial e algébrica da Álgebra Linear. O estudo foi conduzido com 70 alunos já familiarizados com a Álgebra Linear básica e que cursavam uma disciplina com tópicos mais avançados da disciplina. No estudo, os alunos apresentaram dificuldades em entender o significado das definições e de as aplicar mesmo em situações simples. Eles revelam uma tendência para uma abordagem mais processual do que conceitual, como evidencia a resposta de um aluno para sua explicação sobre o que é uma 'matriz inversível': "Trata-se de encontrar a inversa de uma matriz, tendo a matriz identidade ao lado dela" (p. 211). Um outro exemplo desse tipo de resposta para a definição de 'autovetor': "um vetor que, quando multiplicado por uma matriz particular, será igual a um múltiplo de si mesmo" (p. 211). Os alunos também apresentaram dificuldades em traduzir os conceitos em diferentes representações, o que é uma consequência, na opinião dos autores, dessa compreensão frágil sobre os conceitos de Álgebra Linear.

Alguns estudos procuram examinar o raciocínio dos estudantes na resolução de tarefas de acordo com os três modos de pensamento de Sierpinska. É o caso de Çelik (2015), que explorou os modos de pensamento de estudantes de graduação enquanto resolviam uma tarefa focada na linguagem abstrata que questionava se a (in)dependência de um conjunto de três vetores não especificados implica a (in)dependência do novo conjunto obtido por exclusão de um vetor ou adição de outro (os vetores não tinham representação geométrica e numérica). O estudo foi conduzido com 186 estudantes candidatos a professores de matemática e os dados foram recolhidos por meio dos registros das resoluções dos alunos e de uma entrevista a oito destes alunos. Nas entrevistas, a pesquisadora se concentrou no tipo de pensamento utilizado pelos alunos ao descreverem as suas ideias e não na correção das respostas. A pesquisadora categorizou as diferentes abordagens dos estudantes dentro dos três modos de pensamento de Sierpinska e verificou que houve uma predominância do pensamento aritmético dos alunos, mesmo sendo a tarefa abstrata. A pesquisadora chama a atenção de que os pensamentos aritmético e geométrico poderiam e/ou deveriam ser usados na tarefa no sentido de servir de 'caminho' para a abstração. No modo de pensamento aritmético os alunos evidenciaram processos operacionais e procedimentos algébricos ligados às definições de independência linear e combinação linear. As dificuldades encontradas estavam relacionadas com o uso e manipulação inapropriados da linguagem simbólica (Çelik, 2015). As respostas no modo de "pensamento geométrico (10%) indicavam obstáculos relacionados à generalização matemática" (Çelik, 2015, p.1), pois eram baseadas num raciocínio correto, porém com vetores específicos do $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, o que reflete um 'pensamento prático' baseado em 'exemplos prototípicos' (Sierpinska, 2000). Apenas 5% das respostas refletiram o pensamento analítico estrutural.

Dogban-Dunlap (2010) também categorizou diferentes abordagens dos estudantes para determinar se determinados conjuntos de vetores eram linearmente independentes utilizando os três modos de pensamento de Sierpinska. Trabalhou com duas tarefas num contexto geométrico com suporte computacional. Mais precisamente, na primeira tarefa os alunos deveriam verificar se determinados subconjuntos de vetores do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes e para a responder poderiam usar ferramentas computacionais para aplicar o método de redução por linhas. Enquanto que a segunda tarefa tinha um objetivo similar à primeira, os alunos deveriam abordar as questões usando um ambiente de geometria dinâmica disponibilizado na *web*, que fornecia as representações geométricas dos vetores. Na primeira tarefa houve predominância de respostas envolvendo o modo de pensamento aritmético (ou algébrico) e poucas respostas envolvendo o raciocínio geométrico, sendo que poucos alunos incluíam múltiplos modos (7 de um total de 45 alunos) em suas respostas. Enquanto que na segunda tarefa os modos de pensamento geométrico e aritmético apareceram de várias formas, com um número significativo de alunos integrando vários modos em suas respostas (29 de um total de 45 alunos), um número maior de respostas salientou mais o modo aritmético do que o modo geométrico. No modo de pensamento geométrico os alunos incorporaram alguns aspetos dos vetores, como a magnitude e a direção dos vetores, e algumas características dos espaços vetoriais, como a dimensão e as posições relativas dos vetores dentro dos espaços vetoriais. Quanto ao modo de pensamento aritmético, eles incluíram principalmente procedimentos e processos, tais como a redução de linhas de matrizes e as ideias de combinação linear, bem como referências a teoremas. Os resultados da análise inferem que "as ferramentas gráficas fornecidas em apoio da segunda tarefa podem não ter substituído o modo de pensamento aritmético ou algébrico, mas incentivam os estudantes a utilizar múltiplos modos em seus raciocínios" (p. 2158).

Em ambos os estudos de Dogban-Dunlap (2010) e Çelik (2015), embora as tarefas tenham sido elaboradas em contextos diferentes, no primeiro caso em contexto abstrato e no segundo em contexto geométrico, os resultados mostram a predominância do pensamento aritmético dos estudantes. Nos estudos de Britton e Henderson (2009) e Çelik (2015) observa-se um fator comum em relação às dificuldades dos alunos com a manipulação e interpretação da linguagem simbólica, além de um foco no processo ao invés do uso dos conceitos, característica essa também presente no estudo de Stewart e Thomas (2003). Os estudos de Britton e Henderson (2009), Dogban-Dunlap (2010), Çelik (2015) e Stewart e Thomas (2003), dentre outros, dão indícios para a importância de focar em estratégias de ensino que explorem a manipulação simbólica, que façam a conexão entre as diferentes representações dos objetos matemáticos, além de explorarem os tipos de pensamento necessários para fazer essas conexões, que são ações tão necessárias para compreender a lógica das demonstrações e, de forma geral, trabalhar com a teoria abstrata da Álgebra Linear.

2.2. Perspetivas atuais do ensino de Álgebra Linear

Face às dificuldades manifestadas pelos alunos em Álgebra Linear, há uma preocupação por parte de quem ensina essa disciplina, que não é recente, sobre como a tornar mais acessível. Essa preocupação contempla questões relacionadas com o currículo, o uso de metodologias de ensino diferenciadas, em particular incorporando ferramentas tecnológicas nas estratégias de ensino, dentre outras. Com a preocupação de tornar o mais acessível possível os conceitos de Álgebra Linear aos alunos, o grupo de investigadores franceses do IREM (*Institute for Researchs in Teaching Mathematics*), conforme referem Artigue et al. (2000), apresenta as seguintes sugestões para o ensino da Álgebra Linear:

1. Limitar o conteúdo e adiar a formalização de certas noções que só podem inicialmente ser estudadas com a ajuda de exemplos;
2. Limitar o vocabulário e os símbolos ao que é estritamente necessário e adequado;
3. Usar exemplos que os alunos já conheçam da escola básica (geometria e equações). Objetos como funções e polinómios são muito complexos para principiantes;
4. Escolher instrumentos de avaliação que testem a verdadeira compreensão e não apenas a manipulação mecânica dos conceitos;
5. Ensinar aos alunos como se estrutura uma demonstração;
6. Enfatizar o papel das diferentes representações dos conceitos em estudo;
7. Recorrer a esta metodologia de ensino em futuras disciplinas conectadas com a Álgebra Linear;
8. Integrar nas aulas resultados decorrentes da investigação em Educação Matemática. (p. 258)

Nos EUA, no início dos anos 90, um grupo de educadores universitários, denominado de *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), preocupados com a qualidade dos cursos de Álgebra Linear em ter um currículo adequado às necessidades dos estudantes de diferentes saídas profissionais e em tornar a disciplina mais acessível a todos, produziu um conjunto de recomendações para um primeiro curso de Álgebra Linear (Carlson et al., 1993):

(1) O programa de Álgebra Linear deve responder à necessidade do público alvo da disciplina;
(2) Considerar as matrizes como eixo principal;
(3) Os professores devem considerar as necessidades e interesses dos estudantes;
(4) Os professores devem ser encorajados a utilizar a tecnologia;
(5) Ao menos um 'segundo curso' em teoria matricial/Álgebra Linear deve ser altamente prioritário para todo o currículo de Matemática.

A partir destas recomendações, muitos livros didáticos foram escritos adequando-se a elas (Harel, 2000). A análise realizada por Grande (2006) mostra que alguns livros que servem de referência para os cursos de Álgebra Linear em algumas universidades brasileiras procuram atender à maioria de tais recomendações.

Harel (2000) apresenta a sua interpretação sobre as recomendações do LACSG e sugere uma abordagem para o ensino de Álgebra Linear de acordo com três princípios pedagógicos: *da concretização*; da *necessidade;* e o da *generalização*. O *princípio da concretização* postula que: "Para os estudantes abstraírem uma estrutura matemática de um dado modelo daquela estrutura, os elementos daquele modelo precisam ser entidades conceituais aos olhos dos estudantes" (Harel, 2000, p. 180). Um dos exemplos que Harel usa para o princípio da concretização é o facto de que os alunos não têm dificuldade de verificar se um conjunto de vetores do $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente, mas tem dificuldade em verificar se um conjunto de polinômios, por exemplo $A = \{x, x^2, x^3, x^4\}$, é linearmente independente. Harel sugere que os alunos têm essa dificuldade porque não é concreto para eles o conceito de função como um vetor num espaço vetorial, como é apontado no estudo de Britton e Henderson (2009). Assim, quando eles têm que resolver a equação $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$ para determinar se o conjunto A é linearmente independente, eles não conseguem visualizar o zero da igualdade como o polinômio nulo $0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4$ mas sim como um escalar, ou seja, não conseguem interpretar a equação como uma identidade entre duas funções, mesmo que a vejam como uma equação em x. Harel (2000) explica que o princípio da concretização parte do pressuposto de que os alunos criam a compreensão de um conceito num contexto que é concreto para eles. Assim, conclui que a Geometria do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é o contexto concreto para introduzir noções de Álgebra Linear como dependência e independência linear, geradores, base, dimensão, produto interno e transformações lineares, pois estes conceitos têm origem em problemas geométricos. O autor chama a atenção para a forma como a representação geométrica é introduzida e utilizada para conduzir à abstração, pois os professores conseguem ver o isomorfismo que há entre uma situação geométrica e uma algébrica, mas muitos alunos ficam restritos ao caso geométrico e não conseguem abstrair os conceitos para espaços vetoriais mais gerais.

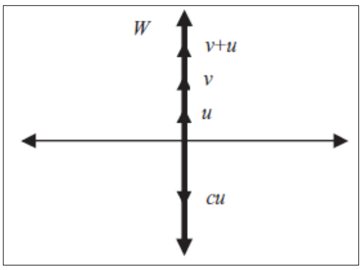
O *princípio da necessidade* postula que "para os estudantes aprenderem, eles devem ver a necessidade para aquilo que está sendo ensinado" (Harel, 2000, p. 185). Este princípio baseia-se na suposição piagetiana (que também foi adotada pela Teoria das Situações Didáticas elaborada por Brousseau (1997)) de que o conhecimento se desenvolve como solução para um problema (Harel, 2000). O autor considera que se o professor resolve os problemas para os alunos e só lhes pede para reproduzir as soluções, eles vão aprender a reproduzir as soluções do professor, mas não como resolver problemas. Assim, a ideia por detrás deste princípio é que "as atividades de ensino devem oferecer situações problemáticas em que os alunos possam refletir de forma abstrata os conceitos matemáticos e, ao mesmo tempo, manter a situação realista" (Harel, 2000, p. 186). No decorrer da solução de tais problemas, os alunos devem perceber o benefício intelectual do conhecimento que lhes foi direcionado e se uma ideia for iniciada pelo seu professor não devem sentir que foi evocada arbitrariamente. Assim, é ineficaz procurar motivar os alunos para aprender um conceito específico, dizendo-lhes apenas o quão importante é o conceito ou que consequência terá se entenderem certos assuntos, como fazem normalmente os livros didáticos (Harel, 2000).

Os princípios da concretização e da necessidade são complementados pelo *princípio da generalização*. Neste princípio, as atividades de ensino correspondentes a um modelo concreto "devem permitir e encorajar a generalização dos conceitos" (Harel, 2000, p. 187). Este princípio tem por objetivo garantir que os alunos internalizem, organizem, abstraem e mantenham o conhecimento sobre os conceitos que aprendem num determinado modelo. O princípio seria violado se, por exemplo, uma base para o $\mathbb{R}^3$ fosse definida a partir de três vetores não colineares ou não coplanares, pois essa noção não pode ser estendida para qualquer espaço vetorial. Harel sugere, neste caso, que uma opção para sair do concreto e fazer a generalização passa por explorar o conceito de base a partir do conceito de conjunto gerador mínimo, por ser possível a generalização desse conceito para espaços vetoriais quaisquer. Inicialmente, tal conjunto de vetores geradores pode não ser o mais apropriado por nem sempre gerar um determinado vetor a partir deste conjunto de maneira única, por isso a necessidade de que o conjunto de geradores seja mínimo. Assim, como a pesquisa de Harel, outros estudos recentes sugerem que uma abordagem visual e geométrica pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos abstratos da Álgebra Linear. As ferramentas para a visualização do conceito abstrato em Matemática podem ser os gráficos, os diagramas, as imagens ou os modelos geométricos.

Ao usar a abordagem da visualização, os alunos podem perceber as relações entre conceitos abstratos e estruturas concretas em diferentes perspetivas e, assim, muitos conceitos abstratos podem-se tornar claros e passar a fazer sentido para eles (Konyalioglu et al., 2011). Entretanto, é preciso alguns cuidados com essa abordagem, como aponta Harel (2000) quando discute o *princípio da concretização*. As intuições geométricas podem gerar dificuldades para os estudantes no entendimento das generalizações dos conceitos da Álgebra Linear (Gueudter-Chartier, 2004; Harel, 2000; Sierpinska, 2000). Por exemplo, dois vetores (não-nulos) linearmente independentes no $\mathbb{R}^2$ são não-colineares (não estão na mesma reta); três vetores (não-nulos) linearmente independentes no $\mathbb{R}^3$ não estão no mesmo plano, entretanto não podemos usar este mesmo raciocínio no $\mathbb{R}^4$ ou em outro espaço vetorial qualquer. É preciso mostrar aos alunos que tanto no $\mathbb{R}^2$ como no $\mathbb{R}^3$ os vetores são linearmente independentes se um vetor não for combinação linear dos demais. Essa é a ideia que é válida para qualquer espaço vetorial. Gueudter-Chartier (2004) sugere que a Álgebra Linear não seja construída como uma simples generalização da Geometria, mas que seja associada a vários domínios da Matemática, como matrizes, polinômios, funções, etc. Nesses casos, para orientar a intuição dos alunos na aprendizagem de alguns conceitos, o isomorfismo pode ser usado para conduzir à generalização, embora não seja tarefa simples para os alunos compreenderem essa ideia. A ideia do isomorfismo é que um sistema B representa um modelo do sistema A se uma descrição ou solução produzida em termos de A pode ser refletida de forma consistente em termos de B e vice-versa (Fischbein, 1987). Por exemplo, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos ao $\mathbb{R}^n$. Assim, um problema dado no $\mathbb{R}^n$ pode ser generalizado neste espaço após ser resolvido no $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e se tornar claro (Gueudet-Chartier, 2003). Um isomorfismo pode ser estabelecido entre $\mathbb{R}^3$ e P_2 (conjunto dos polinômios de grau ≤ 2), por exemplo.

Konyalioglu et al. (2011) em sua pesquisa sugerem o uso da abordagem da visualização da Geometria de vetores, pois é um contexto familiar para os estudantes. Na mesma perspetiva de Harel (1990, 2000), os autores sugerem que os conceitos sejam ensinados de forma progressiva: em primeiro, a visualização geométrica dos conceitos em $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, depois a apresentação no $\mathbb{R}^n$ e por último a apresentação da abstração. Como sugestão de tal abordagem que promova um elo entre o concreto, o algébrico e o abstrato, os autores apresentam o seguinte exemplo sobre o conceito de subespaço vetorial: O subconjunto W formado por vetores da forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com $x_1 = 0$ e $x_i \in \mathbb{R}$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathrm{V} = \mathbb{R}^\mathrm{n}$? (Konyalioglu et al., 2011). Na perspetiva de trabalhar o que é concreto, os autores sugerem que se inicie com a exploração geométrica do problema no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, aproveitando para fazer uma ligação com a representação algébrica do subconjunto nestes espaços. Por exemplo, no $\mathbb{R}^2$ os vetores de W são vetores localizados no eixo das ordenadas e tem a forma $(0, y)$. Além disso, W pode ser representado algebricamente por $W = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$. Após o reconhecimento pelo aluno de que tipo de objeto geométrico é W, pode-se explorar o conceito de subespaço geometricamente, observando que a soma de quaisquer dois vetores de W sempre resulta num vetor de W (fechamento para a adição), e que o mesmo acontece ao multiplicar um vetor por um escalar (fechamento para a multiplicação por escalar), conforme a Figura 1.

Figura 1. Ilustração do fechamento da soma e da multiplicação por um escalar (Konyalioglu et al., 2011, p. 4043)



Na sequência, verifica-se algebricamente se $W = \{(0, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ é subespaço do $\mathbb{R}^n$ verificando se este conjunto é fechado para a soma e multiplicação por escalar. Para isso, tomando $u = (0, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (0, y_2, \dots, y_n)$, vetores quaisquer de W, verifica-se que $u + v = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ é um vetor de W, pois $x_1 + y_1 = 0$, e que $ku = (0, kx_2, \dots, kx_n)$ é um vetor de W, pois $kx_1 = 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Portanto W é subespaço do $\mathbb{R}^n$.

No sentido de fazer uma ligação entre os conceitos de subespaço e dependência linear para um problema abstrato, Konyalioglu et al. (2011) apresentam o problema: "Seja W um subespaço de um espaço vetorial V, e W um subconjunto de W'. Neste caso W' é linearmente dependente?" (p. 4044). Para resolver o problema, o aluno tem que levar em consideração que uma condição necessária para W ser subespaço é que o elemento nulo deve pertencer a este conjunto e que como $W \subset W'$, o elemento nulo está em W'. Assim, W' é linearmente dependente, pois um dos seus elementos é nulo. Nessa última questão, a linguagem envolvida é a abstrata, pois V e W são desconhecidos, mas satisfazem as condições de espaço e subespaço vetorial, respetivamente. Portanto, o nível de pensamento exigido aos alunos, dentro do quadro teórico de Sierpinska, é o analítico-abstrato, pois é necessário levar em consideração um conjunto de informações teóricas para solucionar o problema.

Ainda em relação às recomendações para o ensino de Álgebra Linear, Day e Kalman (1999), após participarem de um grupo de estudos envolvendo pesquisadores/educadores no *Park City Mathematics Institute* (PCMI) em Princeton, cuja questão de estudo foi "Como ensinar Álgebra Linear?", ponderam que não existe um caminho certo para ensinar esta disciplina, que é preciso entender melhor como os alunos aprendem, que existem problemas em relação à aprendizagem da disciplina que talvez nunca sejam resolvidos e que é necessário reconhecer que dependendo do contexto existem conteúdos e métodos mais adequados. Na mesma perspetiva do LACSG, estes autores afirmam que é importante conhecer quem é o público alvo da disciplina e quais as disciplinas que vão cursar e que necessitam de Álgebra Linear, para então dialogar com os professores destas disciplinas e discutir que tópicos de Álgebra Linear esperam que os seus alunos aprendam. Destacam a importância do uso de softwares para criar ambientes interativos em que os estudantes possam usar e experimentar vetores, matrizes, transformações, representações gráficas, simbólicas e numéricas e assim facilitar o entendimento dos conceitos a partir da visualização dos mesmos em duas e três dimensões.

Recentemente no Brasil, também foi lançado um documento (SBEM, 2013) produzido por uma comissão paritária de representantes da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que traz recomendações em relação ao foco que deve ser dado ao ensino de Álgebra Linear nos cursos de Licenciatura em Matemática, ressaltando a importância deste domínio da Matemática na formação do futuro professor de Matemática. O documento chama a atenção de que vários dos tópicos de Álgebra Linear estão presentes no currículo do ensino médio, como funções, matrizes, determinantes e sistemas lineares, porém nem sempre são explorados de forma adequada. Muitos professores desconhecem o significado das operações com matrizes, das operações com as linhas de uma matriz no algoritmo do escalonamento ou do cálculo de um determinante, se limitam apenas ao cálculo mecanizado, ou raramente exploram o conceito de linearidade que pode estar presente em fenômenos ou experimentos (SBEM, 2013). O documento destaca que o futuro professor não irá ensinar, por exemplo, a teoria de transformações lineares no Ensino Básico, mas o conhecimento de suas propriedades geométricas e da relação com matrizes permite que o professor ao ensinar Geometria no Ensino Básico promova atividades lúdicas com a devida interpretação para que os seus alunos consigam perceber os conceitos e propriedades envolvidos. Também chama a atenção para o potencial didático que têm as ferramentas tecnológicas nessa disciplina, permitindo ao futuro professor explorar tanto os aspetos numéricos quanto geométricos dos conceitos de forma dinâmica e interativa. Assim, é de fundamental importância para a formação dos futuros professores de Matemática um estudo cuidadoso da interpretação e visualização dos conceitos envolvidos nos tópicos estudados em Álgebra Linear.

Uma outra forma de lidar com as dificuldades dos alunos passa pela mudança da prática de ensino, partindo do pressuposto de que atualmente ainda incide em processos tradicionais, marcada pela apresentação expositiva de definições e teoremas, seguidos de exemplos e de exercícios (Barros, 2018; Moro et al., 2016; Treffert-Thomas & Jawroski, 2015). Essa abordagem tem-se mostrado que não é suficiente para promover de forma eficaz a aprendizagem, pois "ignora completamente o nível cognitivo e o grau de desenvolvimento de cada aluno" (Dikóvic, 2007, p. 109). O papel do professor, segundo Dikóvic (2007), é o "de ajudar os alunos no processo de construção do conhecimento" (p. 109), mas para ele é bastante claro que, por mais qualitativo que seja o processo de ensino, é difícil que a aprendizagem ocorra num cenário onde o professor apenas fala e mostra, enquanto que o aluno é observador passivo. Mesmo nas aulas com uso da tecnologia é possível que o aluno seja passivo se quem a utilizar for apenas o professor ou a tarefa proposta não provocar o aluno a ter uma atitude reflexiva em relação ao que está sendo explorado.

Enquanto professores, apercebemo-nos de que a compreensão pelos alunos das ideias matemáticas se desenvolve através da exploração ativa dos tópicos (por meio de erros, falsas generalizações, conceções incompletas e inconsistentes, dentre outras), da descoberta das interconexões até se tornarem completamente familiares e comuns. Porém, muitas vezes os professores parecem esquecerem-se disso e acabam apresentando os tópicos de forma fragmentada aos alunos, como se esperassem que cada novo assunto se encaixasse naturalmente sem esforço algum (por parte do professor) para fazer as conexões (Day & Kalmann, 1999).

Assim, como mudar essa prática tradicional tão presente na sala de aula? Que metodologias poderiam favorecer os processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear? Na literatura, há vários exemplos que descrevem alternativas ao ensino tradicional. Strang (2014), matemático no Instituto de Tecnologia de Massachusetts, nos Estados Unidos, e autor do livro *Álgebra Linear com Aplicações*, afirma que o seu modo de ensinar mudou paulatinamente e que em suas aulas não fica apenas discursando. Ele procura dar oportunidade aos alunos para fazerem parte da aula através de questionamentos, ter tempo para pensar e expressar a sua opinião e por último promove discussões sobre as respostas dos alunos. Nessa mesma perspetiva, Diković (2007) defende que o papel principal de um professor é "tentar mover os alunos para que participem ativamente durante a aula, seja através da forma de opinião individual ou através de discussões em grupo" (p. 110).

Um recurso para promover a exploração ativa das propriedades das estruturas e dos objetos matemáticos é o uso das tecnologias. A utilização dos recursos tecnológicos permite aos alunos, através das múltiplas representações dos objetos matemáticos, conjeturar, simular e visualizar diferentes características dos objetos matemáticos sem as limitações do uso do lápis e papel. A integração das tecnologias nas práticas de ensino de Álgebra Linear pode tanto promover a aprendizagem de factos teóricos quanto desenvolver procedimentos. Com o uso dos softwares, "os alunos ficam livres para se concentrar no que os cálculos significam, e quando e por que executá-los" (Diković, 2007, p. 112). Os alunos podem, por exemplo, ao invés de se concentrar em obter a solução aritmética dos sistemas lineares, interpretar as soluções dos sistemas lineares e relacionar a inversa da matriz dos coeficientes com a solução. Tal não significa que o procedimento para encontrar a solução não seja importante, mas os problemas reais em geral envolvem sistemas com muitas equações, sendo inviável fazer os cálculos à mão. Com o uso de softwares pode-se estimular a intuição geométrica dos alunos por meio de visualizações em 2D ou 3D, por exemplo dos sistemas lineares ou de alguns operadores lineares, como o cisalhamento, a rotação, a reflexão, dentre outros.

Existem outras perspetivas para o uso da tecnologia no ensino de Álgebra Linear, como a de Uicab e Oktaç (2006), que utilizaram o software Cabri-Géomètre para explorar com os alunos o problema de determinar uma transformação linear a partir das imagens dos vetores de uma base conhecida para o domínio. O uso deste programa foi proposto no sentido de ser um facilitador para a compreensão geométrica dos conceitos e para a dedução de propriedades e não propriamente como ferramenta para resolver o problema. Já Karrer (2006) recorreu a atividades de exploração de diferentes registros de representação sobre transformações lineares planas utilizando o Cabri e lápis e papel. Tal metodologia evidenciou evoluções dos alunos na conceitualização das transformações lineares planas e suas propriedades, visto que o apoio do software na construção e resolução das atividades possibilitou por meio de seu aspeto dinâmico a validação experimental de conjeturas e a conversão e inter-relação entre os diferentes registros.

Para além do uso do computador, há autores que recorrem à calculadora, como foi o caso de Ulus (2013), que examinou o potencial das calculadoras avançadas como ferramenta de apoio pedagógico para promover a compreensão conceitual da diagonalização. A experimentação compreendeu inicialmente o trabalho conceitual com lápis e papel. Posteriormente o uso da calculadora serviu para efetuar cálculos de autovalores e autovetores, a inversa de uma matriz e a potência de uma matriz. Por último, a calculadora surgiu para a construção pelos alunos de um algoritmo para verificar se uma matriz é ou não diagonalizável. Com base na sua experiência de ensino, o autor aponta o potencial da calculadora avançada para fornecer os resultados dos cálculos permitindo que os alunos gastem esforço para interpretar os resultados, além de servir como ferramenta mediadora no desenvolvimento do conhecimento teórico. Além disso, a atividade de escrita do algoritmo auxiliou na perceção dos conceitos e na capacidade de tomada de decisões corretas. Do ponto de vista pedagógico, para o autor, a integração da tecnologia faz com que as aulas sejam mais interativas e centradas na atividade dos estudantes.

2.3. Análise de alguns estudos sobre o ensino de Álgebra Linear

Nesta secção efetua-se uma revisão de alguns estudos relacionados com a prática do professor de Álgebra Linear no contexto de ensino. Isso inclui tudo o que o professor faz ao planejar a disciplina e as suas aulas – estratégias de ensino, escolha e preparação de materiais de ensino, preparação de tarefas, envolvimento dos alunos nas aulas, avaliação dos alunos. Thomas (2011), em sua tese de doutoramento, apresentou uma caracterização de uma prática de ensino universitária no contexto da Álgebra Linear. O estudo foi conduzido a partir de uma colaboração entre dois pesquisadores e um professor de Álgebra Linear. Os dados foram recolhidos a partir de entrevista e observação de aulas do professor, de dois questionários preenchidos pelos alunos (mais de 200) e de entrevista em grupos focais com alguns alunos. Os resultados do estudo corroboram com os obtidos noutros estudos (por exemplo, Celestino, 2000; Dorier, 2002) que para os alunos é muito difícil e um desafio lidar com a natureza altamente conceitual da Álgebra Linear. De acordo com a autora, o professor redesenhou o primeiro módulo (1 semestre) da disciplina de Álgebra Linear baseado na sua experiência com as dificuldades dos alunos seguindo uma abordagem de ensino indutiva ao invés do estilo tradicional (definição-teorema-prova). O professor “baseou seu ensino em um raciocínio informal sobre exemplos” (p. ii) que foram projetados para motivar definições e teoremas, envolvendo assim os alunos conceitualmente e também como motivação para aumentar a participação dos alunos nas aulas.

> A intenção do professor era envolver os alunos de forma mais conceitual com a matemática, apresentando definições e teoremas somente depois que os alunos trabalhavam no exemplo e colocando uma visão de matemática que poderia mostrar como os próprios matemáticos apresentavam um problema a ser resolvido. (Thomas, 2011, p. 189)

Em geral, nas aulas era dado um espaço para os alunos tentarem resolver os problemas propostos, a fim de terem uma ideia dos conceitos que haviam sido introduzidos (a troca de ideias entre colegas era incentivada). A abordagem do professor envolvia extensas explicações verbais (em linguagem informal e não escritas) para orientar os alunos no desenvolvimento da compreensão conceitual da Álgebra Linear. O docente trabalhou todos os conceitos de espaços vetoriais no $\mathbb{R}^n$ ao invés dos espaços vetoriais mais gerais (abordados por outro professor no segundo módulo da disciplina utilizando um estilo de ensino formal e dedutivo). Os alunos tinham acesso a registros do professor em forma de notas sobre o que seria abordado na aula, os quais continham pequenas explanações do conteúdo, e os referidos exemplos e espaços em branco para permitir que os alunos pudessem construir o conteúdo nas aulas. Mais concretamente, no caso de autovalores e autovetores, por exemplo, eram propostos problemas (no papel de exemplos) para promover um entendimento conceitual para então introduzir o cálculo de autovalores e autovetores do ponto de vista matricial.

Na visão da pesquisadora, o modelo de ensino do professor tinha algumas características que podem fazer a diferença para promover a aprendizagem: (1) *objetivos claros* – o professor tinha uma clara visão quanto ao que ele queria alcançar; (2) *escolha de exemplos adequados* para trabalhar nas aulas possibilitando a argumentação e a ‘visualização’ dos conceitos ou da estrutura subjacente; (3) fazia parte do planeamento didático o *envolvimento dos alunos;* (4) explanações e argumentações a partir de questionamentos como indicam Uhlig (2003) e Dorier et al. (2000a), quando usam as ‘alavancas-meta’. Thomas considera um ‘achado’ da sua pesquisa as explanações do professor funcionarem como ‘alavancas-meta’. O professor fazia as explanações do conteúdo antes, durante e depois do trabalho dos alunos com os problemas apresentados nos exemplos, deixando clara a ideia matemática envolvida, porque aquele tópico era importante, como e onde seria usado (fazia as conexões entre os conteúdos), explicava sobre o que os alunos deviam se concentrar ao estudar aqueles teoremas e conceitos e sobre a razão de ter pedido que se concentrassem daquela forma.

Outro resultado da metodologia do professor foi uma mudança cultural dos alunos no sentido de serem mais "ativos em relação à sua própria aprendizagem e na aquisição de conhecimento matemático" (Thomas, 2011, p. 188), visto que nas aulas tinham que trabalhar nos problemas propostos e construírem a teoria ao invés de ficarem passivamente esperando pelas resoluções do professor. A pesquisadora chama a atenção que nem sempre todos os alunos participam da resolução dos problemas na aula e conclui que isso aconteceu porque alguns problemas eram menos acessíveis do que outros. E como refere Thomas (2011), "a abordagem de ensino em si mesma, representa uma mudança cultural no ensino" (p. 188), visto que o professor desenvolveu tal abordagem mais intuitiva e centrada na atividade dos alunos em resposta às dificuldades que eles tinham em lidar com um curso baseado em provas formais.

Na mesma linha que o estudo anterior, Gonçalves (2018) realizou um estudo com o propósito de fazer uma reflexão sobre a sua própria prática de ensino em Álgebra Linear. A partir de uma revisão da literatura sobre as principais dificuldades de aprendizagem e sobre as recomendações didáticas para o ensino de Álgebra Linear, o autor escreveu um livro-texto de Álgebra Linear e concretizou o design de ensino materializado nesse livro numa turma que lecionava no curso de Engenharia Elétrica. O livro contempla as seguintes recomendações didáticas: "uso da tecnologia; abordagem matricial; exploração de tarefas e aplicações da Álgebra Linear; conhecimento dos pré-requisitos; interligação dos conceitos de Álgebra Linear; alcance do formalismo; atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos" (Gonçalves, 2018, p. 5). Mais precisamente, o texto tem uma apresentação objetiva (com redução do número de definições e teoremas), com foco na interpretação geométrica dos conceitos e na exploração de problemas contextualizados (tanto para introduzir novos conceitos como para os aplicar), priorizando os alunos da turma. As demonstrações formais são substituídas por ilustrações de casos deixando para explorar um pouco a formalidade nas tarefas propostas, apresenta exemplos resolvidos e respostas sucintas dessas tarefas, além de algumas informações técnicas para a utilização de software (Scilab, Mathematica e GeoGebra).

Durante a investigação, o autor reaplicou o design de ensino por quatro vezes, o que lhe permitiu "afinar alguns aspetos e reconhecer algumas limitações" (p. 211) como, por exemplo: (i) gerir melhor o tempo para alguns conteúdos; (ii) integrar o uso de software na avaliação; (iii) reconhecer o grau de dificuldade ou a falta de objetividade de algumas tarefas propostas, dentre outras. O autor reconhece a importância do seu papel como pesquisador e não apenas como professor para a reflexão sobre o design de ensino, visto que essa posição lhe permitiu uma melhor perceção das dificuldades dos alunos na realização de algumas tarefas e sobre o leque de oportunidades para explorar alguns conceitos. Além disso, o autor advoga que enquanto professor conseguiu desenvolver características próprias para explicar a relação entre alguns conceitos e os procedimentos algorítmicos associados de uma maneira objetiva e clara para os alunos. O autor destaca a potencialidade das aplicações contextualizadas de alguns tópicos de Álgebra Linear no seu design de ensino, pois, além de proporcionar o desenvolvimento conceitual dos alunos, permitiu-lhes perceber a importância da disciplina. Ele também constatou que o design de ensino permitiu que a exploração dos conceitos ficasse conectada com a linguagem formal, sem transparecer que a generalização dos conceitos decorresse da linguagem geométrica.

Gonçalves (2018) sentiu dificuldades na gestão das atividades realizadas em grupo na sala de aula, pois como solicitava aos alunos para entregar as resoluções, para eles soava como uma avaliação e assim solicitavam demasiadamente a sua ajuda. Como consequência, gastava-se mais tempo com a atividade do que o previsto comprometendo o *feedback* das resoluções em sala de aula, sendo necessário fazer a correção das suas produções noutro momento fora da sala de aula. Por fim, o autor conclui que entre as oportunidades e algumas dificuldades, o seu design de ensino fez emergir indicadores para uma nova abordagem no ensino da Álgebra Linear, mas que algumas dificuldades de aprendizagem apontadas pela literatura não foram atenuadas. O conhecimento dos alunos em lógica e em teoria de conjuntos continuou a ser uma dificuldade "no contexto da definição e validação dos axiomas de subespaço vetorial, mas de uma forma mais ténue, no contexto da forma de definir e de introduzir um método para a resolução de sistemas de equações lineares" (p. 217).

Um outro autor, Padredi (2003), investigou, a partir de entrevistas semiestruturadas a seis professores de Álgebra Linear, quais os recursos-meta utilizados por eles para trabalhar a noção de base de um espaço vetorial. No discurso dos professores apareceram diversos recursos-meta que são passíveis de se tornarem alavancas para a compreensão dos alunos, como: 1) a noção de base foi apresentada segundo três abordagens — como um sistema de geradores minimal, como conjunto maximal de vetores linearmente independentes e como uma justaposição de um sistema de geradores com um conjunto linearmente independente. Padredi explica que todas essas ideias fazem a articulação entre conjunto gerador e vetores linearmente independentes, dando origem ao conceito de base. Por exemplo, a abordagem que utiliza um sistema de geradores minimal, sugere que para obter uma base para um espaço vetorial é necessário ter o mínimo de vetores geradores para obter aquele espaço, levando os alunos à reflexão de que se consegue o mínimo quando o conjunto é linearmente independente; 2) utilizar a Geometria Analítica como o contexto concreto para gerar reflexões nos alunos sobre independência linear, geradores e base; 3) enfatizar desde o início da disciplina as operações de adição e multiplicação por escalar provocando reflexões por parte dos alunos e motivação para a noção de base; 4) utilizar analogias como a de um entrevistado, que para os alunos refletirem sobre a maneira de apresentar as resoluções dos exercícios e as demonstrações, argumenta que uma história deve ter começo, meio e fim; 5) utilizar noções que não são o foco no momento para justificar a necessidade de outras, como, por exemplo, antecipar as noções de transformação linear e isomorfismo para criar a necessidade da noção de base; 6) fornecer informações sobre a natureza dos conceitos a serem estudados e estabelecer a relação entre os próprios conteúdos da Álgebra Linear e dessa com outras disciplinas para os alunos perceberem a importância de se estudar determinados tópicos e como eles se relacionam.

Os professores entrevistados por Padredi também sugeriram algumas estratégias metodológicas que podem facilitar a compreensão dos alunos e torná-los mais críticos em relação ao pensamento matemático. Esses professores apresentam algumas estratégias com o intuito de prevenir que os alunos cometam alguns erros, tais como: propor tarefas para os alunos trabalharem em grupo com o intuito de promover discussões e gerar reflexões nos alunos sobre os tópicos em estudo; usar o livro didático no sentido de levantar discussões para a abordagem dada a alguns tópicos, que podem levar os alunos a cometer erros ou fazer algumas generalizações abusivas, como, por exemplo, dividir um vetor por outro como se fossem números reais.

No que diz respeito à prática do professor de Álgebra Linear, encontraram-se poucos trabalhos que analisem essa prática. Thomas (2011) e Speer et al. (2010) corroboram que há uma carência de pesquisas sobre a prática de ensino de matemática em nível universitário. A maioria dos trabalhos encontrados e que se apresentam na sequência do texto está relacionada com o contexto das pesquisas realizadas. São estudos que retratam experiências de ensino que procuraram coletar dados para dar suporte às pesquisas, o que interessa também, visto que essas experiências, que em geral são restritas a alguns tópicos da disciplina, podem suportar a reflexão e tomada de decisões para novas práticas. Ao longo das secções anteriores apresentaram-se alguns estudos com essa natureza. A presente pesquisa vem contribuir para minimizar a lacuna apresentada, uma vez que pelo menos parcialmente é um estudo sobre reflexões, decisões e ações sobre o ensino de um grupo de professores de Álgebra Linear.

Algumas das experiências de ensino encontradas na literatura organizam-se em torno das seguintes categorias: o erro dos alunos como estratégia de ensino; exploração da geração de exemplos; exploração de diferentes linguagens com auxílio de ambiente de geometria dinâmica; conceitualização a partir de modelos concretos; ensino tradicional versus ensino inovador e conceitualização e exploração de diferentes representações a partir da escrita matemática.

O erro dos alunos como estratégia de ensino: Barros et al. (2016) realizaram um estudo com 28 alunos de Engenharia numa instituição do Ensino Superior portuguesa, que visava a utilização do erro dos alunos como uma estratégia de ensino. Nessa perspetiva, foram propostas tarefas que conduzissem os alunos à reflexão e discussão sobre os seus erros e dificuldades no domínio da Álgebra Linear. Segundo os autores, as tarefas envolviam questões para as quais já se apresentavam algumas resoluções de alunos, sendo necessário avaliar a veracidade dessas resoluções e corrigir os erros cometidos. Os alunos trabalharam em pequenos grupos, podendo utilizar o software *Microsoft Mathematics*, com posterior discussão com o grande grupo. Quando a discussão das questões não era finalizada em sala de aula, o trabalho era recolhido e colocavam-se pequenas notas alertando para aspetos a serem repensados ou reformulados, em seguida eram digitalizados e enviados aos alunos por e-mail para que tivessem um tempo para reavaliar as suas respostas e também para que na aula seguinte, no momento da discussão, conseguissem ter bem presente as suas resoluções. Após o debate no grande grupo, era permitida aos alunos a correção das resoluções.

Além dos registros dos alunos, para complementar a recolha de dados, foram aplicados um questionário e uma entrevista a todos os alunos. A partir da análise do questionário, os autores afirmam que 32,1% dos alunos revelaram ter dificuldades na resolução das questões. Na entrevista, os alunos explicaram a origem das dificuldades: alguns não conseguiam identificar a resposta correta para cada questão por não terem presentes os conceitos envolvidos; na divisão das tarefas do trabalho no grupo não houve uma discussão entre pares; falta de organização do grupo para se juntarem fora de sala de aula e reformularem as resoluções quando era dado o *feedback* por e-mail.

De forma geral, segundo os autores, a metodologia proposta teve efeitos positivos na aprendizagem dos alunos, tais como: alguns conceitos foram clarificados; algumas dificuldades foram ultrapassadas; os alunos, na sua maioria, desenvolveram a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos, o que permitiu que alguns alunos tomassem consciência de suas dificuldades e de procedimentos incorretos que costumavam fazer.

Este tipo de estratégia de ensino, em que o aluno participa ativamente na superação dos seus erros é bastante significativo para a aprendizagem dos alunos. Destaca-se também como ponto positivo a importância do *feedback* das atividades realizadas e o incentivo à reformulação das resoluções, pois permite ao aluno verificar os seus erros, aprender com a correção, evitando a repetição desses erros, além de servir como motivação aos alunos para buscar a superação das suas dificuldades.

Exploração da geração de exemplos: Aydin (2014) realizou uma experiência de ensino na qual propôs atividades que exploravam a criação de exemplos por parte dos alunos sobre os conceitos de dependência e independência linear. Com a ajuda destes exemplos, o autor analisou o nível de entendimento dos alunos sobre (in)dependência linear e qual o efeito do processo de geração de exemplos na aprendizagem de Álgebra Linear. O estudo foi realizado com 124 estudantes dos cursos de Matemática, Física e Engenharias numa universidade na Turquia. Foram coletados dados a partir dos registros escritos desses estudantes e a partir de entrevistas a 12 estudantes sobre as suas noções sobre (in)dependência linear. A Figura 2 ilustra o tipo de questão proposta aos alunos.

Figura 2. Exemplo de questões propostas no estudo de Aydin (2014, p. 818).

(1) (a) Give an example of a 3×3 square matrix **A** whose rows are *linearly dependent*.
(b) Find the *dimension* of the space generated by the row vectors of **A** and interpret it geometrically.
(c) Change as *few entries* of **A** as possible to make the row vectors of it linearly independent.

(2) (a) Give a different *example* of a 3×3 square matrix **B**, $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, such that the dimension of the row space of **B** is *not equal* to the dimension of the row space of **A**.
(b) Change *as few entries* of **B** as possible to make the row vectors of it linearly independent.

(3) Is it possible to find a different example of a 3×3 square matrix **C**, $\mathbf{C} \neq \mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, such that the dimension of the row space of **C** is *not equal* to the dimension of the row space of either **A** or **B**?

Segundo o autor, na entrevista foram incluídas questões a partir das resoluções dos alunos como, por exemplo, "Por que você selecionou essa matriz? Existe conexão direta entre linearidade e dimensão? Qual foi o seu critério para produzir um grupo gerador independente linear?" (Aydin, 2014, p. 818). O objetivo das entrevistas, segundo o autor, era identificar possíveis dificuldades dos alunos e observar a adequação das relações que os alunos poderiam formar entre diferentes elementos da decomposição genética dos conceitos de (in)dependência linear. Entende-se por decomposição genética de um conceito "um conjunto estruturado de construções mentais que podem descrever como o conceito se pode desenvolver na mente de um indivíduo" (Asiala et al., 2004, p. 7).

No referido estudo, a teoria APOS[2] (Ação — Processo — Objeto — Esquema) foi utilizada para explicar as respostas dos estudantes. Segundo o autor, a abordagem pedagógica envolvida durante a

[2] A teoria APOS, desenvolvida por Asiala et al. (2004) e baseada em Piaget, postula que um indivíduo deve possuir as estruturas mentais apropriadas para dar sentido a um determinado conceito matemático. Essas estruturas mentais se referem às ações, processos, objetos e esquemas necessários para aprender o conceito. Tomando por referência Asiala et al. (2004) e Aydin (2014), caracterizamos ação, processo, esquema e objeto:

Ação: Uma ação é uma transformação que um indivíduo faz sobre um objeto matemático, apenas reagindo a pistas externas que fornecem detalhes precisos sobre os passos a seguir. Por exemplo, para fornecer um exemplo de uma matriz com linhas linearmente dependentes, o aluno muda as entradas e faz a redução por linhas, caso não encontre uma linha nula, muda as entradas e repete o processo.

experiência consistia no ciclo ACE: Atividade — Discussão em classe (o professor guiava os estudantes para refletir sobre a atividade e os conceitos envolvidos) — Exercícios (problemas padrões para reforçar o conhecimento adquirido na atividade e na discussão em classe). Também integravam este ciclo atividades no computador e em grupo.

Aydin (2014) evidenciou que o método de geração de exemplos envolvido na atividade proposta permitiu revelar as relações existentes entre o conceito de dependência linear e outros conceitos como o de variável livre, linha nula, infinitas soluções para um sistema linear homogêneo e o de independência linear com a não existência de variável livre, a não existência de linha nula e única solução para o sistema linear associado à matriz gerada em cada exemplo. Além disso, forneceu as informações necessárias para analisar os níveis de estruturas mentais dos alunos, de acordo com a teoria APOS.

O estudo confirmou que os alunos têm dificuldade no entendimento dos conceitos de (in)dependência linear e sugere que esta dificuldade advém do facto de os alunos não possuírem estruturas mentais adequadas nos níveis de objeto e esquema. Um indicador para o entendimento ao nível de objeto seria responder às questões utilizando os conceitos de vetores linearmente dependentes/independentes (por exemplo, para construir uma matriz com linhas linearmente dependentes, basta que um vetor linha seja combinação linear dos demais), demonstrando assim haver uma compreensão conceitual da estrutura das relações de (in)dependência linear como vetores. A compreensão ao nível de esquema deveria ser um conjunto de ações, processos e objetos ligados uns aos outros para organizar uma estrutura nas mentes dos alunos (Aydin, 2014). Assim, deveriam conseguir relacionar a (in)dependência linear com os conceitos de posto, dimensão e interpretação geométrica de um espaço vetorial (por exemplo, se a matriz 3×3 tem posto 2, isso significa que a dimensão do espaço linha associado é 2 e geometricamente este espaço é um plano). Segundo o estudo, foram poucos os alunos que conseguiram chegar a esse nível, a maioria tratou a (in)dependência linear como um processo – construíram, por exemplo, a matriz linearmente dependente utilizando duas linhas iguais, ou todas iguais, ou duas linhas múltiplas, ou fizeram a eliminação gaussiana para ver se na matriz resultante deste processo havia uma linha nula.

Processo: O processo se caracteriza como uma construção interna e sob o controle do próprio indivíduo, sem ser uma ação de resposta a pistas externas. O estudante tem condição de refletir, descrever e se necessário, reverter as etapas da transformação de um objeto. Por exemplo, para fornecer um exemplo de uma matriz linearmente dependente, o estudante foca na relação entre as linhas ou colunas dessa matriz.

Objeto: O estudante tem uma conceção no nível de objeto sobre uma ação quando consegue refletir sobre o processo, internalizá-lo e construir as transformações sobre o objeto matemático. Por exemplo, para internalizar a (in)dependência linear como um objeto, o aluno deve estabelecer a relação entre o processo de redução de linhas de uma matriz e o entendimento conceitual de vetores linearmente dependentes/independentes.

Esquema: "Um tópico matemático muitas vezes envolve muitas ações, processos e objetos que precisam ser organizados e vinculados em um quadro coerente, chamado de *esquema*" (Aydin, 2004, p. 817). Por exemplo, o estudante deve ser capaz de estabelecer a relação entre o conceito de vetores linearmente dependentes/independentes com outros conceitos como posto, subespaço gerado.

Segundo o autor, o estudo também revelou que a estratégia de ensino utilizada pautada pelo ciclo ACE conjuntamente com atividades computacionais, teve efeitos positivos no entendimento dos conceitos de (in)dependência linear, pois alguns alunos conseguiram lidar corretamente com a conceção do objeto de (in)dependência linear, conseguiram visualizar uma matriz como um conjunto de vetores linha, não como entradas de certos valores após a realização de manipulações algébricas, e ainda conseguiram interpretar geometricamente o espaço gerado pelos vetores linha da matriz.

Compartilho com a opinião de Aydin, que dentro da proposta de ensino apresentada é essencial, para promover a aprendizagem, que os alunos validem os seus exemplos (mostrem como e porque são válidos), e uma forma de os incentivar é por meio do trabalho em grupo, da socialização em sala de aula. O estudo de Aydin, além de revelar a potencialidade da geração de exemplos como estratégia de ensino para promover a aprendizagem dos alunos, revelou achados importantes em relação ao nível de entendimento dos alunos e das suas dificuldades (por exemplo, a confusão entre o espaço linha da matriz gerada e o espaço solução do sistema homogêneo associado a essa matriz) em relação aos conceitos envolvidos, podendo servir de referência para a construção de novas estratégias de ensino.

É importante também levar em consideração uma observação do autor, de que a estratégia que um aluno utiliza para resolver uma questão não é suficiente para definir o nível de entendimento desse aluno. Um aluno, por exemplo, pode entender um conceito ao nível de esquema e utilizar uma estratégia simples para resolver um problema. Por isso a importância de se proporem nas estratégias de ensino questões que explorem diferentes aspetos e relações entre os conceitos e, no momento de validar a estratégia, coletar dados de diferentes fontes, como, por exemplo, dos registros dos alunos, do debate em sala de aula e de entrevistas a alunos.

Exploração de diferentes linguagens com auxílio de ambiente de geometria dinâmica: Como o que foi discutido na secção 2 deste capítulo, uma das dificuldades de aprendizagem na Álgebra Linear é lidar com as diferentes representações dos objetos matemáticos. Os alunos têm a tendência de manipular as representações desses objetos mecanicamente, sem entender o seu significado e a relação entre eles (Dorier et al., 2000a; Sierpinska, 2000). Com essa finalidade, Aranda e Callejo (2010) realizaram uma experiência de ensino utilizando um contexto de geometria dinâmica (aplicativo *Descartes*[3]) para construir o conceito de dependência linear no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dando ênfase às linguagens geométrica e analítica (Hillel, 2000), as quais correspondem aos modos de pensamento sintético-geométrico e analítico-aritmético (Sierpinska, 2000). A linguagem geométrica correspondia à linguagem

[3] http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

dos pontos, vetores, sistemas de referência, colinearidade, paralelismo e coplanaridade de vetores, enquanto que a linguagem analítica correspondia à representação de vetores como uma combinação linear de um conjunto de vetores geradores ou seus componentes em relação a um sistema de referência.

Com a experiência de ensino, as autoras queriam saber até que ponto os alunos aproveitavam ou não o potencial de usar simultaneamente as linguagens geométrica e aritmética acerca do conceito de dependência linear. Os dados do estudo foram recolhidos através das produções escritas de dois pares de estudantes, dos diálogos entre eles e de arquivos com a captura da tela do computador, na resolução de três tarefas. As tarefas foram apresentadas no ambiente de geometria dinâmica e envolviam as duas linguagens simultaneamente, sendo que os alunos podiam manipular 'controles' gráficos e numéricos para tirar suas conclusões. Quando os alunos participaram da experiência já haviam trabalhado o conceito de dependência linear com lápis e papel, mas a maneira como eles enfrentaram a primeira tarefa da experiência de ensino (composto por três tarefas) indicou que não tinham construído o conceito. As autoras concluíram que a interação dinâmica e simultânea com as diferentes representações, visual e analítica, num contexto tecnológico, pode "favorecer as generalizações necessárias para desenvolver os processos de abstração reflexiva que afetam a elaboração do conceito de dependência linear" (Aranda & Callejo, 2010, p. 129). Entretanto, chamam a atenção de que o uso da tecnologia não é fator determinante para a aprendizagem, mas sim a atividade cognitiva dos estudantes na medida em que se consciencializam e refletem sobre a atividade matemática que estão realizando.

Um outro estudo ao nível das representações dos objetos matemáticos foi realizado por França (2007), que investigou em que medida um tratamento geométrico e a articulação entre os registros de representação, no sentido de Duval (2003) – algébrico, gráfico e geométrico –, auxiliados por um ambiente de geometria dinâmica, influenciam as conceções de estudantes que já cursaram Álgebra Linear. Com essa finalidade, a autora realizou uma experiência de ensino com dezoito alunos de um curso de Licenciatura em Matemática que já haviam cursado a disciplina, onde explorou os conceitos de coordenadas, dependência linear, base e transformação linear no plano, com recurso ao software Cabri-Géomètre. Foram propostas três tarefas realizadas ao longo de seis encontros com esses alunos numa disciplina subsequente à Álgebra Linear (Geometria das Transformações), e os dados foram recolhidos a partir dos registros escritos dos alunos, registros em áudio e vídeo dos encontros e dos arquivos do Cabri.

A pesquisadora relata que os alunos tinham deficiências em relação aos aspetos algébricos dos conceitos, sendo necessária a intervenção do professor da disciplina na retomada desses conceitos. Em relação ao papel do software na experimentação, a pesquisadora afirma que "proporcionou a elaboração de conjeturas, a validação experimental de hipóteses e estratégias de resolução das atividades, com o uso de diferentes ferramentas do programa e de seu aspeto dinâmico" (p. 117). A autora observou a evolução dos alunos da pesquisa em relação à compreensão dos conceitos, bem como um domínio mais amplo em relação às diferentes representações dos conceitos e a transição entre elas em ambos os sentidos.

Conceitualização a partir de modelos concretos: Diferentes pesquisadores desenvolveram projetos para mostrar que é possível ensinar diferentes conceitos matemáticos usando problemas contextualizados e técnicas de modelagem. É o caso dos autores Possani et al. (2010), que analisaram uma experiência realizada em sala de aula que envolveu a modelagem matemática de um problema de controle de fluxo de tráfego de uma cidade, o qual induz o uso de sistemas lineares. Os autores justificam a opção em trabalhar com a modelagem matemática pelo facto de que essa abordagem dá ao professor a oportunidade de

> observar e analisar aspetos subtis do desenvolvimento matemático dos alunos e uma visão mais clara sobre o processo de raciocínio, permitindo a observação de como os estudantes verificam e justificam seu modelo matemático, ao contrário de apenas registrar o fracasso ou sucesso na produção de uma resposta esperada. (Possani et al., 2010, p. 2126)

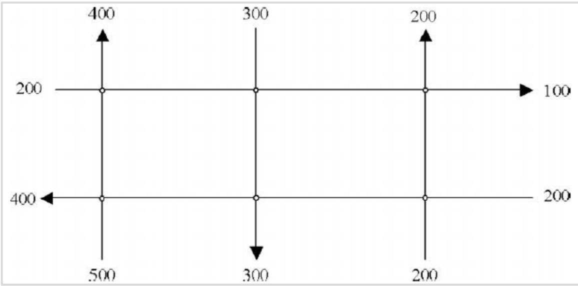
Dessa forma, os pesquisadores tinham como objetivo verificar a viabilidade de introduzir conceitos importantes da Álgebra Linear usando a modelagem matemática, além de analisar os resultados de tal abordagem em termos do trabalho produzido pelos alunos e a sua relação com a aprendizagem. As tarefas propostas aos alunos foram planeadas seguindo um design da teoria de modelos e modelagem matemática[4] de Lesh e Doerr (2003) e da teoria APOS. Participaram do estudo alunos de quatro cursos distintos de graduação, ensinados por quatro professores distintos.

O primeiro problema proposto aos alunos trazia o contexto representado na Figura 3, que apresenta algumas ruas e cruzamentos com os sentidos representados pelas setas, bem como o número

[4] De acordo com Lesh e Doerr (2003), uma situação-problema deve atender seis princípios para satisfazer os critérios de modelos e modelagem matemática: (1) Princípio da realidade: o problema deve envolver um contexto real e ter elementos matemáticos suficientes para que não seja um problema trivial; (2) Princípio de construção do modelo: o problema deve ser rico o suficiente para precisar de conceitos matemáticos no desenvolvimento de um modelo; (3) Princípio de autoavaliação: o problema deve proporcionar que o aluno consiga testar se o modelo proposto é adequado às hipóteses ou não; (4) Princípio da documentação de construção: o problema (seus questionamentos) deve proporcionar que o aluno registre seu processo de pensamento, escrevendo os pressupostos e o modelo em termos algébricos; (5) Princípio da generalização de construção: o modelo desenvolvido e as ferramentas conceituais envolvidas podem ser generalizados para outros problemas ou situações; (6) Princípio da simplicidade: a situação apresentada deve ser simples e ter informações suficientes para que os alunos consigam analisa-la.

de veículos que passam por hora em cada cruzamento. Em cada ponto de cruzamento existem rotundas que direcionam o tráfego e permitem um fluxo contínuo em todo o sistema. Foram propostas questões aos alunos onde tinham que analisar possíveis desvios de tráfego em função de alguma obra, acidente ou outro evento.

Figura 3. Plano de fluxo de tráfego (Possani et al., 2010, p. 2130).



As demais tarefas propostas eram direcionadas para introduzir, a partir de dois casos particulares, a matriz aumentada de um sistema e as ações necessárias para o procedimento de eliminação gaussiana, bem como a interpretação das soluções. Por fim, retornaram ao problema do tráfego e aplicaram os conceitos que acabaram de ser explorados nas atividades anteriores. Como o problema não tinha uma única solução, os alunos foram convidados a escrever a solução em termos de parâmetros, e foi realizada uma análise geométrica e analítica do espaço solução para os alunos perceberem que dependendo do parâmetro escolhido a representação geométrica não é a mesma e que as restrições em relação aos parâmetros mudam. Segundo os autores, essa análise ajudou os alunos a internalizar a noção de conjunto solução como um objeto.

Os alunos trabalharam em pequenos grupos e as principais dificuldades foram encontrar o modelo apropriado ao problema, definir as variáveis (tinham deficiência com esse conceito). Tentavam resolver o problema apenas pela observação do diagrama do tráfego sem montar um esquema matemático. Na resolução do sistema de equações associado ao problema, alguns alunos encontraram fluxo negativo, sendo necessário observar as condições de existência do problema, outros tentavam substituir valores numéricos nas equações num processo de tentativa e erro, outros tinham dificuldades na manipulação algébrica das equações tendo em vista o número de variáveis envolvidas. Os alunos não tiveram dificuldades em representar o problema matricialmente.

De acordo com os autores, o papel do professor durante a experiência era acompanhar os grupos e verificar o que estavam a fazer, responder a questões específicas dos estudantes para os auxiliar no entendimento do problema, ou fazer perguntas para os ajudar a refletir sobre o problema, mas sem dar dicas sobre a possível solução. Destacam que foi fundamental após cada etapa das atividades propostas uma discussão na turma com a comparação dos resultados entre os diferentes grupos, seguido da formalização dos novos conceitos para conscientizar os alunos sobre o conhecimento adquirido através de seus próprios trabalhos. Além disso, destacam a importância de o conjunto de atividades ser projetado com cuidado para que de facto os alunos consigam fazer as construções necessárias para o aprendizado dos conceitos envolvidos. Os autores ponderam que as atividades projetadas atendem aos critérios da teoria de Modelos e Modelagem Matemática, conforme Lesh e Doerr (2003), e que a estratégia seguida em todo o processo de modelagem deu oportunidades para os alunos mostrarem o que sabiam e o que estavam aprendendo. Dessa forma, concluem que a modelagem matemática é uma ferramenta poderosa para ensinar novos conceitos de Álgebra Linear aos alunos.

Ensino tradicional versus ensino inovador: Como alternativa ao ensino tradicional, alguns modelos de ensino inovadores, facilitados pelo uso da tecnologia, vêm ganhando espaço no ensino de matemática. Love et al. (2014) investigaram a aprendizagem dos alunos numa sala de aula de Álgebra Linear 'invertida' (*flipped classroom*) que incorporou meios tecnológicos, tais como filmes pré-gravados que os alunos assistiram antes de cada aula. O objetivo era liberar tempo nas aulas para aprender mais ativamente e resolver problemas. O estudo foi conduzido com duas turmas, uma com ensino tradicional e a outra com o modelo de sala de aula invertida, do mesmo professor, e foi feita uma comparação entre as aprendizagens destes alunos baseada nos resultados de três avaliações realizadas durante o semestre. Nas aulas tradicionais, o professor dedicava metade da aula para esclarecer dúvidas dos alunos e resolver alguns problemas na lousa relacionados com as tarefas extra classe e na outra metade introduzia novos tópicos e trabalhava alguns problemas propostos como exemplos (discutia estratégias de ensino para os problemas, mas os alunos não trabalhavam por si próprios). Nas aulas invertidas, era esperado que os alunos já tivessem estudado o conteúdo, seja através dos vídeos enviados pelo professor, livro de texto ou outro material. No início da aula o professor fazia uma discussão rápida do conteúdo, esclarecia dúvidas e discutia questões-teste que eram enviadas aos alunos para fazer extra classe e em seguida propunha as mesmas questões que resolvia como exemplos na sala tradicional, só que neste caso os alunos é que as resolviam (aos pares).

Os autores realizaram uma análise estatística dos resultados das avaliações e observaram uma melhor evolução da turma invertida do que a turma tradicional da primeira para a segunda avaliação e da primeira para a terceira, mas as duas turmas tiveram resultados semelhantes em relação à avaliação final (da segunda para a terceira). Estes resultados indicam que a abordagem da sala de aula invertida pode apoiar a aprendizagem de forma bem-sucedida em disciplinas consideradas desafiadoras pelos alunos (Love et al., 2014). Além disso, os alunos responderam a um questionário no final do semestre sobre ambas as metodologias e os alunos da sala de aula invertida consideraram muito positivamente a sua experiência no curso. Mais de 74% dos alunos concordaram que a resolução de problemas em sala de aula os ajudou a clarificar os conteúdos pré-estudados antecipadamente às aulas, além de se sentirem mais motivados para o estudo do que numa aula tradicional, como elucida um aluno: "O ambiente mais interativo do curso manteve a minha atenção e me ajudou a me concentrar" (p. 322). Mais de 70% concordaram que a discussão promovida pelo trabalho em pares nas aulas os ajudou a desenvolver o seu entendimento. Estatisticamente, os alunos da sala de aula invertida concordaram que os vídeos instrucionais os ajudaram a entender o conteúdo da disciplina de forma muito mais significativa do que os da sala tradicional, visto que os vídeos também foram disponibilizados a estes alunos. Além disso, os alunos da sala invertida completaram a disciplina com uma maior perceção da importância da Álgebra Linear para suas carreiras do que os alunos da sala tradicional.

Embora Love et al. (2014) aplicaram o modelo da sala de aula invertida em toda a disciplina de Álgebra Linear, Talbert (2014) considera que esse modelo também pode ser aplicado para a aprendizagem de algum tópico específico da disciplina ou para uma série de workshops, como, por exemplo, uma série de atividades em laboratório, um conjunto de tópicos como determinantes, autovalores/autovetores e produto interno. O pesquisador enfatiza que trabalhar com a sala de aula invertida exige um grande esforço do professor, pois tem que preparar materiais antecipadamente de forma que coloque os alunos em condições favoráveis de aprender independentemente. Além disso, tem que lidar com o desconforto dos alunos, pois estes têm que ser mais ativos em relação à sua aprendizagem. Entretanto, dar a chance ao aluno de reconhecer antecipadamente as suas dificuldades, permite ao professor trabalhar em sala de aula com os tópicos que os alunos mais precisam de ajuda, além de promover discussões mais significativas sobre o conteúdo, visto que têm a noção prévia do assunto (Talbert, 2014).

Um outro trabalho com uma estratégia de ensino inovadora foi realizado por Domínguez-García et al. (2016). Com o intuito de motivar os alunos para a aprendizagem dos tópicos de Álgebra Linear, os autores utilizaram projetos associados à atividade em grupo e à ferramenta tecnológica no ensino de Álgebra Linear. Os projetos foram desenvolvidos ao longo do período letivo e consistiam em problemas reais que os alunos tinham que modelar e resolver. Os projetos eram compostos por várias etapas e conforme o conteúdo de Álgebra Linear se desenvolvia na aula, os alunos adquiriam condições para avançar nas etapas. Como os alunos tinham que apresentar uma solução numérica para o problema dado, era necessário aprender a realizar cálculos numéricos utilizando um software matemático (que no caso foi o MATLAB). Os alunos deveriam ir divulgando as etapas vencidas, bem como as referências (incluindo os comentários de outros grupos) utilizadas em cada etapa através de um portfólio que deveria ser visível para o professor e colegas. O portfólio com o produto final, incluindo um resumo do projeto e todas as referências utilizadas, deveria ser entregue na última semana de aula. Conforme as etapas eram cumpridas, um *feedback* era dado pelo professor. A avaliação final era feita sobre a resolução do problema e sobre a apresentação do portfólio e a nota final era composta pela avaliação dos professores envolvidos, pela autoavaliação dos alunos do grupo e pela avaliação dos demais grupos da classe. Segundo os autores, foram abordadas quatro temáticas diferentes nos projetos e houve a preocupação de todas envolverem os mesmos conteúdos. Os autores observaram que com essa metodologia de ensino os alunos adquiriram mais autonomia na resolução de tarefas, desenvolveram a capacidade de trabalhar em equipe, realizaram perguntas e visualizaram que a Álgebra Linear tem aplicação prática. Essa metodologia de ensino fez com que os alunos se sentissem mais motivados para o estudo, além de melhorarem as suas qualificações e desenvolverem as suas habilidades específicas e gerais da disciplina. Um ponto a destacar no ensino dos autores supracitados é a relação com o 'princípio da necessidade' de Harel (2000), uma vez que o envolvimento de situações práticas nos temas dos projetos dos diferentes grupos ajuda os alunos a criar a necessidade de aprender tópicos de Álgebra Linear.

Conceitualização e exploração de diferentes representações a partir da escrita matemática: Outra estratégia de ensino que induz a uma aprendizagem ativa e explora também as múltiplas representações de um objeto matemático é apresentada por Hamdan (2007). O autor recorreu à escrita de diários de bordo como meio de enfatizar a linguagem simbólica e envolver os alunos com conceitos e definições relacionados com a Álgebra Linear. Mais precisamente, os alunos foram convidados a escrever sobre os diferentes modos de representação das matrizes inversíveis, que aparecem em diferentes contextos na disciplina, sendo guiados a não confundirem o objeto matriz inversível com suas múltiplas representações. O projeto foi desenvolvido ao longo de todo um semestre letivo e os alunos iam desenvolvendo o projeto em etapas, com o acompanhamento do professor, sendo que em muitos casos o resultado final foi um "capítulo sofisticado" (Hamdan, 2007, p. 615) sobre a inversibilidade de matrizes. O autor salienta que nas aulas desenvolveu o conteúdo, promoveu discussões, resolveu problemas, mas intencionalmente sem enfatizar as conexões entre as diferentes representações associadas ao conceito de matriz inversível, deixando para os alunos fazerem a conexão. O autor conclui que "ao compilar o material em seu próprio estilo, os alunos conseguiram se relacionar melhor com ele e atingir níveis mais altos de sofisticação, movendo-se melhor do concreto para o abstrato" (p. 615).

Síntese

Muitos dos trabalhos analisados surgiram da reflexão de professores que ensinam Álgebra Linear sobre sua própria prática, na procura de novos métodos de ensino para essa disciplina. Nesses métodos de ensino há a preocupação com o formalismo, com a aquisição da conceitualização, com a conexão entre os diferentes conceitos e representações desses conceitos, com a motivação do aluno para o estudo da Álgebra Linear. De um modo geral, há uma preocupação sobre o melhor caminho para conduzir à abstração. É consenso entre os autores que o formalismo faz parte da natureza da Álgebra Linear e não pode ser evitado. Entretanto, ele pode ser introduzido aos poucos, como sugerem Dorier (2000) e Harel (2000), e utilizando diversas abordagens e materiais didáticos. Vários dos trabalhos analisados têm essa preocupação, de primeiro apresentar o conteúdo num contexto mais concreto e a partir de aí fazer um 'movimento' para conduzir à abstração, como por exemplo em Thomas (2011), Possani et al. (2010) e Aydin (2014). Uma aliada que surge é o recurso da tecnologia dos softwares de geometria dinâmica, que permitem vários olhares sobre o mesmo objeto, possibilitando fazer conjeturas e tirar conclusões. Outra perspetiva é o uso da tecnologia como ferramenta de comunicação entre professor e alunos, como em Love et al. (2014), ou para o desenvolvimento de projetos com a criação de portfólios como em Domínguez-García et al. (2016). Entretanto, por mais inovadora que seja a estratégia de ensino, com todos os cuidados para que os objetivos em relação à aprendizagem sejam atingidos, é consenso que os alunos têm dificuldade em lidar com os conceitos da Álgebra Linear.

A forma como o professor que ensina Álgebra Linear, em particular, considera as dificuldades dos alunos na aprendizagem desta temática põe em relevância um conhecimento específico do professor para ensinar. Como o foco deste estudo incide sobre a prática de professores do Ensino Superior que ensinam ou ensinaram Álgebra Linear, importa enquadrar teoricamente as dimensões que estruturam o seu conhecimento.

2.4. Conhecimento para ensinar

Diversos são os modelos teóricos a respeito dos conhecimentos necessários ao professor no exercício da sua prática docente. A maior parte desses modelos tem como referência os estudos de Shulman (1986, 1987) e seus colegas. O principal contributo de Shulman liga-se à temática da aprendizagem para a docência e consiste na categoria teórica do conhecimento docente designada por 'Conhecimento Pedagógico do Conteúdo' (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*). O desenvolvimento dessa teoria surgiu a partir da posição crítica de Shulman (1986) e seus colegas face à tendência da investigação na época se preocupar mais com o conhecimento sobre aspetos pedagógicos (por exemplo, gestão da sala de aula) do que com o conteúdo efetivamente ensinado nas salas de aula, com o modo como os professores faziam a gestão do discurso em sala de aula, ou o que os levava a escolher uma determinada estratégia de ensino. Os estudos realizados por Shulman e colegas evidenciaram "a existência de uma base de conhecimento para o ensino que não depende apenas do domínio do conteúdo, do estilo pessoal ou da boa comunicação docente" (Born et al., 2019, p. 3), mas que inclui "a capacidade do professor para transformar o conhecimento do conteúdo que possui em formas que sejam pedagogicamente poderosas e adaptáveis às variações de habilidade e histórico dos alunos" (Shulman, 1987, p. 217).

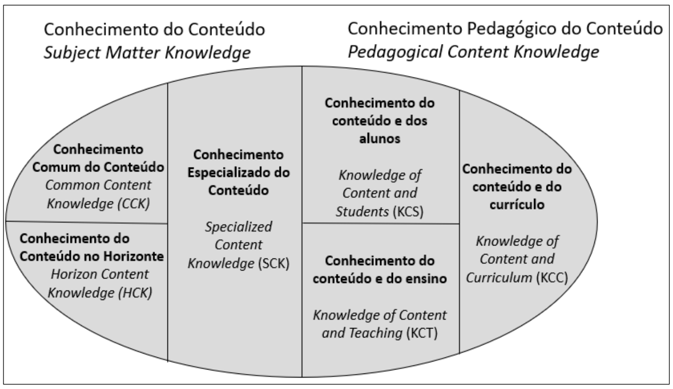
Tomando por referência os estudos realizados com professores experientes e iniciantes na carreira, Shulman (1986) organizou o conhecimento do conteúdo para o ensino em três categorias: o conhecimento do conteúdo específico, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do currículo. Num trabalho posterior, em 1987, o autor procurou especificar qual seria 'a base de conhecimento' que o professor precisa ter para ensinar de modo a promover a compreensão dos conteúdos pelos alunos, que desdobrou em sete categorias, incluindo as três anteriores:

(i) Conhecimento do conteúdo – contempla o conteúdo específico da disciplina a lecionar;
(ii) Conhecimento pedagógico geral – refere-se ao conhecimento que transcende a disciplina que leciona e diz respeito às questões de gestão e organização da sala de aula;
(iii) Conhecimento do currículo – refere-se ao conhecimento do programa da disciplina que leciona e das disciplinas afins, das recomendações curriculares, dos materiais didáticos disponíveis;
(iv) Conhecimento pedagógico do conteúdo – seria a combinação entre conhecimento do conteúdo e da pedagogia para ensinar, que é específico do domínio dos professores;
(v) Conhecimento dos alunos e das suas características;
(vi) Conhecimento do contexto educativo;
(vii) Conhecimento das metas da educação, suas finalidades, valores e referências históricas e filosóficas.

Destas categorias, Shulman (1987) dá destaque ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) justificando que é a categoria que identifica o conjunto de conhecimentos específicos que são necessários para o professor ensinar; envolve a mobilização entre o conhecimento do conteúdo e da pedagogia na compreensão de como os tópicos específicos, problemas ou questões podem ser organizados, representados e adaptados de modo a se tornarem compreensíveis aos alunos. Mais especificamente, (Shulman, 1986) organiza o PCK em torno das múltiplas formas pelas quais o conteúdo pode ser representado e formulado para os alunos, utilizando-se analogias, metáforas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. Inclui também a compreensão do que facilita ou dificulta a aprendizagem de determinados assuntos, bem como a compreensão das conceções prévias que os alunos têm de alguns tópicos, que muitas vezes são equivocadas, e suas implicações para a aprendizagem subsequente. O reconhecimento das conceções prévias dos alunos exige do professor o conhecimento de estratégias que os conduzam a reorganizar o seu pensamento e a compreensão sobre os tópicos (Shulman, 1986). Na perspetiva de Shulman (1987), essa identificação de saberes para ensinar (presente no PCK) é única da profissão docente e é o que diferencia um especialista em conteúdo de um professor.

Shulman, em entrevista a Born et al. (2019), refere que parou de trabalhar diretamente com o conceito do PCK cinco anos após de o ter criado, muito antes que fosse totalmente compreendido. Essa falta de um melhor entendimento e o consenso de que a compreensão do conteúdo é importante para ensinar despertou o interesse de vários investigadores pelo PCK, tornando-o popular e de interesse até hoje. Dentre estes pesquisadores está a equipa liderada por Deborah Ball (Ball & Bass, 2002; Ball et al., 2005; Ball et al., 2008), que a partir da noção do PCK de Shulman reuniu esforços para desenvolver uma teoria do conhecimento do conteúdo baseada na prática de ensino. Ball et al. (2008) referem que apesar do conceito do PCK ser largamente utilizado, "ele precisava de desenvolvimento teórico, esclarecimento analítico e teste empírico" (p. 389). Ao focar os estudos no que os professores precisam saber sobre a Matemática para ensinar, Ball e colegas desenvolveram o conceito de 'Conhecimento Matemático para o Ensino' (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT). Ball et al. (2008) consideram o MKT como um refinamento das categorias da teoria da 'base do conhecimento' de Shulman (1986, 1987) e as dividem em dois domínios, cada um com três categorias (Figura 4): (1) *Conhecimento do conteúdo*. Com foco no objeto matemático, é concebido como conhecimento comum do conteúdo, conhecimento do conteúdo no horizonte e conhecimento especializado do conteúdo; (2) *Conhecimento pedagógico do conteúdo.* Com foco no ensino da Matemática, subdivide-se em conhecimento do conteúdo e dos estudantes, do conteúdo e do ensino e do conteúdo e do currículo (Figura 4).

Figura 4. Conhecimento matemático para ensinar (Ball et al., 2008, p. 403).



De acordo com Ball et al. (2008), o *conhecimento comum do conteúdo* engloba o conhecimento do conteúdo de Matemática ensinado na 'escola', que é comum para todas as profissões e não exclusivo de quem ensina. Enquanto que o *conhecimento especializado do conteúdo* é aquele específico para quem ensina Matemática; inclui a compreensão das distintas interpretações dos conteúdos, um raciocínio e um conhecimento que vai além do que é efetivamente ensinado. Para os autores, o professor deve possuir um corpo de conhecimentos especializado do conteúdo matemático porque o ensino envolve tornar características particulares do conteúdo visíveis e mais fácil de aprender pelos estudantes. Já o *conhecimento do conteúdo e dos alunos* é uma combinação "envolvendo uma ideia ou um procedimento matemático particular e a familiaridade com o que os alunos frequentemente pensam ou fazem" (Ball et al., 2008, p. 401). O conhecimento do conteúdo e dos alunos inclui, por exemplo, a familiaridade do professor com as conceções e erros frequentes dos alunos, o conhecimento das suas dificuldades, o que eles provavelmente pensam sobre o que está sendo ensinado e o que lhes deixa confusos, a capacidade para prever que atividades os motiva e que podem ser fáceis ou difíceis para eles. Por fim, o *conhecimento do conteúdo e do ensino* envolve a interseção entre a compreensão matemática específica e a compreensão das estratégias pedagógicas que podem contribuir com a aprendizagem do aluno para determinado conteúdo. Relativamente às categorias *conhecimento do conteúdo no horizonte* (inclui o conhecimento de como os conteúdos matemáticos estão relacionados ao longo do currículo nos diferentes níveis de ensino) e *conhecimento do conteúdo e do currículo*, os autores referem que ainda estariam em processo de investigação teórica e empírica.

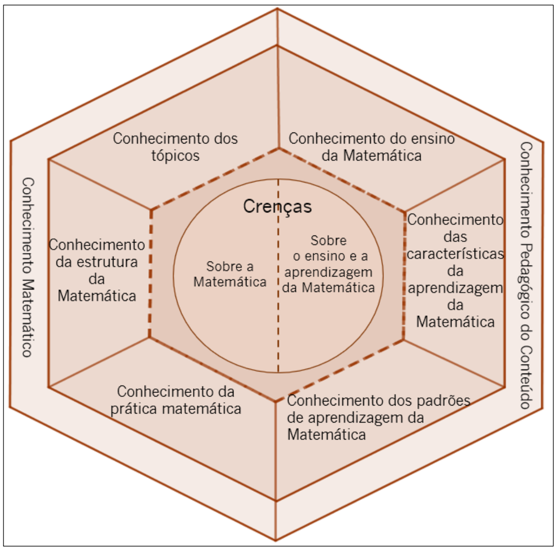
Ball et al. (2008) reconhecem que tais categorias precisam de refinamento e revisão, a partir da análise da prática dos professores, pois foram definidas de forma estática e disjuntas. Entretanto, há algumas situações que surgem no ensino que podem ser geridas utilizando diferentes tipos de conhecimentos, sendo difícil discernir nestas situações a fronteira entre as categorias. Por fim, os autores argumentam que para ensinar o professor deve ter conhecimento do conteúdo específico, porém pode não ser o suficiente para que os alunos aprendam, pois é pouco provável que o simples conhecimento da Matemática mais avançada satisfaça todas as exigências do conhecimento matemático para o ensino. Concluem que os professores precisam conhecer e saber usar a Matemática de modo a dar sentido matemático ao trabalho dos alunos, assim como desenvolver diferentes estratégias para tornar os conteúdos acessíveis a eles.

Climent et al. (2014) advogam que o modelo do MKT de Ball e colaboradores desperta interesse para a investigação em Educação Matemática porque "considera a especificidade do conhecimento em relação à Matemática, porque tem potencial para ser utilizado como ferramenta analítica na investigação do conhecimento dos professores e para orientar a formação de professores" (p. 47) e, ao mesmo tempo, representa um avanço na teoria de Shulman (1986, 1987), mantendo a sua essência.

Com base nas potencialidades, mas também nas dificuldades em aplicar o MKT a algumas situações específicas das aulas de Matemática, devido à sobreposição dos domínios que compõe este modelo, um grupo de investigadores em Didática da Matemática da Universidade de Huelva, Espanha, liderado por José Carrillo, desenvolveu um modelo analítico para explorar e compreender o conhecimento do professor de Matemática que, num conjunto, só a ele faz sentido (Carrillo et al., 2013). Tal modelo, designado por 'Conhecimento Especializado do Professor de Matemática' (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* - MTSK), consiste num refinamento e uma expansão do MKT e considera todos os conhecimentos dos professores de Matemática, no que diz respeito ao ensino da disciplina, como especializados, eliminando qualquer referência a um núcleo comum de conhecimentos partilhados com outros que fazem uso da Matemática (Carrillo et al., 2013; Escudero-Ávila et al., 2015).

O MTSK é um modelo analítico, de caráter descritivo, que permite uma interpretação abrangente do conhecimento especializado do professor, considerando as diferenças nos critérios de validade e as diferentes naturezas dos conhecimentos do professor, tanto do domínio matemático como do didático específico (Escudero-Ávila et al., 2015). Este modelo considera a separação em dois domínios de conhecimento, cada um deles subdividido em três subdomínios de natureza distinta (Figura 5): (1) *Conhecimento matemático*. Conhecimento amplo e profundo da Matemática, diferenciando-se em subdomínios que são intrínsecos à disciplina: conhecimento dos tópicos, conhecimento da estrutura da matemática e conhecimento da prática matemática; (2) *Conhecimento pedagógico do conteúdo*. Com foco no conhecimento matemático como objeto de ensino e aprendizagem, subdivide-se em conhecimento do ensino da Matemática, conhecimento das características da aprendizagem da Matemática e conhecimento dos padrões de aprendizagem da Matemática.

Figura 5. Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (Escudero-Ávila et al., 2015, p. 56).



Para além destes dois domínios, representadas no centro do modelo (Figura 5), estão as crenças dos professores sobre a Matemática e sobre o seu ensino e aprendizagem, que interagem com todos os conhecimentos em cada subdomínio (Escudero-Ávila et al., 2015).

No MTSK, o domínio do conhecimento matemático propõe uma separação em subdomínios que tem por referência diferentes formas de conhecer a Matemática. O *Conhecimento dos tópicos* inclui o conhecimento do professor sobre os conceitos e procedimentos matemáticos juntamente com os correspondentes fundamentos teóricos (Carrilllo et al., 2013). O *Conhecimento da estrutura da Matemática* inclui o conhecimento do professor sobre as relações entre os tópicos matemáticos da disciplina que leciona, com outras disciplinas e até mesmo com outros níveis educativos. O *Conhecimento da prática matemática* engloba as formas de como proceder para alcançar os resultados matemáticos preestabelecidos. Trata-se de saber como as relações, correspondências e equivalências são estabelecidas, como argumentar, raciocinar e generalizar, como definir e utilizar definições, o papel da convenção, como fazer demonstrações, como fazer a transição entre as diferentes representações dos conceitos.

Escudero-Ávila et al. (2015) referem que no modelo do MTSK foram incluídos no PCK os conhecimentos pedagógicos em que o conteúdo matemático condiciona o ensino e a aprendizagem da Matemática. Compreendido no PCK, o *Conhecimento das características da aprendizagem da Matemática* "deriva da necessidade de o professor compreender como os alunos pensam quando confrontados com atividades e tarefas matemáticas" (Carrillo et al, 2013, p. 7). Este subdomínio inclui o conhecimento das teorias de aprendizagem (pessoais do professor ou institucionalizadas), conhecimentos dos erros, obstáculos e dificuldades associados à Matemática em geral e a tópicos específicos, as suas expectativas, conceções e pré-conceitos sobre os tópicos matemáticos (Flores-Medrano et al., 2014). O *Conhecimento do ensino de Matemática* refere-se ao conhecimento do professor sobre as teorias de ensino da Matemática, sobre representações particulares do conteúdo, recursos e materiais didáticos, assim como o conhecimento de exemplos, tarefas e estratégias de ensino, que podem potenciar a aprendizagem para cada tópico específico (Carrilllo et al., 2013). Por fim, o *Conhecimento dos padrões de aprendizagem da Matemática* engloba o conhecimento sobre o conteúdo programático, dos níveis de desenvolvimento conceitual, procedimental e de raciocínio matemático que devem ser alcançados pelos alunos (em cada conteúdo e/ou na disciplina como um todo) e sobre a sequência dos conteúdos, tanto da disciplina que ensina, como das afins (anteriores e subsequentes) (Flores-Medrano et al., 2014).

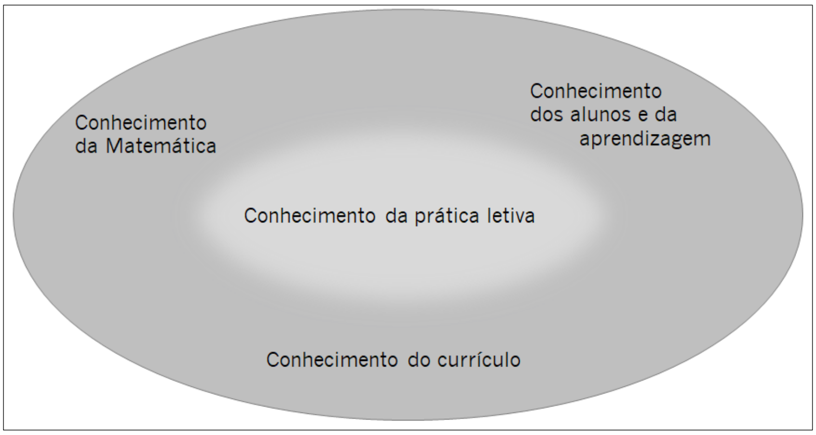
Por sua vez, Rowland (2013) e seus colegas da Universidade de Cambridge, a partir das ideias de Shulman (1986,1987) desenvolveram um quadro teórico que se distingue dos dois últimos apresentados, para identificar e definir as várias formas como o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento didático influenciam as decisões e ações dos professores na sala de aula. Tal modelo, designado por 'Quarteto do conhecimento' (*Knowledge Quartet* - KQ) é constituído por quatro dimensões: (i) fundamentos; (ii) transformação; (iii) conexão; e (iv) contingência.

A dimensão *Fundamentos* se refere ao conhecimento, às conceções e às compreensões adquiridas na formação acadêmica do professor. É um conhecimento que o professor tem, mas não significa que o usa necessariamente no dia a dia do trabalho profissional, mas que pode recorrer a ele quando necessário. A *Transformação* diz respeito ao conhecimento das formas de representação (uso de analogias, ilustrações, exemplos, explicações, procedimentos e demonstrações) das ideias matemáticas aos alunos de forma que eles as compreendam. A dimensão *Conexão* compreende a integridade do conteúdo matemático na mente do professor e a sua gestão do discurso matemático na sala de aula. Inclui a coerência com que o professor apresenta os tópicos, com que faz as ligações entre os tópicos e entre tópicos e tarefas, numa mesma aula e entre as diversas aulas; e inclui a tomada de consciência sobre as exigências cognitivas que demandam os tópicos e as tarefas. Por fim, a dimensão *Contingência* contempla a capacidade do professor para dar respostas fundamentadas e bem-informadas a eventos imprevistos que ocorrem na sala de aula, como, por exemplo, os questionamentos dos alunos, as respostas ou ideias apresentadas pelos alunos diferentes daquelas que imaginou para um questionamento, atividade ou tarefa, a necessidade de mudar o desenvolvimento da aula em relação ao que fora planejado em função de dúvidas ou ideias que os alunos apresentam (Rowland, 2013).

A primeira dimensão do KQ indicia estar mais ligada ao conhecimento do conteúdo, enquanto as três seguintes ao conhecimento didático, pois se "concentram no conhecimento em ação, tanto no planeamento para ensinar como no ato de ensinar" (Rowland, 2013, p. 23). O KQ é um quadro conceitual particularmente adequado para a compreensão do contributo do conhecimento do professor para o ensino da Matemática (Rowland, 2013).

Outro modelo de referência sobre os conhecimentos necessários para ensinar, que também se apoia nas ideias de Shulman, é apresentado por Ponte (2012), que é designado por 'conhecimento didático'. Para este autor, o conhecimento profissional do professor de Matemática "se distingue do conhecimento acadêmico dos educadores matemáticos" (p. 86). Trata-se de um conhecimento que é específico de quem ensina matemática, orientado para a prática letiva, mas que se apoia em conhecimentos de natureza teórica e também de natureza social e experimental, como, por exemplo, o conhecimento sobre os alunos, sobre as dinâmicas de aula, sobre o contexto de ensino (Ponte, 2012). Para o autor, a base fundamental do conhecimento profissional é a experiência do professor e a reflexão sobre essa experiência, e a sua qualidade é aferida pela capacidade do professor em resolver problemas e pela adequação das soluções dos problemas aos recursos que dispõe. Dentre os diferentes aspetos do conhecimento profissional do professor de Matemática, o autor dá destaque ao *conhecimento didático*, porque é aquele orientado à atividade de ensinar e que integra as especificidades de cada disciplina da área de Matemática. O autor distingue quatro vertentes do conhecimento didático: (i) o conhecimento da Matemática; (ii) o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem; (iii) o conhecimento do currículo; e (iv) o conhecimento da prática letiva (Figura 6).

Figura 6. Vertentes do conhecimento didático (Ponte, 2012, p. 87).



A primeira vertente diz respeito ao conhecimento do conteúdo matemático da disciplina a ensinar. Não se trata apenas do conhecimento que o professor tem da 'matemática pura' da disciplina que ensina, mas das relações entre os conceitos dentro da própria disciplina e com outras disciplinas afins, das diferentes representações dos conceitos, das aplicações contextualizadas dos conceitos e da importância da disciplina na formação dos seus alunos. O conhecimento do conteúdo é importante para o professor saber quais aspetos deve priorizar no ensino da disciplina, como introduzir os tópicos e em que sequência os desenvolver, como estabelecer a conexão entre os tópicos da própria disciplina e com outras disciplinas, quais tarefas selecionar, como conduzir as atividades dos alunos e validar/refutar as respostas e argumentos que eles apresentam.

O conhecimento sobre os alunos e sobre os seus processos de aprendizagem corresponde ao conhecimento que o professor tem sobre as formas como os seus alunos aprendem, sobre as suas dificuldades, bem como ao conhecimento que tem dos alunos como pessoas, quais os seus interesses e motivações e como reagem a determinadas situações.

O conhecimento do currículo corresponde ao conhecimento do programa da disciplina, que inclui os objetivos da disciplina, o conteúdo programático, as formas de avaliação, os materiais didáticos. Este conhecimento é importante para o professor fazer a gestão curricular, por exemplo, saber o tempo que deve dedicar a cada conteúdo, definir o número de avaliações e em que momento devem ocorrer.

Por fim, o conhecimento da prática letiva, que corresponde à planificação das aulas (seleção dos tópicos, organização de situações didáticas e elaboração de tarefas que promovam o processo de aprendizagem), à concretização das aulas, à avaliação das aprendizagens dos alunos e à reflexão sobre o próprio ensino.

Ponte (2012) considera que o conhecimento da prática letiva é o núcleo central do conhecimento didático. É neste núcleo central, apoiado pelas outras vertentes, "que se fazem as opções fundamentais que orientam a prática e se regula todo o processo de ensino" (p. 88). Para o autor, as quatro vertentes estão interligadas e estão sempre presentes, de uma forma ou de outra, na prática letiva de um professor de Matemática.

Viseu (2009), tomando por referência diferentes autores (como por exemplo, Brown & Borko, 1992; Elbaz, 1983; Schön, 2000), aponta que o conhecimento didático do professor de Matemática é multifacetado, começando a ser adquirido durante a formação inicial, sob a influência das diferentes disciplinas que compõem a grade curricular do curso que está inserido, e é desenvolvido no desenrolar da sua atividade docente.

> Combinando o conhecimento teórico com a sua experiência de ensino e a análise que dela faz, o conhecimento didático do professor assume uma natureza prática. Trata-se de um conhecimento dinâmico, que o professor desenvolve com a experiência que acumula da sua prática docente ao interligar os diferentes conhecimentos – do conteúdo, aluno, currículo e processo de ensino-aprendizagem – na transformação do conteúdo matemático de forma a torna-lo compreensível aos alunos e na compreensão dos fenômenos ligados à sala de aula. Tal conhecimento ganha consistência e legitimidade quanto mais for interligado à teoria. (Viseu, 2009, p. 48)

A complexidade da prática de ensino faz com que o professor, com a cumulação da experiência, analise a sua própria prática, estabeleça e teste conjeturas, crie argumentos, teste e/ou crie novas estratégias ou abordagens de ensino, de modo a transformar os conteúdos para que os alunos os compreenda.

CAPÍTULO 3

TRABALHO COLABORATIVO

As constantes mudanças da sociedade contemporânea e, em consequência, o surgimento de novas problemáticas na educação, exigem esforços para que os professores modifiquem a sua prática de ensino de acordo com as novas demandas. Por outro lado, o isolamento profissional dos professores limita o seu acesso a novas ideias e às mudanças necessárias nas suas estratégias de ensino, o que faz com que se instale o conservadorismo e a resistência à inovação, o que se traduz em prejuízo nos processos de ensino e aprendizagem (Fullan & Hargreaves, 2001). O trabalho colaborativo entre professores apresenta-se como um 'caminho' para ultrapassar o isolamento e o individualismo que permeia a prática docente, conferindo apoio e recursos para lidar com os desafios que impõem as mudanças da sociedade atual (Fullan & Hargreaves, 2001). Tais mudanças, segundo Fiorentini (2004), "colocam em xeque as formas tradicionais de educação e desenvolvimento profissional e de produção de conhecimentos" (p. 72).

O conceito de colaboração tem diferentes interpretações dependendo do contexto que se insere. O simples facto de um grupo de pessoas estar atuando em conjunto não significa que estejam perante uma situação de colaboração (Boavida & Ponte, 2002). Para além disso, nem todas as formas de colaboração criam oportunidades de aprendizagem e promovem as mudanças educacionais necessárias, configurando-se como formas confortáveis de trabalho e/ou servindo para consolidar práticas já existentes (Fullan & Hargreaves, 2001; Hargreaves, 1998). Importa, assim, caracterizar os aspetos que constituem o trabalho colaborativo, dentre outras formas de trabalho coletivo; abordar possíveis modos de promover o trabalho colaborativo; apontar as potencialidades deste modo de trabalho na prática docente; referir os constrangimentos enfrentados no desenvolvimento de um trabalho colaborativo e os cuidados necessários a fim de o instituir e manter. Por fim, para além das considerações conceptuais em torno do trabalho colaborativo, este capítulo reporta a análise de alguns estudos envolvendo o trabalho colaborativo entre professores que ensinam Matemática, procurando evidenciar como se constitui esse trabalho, as suas potencialidades e os desafios enfrentados na sua concretização.

3.1. O que se entende por trabalho colaborativo?

De modo a iniciar a discussão sobre o que é o trabalho colaborativo, considere-se o significado do adjetivo 'colaborativo'. Este adjetivo assume diferentes significados em diferentes contextos e muitas vezes é entendido como um sinônimo de 'cooperativo'. De acordo com o Oxford Advanced Learner's Dictionary, colaborativo significa 'envolvendo, ou feito por várias pessoas ou grupos de pessoas trabalhando juntas', e cooperativo significa 'envolvendo fazer algo em conjunto ou trabalhar em conjunto com outros para um objetivo comum'. De forma geral, ambos os adjetivos estão associados à ideia de trabalhar em conjunto com outras pessoas. Entretanto, a essência da organização do trabalho conjunto quando as relações entre os participantes são de colaboração, assume características distintas quando comparada com as relações de cooperação (Alarcão & Canha, 2013; Boavida & Ponte, 2002; Ferreira, 2003; Fiorentini, 2004; Lima, 2002; Robutti et al., 2016). Como referem Robutti et al. (2016), a cooperação está associada ao desenvolvimento de tarefas por um grupo de indivíduos, com um plano bem definido e concreto, enquanto a colaboração está associada à experiência de um grupo de pessoas que trabalha em conjunto, num processo emergente marcado pela imprevisibilidade, que implica em negociações e tomada de decisões. Nessa mesma linha de ideias, Bednarz et al. (2012) consideram que a colaboração envolve as ideias de trabalhar junto profissionalmente e não apenas na resolução de um problema ou na realização de uma tarefa precisa, de "compartilhar os mesmos objetivos, contribuir para a prática investigada com diferentes perspetivas, experiências e conhecimentos profissionais e de abrir espaço para novas possibilidades" (p. 239).

Ao discutirem a diferença entre estas duas formas de trabalho coletivo, Fiorentini (2004) e Lima (2002) apontam, em síntese, que na cooperação os participantes trabalham juntos, porém as relações podem ser desiguais e até hierárquicas e há pouca autonomia para tomar decisões. Os objetivos nem sempre resultam de uma negociação conjunta no grupo e inclusive os participantes podem ter objetivos e planos de ação independentes. Em contraste, na colaboração a responsabilidade pelo trabalho é partilhada e todos colaboram numa base de relação não hierárquica, mas sim de ajuda mútua, procurando atingir objetivos negociados pelo grupo. Para Alarcão e Canha (2013), a corresponsabilidade pelo trabalho proporciona soluções ricas e eficazes sobre o processo de realização dos propósitos do grupo, além de desenvolver nos intervenientes um sentimento de pertença ao grupo, o que implica um maior envolvimento e comprometimento de cada um. Ferreira (2003) complementa que

> na colaboração, cada indivíduo participa da maioria das decisões: escolher a meta, definir as estratégias, avaliar o resultado; e o faz consciente de que é algo realmente importante para ele, algo que tanto beneficia o grupo como um todo, quanto a ele diretamente. (p. 82)

Pode-se dizer "que a colaboração representa mais do que uma mera cooperação" (Lima, 2002, p. 46), pois a quantidade de esforço, o gasto de recursos e o grau de compromisso exigidos dos participantes são maiores, uma vez que a cooperação envolve a ideia de trabalhar junto, porém com menor compromisso em relação aos objetivos comuns (Ferreira, 2003). Boavida e Ponte (2002) acrescentam que a colaboração exige maior dose de partilha e interação entre os participantes do que na cooperação, que se limita mais à realização conjunta de tarefas num plano de ação sobre o qual se tem pouco poder de decisão.

Roldão (2007), ao discutir a questão 'Que é o trabalho colaborativo?', defende que apenas a realização conjunta de tarefas por um grupo de pessoas não é o suficiente para caracterizar um trabalho colaborativo. Para a autora, o trabalho colaborativo "estrutura-se essencialmente como um processo de trabalho articulado e pensado em conjunto, que permite alcançar melhor os resultados visados, com base no enriquecimento trazido pela interação dinâmica de vários saberes específicos e de vários processos cognitivos em colaboração" (p. 27). A autora enfatiza que, para que o trabalho colaborativo seja bem sucedido, os participantes têm que estabelecer estrategicamente a finalidade que orienta as suas tarefas e organizar adequadamente todos os elementos de trabalho dentro do grupo para que permitam: (i) alcançar com mais sucesso os seus objetivos; (ii) ativar as potencialidades de cada participante para que todos se envolvam ativamente; e (iii) promover o desenvolvimento profissional de cada participante a partir da interação com todo o grupo.

Focando o trabalho colaborativo entre professores, contexto desta investigação, Robutti et al. (2016) referem que

> a colaboração implica o co-trabalho (trabalhando em conjunto) e também pode implicar co-aprendizagem (aprendizagem em conjunto). Envolve professores em atividades conjuntas, propósito comum, diálogo crítico e questionamento, e apoio mútuo na abordagem de questões que os desafiam profissionalmente. (...) envolve negociação cuidadosa, tomada de decisão conjunta, comunicação eficaz e aprendizagem mútua. (pp. 652-653)

sugerindo, assim, que os professores aprendem uns com os outros trabalhando em conjunto e que a aprendizagem colaborativa requer a intenção de trabalhar em conjunto em torno de um objetivo comum. Porém, o êxito do trabalho colaborativo depende de muita negociação de modo a atender as diferentes necessidades dos participantes na definição desse objetivo comum, numa ação que visa promover o diálogo profissional.

Hargreaves (1998), ao discutir o significado de colaboração, argumenta que nem todo trabalho coletivo representa uma situação de colaboração e nem todas as formas de colaboração representam uma oportunidade de aprendizagem, de reflexão crítica e crescimento mútuo e contínuo dos participantes. Para este autor, algumas relações de colaboração entre os professores podem ser problemáticas e improdutivas tanto para si como para os seus pares. Uma dessas conceções de colaboração, discutida pelo autor, é aquela que é 'confortável e complacente'. A colaboração muitas vezes assume formas mais confortáveis, e não se estende a um espaço mais individual do professor como a sala de aula, podendo deixar intactas as suas conceções sobre o seu ensino e não acarretar mudanças na sua prática (Hargreaves, 1998). Nessa mesma linha de pensamento, Day (2001) e Fullan e Hargreaves (2001) sublinham que nesta forma de colaboração, as atividades realizadas são mais confortáveis, como as conversas sobre o ensino, a exploração de ideias e recursos, a partilha de ideias e materiais, a troca de dicas e conselhos, porém o questionamento, o debate crítico e a reflexão sobre problemas enfrentados na prática de ensino, bem como as formas de a inovar, são mantidos fora da agenda.

Day (2001) defende que "as culturas de colaboração confortável preocupam-se primariamente com as questões imediatas, a curto prazo e práticas, excluindo uma reflexão sistemática e crítica" (p. 130). Trata-se de uma forma de colaboração cômoda e complacente, em que o professor se sente apoiado e compreendido, porém pouco desafiado profissionalmente. As culturas confortáveis ou complacentes correm o risco de reforçar as práticas existentes ao invés de as desafiar, indo na contramão das 'verdadeiras colaborações' (Hargreaves, 1998).

Fullan e Hargreaves (2001) advogam que instituir uma verdadeira colaboração nem sempre é fácil, e que muitas vezes envolve até certo desconforto. Reforçam a importância de formar uma base relacional sólida de diálogo, conforto, apoio mútuo e confiança para que os professores se sintam seguros para juntos enfrentarem tanto os problemas com a prática de ensino, como os desacordos e momentos de vulnerabilidade que possam surgir no grupo de trabalho. Na perspetiva destes autores, uma colaboração é eficaz quando "opera no mundo das ideias, analisando criticamente as práticas existentes, procurando melhores alternativas e trabalhando arduamente em conjunto, para introduzir aperfeiçoamentos e refletir sobre o seu valor" (p. 101).

Uma outra conceção de colaboração, que pode ser nociva, perdulária e improdutiva, é apresentada por Hargreaves (1998) – a colaboração conformista. O autor argumenta que com a colaboração pode haver a tendência para um pensamento dominante no grupo de trabalho, suprimindo algumas vozes e individualidades, bem como a criatividade que delas poderiam surgir. Na perspetiva do autor, a negociação e o diálogo são fatores que têm de estar a funcionar para impedir uma atitude conformista e improdutiva no seio do grupo.

Hargreaves (1998) alerta para outra perspetiva de colaboração que se pode tornar nociva aos professores, quando a colaboração se transforma em cooptação. Em tal perspetiva a colaboração é utilizada como estratégia administrativa ou política para mobilizar os professores na implementação de propósitos concebidos por outros (como, por exemplo, as reformas educativas), ao invés de se empenharem na concretização de propósitos de seu interesse. Tal forma de colaboração se torna questionável e até nociva aos professores, no caso de os propósitos caírem em falência ética ou envolverem circunstâncias ou atitudes suspeitas.

Muitas vezes, as formas mais evolutivas e espontâneas de colaboração são substituídas por formas mais controladas administrativamente, que Hargreaves (1998) chama de colegialidade artificial. Este autor procura fazer uma distinção entre as culturas docentes colaborativas ou colegiais e a colegialidade artificial. Para o autor, as relações de trabalho nas culturas colaborativas tendem a ser espontâneas, voluntárias, imprevisíveis, difundidas no tempo e no espaço e orientadas para o desenvolvimento. Isso quer dizer que as relações de trabalho num grupo autenticamente colaborativo resultam da iniciativa própria dos professores, da sua perceção de que trabalhar em conjunto é agradável e produtivo. Essas relações até podem ser facilitadas administrativamente, no caso, por exemplo, de liberação de carga horária para o trabalho, alocação de espaço físico para reuniões de trabalho em conjunto, mas não são coagidas nem reguladas administrativamente, elas evoluem a partir do próprio grupo de docentes envolvidos no processo de colaboração e são sustentadas por eles. O trabalho em conjunto tende a desenvolver-se em encontros informais e breves, porém frequentes, e não é definido no tempo e espaço de uma maneira regulada, mas desenrola-se de acordo com a vida profissional dos envolvidos. O trabalho no grupo é orientado para responder aos seus próprios propósitos e não os de agentes externos e os resultados tendem a ser imprevisíveis, visto que as ideias no grupo vão sendo construídas e amadurecidas a partir da contribuição de cada membro e da reflexão em conjunto.

Contrapondo, em situações de colegialidade artificial, Hargreaves (1998) refere que as relações de colaboração não são espontâneas, mas impostas administrativamente, exigindo que os professores trabalhem em conjunto para implementar as ideias de outros, como, por exemplo, de reitores, pró-reitores, diretores ou chefes de departamento. O trabalho conjunto se torna uma obrigação, pois ocorre, direta ou indiretamente, em função de promessas que os beneficiem ou ameaças, oferecendo pouca liberdade à individualidade dos professores. Há um controle sobre as finalidades e a regulação do tempo e lugar da concretização do trabalho conjunto, aumentando o grau de previsibilidade dos resultados. Como sublinha o autor, a colegialidade artificial substitui as formas espontâneas, imprevisíveis e difíceis de controlar por formas de colaboração previsíveis e controladas administrativamente. Como implicação da inflexibilidade da colegialidade artificial, pode ocorrer uma desmotivação dos professores para trabalharem com seus pares em torno dos seus interesses e em desenvolverem-se em interação entre si, em virtude dos esforços necessários e da sensação de improdutividade quando a colaboração é controlada. Exemplos de tal situação ocorrem quando os professores têm encontros regulares e obrigatórios mesmo quando não há nada a discutir, quando as relações entre os professores só existem durante as reuniões de trabalho ou quando os professores estão envolvidos em treino com pares, que não compreendem bem a problemática envolvida ou não conseguem trabalhar bem em conjunto. Nestes casos, a colaboração se torna ineficiente e dá a sensação de que é mais produtivo trabalhar sozinho.

Olhando por uma perspetiva positiva, a colegialidade artificial é uma forma de pôr os professores em contacto, podendo "ser útil como fase preliminar na preparação de relações colaborativas mais duradouras entre os professores" (Fullan & Hargreaves, 2001, p. 104). Estes autores advogam que as culturas colaborativas nas instituições de ensino "não emergem espontaneamente ou por si próprias" (p. 105), sendo necessário alguma intervenção ou orientação pelos gestores, de modo a apoiar, facilitar e criar oportunidades para o trabalho conjunto dos professores. Esta dinâmica precisa de tempo, paciência e competência para evoluir e se desenvolver. Segundo Fiorentini (2004), no início do trabalho conjunto é comum os grupos terem uma prática mais cooperativa do que colaborativa e, à medida que os integrantes se vão conhecendo, estabelecendo relações, aprendendo uns com os outros, produzindo resultados, vão adquirindo autonomia e "passam a autorregular-se e a fazer valer seus próprios interesses, tornando-se, assim, grupos efetivamente colaborativos" (p. 55). Entretanto, como mencionam Fullan e Hargreaves (2001), este é um caminho longo e difícil, inferindo que a construção de uma verdadeira colaboração pressupõe um efetivo desenvolvimento pessoal dos participantes.

3.2. Formas de promover o trabalho colaborativo

Na educação, a colaboração pode desenvolver-se em grupos constituídos de diversas formas, como, por exemplo, entre professores que lecionam uma mesma disciplina ou disciplinas afins, entre professores e/ou pesquisadores que participam de um mesmo projeto, entre professores e alunos, entre gestores e professores, dentre outras formas (Boavida & Ponte, 2002; Robutti et al., 2016). Os participantes de um grupo colaborativo podem ser, inclusive, oriundos de diferentes instituições. Boavida e Ponte (2002) argumentam que quanto mais diversificada for a equipe de trabalho, mais difícil é instituir e manter em funcionamento o trabalho com êxito, dadas as diferentes formações, convicções e estilos de trabalho de cada um. Uma vez ultrapassadas essas dificuldades, essa diversificação oferece a vantagem de múltiplos olhares sobre uma mesma situação educacional, permitindo, assim, esboçar quadros interpretativos mais abrangentes sobre a situação investigada (Boavida & Ponte, 2002).

Dentre os motivos que podem mobilizar os professores a fazer parte de um grupo colaborativo está a possibilidade de obter apoio dos seus pares para lidar com problemáticas da prática profissional, para inovar a prática de ensino, para trabalhar com diferentes abordagens pedagógicas, para enfrentar os desafios da inovação curricular, para integrar o uso de recursos tecnológicos em seu ensino, para o desenvolvimento de projetos de ensino ou projetos de pesquisa sobre a própria prática, para se desenvolver profissionalmente (Fiorentini, 2004; Robutti et al., 2016). Especificando a natureza da colaboração entre professores que se concretiza em Portugal, Ponte (2014) refere que muitas vezes ela decorre de um desafio lançado por um investigador, que propõe a formação de um grupo colaborativo, envolvendo elementos com diferentes competências e atividades profissionais, para estudar a solução de algum problema complexo. Noutros casos, surge como uma prática espontânea dos professores que começam a trabalhar em conjunto diante de alguma situação nova, como, por exemplo, a implementação de um novo currículo. De acordo com o autor, a colaboração também aparece como elemento importante nos processos de formação contínua de professores e de formação inicial (entre professores e alunos e entre os próprios alunos). No caso da formação inicial, o autor adverte que nem sempre a colaboração é duradoura e aprofundada, pois como o ensino é organizado em unidades curriculares, há muita rotatividade de intervenientes, o que dificulta que o trabalho tenha uma continuidade no tempo.

Referindo-se à colaboração entre professores, Fullan e Hargreaves (2001) destacam a sua importância para os ajudar a reduzir o sentimento de incerteza e impotência relativamente ao seu trabalho, aumentando o sentimento de eficácia. Assim, o desejo de trabalhar em conjunto com outros professores resulta da perceção de que sozinho é mais difícil de dar conta dos desafios profissionais (Fiorentini, 2004). Dessa forma, os professores se identificam para trabalhar uns com os outros pela possibilidade de compartilhar problemas, vivências e interesses comuns. Nessa identificação, não significa que não haja pontos de vista e compreensões diferentes entre os elementos do grupo sobre determinada situação, mas prevalece o desejo de compartilhar espontaneamente algo que seja de interesse comum (Fiorentini, 2004).

A colaboração pressupõe, como já foi referido, a participação voluntária e uma relação próxima entre os participantes (Boavida & Ponte, 2002; Fiorentini, 2004; Hargreaves, 1998). Dessa forma, um grupo colaborativo é constituído por pessoas que participam por vontade própria, sem serem coagidas ou cooptadas por alguém a participar, em busca do crescimento profissional, compartilhando confiança, respeito e apoio mútuo, criando e compartilhando significados sobre as atividades que realizam, tais como a partilha de materiais, a planificação de aulas, a definição de critérios e instrumentos de avaliação, bem como a troca de ideias sobre a concretização sobre as suas práticas na sala de aula e sobre as diferentes problemáticas que enfrentam.

Para Ponte et al. (2003), o sucesso do trabalho colaborativo depende muito de *objetivos comuns* em resposta às necessidades de todos os participantes. Para estes autores, um trabalho em colaboração pode ser desenvolvido em função das competências específicas de cada participante, mas também deve dar atenção à definição de objetivos comuns, partilhados por todos, e à definição de formas de trabalho que propiciem que todos se envolvam fortemente no desenvolvimento das tarefas delineadas. Como referem Boavida e Ponte (2002), os objetivos individuais (pessoais e profissionais) de cada participante sempre existem, podendo ou não ser partilhados por seus pares, e resultam das vivências de cada um. Importa a forma como são reconhecidos no seio do grupo. Pois é a existência dos objetivos comuns que define o campo e a forma de trabalho do grupo, enquanto são os objetivos individuais, explícitos ou implícitos, que definem como cada integrante se envolve no grupo (Martinho, 2011).

Goulet et al. (2003) alertam que de tempos em tempos é necessário rever o objetivo inicial da colaboração e se necessário renegociá-lo, de modo a manter os integrantes motivados e empenhados. Como referem as autoras, com a evolução do trabalho vão-se criando resultados que têm o potencial de alterar os entendimentos e as ações individuais e grupais. Com a revisão dos objetivos, o trabalho no grupo pode assumir um foco e uma direção mais claramente definidos. Como implicação, os relacionamentos podem crescer e se desenvolver; os participantes tendem a se comprometer mais com o trabalho dos outros; e novos resultados podem ser alcançados.

Para além dos objetivos comuns, um trabalho colaborativo depende muito das formas de trabalho e de relacionamento entre os participantes de modo a propiciar o trabalho conjunto (Boavida & Ponte, 2002). Para estes autores, a construção de relações de colaboração pressupõe pilares como *o diálogo*, *a confiança*, *a negociação* e a *mutualidade*.

O *diálogo* é um importante elemento para uma efetiva colaboração. O diálogo não só auxilia no processo reflexivo em grupo, como também individual (Goulet et al., 2003). Como explicam estas autoras, quando um indivíduo verbaliza as suas ideias e experiências aos outros, conversa com si mesmo também, o seu discurso o auxilia a encontrar pontos salientes das suas experiências e a organizar o seu pensamento reflexivo. Em colaboração, o trabalho de falar inclui, para cada interveniente, uma reflexão ponderada sobre as suas experiências e sobre as dos outros, e então a partir do confronto de ideias, conduz à reflexão conjunta e à construção de novos conhecimentos (Boavida & Ponte, 2002; Goulet et al., 2003).

Para Day (2001), o desenvolvimento da capacidade de reflexão conjunta é elemento essencial numa colaboração. Quando os professores reconstituem a sua experiência docente e a discutem com seus pares, há o confronto de pensamentos, levantam-se questões, identificam-se problemas e suas possíveis soluções, de modo que uns aprendem com os outros. A aprendizagem dos professores por meio da reflexão no contexto da colaboração acontece, segundo Robutti et al. (2016), quando refletem "sobre seu próprio ensino, sobre a aprendizagem dos alunos e sobre o ensino dos outros" (p. 679). Como indica Day (2001), num grupo em que há espaço para a reflexão conjunta, dificilmente a colaboração é confortável, visto que existem condições para problematizar a prática e elaborar estratégias de ação (Viseu, 2009).

A *confiança* é apontada na literatura como um dos aspetos mais importantes para que se construa uma relação de colaboração eficaz e significativa (Hargreaves, 1998). Boavida e Ponte (2002) apontam que precisa ser criada uma atmosfera de confiança em si mesmo e nos outros para que cada participante se sinta encorajado para expor e debater livremente e honestamente as ideias, valores e ações suas e dos outros, num clima de abertura, respeito e partilha, como o do trabalho colaborativo.

Associado à confiança está a abertura para ouvir o que o outro tem a dizer, à valorização das suas contribuições mesmo que não se concorde com elas, à valorização dos seus pontos fortes e da sua maneira de fazer as coisas, e o desenvolvimento de um sentimento de pertença ao grupo (Goulet et al., 2003; Martinho, 2011). Em suma, é num clima de cuidado e respeito por si mesmo, com o outro e com o grupo que a confiança entre os seus participantes se desenvolve.

No trabalho colaborativo, o cuidado com os outros e com o grupo inclui, dentre outras coisas, o cumprimento das tarefas acordadas, o comprometimento de cada um com o grupo esforçando-se pelo sucesso de todos, o reconhecimento dos contributos individuais e grupais e a preocupação com o outro tanto a nível profissional quanto pessoal (Martinho, 2011). Goulet et al. (2003) enfatizam que o cuidado com o grupo (interação humana) e o compromisso com o objetivo do trabalho conjunto, mesmo que este não seja claramente definido no início, pode contribuir para a vontade de continuar o trabalho no momento que surgirem dificuldades. Sugerem que de modo a manter os participantes do grupo focados, é importante estabelecer prazos para metas alcançáveis, pois "um resultado identificável é um importante fator motivador" (p. 331). Para essas autoras, um clima de cuidado estabelece a base de todo o trabalho colaborativo.

Como já foi mencionado, a confiança e a abertura estão correlacionadas. Goulet et al. (2003), ao discutirem o significado da *abertura* na colaboração, chamam a atenção para a importância da reflexão crítica como elemento essencial na colaboração.

> Abertura na colaboração significa que os parceiros estão prontos para refletir sobre sua própria prática, bem como sobre seus papéis no projeto e no processo colaborativo. (...) Abertura significa estar disposto a dar e receber *feedback* sobre as suas próprias posições e as dos outros no projeto colaborativo. Parceiros colaborativos se permitem ter suas ideias e ações questionadas. (p. 332)

No trabalho colaborativo deve haver espaço para todas as vozes. Cada participante deve ser responsável por desenvolver a sua própria voz e estar consciente do direito do outro de falar. A abertura para as "perspetivas de todos os parceiros de colaboração permite que o grupo mergulhe na experiência de cada membro do grupo, enriquecendo o conhecimento, as habilidades e a compreensão do grupo como um todo" (Goulet et al., 2003, p. 332).

A colaboração coloca desafios ao íntimo de cada participante, na forma como se vê a si mesmo e ao outro com quem se dispõe a colaborar – é preciso estar aberto para acolher os saberes e experiências de outros e para evoluir a partir da interação com eles e do questionamento das suas práticas e do seu próprio conhecimento, como elucidam Alarcão e Canha (2013):

> Colaboração exige vontade de realizar com outros. Implica, pois, confiança no outro, valorização dos seus saberes e experiências, acreditar que com ele é possível ir mais longe do que sozinho. E implica também humildade na valorização que fazemos do nosso próprio conhecimento e da nossa própria experiência, admitindo e desejando que eles se modifiquem e enriqueçam pelo encontro colaborativo. (p. 48)

É natural, que no início de um projeto colaborativo, os participantes se sintam inseguros. Ao expressarem seus sentimentos, inseguranças e dificuldades aos seus pares, recebem uma indicação do nível de confiança que podem esperar da colaboração. Neste caso, é importante o grupo estar atento para dar o suporte necessário para elevar as relações de confiança e autoconfiança. Pois, como alertam Goulet et al. (2003), a falta de confiança pode afetar a disposição dos participantes em compartilhar abertamente as suas ideias. Por outro lado, como referem as autoras, todos os participantes devem estar abertos a dar e receber ajuda uns dos outros.

Um outro elemento chave para uma colaboração bem-sucedida é a *negociação*. Boavida e Ponte (2002) apontam que em todas as fases do trabalho conjunto é preciso recorrer à negociação, desde a definição dos objetivos, das prioridades, dos modos de trabalho, dos modos de relacionamento, até a negociação dos significados dos conceitos utilizados.

A primeira tarefa no início do trabalho conjunto passa pela definição de como será entendida a colaboração (Fiorentini, 2004). Não é necessário, tampouco desejável, que um único pensamento domine no seio de trabalho num grupo colaborativo, pois a diversidade de ideias enriquece o trabalho.

Mas um entendimento comum sobre o conceito de colaboração, sobre *o como* e *o porquê* da colaboração e sobre o nível de colaboração que se quer atingir é determinante para o modo como se vive o trabalho no grupo, e sobre o interesse de trabalhar em conjunto sobre um determinado tema (Alarcão & Canha, 2013).

A finalidade do que o grupo pretende trabalhando juntos também deve resultar de um entendimento comum do grupo (Fiorentini, 2004). Este mesmo autor defende que a definição dos objetivos compartilhados depende da convergência de saberes e conceções dos participantes do grupo de trabalho conjunto. Ressalta também que a busca desse entendimento comum pode ser um pouco demorada, pois tem relação com a construção de um sentimento de pertença e de compromisso com o trabalho no grupo. Goulet et al. (2003) consideram que, à medida que o trabalho conjunto avança, a colaboração pode exigir um investimento de tempo e de energia intelectual e emocional além do imaginado, bem como o grupo pode ter novos entendimentos sobre a temática abordada. Assim, torna-se importante uma reavaliação do compromisso inicial assumido pelos participantes e uma renegociação de funções e responsabilidades. Não se trata de uma discussão da viabilidade do projeto em si, mas "uma negociação de papéis emergentes ou em evolução" (Goulet et al., 2003, p. 333).

Como a interação social é uma componente fundamental do trabalho colaborativo, não se deve estranhar se nele surgirem conflitos. Porém, "a proposta da colaboração não é evitar a crítica e o conflito, mas lidar com ambos respeitosamente e criticamente" (Goulet et al., 2003, p. 331). Assim, para os conflitos não se tornarem um impedimento para uma colaboração eficaz, é importante que desde o início haja uma negociação clara e honesta sobre o funcionamento do grupo e que se mantenha um clima de abertura e flexibilidade para rever os acordos pré-estabelecidos quando necessário (Fiorentini, 2004; Goulet et al., 2003). Goulet et al. (2003) argumentam que num trabalho colaborativo eficaz, os participantes procuram valorizar os pontos fortes nas ideias e ações uns dos outros e evoluir a partir deles ao invés de os destruir. O êxito ou fracasso de um trabalho colaborativo depende muito da forma como o grupo gere o conflito.

Boavida e Ponte (2002) destacam que por detrás de uma colaboração efetiva está um certo nível de *mutualidade* nas relações entre os participantes, em que "todos têm algo a dar e a receber no trabalho conjunto" (p. 6). Estes autores consideram que é complicado atribuir um caráter colaborativo a um grupo em que uns dão mais do que recebem ou vice-versa, ou nos casos em que há participantes que são apenas fornecedores de dados aos colegas. Explicam que não é necessária a igualdade absoluta nas relações – uma vez que pode haver diferenciação de papéis, devido, por exemplo, à formação dos participantes –, mas todos devem ter um papel reconhecido no grupo, sentirem-se confortáveis no papel a desempenhar e assumirem um mínimo de protagonismo nas ações grupais. Fiorentini (2004) também reforça essa ideia de que num grupo colaborativo todos os integrantes têm que assumir um mínimo de protagonismo, "como sujeitos que não apenas aprendem, mas também produzem conhecimentos e ensinam os outros" (p. 63).

Ponte e Serrazina (2003) destacam a importância da diferenciação de papéis no trabalho em equipe, no que diz respeito ao contributo que os membros, de acordo com sua especialidade, podem dar para alcançar com maior qualidade os objetivos traçados. Estes autores afirmam, em contraposição, que essa diferenciação pode gerar algum desconforto na equipe pelo *status* mais 'nobre' atribuído a alguns membros. Nesse caso, um desafio do trabalho em equipe é conseguir uma boa divisão de papéis, potenciadora da capacidade de cada um, permitindo assim que cada um reconheça no outro o papel fundamental que este exerce na equipe, evitando-se que se criem desigualdades de *status*. Como reforçam Alarcão e Canha (2013), o facto de diferentes elementos exercerem funções particulares, não implica hierarquia de poder sobre as tomadas de decisão sobre a atividade a realizar.

Ainda com relação à divisão de papéis entre os membros do grupo, é consenso na literatura que deve existir alguma liderança para que o trabalho no grupo não se perca pelo caminho. Fullan e Hargreaves (2001) defendem que o processo de colaboração "não emerge espontaneamente ou por si próprio" (p. 105), por isso exige orientação e intervenção por parte dos seus gestores. Trata-se de uma intervenção que "cria condições para que o grupo possa fazer as opções necessárias à condução da atividade e prossecução dos objetivos traçados; não lhes cabe fazer essas opções pelo grupo" (Alarcão & Canha, 2013, p. 47). Conforme os propósitos do grupo e as características dos seus membros, essa liderança pode assumir diversas formas: pode ser centrada numa única pessoa; pode ser partilhada por alguns de seus membros; ou por todo o grupo (Ponte & Serrazina, 2003). A rotatividade na liderança é apontada por Martinho (2011) como uma possibilidade para unir duas perspetivas: evitar que o grupo se disperse nas reuniões ou no trabalho como um todo e para aumentar o envolvimento dos participantes.

3.3. Potencialidades e constrangimentos do trabalho colaborativo

Pesquisas realizadas *sobre* e *com* professores evidenciam que o trabalho colaborativo representa um contexto altamente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor (Boavida & Ponte, 2002). Como apontam estes autores, quando um grupo de professores trabalha em conjunto em torno de um objetivo comum, reúnem-se mais recursos e competências, implicando uma maior determinação em agir para realizar as tarefas e uma maior segurança para promover as mudanças e inovações da prática. Para além disso, a interação, o diálogo e a reflexão em conjunto aumentam as possibilidades de aprendizagem mútua e criam melhores condições para o grupo lidar com os problemas comuns, que seriam difíceis de resolver de forma individual. Corroborando com esta perspetiva, Damiani (2008) considera que "o trabalho colaborativo entre professores apresenta potencial para enriquecer sua maneira de pensar, agir e resolver problemas, criando possibilidades de sucesso à difícil tarefa pedagógica" (p. 218). Na dinamização deste processo, Souza Jr. (2000) destaca o trabalho coletivo como espaço privilegiado para o trabalho entre pares e para a reflexão sobre a sua prática pedagógica.

> O trabalho coletivo é um espaço privilegiado para o processo de reflexão dos professores, o diálogo entre eles é fundamental para a criação e consolidação de seus saberes profissionais e serve também para romper muitas vezes o isolamento existente entre eles. Pensamos que o trabalho coletivo possibilita a criação ou consolidação de um espaço de busca de autonomia e de emancipação coletiva dos professores. (Souza Jr., 2000, p. 287)

No entanto, a prática dos professores ainda é marcada por uma postura individualista e conservadora, o que favorece um ambiente propício à falta de comunicação e diálogo entre professores. A colaboração ajuda o professor a sair desse isolamento, pois pode contar com os colegas para discutir sobre problemas e obstáculos que o afligem, para trocar ideias e partilhar experiências, para preparar aulas e tarefas em conjunto e discutir sobre elas. Esta relação com seus pares "aumenta a confiança, desenvolve competências e ajuda a enfrentar com mais segurança as incertezas e os riscos" (Silva, 2011).

Damiani (2008) salienta que, ao valorizar o trabalho colaborativo, não se nega a importância da individualidade na docência, mas sim defende-se que as atividades sejam tanto coletivas como individuais, entendendo que uma sem a outra limita o potencial de trabalho dos professores. Roldão (2007) esclarece que trabalhar colaborativamente não significa trabalhar sempre coletivamente: "Trabalhar colaborativamente implica que cada indivíduo tenha um contributo a dar que tem de ter o seu processo de construção individual e singular, que requer também tempos e modos de trabalho individuais" (p. 28). A própria execução de tarefas ou a construção de ideias, necessitam de um momento individual de estudo, reflexão e de preparação de cada membro do grupo, para então haver um amadurecimento ou aprofundamento a partir da interação com os saberes e os pontos de vista dos outros num momento coletivo no grupo de trabalho.

Os benefícios do trabalho colaborativo incidem diretamente sobre os seus intervenientes e consequentemente sobre os seus alunos e as instituições de ensino envolvidas. Instituir um trabalho verdadeiramente colaborativo não é tarefa fácil, mas é uma forma de trabalho que tem grande probabilidade de ser significativa, sendo apontada na literatura como solução para muitos problemas e dificuldades enfrentados na educação (Boavida & Ponte, 2002; Fullan & Hargreaves, 2001; Hargreaves, 1998). Nesse viés, da colaboração como solução para problemas educativos, Hargreaves (1998) apresenta doze princípios que incidem sobre as vantagens da colaboração, dos quais se destacam aqueles que se enquadram no contexto em que esta investigação é realizada:

- *Apoio moral*. Trabalhando em colaboração, os professores têm uma maior determinação em agir em prol da mudança, e recebem o apoio uns dos outros para superar tanto os desafios que toda mudança exige, como as frustrações que a acompanham, principalmente no estágio inicial.
- *Eficácia melhorada*. Em colaboração, os professores se sentem confiantes para correr riscos e testar novas estratégias de ensino, impactando na qualidade do seu ensino e consequentemente na aprendizagem dos alunos. Esse feedback positivo na aprendizagem dos alunos desperta o sentimento de eficácia sobre a sua prática e de autoconfiança para prosseguir com a mudança.
- *Sobrecarga de trabalho reduzida*. O trabalho colaborativo exige trabalho intenso dos seus intervenientes para que as mudanças em suas práticas de ensino ocorram. Porém, uma das características da colaboração é a partilha tanto de ideias e problemas, como de trabalho, por exemplo, na construção das estratégias de ensino e de materiais didáticos. Com essa partilha, esse trabalho intenso e a própria pressão pela mudança são divididos.
- *Certeza situada*. A colaboração reduz a insegurança e o sentimento de culpa, que são tão presentes quando o professor trabalha sozinho, implicando no aumento da confiança profissional coletiva. Essa confiança coletiva é importante para romper com as falsas certezas científicas, relativas por exemplo, à eficácia de determinadas metodologias de ensino, e substituí-las pelas certezas oriundas da reflexão sobre as experiências concretas dos professores.
- *Capacidade de reflexão acrescida*. Ao trabalhar em colaboração o professor tem a oportunidade de dialogar com seus pares na e sobre a ação. Ao conversar com seus pares, o professor obtém feedback sobre as suas ações e pode realizar comparações com as ações dos outros bem como se espelhar nelas, incitando assim tanto o seu poder de reflexão individual quanto a reflexão coletiva do grupo.
- *Oportunidades de aprendizagem*. A partilha, a troca de ideias, informações e conhecimentos e a reflexão promovidas pelo trabalho em colaboração é uma fonte de aprendizagem tanto a nível profissional como das relações humanas.
- *Aperfeiçoamento contínuo*. As oportunidades de aprendizagem promovidas pela colaboração despertam nos professores o sentido de querer sempre mais, de estarem sendo desafiados continuamente a melhorar a sua prática de ensino, a encontrarem as soluções para os problemas educativos emergentes, numa sociedade que está em constante mudança.

Relativamente às oportunidades de aprendizagem dos professores de Matemática que trabalham em colaboração, o *survey* realizado por Robutti et al. (2016), a propósito do ICME 13, aponta algumas possibilidades: (i) Aprendizagem acerca da participação de um grupo colaborativo — ao longo do tempo os professores aprendem a ouvir e a valorizar as opiniões dos outros; manifestam evolução nas formas como colaboram com o grupo, prestando ajuda e assistência ao trabalho conjunto; (ii) Aprendizagem por meio da reflexão sobre as suas próprias práticas e sobre as práticas dos outros com quem colaboram; (iii) Aprendizagem sobre tópicos de Matemática ou aprofundamento do conhecimento matemático e aprendizagem sobre como ensinar os tópicos; (iv) Aumento da confiança para experimentar novas abordagens e metodologias de ensino, que derivam tanto da segurança por ter o apoio do grupo como da segurança adquirida em relação ao conhecimento matemático; (v) Aprendizagem acerca da importância de compreender o pensamento matemático dos seus alunos e de desenvolver uma consciência sobre as suas necessidades. Para além das aprendizagens dos professores, os autores referem o impacto positivo do trabalho colaborativo ao nível da prática de ensino, indiciando que ao planificar as aulas em conjunto melhora a sua qualidade, pela riqueza das tarefas que são elaboradas e pela mudança da interação com os alunos (professor sendo mais questionador e fazendo menos o trabalho pelos alunos).

Importa ressaltar que as aprendizagens num trabalho colaborativo não são iguais para todos os professores envolvidos, que derivam das vivências, dos propósitos, das necessidades e interesses de cada um, sendo estes os aspetos que vão determinar o *quê* e o *quanto* cada um aprende, tanto sobre o problema em questão, como sobre si mesmo, sobre os outros e sobre as relações humanas (Boavida & Ponte, 2002; Martinho, 2011). A reflexão é sublinhada na literatura como um processo pelo qual os professores se desenvolvem profissionalmente. Robutti et al. (2016), a partir dos estudos que analisaram, referem que os professores aprendem refletindo sobre o seu próprio ensino, sobre a aprendizagem dos alunos e sobre o ensino dos seus pares. Para Martinho (2011), quando o professor consegue descrever a sua prática, justificar porque a faz daquele jeito e confrontá-la abertamente e criticamente com a informação que adquire e com a prática de seus pares, consegue mais facilmente encaminhar as mudanças que julga necessárias. A autora faz ressalvas de que num grupo verdadeiramente colaborativo, tais mudanças não são impostas pelos demais integrantes, porém as discussões e os desafios colocados no grupo por seus pares podem levar o professor a identificar outras necessidades e perspetivas para a sua prática.

Ainda se referindo à forma como os professores aprendem, os estudos analisados por Robutti et al. (2016) apontam que eles aprendem por meio de discussões e conversas sobre as suas ideias e experiências, pelo confronto de opiniões e pela análise sobre as conceções, estratégias e erros dos alunos, criando as suas novas ideias e perspetivas, e também assistindo às aulas de seus pares.

A colaboração e o aperfeiçoamento contínuo são apontados na literatura como fundamentais para reduzir as incertezas dos professores e como estratégia para promover o seu *desenvolvimento profissional.* Os aspetos focados neste texto como a aprendizagem, a partilha e a reflexão são fatores promotores do desenvolvimento profissional docente.

Como já foi referido, muitos professores, devido à demanda de trabalho ou à falta de uma cultura de colaboração, não têm oportunidade para momentos de reflexão sobre a sua prática de ensino. Tal situação pode gerar ações dissociadas da tomada de consciência (Ciríaco et al., 2017). Neste contexto, ao integrar um grupo colaborativo, os professores têm a oportunidade de sair do isolamento e serem "protagonistas do seu desenvolvimento profissional e dos colegas, na medida que suas experiências de vida e de formação contribuem com a prática dos demais participantes" (Ciríaco et al., 2017, p. 4). Têm também a possibilidade de resgatar valores "como o compartilhamento e a solidariedade – que se foram perdendo ao longo do caminho trilhado por nossa sociedade, extremamente competitiva e individualista" (Damiani, 2008, p. 225).

O desenvolvimento profissional é um processo que decorre ao longo da atividade profissional, não-linear, variável do tempo, que deriva das experiências de ensino e da aprendizagem matemática dos indivíduos, enquanto estudantes e enquanto professores, tanto na formação inicial como na formação contínua (Ferreira & Miorim, 2011). Porém, não se relaciona apenas ao que se passa na sala de aula. É um processo que considera o professor como um todo, nos seus aspetos cognitivos, afetivos e relacionais (Ponte, 2014). Reflete as relações que estabelece com o seu exterior, a partilha de ideias e experiências com seus pares, a sua personalidade, a sua motivação para mudar, a pressão que enfrenta da sociedade, as suas crenças, valores e objetivos (Ferreira & Miorim, 2011). Para Forte e Flores (2012), o desenvolvimento profissional inclui as aprendizagens pessoais, que têm origem na própria experiência, as oportunidades informais vividas no contexto profissional e as oportunidades de aprendizagem formais, como as disponíveis em atividades de formação contínua.

Para Ponte (2005a), o desenvolvimento profissional do professor é a articulação entre os níveis pessoal e coletivo. Por um lado, o professor é o principal agente do seu processo de crescimento, cabendo a si fazer investimentos na sua profissão, fazer balanços sobre a sua carreira, refletir sobre a sua prática, enfrentar e procurar soluções para as situações que o incomodam. Por outro lado, os contextos colaborativos (formais ou informais) têm um papel promissor para aqueles que os integram, pela oportunidade de interagir e aprender com os outros, de se sentir apoiado para correr riscos e vivenciar novas experiências de ensino, compartilhando acertos e discutindo sobre o que não deu certo e precisa ser melhorado, e assim desenvolver em conjunto novas competências.

Em suma, o desenvolvimento profissional docente tem grande relevância no que concerne às questões relativas à melhoria do ensino e consequentemente da aprendizagem dos alunos. Nesse viés, os contextos colaborativos têm um papel promissor, uma vez que proporcionam o rompimento do isolamento dos professores e a criação de oportunidades de aprendizagem profissional, potenciando relações, conhecimentos e competências (Ciríaco et al., 2017; Silva et al., 2017).

Conjuntamente com as potencialidades especificadas, encontram-se uma série de dificuldades para desenvolver um trabalho colaborativo. Alonso-Sáez et al. (2019) apontam que toda a mudança necessita de recursos e reconhecimento por parte das instituições envolvidas, e sempre provoca resistência e incertezas na identidade docente na hora de dar novos passos.

> A dificuldade mais evidente é que, a forma como os professores trabalham e compreendem a profissão docente há décadas, não podemos mudá-la de um dia para o outro: a inércia é inevitável e a comparação – por vezes questionadora – com o que se perde com esta nova forma de fazer, pode surgir como um obstáculo. (Alonso-Sáez et al., 2019, p. 7)

Este é um exemplo dos professores que conversam sobre a prática docente, mas não partilham experiências de modo a atravessar as fronteiras da sala de aula, o que sugere que o trabalho isolado muitas vezes acontece sob o pretexto de não interferir na autonomia docente (Pereira et al., 2021).

Há uma série de outras dificuldades tanto para instituir como para manter o trabalho colaborativo, que se relacionam com o esforço que essa nova maneira de trabalhar exige e as tensões que surgem acerca da constituição dos grupos. Tais dificuldades incidem sobre a negociação na definição de objetivos, a definição de caminhos a seguir, a construção e a manutenção das relações de confiança entre os participantes, a competitividade entre os participantes, os conflitos de ideias, diferenças de personalidade, a identificação de novas necessidades tanto dos participantes como de novos rumos para o trabalho, dentre outras. Como referem Fullan e Hargreaves (2001), desenvolver um trabalho colaborativo eficaz é um caminho longo e difícil, que exige tempo, paciência, cuidado, sensibilidade e competência para evoluir.

Boavida e Ponte (2002) relacionam quatro aspetos que são importantes cuidar no desenvolvimento de um trabalho colaborativo afim de não o tornar vulnerável: (i) Lidar com a imprevisibilidade; (ii) Gerir a diferença; (iii) Gerir custos e benefícios; e (iv) Estar atento à autossatisfação confortável.

Lidar com a imprevisibilidade. Não se consegue prever tudo o que pode acontecer do início ao fim do desenvolvimento de um trabalho colaborativo, sendo muitas vezes necessário, para a continuidade do trabalho, redefinir objetivos, redefinir papéis dos intervenientes, definir novos rumos, dentre outras coisas.

Gerir a diferença. Na concretização de um trabalho colaborativo nem todos os intervenientes têm o mesmo entendimento e opinião sobre as coisas, o mesmo ritmo de trabalho, as mesmas habilidades e as mesma necessidades. Para além dos objetivos comuns também existem os seus objetivos individuais, existem as suas prioridades pessoais, muitas vezes existem dificuldades em se conseguir uma agenda comum ou em se cumprir tarefas acordadas por conta das atividades profissionais ou pessoais de cada um, dentre outras dificuldades. Para que o grupo funcione bem é importante que os participantes aprendam a lidar com essas diferenças, a partir do diálogo, da tolerância e da confiança.

Gerir custos e benefícios. Todo trabalho em grupo exige dedicação, esforço para cumprir tarefas acordadas, lidar muitas vezes com a incompreensão dos colegas, estar aberto à negociação e ao diálogo, ou seja, envolve uma série de custos para cada participante. Se a relação entre os custos e os benefícios para cada participante for muito desequilibrada, é importante reavaliá-la, renegociar o papel que cada um ocupa no grupo, para que cada um sinta que a sua participação vale a pena tanto pelos benefícios que retira, como pelo quanto contribui com o grupo.

Estar atento à autossatisfação confortável e complacente e ao conformismo. É preciso tomar cuidado para que o trabalho no grupo não sirva apenas para reforçar práticas já existentes ou reforçar as ideias dominantes de alguns participantes, conduzindo a um cenário de complacência e conformismo e inibindo a individualidade e a criatividade. Como inferem os autores, "a colaboração não é um fim em si mesma, mas sim um meio para atingir certos objetivos" (Boavida & Ponte, 2002, p.3), o que significa que os participantes numa situação de colaboração se devem sentir desafiados, se sentir saindo da sua zona de conforto.

Em adição a estes aspetos que importa ter em conta no desenvolvimento de um trabalho colaborativo, Martinho (2011) acrescenta outros, que se destacam no que se diferenciam em relação ao que já foi mencionado:

Instituir e manter. O estabelecimento de relações de trabalho pode já trazer no início alguns obstáculos, como a problematização dos papéis e responsabilidades, das opções a tomar; os professores têm diferentes conceções sobre o ensino e sobre o currículo, têm diferentes métodos de trabalho, diferentes prioridades; os professores podem se sentir inibidos a falar. É importante a manutenção das relações a longo prazo. Para tal, é importante o grupo criar momentos para que todos participem e para que todas as vozes sejam ouvidas; todo o trabalho deve ser recheado de negociações, desde a forma de trabalho, a periodicidade, horário e coordenação das reuniões, o tipo de tarefas a realizar, quais conteúdos serão priorizados nas planificações. É importante manter uma boa relação de trabalho, mas a fazer com exigência, procurando um equilíbrio entre o que é agradável e simultaneamente eficiente.

Gerir emoções. No trabalho em grupo e particularmente quando o foco é a reflexão sobre a prática, há a exposição do professor diante dos seus pares. São abertas as suas aulas, o seu modo de trabalho, as suas dificuldades, as suas limitações, as suas dúvidas; a sua prática pode ser colocada em 'xeque'. Nem sempre é fácil fazer essa abertura, muito menos ouvir opiniões desfavoráveis. Inclusive, ao comparar a sua prática com a do colega, pode gerar ao professor conflitos, mesmo que não sejam externados ao grupo. Para além disso, pode haver o receio sobre o que os outros esperam sobre a sua prática de ensino e sobre a sua atuação no grupo. O receio da opinião dos outros e o sentimento de que a sua identidade acadêmica é questionada pode reduzir a participação do professor no grupo. A autora coloca que "a própria ideia da mudança é ameaçadora" (p. 99), uma vez que o professor precisa se distanciar daquelas aulas para as quais já tem material didático preparado e experimentar algo novo. A mudança da prática de ensino pode-se traduzir num processo que exige um tempo, uma dedicação e um gasto de energia que o professor pode não estar disposto ou preparado emocionalmente para despender. Por isso, é importante que o grupo consiga gerir as emoções e criar um ambiente em que todos se sintam seguros de modo a não ver o grupo como uma ameaça à sua prática, mas como uma oportunidade de aprendizagem e evolução. A autora adverte que é necessário o grupo ter a consciência que todos podem cometer erros, como, por exemplo, erro no entendimento de um conceito ou na interpretação de um problema matemático. A reflexão sobre o erro pode contribuir com o processo de aprendizagem tanto dos próprios professores como no entendimento sobre os erros que os alunos cometem. Para além do erro, a autora coloca que é necessário gerir no grupo os momentos de dúvidas e incertezas que permeiam as atividades realizadas no grupo. Ao escolher um caminho, por exemplo, na abordagem de um tópico matemático, este deve ser seguido e assumido pelo grupo. O caminho pode não ter sido a melhor escolha, importa a reflexão sobre a atividade realizada, sobre as suas potencialidades, sobre o que foi alcançado e sobre o que pode ser melhorado.

Corroborando com o que vem sendo discutido, Alonso-Sáez et al. (2019) consideram que a gestão das relações humanas é um aspeto central na gestão dos grupos colaborativos:

> As equipes são baseadas em relações humanas e emoções recíprocas, o que enriquece o aprendizado, mas também acarreta estresse, ansiedade e, às vezes, afastamento do professor. Esse contexto relacional, ao invés de alcançar maior abertura e participação, pode gerar desconfiança e distanciamento do projeto formativo. (p. 7)

Portanto, a agenda de ação dos grupos precisa incluir mecanismos que apoiem o cuidado às pessoas e ao processo, de modo a evitar o desgaste das relações.

Como já mencionado, há uma série de dificuldades associadas ao esforço que exige o trabalho colaborativo. Há muitas reuniões, é necessário estudar, pesquisar, cumprir com as tarefas que são acordadas para resolver fora das reuniões do grupo, podendo implicar em mudanças inclusive na própria rotina pessoal, como abandono de atividades confortáveis para si. Tudo isso pode gerar um sentimento de desconforto e sobrecarga de trabalho e tempo dedicado (Alonso-Sáez et al., 2019; Silva, 2011). Por isso é importante que os benefícios do trabalho que cada professor realiza num ambiente de trabalho colaborativo sejam bem reconhecidos, para não inibir a sua disponibilidade em colaborar com os seus pares.

A partir da análise de uma série de estudos, Robutti et al. (2016) destacam outros três fatores que podem inibir as colaborações eficazes, que se relacionam:

(i) à falta de propriedade dos professores sobre a colaboração. Os professores podem ter dificuldade de integrar uma cultura colaborativa se sentirem que suas necessidades e interesses não são levados em consideração pelo grupo de trabalho e se não houver uma consciência de que cada um é responsável pelo processo de colaboração. A falta de confiança para expressar seus pontos de vista e a tensão entre suas formas isoladas de trabalho e as formas de trabalho colaborativo, também são fatores que contribuem para a falta de propriedade dos professores;
(ii) ao tempo que os professores têm disponível para trabalhar juntos. Existem dois aspetos em relação ao tempo; o primeiro é encontrar tempo na sua atividade profissional para se envolver num grupo de trabalho colaborativo, pois a colaboração pressupõe que os professores se reúnam para discutir, planificar e refletir. Para além das reuniões de trabalho conjunto é necessário tempo para se dedicar às tarefas acordadas no grupo. O segundo aspeto é o tempo de vigência do projeto colaborativo, pois muitos professores não estão familiarizados com as relações de colegialidade e precisam de um tempo para se adaptarem a essa forma de trabalho. É preciso um tempo para que os professores sintam confiança uns nos outros, desenvolvam a sua capacidade de comunicação, aprendam a trabalhar colaborativamente, desenvolvam a sua capacidade de reflexão, e consigam desenvolver um trabalho que realmente seja produtivo;
(iii) às restrições institucionais além do tempo, como currículo e estruturas de avaliação. As restrições do sistema educacional por vezes podem entrar em tensão com a forma de trabalho e os objetivos estabelecidos no projeto colaborativo.

Há outro aspeto em relação ao tempo que é a sua gestão. Os professores podem dispor de tempo para trabalharem em conjunto, mas utilizá-lo com questões fora do propósito do trabalho que estão a realizar. Para que o trabalho seja produtivo, o grupo precisa de gerir o tempo estipulado para não se dispersar constantemente do assunto em discussão. No entanto, as fugas ao assunto podem ser necessárias quando algum professor, por exemplo, precisa discutir alguma problemática com o grupo.

Como ressalta Martinho (2011), a gestão do tempo e o processo de dar voz e ouvir os participantes são aspetos essenciais para estabelecer boas relações de trabalho.

3.4. Análise de estudos sobre trabalho colaborativo entre professores

Esta secção debruça-se sobre a revisão de alguns estudos envolvendo o trabalho colaborativo entre professores que ensinam Matemática. Para cada estudo, procura-se descrever os objetivos, os participantes e o seu papel no trabalho em colaboração, os métodos de pesquisa, os principais resultados e conclusões.

Um desses estudos foi realizado por Traldi Júnior (2006) num grupo de professores que ensinam Matemática no Ensino Superior. O autor investigou as possibilidades de se construir um grupo de trabalho colaborativo a partir de um grupo de trabalho coletivo formado por sete professores de um curso de Licenciatura de Matemática, com o objetivo de discutir a área de conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral de tal curso. O tipo de pesquisa, quanto aos procedimentos metodológicos, foi classificado como um estudo de caso e os dados foram recolhidos a partir da observação participante dos encontros realizados pelo grupo, gravações em vídeo dos encontros, entrevistas e análise de documentos (regimento da instituição, plano político pedagógico do curso, planos de ensino e currículo dos professores). O autor evidencia alguns momentos que marcaram o processo de transição do grupo coletivo para o grupo colaborativo: (i) os primeiros encontros que eram mais marcados por um clima de competição entre os professores com formação em Matemática e os com formação em Educação Matemática, foram dando lugar ao reconhecimento mútuo de habilidades didáticas e conhecimentos específicos do conteúdo. As divergências foram resolvidas por meio de negociações entre os participantes, o que fez emergir o poder de argumentação e fundamentação de pontos de vista e o poder de compreensão do ponto de vista do outro; (ii) um ambiente de confiança começou a se estabelecer no grupo quando um dos participantes (no terceiro encontro) se sentiu à vontade para expor ao grupo uma dúvida sobre o conceito de limite, abrindo o caminho para um ambiente de cooperação na procura de compreender e esclarecer as dúvidas que surgiam, e começou a ser estabelecido um ambiente de crescimento conjunto tanto em relação a conhecimentos específicos do conteúdo que lhes faltavam como em relação aos aspetos didáticos; (iii) a partir de um certo momento houve um 'esvaziamento' das discussões e foi necessário uma mudança de rumo, como um aprofundamento teórico.

O autor destaca como dificuldades que podem ter limitado um melhor funcionamento do grupo, a falta de prática do grupo na organização das pautas das reuniões de trabalho, o excesso de discussões pautadas mais em opiniões pessoais do que em investigações já realizadas ou em teorias, o excesso de expectativa para encontrar soluções mágicas para os problemas da prática de ensino, o pouco conhecimento de que a reflexão sobre a prática pode ser um caminho para o desenvolvimento profissional e a falta de hábito de pesquisar a própria prática. Como fatores que contribuíram para a transição do trabalho coletivo para o colaborativo, o autor evidencia: a existência de objetivos comuns entre os membros do grupo; a necessidade da troca de experiências e discussão sobre os conhecimentos didáticos e os específicos da área; desenvolvimento de um clima de confiança no grupo e estabelecimento de um contexto de apoio para fazer algumas mudanças curriculares.

Considerando a formação de professores iniciantes na docência, o trabalho colaborativo apresenta-se como uma possibilidade de os ajudar a partir das suas vivências na carreira, a amenizarem as suas dificuldades no processo de aprender a ensinar. Com esse propósito, Ciríaco et al. (2017) analisaram as contribuições da constituição de um grupo colaborativo com cinco professoras em início de carreira e com formações distintas (quatro pedagogas e uma professora de Matemática), na superação das dificuldades encontradas no ensino de Matemática. Dentre as cinco professoras, uma atuava na educação infantil e as demais no ensino fundamental, e todas estavam alocadas em escolas distintas entre si, sendo que a mais experiente tinha três anos de docência. Nesse contexto, os autores buscaram compreender as possíveis contribuições que as interações entre professoras com formações distintas, poderiam oferecer para o processo de aprendizagem na docência durante os primeiros anos de profissão, a partir da prática de colaboração.

O trabalho no grupo desenvolveu-se durante dois anos, sendo realizados encontros quinzenais nos primeiros seis meses e mensais no período restante. Nos encontros, o pesquisador (um dos autores do artigo) e as professoras discutiam/refletiam sobre problemas vivenciados no ensino de Matemática tendo como base os conteúdos abordados em cada turma de atuação das professoras. A dinâmica de trabalho no grupo envolvia ciclos com as seguintes fases: identificação de problemas da prática docente no ensino dos conteúdos matemáticos; reflexão e busca de medidas coletivas para solução dos problemas; implementação e validação de algumas das ações coletivas nas turmas em que as professoras atuavam e a reflexão sobre a ação (Ciríaco et al., 2017).

A análise realizada pelos autores mostra que inicialmente as professoras pensavam que o grupo seria um espaço de formação em Matemática e que elas ficariam na 'plateia'. Os autores evidenciam que o grupo se tornou um espaço colaborativo a partir do momento que as professoras, com formações distintas, perceberam que seriam agentes do seu próprio processo formativo, tornando-se mais autônomas e reflexivas na sua atuação e sentindo-se confiantes para "expressarem de forma espontânea seus sentimentos e as formas de pensamento em relação às críticas e possibilidades de transformação da prática pedagógica” (p. 105). Atendendo às características da colaboração, os autores destacam alguns aspetos presentes no grupo: (1) a organização das atividades visando objetivos comuns, inicialmente focando nas necessidades formativas das integrantes e posteriormente, atendendo o planeamento das temáticas que estavam a abordar em suas aulas; (2) a confiança e o respeito mútuo, evidenciados pela mudança de conceção de três participantes do grupo ao afirmarem que “aprenderam coisas nunca antes compreendidas com a troca de ideias, o ato de “ouvir” o outro se tornou mais significativo para a prática individual e que as dificuldades tornaram-se um problema para grupo e não mais um obstáculo pessoal” (p. 106); (3) a reciprocidade na aprendizagem, uma vez que a interação entre a professora de Matemática e as pedagogas desencadeou um processo de contribuição em relação ao conhecimento matemático e ao conhecimento pedagógico do grupo.

Dentre as implicações do trabalho colaborativo na prática das professoras, os autores evidenciam o caso da professora de Matemática que incorporou na sua prática uma visão mais exploratória e investigativa do ensino, uma vez que passou a compreender mais o lado dos seus alunos e apoiá-los na superação das suas dificuldades, procurando novas formas de abordagem dos conteúdos (como exemplo, passou a contextualizar a introdução dos conteúdos com os alunos, o que permitiu um espaço para o diálogo nas aulas de Matemática), o que não acontecia antes da interação no grupo. Por outro lado, no caso das pedagogas, tal interação contribuiu para os processos de aquisição do conhecimento matemático e de aprender a ensinar Matemática. Por fim, os autores concluem que os processos de interação, socialização e reflexão proporcionados pelo espaço coletivo contribuiu para a superação de dificuldades e para o processo de aprender a ensinar Matemática das professoras iniciantes na carreira.

Em contexto semelhante ao do estudo anteriormente apresentado, Gama (2007) realizou uma pesquisa com o objetivo de analisar, compreender e descrever o processo de iniciação à docência e de desenvolvimento profissional, quando o recém-formado em Matemática participa em grupos colaborativos. A investigadora organizou três grupos de estudos com professores iniciantes e para aprofundar a análise selecionou três professores, um de casa grupo. A pesquisa segue uma natureza qualitativa e interpretativa dos dados oriundos de entrevistas, das observações de aulas e das reuniões dos grupos, e da análise documental.

A análise mostra que, inicialmente, os professores investigados passaram por uma fase de desafios e dificuldades, iniciando a carreira docente como professores temporários nas escolas, numa posição desvalorizada pelos alunos e pela gestão escolar, sem qualquer estímulo ao desenvolvimento profissional, alguns atuando inclusive fora da sua área de formação. Ao conseguirem a efetivação no cargo de professor, foram-lhes atribuídas escolas de difícil acesso ou marcadas pela violência escolar, turmas problemáticas e horários de aula desfavoráveis. Ao integrarem os grupos de estudos, os professores iniciantes passaram a ter um suporte no seu processo de inserção profissional. Este suporte se concretizou na forma de apoio em relação ao conhecimento do conteúdo matemático; apoio pedagógico; apoio emocional para lidar com problemas vivenciados no início da carreira, tais como o isolamento profissional, as incertezas relativas à sobrevivência na profissão; e apoio no desenvolvimento de uma postura investigativa sobre a prática.

A investigadora relata que no início do trabalho nos grupos, os professores iniciantes "tenderam a participações periféricas" (Gama, 2007, p. 188), mas foram instigados a refletir sobre situações problemáticas da prática docente, e aos poucos "foram adquirindo confiança e passaram a compartilhar com o grupo suas próprias experiências, suas angústias, suas dificuldades, e seus aprendizados obtidos com a prática" (Idem, p. 188). Nessa partilha, construíram "amigos críticos de confiança" (Gama, 2007, p. 188) que os ajudaram a "desenvolver estranhamentos e aprendizagens" (Idem, p. 188) sobre a Matemática e sobre a prática docente. De acordo com a investigadora, o trabalho no grupo se fortaleceu a partir do momento que os professores passaram a investigar a própria prática utilizando como dinâmica de trabalho a escrita de narrativas. A partilha das narrativas sobre a prática pelos professores com o grupo, para além de permitir a reflexão sobre a prática, constituiu-se "fonte de socialização da profissão (...), pois permitiu validar, reforçar e (...) legitimar os sucessos e os fracassos da prática docente" (Gama, 2007, p. 189) sua e dos parceiros críticos.

A investigadora conclui que a cultura colaborativa favorece o desenvolvimento profissional do professor iniciante em relação à sua prática pedagógica, pois conduz o professor a centrar as suas aulas nos alunos, valorizando a interação com eles e entre eles, promovendo o trabalho em grupo, considerando suas respostas, promovendo intervenções problematizadoras e questionadoras, visando a produção e negociação de significados sobre os conteúdos. Também conclui que, no grupo colaborativo, quebra-se a diferença relacional entre professores iniciantes e mais experientes, uma vez que os iniciantes aprendem e desenvolvem-se na profissão, mas também ensinam com novos olhares sobre as situações.

Em suma, os resultados da pesquisa de Gama (2007) dão indícios de que o grupo colaborativo, ao apoiar os professores em início de carreira, além de facilitar e estimular o desenvolvimento profissional e a busca da satisfação pessoal, contribui na construção de uma identidade profissional comprometida com a melhoria da qualidade do ensino de Matemática nas escolas.

Na revisão da literatura encontraram-se alguns trabalhos que se dedicam a fazer revisões sistemáticas acerca de pesquisas que envolvem professores trabalhando colaborativamente, os quais se apresentam de seguida.

Passos et al. (2006) realizaram um estudo meta-analítico de pesquisas acadêmicas brasileiras (teses e dissertações) com o objetivo de "identificar e analisar práticas promotoras de desenvolvimento profissional em diferentes espaços formativos" (p. 193). O estudo tomou por base onze investigações que têm como foco a formação e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática e que foram desenvolvidas no período de 1998 a 2003. Cinco dos onze estudos analisados investigaram as contribuições do grupo ou do trabalho colaborativo para o desenvolvimento profissional dos professores participantes. Os estudos apresentaram indícios de que o sucesso do trabalho no grupo, principalmente no que diz respeito à reflexão compartilhada, depende de algumas condições de funcionamento dos grupos e da constituição de um ambiente de diálogo aberto; de confiança, respeito, afeto e apoio mútuos; e de ações coordenadas e planejadas e negociadas coletivamente. Além disso, o ambiente de confiança no grupo geralmente ocorre após um tempo relativamente longo de convivência e do surgimento de uma sinergia positiva, a qual mobiliza simultaneamente as perspetivas pessoais e coletivas dos participantes, coordenando-as em função de um objetivo comum. De forma geral, os estudos evidenciaram que o trabalho coletivo/colaborativo é também um fator importante para a aprendizagem *na* e *sobre* a prática e, portanto, catalisador do desenvolvimento profissional.

Mais recentemente, Coelho (2017) realizou um mapeamento da pesquisa brasileira realizada no período de 2001 a 2012, com o objetivo de "compreender o grupo colaborativo, suas potencialidades e limites para a formação do professor que ensina Matemática" (p. 345). Foram relacionadas seis pesquisas que têm como foco principal de estudo o grupo colaborativo na formação do professor que ensina Matemática. A partir dos estudos analisados, a autora aponta que no Brasil não há uma compreensão única sobre os temas 'trabalho coletivo', 'trabalho colaborativo', 'cooperação e colegialidade', tal como acontece noutros países. Essa polissemia pode afetar tanto o funcionamento dos grupos, o nível de colaboração que se deseja atingir, como a definição de metodologias para os analisar. O panorama gerado pela autora apresenta os grupos colaborativos como peça importante para o desenvolvimento profissional dos professores e conclui que durante a formação inicial os futuros professores devem ter contacto com vivências de trabalhos colaborativos, pois a cultura da colaboração vai sendo desenvolvida com o tempo. Destaca que os grupos heterogêneos, formados por pessoas com diferentes vivências e com diferentes formas de interpretar as situações, podem oferecer maiores oportunidades para a problematização e consequentemente para o desenvolvimento profissional. A heterogeneidade pode ser sinônimo de conflitos, porém a autora considera que estes podem ser resolvidos com base na negociação e aceitação.

Dentre os elementos identificados pela autora que podem favorecer o desenvolvimento dos grupos e a aprendizagem dos professores em colaboração, destacam-se: (i) a presença de participantes externos (como, por exemplo, nas parcerias entre escolas e universidades ou entre professores de diferentes universidades), favorecendo diferentes olhares sobre a prática pedagógica; (ii) a realização conjunta de estudos teóricos para aprofundar o conhecimento dos professores e para validar e sistematizar os saberes adquiridos no âmbito da prática docente; (iii) a narração de histórias de vida, o ato de cada professor escrever sobre a sua prática ou a produção de textos em conjunto (comunicações científicas) promovendo a reflexão e a sistematização dos saberes adquiridos a partir da própria prática, para além de promover a integração do grupo.

A autora aponta que para sustentar os grupos colaborativos como contexto privilegiado para a formação de professores são necessárias "políticas educacionais de valorização da profissão docente; uma formação inicial que prepare o professor para o trabalho intelectual que irá assumir; e uma formação continuada em que ele próprio seja o sujeito — tudo isso associado a melhores condições de trabalho" (p. 358).

Uma revisão sistemática da literatura acerca das potencialidades do trabalho colaborativo na formação de professores de Matemática, para além do Brasil, foi realizada por Gumiero e Pasuch (2019). Foram analisados 12 artigos publicados em português, inglês e espanhol, oriundos das bases de dados *Scielo, Eric, PsycINFO, Web of Science* e *MathEduc*. A revisão foi dividida em duas etapas: uma análise vertical e uma análise horizontal. Na análise vertical cada estudo representou uma unidade de análise e foi elaborado um resumo com base na interpretação de cada artigo, considerando nove aspetos: foco da investigação; metodologia utilizada; natureza da pesquisa; domínio matemático investigado; país em que se realizou o estudo; educação (formação inicial ou em serviço) dos professores participantes; registros dos alunos (para estudos empíricos realizados em sala de aula); os principais resultados e as conclusões. A partir da análise vertical, foi realizada a análise horizontal, em que é feita uma comparação entre os estudos, buscando avaliar "semelhanças e diferenças para identificar os principais aspetos abordados (...) e os fatores que promovem os processos de formação de professores de matemática" (Gumiero & Pasuch, 2019, p. 276). Na análise, os autores identificaram três categorias que descrevem o foco dos estudos avaliados: "(1) incluir um grupo com características potenciais de colaboração e discutir suas potencialidades, (2) analisar as tarefas que foram desenvolvidas e concretizadas colaborativamente, e (3) abordar o trabalho colaborativo como um meio de testar teorias e experimentar metodologias e ferramentas" (p. 282). Os autores referem que os artigos analisados evidenciam elementos que caracterizam a colaboração, como, por exemplo, a parceria entre os participantes, papéis definidos de cada professor nos grupos de trabalho, apoio e respeito mútuos. Dentre os estudos analisados, havia um número expressivo abordando o uso de tecnologias em contexto colaborativo, porém foram observadas algumas limitações neste aspeto, "como desmotivação ou pouca participação dos envolvidos" (p. 281).

Com base na análise realizada, os autores apontam que o trabalho colaborativo entre docentes pode promover os processos de ensino na educação matemática por meio da *planificação* conjunta de aulas; da *prática de ensino*; e da *produção de conhecimento*. Ao *planificar as aulas* em conjunto com seus pares num ambiente de colaboração, os professores podem sentir-se confiantes para explorar diferentes estratégias de ensino, inovar na elaboração de tarefas e na avaliação dos alunos, uma vez que estão envolvidos num ambiente de discussão e troca de ideias. Dessa forma, a elaboração das estratégias/tarefas pode receber ricas contribuições, promovidas pela troca de ideias e partilha de experiências pelos membros do grupo. Associada à planificação de aulas está a *prática de ensino,* que "inclui a valorização da experiência de ensino, a análise do que acontece numa sala de aula, e a solução de questões propostas pelos alunos" (p. 282). Na perspetiva dos autores, os projetos educativos de formação inicial e/ou continuada devem possibilitar que os professores se sintam parte do processo de formação, levando em consideração as suas expetativas e as suas experiências de ensino. A colaboração é um meio para tal fim, pois permite reduzir a distância que existe entre a teoria e o que é vivenciado na sala de aula, possibilitando a aprendizagem mútua entre professores e formadores e a *produção de novos conhecimentos*, quer a partir das discussões em grupo, da panificação de aulas ou da análise do que acontece na sala de aula.

Por fim, os autores listam as principais dificuldades, identificadas nos artigos analisados, para se estabelecer um trabalho colaborativo, que incidem sobre o tempo dos professores para se dedicar a um projeto colaborativo, participantes pouco motivados ou excessivamente tímidos, e a falta de apoio da organização educativa.

Na perspetiva do que sugere o estudo de Gumiero e Pasuch (2019), relativamente à importância de os cursos de formação inicial/continuada propiciarem que os futuros professores/professores em exercício sejam atores do seu processo de formação, existe no Brasil um programa recente, coordenado pela Coordenação de Aperfeiçoamento e Pessoal de Nível Superior – CAPES, que visa promover o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de formação de professores. O chamado 'Programa de Residência Pedagógica[5]' integra a Política Nacional de Formação de Professores e por meio da inserção

[5] https://uab.capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica

dos futuros professores na escola básica, a partir da segunda metade do seu curso, busca em linhas gerais, promover a articulação entre teoria e prática em sua formação, para além de aproximar as instituições de Ensino Superior das escolas. Dentre as ações dos futuros professores nas escolas encontram-se a condução de aulas e a intervenção pedagógica. Neste contexto, Pereira, Silva e Gomes (2021) realizaram um estudo em que analisam os contributos e desafios do trabalho colaborativo no ensino de Matemática no âmbito do Programa de Residência Pedagógica (PRP) de uma universidade pública do norte do Brasil, na perceção de um preceptor (professor de Matemática da escola onde ocorre o projeto) e três residentes (futuros professores de Matemática). O projeto colaborativo desenvolvido no âmbito do PRP, contexto do estudo, busca além de contribuir com a formação dos futuros professores, cooperar com as escolas no estabelecimento da nova base comum (BNCC), aprovada no Brasil, e centra as operações residenciais em três escolas. A investigação tem natureza qualitativa e os dados foram coletados a partir de entrevistas semiestruturadas com preceptores e residentes.

A análise dos resultados aponta que o trabalho colaborativo no âmbito do PRP contribuiu para a aprendizagem dos preceptores e residentes, relativamente às suas atividades e experiências. O preceptor contribuiu com a sua experiência de muitos anos de ensino na construção das tarefas e os residentes com novos métodos de ensino, com formas alternativas para resolver questões matemáticas, com sugestões de tarefas inovadoras, fruto do seu conhecimento no curso de formação de professores. Importa destacar na análise a aprendizagem do preceptor a partir da reflexão crítica sobre as fragilidades da própria prática, reconhecendo o que poderia ser melhorado na sua metodologia e apercebendo-se de alguns erros que cometia ao ver os residentes cometerem o mesmo erro.

Relativamente aos obstáculos enfrentados no desenvolvimento do trabalho colaborativo, a análise evidencia a falta de clareza no início do trabalho sobre o significado do PRP e sobre os papéis a desempenhar por parte da escola e pelos residentes. Fica evidente na análise que essa dificuldade aos poucos foi ultrapassada por meio do diálogo e da negociação, especificamente no que diz respeito ao preceptor atender às expectativas dos residentes e estes atenderem às expectativas do preceptor em relação ao ensino dos conteúdos. Os autores concluem que as dificuldades que surgiram eram esperadas, uma vez que se trata de um projeto inovador e sugerem que para o progresso do trabalho colaborativo, é importante que todos sejam ouvidos, sejam flexíveis, e aprendam a lidar com o imprevisível.

Dentre os distintos processos de desenvolvimento profissional, com ênfase na mudança das práticas educacionais, tem ganho relevância os 'estudos de aula' ('lesson studies'), que consistem numa atividade formativa centrada na prática letiva e que tem natureza reflexiva e colaborativa (Quaresma et al., 2014). Como explicam estes autores, nesta atividade formativa, os professores trabalham em conjunto identificando dificuldades dos alunos e preparando o que esperam vir a ser uma aula bem-sucedida. Esta aula segue uma abordagem exploratória, "em que os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação dada e na conceção e concretização de estratégias de resolução que devem depois saber apresentar e justificar" (p. 410). A concretização da aula é observada pelo grupo de professores, que depois analisam se os objetivos pretendidos são atingidos e as dificuldades que se manifestam.

Neste contexto, Richit e Ponte (2019) realizaram um estudo em que investigaram que aspetos relacionados à concretização da colaboração docente são mobilizados no contexto de estudos de aula segundo as perspetivas dos participantes. A investigação foi realizada com sete professores do 1.º ao 3.º ciclo, de escolas públicas de Lisboa, Portugal, que participaram em três estudos de aula, contemplando no total 12 sessões de trabalho, que incluíram estudos curriculares e teóricos sobre o ensino da Matemática, aprofundamento de tópicos da Matemática a ensinar e sobre o estudo de aula. Os estudos de aula ocorreram à época da implantação de um novo programa curricular de Matemática no Ensino Básico em Portugal (2013-2014), que exigiu "dos professores a mobilização e o desenvolvimento de conhecimentos profissionais distintos na reorganização dos conteúdos curriculares e das práticas de sala de aula" (Richit & Ponte, 2019, pp. 945-946). Os estudos de aula ocorreram sob a coordenação de uma equipe de investigadores da Universidade de Lisboa e os dados para a investigação foram recolhidos a partir de entrevistas semiestruturadas com os professores.

Os resultados da investigação de Richit e Ponte (2019) apontam que "no contexto de um estudo de aula, a colaboração docente se concretiza no entrecruzamento de três aspetos principais – a partilha, a cooperação e o apoio pessoal –, manifestando-se, em especial, no planeamento e realização da aula de investigação e nas atividades profissionais cotidianas" (p. 937). A análise realizada pelos autores evidencia que os estudos de aula proporcionaram aos professores a oportunidade de desenvolverem um trabalho colaborativo com diferentes níveis de *partilha*, tais como a partilha dos objetivos de ensino, de materiais e recursos didáticos, de ideias e de propostas de intervenção para aquela realidade, de angústias e insegurança tanto referente às dificuldades de aprendizagem dos alunos quanto ao desafio de implementar um novo currículo e de colocar em prática as aulas que eram planificadas, e partilha das impressões sobre a concretização das aulas. Os autores concluem que os processos de partilha vivenciados pelos professores os levaram a se envolverem de forma ativa e reflexiva no seu desenvolvimento profissional, manifestando maior disponibilidade para experimentar uma nova prática de ensino, aprofundando o seu conhecimento sobre o tópico 'Números Racionais' e sobre como o ensinar, mobilizando, assim, novas aprendizagens profissionais. A análise aponta que os professores trabalharam de forma coletiva e *cooperativa* à medida que assumiram conjuntamente a responsabilidade pela planificação das aulas exploratórias. E, embora houvesse papéis e estatutos diferentes, a cooperação entre pares e entre os professores e os formadores, se desenvolveu em torno de um objetivo comum, cada qual contribuindo dentro das suas possibilidades, tendo presente elementos como o diálogo, a negociação de ideias e a superação de hierarquias. Os autores referem que na perspetiva dos professores, o apoio e incentivo pessoal foram aspetos marcantes para o seu desenvolvimento profissional e pessoal. Este apoio emergiu tanto das interações com os seus pares, no sentido de superar os desafios da nova abordagem de ensino, em oposição ao individualismo que era prática dominante entre os professores, bem como o apoio e o suporte por parte da equipe de formadores, incentivando-os a envolver-se fortemente nos estudos de aula. Os autores exaltam que a colaboração que se estabeleceu era voluntária, havia um bom relacionamento entre os professores e uma interação profissional que transcendia o espaço da escola.

Considerações sobre os estudos analisados

A revisão das investigações acerca do trabalho colaborativo, em suas diferentes formas, sugere que esse tipo de atividade pode criar um ambiente rico em aprendizagens acadêmicas e sociais, e apresenta potencial para auxiliar no enfrentamento dos sérios desafios propostos pelos contextos educacionais nos diferentes níveis de ensino.

Ao trabalhar de forma colaborativa, o professor reconhece as suas próprias dificuldades e limitações, busca novas abordagens para as suas aulas, sentindo-se mais confiante para correr riscos e mais inclinado a aceitar as práticas dos seus pares (Gumiero & Pasuch, 2019). Os estudos incluídos motivaram o desenvolvimento de ambientes colaborativos que envolveram grupos de professores universitários, grupos formados por agentes das universidades e das escolas, bem como da formação inicial e contínua, uma vez que todos aprendem, sejam alunos, professores ou pesquisadores.

A revisão realizada evidencia que o desenvolvimento de um trabalho colaborativo não é isento de dificuldades, que se manifestam principalmente no início do trabalho. Algumas delas, identificadas nos estudos, incidem sobre o significado do trabalho colaborativo e sobre como trabalhar colaborativamente; a competição entre os participantes; o excesso de discussões baseadas em opiniões pessoais ao invés de serem pautadas por estudos teóricos ou sobre a prática de ensino; a falta de hábito em refletir sobre a prática; a falta de hábito de pesquisar a própria prática; a falta de tempo para a dedicação de projetos devido à sobrecarga na atividade profissional; a falta de motivação dos professores; e a falta de apoio por parte das instituições em que se insere o contexto do trabalho.

Em consonância com a literatura, foi possível identificar que o desenvolvimento do trabalho colaborativo não ocorre de um dia para o outro e que o processo de mudança da prática e de aprendizagem ocorre sob determinadas condições, tais como: a disposição positiva dos professores para trabalhar conjuntamente e para aprender; a abertura e a escuta do outro; a criação de um clima de trabalho aberto, seguro e de respeito à heterogeneidade e às diferentes formas de fazer; e o apoio institucional.

Por último, são identificados alguns aspetos e modos de trabalho que podem promover o trabalho colaborativo, tais como: negociação de ideias fundamentadas em estudos e experiências concretas, ao invés de opiniões pessoais; reflexão sobre a prática por meio da escrita de narrativas sobre as aulas; a elaboração conjunta de aulas e tarefas; a dinamização do ciclo: identificação de problemas comuns de ensino — busca por soluções — concretização de ações — reflexão sobre a ação; narrações de histórias de vida; realização conjunta de estudos teóricos; produção de textos científicos em conjunto de modo a refletir e sistematizar os saberes adquiridos sobre a própria prática, dentre outros.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados e justificados os procedimentos metodológicos adotados no desenvolvimento desta investigação. Inicialmente, debruça-se sobre a definição do problema de estudo, a descrição das fases da investigação e das opções metodológicas que a sustentam. De seguida, apresentam-se os participantes e os procedimentos para a sua escolha. Por fim, apresentam-se os métodos de recolha dos dados e os de análise dos dados.

4.1. Opções metodológicas

O problema considerado nesta investigação emerge da dificuldade enfrentada por professores e alunos nos processos de ensino e aprendizagem de tópicos de Álgebra Linear. Tais dificuldades não podem ser descuradas devido à relevância que esta disciplina tem na formação acadêmica dos alunos que a frequentam. Importa que o professor se consciencialize de que o elevado nível de formalismo dessa disciplina não permite, muitas vezes, aos alunos estabelecer conexões com o que aprenderam em Matemática. Estratégias de ensino que enfatizem abordagens axiomáticas tendem a despertar nos estudantes o sentimento de que estão a aprender tópicos que não conseguem dotar significado e nem perceber as suas aplicações. Consequentemente, a Álgebra Linear torna-se uma disciplina-problema em muitas instituições de Ensino Superior derivado ao fraco desempenho de muitos alunos que acabam por reprovar (Celestino, 2000; Figueiredo et al., 2014). De modo a atenuar tal situação, as recomendações atuais para o ensino de Álgebra Linear advogam que o professor que ensina esta disciplina deve inovar a sua prática. Mas, como o fazer quando muitas vezes trabalha isoladamente tendo como fonte apenas o livro didático, que, geralmente, apresenta uma abordagem formalista e descontextualizada? Por forma a alterar este *status*, o trabalho colaborativo entre os professores que lecionam essa disciplina na mesma instituição propicia oportunidades para um trabalho em conjunto na elaboração de propostas de ensino, discussão e reflexão sobre outras estratégias de ensino, que podem favorecer o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Com o propósito de contribuir para que uma nova cultura seja incorporada na prática de docentes de Álgebra Linear de uma universidade pública situada num estado na região sul do Brasil, baseada no diálogo e no coletivismo a fim de promover o ensino e a aprendizagem de maneira significativa, esta investigação desdobrou-se em duas fases. Na *primeira fase* participaram 15 professores que ensinam/ensinaram Álgebra Linear, com a finalidade de caracterizar as suas estratégias de ensino desta disciplina. Nesta caracterização procura-se identificar as perceções dos professores sobre o ensino da Álgebra Linear, colocando-os a 'falar' sobre aspetos da sua prática profissional e da sua prática de ensino nesta disciplina.

Desse grupo de professores, em função de estarem a lecionar Álgebra Linear naquela altura, constituiu-se um grupo de trabalho com características colaborativas, tal como descrito no Capítulo 5, com seis professores, com o propósito de identificar situações problemáticas do ensino e da aprendizagem, planificar e discutir momentos da sua prática de ensino de Álgebra Linear. O trabalho realizado neste grupo constitui a *segunda fase* desta investigação, que tem por objetivo averiguar o contributo do trabalho colaborativo no ensino desta disciplina. Para este fim, adotou-se um design de estudo de caso sobre dois destes professores.

Com a informação recolhida de professores que ensinam ou ensinaram Álgebra Linear que participaram em ambas as fases do estudo, procura-se responder às questões de investigação: Como os docentes ensinam Álgebra Linear? Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear? Que perspetivas têm os docentes sobre o trabalho colaborativo? Que problemáticas identificam os docentes do grupo de trabalho colaborativo na sua prática de ensino de Álgebra Linear? Como essas problemáticas são tratadas? Quais as potencialidades e os constrangimentos do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

Face ao problema delineado, à natureza do objetivo e às questões de investigação formuladas, esta investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa. A abordagem qualitativa justifica-se pela investigação ocorrer em contextos da prática docente, a universidade, que é o ambiente onde os professores participantes vivenciam o problema em estudo, numa relação de proximidade com a investigadora — sobretudo na segunda fase do estudo, que é o principal instrumento de coleta de dados, que observa os fenômenos e o ambiente onde ocorrem, mantendo o foco na captação, descrição e interpretação das ações vivenciadas pelos professores, de acordo com os significados por eles atribuídos (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2014; Erickson, 1986). Procura-se, assim, compreender o fenômeno em estudo por meio da análise das perceções e interpretações do ponto de vista dos intervenientes, de modo a captar com ressalva de detalhes as relações entre as suas ações individuais e as suas interações sociais, as suas motivações, crenças, ideias, valores e intenções (Coutinho, 2011; Minayo, 2002).

Uma das características da investigação qualitativa com natureza interpretativa é a consideração dos significados das ações dos seus intervenientes (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2014; Erickson, 1986). O interesse da investigação nesta abordagem está no "significado humano na vida social e na sua elucidação e exposição por parte do investigador" (Erickson, 1986, p. 119). Para Erickson (2012), um estudo qualitativo não relata simplesmente uma determinada realidade com precisão. Pelo contrário, descreve o que os sujeitos fazem uns com os outros à luz dos significados que atribuem às ações uns dos outros. A descrição qualitativa é, segundo o autor, necessariamente interpretativa, e tem por objetivo produzir descrições e análises dos conceitos e raciocínios utilizados pelos próprios sujeitos, traduzindo a realidade, o mais fielmente possível, na forma como eles a compreendem e percebem.

A natureza interpretativa desta investigação está presente nos significados que os intervenientes conferem ao fenômeno em estudo e na sua respetiva interpretação e exposição por parte da investigadora. Com esta perspetiva, os dados recolhidos nesta investigação são essencialmente descritivos sem a finalidade de comprovar ou infirmar hipóteses por meio deles, mas compreender as perceções que os professores têm sobre o ensino da Álgebra Linear e os processos pelos quais alguns destes professores desenvolvem a sua prática a partir do trabalho colaborativo com seus pares, valorizando-se assim mais os processos do que os resultados (Bogdan & Biklen, 1994). Dessa forma, os dados são analisados "indutivamente do particular para as perspetivas mais gerais" (Creswell, 2014, p. 55), procurando estabelecer padrões ou temas, e "dedutivamente para reunir evidências que apoiem os temas e as interpretações" (idem). Os resultados são apresentados na forma de narrativa, com descrições contextuais e com as vozes dos participantes apresentadas na forma de citações (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2014), sem retirar o significado proferido pelos professores nos devidos contextos em que se inserem.

Relativamente ao estudo de caso, Yin (2015) refere que a opção por esta metodologia é particularmente oportuna quando a investigadora procura explicar, descrever ou analisar um acontecimento contemporâneo inserido em algum contexto da vida real, de tal forma que não tem controle total sobre as variáveis envolvidas e sobre os participantes. O autor acrescenta que o estudo de caso é adequado para responder a questões do tipo 'como?' e 'porquê?'; para compreender de forma, o mais possível, completa e profunda o fenômeno a que se acede diretamente, acompanhada de uma descrição holística da situação, baseando-se para isso em múltiplas fontes de informação.

Ponte (2006) considera que o estudo de caso é adequado quando a investigadora busca compreender as particularidades de uma situação específica, procurando o que há nela de mais essencial e característico, com vista à sua melhoria ou para lançar hipóteses de trabalho ou estudo sobre o grupo ou fenômeno em análise. Por sua vez, Lüdke e André (2013) advogam que a pesquisadora deve optar pelo estudo de caso quando a situação investigada é algo singular, sendo que o caso deve estar bem delimitado e com contornos bem definidos durante o desenvolvimento do estudo. Estas autoras reforçam que os estudos de caso buscam retratar a realidade de forma aprofundada. Para tal, é importante que enquanto investigadora procure revelar as múltiplas dimensões presentes na situação em análise, bem como as relações entre elas, para além de estar atenta a novos elementos que possam emergir no decorrer do estudo, mesmo que siga alguns pressupostos teóricos iniciais. Outra questão a considerar, segundo as autoras, é o contexto em que se situa o objeto de investigação, de modo a obter uma melhor compreensão do problema ou encontrar fatores que possam explicar as ações, os comportamentos, as perceções e as interações dos seus participantes.

Há vários tipos de casos. Um caso pode ser, por exemplo, um indivíduo, um pequeno grupo, uma atividade ou evento, ou pode ser um processo (McMillan & Schumacher, 2014). Pode ser escolhido um único caso ou múltiplos casos (dois ou mais casos em um único estudo) para que possam ser comparados (Creswell, 2014; McMillan & Schumacher, 2014). Stake (2005) distingue dois tipos de estudo de caso, intrínseco e instrumental, conforme a intenção de o conduzir. Um caso é intrínseco quando é focado em si mesmo e só precisa ser descrito e detalhado. Um caso é instrumental quando o foco é a compreensão aprofundada de um problema específico, de uma questão ou um tema, e é selecionado um ou mais casos para elucidar esse problema, questão ou tema.

Considerando os professores que participaram de um grupo de trabalho com seus pares para planificar e discutir momentos de sua prática no ensino de Álgebra Linear como unidade de análise, realizaram-se dois estudos de caso, participando em cada um deles um professor deste grupo, para se procurar compreender com mais detalhe possível um fenômeno específico e complexo — o modo como trabalham num grupo com características colaborativas, como desenvolvem a sua estratégia de ensino e quais significados conferem à sua prática no ensino de Álgebra Linear após a sua participação nesse grupo. Como a finalidade é compreender de modo aprofundando um fenômeno específico, cada estudo de caso é fundamentalmente instrumental, sendo que os dois estudos de caso se conjugam de modo a melhor compreender este fenômeno, constituindo-se um estudo de caso múltiplo.

Os participantes do grupo de trabalho escolhidos para cada um dos casos, são os professores Nina e Téo. No Capítulo 7 é apresentado o estudo de caso de Téo, que foi selecionado por ser um dos professores do grupo de trabalho com menor experiência docente e pela forma como se integrou no grupo, participando de todos os momentos de trabalho conjunto a par da investigadora. No Capítulo 8 é apresentado o estudo de caso de Nina, que foi escolhida por ser do grupo de professores mais experientes na profissão, porém apresentava algumas dificuldades para ensinar alguns tópicos de Álgebra Linear. O relato dos estudos de caso segue a forma de narrativa, para, a partir da descrição das perceções dos professores, dar a conhecer as suas experiências, opiniões, dificuldades e ideias, ao longo do desenvolvimento das atividades no seio do grupo de trabalho e na dinamização da sua prática letiva.

Os tópicos de Álgebra Linear que foram fruto de discussão e da planificação de tarefas e aulas no grupo de trabalho conjunto foram os mesmos para todos os seis professores. Este facto implica que nos dois estudos de caso é dado a conhecer a forma como cada professor se envolveu nas atividades dinamizadas no grupo de trabalho em torno das mesmas temáticas. Assim, os casos se diferenciam pela forma como cada professor se envolveu no grupo de trabalho, na forma como dinamizou a sua prática letiva a partir da participação no grupo e pelas suas dificuldades e aprendizagens ao longo do processo, e pelas suas perceções em relação ao trabalho realizado em prol da sua prática letiva.

A elaboração dos estudos de caso é organizada em torno da informação recolhida nas ações dinamizadas pelos professores que os formam, seguindo uma perspetiva interpretativa da investigadora, uma vez que se pretende interpretar e compreender as perspetivas dos professores sobre o trabalho colaborativo, os constrangimentos sentidos por eles ao trabalharem colaborativamente com seus pares, as problemáticas identificadas em sua prática letiva e as potencialidades e desafios do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear. Com esta perspetiva pretende-se dar a "conhecer uma realidade tal como ela é vista pelos atores que nela intervém diretamente" (Ponte, 2006, p. 14). Por outro lado, este autor advoga que num estudo de caso interpretativo, a investigadora também deve analisar os dados segundo o seu ponto de vista. Assim, a investigadora, enquanto principal meio de recolha e análise de dados (Bogdan & Biklen, 1994), envolve-se na atividade de investigação como *outsider* e *insider*, de modo a poder refletir sobre ela em diferentes perspetivas. Apresenta as experiências dos participantes na sua forma natural, explicando-as e interpretando-as como uma *outsider*. Por outro lado, se integra na realidade investigada participando das suas atividades como uma *insider*, de modo a compreender e interpretar os seus pormenores.

Nesta segunda fase do estudo, envolvi-me pessoalmente na realidade investigada, desempenhando o duplo papel de investigadora e professora — participante do grupo de trabalho. Dessa forma, a investigadora não era um elemento estranho no grupo de trabalho (Bogdan & Biklen, 1994), uma vez que partilhava os mesmos desafios e problemáticas vivenciados pelos demais integrantes do grupo nos processos de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. Porém, torna-se difícil delimitar onde começa e onde termina cada um dos papéis vivenciados no grupo. Enquanto professora de Álgebra Linear, participei na planificação e concretização de todas as atividades desenvolvidas. Mesmo no papel de investigadora/observadora das aulas dos professores do grupo, procurava, como professora, refletir sobre a concretização nestas aulas das atividades planificadas em conjunto e retornar ao grupo algumas ideias emergentes dessa reflexão. Enquanto investigadora, nos encontros de trabalho conjunto, para além da coleta de dados por meio da observação, da gravação em áudio e vídeo e das notas de campo, se fez necessário assumir o papel de coordenadora/líder do grupo, de modo a manter o grupo em atividade. Assim, procurei cuidar da organização dos encontros do grupo, da troca de informações entre os membros do grupo no intervalo entre os encontros, cuidar para que sempre tivéssemos uma agenda para debater, muitas vezes lançando ideias e/ou questões, ou incentivando que os meus pares apresentassem ideias ou se responsabilizassem pela concretização de alguma ideia lançada no grupo.

Considerando a 'validação' em pesquisa qualitativa como uma tentativa de avaliar a credibilidade das interpretações realizadas pela investigadora nesta investigação foram utilizadas as seguintes estratégias referidas por Creswell (2014): (i) envolvimento prolongado e observação persistente no campo, que se reflete na observação-participante no grupo de trabalho; (ii) triangulação, através do confronto de evidências provenientes de diferentes fontes de dados, tais como entrevistas, observações, gravações em áudio e vídeo das sessões do grupo de trabalho e notas de campo; (iii) esclarecimento do viés da investigadora, de modo a deixar explícito desde o início as suas motivações e conceções, as quais possam impactar a abordagem e interpretação do estudo; (iv) descrição detalhada e densa dos participantes e contexto do estudo; e (v) verificação, pelos participantes do estudo, dos relatos e análises realizados de forma que eles julguem a sua precisão e credibilidade.

4.2. Participantes

Na descrição dos participantes intervenientes neste estudo, importa salientar as características dos que participaram na primeira fase, num olhar mais abrangente, e os que participaram na segunda fase, num olhar mais focalizado.

Primeira fase do estudo

Através da consulta pela Internet, procurei identificar outros cursos de graduação, fora do meu Centro de atuação, que continham em seu currículo a disciplina de Álgebra Linear. Contactei os coordenadores dos respetivos cursos para identificar os professores que lecionavam Álgebra Linear, bem como para obter o seu contacto. Ao todo identifiquei 12 professores que ensinavam ou já haviam ensinado a disciplina, sendo que sete professores responderam ao meu contacto por e-mail sobre a participação numa entrevista. Destes, um professor se negou a participar da entrevista, um professor respondeu ao contacto aceitando participar após um ano do envio do e-mail, quando eu já havia encerrado esta fase da pesquisa, e os demais cinco professores prontamente aceitaram participar. No meu Centro, identifiquei 10 professores que aceitaram ser entrevistados.

Em suma, a primeira fase do estudo envolveu 15 professores que ensinavam Álgebra Linear no semestre 2016/01 ou que já haviam lecionado anteriormente, os quais participaram individualmente numa entrevista. A caracterização destes professores, incluindo a sua descrição e os aspetos relacionados à sua formação inicial e continuada e à sua experiência profissional é apresentada no Capítulo 6, pois os dados que a permitem realizar resultam da entrevista.

Segunda fase do estudo

Ao realizar a entrevista com o grupo de professores que constituiu a primeira fase do estudo, procurei identificar professores que poderiam integrar um grupo de trabalho em Álgebra Linear. Para esta identificação, tinha a preocupação de encontrar professores que integrassem elementos em sua prática de ensino que se destacassem em relação ao ensino tradicional e/ou aqueles que tivessem disponibilidade para discutir momentos da sua prática de ensino em Álgebra Linear. Inicialmente, identifiquei um grupo de professores no Centro de Ensino em que atuo profissionalmente, que concentra o maior número de professores de Álgebra Linear da instituição, e uma professora de um outro Centro de Ensino, localizado noutra cidade. Como poderia contar com um grupo maior do Centro em que atuo, avaliei que ter um professor de outro Centro neste grupo dificultaria a minha logística para a observação das aulas dos professores, uma vez que teria que conciliar os horários de observação em duas cidades distintas com a minha carga horária de ensino. Considerei também que, como o trabalho colaborativo proposto exigia dos professores um maior esforço nas suas atividades profissionais, em que era necessário estreitar relações e ter flexibilidade para realizar reuniões de trabalho, o facto de os professores lecionarem no mesmo Centro de Ensino seria um fator facilitador neste processo. Deste modo, os participantes do grupo de trabalho, objeto de análise da 2.ª fase deste estudo, foram seis professores do Departamento de Matemática: Bruna[6], Lisa, Nina, Téo, Tito e a investigadora. No grupo havia professores mais experientes (Tito, Bruna, Nina e a investigadora), com vários anos de prática letiva, e aqueles com pouco tempo de prática letiva (Lisa e Téo), por estarem no início da carreira docente.

Dentre os cinco professores do grupo de trabalho, à exceção da investigadora, selecionei dois para integrarem cada um dos estudos de caso. A definição dos professores que constituíram os casos aconteceu após a transcrição da entrevista final, realizada depois da conclusão do 2.º semestre letivo de

[6] Este, como os outros nomes de professores ou alunos que são referidos neste estudo, correspondem a pseudônimos. Os próprios professores do grupo de trabalho é que escolheram os seus pseudônimos.

trabalho conjunto. Nesta seleção, optei por escolher um professor iniciante na carreira e um com mais tempo de prática letiva. Dentre os dois professores iniciantes, optei por Téo, primeiramente, por ele ter sido o único assíduo aos encontros do grupo, para além da investigadora, e pelas características já descritas, como a sua dedicação para buscar respostas para algumas questões e desafios que eram colocados no grupo. Outro fator que contribuiu para esta escolha, foi o facto de este professor ter uma formação bem abrangente em Matemática, ter afinidade com a tecnologia e manifestar abertura para se desenvolver profissionalmente em relação a aspetos didáticos do ensino de Álgebra Linear, particularmente em estratégias envolvendo o uso da tecnologia.

Dentre os três professores mais experientes, optei por Nina, pelas suas dificuldades em relação ao conteúdo de Álgebra Linear, manifestadas antes e durante o trabalho conjunto e pelo facto de não ter experiência com o uso de recursos tecnológicos, para além do PowerPoint, no ensino das disciplinas que lecionava e, com a participação no grupo, passar a integrar um software de geometria dinâmica em seu ensino de Álgebra Linear.

Importa destacar que ao realizar o convite aos professores, lhes apresentei os objetivos da investigação, os informei sobre como seria o processo de recolha de dados, incluindo o registo em áudio e vídeo das sessões de trabalho, a observação de algumas das suas aulas e a participação em entrevistas. No primeiro encontro de trabalho, apresentei-lhes mais detalhadamente os objetivos, discutimos as possíveis vantagens sobre o trabalho a ser realizado, dando ênfase ao possível contributo ao seu desenvolvimento profissional, bem como reforcei os métodos de recolha dos dados. Para além disso, informei que alguns dos professores, ou talvez todos (naquele momento não tinha noção de quantos), seriam selecionados para constituírem estudos de caso. Diante do que lhes fora apresentando, todos se mostraram disponíveis em participar no grupo de trabalho, para além de me concederem o direito de usar os dados e materiais produzidos no grupo.

Papel da investigadora

No grupo de trabalho, a minha função foi de observadora-participante, interagindo com os demais colegas, trazendo ao grupo as minhas experiências e problemáticas vivenciadas na minha prática, bem como participando na elaboração e concretização de todas as ações conjuntas. Importa destacar que cada um dos participantes, desde a sua inserção no grupo, tinha conhecimento do envolvimento da investigadora de forma interativa.

O trabalho conjunto para o qual desafiei os professores assumia inicialmente os pressupostos de um trabalho com características colaborativas. Dessa forma, todas as ideias tinham que partir de um consentimento de todos os professores. Assim, no papel de membro do grupo, colocava todas as minhas ideias à aprovação do grupo. Por outro lado, mesmo comungando de muitos problemas relacionados aos processos de ensino e aprendizagem com os colegas do grupo, precisava estar atenta ao grupo e ao processo de recolha de dados. Atenção ao grupo no sentido de que os professores se sentissem à vontade para trabalhar com seus pares, num clima de confiança, que não me vissem como investigadora, mas sim como um elemento do grupo, que construíssem um sentimento de pertença do grupo ao contrário de estarem presentes simplesmente por parceria com a investigadora. Ao mesmo tempo que esperava que todos estes sentimentos fossem despertados nos professores, preocupava-me com a recolha dos dados, tanto no sentido de minimizar os 'efeitos do observador' (Bogdan & Biklen, 1994), quanto no sentido de que os pressupostos de um trabalho verdadeiramente colaborativo (Fullan & Hargreaves, 2001) fossem assumidos pelo grupo. Neste sentido, procurava dar mais voz aos colegas, deixando que as minhas intervenções nas sessões de trabalho ocorressem mais nos momentos que não houvesse uma discussão, de modo a alimentar as ideias, deixando aos restantes elementos do grupo a tomada de decisões.

4.3. Métodos de recolha dos dados

A investigação qualitativa e interpretativa pressupõe que o investigador se insira no "mundo das pessoas que pretende estudar" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16), procurando aprender algo com elas e sobre elas, e compreender o seu modo de pensar, mas, ao mesmo tempo, tomando o cuidado para se manter do lado de fora 'deste mundo', no sentido de se manter crítico e reflexivo. Importa estabelecer uma relação de confiança com os sujeitos da investigação, para que estes se sintam à vontade para falar e participar nas atividades em que se envolvem, e cuidadosamente registrar o que se passa no contexto de forma não intrusiva, confrontando diferentes fontes de dados (Bogdan & Biklen, 1994).

O uso de diferentes fontes de dados, como entrevistas, observações e documentos, permite uma compreensão em profundidade do fenômeno em estudo e dos significados que perpassam numa investigação (Bogdan & Biklen, 1994; Flick, 2009). Em particular, Yin (2015) refere que nos estudos de caso o uso de múltiplas fontes de evidência permite obter diferentes perspetivas dos participantes e uma ampla diversidade de tópicos de análise.

De modo a atender aos propósitos da investigação e obter uma variedade de fontes de informação, os dados foram recolhidos por meio de três métodos: a entrevista; a observação; e a análise documental (Quadro 1).

Quadro 1. Métodos de recolha de dados.

Método		Período
Entrevista	▪ Entrevista inicial (1.ª Fase do estudo).	março, abril/2016
	▪ Entrevista aos professores do grupo de trabalho ao fim do 1.º semestre de trabalho conjunto.	dezembro/2016
	▪ Entrevista aos professores do grupo de trabalho ao fim do 2.º semestre de trabalho conjunto.	agosto/2017
Observação	▪ Observação participante no seio do trabalho do grupo.	julho/2016 a julho/2017
	▪ Observação não participante das aulas dos professores do grupo de trabalho.	setembro/2016 e março, abril/2017
Análise documental	▪ Notas de campo da investigadora dos momentos de observação no seio do grupo e das aulas dos professores.	julho/2016 a julho/2017
	▪ Registos escritos planificados no grupo de trabalho dos roteiros das aulas, das tarefas para sala de aula, das tarefas avaliativas, de questões de provas (testes avaliativos).	
	▪ Aplicativos do GeoGebra desenvolvidos no grupo.	
	▪ Diários de classe dos professores.	

Cada um dos três métodos tem as suas especificidades, permitindo acrescentar novas informações ou cruzar os dados, de modo a obter uma linha convergente de investigação (Yin, 2015). A triangulação dos dados por meio da articulação entre diferentes métodos constitui-se uma alternativa aos critérios para a 'avaliação' da investigação (Flick, 2009).

4.3.1. Entrevistas

A entrevista representa um dos instrumentos básicos de coleta de dados dentro da perspetiva qualitativa (Lüdke & André, 2013). Ao contrário de outros instrumentos de pesquisa, que estabelecem uma relação hierárquica entre investigadora e investigado, como, por exemplo, os questionários, a entrevista pressupõe uma relação de interação entre quem pergunta e quem responde (Coutinho, 2011; Lüdke & André, 2013). Dentre as vantagens da entrevista sobre outras técnicas, Lüdke e André (2013) referem que ela permite captar a informação desejada de forma imediata. Como é realizada de maneira exclusiva, permite que o respondente faça correções em sua fala e que a investigadora solicite informações adicionais ou esclarecimentos, especialmente no caso de alguma resposta não for suficientemente clara. Outra vantagem, segundo Bogdan e Biklen (1994), é que a entrevista possibilita recolher dados descritivos na linguagem dos próprios professores, possibilitando que a investigadora, no caso deste estudo, interprete determinados aspetos relacionados com o ensino em Álgebra Linear destes professores e a sua perceção sobre o contributo do trabalho colaborativo com seus pares em prol dessa prática.

Relativamente ao grau de estruturação, as entrevistas qualitativas são classificadas em estruturadas, não estruturadas e semiestruturadas (Bogdan & Biklen, 1994; Lüdke & André, 2013). A entrevista do tipo estruturada obedece a um conjunto de questões fechadas, feitas da mesma forma e na mesma sequência, visando a obtenção de resultados uniformes entre os entrevistados, permitindo assim a comparação entre eles. Nas entrevistas não estruturadas, o entrevistador coloca o sujeito para falar sobre uma área de interesse. Existe um guião de entrevista, mas com perguntas abertas, sendo que o entrevistador pode ir colocando novas questões no decorrer da conversa para aprofundar as perspetivas do entrevistado sobre os temas que estão a ser tratados. Num nível intermediário entre esses dois tipos extremos, a entrevista semiestruturada conta com um guião organizado com um conjunto de questões, que podem não ser seguidas rigorosamente, sendo que a ordem das questões pode ser modificada, algumas questões podem ser suprimidas conforme as respostas vão sendo obtidas e a investigadora pode acrescentar novas questões para melhor compreender um determinado tópico.

Tendo presentes os argumentos apresentados, nesta investigação optou-se pela realização da entrevista semiestruturada com os professores participantes de ambas as fases do estudo. Na primeira fase, a entrevista utilizada como instrumento de recolha dos dados teve como objetivo principal caracterizar o ensino de Álgebra Linear, atendendo às perspetivas dos professores que lecionam ou já lecionaram a disciplina. Com a realização desta entrevista buscou-se também identificar um grupo de professores com interesse em participar num grupo de trabalho conjunto com os seus pares em torno do ensino de tópicos de Álgebra Linear. Para a definição das informações que seriam coletadas pela entrevista, optou-se pela elaboração de um guião de entrevista (Anexo A), que foi estruturado em três dimensões: Formação; Prática profissional; e Ensino de Álgebra Linear. Com as questões da dimensão 'Formação', buscou-se obter dados para a caracterização dos professores relativamente à sua formação acadêmica e às suas práticas de formação continuada. Na dimensão 'Prática profissional', buscou-se conhecer a experiência docente de cada professor, em particular, se os professores trabalhavam individualmente ou conjuntamente com seus pares na planificação de suas aulas. Por fim, na dimensão 'Ensino de Álgebra Linear', procurou-se recolher informações sobre a prática de ensino em Álgebra Linear e as dificuldades enfrentadas em ambos os processos de ensino e aprendizagem desta disciplina.

O processo de construção e definição do guião de entrevista envolveu inicialmente a elaboração de uma primeira versão pela investigadora, a readequação desta versão inicial a partir da avaliação e contributo dos orientadores deste trabalho e a submissão à análise de três especialistas, de modo a verificar a coerência entre as questões das dimensões que o organizam e o objetivo e questões de investigação. Tais especialistas são pesquisadores em Educação Matemática da UDESC (Universidade do Estado de Santa Catarina, Brasil), da UMinho (Universidade do Minho, Portugal) e da UEL (Universidade Estadual de Londrina, Brasil). Das suas análises, surgiram contribuições para a redação das questões finais do guião, no sentido de as clarificar, seja suprimindo duas questões a uma única, seja acrescentando questionamentos numa mesma questão ou simplesmente alterando a própria redação. Houve sugestões de novas questões e alteração da posição de questões de uma dimensão para outra. Após a definição de uma nova versão, depois da contribuição dos especialistas, foi realizada a validação da entrevista. Nesta etapa, entrevistei dois professores de Álgebra Linear da UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina), que não manifestaram dificuldades para entender o teor das questões e não apresentaram sugestões em relação à sua redação. Tal experiência permitiu-me tanto estimar o tempo para a realização da entrevista, como verificar, ao ouvir a gravação, que outras questões eu poderia ter feito em cima das respostas dos professores, que não me apercebi no momento da entrevista.

A entrevista foi realizada individualmente a cada um dos professores participantes desta primeira fase, nos meses de março e abril de 2016, sendo que para 10 deles realizei pessoalmente e para os outros cinco, que se localizavam em outros campi distantes do Centro em que atuo, via Skype. No início de cada entrevista, os professores foram informados do objetivo da entrevista e foi-lhes garantido que o seu conteúdo seria confidencial, sendo que foi assinado por cada entrevistado e pela investigadora um ‘Termo de consentimento livre e esclarecido’ (Anexo B). Embora a entrevista seguisse um guião pré-definido para garantir que os temas fundamentais fossem contemplados, o rumo do diálogo fluiu em conformidade com o pensamento dos professores e quando necessário coloquei-lhes outras questões de modo a clarificar as suas respostas. A entrevista foi gravada em áudio, com o consentimento dos professores, e de seguida transcritas pela própria investigadora.

Na segunda fase do estudo, todos os professores do grupo de trabalho responderam a outras duas entrevistas semiestruturadas, para além da entrevista inicial realizada na primeira fase do estudo, sendo a primeira delas realizada no final do 1.º semestre de trabalho conjunto (dezembro/2016) e a segunda após o encerramento do 2.º semestre de trabalho (agosto/2017). A primeira entrevista foi realizada com o intuito de obter dados sobre o processo de desenvolvimento da prática colaborativa dos professores no ensino de Álgebra Linear e obter dados para a continuidade do próprio trabalho no grupo. Por exemplo, nesta entrevista foi possível identificar alguns pontos que não foram atingidos ou que não agradaram aos professores no 1.º semestre e que precisavam de ser melhorados no semestre seguinte.

Tais pontos foram apresentados pela investigadora na primeira reunião do grupo no semestre seguinte e serviram para nortear novos objetivos de trabalho conjunto. A entrevista seguiu um guião (Anexo C), estruturado em três dimensões: Trabalho desenvolvido no grupo; Desenvolvimento da colaboração profissional; e Desenvolvimento da prática de ensino.

A segunda e última entrevista foi realizada cerca de 13 meses após o início do trabalho no grupo. Tal entrevista teve a finalidade de captar dados sobre as perspetivas dos professores participantes do grupo sobre o trabalho colaborativo, sobre o ensino de Álgebra Linear e sobre o contributo do trabalho colaborativo ao fim de um ano de trabalho com seus pares no ensino da Álgebra Linear. Para a elaboração do guião desta entrevista (Anexo D), tomou-se como referência o guião da entrevista anterior, mantendo-se as dimensões, porém modificando-se a maioria das questões e acrescentando-se outras, de modo a aprofundar a recolha de informação. O número de questões em relação ao guião da primeira entrevista, que eram nove, foi duplicado.

A análise dos guiões por especialistas quanto à coerência das dimensões e questões com os objetivos e questões da investigação foi realizada pelos próprios orientadores da investigação, que sugeriram a inclusão de novas questões, sugestões para a reescrita de algumas delas e alterações de questões de uma dimensão para outra. Ambas as entrevistas foram realizadas pessoalmente no gabinete de cada um dos professores envolvidos, num clima de confiança e sem constrangimentos, ambiente este que foi favorecido pelo tempo que a investigadora passou no campo da investigação. Mesmo havendo essa proximidade com os professores, procurou-se que eles respondessem às questões colocadas, como se estivessem diante de uma desconhecedora do que se passou no grupo de trabalho. No entanto, o facto de a investigadora ter feito parte do grupo de trabalho permitiu, quando necessário, que nas entrevistas algumas questões fossem respondidas mais profundamente, ou porque as respostas eram incompletas, ou porque os professores precisavam de ser lembrados de algum detalhe que ocorreu no grupo de trabalho ou na concretização de alguma atividade planificada no grupo.

Assim como decorreu com a entrevista inicial, as duas entrevistas com os professores do grupo de trabalho foram gravadas em áudio e transcritas pela investigadora logo após a sua realização. As transcrições foram enviadas aos professores para a validação das suas respostas, sendo que nenhum deles fez alterações no teor do conteúdo transcrito, realizando apenas correções dos erros de concordância e de digitação.

Importa destacar que para todo o processo de recolha de dados que ocorreu no contexto do grupo de trabalho foi assegurado aos professores a confidencialidade dos dados, por meio de um 'Termo de consentimento livre e esclarecido' (Anexo E), que foi assinado tanto pela investigadora como pelos professores, logo no início da constituição do grupo de trabalho. Importa ainda destacar que para as três entrevistas realizadas, o gravador não pareceu trazer qualquer desconforto aos professores, como alertam Lüdke e André (2013) e Bogdan e Biklen (1994). Inclusive, quando realizadas as duas entrevistas com os professores do grupo de trabalho, eles já estavam habituados com a gravação, tanto em áudio como em vídeo, das sessões de trabalho e de algumas das suas aulas.

4.3.2. Observação

Na segunda fase desta investigação também foi utilizada a técnica da observação para auxiliar a recolha dos dados. O objetivo desta técnica consiste em recolher dados no meio natural em que ocorrem, com um contacto pessoal e estreito da investigadora com o fenômeno em estudo (Lüdke & André, 2013). Como referem estas autoras, a técnica da observação permite que a investigadora chegue mais perto da perspetiva dos professores, participantes do grupo de trabalho, e na medida que acompanha as atividades realizadas pode compreender o significado que eles atribuem tanto à realidade que os cerca como às suas próprias ações. Um aspeto importante da observação é o de poder retratar uma realidade de acontecimentos em tempo real e apresentar o contexto em que se insere o fenômeno observado (Yin, 2015).

Diversos autores distinguem a observação entre dois extremos: quando o observador é participante no grupo observado e quando é um expetador (observação não-participante). Na observação não-participante, o investigador tem contacto com a realidade observada, mas sem se integrar nela (Marconi & Lakatos, 2017). A observação participante envolve a participação ativa do investigador no campo, que observa na perspetiva de membro, que acaba por influenciar o que é observado graças à sua participação (Flick, 2009). As informações que obtém e as respostas que são dadas aos desafios ou questionamentos que coloca, dependem muito do seu comportamento e da interação que estabelece com o grupo observado (Valladares, 2007). Marconi e Lakatos (2017) defendem que a observação participante pode ser *natural*, quando o investigador pertence ao grupo observado, ou *artificial*, quando este se integra no grupo a fim de recolher dados para a pesquisa.

Como advogam Lüdke e André (2013), a observação participante envolve a observação direta em conjunto com outros métodos de coleta de informação, como a entrevista e a análise documental, pressupondo um grande envolvimento da investigadora na situação investigada. Quanto ao grau de envolvimento do observador com os observados, diferentes autores (Creswell, 2014; Kawulich, 2005; Lüdke & André, 2013) distinguem quatro tipos de observação participante: (i) *totalmente participante*: o observador é membro do grupo em estudo, mas oculta tanto a sua identidade de investigador como os propósitos do estudo; (ii) *totalmente observador*: o observador não tem contacto com o grupo observado, observando sem que os observados sejam informados da observação; (iii) *participante observador*: neste caso o observador vivencia os acontecimentos com os observados, mas não deixa claro totalmente o que pretende com a sua observação, para não provocar muitas alterações no comportamento do grupo observado; (ii) *observador participante*: neste caso os objetivos da investigação são revelados desde o início aos observados e o pesquisador é um observador não integrante do grupo que se interessa em participar como forma de realizar uma compreensão mais completa das atividades do grupo.

Ainda em relação ao grau de envolvimento na observação participante, Flick (2009) alerta para o cuidado que o observador deve ter para não se tornar um 'nativo', de modo a correr o risco de perder a sua perspetiva crítica sobre a situação observada. Para o autor, o observador participante deve obter "uma perspetiva interna sobre o campo estudado" (p. 210), mas ao mesmo tempo "sistematizar o status de estranho" (idem), para poder "perceber o particular naquilo que for cotidiano e rotineiro no campo" (ibidem).

Nesta investigação, a observação decorreu em dois contextos: (i) no contexto das sessões de trabalho conjunto e em encontros menos formais com o grupo de professores; (ii) no contexto da sala de aula dos professores do grupo de trabalho. No contexto das 33 sessões de trabalho conjunto e nos encontros informais com o grupo de professores, adotou-se uma observação participante naturalista, visto que a investigadora também era membro do grupo de trabalho e participante de todas as atividades realizadas no papel de professora de uma turma de Álgebra Linear em cada um dos semestres em que a recolha de dados ocorreu. A observação participante teve como objetivo apreender e compreender as ações dos professores do grupo de trabalho – a forma como se envolviam individualmente e coletivamente, tanto na definição de objetivos como nos desafios colocados e nas atividades realizadas –, os aspetos do conhecimento didático que valorizam e destacam ao longo das sessões de trabalho e a forma como analisam a concretização das tarefas e/ou aulas planificadas em conjunto com os seus pares.

Nas sessões do grupo de trabalho, o papel de observadora aproxima-se mais para o de observadora participante, uma vez que participei no grupo como professora de Álgebra Linear, vivenciando todos os acontecimentos e interagindo com os meus pares. Porém, os observados, colegas do grupo de trabalho, tinham conhecimento dos objetivos do estudo que eu estava a realizar, em virtude da natureza colaborativa do trabalho a desempenhar, que exige transparência em termos de objetivos do que se pretende realizar dos requisitos emanados na literatura sobre o trabalho colaborativo. A observação realizada no contexto do grupo de trabalho foi registada em áudio e vídeo, que posteriormente foi alvo de transcrição. Também foi feito o registo por meio de notas de campo, principalmente das atividades delineadas no contexto do grupo de trabalho, mas cuja construção/concretização ocorria em momentos em que os professores se reuniam informalmente, sem um agendamento prévio. Tais anotações eram realizadas no sentido de não se perder a informação sobre os passos deste processo de construção, não perder a informação sobre o envolvimento dos professores neste processo e para posteriormente poder perceber os acontecimentos numa linha temporal. Entretanto, na escrita dos casos recorri pouco às notas de campo, pois optei por usar as informações provenientes das transcrições das sessões de trabalho do grupo, das entrevistas e das observações de aula, dada a sua maior fiabilidade.

Para além das sessões do grupo de trabalho, foram observadas seis aulas de cada professor do grupo, que corresponde a 12 horas-aula (1 hora-aula=50 min) para cada um deles. Nas aulas dos professores, optei por uma observação não-participante, de modo a interferir o menos possível no ambiente. A observação das aulas foi distribuída em três observações sequenciais em cada um dos semestres. Para cada semestre foi escolhido um tópico de Álgebra Linear diferente para realizar a observação, levando em consideração que foi uma escolha do grupo a planificação conjunta de tais tópicos. As três primeiras observações ocorreram em setembro de 2016, quando o grupo estava em atividade há pouco mais de dois meses, e as três seguintes ocorreram no final de março e início de abril de 2017. O número de aulas observadas foi condicionado pelo número de planificações ocorridas que contemplava a tríade: (i) discussão/construção de uma proposta de ensino no grupo; (ii) concretização dessa proposta em sala e aula; e (iii) reflexão sobre a concretização no grupo. Importa destacar que no grupo foram realizadas outras atividades, como a elaboração de tarefas e a reflexão sobre a sua concretização, quer em sala de aula quer extra sala de aula.

O registo das observações das aulas realizou-se por meio de gravações em áudio e vídeo e por meio de notas de campo, com o consentimento dos alunos, que foram informados sobre os objetivos das observações e da pesquisa, bem como da confidencialidade dos dados, por meio de um 'Termo de Consentimento Livre e Esclarecido' (Anexo F). Em cada um dos semestres, antes de iniciar as observações, me apresentei em cada uma das turmas e sugeri os possíveis benefícios para o processo de ensino e aprendizagem que poderia surgir em função da pesquisa que realizava e pelo trabalho conjunto realizado pelo grupo de professores no ensino da Álgebra Linear. Apesar de estarem cientes da observação, a presença da câmara em sala de aula pareceu ser um fator perturbador para os alunos apenas na primeira aula observada em cada um dos semestres, mesmo ficando ao fundo da sala de aula. Alguns alunos ao se levantarem das suas carteiras tinham o cuidado para não passar à frente da câmara, ou falavam num tom de voz mais baixo quando faziam algum questionamento ao professor, ou chamavam a atenção uns dos outros para tomar cuidado com a presença da câmara, diante dos seus comentários. A presença da câmara e particularmente a minha presença também foi fator perturbador para os professores nas primeiras aulas observadas do semestre 2016/02, que revelaram alguma tensão.

Após a observação de cada aula havia uma discussão individual e abrangente da investigadora com cada professor sobre os pontos fortes e o que poderia ser melhorado em relação à estratégia usada na sala de aula. Salientando que esta estratégia era definida no grupo, mas para além disso havia a estratégia individual do professor. Assim, procurávamos também discutir o que aquele professor acrescentou à estratégia previamente combinada no grupo e que poderia ser partilhada com os demais professores, para a evolução da estratégia de ensino definida pelo grupo. Nas sessões do grupo cada professor fazia um relato sobre a concretização das aulas. Eu procurava complementar com a minha observação e juntos procurávamos fazer uma reflexão sobre esta concretização, muitas vezes reformulando alguns pontos da proposta de ensino delineada no seio do grupo.

Relativamente à transcrição das gravações em áudio e vídeo das sessões de trabalho, este processo foi moroso e complicado pelo volume de gravações e pelo cruzamento de vozes e falas simultâneas, sendo necessário, na maioria das vezes, confrontar as gravações em áudio e vídeo. O processo de transcrição das gravações das aulas foi facilitado pelas notas de campo minuciosas que foram realizadas, permitindo-me ser mais seletiva na transcrição.

4.3.3. Análise documental

O uso da informação proveniente da análise documental para a construção dos estudos de caso pode-se constituir uma técnica valiosa, tanto para complementar como para corroborar as evidências oriundas de outras fontes, como a entrevista e a observação (Flick, 2009; Yin, 2015). Os documentos como fontes de dados oferecem como vantagens a possibilidade de serem acedidos a qualquer momento pela investigadora, quantas vezes forem necessárias, e de oferecerem uma informação contextualizada e exata dos eventos, com nomes, datas e detalhes, podendo trazer clareza à investigação (Yin, 2015). Como pontos fracos, este autor refere a possibilidade de haver uma visão tendenciosa da investigadora tanto para selecionar os documentos — fazendo escolhas arbitrárias sobre os aspetos a serem enfatizados e temáticas a serem focalizadas —, como para fazer relatos baseados em ideias pré-concebidas. Também é um ponto fraco da análise documental a possibilidade de se ter acesso negado aos documentos pelos participantes.

Os documentos recolhidos nesta investigação integram os materiais produzidos pelos professores durantes as sessões de trabalho com os seus pares, como os roteiros das aulas planificadas em conjunto, as tarefas planificadas para introduzir alguns tópicos de Álgebra Linear, as tarefas avaliativas das aprendizagens dos alunos, algumas questões de provas (testes avaliativos) elaboradas em conjunto, os aplicativos do GeoGebra construídos pelos professores, os diários de classe dos professores e as notas de campo da investigadora sobre as observações das aulas e sobre a dinâmica de trabalho nas sessões formais e informais do grupo.

4.4. Análise dos dados

A análise qualitativa de dados é um processo contínuo de busca e organização sistemática de toda a informação recolhida no campo da investigação, com o propósito de aumentar a compreensão pelo investigador do material recolhido e de lhe permitir fornecer explicações de forma clara e organizada sobre o fenômeno em estudo (Bogdan & Biklen, 1994; McMillan & Schumacher, 2014). O processo de análise dos dados envolve, segundo Creswell (2014), "a organização dos dados, a realização de uma leitura preliminar da base de dados, a codificação e organização dos temas, a representação dos dados e a formulação de uma interpretação deles" (p. 146). Como referem Creswell (2014) e Lüdke e André (2013), o processo de análise dos dados não é um passo isolado durante a investigação. Ele acontece desde o início da coleta de dados, e pode-se estender até à redação da tese da pesquisa. Desde a primeira entrevista ou observação, podem resultar elementos que impliquem novas decisões sobre a investigação podendo levar até à reformulação de objetivos ou questões de investigação.

Neste estudo, a análise dos dados foi feita ao longo de toda a investigação, porém foi mais sistêmica e formal após o encerramento da recolha de dados. A organização dos dados iniciou-se ainda na primeira fase da investigação, em que foi realizada uma entrevista (EG) a 15 professores que ensinavam ou já haviam ensinado Álgebra Linear. Nesta etapa, foi realizada uma primeira leitura dos dados dessa entrevista (transcrições) com o intuito de apresentar uma comunicação científica no 'II COLBEDUCA- Colóquio Luso-Brasileiro de Educação', que decorreu em Joinville, Brasil, em 05 e 06 de setembro de 2016. A elaboração dessa comunicação científica foi importante para posteriormente definir duas subcategorias (Estratégias utilizadas no ensino de Álgebra Linear e Dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear) que estruturam uma das categorias de análise (Ensino de Álgebra Linear) dos dados desta primeira fase da investigação. Porém, a análise sistêmica dos dados desta primeira fase da pesquisa ocorreu apenas após o fim da recolha de dados da segunda fase da pesquisa, pelo envolvimento da investigadora que foi necessário nesta fase. Os dados da segunda fase, oriundos das observações (gravações e transcrições), entrevistas (gravações e transcrições) e notas de campo, foram sendo organizados, por ordem cronológica, à medida que foram sendo recolhidos.

Para a análise dos dados de ambas as fases, após a fase inicial de organização dos dados em arquivos de computador, para que fossem facilmente localizados, foram realizadas várias leituras dos dados recolhidos, sem a intenção de os sistematizar, mas com o intuito de perceber as principais ideias e os significados conferidos nas ações dos participantes do estudo. Essa leitura permitiu a identificação de temas e a definição de unidades de análise, que numa etapa posterior foram classificadas num sistema de categorias que pudessem fornecer "por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos" (Bardin, 2009, p. 147). Após a identificação dos temas prosseguiu-se com a fragmentação dos dados (Miles & Hubermam, 1994) em torno destes temas. Da releitura destes fragmentos, os dados foram reduzidos em categorias. Entende-se por redução dos dados, o processo de selecionar, condensar e organizar os dados obtidos na investigação (Miles & Hubermam, 1994). Para o processo de categorização seguiu-se um procedimento aberto, em que as categorias emergiram dos dados, por meio de um método essencialmente indutivo, em que o caminho percorrido pela investigadora partiu dos dados empíricos até a obtenção de uma classificação considerada adequada.

A apresentação dos dados da primeira fase do estudo, oriundos da entrevista inicial, foi organizada em torno de duas categorias: (i) Prática profissional dos professores; e (ii) Ensino de Álgebra Linear. Para além destas categorias, inicia-se a apresentação dos dados com uma 'caracterização dos professores', em que se procura fazer uma descrição dos 15 professores participantes desta fase, destacando-se a sua formação inicial e continuada e a sua experiência profissional. Na categoria referente à 'Prática profissional dos professores', identificam-se as disciplinas que já lecionaram, os aspetos que mais destacam na planificação das suas aulas e as suas perceções e/ou práticas sobre o trabalho colaborativo entre pares. Por fim, procura-se fazer uma caracterização do 'Ensino de Álgebra Linear' dos professores enquadrando-se as suas perceções quanto à sua formação para ensinar esta disciplina, a importância da Álgebra Linear na formação dos alunos, as estratégias de ensino (método de ensino, tipologia de tarefas, envolvimento dos alunos), a exploração de aplicações contextualizadas, os materiais didáticos, a avaliação das aprendizagens dos alunos, as diferenças entre o ensino de Álgebra Linear e noutras disciplinas que lecionam, as dificuldades no ensino e na aprendizagem desta disciplina e a prática de reflexão sobre a sua ação letiva.

Iniciei a análise dos dados da segunda fase desta investigação pelo desenvolvimento do estudo de caso sobre Téo e, posteriormente, desenvolvi o estudo de caso sobre Nina. Ambos os estudos de caso são organizados pelas mesmas categorias que resultam do refinamento dos dados em conjunção com as questões da investigação. Da análise exaustiva e sistemática das transcrições das entrevistas (incluindo a entrevista inicial com todos os professores, na primeira fase), das sessões do grupo de trabalho, e quando necessário, da audição/visualização dos respetivos áudios e imagens, identifiquei momentos significativos em relação às questões que orientam o estudo. A partir do discurso dos professores identifiquei momentos significativos em que os professores manifestavam a sua perceção sobre aspetos do desenvolvimento do seu conhecimento didático, como os relacionados ao ensino de Álgebra Linear, às tarefas, aos materiais didáticos, às dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem, ao papel do aluno nas suas aulas e à avaliação das aprendizagens dos alunos. Temas estes que foram foco das atividades dinamizadas no grupo de trabalho. Das sessões no grupo de trabalho e principalmente das duas entrevistas semiestruturadas foi possível identificar a perceção sobre o trabalho colaborativo de cada professor, bem como as suas perspetivas acerca do contributo do trabalho colaborativo para a sua prática de ensino em Álgebra Linear, e como se transcreve a evolução destas perceções ao longo do trabalho realizado em grupo. Analisei os momentos de trabalho em que os professores planificaram aulas e tarefas, as suas relações de colaboração para o desenvolvimento deste processo e os momentos de reflexão sobre a concretização destas aulas e tarefas.

Diante do quadro de informações que se obteve sobre os professores Téo e Nina, e mediante a análise sobre como eles se envolveram nas atividades desenvolvidas no grupo de trabalho emergiram as seguintes categorias de análise para o desenvolvimento dos casos:

- Perspetivas e prática sobre o trabalho colaborativo;
- Perspetivas sobre o ensino de Álgebra Linear;
- A prática de Téo/Nina no ensino de Álgebra Linear;
- Contributo do trabalho colaborativo na prática de Téo/Nina no ensino de Álgebra Linear.

Inicia-se cada um dos casos com a caracterização de cada professor. Nessa caracterização é feita uma descrição do seu percurso formativo, das razões que o levaram a escolher a sua formação e a adequação dessa formação para o ensino de Álgebra Linear. Dá-se atenção às dinâmicas de formação continuada em que participam e à sua experiência profissional. Procura-se traçar um perfil tanto pessoal como da forma de ser destes professores, destacando o modo como se relacionam com os seus pares e com os alunos e, em traços gerais, como foi a vivência no grupo de trabalho.

Nas 'Perspetivas e prática sobre o trabalho colaborativo' procura-se percorrer uma linha temporal em relação às perspetivas de cada professor sobre o trabalho colaborativo entre pares e como desenvolve as suas relações de colaboração no período que precede o grupo de trabalho, ao fim de um semestre e ao fim de um ano de trabalho com seus pares.

Nas 'Perspetivas sobre o ensino de Álgebra Linear', enquadra-se a forma como cada professor vê o ensino de Álgebra Linear, a forma como se posiciona diante das dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina, como vê o papel do aluno nestes processos, as tarefas propostas aos alunos, os materiais utilizados no ensino da disciplina e o processo de avaliação das aprendizagens dos alunos.

Na categoria 'A prática do professor (Téo/Nina) no ensino de Álgebra Linear', enquadra-se a prática dos professores no ensino de Álgebra Linear durante o período de tempo em que integraram o grupo de trabalho, ilustrando essa prática em duas vertentes, uma que se relaciona ao ensino de tópicos de Álgebra Linear e outra às tarefas de avaliação das aprendizagens dos alunos. Apresenta-se a informação proveniente dos momentos de preparação das aulas, da concretização em sala de aula e da respetiva reflexão no grupo e de algumas tarefas avaliativas.

Na categoria 'Contributo do trabalho colaborativo na prática do professor (Téo/Nina) no ensino de Álgebra Linear', apresenta-se a perceção de cada professor sobre a influência do trabalho realizado sobre a sua prática. Esta perceção é apresentada numa linha evolutiva, ao fim do primeiro semestre de trabalho conjunto e ao fim de um ano. Enquadra-se a perceção dos professores sobre a forma como abordam o conteúdo, como trabalham as tarefas, sobre o papel dos alunos em suas aulas, sobre a ênfase da abordagem geométrica que passaram a ter em suas aulas, sobre o contributo desta ênfase para a aprendizagem dos alunos e a forma como integraram materiais tecnológicos em suas aulas de Álgebra Linear.

Depois de escrito, enviei cada caso ao respetivo professor participante para que realizasse a sua apreciação sobre a adequação das descrições e interpretações realizadas. De modo geral, os professores sentiram-se retratados na descrição dos seus casos:

> Ao ler o texto foi passando um filme pela minha cabeça. Relembrei os momentos em grupo para discussão, a prática colocada em sala de aula, minha postura em relação aos alunos e os resultados vindo deles, até então, nunca alcançados. Houve, realmente, mudanças significativas em relação às aulas ministradas em Álgebra Linear por minha parte. Achei que a autora conseguiu descrever meu percurso durante o tempo de atuação do grupo, meus questionamentos, minhas dúvidas e meu amadurecimento em relação à docência na disciplina. (...) Achei o texto muito bem escrito. Adorei ler! Parabéns! (Nina)
>
> Gostei bastante de ler. No geral, concordo com o que está escrito, mas listei alguns probleminhas ortográficos e detalhes sobre os tópicos onde talvez deva esclarecer o que foi dito. (...) Quando estiver terminado, também vou querer uma cópia da tese. (Téo)

Para além de manifestarem a sua concordância com o texto escrito, ambos os professores sugeriram algumas correções. Com Nina, durante a análise dos dados e a redação do caso, conversei algumas vezes para esclarecer algumas dúvidas quanto à interpretação dos seus dados, como ela mesma refere: "Conversamos algumas vezes, durante a escrita do capítulo, sobre o que eu havia exposto nas entrevistas, gravações de aulas e reuniões. Se a autora estava interpretando de maneira adequada a minha fala e, assim, tentei ajudá-la a esclarecer suas dúvidas" (Nina). Deste modo, realizou poucas correções no texto, que foram de ordem ortográfica e de substituição de alguns termos nas transcrições de suas falas. Por exemplo, alterou o trecho de sua fala "Mesmo sabendo que têm autores que não são a favor, no meu ponto de vista abre a mente" para "Mesmo sabendo que têm autores que não são a favor, no meu ponto de vista facilita a compreensão do conteúdo". Tais alterações não influenciaram as interpretações por mim realizadas.

Da leitura do seu respetivo caso, Téo sugeriu, para além das correções ortográficas e da notação algébrica, algumas correções na sua descrição, como, por exemplo, nas áreas em que obteve a sua titulação de mestre e doutor e a devida justificativa para a escolha delas, nas disciplinas que havia lecionado antes de participar do grupo de trabalho. Também sugeriu uma alteração numa interpretação que realizei, relacionada ao seu ponto de vista sobre a falta de padronização nos livros didáticos de Álgebra Linear em relação à expressão 'matriz Mudança de Base, de α para β. Assim, na Subsecção 7.4.1.1, o trecho do texto apresentado no Quadro 2,

Quadro 2. Versão inicial de um recorte do texto do caso de Téo.

Reconhece que a notação simbólica utilizada para denotar a matriz mudança de base, que é diferente em diferentes livros, e que por vezes confunde a si mesmo, pode também gerar dificuldades nos alunos, pois não há uma notação padrão na literatura. Uma coisa que me confunde até hoje, eu nunca lembro, tenho que dar uma revisada sempre, é que há livros que denotam a matriz de mudança de α para β assim $[I]^{\alpha}_{\beta}$, e outros assim $[I]^{\beta}_{\alpha}$, aí eu nunca lembro qual é qual e qual é a mais usada. (...) Pode ser que os alunos também se deparem com esse material que está invertida a notação e cause alguma estranheza. (EGC6, 16/09/2016)

foi substituído pelo trecho do Quadro 3:

Quadro 3. Versão revisada do recorte do texto do caso de Téo.

Reconhece que a forma como os livros se referem à expressão 'matriz mudança de base, de α para β', é diferente em diferentes livros, e que por vezes confunde a si mesmo, pode também gerar dificuldades nos alunos, pois não há uma padronização na literatura. Há livros que ao usar a expressão 'matriz mudança de base, de α para β', escrevem os vetores da base α como combinação linear do vestores da base β, enquanto outros fazem o contrário, como explica Téo:

No livro do Paulo Boulos (2.ª edição), quando ele diz que certa matriz é a 'matriz de mudança de base, de α para β', ele se refere à matriz que é construída escrevendo cada vetor de β como combinação linear dos vetores de α, e usando os coeficientes para formar as colunas da matriz. Já em Álgebra Linear, usamos a mesma frase para falar da matriz que obtemos ao escrever os vetores de α como combinação dos de β (como no livro da coleção PROFMAT, p.151, por exemplo). Assim, se um aluno desatento usa o Boulos, e continua interpretando a frase como fazia antes, em vez de adotar o novo significado, sempre irá usar a matriz errada ao fazer tais mudanças de base (eu mesmo sempre me confundo com a notação e acabo deduzindo as relações novamente sempre que preciso relembrar como devo usar tal matriz). No contexto apresentado no Boulos, faz sentido ele dizer que está indo de α para β (quando nós diríamos que estamos indo de β para α). (E-mail, 25/08/2019)

Houve outros trechos, particularmente nas transcrições de sua fala, que Téo procurou clarificar. Por exemplo, na Subsecção 7.4.1.2, Téo refere que no trecho: "Por exemplo, nos naturais não vai ter neutro independente de como definir, não vai ter oposto", ele quis dizer, na verdade, que "nos naturais não vai ter neutro (caso sejam definidos como {0, 1, 2, 3,...} em vez de {1, 2, 3, ...}), e também não vai ter oposto". Tais modificações não implicaram em alterações das interpretações realizadas.

Essa devolução das análises, interpretações e conclusões permitiu aos participantes dos estudos de caso julgar a precisão e a credibilidade dos relatos realizados, sustentando, assim, a validação do estudo (Creswell, 2014). Outro ponto que permite sustentar a validação é o facto de serem apresentadas na análise dos dados, de ambas as fases do estudo, as citações nas palavras dos participantes, permitindo ao leitor perceber os acontecimentos e os contextos em que se inserem (Gall et al., 2003).

Por fim, uma referência aos princípios éticos, que transcreveram este estudo do início ao fim. Tomando por referência as orientações de McMillan e Schumacher (2014), após o convite aos participantes, a sua participação no estudo foi voluntária, respeitando-se a sua vontade e liberdade. Procurei preservar a sua identidade, atribuindo-lhes pseudônimos, bem como ser honesta com todos, informando-os dos objetivos da pesquisa e das minhas intenções. Na recolha de dados foi solicitado aos intervenientes em cada uma das fases do estudo o consentimento e assegurado a confidencialidade dos dados, como já referido anteriormente. Procurei conduzir o estudo com honestidade e transparência, apresentando os factos tais como eles ocorreram. Conduzi a análise dos dados com rigor e seriedade, sendo fiel aos dados recolhidos, procurando interpretar os significados a partir da visão dos investigados, sem fazer julgamentos de valor sobre as suas perceções (Bogdan & Biklen, 1994).

Para facilitar a compreensão da origem dos registros utilizados na análise dos dados, as diferentes fontes de informação foram codificadas bem como foram atribuídos pseudônimos aos participantes. Na primeira fase do estudo, de modo a garantir o anonimato dos professores participantes, cada um deles foi identificado pelo pseudônimo Pi, em que $i \in \{1,2,\cdots,15\}$. Desta forma, a informação recolhida nesta fase do estudo, que tem origem na entrevista realizada a cada um dos 15 professores de Álgebra Linear, é identificada pelo código EG_Pi, $i \in \{1,2,\cdots,15\}$. Assim, por exemplo o código EG_P5 refere-se à entrevista geral ao professor P5.

Como já referido, deste grupo foram convidados cinco professores, a par da investigadora, para participar na segunda fase do estudo. Para a identificação destes cinco professores, como constituíam um grupo menor, em vez de utilizar o pseudônimo Pi, atribuí os nomes: Bruna, Nina, Lisa, Téo e Tito. Para a construção dos estudos de caso, ao recorrer às informações referentes à entrevista inicial, em vez de utilizar o código EG_Pi, utilizei simplesmente o código EG, pois em cada caso já é explicito quem é o professor.

As demais fontes de informação utilizadas na análise dos dados foram codificadas conforme o Quadro 4.

Quadro 4. Codificação dos registros utilizados na análise dos dados.

Registros		Codificação
Entrevistas	Entrevista aos professores do grupo no final do 1.º semestre de trabalho	EGR1
	Entrevista aos professores do grupo no final do 2.º semestre de trabalho	EGR2
Registos	Encontro do grupo colaborativo	EGCi, data; $i \in \{1,2,\cdots,33\}$
	Observação da aula j do professor Téo	OATj, $j \in \{1,2,\cdots,6\}$
	Observação da aula j da professora Nina	OANj, $j \in \{1,2,\cdots,6\}$
	Notas de campo da investigadora	NC, mês e ano da anotação

Nas evidências sobre as aulas dos professores Nina e Tito apresentadas nos respetivos casos, aparecem as vozes dos alunos. Para o leitor perceber que são diferentes alunos que se manifestam nas aulas, identifiquei-os pelo código Aluno x, em que $x \in \{1,2,3,\cdots\}$. Importa observar que, por exemplo, a voz do Aluno 1 que aparece na observação de aula de Téo designada por OAT1, não significa que é o mesmo Aluno 1 da aula OAT2. Numerei os alunos em cada aula, na sequência em que apareciam as suas vozes, tomando o cuidado para que em cada aula, após numerados, se uma voz se repetisse, ela fosse sempre designada pela mesma numeração.

CAPÍTULO 5

O GRUPO DE TRABALHO COLABORATIVO

Na realização desse estudo adquiriu expressividade a dinâmica das atividades realizadas por um grupo de professores que, na sua concretização, lecionavam Álgebra Linear na universidade do contexto do estudo. Na explicitação desta dinâmica, neste capítulo faz-se uma descrição da trajetória desse grupo, que inclui o repto lançado aos professores para integrarem um grupo de trabalho entre pares, a caracterização do grupo e as diferentes fases do trabalho do grupo até ao culminar do que se denomina de grupo de trabalho colaborativo.

5.1. A constituição do grupo

No início desta investigação, que coincidiu com o primeiro semestre de 2016, procurei identificar os professores de uma universidade do Brasil que realizassem alguma prática diferenciada no ensino de Álgebra Linear ou no ensino de outra disciplina de Matemática ou que poderiam ter interesse em participar num grupo de trabalho. Entende-se por prática diferenciada a que envolve o aluno na construção do seu conhecimento matemático em detrimento de uma prática que enfatize a atividade do professor na sequência definição–teorema–exemplo–exercícios. Nessa procura, identifiquei um grupo de professores do Centro de Ensino com o maior número de professores atuando em Álgebra Linear e onde seria realizada a pesquisa, que a partir de agora chamarei Campus A –, e uma professora de um outro Centro. Porém, verifiquei que seria inviável ter um participante de fora do Campus A, pela dificuldade logística dela em participar nas reuniões presenciais que se realizassem fora da sua cidade em que leciona e pela minha dificuldade de ter que conciliar uma carga horária de 12 horas de ensino e as observações das aulas dos participantes do grupo do Campus A e do participante externo. Assim, de modo a viabilizar a pesquisa optei por formar o grupo com professores apenas do Campus A. Dessa forma, no primeiro semestre de 2016 contactei os professores do Campus A que constituíram o grupo denominado de trabalho colaborativo. No ato deste contacto enfatizei os objetivos da investigação e os possíveis ganhos que os professores poderiam ter em relação ao seu desenvolvimento profissional e, consequentemente, para o seu ensino e para a aprendizagem dos alunos. Ao todo, foram convidados os sete professores que lecionavam Álgebra Linear, para além de mim, dos quais seis prontamente aceitaram o desafio. Inicialmente, o grupo ficou constituído por mim e pelos professores Tito, Téo, Nina, Lisa, Bruna e Vítor. Neste grupo havia professores com muitos anos de prática letiva na disciplina (Investigadora, Tito, Nina, Bruna e Vítor) e outros que eram iniciantes (Téo e Lisa).

O grupo foi institucionalizado na universidade por meio de um projeto de pesquisa intitulado 'A prática do professor de Álgebra Linear numa perspetiva de trabalho colaborativo', com o objetivo de desenvolver, aplicar e analisar métodos de ensino que pudessem favorecer os processos de ensino e aprendizagem de tópicos da disciplina de Álgebra Linear, num contexto de trabalho colaborativo. O projeto iniciou-se oficialmente na instituição em 01/08/2016 e com a previsão de término em 31/12/2018. Apesar da data oficial de início do projeto ser 01/08/2016, data de início do semestre letivo na instituição, os encontros formais do grupo iniciaram-se um mês antes, tendo em vista a necessidade do grupo de se organizar e de preparar a disciplina de Álgebra Linear para o início das aulas. O período de coleta de dados para a minha pesquisa com o grupo decorreu no período de 01/07/2016 a 30/06/2017.

No primeiro encontro do grupo, realizado em 01/07/2016, revisitaram-se os objetivos da investigação e debateram-se as possíveis implicações na prática do professor e no seu desenvolvimento profissional do trabalho a realizar entre pares. Ao desempenhar o duplo papel de professora e investigadora, procurei clarificar que ao exercer as funções de professora de Álgebra Linear me colocaria perante o grupo como uma professora preocupada com os problemas de ensino e da aprendizagem da disciplina, tendo o grupo autonomia para realizar as atividades que fossem de interesse comum. No grupo, procurei interagir com os demais colegas, tendo como referência as minhas experiências e problemáticas vivenciadas na minha prática, bem como participar na elaboração e concretização de todas as ações do grupo. Na concretização de algumas ações delineadas pelo grupo para a sala de aula, exerci o papel de observadora neste contexto. Após cada observação de aula, procurava, conjuntamente com os professores observados, dar ao grupo um *feedback* das potencialidades e das fragilidades da concretização do que foi idealizado no grupo. Procurava, assim, fomentar a discussão no seio do grupo. Embora no início não se sentissem tão confortáveis com a presença da investigadora em suas aulas e principalmente por estarem sendo filmados, os professores manifestavam estar cientes da importância do *feedback* sobre as suas aulas, tal como refere a professora Nina:

> Eu achei bem positivo tu teres trazido coisas positivas do que assististe em nossas aulas, como por exemplo 'Ah, eu gostei da sua colocação...', 'A Lisa iniciou o assunto de tal forma... acho que ficou melhor assim, o que acham de adaptarmos?'. (Nina, EGR2)

De facto, fui-me apercebendo de que o *feedback* gerado pela observação contribuía para ampliar a discussão no grupo sobre as aulas observadas, tanto no próprio semestre como no semestre seguinte. Por vezes, havia professores adiantados com o conteúdo em relação aos demais ou professores que lecionavam a disciplina em dias distintos uns dos outros e tal *feedback* contribuía para melhorar alguns pontos que geravam dificuldades ou não ficavam tão claros numa determinada turma, previamente à aula de outros colegas.

Cabe destacar que logo nos primeiros encontros, o professor Vítor decidiu retirar-se do grupo porque a sua turma de Álgebra Linear foi cancelada por ter um número de alunos matriculados abaixo do mínimo exigido pela Instituição. O professor argumentou que não se sentia à vontade em participar nas discussões visto que há alguns semestres não ministrava a disciplina e por não ter uma turma para concretizar as ações desenvolvidas no grupo. Com o intuito de retornar a participar no grupo, o professor solicitou para o primeiro semestre de 2017 uma nova turma, e chegou a participar no primeiro encontro do grupo, mas pelos mesmos motivos do semestre anterior decidiu não participar mais. Assim, considera-se nesta investigação o grupo constituído pela investigadora e pelos professores Tito, Téo, Nina, Lisa e Bruna.

5.2. Caracterização do grupo

No mês de julho de 2016 iniciou-se a coleta de dados da pesquisa com os professores do grupo constituído. Tais professores estavam vinculados ao Departamento de Matemática do Centro de Ensino do Campus A e lecionavam em diferentes cursos de Licenciatura (Matemática, Física e Química), de Engenharia (Mecânica, Elétrica, Civil, de Produção e Sistemas) ou de Ciência da Computação. Dentre os professores, três tinham um vínculo laboral efetivo na instituição (Tito, Nina e Bruna), enquanto que os outros dois (Téo e Lisa) tinham um vínculo temporário com a instituição. A fim de caracterizar o grupo como um todo, apresentam-se os traços gerais que marcavam o perfil profissional de cada um dos participantes do grupo, naquele momento:

- Investigadora, com 35 anos de idade, tem graduação em Licenciatura em Matemática pela UFSM, mestrado em Matemática Aplicada (UFRGS), na área de Equações Diferenciais Parciais. Quanto à experiência profissional, não tinha qualquer experiência no Ensino Básico e lecionava há 11 anos no Ensino Superior.
- Tito, com 56 anos de idade, tem graduação em Licenciatura em Matemática pela UFSC, mestrado em Matemática Pura (UFSC) e doutoramento em Matemática Aplicada (UNICAMP). Ambos os cursos de pós-graduação foram realizados na área de Equações Diferenciais Parciais. Em relação à sua experiência profissional, leciona há 25 anos no Ensino Superior, sendo que no início da carreira lecionou por um ano no Ensino Fundamental. Atualmente, atua na instituição onde foi realizado o estudo em dois programas

de Pós-Graduação no nível de mestrado: ProfMat (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) e PPGECMT (Mestrado profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias).

- Téo, com 31 anos de idade, tem graduação em Licenciatura em Matemática pela UFPR, mestrado em Matemática Aplicada (UFPR) na área de Análise Numérica e doutoramento em Matemática Pura (USP-SP) na área de Álgebra. Profissionalmente é o professor mais jovem do grupo, sendo que leciona há um ano e meio na instituição, o que constitui a sua primeira experiência de ensino.
- Nina, 40 anos de idade, tem graduação em Licenciatura em Matemática pela UFSC, mestrado e doutoramento em Engenharia de Produção (UFSC). O mestrado foi na área de Cálculo Diferencial e Integral e o doutoramento na área de Logística e Transporte. A sua primeira experiência de ensino ocorreu nos níveis de ensino Fundamental e Médio, por um ano, e leciona há 14 anos apenas no Ensino Superior.
- Lisa, com 26 anos de idade, é a professora mais jovem do grupo e realizou a sua formação na própria instituição, Licenciatura em Matemática e Mestrado em Engenharia Mecânica, na área de Otimização. Durante a graduação, em algumas disciplinas, foi aluna dos seus colegas de grupo, Tito e Bruna. Tal como Téo, é uma jovem professora com dois anos de experiência no Ensino Superior.
- Bruna, com 42 anos de idade, tem graduação em Licenciatura em Matemática pela UFSC, mestrado e doutoramento em Engenharia de Produção (UFSC) e Pós-doutoramento em Educação Matemática (INRP-França). Leciona no Ensino Superior há 14 anos e no início da carreira lecionou durante três anos no Ensino Fundamental e outros três anos no Ensino Médio em nível Técnico. Ao nível de Pós-Graduação, atua em um Mestrado profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da instituição.

Na fase inicial do trabalho em grupo, a idade dos professores variava entre 26 e 56 anos, inclusive, sendo 38 anos a média das idades.

O grupo era formado por professores que exerciam a sua atividade docente na área diretamente ligada à sua formação. Todos realizaram a graduação em Licenciatura em Matemática, sendo que três cursaram o Mestrado na área de Matemática/Matemática Aplicada e os outros três em Engenharia. Dos seis professores, quatro são doutores, sendo dois na área de Matemática/Matemática Aplicada e os outros dois em Engenharia.

A experiência profissional dos professores era diferenciada em relação ao tempo de docência. Três dos professores já atuaram no Ensino Básico, sendo que um atuou por seis anos e os outros dois por cerca de um ano. Dos professores que só tinham experiência no Ensino Superior, dois deles eram iniciantes na carreira, tendo de um a dois anos de tempo de docência. Dentre os professores mais experientes havia um com 11 anos, dois com 14 anos e um com 25 anos de docência no Ensino Superior. No subgrupo dos mais experientes, dois atuavam no ensino de Pós-Graduação.

Em síntese, tomando como referência os ciclos da vida profissional de professores de Huberman (2000), o grupo era constituído por dois professores que se situavam na fase de entrada na carreira (menos de três anos de experiência profissional), por três professoras na fase de diversificação ou questionamento (7 a 25 anos de experiência) e por um professor na fase de serenidade e distanciamento afetivo (mais de 25 anos de docência).

5.3. Antecedentes do ensino de Álgebra Linear dos professores do grupo

O grupo era composto por dois subgrupos que se distinguiam em relação à experiência de ensino em Álgebra Linear. Téo e Lisa eram os mais inexperientes. Lisa lecionou a disciplina por dois semestres (duas turmas no total), enquanto Téo por um semestre (em três turmas). Os demais professores já ministraram a disciplina no mínimo por oito vezes.

Independentemente da experiência de cada um, as estratégias de ensino a que recorríamos no ensino da Álgebra Linear, antes das atividades realizadas no grupo, possuíam características do ensino tradicional, que se pautava pela exposição dos conteúdos alternada com a resolução de exemplos e de exercícios. Apesar dessas características serem comuns aos professores do grupo, havia outras que os distinguiam na forma como abordavam os conteúdos. Tito, por ter uma formação predominantemente teórica em Álgebra Linear, preocupava-se com esse viés na disciplina, valorizava bastante as demonstrações e pouco os aspetos geométricos dos conceitos, e procurava resolver muitos exercícios em sala de aula para os alunos perceberem como fazer a conexão entre teoria e prática. O professor utilizava como material didático uma apostila, que ele mesmo escreveu (e foi aprimorando ao longo dos anos com a contribuição de colegas), e avaliava os seus alunos essencialmente por provas.

> Eu seguia rigorosamente a apostila e ministrava aulas de maneira tradicional: definição – exemplos – propriedades – teoremas – demonstrações – exercícios. (...) Eu sou muito analítico, gosto de demonstrações e essa parte de visualização geométrica eu não focava muito, não me preocupava em fazer com que os alunos verificassem o sentido geométrico de uma transformação linear, por exemplo. (Tito, EGR1)

Assim como Tito, Téo e Bruna preocupavam-se com os aspetos teóricos. Porém, valorizavam a interpretação geométrica dos conceitos e procuravam, ao introduzirem um conceito, fazer a conexão com o que os alunos já sabiam da Geometria Analítica. Ambos os professores avaliavam os alunos apenas por provas escritas e recorriam a diferentes materiais para planificar as suas aulas, como livros, apostilas e outros materiais que encontravam na Web. Téo revelou que ainda não tinha encontrado uma estratégia que fizesse com que os alunos participassem mais nas suas aulas, enquanto Bruna procurava envolvê-los por meio de questionamentos sobre o assunto explorado, tal como afirma:

> Eu seguia o tradicional: definição, teorema, demonstração, exemplo. Mas, por exemplo, quando começava um assunto novo, procurava dialogar com eles, tentando resgatar o que já sabiam sobre aquilo, procurava conectar com o que já haviam estudado. Quando falava em conjunto LI e LD, por exemplo, procurava explorar a parte gráfica e associar com vetores colineares e não colineares, coplanares e não-coplanares. De forma geral, nas minhas aulas de qualquer disciplina sempre procuro fazer muitas perguntas aos alunos para incentivar eles a participarem da aula e acompanharem o meu raciocínio (Bruna, EGC1, 01/07/2016).
>
> Então antes [de participar do grupo] eu pegava aqueles roteiros do livro ou da apostila como estava pronto, e chegava exatamente na sala de aula com aquele objetivo: 'eu vou passar isso, eu vou fazer isso', e eu fazia. Eu fazia um exemplo simples, um exemplo médio, um exemplo difícil e saía da aula bem feliz. Chegava no final, antes da prova, eu resolvia toda a lista para eles ainda (Bruna, EGC28, 02/06/2017).

Nina e Lisa, ao introduzirem um determinado tópico em Álgebra Linear, também procuravam atender aos conhecimentos prévios dos alunos através de questionamentos. Nos momentos de índole prática das suas aulas, essas professoras procuravam aumentar progressivamente o nível de dificuldade dos exercícios. Ambas costumavam propor exercícios para os alunos resolverem em sala de aula como uma estratégia de os envolver na aula e lhes proporcionar um momento para conhecer as suas dúvidas e procurar esclarecê-las. Nina considera que tende a recolher, muitas vezes, os exercícios resolvidos em sala de aula para lhes atribuir uma nota, que os considera como um elemento de avaliação complementar às provas escritas. Já Lisa, no segundo semestre que lecionou a disciplina, diversificou a avaliação dos alunos ao propor um trabalho que explorava aplicações contextualizadas do tópico Operadores Lineares com recurso à utilização de software. Ambas as professoras utilizavam apostilas e livros para planificar as suas aulas, tal como exemplifica Lisa:

> Eu tento sempre, tanto para iniciar como para desenvolver, ficar associando os conteúdos de Álgebra Linear com coisas que a gente já viu em outras disciplinas. Por exemplo, agora estou trabalhando com transformações lineares, aí falo: 'lembram de Cálculo I, quando uma função é sobrejetora? Ah, então aqui também acontece tal coisa numa transformação sobrejetora'. Lá no começo do semestre quando estava trabalhando com matrizes: 'oh, lembram que vocês viam lá em geometria analítica, aqui a gente faz assim....'. (...) Eu dou o conteúdo, faço exemplos, proponho exercícios e dou um tempo para eles irem resolvendo, enquanto isso passo de carteira em carteira para ajudá-los. Praticamente toda minha aula é assim. (...) Uma experiência que tive foi o trabalho de operadores que você [investigadora] compartilhou comigo a ideia. Os alunos tinham que encontrar uma aplicação dentro do curso deles [sobre operadores], além de pegar alguma figura geométrica e aplicar os operadores lineares nessa figura usando algum software, 95% utilizaram o GeoGebra e o pessoal da Computação fez em Gif. (Lisa, EGC1, 01/07/2016)

Tendo como referência a prática docente dos meus colegas, existem alguns traços que são similares à minha prática. Reconheço que valorizava mais a componente teórica de Álgebra Linear do que as suas aplicações e que procurava mostrar aos alunos como os tópicos estavam interligados, envolvendo os alunos muito timidamente nos processos de ensino e aprendizagem. Ao introduzir um tópico, procurava fazer uma relação entre os conhecimentos prévios dos alunos advindos da Geometria Analítica ou da própria Álgebra Linear com os que estavam a estudar, como também dava ênfase à interpretação geométrica dos conceitos por meio de esquemas gráficos. Na aplicação dos conhecimentos adquiridos, resolvia muitas tarefas em sala de aula, com um nível de dificuldade progressivo, procurando alternar entre tarefas que envolviam demonstração e aquelas que possuíam características mais práticas, que valorizavam o conceito e o método de resolução. Centrava essa resolução na minha atividade com momentos de diálogo com os alunos. Por vezes, após a discussão de algumas resoluções, sobretudo das tarefas que se relacionavam com os temas essenciais para a compreensão de outros, propunha outras tarefas semelhantes às resolvidas para averiguar o desempenho dos alunos. Entretanto, nem sempre dava tempo suficiente para que todos concluíssem a resolução, partindo logo para a discussão. No que respeita às formas de avaliação das aprendizagens dos meus alunos, recorria predominantemente às provas e, por vezes, à resolução de tarefas fora da sala de aula, que eram entregues em diferentes etapas conforme a evolução do conteúdo, com a finalidade de desafiar os alunos a estudar progressivamente.

Ao compararem o seu ensino em Álgebra Linear com o de outras disciplinas que lecionavam, os professores revelaram que o método em sua essência era o mesmo. Porém, em disciplinas cujos conteúdos têm características mais práticas ou envolvem conceitos com uma diversidade de representações, alguns dos professores sentiam-se mais à vontade para lecionar, pela possibilidade de explorar problemas contextualizados e de explorar a relação entre as representações algébrica e gráfica dos conceitos, como revela Bruna.

> No Cálculo eu conheço mais as aplicações. Eu gosto de fazer o aluno enxergar as aplicações. Eu sei da existência de algumas aplicações da Álgebra Linear, mas não sei como funciona, como se resolvem os problemas. Então, se eu posso, eu evito trabalhar com essa disciplina. (...) Eu uso muito o GeoGebra em sala de aula e o Moodle, em apoio à metodologia tradicional. Em Cálculo II, uso o Moodle para fazer fórum de discussão com os alunos. Só que nunca usei essas ferramentas em Álgebra Linear. (Bruna, EGC1, 01/07/2016)

Bruna, Téo e Lisa costumavam explorar a relação entre as diferentes representações por meio de softwares nas disciplinas de Cálculo. Para Bruna, essa exploração acontecia tanto nas atividades de ensino como nas de aprendizagem. Nos casos de Téo e Lisa, tal exploração era restrita ao processo de ensino. Tito e Nina não usavam softwares nas disciplinas que lecionavam, sendo que Tito preferia lecionar Álgebra Linear do que a outras disciplinas, pela sua formação mais teórica. Devido à minha formação, identifico-me com a posição de Tito, pois sempre preferi lecionar Álgebra Linear do que outras disciplinas. Tal posição justifica-se pela minha formação específica na disciplina (durante a graduação realizei um curso de formação em Álgebra Linear noutra instituição e no mestrado cursei uma disciplina específica dessa área) e porque, devido às dificuldades que os alunos manifestam ao frequentar a disciplina devido à sua natureza abstrata, sempre me senti desafiada para procurar diferentes estratégias para explicar o conteúdo de forma que os alunos o compreendessem.

Uma forma de elevar essa compreensão emerge da literatura o uso de softwares ou outros recursos tecnológicos (Diković, 2007), o que não parecia fazer parte da prática da maioria dos professores em Álgebra Linear. Embora eu e a Lisa não tivéssemos o hábito de usar softwares nas aulas desta disciplina, já tínhamos proposto aos alunos uma tarefa extra classe para ser resolvida com o recurso a software. Tito já havia orientado um trabalho de conclusão de curso em que se desenvolveu um artefato para o ensino de Operadores Lineares, porém nunca recorreu a tal recurso, nem a softwares no ensino de Álgebra Linear. A experimentação desse artefato decorreu nas minhas aulas, em que a orientanda de Tito desempenhou o papel de observadora. Devido às suas potencialidades para o ensino de Operadores Lineares, acabei por o incorporar na minha prática. Já Téo costumava indicar aos alunos softwares para cálculos matriciais e alguns vídeos com conteúdos relacionados à disciplina para explorarem fora da sala de aula, mas para lecionar recorria apenas ao quadro e giz, assim como acontecia com os demais professores.

A dificuldade manifestada por Bruna em integrar na sua prática letiva de Álgebra Linear a exploração de aplicações contextualizadas também era compartilhada pelos demais professores. Apesar de reconhecermos a Álgebra Linear como uma ferramenta básica para outras disciplinas, com aplicações em várias áreas do conhecimento, nós apenas indicávamos aos alunos algumas das aplicações, mas não as explorávamos concretamente, como evidencia o diálogo entre Nina, Téo e Lisa no primeiro encontro do grupo:

> Nina: Eu sei que alguma coisa de Álgebra Linear se utiliza em Cálculo Numérico, mas tem muita coisa da disciplina que vai ser tão específico no curso deles que eu não consigo fazer esse *link* com outras disciplinas como eu faço com Cálculo I, com Geometria Analítica. Eu tento falar, por exemplo, na Mecânica vai precisar de Álgebra Linear para a força de um motor, na Computação a parte de Computação Gráfica. Mas eu não sei o que de Computação Gráfica levar para a sala de aula

para eles perceberem a importância da Álgebra Linear. Eu como professora tenho essa dificuldade de levar para a sala de aula porque não sei qual é a disciplina que vai usar a Álgebra Linear.

Téo: A gente acaba falando que serve para alguma coisa e quando chegar lá na frente do curso vão saber para que serve.

Nina: Eu sinto essa dificuldade nos alunos, eu como aluna pensava, mas o que é essa transformação linear? Tinha dificuldade de enxergar aquilo como função. É uma coisa difícil para o aluno abstrair. É importante, claro que é. Precisa estudar, sim, precisa. Eles estudam porque precisam passar na disciplina, mas não conseguem enxergar lá na frente a importância.

Lisa: Esse semestre consegui falar para meus alunos (...) como meu mestrado foi em Mecânica, quando chegou na parte de diagonalização, 'olha como facilita trabalhar com a matriz diagonal do que com outras bases'. Falei que no meu mestrado trabalhava com matrizes de ordem 300×300, tudo computacional, e imagina quanto tempo o computador ia levar se a matriz não estivesse na forma diagonal. (EGC1, 01/07/2016)

Apesar de termos consciência de que apenas falar aos alunos das aplicações sem os envolver na resolução de problemas que os levassem a refletir sobre o uso da teoria nessa resolução, é um tanto ineficaz para eles perceberem a importância da disciplina e a relação teoria *e* prática, não tínhamos iniciativas para minimizar essa lacuna nas nossas práticas.

Além da dificuldade em trabalhar com os alunos as aplicações contextualizadas dos tópicos de Álgebra Linear, tínhamos outras dificuldades no ensino desta disciplina. Como se constatou no primeiro estudo da pesquisa, a maior dificuldade era explicar os conceitos abstratos da Álgebra Linear de forma que os alunos pudessem entendê-los e 'convencer' os alunos para a importância de aprenderem os conceitos abstratos, como refere Téo:

> A principal [dificuldade] é de convencer quem está vendo essas coisas pela primeira vez de que abstrair algumas ideias e trabalhar no contexto abstrato e teórico é importante em algum sentido. Eles não veem à primeira vista porque tem que ver toda essa teoria. Eles pensam: 'Essa aula está muito chata. Porque essas coisas são teóricas, para que serve?'. Quando está numa disciplina mais abstrata é difícil convencer. Não tem uma coisa diretamente que você já pode contar para que vai servir. Cria uma espécie de indisposição dos alunos para estudar este assunto. Então você vai falar de espaço vetorial, subespaço vetorial, base, geradores.... Esses conceitos a princípio não têm um contexto. (Téo, EG)

Nina, particularmente, tinha dificuldades no ensino de alguns Operadores Lineares específicos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, pela falta da sua própria compreensão do conteúdo, ficando a sua prática limitada a uma transferência da teoria envolvida. Também Bruna não se sentia à vontade para ensinar Espaços Vetoriais pela sua dificuldade de visualizar aplicações para tal tópico. Eu sentia-me frustrada por perceber que a minha estratégia de ensino era ineficiente para os alunos com dificuldades e por não me permitir envolver os alunos o suficiente para se sentirem motivados a superarem as suas dificuldades. Muitos alunos ao terem um fraco desempenho nas duas primeiras avaliações acabavam por desistir da disciplina.

Um outro aspeto importante da prática dos professores é a forma como lidam com os erros e as dificuldades dos alunos. Reconhecer os erros e as dificuldades é importante para o professor definir a sua estratégia de ensino. Entretanto, o tratamento didático que o professor dá ao erro e às dificuldades dos alunos pode conduzi-los à sua superação (Barros et al., 2016). Segundo os professores, o reconhecimento dos erros e das dificuldades dos alunos acontecia principalmente quando manifestavam as suas dúvidas em sala de aula através de questionamentos ou nos momentos de atendimento ao aluno que disponibilizavam extra classe. Bruna e Lisa, como costumavam propor exercícios para serem resolvidos em sala de aula, tinham a oportunidade de identificarem as dificuldades também nesses momentos, além do momento de atendimento extra classe. Enquanto os alunos não manifestassem pessoalmente estas dúvidas, o reconhecimento acontecia apenas no momento da correção da avaliação escrita.

Diante das dificuldades os professores recorriam a diferentes estratégias para tentar minimizá-las. Nina, procurava explorar diferentes formas para explicar o conteúdo e muitas vezes invertia a sequência de conteúdos de forma que ficasse mais claro aos alunos, tendo em vista as dificuldades manifestadas em semestres anteriores ou no próprio semestre letivo, no caso de lecionar duas turmas diferentes. Já em relação à avaliação das aprendizagens dos alunos, Nina procurava inserir questões semelhantes às que propunha em listas de 'exercícios', valorizando mais à memorização dos alunos do que o raciocínio e o entendimento do conteúdo. Entretanto, a professora proporcionava aos alunos o acesso à correção das avaliações e procurava esclarecer o porquê dos erros, caso os alunos questionassem, pois nem sempre os alunos procuram, de forma geral, os professores para verificar os erros cometidos.

Bruna procurava explicar o conteúdo de diferentes formas quando os alunos manifestavam as suas dúvidas e resolver as questões das avaliações no quadro fazendo uma discussão com os alunos sobre os seus erros. Além disso, procurava resgatar com frequência os tópicos já estudados e que eram pré-requisitos para o tópico que estava sendo explorado.

Téo, diferentemente de Bruna, não discutia a resolução da avaliação com a turma toda, apenas individualmente conforme o interesse dos alunos, mas, a partir da segunda avaliação (eram quatro no total), procurava propor uma questão extra que envolvesse o conteúdo da avaliação anterior como estratégia para incentivar os alunos a estudarem e superarem as dificuldades relacionadas com os conteúdos já explorados.

Lisa e Tito, diante das dificuldades dos alunos costumavam resolver mais exercícios em sala de aula e dar um *feedback* das avaliações individualmente aos alunos que os procuravam nos horários de atendimento extra classe.

Por fim, o meu reconhecimento das dificuldades dos alunos acontecia quando manifestavam as suas dúvidas na sala de aula, no atendimento extra classe e nas avaliações. Diante das suas dificuldades mantinha uma postura semelhante à descrita por Bruna.

5.4. A dinâmica de trabalho no grupo

Nesta secção, procuro evidenciar o que constituiu o trabalho no grupo por meio de quatro subsecções principais. A primeira, trata de aspetos gerais sobre os encontros do grupo. A segunda, incide sobre os antecedentes do grupo em relação ao trabalho colaborativo, bem como as expectativas dos participantes em relação ao projeto colaborativo, elementos que foram fundamentais para a definição dos objetivos comuns para o trabalho em grupo. A terceira, aborda as fases em torno das quais se concebeu o projeto e as negociações que ocorreram no seu processo de desenvolvimento. Por fim, a quarta subsecção recai sobre as problemáticas que constituíram objeto de reflexão e análise no seio do grupo.

5.4.1. Aspetos gerais sobre os encontros do grupo

Como já mencionado, o período de coleta de dados da pesquisa no grupo ocorreu no período de 01/07/2016 a 30/06/2017. Os encontros formais do grupo ocorreram às sextas-feiras no Campus A, durante o horário de trabalho dos professores. No período de julho a dezembro de 2016 houve 15 encontros, sendo, em média, quinzenais, com duração de 1h40min e ocorreram em diferentes salas do Campus A. Nesse período, em alguns momentos de discussão e planificação de propostas de ensino, houve a necessidade de encontros mais frequentes, alguns dos quais acontecerem além da sexta-feira, visto que a planificação deveria ficar concluída para essas propostas serem concretizadas em conformidade com o cronograma da disciplina. Já no período de fevereiro a junho de 2017 houve 18 encontros, sendo em média semanais e com duração de 2h10min. Tais encontros ocorreram numa sala fixa, equipada com mesa de reuniões, com quadro branco e com um ecrã grande em que se projetava o que se fazia no computador possibilitando uma melhor visualização das atividades e uma melhor interação entre os elementos do grupo. Com os encontros mais frequentes, o grupo ampliou as suas discussões abrangendo um número maior de tópicos que no semestre anterior.

Destaca-se que, para além dos momentos de trabalho no grupo nos encontros agendados, por vezes, os professores encontravam-se noutros momentos para dar continuidade aos assuntos tratados nos encontros, com especial ênfase para a discussão de práticas de ensino ou para a execução de tarefas.

Quanto à organização dos encontros, procurava-se deixar agendado o tema da reunião seguinte, mas nem sempre se conseguia cumprir o que era planeado. Por vezes, surgiam demandas individuais de alguns professores que necessitavam de atenção do grupo, ou havia a necessidade de uma maior discussão sobre alguma tarefa proposta aos alunos nas semanas anteriores. Também pela necessidade de retomada de discussões, de encontros anteriores, seja para aprimorar uma tarefa ou sanar dúvidas sobre ela a algum membro do grupo que faltou ao encontro em que a mesma foi discutida, sendo assim necessário readequar a pauta dos encontros. De forma geral, procurava-se que no início de cada encontro todos os participantes fizessem uma avaliação geral de como ocorreram as suas aulas na última quinzena/semana e na sequência trabalhava-se em torno de temas previamente selecionados e considerados pertinentes ao grupo.

Como forma de organizar a informação do grupo, foi criada uma pasta na nuvem de armazenamento Dropbox[7] em que todos os participantes tinham livre acesso para consultar, incluir ou modificar arquivos. Assim, todos podiam aceder todo o material produzido ou adaptado pelo grupo, alguns dos trabalhos realizados pelos alunos, algumas referências bibliográficas e as provas elaboradas por cada professor.

A coordenação mais técnica dos encontros foi realizada na maioria das vezes pela investigadora. Essa coordenação dizia respeito à viabilização dos encontros (reserva de sala para a realização dos encontros, envio de e-mails aos participantes com informações sobre os encontros) e à condução do trabalho no grupo no que diz respeito à abertura e ao fechamento dos encontros, bem como ao cuidado com a rentabilização do tempo, procurando que o grupo retornasse ao foco do trabalho quando havia momentos de dispersão. No restante do trabalho no grupo todas as decisões eram tomadas conjuntamente e em comum acordo.

Em síntese, o trabalho realizado no grupo ao longo dos 33 encontros (julho de 2016 a junho de 2017) envolveu:

[7] O dropbox é um serviço para armazenamento e partilha de arquivos entre dois ou mais computadores de forma síncrona.

- Partilha das práticas dos professores;
- Desenvolvimento de novas práticas de ensino;
- A elaboração de tarefas avaliativas aos alunos;
- A avaliação/reflexão das práticas planificadas em conjunto;
- Desenvolvimento/adaptação de materiais didáticos para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear;
- Análise da resolução dos alunos de algumas tarefas planificadas em conjunto;
- Integração da tecnologia nas práticas de ensino de Álgebra Linear;
- Divulgação científica de alguns dados produzidos pelo grupo.

Estes pontos serão apresentados e discutidos com mais detalhe na subsecção 5.4.4. Na subsecção seguinte (5.4.2.) apresento os antecedentes do grupo em relação ao trabalho colaborativo e como essa experiência influenciou, juntamente com as expectativas individuais de cada um, a definição dos objetivos comuns para o trabalho no grupo.

5.4.2. Experiência do grupo com o trabalho colaborativo

No seu percurso profissional, quatro dentre os seis professores do grupo já vivenciaram uma experiência de trabalho entre pares por meio de um Projeto de Ensino que envolvia as disciplinas de Cálculo (Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo Diferencial e Integral II), Geometria Analítica e Álgebra Linear no Campus A, cujo objetivo era melhorar os processos de ensino e aprendizagem das disciplinas envolvidas (Figueiredo et al., 2014). Cada disciplina tinha um coordenador, sendo que diversos professores se alternaram nesse papel durante oito anos de duração do projeto (2002 a 2010). Como já explicitado na secção 5.2. deste capítulo, o coordenador conjuntamente com os demais professores que lecionavam a mesma disciplina planificavam o plano de ensino das disciplinas (sequência do conteúdo, material didático e cronograma) e elaboravam as avaliações que eram iguais para todas as turmas. Porém, não havia discussão sobre diferentes abordagens que poderiam ser dadas no ensino das disciplinas, nem reflexão sobre a prática de ensino dos professores. À exceção de Geometria Analítica, em que se utilizava um livro como material didático, nas demais disciplinas envolvidas no projeto utilizavam-se apostilas. Quando o projeto se iniciou, cada coordenador escreveu uma apostila que ao longo do tempo foi sendo aprimorada com a contribuição dos professores participantes no projeto.

Durante o tempo vigente do projeto, Tito atuou na disciplina de Álgebra Linear, inclusive no papel de coordenador por alguns anos; Bruna atuou nas disciplinas de Álgebra Linear e de Cálculo Diferencial e Integral II, sendo coordenadora dessa última disciplina por alguns anos; Nina atuou em Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral I; e eu atuei nas quatro disciplinas envolvidas no projeto, sendo também coordenadora de Álgebra Linear por três anos.

No primeiro encontro do nosso grupo, Bruna, Tito, Nina e eu procuramos apontar potencialidades e fragilidades do projeto que vivenciamos. Um ponto frágil apontado foi o 'engessamento' da prática de ensino dos professores em razão da unificação de avaliações e conteúdos, o que implicava que cada disciplina fosse lecionada da mesma forma, sem levar em consideração as necessidades e particularidades de cada turma, como explicam Bruna e Tito:

> Um ponto muito frágil é que o projeto tinha como meta que todo mundo usasse a mesma bibliografia e a mesma prova. Então, até se tinha liberdade de adotar um livro, mas como tinha uma apostila, o grupo ficava muito preso ao material. O grupo discutiu muito mais avaliação e não o que fazer quando a metodologia adotada não estava dando certo. Perdíamos também a identidade das turmas, porque se quiséssemos focar num experimento específico nos atrasaríamos em relação ao cronograma, não iríamos conseguir fazer a prova na data marcada. (Bruna, EGC1)
>
> Os professores ficavam um pouco incomodados com a questão da unificação, pois cada turma corre numa velocidade diferente da outra. Às vezes o professor tem uma turma um pouco mais fraca, com dificuldades, aí não consegue cumprir o conteúdo pois tem que ir mais devagar, ele quer fazer a prova de acordo com o conteúdo que ele deu e da forma como conseguiu trabalhar, já tem outros professores que vão mais rápido. (Tito, EGC1)

Por outro lado, reconhecíamos que o projeto tinha como ponto positivo o suporte aos professores iniciantes nas disciplinas, no sentido de contarem com o apoio dos colegas para esclarecerem as suas dúvidas e terem um material didático organizado que contemplasse todo o conteúdo que seria abordado. Além disso, em razão das provas unificadas, havia um esforço geral para que o conteúdo fosse abordado na íntegra. Bruna aponta algumas potencialidades do projeto:

> Quando entrei aqui na universidade uma das primeiras disciplinas que tive que dar aula foi Álgebra Linear. Foi a disciplina que mais temia em dar aula porque como aluna sentia dificuldades nessa disciplina. E uma coisa boa na época foi o projeto de ensino de Álgebra Linear, não pelo facto de as provas serem unificadas, mas por ter apoio dos colegas do projeto para sanar minhas dúvidas. (...) Outra coisa boa do projeto é que o conteúdo de facto era trabalhado na íntegra. (Bruna, EGC1)

No grupo, constatamos que a experiência anterior de trabalho entre pares vivenciada no projeto de ensino incidiu sobre a padronização do método de ensino, das avaliações e do material didático e não havia preocupação em discutir e propor melhorias nas práticas de ensino. Constatamos também que nem todos os professores que participaram no projeto de ensino tinham clareza suficiente sobre o que é a colaboração e como trabalhar colaborativamente, como aponta, por exemplo, o diálogo entre Tito e Nina sobre vantagens e desvantagens do trabalho colaborativo:

> A vantagem é a troca de informações. Se tiver pessoas diferentes, têm ideias diferentes, ideias novas. Quando você leciona por muito tempo uma mesma disciplina, você começa a ficar sem ideias, não consegue ver coisas novas. Então, tendo um grupo, mesmo que você já esteja lecionando a disciplina há um tempo, sempre vai ter coisas novas, sempre vai ter gente pesquisando em outras fontes. Acredito que essa seria a vantagem, a troca de informações, a questão de trazer coisas novas. (...) No projeto de ensino que tivemos, uma questão negativa era que, eu como coordenador, pedia sugestão de questões para os professores, eles não davam, a gente se reunia, mas ninguém colaborava, era para ser um grupo colaborativo, mas o pessoal não colaborava muito. Acabava que eu elaborava as questões e as repassava aos professores, eles as avaliavam e davam um *feedback*. Não vinham com questões para a gente discutir. Discutiam o que eu tinha elaborado. Também vejo, não que seja um ponto negativo, mas alguns professores se sentem amarrados. Ah, estou num grupo então vou ter que fazer aquilo que um ou outro estão querendo fazer, gosto de fazer da minha maneira. Mas isso é uma questão individual. (Tito, EGC1)
>
> Mas sabe porquê Tito? Porque quando tu participas de um grupo como esse tu tens que sair da zona de conforto e tu não quer sair. Aí, então o que acontece? Ah eu quero fazer do meu jeito, não quero fazer daquele jeito. Porquê? Porque daquele jeito tu vais ter que sair da zona de conforto e do teu jeito tu continuas fazendo do jeito que sempre fez. Então acho que não é um ponto negativo, é um ponto positivo. Quem não gosta de sair da zona de conforto não deveria participar de grupo colaborativo. (Nina, EGC1)

Para Tito, uma vantagem de se trabalhar colaborativamente é a troca de informações e ideias entre os pares, o que pode ter implicações na inovação da prática docente. Por outro lado, ao tomar como referência a sua experiência no projeto de ensino em que participou, apresenta alguma resistência em relação ao trabalho entre pares, pois o modelo de trabalho utilizado em tal projeto contraria o que é apontado na literatura sobre o que é o trabalho colaborativo. Tito destacou que o grupo discutia o que ele (coordenador) elaborava e que os pares não traziam ideias e sugestões para a atividade a ser construída (a avaliação). Hargreaves (1998) considera que para que um trabalho em colaboração tenha êxito, algum tipo de liderança/coordenação deve haver para que o grupo não se perca pelo caminho. Essa liderança pode ser assumida por uma única pessoa, pode ser compartilhada ou pode haver rotatividade entre os participantes para assumirem esse papel. No entanto, o líder/coordenador deve exercer o seu papel no sentido de viabilizar o trabalho e não o de executar uma tarefa e os pares apenas a avaliarem, como foi o papel assumido por Tito. Como apontam Boavida e Ponte (2002) e Fiorentini

(2004), num trabalho colaborativo todos colaboram, não numa relação hierárquica, mas sim numa relação de igualdade, em torno de um objetivo comum negociado pelo grupo, e todos colaboram sabendo que é o melhor para si e para o grupo. Em relação ao que refere Tito sobre 'professores se sentem amarrados', numa verdadeira colaboração uma ideia não sobrepõe a outra e uma voz não apaga outra (Hargreaves, 1998). Trabalhar em colaboração significa sair da zona de conforto, como salientou Nina, e estar aberto à novidade, estar aberto para apresentar as suas ideias e ouvir críticas, estar aberto para ouvir o que o outro tem a dizer e analisar as suas ideias criticamente (Goulet et al., 2003), e em cima das ideias apresentadas construírem as que serão do grupo como um todo.

A partir da reflexão sobre as experiências anteriores do grupo em relação ao trabalho entre pares e sobre a colaboração – este último tema recorrente em alguns encontros como pode ser visto na subsecção 5.4.3 –, foi consenso que o novo projeto deveria ter características diferentes do projeto anterior, com foco na discussão dos processos de ensino e aprendizagem e no aperfeiçoamento das práticas dos professores.

Segundo Boavida e Ponte (2002), uma pessoa pode envolver-se num projeto colaborativo por diversas razões. Todos nós tínhamos as nossas expectativas pessoais em relação ao novo projeto, mas, ao mesmo tempo, estávamos motivados por um interesse comum, inovar a nossa prática de ensino em Álgebra Linear e, consequentemente, melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da disciplina, tal como ilustram as expectativas de alguns dos professores:

> Minha maior expectativa está em conhecer metodologias novas para trabalhar essa disciplina. Também em relação à motivação, em fazer algo que motive a gente a ir para a sala de aula e que motive o aluno a estudar Álgebra Linear. (Nina, EGC1)
>
> A minha expectativa é aprender mais. Eu preparei a disciplina no primeiro semestre onde eu era dependente de minhas notas de aula, teve algumas coisas que não gostei, alterei-as para a segunda vez e já ficou melhor, e assim vai indo. Se a gente não compartilha, não conversa com os colegas vai ficando naquela mesma aula sempre. Quando a gente vê que alguém faz algo diferente, surgem ideias legais. Por exemplo, em Cálculo I, eu e Sara sempre trabalhamos juntas, e toda a parte de funções fizemos as aulas em PowerPoint e exploramos o GeoGebra. Como as turmas eram pequenas, juntamos as turmas na mesma sala e nós duas ministramos a aula de funções, foi muito bom. Uma ia complementando o que a outra dizia. (Lisa, EGC1)
>
> Em termos de tecnologia, é um campo que me sinto bem confortável. Do grupo eu gostaria exatamente de partilhar outras metodologias que eu não domino. Por exemplo, a experiência de Lisa com a Engenharia Mecânica, de Nina com a Logística e Transporte, são coisas com as quais eu gostaria de incrementar minha prática. (Bruna, EGC1)
>
> Não sei se tenho expectativas, mas dificuldade sim, em usar tecnologia. Como usar a tecnologia para ensinar Álgebra Linear? Eu sei que existe, eu sei onde procurar. Como eu fazer isso na sala de aula? É isso que eu gostaria. (Tito, EGC1)

Minha expectativa é a troca de ideias sobre aspetos didáticos do ensino dessa disciplina, aprender novas abordagens para o ensino. (Téo, EGC1)

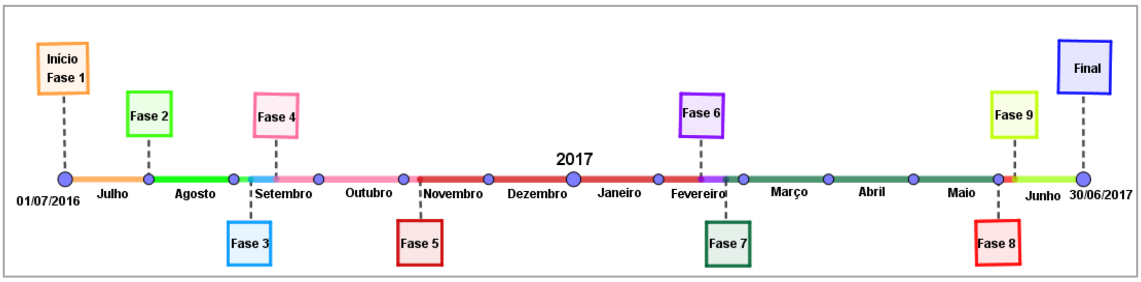
Levando em consideração as expectativas dos professores e o interesse comum em aperfeiçoar as suas práticas, o grupo decidiu priorizar a integração da tecnologia no ensino de Álgebra Linear, a exploração de aplicações práticas dos conteúdos, a motivação dos alunos para aprender os conteúdos e a utilização de diferentes formas de avaliação. Tais expectativas foram revisitadas ao longo do trabalho no grupo e os interesses não mudaram, apenas se ampliaram sobre as novas possibilidades que surgiram e sobre os aspetos que poderiam ser melhorados nas ações realizadas e na dinâmica do trabalho em conjunto. Por exemplo, a expectativa de Bruna para o segundo semestre de trabalho era que o grupo, quando fizesse as planificações, se preocupasse mais com o envolvimento dos alunos nas atividades dinamizadas na sala de aula. Téo gostaria que o grupo pensasse com antecipação nas estratégias para contemplar todo o cronograma da disciplina, visto que no semestre anterior nenhum dos professores conseguiu abordar o capítulo de Produto Interno.

Na secção seguinte procuro explicitar as fases em que se desenvolveu o trabalho no grupo e as negociações que ocorreram. Para um melhor entendimento dos conteúdos abordados em tais fases, importa destacar que: (i) o currículo de Álgebra Linear dos cursos do Campus A envolve os conteúdos matrizes, determinantes, sistemas lineares, espaços vetoriais, transformações lineares, operadores lineares, autovalores e autovetores e produto interno; (ii) a carga horária total da disciplina é de 72 aulas (aulas de 50 minutos), decorrendo 4 aulas por semana; e (iii) as turmas não são exclusivas de um dado curso, podendo ter tanto alunos de cursos de Licenciatura (Física e Matemática) como de Ciência da Computação ou de Engenharia.

5.4.3. Fases do desenvolvimento do trabalho colaborativo

O desenvolvimento das atividades realizadas no grupo ocorreu em nove fases, conforme ilustra a Figura 7.

Figura 7.Fases de desenvolvimento do trabalho no grupo.



Tais fases não foram na sua totalidade previstas antecipadamente, mas interligam-se e foram decorrendo conforme as necessidades e a evolução das atividades realizadas no grupo:

- Fase 1: Apresentação do grupo. Identificação das práticas de ensino em Álgebra Linear de cada professor. Identificação das conceções e experiências de cada um sobre o trabalho colaborativo. Identificação de interesses comuns para o trabalho no grupo. Discussão do plano de ensino da disciplina de Álgebra Linear.
- Fase 2: Busca de aplicações contextualizadas relacionadas com o curso que cada professor lecionava e sua incorporação na prática de ensino.
- Fase 3: Seminário sobre o tema 'colaboração'. Discussão sobre métodos de ensino (como envolver os alunos nas aulas, como trabalhar os erros dos alunos).
- Fase 4: Encontros intercalando discussões sobre métodos de ensino, planificação de propostas de ensino, elaboração de tarefas com carácter avaliativo e listas de 'exercícios', reflexão sobre as propostas planificadas e concretizadas.
- Fase 5: Avaliação interna do grupo. Avaliação do impacto das atividades propostas pelos professores do grupo no desempenho dos alunos. Planeamento de algumas atividades do grupo para o semestre seguinte.
- Fase 6: Revisita do tema colaboração. Discussão sobre o funcionamento do grupo. Discussão do plano de ensino.
- Fase 7: Encontros intercalando reuniões de discussão sobre o ensino de tópicos de Álgebra Linear, formas de os abordar, elaboração de propostas de ensino. Elaboração de uma proposta de comunicação do grupo.
- Fase 8: Balanço do trabalho realizado e definição de metas. Reflexão sobre a forma como cada um colabora no grupo e sobre o que pode ser melhorado para a rentabilização do trabalho.
- Fase 9: Planificação de uma tarefa. Análise, reflexão e aprimoramento de algumas propostas de ensino e de algumas tarefas.

Para um melhor entendimento do trabalho realizado pelo grupo, procuro fazer uma breve descrição do caminho percorrido em cada uma das fases, de forma a esclarecer como as fases estão interligadas.

Na primeira fase (Quadro 5), para dar início aos trabalhos, procurei retomar com o grupo algumas questões que já havia feito na entrevista referente ao primeiro estudo da pesquisa (Capítulo 6), para que cada participante conhecesse as experiências profissionais, a prática, as conceções e dificuldades do colega em relação ao ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear. Para Goulet et al. (2003), à medida que verbalizamos as nossas experiências aos outros, estamos organizando o nosso próprio pensamento e expressando ideias para nós mesmos. Nesse sentido, procurei criar, por meio da troca de experiências e ideias, um momento de reflexão e identificação de um interesse comum entre os participantes que guiasse pelo menos as primeiras ações do grupo. Identificou-se, como já explicitado na subsecção 5.4.2., que todos tinham o interesse de melhorar a sua prática letiva de forma que favorecesse a aprendizagem dos alunos. Para isso, o grupo quis debruçar-se sobre alguns pontos que consideravam frágeis na sua prática, tais como: a exploração de aplicações contextualizadas de tópicos de Álgebra Linear; a integração da tecnologia no ensino de Álgebra Linear; o processo de avaliação dos alunos; e formas de motivar os alunos para aprendizagem da disciplina. Além disso, discutiu-se o plano de ensino da disciplina na reunião de 29/07/2017, pois faltavam três dias para o início do semestre e apenas um professor tinha elaborado o seu plano.

Quadro 5. Síntese das atividades realizadas na primeira fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	Duração	Síntese	Participantes
01/07/2016	1h50min	▪ Apresentação dos participantes. Antecedentes dos participantes sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear. ▪ Identificação da conceção dos professores em relação à colaboração. ▪ Identificação dos interesses individuais e comuns. ▪ Definição de uma pauta geral de trabalho para os primeiros encontros e de uma tarefa para o encontro seguinte: cada participante deve apresentar uma aplicação sobre matrizes ou sistemas lineares, direcionada ao curso que vai trabalhar no semestre que se inicia em 01/08/2016.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo, Vítor.
29/07/2016	2h	▪ Apresentação e discussão sobre a tarefa realizada por Tito e Bruna. ▪ Discussão do plano de ensino da disciplina. Definição da pauta do encontro seguinte.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo

A segunda fase (Quadro 6), interligada à primeira, foi constituída pela inserção de aplicações contextualizadas na prática dos professores com o intuito de motivar os alunos para a importância da Álgebra Linear e aprendizagem dos tópicos Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Para isso, cada professor pesquisou aplicações relacionadas ao curso que iria lecionar e apresentou ao grupo. A discussão no grupo implicou na integração em suas aulas de algumas aplicações, na proposição de um trabalho avaliativo aos alunos envolvendo aplicações por três dos professores e no aprimoramento de uma lista de tarefas já utilizada pelos professores incluindo problemas contextualizados.

Quadro 6. Síntese das atividades realizadas na segunda fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	Duração	Síntese	Participantes
12/08/2016	1h20min	▪ Apresentação e discussão da tarefa realizada pela investigadora, Nina e Téo. ▪ Apresentação de uma atividade deixada voluntariamente por Bruna (ausente no encontro) sobre operações com matrizes utilizando o GeoGebra. ▪ Discussão sobre as aulas decorridas. ▪ Discussão sobre um trabalho avaliativo que alguns dos professores pretendem propor aos alunos. ▪ Definição da pauta do encontro seguinte.	Investigadora, Tito, Nina, Lisa, Téo
26/08/2016	1h30min	▪ Relato da investigadora e de Lisa sobre como foi a experiência do trabalho de sistemas lineares. ▪ Discussão sobre como dar um feedback aos alunos sobre a apresentação de trabalhos e como envolver mais os alunos nas aulas. ▪ Início das discussões para planificar uma tarefa sobre Operadores Lineares.	Investigadora, Bruna, Tito, Lisa, Téo, Vítor

Ao finalizarmos a segunda fase (2 meses de trabalho), percebemos que com encontros quinzenais ficávamos muito tempo sem discutir nossas práticas e nesse intervalo o cronograma da disciplina avançava, implicando que alguns tópicos de interesse não fossem discutidos em tempo hábil a serem lecionados. Além disso, não tínhamos feito um plano de ação para o período seguinte. Assim, tomando por referência Boavida e Ponte (2002), que ressaltam que o desenvolvimento de um projeto colaborativo envolve várias fases de ação e reflexão, considerei importante fazer uma avaliação no grupo sobre o trabalho em si, a forma como era realizado e sobre como poderíamos fazer para potencializar o trabalho em busca dos objetivos comuns ao grupo. Assim, aproveitamos a presença de um pesquisador da área de Educação Matemática no Campus A, para se reunir com o grupo e fazer um seminário acerca do tema Colaboração e uma discussão sobre metodologias de ensino (estratégias de ensino, como envolver os alunos nas aulas, como trabalhar os erros dos alunos) (Fase 3 – Quadro 7).

Quadro 7. Síntese das atividades realizadas na terceira fase do trabalho em grupo.

Data do Encontro	Duração	Síntese	Participantes
06/09/2016	1h36min	▪ Seminário sobre colaboração e como trabalhar colaborativamente. ▪ Avaliação sobre o trabalho realizado e discussão acerca de metodologias de ensino. ▪ Definição do tema da primeira aula a ser planificada em conjunto.	Investigadora, Tito, Nina, Lisa, Téo, Bruna, Vítor

Como implicação da reflexão realizada, no que identifiquei como quarta fase (Quadro 8) na trajetória do grupo, percebeu-se que no primeiro semestre letivo de trabalho o grupo não conseguiria discutir estratégias para o ensino de todos os tópicos da disciplina. Assim, o grupo escolheu alguns tópicos de interesse para trabalhar. Essa escolha não ocorreu toda de uma vez. Primeiro o grupo escolheu um tópico, depois foi escolhendo os demais conforme o desenrolar das aulas e a evolução da dinâmica do trabalho em grupo. Nessa fase tiveram lugar encontros intercalando discussões sobre métodos de ensino, planificação de práticas de ensino, planificação de tarefas e listas de exercícios, reflexão sobre as práticas planificadas e concretizadas e aprimoramento dessas práticas.

Importa ressaltar que na proposta de ensino nessa fase (quarta) sobre Coordenadas e Mudança de Base, o grupo desenvolveu um aplicativo no GeoGebra para explorar diferentes representações destes conceitos com os alunos. Porém, quem utilizou este recurso foi o professor e não os alunos. Na avaliação, pelo grupo, sobre a prática levantou-se a hipótese de que o uso do GeoGebra poderia ter um efeito mais significativo na exploração das diferentes representações se o aluno o explorasse ao invés de olhar o professor utilizando-o. Essa observação foi levada em consideração pelo grupo ao planificar, na sequência, uma tarefa sobre Operadores Lineares que envolvia a exploração do GeoGebra pelo aluno.

Na quarta fase também realizei a primeira observação de aulas planificadas no grupo. Foram observadas três aulas sobre Coordenadas e Mudança de Base.

Quadro 8. Síntese das atividades realizadas na quarta fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	**Duração**	**Síntese**	**Participantes**
16/09/2016	2h37min	▪ Planificação da proposta de ensino sobre Coordenadas e Mudança de Base.	Investigadora, Lisa, Tito, Téo, Bruna
23/09/2016	1h53min	▪ Planificação da avaliação sobre Mudança de Base.	Investigadora, Lisa, Nina, Téo, Bruna
07/10/2016	1h41min	▪ Avaliação da concretização da proposta sobre Mudança de base. ▪ Início das discussões para elaborar um trabalho avaliativo sobre Operadores Lineares.	Investigadora, Lisa, Nina, Téo, Tito
10/10/2016	1h35min	▪ Continuação das discussões para elaborar o trabalho avaliativo sobre Operadores Lineares.	Investigadora, Tito, Nina, Téo, Bruna
17/10/2016	48 min	▪ Discussão sobre uma proposta de trabalho concretizada pela investigadora, Bruna e Tito a partir das discussões dos encontros anteriores.	Investigadora, Téo, Tito
21/10/2016	2h	▪ Finalização da proposta do Trabalho de Operadores Lineares. ▪ Discussão sobre a reformulação da lista de tarefas sobre Autovalores e Autovetores utilizada em semestres anteriores.	Investigadora, Lisa, Nina, Téo, Bruna

A quinta fase (Quadro 9) decorreu no final do semestre letivo, por isso foi marcada como um período de avaliação. Foram analisadas em conjunto as resoluções dos alunos para uma tarefa avaliativa de Mudança de Base e outra de Operadores Lineares e realizado o aprimoramento dessas tarefas. Tais tarefas tinham sido analisadas individualmente pelos professores, mas no grupo efetuou-se uma análise mais profunda no sentido de avaliar o impacto das tarefas na aprendizagem dos alunos, refletir sobre as fragilidades da proposição dessas tarefas, além de identificar as dificuldades dos alunos e suas causas. Também foram analisados os resultados alcançados e identificados aspetos que precisavam de ser melhorados tanto na organização do trabalho no grupo como nas abordagens de alguns conteúdos.

Dentre tais aspetos, observou-se que algumas dificuldades que os alunos tiveram com o uso do GeoGebra na tarefa de Operadores Lineares foram decorrentes da falta da familiarização do aluno com o uso do software. Ficou evidente que essa falta de familiarização também esteve presente na prática de alguns professores que tiveram dificuldades na hora de avaliar os trabalhos – além da dificuldade com o uso do software, no grupo não foi discutido como avaliar a tarefa. Também constatou-se que os professores não corrigiam as tarefas em devido tempo e assim não davam um *feedback* aos alunos em tempo hábil à realização das provas. Assim, o grupo concluiu que os pontos levantados deveriam ser fruto de debate no semestre letivo seguinte. Por fim, houve uma avaliação do impacto do trabalho realizado no grupo na aprendizagem dos alunos, que foi considerado positivo, comparando-se os índices de aprovação/reprovação com os dos semestres anteriores.

Quadro 9. Síntese das atividades realizadas na quinta fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	**Duração**	**Síntese**	**Participantes**
04/11/2016	1h47min	▪ Reformulação da lista de tarefas sobre Autovalores e Autovetores. ▪ Análise da resolução (erros/acertos) pelos alunos de uma questão sobre Mudança de Base na segunda avaliação que foi discutida em conjunto no grupo e fazia parte da prática elaborada em conjunto.	Investigadora, Bruna, Téo, lisa
18/11/2016	2h	▪ Continuação da análise da resolução (erros/acertos) pelos alunos da questão sobre Mudança de Base na segunda avaliação.	Investigadora, Tito, Bruna, Lisa, Téo
02/12/2016	1h25min	▪ Análise de alguns trabalhos realizados pelos alunos no GeoGebra sobre operadores lineares e discussão sobre o que melhorar na abordagem e nas questões.	Investigadora, Tito, Téo, Bruna
16/12/2016	2h15min	▪ Avaliação do semestre letivo. ▪ Avaliação do trabalho de Transformações lineares e reestruturação de algumas questões para o próximo semestre. ▪ Definição de diretrizes para a escrita de um artigo sobre o trabalho realizado no grupo.	Investigadora, Téo, Nina, Lisa, Téo, Bruna

A sexta fase (Quadro 10) marca o início do primeiro semestre letivo de 2017. Assim, fizemos uma revisita ao tema 'Colaboração' a partir da discussão do artigo 'Potencialidades e desafios da Investigação Colaborativa' de Boavida e Ponte (2002). Procurei que cada elemento do grupo fizesse uma avaliação do trabalho realizado no semestre anterior e que apontasse as suas expectativas para a continuidade do trabalho. A partir da discussão gerada definimos os objetivos comuns para a continuidade do trabalho, além de decidirmos sobre pontos que deveriam ser melhorados na condução do trabalho no seio do grupo e na prática da sala de aula. Foi realizada uma discussão do plano de ensino da disciplina (como no semestre anterior, apenas Bruna o tinha feito). Também ficou acordado que os encontros do grupo seriam semanais.

Quadro 10. Síntese das atividades realizadas na sexta fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	**Duração**	**Síntese**	**Participantes**
15/02/2017	2h11min	▪ Discussão acerca do tema Colaboração: vantagens, formas de promover a colaboração, dificuldades. ▪ Levantamento das expectativas de cada um sobre o que esperava de si e dos demais colegas para a continuação do trabalho no grupo. ▪ Discussão sobre o funcionamento do grupo (comprometimento com as tarefas, periodicidade de reuniões). ▪ Discussão sobre o plano de ensino da disciplina.	Investigadora, Tito, Nina, Téo, Bruna, Vítor

A fase seguinte (sétima fase, Quadro 11) foi marcada pela discussão sobre tópicos de Álgebra Linear, formas de os abordar, elaboração de práticas de ensino e reimplementação de algumas das práticas e tarefas do semestre anterior (Coordenadas e Mudança de Base; Operadores Lineares). Modificou-se a abordagem do tópico Matrizes, onde foram desenvolvidas duas tarefas que exploravam aplicações contextualizadas com recurso a software pelos alunos. A análise de uma dessas tarefas resultou numa comunicação escrita pelo grupo (Siple et al., 2017). Decidiu-se por não realizar com os alunos um trabalho sobre Sistemas Lineares concretizado no semestre anterior por alguns dos participantes, porque o grupo avaliou que os objetivos foram atingidos parcialmente. Criou-se uma proposta de ensino para introduzir Espaços Vetoriais, que era uma dificuldade apontada pelos professores no primeiro estudo da pesquisa (Capítulo 6) e também pelos professores do grupo. Foi readaptada a lista de tarefas sobre Espaços Vetoriais de forma que refletisse a nova abordagem dada ao conceito de espaços Vetoriais. Foi elaborada nova abordagem para introduzir Transformações Lineares, uma tarefa sobre Produto Interno (tópico que não foi abordado no semestre anterior pela falta de tempo no cronograma da disciplina em decorrência da demora para realização de algumas tarefas em sala de aula). Um aspeto importante nessa fase foi a preocupação do grupo em 'instrumentalizar' os professores para o uso do GeoGebra.

Quadro 11. Síntese das atividades realizadas na sétima fase do trabalho em grupo.

Data do Encontro	Duração	Síntese	Participantes
24/02/2017	1h57min	▪ Discussão sobre a concretização e aprimoramento de um pré-teste sobre Matrizes elaborado/partilhado por Tito. ▪ Elaboração de uma proposta de um trabalho avaliativo sobre Multiplicação de Matrizes com o uso do GeoGebra.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo.
03/03/2017	2h24min	▪ Continuação da discussão sobre o trabalho avaliativo sobre Multiplicação de Matrizes com o uso do GeoGebra. ▪ Discussão de uma proposta apresentada pela investigadora sobre uma tarefa envolvendo a inversa de uma Matriz e Criptografia.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo.
17/03/2017	2h	▪ Análise do andamento das aulas e da concretização de trabalhos pelos alunos. ▪ Discussão de um vídeo sobre Transformações Lineares partilhado por Téo. ▪ Discussão sobre como envolver mais os alunos na aula. ▪ Discussão/elaboração de uma proposta inicial de um trabalho sobre Produto Interno.	Investigadora, Bruna, Tito, Lisa, Téo.
24/03/2017	2h28min	▪ Início de uma discussão de como abordar Espaços Vetoriais. ▪ Planificação de uma proposta de ensino para introduzir o conceito de Espaços Vetoriais.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo.
31/03/2017	2h28min	▪ Discussão/avaliação da concretização da prática sobre o conceito de Espaços Vetoriais.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo.

07/04/2017	1h30min	▪ Discussão sobre uma proposta apresentada por Téo sobre aplicações de Espaços Vetoriais utilizando a escala logarítmica. ▪ Discussão de uma proposta de artigo apresentada por Bruna sobre a tarefa de Multiplicação de Matrizes e divisão de tarefas para a sua concretização. ▪ Discussão/avaliação sobre a concretização da prática de ensino sobre aplicações de espaços vetoriais utilizando a escala logarítmica. ▪ Discussão sobre pontos a serem melhorados na lista de tarefas sobre Espaços vetoriais. ▪ Revisita ao material sobre a prática de ensino de Mudança de Base elaborada no semestre anterior e definição em conjunto de como abordar o assunto em função da experiência do grupo com tal atividade. ▪ Correção do artigo escrito pelo grupo após as sugestões dos revisores.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo.
28/04/2017	2h	▪ Discussão/avaliação sobre a concretização da avaliação escrita sobre espaços vetoriais e especificamente sobre uma questão envolvendo a definição de Espaço Vetorial que foi elaborada em conjunto. ▪ Discussão e adaptação do aplicativo desenvolvido no GeoGebra no semestre anterior para o ensino de Mudança de Base.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Lisa, Téo.
05/05/2017	2h33min	▪ Feedback sobre a concretização da prática de Mudança de Base por cada professor. ▪ Adaptação de uma questão comum sobre Mudança de Base que foi cobrada na avaliação do semestre anterior. ▪ Discussão inicial sobre como abordar a definição de Transformações lineares. ▪ Aprimoramento da proposta de trabalho sobre Produto Interno discutida no encontro de 17/03/2017.	Investigadora, Bruna, Nina, Lisa, Téo.
12/05/2017	2h37min	▪ Análise das questões e da concretização de uma tarefa introdutória do conceito de Transformações Lineares elaborada por Bruna, Téo e Tito fora das reuniões do grupo e compartilhada com o grupo. ▪ Estudo das potencialidades do GeoGebra 3D para o ensino de Operadores Lineares.	Investigadora, Bruna, Tito, Nina, Téo.
19/05/2017	2h	▪ Revisita às questões e diretrizes da proposta do trabalho de Operadores Lineares, elaborada/concretizada no semestre anterior e análise de alterações sugeridas por Téo. ▪ Discussão e aprimoramento sobre a proposta de como abordar Produto Interno discutida em 05/05/2017.	Investigadora, Bruna, Lisa, Téo.
26/05/2017	1h49min	▪ Continuação da elaboração da proposta para abordar Produto Interno. ▪ Discussão sobre como introduzir o conceito de Autovalores e Autovetores (Tito apresenta uma proposta por escrito e o grupo discute como ensinar o tal conceito utilizando um aplicativo desenvolvido no GeoGebra por Téo a partir de ideias que nasceram no grupo).	Investigadora, Bruna, Tito, Téo.

A oitava fase (Quadro 12) foi marcada por um balanço do trabalho realizado, avaliação das metas alcançadas e definição de novas metas. Como faltava pouco mais de um mês para o término do semestre letivo, o grupo decidiu discutir a abordagem a ser dada ao tópico Autovalores e Autovetores, a concretização de uma tarefa sobre Produto Interno e debruçar-se-ia numa análise 'mais fina' sobre as práticas e tarefas concretizadas para posterior divulgação científica dos dados do grupo. Também foi realizada uma reflexão sobre a forma como cada um colabora no grupo e sobre o que pode ser melhorado para a rentabilização do trabalho.

Quadro 12. Síntese das atividades realizadas na oitava fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	**Duração**	**Síntese**	**Participantes**
02/06/2017	02h34min	▪ Validação pelo grupo da versão final da abordagem a ser dada ao tópico de Produto Interno. ▪ Discussão sobre como introduzir o conceito de Autovalores e Autovetores. ▪ Balanço do trabalho realizado envolvendo: revisita aos objetivos do trabalho em grupo, reflexão sobre a forma como cada um colabora no grupo e sobre pontos que podem ser melhorados para atingir os objetivos do grupo.	Investigadora, Bruna, Tito, Téo, Nina.

Tendo em vista as metas definidas, na última fase do trabalho (nona fase, Quadro 13) em grupo (durante a coleta de dados da pesquisa) foram realizadas discussões sobre como abordar o tópico Autovalores e Autovetores. Também foi finalizada a planificação de uma tarefa sobre Produto Interno e realizada a análise da sua concretização. Foram analisados e avaliados em conjunto os trabalhos dos alunos realizados no GeoGebra e discutido como seria o *feedback* desses trabalhos aos alunos. Por fim, foram analisadas as resoluções dos alunos de uma tarefa sobre Espaços Vetoriais, com o objetivo de avaliar tal tarefa e a prática de Espaços Vetoriais desenvolvida no grupo.

Quadro 13. Síntese das atividades realizadas na nona fase do trabalho em grupo.

Data do encontro	**Duração**	**Síntese**	**Participantes**
09/06/2017	1h53min	▪ Análise dos trabalhos dos alunos (dos professores presentes no encontro) sobre Operadores Lineares realizados no GeoGebra. ▪ Breve discussão de uma questão comum sobre Produto Interno a ser colocada na última avaliação.	Investigadora, Tito, Téo, Nina.
23/06/2017	2h10min	▪ Elaboração da questão comum de Produto Interno para última avaliação. ▪ Análise e reflexão sobre a prática de ensino para introduzir Espaços Vetoriais.	Investigadora, Bruna, Tito, Téo, Nina.
30/06/2017	1h53min	▪ Análise da resolução dos alunos de uma questão da avaliação sobre Espaços Vetoriais, relativa à prática construída para introduzir Espaços Vetoriais.	Investigadora, Bruna, Tito, Téo, Nina.

A descrição das fases traz um panorama do caminho percorrido pelo grupo durante o período de coleta de dados para a pesquisa. Após esse período, no segundo semestre letivo de 2017 (agosto a dezembro), o grupo continuou a encontrar-se quinzenalmente, porém sem a presença da Professora

Lisa, que por ter iniciado um curso de Pós-Graduação não conseguiu mais participar das reuniões do grupo desde o final do mês de maio de 2017. O grupo continuou se reunindo em 2018, com um novo elemento, um professor de Álgebra Linear com vínculo institucional de colaborador recém-contratado, e sem a presença da investigadora por se encontrar em Portugal para concluir as atividades da sua pesquisa.

Na próxima subsecção procuro apresentar cada um dos principais problemáticas identificadas e tratadas nos encontros do grupo.

5.4.4. Reflexões/discussões no grupo

Vários foram os elementos que constituíram foco de discussão e reflexão no seio do grupo e, em função deles, várias foram as atividades realizadas. Alguns desses elementos surgiram do contexto das planificações ou reflexões sobre as aulas. Procuro percorrer nesta secção aqueles elementos que estiveram presentes, de forma transversal, nos vários encontros.

Partilha de experiências. Na maioria dos encontros do grupo, o primeiro momento era reservado para a partilha das experiências vivenciadas nas aulas dos professores entre um encontro e outro. Esses momentos tinham como objetivo incentivar os professores, ao verbalizarem aos colegas a sua experiência, a refletir sobre ela. Assim, procurava-se que cada participante partilhasse com os colegas aspetos relacionados com o andamento das suas aulas, por exemplo: como foi a abordagem dos tópicos e se aconteceu conforme o planificado; quais foram os objetivos alcançados; quais as dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem; o que poderia ser melhorado, dentre outras coisas.

Nos momentos de planificação conjunta de tópicos de Álgebra Linear ou tarefas para os alunos, também se procurava que todos os participantes partilhassem as suas experiências em relação à temática em questão (como ensinava determinado tópico, quais as dificuldades enfrentadas, que materiais utilizava, como envolvia os alunos, como fazia a avaliação dos alunos) para que a partir delas se construísse a nova prática ou a nova tarefa. Para exemplificar, uma tarefa avaliativa proposta aos alunos sobre Operadores Lineares foi construída tomando por referência uma experiência com outra tarefa compartilhada pela investigadora e por Lisa e por um trabalho de conclusão de curso de graduação que foi realizado alguns anos antes sob a orientação de Tito, como evidencia Bruna:

> Não é o trabalho da Lisa, da Bruna, do Téo, do Tito. Foi uma composição que ficou um trabalho bacana. Realmente foi um trabalho construído a várias mãos de uma ideia que já nasceu de coisas que já tinham sido feitas e que a gente adaptou, inclusive trabalhos

de pesquisa. Fomos adaptando, dizendo ‘Essa questão aqui não explora isso’. Acho que foi um trabalho muito bacana. (Bruna, EGC12)

A avaliação de Bruna quanto à construção da tarefa de Operadores Lineares no grupo, infere que a tarefa foi construída a partir de uma análise crítica sobre as experiências partilhadas pelos colegas.

Desenvolvimento de propostas de ensino. As propostas de ensino planificadas pelo grupo (Quadro 14) foram desenvolvidas para tópicos que o grupo considerava essenciais para a compreensão da disciplina e, sobretudo, para tópicos que os professores consideravam que os alunos tinham mais dificuldades.

Quadro 14. Temas das propostas de ensino planificadas no grupo.

Tema	**Descrição da prática**	**Objetivo**	**Número de aulas envolvidas/semestre**
Introdução ao estudo de matrizes	▪ Realização de uma tarefa pelos alunos em sala de aula sobre matrizes e operações com matrizes; ▪ Discussão na turma sobre a correção da tarefa.	▪ Identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre tipos de matrizes e operações com matrizes.	Duas horas/aula (2017/01).
Introdução a Espaços Vetoriais	▪ Realização da 1.ª etapa de uma tarefa pelos alunos em pequenos grupos; ▪ Discussão em grande grupo sobre a resolução da 1.ª etapa; ▪ Definição de espaço vetorial; ▪ Realização da 2.ª etapa de uma tarefa pelos alunos em pequenos grupos; ▪ Discussão em grande grupo sobre a resolução da 2.ª etapa; ▪ Realização de uma tarefa em pequenos grupos com interpretação geométrica e física das operações de soma e multiplicação por escalar utilizadas na 2.ª etapa da tarefa; ▪ Correção da tarefa com auxílio do GeoGebra.	▪ Explorar o conceito de ‘fechamento’ de um conjunto para as operações de soma e multiplicação por escalar; ▪ Explorar a transição entre as representações gráfica e simbólica de conjuntos no plano; ▪ Introduzir o conceito de Espaço vetorial; ▪ Interpretar geometricamente e fisicamente algumas operações não usuais de soma e multiplicação por escalar.	Seis horas/aula (2017/01).
Coordenadas e Mudança de Base	▪ Introdução pelo professor do conceito de coordenadas; ▪ Exploração dialogada de um problema contextualizado envolvendo coordenadas e mudança de referencial; ▪ Resolução de uma tarefa pelos alunos em pequenos grupos com questões introdutórias ao conteúdo de Mudança de Base; ▪ Discussão em grande grupo sobre a correção da tarefa (com alunos resolvendo no quadro e com o auxílio do GeoGebra); ▪ Construção de forma dialogada da generalização da Mudança de Base.	▪ Explorar o conceito de coordenadas e mudança de base; ▪ Explorar a interpretação geométrica dos conceitos de coordenadas e de mudança de base; ▪ Explorar a transição entre as diferentes representações de tais conceitos com recurso ao lápis e papel e ao GeoGebra.	Seis horas/aula no semestre 2016/02 e quatro horas aula no semestre 2017/01.

Introdução a Transformações Lineares	▪ Resolução de tarefa pelos alunos em pequenos grupos; ▪ Discussão em grande grupo sobre a correção e conclusões da tarefa; ▪ Introdução de forma dialogada do conceito de transformações lineares.	▪ Explorar no $\mathbb{R}^2$ geometricamente e algebricamente o conceito de transformação linear; ▪ Introduzir tal conceito para espaços vetoriais quaisquer.	Duas horas/aula (2017/01)
Autovalores e Autovetores	▪ Exploração dialogada sobre o conceito de Autovalores e Autovetores com o auxílio do quadro e giz e do software GeoGebra	▪ Introduzir e interpretar geometricamente o conceito de o conceito de Autovalores e Autovetores e algumas propriedades.	Quatro horas/aula (2017/01)
Produto Interno	▪ Desenvolvimento de um estudo dirigido sobre o conteúdo de Produto Interno. ▪ Desenvolvimento de uma questão avaliativa sobre o tópico.	▪ Propiciar aos alunos o estudo de forma independente do tópico, visto que não haveria tempo suficiente no cronograma da disciplina para o professor abordar em sala de aula.	Uma hora aula (resolução da questão avaliativa) 2017/01

Dessa forma, na planificação de propostas de ensino o grupo preocupou-se em como introduzir os tópicos, como explorar aplicações contextualizadas referentes à temática estudada, como explorar a visualização geométrica dos conceitos, como envolver o aluno, como avaliar e como trabalhar o erro e as dificuldades dos alunos.

Na introdução dos tópicos, a preocupação era motivar o aluno para a sua aprendizagem e proporcionar-lhe, dentro do possível, o significado daquela teoria estudada no contexto da formação inicial de um aluno de graduação. Nos momentos de trabalho para introduzir tópicos de Álgebra Linear, Tito exerceu um papel importante, pois a partir da sua participação no grupo começou voluntariamente a planificar as aulas de forma que antes da apresentação de um teorema, por exemplo, surgisse um exercício introdutório para que no final se pudesse questionar 'será que essa ideia funciona para outros casos?'. A ideia era despertar no aluno o espírito investigativo que justificaria a veracidade das conjeturas propostas, trabalhando assim com a generalização. Tito compartilhou essa abordagem com os colegas, tomando por referência o *princípio da concretização* de Harel (2000), que pressupõe que os alunos abstraem os conceitos a partir da compreensão dos mesmos num contexto que é concreto para eles. Em termos gerais, pretendia-se desenvolver as propostas de ensino de forma que as noções fossem abordadas primeiramente no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ para então se construir a generalização.

Ao explorar os conceitos nos espaços vetoriais do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, procurou-se abordar as representações algébrica e geométrica dos conceitos e a transição entre essas representações. Essa exploração tomou lugar principalmente nas tarefas propostas para introduzir alguns conceitos e em tarefas avaliativas. A visualização geométrica dos conceitos foi explorada a partir de esboços gráficos e com o uso do GeoGebra (pelo professor e pelo aluno).

Com o intuito de os alunos se tornassem mais ativos em relação à sua aprendizagem, importava envolvê-los na execução das tais tarefas introdutórias das noções estudadas (seja em pequenos grupos ou individualmente), nas discussões em grande grupo sobre essas tarefas (apresentando suas conclusões oralmente ou no quadro). Também se procurou envolvê-los na resolução de tarefas fora da sala de aula (com recurso a papel e lápis e/ou ao GeoGebra). Alguns dos professores solicitaram aos alunos a socialização no grande grupo sobre estas tarefas.

Na discussão e elaboração das propostas de ensino, a preocupação com a contextualização do conteúdo abordado sempre esteve presente, principalmente para motivar o aluno para compreender a importância de se aprender aquele conteúdo. Esse não foi um caminho fácil ao grupo, pois como já exposto, os professores não tinham muito conhecimento de situações concretas (do dia a dia) que poderiam ser exploradas em sala de aula. Assim foram necessárias muitas pesquisas (na Web, em materiais didáticos, em artigos) e discussões no grupo para a integração de algumas aplicações na prática de ensino, que na sua maior parte foram geométricas. Para exemplificar, foram introduzidos alguns problemas de modelagem matemática no estudo de Sistemas Lineares, tanto na abordagem em sala de aula, como na lista de tarefas e na avaliação. Mas para isso foi necessário que cada professor pesquisasse esses problemas no contexto do curso que estava lecionando e apresentasse aos colegas de grupo para discussão e para um entendimento geral dos problemas em si.

Na planificação de propostas de ensino, o grupo incidiu as suas preocupações sobre formas de avaliar as aprendizagens dos alunos de acordo com a abordagem dada ao conteúdo. Isso não aconteceu de imediato, mas foi acontecendo aos poucos, como refere Nina: "No começo me angustiava o fato de mudar a metodologia de abordar o conteúdo e não mudar minha forma de avaliar. Com o passar do tempo o grupo adaptou as provas às aulas dadas. Achei isso muito bom" (Nina, EGR1). Cabe salientar que as provas não eram unificadas para todos os membros do grupo, mas com o passar do tempo passou-se a elaborar alguma questão comum referente a tópicos planificados em conjunto. O espírito que se criou no grupo impulsionou os professores a partilhar as provas que elaboravam na pasta comum da nuvem Dropbox, para que todos tivessem acesso. Em algumas situações, alguns professores juntarem-se para elaborar em conjunto algumas provas tendo em consideração as particularidades da abordagem dada por cada professor, como destaca Bruna:

> Nessa última prova, eu e a Nina elaboramos uma parte juntas. Porém Nina colocou uma questão [de autovalores e autovetores] envolvendo polinômios e eu não trabalhei nenhuma [desse tipo] com minha turma em sala de aula. Então preferi colocar uma questão envolvendo matrizes, pois trabalhei bastante autovalores e autovetores envolvendo matrizes. (Bruna, EGC12)

Nos momentos de planificação de aulas também se discutia como trabalhar o erro e as dificuldades dos alunos. Discutia-se a importância de não se dar respostas prontas aos alunos, mas sim fazer questionamentos que levassem o aluno a identificar o seu erro ou encontrar a resposta para sua dúvida. Discutia-se também a importância de se dar um *feedback* aos alunos diante das tarefas propostas e também sobre o como e quando fazer isso. Importa destacar que a preocupação com todos estes dois últimos itens destacados ocorreu de forma progressiva conforme a evolução do trabalho em grupo.

Avaliação dos alunos. Como já referido, uma das preocupações do grupo foi a diversificação de formas de avaliação das aprendizagens dos alunos. Para além das provas escritas, os 'trabalhos' passaram a compor a média semestral. Tais trabalhos foram pensados no sentido de envolver os alunos na disciplina, propiciar momentos de discussão em grupo, incentivar o estudo progressivo do conteúdo e não apenas em véspera de provas e despertar nos alunos a perceção da importância da disciplina. Procurou-se por meio das tarefas que compunham tais trabalhos fazer a conexão entre a teoria e a prática, com ênfase na exploração de aplicações contextualizadas, nas discussões em grupo, na visualização geométrica e no uso do GeoGebra. O Quadro 15 apresenta os temas envolvidos em cada um dos trabalhos avaliativos planificados e concretizados pelo grupo.

Quadro 15. Trabalhos avaliativos planificados e concretizados pelo grupo.

Tema	**Objetivo(s)**	**Concretizado por:**	**Semestre**
Aplicações de Sistemas Lineares	▪ Relacionar a teoria de sistemas lineares com a formação acadêmica.	Investigadora, Lisa e Nina	2016/02
Aplicações da Álgebra Linear	▪ Relacionar a teoria da Álgebra Linear com a formação acadêmica.	Bruna e Tito	2016/02
Transformações Lineares e Operadores Lineares especiais	▪ Explorar no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ o conceito de Transformação Linear e a transição entre as representações algébrica e geométrica desse conceito. ▪ Construir um aplicativo no GeoGebra para explorar diferentes representações de alguns operadores lineares especiais.	Grupo	2016/02 e 2017/01
Interpretação geométrica do produto de matrizes	▪ Explorar a interpretação geométrica do produto de matrizes, na computação gráfica, mediada pelo GeoGebra.	Grupo	2017/01
Criptografia	▪ Codificar/decodificar uma mensagem utilizando o produto de matrizes e a inversa de uma matriz.	Grupo	2017/01

Convém destacar que os dois primeiros trabalhos que constam no Quadro 15, surgiram de iniciativas anteriores de alguns professores e foram discutidos no segundo encontro do grupo. Nem todos os professores concretizaram o trabalho avaliativo. Dentre os que concretizaram, escolheram a temática que consideravam adequada para ser trabalhada ainda naquele semestre. Conforme o trabalho foi sendo concretizado, foi realizada a apresentação e discussão do mesmo no grupo. Como implicação da reflexão, para o semestre seguinte, decidiu-se pela não concretização do mesmo e por abordar algumas aplicações da Álgebra Linear por outros caminhos, como, por exemplo, pelos trabalhos sobre 'Interpretação geométrica do produto de matrizes' e 'Criptografia'.

Importa observar que Téo, apesar de participar na planificação do primeiro trabalho, não o concretizou. Foi o único professor que não considerou no primeiro semestre os trabalhos que concretizou como componente obrigatória da avaliação. O professor considerou como pontuação extra às provas correspondentes ao conteúdo envolvido nos trabalhos. Ao chegar ao final do primeiro semestre de trabalho no grupo, considerou positiva a experiência com essa forma de avaliação e a adotou como componente obrigatória no semestre seguinte, como revelou:

> Outra estratégia em que fiquei interessado depois de ver os relatos do grupo, mas que ainda não explorei, é o uso de trabalhos como parte obrigatória da avaliação, em mais de um momento do semestre e/ou com apresentação dos [trabalhos pelos] alunos em aula. (Téo, EGR1)

Envolvimento dos alunos. A discussão de estratégias de como envolver mais os alunos no seu processo de aprendizagem tomou lugar em vários encontros do grupo, sendo mais intensa no segundo semestre letivo de trabalho. Para exemplificar, uma dessas discussões foi realizada no primeiro encontro de 2017 (EGC12), quando se avaliou que no semestre anterior se realizaram algumas mudanças positivas nas práticas de ensino, porém as estratégias utilizadas ainda exigiam pouco envolvimento do aluno. O seguinte recorte ilustra tal discussão no grupo:

> Bruna: A gente construiu bastante coisa, a gente mudou muitas coisas na maneira de ensinar. Mas na maneira de envolver os alunos, eu acho que ainda a gente ficou bastante no tradicional. (...) Na aula de Mudança de Base, quando utilizei o aplicativo no GeoGebra eu ia lá e digitava a base. Era eu fazendo, não era o aluno fazendo. E em muitas outras situações, eu levei e disse: 'ah meu Deus, eu trouxe isso aqui'. Mas era eu pensando, não era o aluno pensando (...). Nós continuamos ainda centralizadores de: 'Ah, isso eu tenho que passar, isso eu tenho que dar'. [Temos que nos preocupar] em como jogar mais a responsabilidade para o aluno e ter uma aula mais produtiva neste sentido.
>
> Nina: [Uma possibilidade] é trabalhar mais com exercício em sala de aula. (...) Eu adoro trabalhar com exercícios em sala de aula, eles fazem duplas. Eu gosto porque é o único momento que eu consigo ver se o aluno está aprendendo, se ele está entendendo o que eu falei ou não. (...) Porque quando é que ele vai fazer uma pergunta? Quando tu dás uma atividade para eles fazerem em sala de aula. Quando eu estou lá na frente resolvendo o exercício, todo mundo entende, é fácil. Eu falo para eles: 'eu estou pensando, eu estou respondendo, vocês estão entendendo meu raciocínio. Mas agora eu quero ver vocês pegarem

e fazerem o raciocínio de vocês no papel'. Senão, quando é que eles vão perguntar para ti? Somente quando eles estão fazendo. Quando é que eles estão fazendo? Na hora da prova. Eles vão refletir quando? Depois que eles saírem da prova, na prova é muito pouco tempo para eles pensarem, entendeu?

Tito: Mas acho também que o que a Bruna quis dizer é para gente elaborar atividades que envolvam os alunos.

Nina: Que envolvam os alunos, exatamente. Ah, vamos fazer a atividade com ele para ele pensar, para ele retornar para a gente alguma coisa. (...) Então, primeiro a gente tem que definir né, vamos trabalhar com os alunos? A gente vai ter que começar a focar de que forma a gente vai ter que trabalhar com esses alunos. Agora todo mundo está disposto? Eu estou. Eu gosto de trabalhar com o aluno, eu gosto de fazer o aluno trabalhar.

Téo: Nós teremos um semestre interativo pelo jeito... interativo mais com os alunos eu quis dizer... Eu estou afim.

Essa foi uma das discussões propulsoras para conduzir o grupo a definir estratégias de como envolver mais os alunos tanto na realimentação e concretização do que já havia sido desenvolvido no semestre anterior, como na criação de novas propostas de ensino e tarefas. Uma dessas tarefas foi sobre 'uma interpretação geométrica da multiplicação de matrizes' (Quadro 15), onde se procurou envolver os alunos por meio da resolução de uma primeira etapa extra classe com recurso ao papel e lápis. Na sequência, foi realizada uma discussão na turma sobre as respostas, depois foi resolvida extra classe uma segunda etapa com recurso ao GeoGebra e, por fim, a apresentação da tarefa pelos alunos em sala de aula.

Outros exemplos sobre como se procurou envolver os alunos da disciplina aparecem ao longo deste capítulo e serão descritos com mais detalhe no Capítulo 7 e no Capítulo 8. De forma geral, nas planificações realizadas procurou-se criar momentos passíveis de envolver os alunos por meio de questionamentos sobre os seus conhecimentos prévios, a resolução de tarefas dentro e fora de sala de aula, o trabalho em grupo, a discussão em grande grupo, a apresentação de trabalhos aos colegas, a resolução de questões no quadro e o uso da tecnologia.

Reflexão sobre propostas de ensino e tarefas. Após a concretização de cada proposta de ensino ou tarefa elaborada em conjunto, fazia-se uma reflexão no grupo sobre o que foi alcançado, sobre as dificuldades encontradas e sobre o que se poderia melhorar. Em alguns casos, essa reflexão aconteceu em vários momentos para uma mesma proposta de ensino. Por exemplo, a reflexão sobre o ensino de 'Coordenadas e Mudança de Base' ocorreu em quatro momentos: durante a primeira concretização (2016), após a concretização (2016), na análise de uma das resoluções dos alunos diante de uma questão avaliativa sobre a temática e após uma nova concretização em 2017. Tal proposta de ensino foi planificada em setembro de 2016 e a sua concretização não ocorreu na mesma data para todos os professores, pois havia professores mais avançados no conteúdo do que outros. Assim, como fiz a observação dessas aulas, pude observar as contribuições dos primeiros professores que a concretizaram e discutir em encontros informais essas contribuições em tempo hábil de modo a alterar alguns pontos da prática para os professores que ainda a iriam concretizar.

Os momentos de reflexão em grupo permitiam não apenas uma avaliação de forma coletiva sobre as propostas de ensino/tarefas planificadas em conjunto, mas permitia também que os professores avaliassem as potencialidades e fragilidades da sua própria prática. A esse respeito destaco um comentário de Bruna, que compara a sua estratégia com a de Téo ao abordar com os alunos uma tarefa de Operadores Lineares:

> A maneira como Téo fez achei muito mais interessante que a maneira como fiz. Fazer em sala de aula é interessante para ir tirando as dúvidas conforme forem surgindo. Eu consegui dar um *feedback* para eles, mas depois... já tinha inclusive passado a avaliação. Esse *feedback* teria sido muito mais interessante para identificarem os erros antes do que agora, não que não seja importante o *feedback*, mas acho que o tempo meu não foi muito adequado. (Bruna, EGC12)

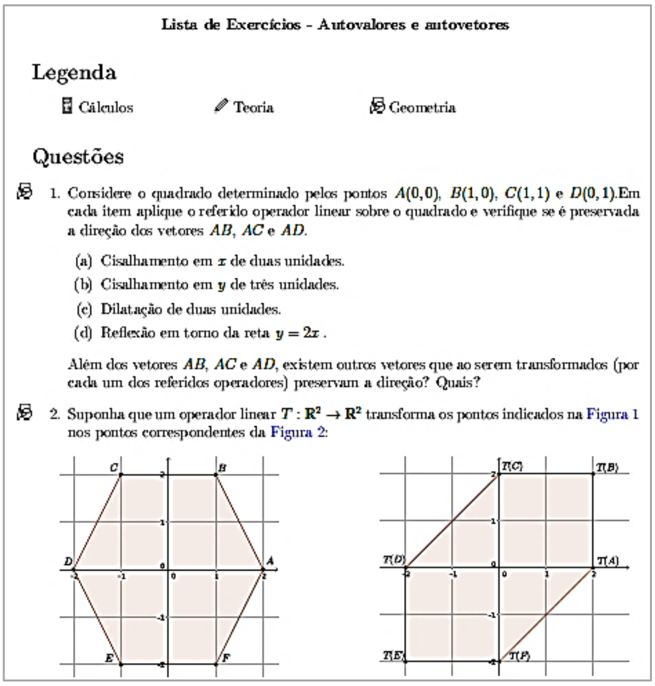
Desenvolvimento/adaptação de materiais didáticos para o ensino e a aprendizagem. No âmbito do grupo foram discutidas e adaptadas algumas listas de 'exercícios' que já eram utilizadas pelos professores antes de participarem do grupo (Quadro 16).

Quadro 16. Atividades de criação/adaptação de materiais didáticos pelos professores.

Atividades	Conteúdos
Adaptação de listas de exercícios	▪ Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. ▪ Espaços Vetoriais. ▪ Transformações Lineares. ▪ Autovalores e Autovetores.
Desenvolvimento de aplicativos para o ensino	▪ Interpretação geométrica de operações de soma e multiplicação por escalar não usuais. ▪ Coordenadas e Mudança de base. ▪ Autovalores e Autovetores.

Nessas listas foram inseridas novas questões elaboradas pelo grupo e definido um layout padrão para todas as listas de 'exercícios', com a classificação das questões quanto ao tipo (teóricas, geométricas e de procedimentos). As questões inseridas estavam relacionadas com a nova abordagem dada pelo grupo nas suas práticas de ensino. Por exemplo, no tópico Autovalores e Autovetores o que mais foi discutido no grupo foi a interpretação geométrica destes conceitos, por isso foram elaboradas questões com esse objetivo (Figura 8).

Figura 8. Exemplo de uma lista de exercícios adaptada pelo grupo.



Lista de Exercícios - Autovalores e autovetores

Legenda

Cálculos Teoria Geometria

Questões

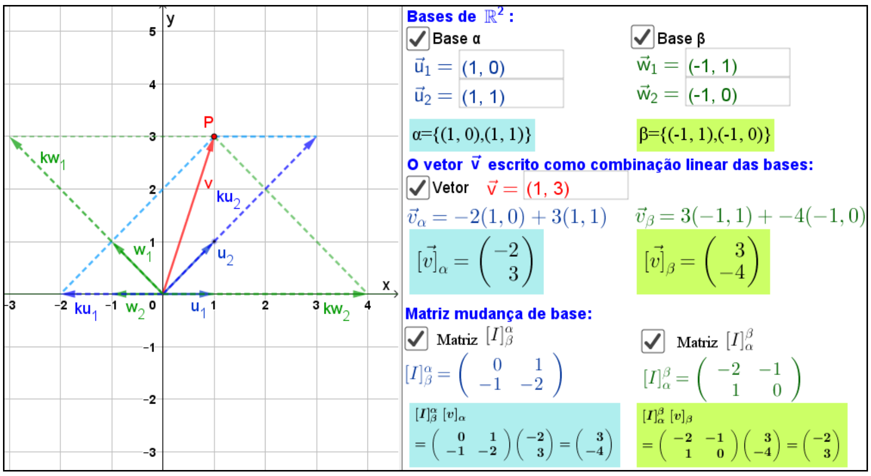
1. Considere o quadrado determinado pelos pontos $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ e $D(0,1)$.Em cada item aplique o referido operador linear sobre o quadrado e verifique se é preservada a direção dos vetores AB, AC e AD.
   (a) Cisalhamento em x de duas unidades.
   (b) Cisalhamento em y de três unidades.
   (c) Dilatação de duas unidades.
   (d) Reflexão em torno da reta $y = 2x$.

   Além dos vetores AB, AC e AD, existem outros vetores que ao serem transformados (por cada um dos referidos operadores) preservam a direção? Quais?

2. Suponha que um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma os pontos indicados na Figura 1 nos pontos correspondentes da Figura 2:

Foram também criados no grupo alguns aplicativos no GeoGebra para o ensino de alguns tópicos específicos de Álgebra Linear. Um exemplo foi o aplicativo criado para explorar a interpretação geométrica dos conceitos de Coordenadas e Mudança de Base (Figura 9).

Figura 9. Aplicativo que explora a interpretação geométrica dos conceitos de coordenadas e mudança de base.



Integração da tecnologia em Álgebra Linear. A preocupação com a integração da tecnologia no ensino de Álgebra Linear de forma que favorecesse a aprendizagem foi recorrente desde o início do trabalho em grupo. Embora alguns dos professores já tivessem experiência com o uso de recursos tecnológicos noutras disciplinas que lecionavam, o seu uso era muito restrito a mostrar aos alunos alguma interpretação geométrica dentro de um ensino tradicional. Essa era uma situação com a qual os professores se sentiam incomodados, como refere Lisa: "O que me incomoda é pegar um Notebook, projetar alguma coisa para os alunos por uns cinco minutos e depois continuar a aula tradicional. Eu me sinto desmotivada em fazer isso" (EGC1). Tendo essa preocupação, na primeira proposta de ensino planificada no grupo, sobre Coordenadas e Mudança de Base, desenvolveu-se o aplicativo da Figura 9 para os professores explorarem em sala de aula o respetivo tópico, conjuntamente com uma tarefa resolvida em grupo pelos alunos em sala de aula. Na avaliação da prática concluiu-se que teria sido mais válido se o aluno tivesse usado o aplicativo desenvolvido. A partir daí, planificaram-se algumas tarefas em que o aluno deveria explorar o GeoGebra na sua resolução, como foi o caso de uma tarefa sobre operadores lineares e de multiplicação de matrizes.

No grupo, o uso de softwares, como o GeoGebra ou softwares disponíveis online para fazer cálculos matriciais, tomou lugar também em todas as reuniões de trabalho, seja na discussão dos tópicos da disciplina, para testar ou refutar hipóteses, seja para auxiliar nos momentos de planificação das propostas de ensino ou tarefas. Porém, durantes essas discussões quem mais utilizava o GeoGebra eram Bruna e Téo (os mais experientes com o software), o que implicou que outros professores, que não tinham experiência com o software, tivessem um pouco de dificuldade, como já explicitado, na avaliação/interpretação de tarefas executadas neste software ou mesmo em momentos de esclarecer dúvidas dos alunos sobre a execução da tarefa. Depois de identificadas essas dificuldades, foram dedicados alguns momentos em alguns encontros para a familiarização do grupo quanto ao uso do software e exploração de algumas potencialidades para o ensino de Álgebra Linear.

A escolha pelo software GeoGebra decorreu da experiência de alguns dos professores com essa ferramenta e da potencialidade do software para explorar dinamicamente os objetos matemáticos em diferentes representações, além de ser um software gratuito e compatível com vários sistemas operacionais.

Análise da resolução de tarefas pelos alunos. Em alguns encontros do grupo foram analisadas as resoluções dos alunos diante de algumas tarefas, com o objetivo de identificar os seus erros e as suas dificuldades e avaliar a potencialidade da tarefa para a aprendizagem dos alunos. Primeiramente, foram analisadas e categorizadas, quanto aos acertos e tipos de erros, as resoluções dos alunos para a tarefa avaliativa sobre Mudança de Base. Cada professor já havia feito a avaliação das questões na sua respetiva turma e atribuído uma nota. A reflexão no grupo sobre a tarefa levou a reestruturar uma das questões.

As resoluções da tarefa proposta sobre Operadores Lineares também foram avaliadas primeiro por cada professor em que atribuíram uma nota e posteriormente foi feita a análise no grupo. Essa tarefa se constituiu em duas etapas, uma realizada com papel e lápis e outra no GeoGebra, e foi proposta nos dois semestres. No primeiro semestre de trabalho foram analisadas as resoluções da primeira etapa e foram propostas alterações no enunciado de algumas questões. Na discussão em grupo das resoluções no GeoGebra observou-se que algumas tinham erros que não foram identificados por alguns professores. A não identificação aconteceu principalmente em decorrência destes professores não dominarem as ferramentas do software. Este foi mais um motivo para a necessidade da familiarização dos professores do uso do software para o semestre seguinte.

Na reaplicação da tarefa no segundo semestre, a avaliação da resolução de cada aluno na parte do GeoGebra foi feita em conjunto. A vantagem disso foi que em conjunto foi discutido como dar o *feedback* aos alunos e inclusive alguns dos professores oportunizaram que os alunos refizessem a tarefa. Por exemplo, Nina salienta a contribuição da análise das resoluções dos alunos sobre a tarefa precedente:

> Eu dei um retorno a eles mostrando no trabalho do GeoGebra o que a gente discutiu no grupo sobre cada trabalho. Eu achei muito legal a gente ter parado para analisar todos os trabalhos em grupo, porque no primeiro semestre não teve isso, então eu senti um pouco de dificuldade: Será que é normal esse tipo de transformação ou não é? Teve um erro, mas onde está esse erro? Eu não conseguia enxergar. (Nina, EGR2)

Uma outra tarefa proposta no grupo e que teve todas as resoluções dos alunos analisadas foi sobre 'uma interpretação geométrica da multiplicação de matrizes'. Tal tarefa também envolvia duas etapas, uma para ser resolvida com papel e lápis e outra no GeoGebra. A análise das resoluções implicou o aprimoramento da tarefa a partir da reescrita de uma questão e na produção de um texto de uma comunicação a submeter a um evento subscrita pelos elementos do grupo (Siple et al., 2017).

Por fim, analisaram-se as resoluções de uma tarefa avaliativa que correspondia à proposta de ensino planificada em conjunto para introduzir Espaços Vetoriais. O objetivo do grupo foi, para além de avaliar a contribuição do ensino para a aprendizagem dos alunos, escrever uma outra comunicação do grupo. Entretanto, o grupo concluiu que algumas questões tinham um problema de formulação e, assim, optou-se pela reformulação do enunciado das questões para então fazer uma nova análise das respostas após uma nova concretização da tarefa.

Em síntese, a análise das resoluções de tarefas no grupo contribuiu para uma reflexão no grupo sobre a potencialidade das tarefas no processo de ensino e aprendizagem da disciplina, para a identificação do erro do aluno e a partir dela aprimorar as tarefas, para os professores discutirem como avaliar as tarefas, como dar *feedback* aos alunos e para desenvolver a capacidade de escrita científica.

Reflexão sobre o trabalho no grupo. A reflexão sobre o tema colaboração e sobre o andamento do trabalho tomou lugar em alguns encontros do grupo. Tais momentos de reflexão no grupo não foram agendados previamente, mas surgiram da necessidade de avaliar/refletir sobre a forma de trabalho no grupo, fazer um balanço do trabalho realizado, rever os objetivos do grupo e/ou definir novas metas. Essas reflexões tinham o objetivo de imprimir uma nova dinâmica de trabalho no grupo. Os pontos positivos e negativos que sobressaiam da reflexão realizada ajudavam para que se trabalhasse nesse sentido com mais cuidado. Também permitiam que se conhecessem as dificuldades e interesses pessoais de cada um.

Por exemplo, no primeiro encontro do semestre de 2017, procurei que cada professor fizesse uma reflexão sobre o trabalho do semestre anterior e apresentasse ao grupo as suas expectativas sobre si e sobre os colegas na continuidade do trabalho no grupo. Nina sugeriu que as planificações das propostas de ensino/tarefas fossem realizadas com bastante antecedência à sua concretização, para não acontecer como no semestre anterior, que a planificação acontecia numa semana (sendo necessários encontros extras) e a sua concretização já na semana seguinte. Para Nina, faltou um tempo maior de amadurecimento e preparação para a concretização das propostas de ensino/tarefas. Tanto Nina como Tito apontaram a sua dificuldade com o GeoGebra. Téo sugeriu que fossem propostas tarefas e apresentadas as potencialidades do GeoGebra ao longo do semestre e não diretamente numa única tarefa como aconteceu no semestre anterior. Téo apontou o seu desconforto por não termos conseguido no semestre anterior cumprir todo o cronograma da disciplina (o capítulo sobre Produto Interno não foi abordado) e sugeriu ao grupo para discutir sobre isso.

Estas foram algumas das manifestações dos professores, que tomei como exemplo, e que levaram o grupo a: (i) planificar as propostas de ensino com um tempo maior de antecedência – no caso de Produto Interno, tópico que não foi lecionado no semestre anterior, o grupo preparou algumas tarefas com orientações de estudo para os alunos e uma tarefa avaliativa, cujo tempo de preparação/amadurecimento perdurou por seis encontros, sendo iniciada a discussão em março e finalizada em junho de 2017; (ii) planificar tarefas com recurso ao GeoGebra desde o tópico de matrizes, sendo elaborado um tutorial para alunos e professores sobre algumas funcionalidades; (iii) dedicar um dos encontros para o grupo experimentar as potencialidades do software para trabalhar com Operadores Lineares.

Uma outra consequência desses momentos de reflexão foi a decisão por encontros semanais, que levou o grupo a aproximar-se mais e a ser mais interativo. No segundo semestre de trabalho a maioria das ideias começou a surgir, a ser desenvolvida e concretizada durante os próprios encontros do grupo, como foi o caso da planificação sobre o tópico Produto Interno.

5.5. Considerações sobre o trabalho realizado

Os dois primeiros meses de trabalho foi um período para estabelecer uma relação de maior proximidade, conhecer melhor o trabalho de cada um, reconhecer habilidades e dificuldades um do outro e para se organizar como grupo. Eu, Tito, Nina e Bruna, nos conhecíamos há pelo menos 10 anos, mas ainda sem oportunidade de trabalhar com Lisa e Téo, que estavam há pouco tempo no Departamento de Matemática. Na busca de reconhecermos a prática um do outro e de estabelecermos uma linguagem comum, fazíamos uns aos outros questionamentos do tipo: "Como vocês denotam vetores, com seta ou sem seta?" (Téo, EGC1); "Qual a sequência com que ensinam Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares?" (Lisa, EGC2); "Que notação utiliza para vetor do $\mathbb{R}^n$, vetor coluna ou vetor linha?" (Téo, EGC1).

Nesse período, procuramos que cada professor pesquisasse e apresentasse um problema contextualizado ao curso que fosse lecionar, que foi o ponto de partida para se criar uma relação de proximidade. Tito, por exemplo, como ia lecionar no curso de Licenciatura em Matemática, trouxe um teorema e demonstrou aos colegas. A partir daí discutiu-se desde a estratégia e a adequação da linguagem utilizada por Tito até a questão de como ensinar as demonstrações, em que momento demonstrar e em que medida trabalhar as demonstrações e a parte prática. Já Bruna modelou um problema que relacionava o sistema de busca do *Google* e sistemas lineares. Tal problema não era de domínio do grupo, levando os professores a entenderem o problema e depois discutirem como o abordar e em que momento. Essa forma de trabalho proporcionou momentos de interação no grupo e de aprendizagem mútua. Entretanto, nem todos os participantes integraram na sua prática a exploração de aplicações contextualizadas sobre Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares da mesma forma.

Percebi nesse período que a preocupação do grupo estava centrada na avaliação. Primeiramente, em não fazer avaliações unificadas e, por fim, em mudar o sistema de avaliação. Tanto é que dentre os seis professores (me incluo nesse ponto), cinco integraram no sistema de avaliação um trabalho que explorava aplicações contextualizadas, logo em seguida à dinâmica realizada no grupo. Preocupava-me a questão de mudar a avaliação e não mudar a prática em si. A partir do momento que fizemos um seminário sobre colaboração e discutimos nossa forma de trabalho no grupo, percebemos que a inovação de nossas práticas (objetivo comum ao grupo) devia passar pela preocupação de como abordar os tópicos, como envolver os alunos, que tipos de tarefas propor, como trabalhar as dificuldades dos alunos, como dar um *feedback* a eles diante das atividades realizadas e como avaliá-los.

A partir daí começaram as primeiras planificações em que todos os professores as concretizaram. No final do primeiro semestre e no início do segundo semestre houve momentos de reflexão sobre as práticas de ensino e sobre o trabalho no grupo que contribuíram para o crescimento do grupo e enriquecimento do trabalho. No segundo semestre letivo o trabalho aconteceu mais naturalmente, foram realimentadas e concretizadas as propostas de ensino/tarefas do semestre anterior e criadas outras novas, em que o grupo passou a se preocupar mais com a atividade do aluno. O grupo teve a preocupação, por exemplo, de criar a tarefa 'multiplicação de matrizes mediada pelo GeoGebra', já direcionando os alunos para o estudo de Operadores Lineares, que aconteceria dois capítulos à frente do estudo de Matrizes.

Os encontros semanais no segundo semestre letivo de trabalho contribuíram para que o grupo conseguisse planificar as atividades com antecedência e para que os professores ficassem mais conectados com o trabalho em si e com os colegas.

Importa destacar alguns aspetos que dificultaram o trabalho no grupo, principalmente no primeiro semestre letivo, que aos poucos foram sendo ultrapassados:

(i) a falta da organização de uma agenda desde o início sobre os tópicos com os quais se queria trabalhar, de modo que as planificações ocorressem com mais antecedência à concretização;

(ii) a falta de conversa entre os professores fora dos encontros do grupo e entre uma aula e outra na semana (pois as aulas de Álgebra Linear ocorriam para cada turma em dois dias na semana), para discutir sobre o andamento das aulas, esclarecer dúvidas. No primeiro semestre, fui eu quem mais desempenhou esse papel, de passar na sala dos professores, verificar como tinha sido a concretização da prática e levava a informação de um para o outro, principalmente quando os encontros eram quinzenais. No segundo semestre, Nina, Lisa, Téo e Tito passaram a conversar mais, a reunirem-se um na sala do outro para discutirem sobre alguma tarefa que foi iniciada num encontro ou sobre a concretização de uma proposta de ensino/tarefa. Lisa no segundo semestre passou a interagir menos com o grupo fora dos encontros. Observei que isso aconteceu após iniciar um programa de pós-graduação e a organizar um evento familiar;

(iii) a falta com frequência de alguns professores aos encontros devido a compromissos familiares ou de trabalho. Isso acabava prejudicando a sequência do trabalho, pois nem sempre quem faltava procurava os demais para saber como foi o encontro, saber se tinha alguma tarefa para o encontro seguinte. Por algumas vezes me coube o papel de ir atrás do professor que faltou para repassar as informações. Às vezes no encontro seguinte era necessário retomar alguma discussão ou reapresentar uma ideia àquele professor que faltou. Mas também havia quem faltava e voluntariamente deixava alguma contribuição ao encontro do grupo ou deixava pronta uma tarefa que lhe coube a responsabilidade, como aconteceu algumas vezes com Bruna e Tito;

(iv) a falta de disponibilidade dos professores devido à carga horária elevada de trabalho ou à agenda fora da Universidade, para pesquisar sobre os temas abordados e trazer ideias para a construção das práticas e tarefas nos encontros. Isso aconteceu principalmente no primeiro semestre. Já no segundo semestre, pelas experiências anteriores e leituras feitas pelos professores, muitas das ideias surgiam nos próprios encontros a partir da conversação entre os colegas;

(v) o cansaço devido à carga horária elevada de trabalho. Observei que conforme os semestres letivos se aproximavam do fim, o rendimento e dedicação do grupo diminuíam bastante. Os professores faltavam mais aos encontros, chegavam atrasados, demonstravam cansaço e preocupação com outras coisas como o cumprimento do cronograma das disciplinas que lecionavam (muitos davam aulas extras para cumprir o cronograma), com a correção de avaliações e com o cumprimento de outras atividades profissionais.

Um outro aspeto que destaco é que, principalmente no primeiro semestre de trabalho, havia uma grande preocupação entre os participantes com o atraso do conteúdo em relação ao cronograma da disciplina, visto que planeávamos abordar uma quantidade de tópicos por aula e muitas vezes conseguíamos abordar metade. Isso decorria principalmente porque os alunos demoravam mais tempo do que o imaginado para resolver as tarefas em sala de aula. Assim, no grupo houve alguns momentos de discussão sobre a prioridade do ensino de alguns tópicos. Por fim, no primeiro semestre letivo não foi possível abordar o capítulo de Produto Interno e para o segundo semestre foi proposto um estudo dirigido aos alunos sobre este tópico. Para essa tomada de decisão de 'risco', foi muito importante para cada participante estar em grupo e apoiarem-se uns aos outros, como corrobora Nina:

> Não deu para cumprir o programa todo..., mas não fui só eu, foi o grupo todo. Agora se é só eu que vou colocar alguma coisa em prática sozinha, vou enfrentar esse risco de não conseguir cumprir o programa sozinha, é mais difícil. Quando tu estás em grupo, arriscas muito mais. (Nina, EGR2)

Com o passar do tempo sobressaiu-se no grupo a conceção de que fazer questões em sala de aula e deixar um tempo para o aluno pensar sobre elas poderia ser mais demorado e dificultar o cumprimento do cronograma da disciplina, porém seria mais produtivo para promover a aprendizagem dos alunos. Assim, nas práticas dos professores o envolvimento do aluno foi conquistando seu espaço, mesmo que timidamente. Tal envolvimento se fez presente na resolução de tarefas em sala de aula, na apresentação, no quadro, do raciocínio utilizado, na socialização de trabalhos e na exploração e visualização de conceitos com recurso ao computador

O aspeto menos alcançado em termos das práticas de ensino dos professores foi a questão do *feedback* aos alunos das tarefas realizadas. Mesmo havendo no grupo a discussão, em vários momentos, sobre a importância do *feedback* e sobre quando e como fazê-lo, para os professores essa não foi uma tarefa fácil. Em função da alta carga horária em sala de aula e dos demais compromissos que competem a um professor universitário, muitas vezes não se conseguia corrigir as tarefas em tempo hábil a uma prova ou a uma aula, em que se poderia resgatar uma discussão sobre o conteúdo matemático envolvido da tarefa ou trabalhar em cima dos erros e dificuldades dos alunos.

Embora existam vários pontos a serem melhorados no trabalho em grupo e nas práticas desenvolvidas, tenho a convicção de que o projeto constituiu uma aprendizagem importante para todo o grupo. Os professores saíram do seu isolamento profissional e passaram a discutir/refletir sobre as suas práticas. Não foi um caminho fácil. Tínhamos a ânsia pela mudança, e no início achávamos que íamos revolucionar o ensino de Álgebra Linear, que íamos desenvolver ideias revolucionárias. Entretanto, já no desenvolvimento da primeira estratégia de ensino sobre Coordenadas e Mudança de Base, sentimos muita dificuldade de a construir. Aos poucos, fomos investindo na exploração de diferentes representações dos conceitos, com ou sem o uso da tecnologia, nas estratégias de como abordar conceitos 'chave', na diversificação da avaliação, nas estratégias para envolver os alunos nas aulas e torná-los protagonistas na sua aprendizagem, na exploração das aplicações contextualizadas, no aprimoramento de listas de tarefas extra classe. Todos esses pontos que destaquei eram pouco explorados pelos professores antes de participarem no grupo. Alguns deles revelaram inclusive que têm levado o aprendizado no grupo para suas práticas em outras disciplinas que lecionam. Algumas posições dos professores evidenciam algumas mudanças em suas práticas:

> Outro benefício no meu caso foi uma maior interação com a turma. Nesse semestre, eu acabei fazendo algumas aulas assim, em que interagi mais, questionei mais os alunos, dei tempo para pensar mais em sala. Isso aconteceu não só na Álgebra Linear, mas em outras disciplinas. Eu tentava fazer o mesmo tipo de interação que aconteceu na Álgebra Linear. Funcionou bem. (Téo, EGR1)
>
> Foi muito bom fazer essa transição do algébrico para o geométrico e vice-versa. E nunca tinha explorado isso antes da forma como exploramos no trabalho. (Nina, EGC 13)
>
> Tem muitos assuntos que eu passei a entender melhor. Às vezes eu passava aos alunos, mas não pensava muito no que aquilo significava, e com as nossas discussões, um tirava dúvida com o outro... Claro, ainda tem muita coisa para aprender, a gente nunca sabe tudo sobre um assunto, mas agora eu sinto mais facilidade de explicar, eu consigo criar exemplos, porque eu passei a entender mais do assunto a partir das nossas discussões.(...) Antes eu não trabalhava tanto com desenho, eu fazia mais a parte analítica, agora eu exploro mais com a parte do desenho, eu entendo o que o desenho está relacionando, está significando.(...) Por exemplo, em autovalores e autovetores

> nunca tinha desenhado o autoespaço. Para os alunos ficou mais fácil, mas para mim também, eu sabia o conceito teoricamente, mas nunca tinha parado para pensar o significado geométrico. Acho que tanto os alunos como eu, tivemos o mesmo aprendizado. Sempre achei a Álgebra Linear uma disciplina isolada das outras, agora comecei a ver que tem relação com outras disciplinas. (...) Por conhecer mais Álgebra Linear, eu estou conseguindo dar, às vezes, mais enfoque em Geometria Analítica. Por exemplo, dei um enfoque em combinação linear, foquei que somar dois vetores em um plano eles continuam no plano. Estou dando mais enfoque nessas coisas que eu sei que eles vão usar em Álgebra Linear. (Lisa, EGR2)

A posição de Lisa infere que o trabalho em grupo contribuiu inclusive para aprofundar o seu entendimento do próprio conteúdo da Álgebra Linear, que se repercute numa prática de ensino mais segura e que permite explorar os conteúdos sobre diferentes olhares e possibilidades.

Pessoalmente, como professora de Álgebra Linear, aprendi muito com o trabalho no grupo. Antes de participar no grupo, minha prática era mais centrada no conteúdo e após a participação passou a ser centrada também na atividade do aluno. Nos outros aspetos mencionados, as minhas conquistas são semelhantes aos meus colegas. Acredito que um dos pontos que mais contribuiu para a minha prática foram os momentos de observação das aulas dos professores, quando estava no papel de investigadora, pois me permitia captar a contribuição pessoal de cada professor à prática planificada em conjunto, trazer para a minha realidade na sala de aula e ainda compartilhar com o grupo como foi essa minha experiência.

CAPÍTULO 6

PERCEÇÕES DE PROFESSORES SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo analisam-se as perceções de alguns professores de uma universidade brasileira sobre o ensino de Álgebra Linear. Com esta finalidade, apresenta-se uma caracterização dos professores entrevistados, seguindo-se de uma análise da sua prática profissional e, por fim, uma análise sobre a sua prática de ensino em Álgebra Linear.

6.1. Caracterização dos professores

O grupo de professores que participou na primeira fase deste estudo era composto por seis professores do gênero feminino e nove do masculino, que estavam vinculados a distintos Centros de Ensino, localizados em diferentes campi: dez professores no campus A, podendo atuar em nove cursos distintos; dois professores no campus B, que atuam num único curso de Engenharia; um professor no campus C que também atua num único curso; um professor no campus D que atua num único curso (Engenharia); e um professor no campus E que também atua num único curso de Engenharia.

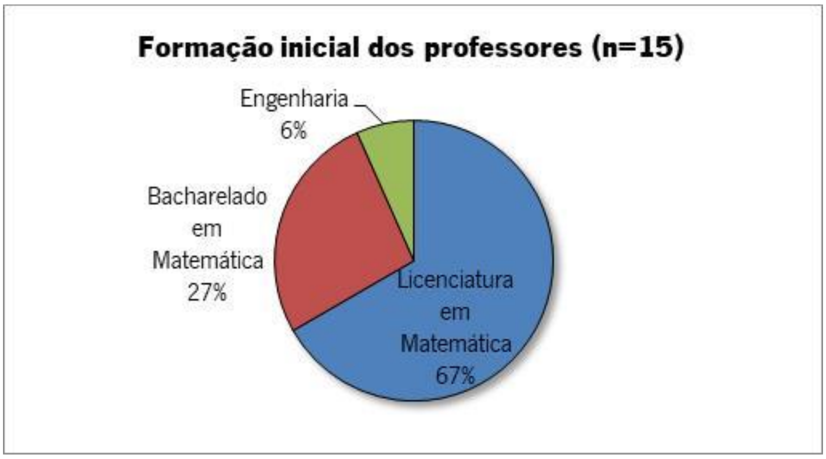
A idade dos professores variava entre 25 e 56 anos, inclusive, sendo a média das idades de, aproximadamente, 38 anos. A maior parte dos professores tinha idade inferior a 41 anos (73%). Considerando um intervalo com a amplitude de oito anos e tendo como referência a idade mínima e a máxima das idades dos intervenientes no estudo, constata-se que prevalece a idade entre os 33 a 40 anos (40%), como mostra a Tabela 1.

Tabela 1. Distribuição das idades dos professores.

Idades	Frequência
25 a 32	5
33 a 40	6
41 a 48	1
49 a 56	3

Relativamente à formação inicial dos professores, conforme a Figura 10, verifica-se que quase todos eles tinham a licenciatura ou bacharelado em Matemática (94%). Apenas um dos professores fez a sua formação inicial em Engenharia.

Figura 10. Distribuição (%) da formação inicial dos professores.



Em relação às razões para a opção de escolha do curso que frequentaram na sua formação inicial, todos os professores destacaram como razão principal a afinidade com a Matemática. Acrescida a essa razão, emergem outras motivações como o incentivo de professores do ensino médio, o gosto pela profissão de ser professor, o contacto com a 'Matemática' nos negócios da família, a formação dos pais na área de Matemática, a falta de opção de fazer outro curso devido a dificuldades financeiras em se deslocar para outra cidade ou à dificuldade de passar no vestibular para outro curso. Alguns professores revelaram que, embora a escolha pela Licenciatura em Matemática foi uma segunda opção, acabaram por adquirir gosto pelo curso e por se encontrar na profissão docente, como ilustram as seguintes afirmações:

> Eu sempre gostei de Matemática. Na verdade, eu passei como segunda opção, e aí fui ficando... gostei... comecei a trabalhar como professor e me encontrei ali. (EG_P6)
>
> Como passar no vestibular para Matemática era mais fácil e era uma área que eu também me identificava, então entre todas eu escolhi a Matemática. (EG_P11)
>
> Eu comecei fazendo Licenciatura mais como uma segunda opção e enquanto cursava comecei a gostar da área, então transferi para o bacharelado, por uma questão de um gosto adquirido, digamos assim. (EG_P15)

No que diz respeito à formação dos professores ao nível de Pós-Graduação, todos eles são mestres. A maioria dos professores fez mestrado nas áreas de Matemática ou Matemática Aplicada (60%), outros em Engenharia (33%) e apenas um em Ensino de Matemática. Um dos professores que é mestre em Engenharia realizou uma especialização em Matemática. Apenas cinco dos professores têm o grau de doutor, ou nas áreas de Matemática/Matemática Aplicada ou Engenharia (Tabela 2).

Tabela 2. Distribuição da formação dos professores a nível de Pós-Graduação.

	Especialização	Mestrado	Doutoramento
Matemática ou Matemática Aplicada	1	9	3
Ensino de Matemática	–	1	–
Engenharia	–	5	2

Apenas um dos professores exerce a sua atividade docente numa área indiretamente ligada à sua formação. A sua formação inicial e continuada é em Engenharia e ensina disciplinas ligadas à Matemática, dentre elas a Álgebra Linear. Para este professor, o facto de não ter uma formação específica em Matemática não lhe permite explorar, por vezes, os conceitos da Álgebra Linear com a devida profundidade. Mas, como ministra a disciplina no curso da sua formação inicial, considera que consegue dar uma visão aos alunos da importância dos tópicos que estão sendo estudados para a sua formação.

> Eu acho legal que um profissional da área trabalhe essas disciplinas básicas porque eu tento levar aplicações, dizer aonde que vão usar a álgebra. Eu também sou professor de cálculo numérico. Os alunos me questionam, 'mas porque eu tenho que aprender isso, professor?'. Hoje já me sinto melhor para lhes responder 'Ah, isso você vai usar aqui, isso você vai usar assim, isso você vai usar daquela forma'. Eles me questionam muito sobre vetores e eu me questionava também na época da graduação e hoje em dia a gente sabe que um vetor nada mais é do que uma forma de armazenar informação. Então eu passo isso para eles e acho legal que, por mais que eu não seja formado em Matemática para dar estas disciplinas básicas do curso, acho que por outro lado consigo, talvez não ir tão a fundo nos conceitos, mas trazer esses conceitos superficiais de forma aplicada. (EG_P5)

A par da formação de um professor, a experiência acumulada pode ser um fator determinante na forma como ensina Álgebra Linear. A distribuição do tempo de experiência de ensino dos professores (Tabela 3) tem como referência os ciclos da vida profissional de professores de Huberman (2000): fase de entrada na carreira (1 a 3 anos), fase de estabilização (4 a 6 anos), fase de diversificação ou questionamento (7 a 25 anos), fase de serenidade e distanciamento afetivo (25 a 35 anos) e fase de desinvestimento (mais de 35 anos). Seguindo esta classificação, verifica-se que apenas 13,3% dos professores têm pouca experiência de ensino ao situarem-se na fase de entrada na carreira. O número de professores que está situado na fase de estabilização é equivalente ao que está na fase de diversificação ou questionamento (33,3%). Os demais se encontram na fase de serenidade e distanciamento afetivo (20%). O professor com mais tempo de experiência tem 30 anos de docência, enquanto o mais inexperiente só tem um ano.

Tabela 3. Distribuição do tempo de experiência de ensino dos professores.

Tempo de experiência (anos)	Frequência
0 a 3	2
4 a 6	5
7 a 25	5
25 a 35	3

A maioria dos professores já adquiriu a sua estabilidade profissional, visto que 11 deles têm um vínculo laboral de efetivo com a universidade em questão, um professor está em fase de finalizar o estágio probatório (que é de 3 anos) e três professores são colaboradores, o que significa que o seu vínculo com a instituição é temporário.

Além da atuação no Ensino Superior, a maioria dos professores já teve alguma experiência de ensino em nível infantil, básico, técnico ou educação de jovens e adultos (Tabela 4).

Tabela 4. Distribuição dos níveis de ensino que os professores já lecionaram.

Nível de ensino	Frequência
Pós-graduação	3
Graduação	15
Ensino técnico	1
Ensino médio	6
Ensino fundamental	5
Educação de jovens e adultos	2
Educação infantil	2

Três dos professores já atuaram no ensino de pós-graduação. Na altura em que foram indagados, primeiro semestre de 2016, todos os professores lecionavam apenas no Ensino Superior e um deles estava atuando também na pós-graduação a nível de mestrado (este professor pertence ao grupo que já atuou no nível básico).

Independentemente da estabilidade profissional ou da experiência de ensino, os desafios que recaem sobre a profissão docente exigem que os professores estejam continuamente num processo de aperfeiçoamento da sua prática pedagógica e de desenvolvimento profissional. Corroborando que a formação profissional de um professor é um processo contínuo por toda sua vida profissional, um dos professores destaca que "a gente, enquanto professor, nunca vai parar de estudar. A gente precisa estar sempre estudando, se aperfeiçoando. Até porque quanto mais a gente estuda, mais a gente vê que precisa estudar ainda mais" (EG_P5). Tal perspetiva faz com que alguns professores revelem ter preocupação com a sua formação continuada, o que os leva a participar em algumas dinâmicas de atualização profissional (Tabela 5).

Tabela 5. Distribuição de dinâmicas de atualização profissional dos professores.

Tipo de formação	Frequência
Doutoramento em curso	5
Cursa/cursou disciplinas de doutoramento na modalidade aluno especial	3
Tenciona iniciar o doutoramento em breve	3
Participação em cursos e/ou palestras de formação	6
Participação em eventos	2
Assiste videoaulas	2
Leituras	5
Participação em projeto de pesquisa e/ou extensão	3
Não se preocupa com a formação continuada	1

Como no grupo há 10 professores cuja maior titulação é o mestrado, a sua maior preocupação é com a formação continuada em nível de doutoramento, embora participem de outras dinâmicas de atualização profissional. Desses professores, cinco já estão cursando o doutoramento e três estão se preparando para iniciá-lo, seja em fase de participação de processo seletivo ou cursando disciplinas de doutoramento na modalidade de aluno especial. As motivações para cursar um doutoramento giram em torno da progressão na carreira universitária, na atualização profissional e na vontade de aprender mais, como exemplificam as afirmações de alguns professores:

> Uma [razão] pela atualização profissional, para ficar atualizado com as coisas referentes ao trabalho, também para ter uma valorização financeira, uma compensação. E por interesse próprio também, em querer sempre aprender, acho que isso é típico de um professor. (EG_P1)
>
> Eu acho que a partir do momento que paramos, nós vamos relaxando. Eu não quero isso, quero ficar sempre no pique. Minha motivação é essa, não ficar para trás e claro, buscar uma formação melhor para ser um profissional melhor. (EG_P5)
>
> O que conta mais para mim é o gosto. O financeiro pesa, mas muito pouco, acho que se por acaso recebesse o mesmo salário que com mestrado eu faria [o doutorado] do mesmo jeito. (EG_P3)

A preocupação com a progressão na carreira não se limita apenas ao aumento salarial, mas também aos incentivos como a possibilidade de desenvolver pesquisas com apoio de recursos financeiros internos e externos à instituição, a alocação de carga horária em projetos de pesquisa (na universidade do contexto do estudo há uma diferença no número de horas que pode ser alocado entre mestres e doutores), a possibilidade de atuar em programas de pós-graduação, dentre outros. A preocupação com a realização de pesquisas é ilustrada por alguns professores:

Continuar na área da pesquisa, inovar, aplicar meus conhecimentos em uma área de pesquisa. (EG_P10)

São duas grandes razões: principalmente para manter o contato com o mundo acadêmico na minha área porque como eu dou aula na engenharia, a gente acaba se afastando um pouco do que está acontecendo na matemática, a gente acaba focando em querer mostrar para os alunos como eles podem aplicar aquilo e acaba sendo, na minha opinião, bastante superficial. A outra [razão] é porque, como eu estou num curso muito novo, num centro muito novo, acaba tendo aquela pressão de formar grupos de pesquisa, pensar em cursos de pós-graduação. Então, por essa pressão também de melhorar a formação para poder evoluir dentro da universidade. (EG_P4)

Para além da preocupação com o doutoramento, os professores evidenciam participar noutras dinâmicas de formação continuada (Tabela 5). Prevalece um conjunto de professores que tem participado em cursos e/ou palestras de formação (40%). Para alguns desses professores, essa participação é espontânea e surge da necessidade de aperfeiçoar a prática de ensino e/ou conhecer novos recursos para o ensino. Já outros têm participado por exigência da universidade por estarem em estágio probatório ou noutra instituição que tem vínculo empregatício onde a participação em semanas de formação é obrigatória. Outros professores por iniciativa própria complementam a sua formação através da leitura de artigos, livros e de outras publicações científicas (33%). Poucos são os professores que revelam procurar ampliar o seu conhecimento por meio da participação em eventos técnico-científicos ou videoaulas do *youtube* e/ou em plataformas que oferecem curso de formação online, bem como poucos revelam participar em projetos de pesquisa e/ou extensão.

Apenas um dos professores, que já tem o título de doutor e se encaminha para o final da carreira (27 anos de docência), mencionou que não se tem preocupado com a sua formação continuada: "De momento parei com minha formação continuada. Já estou a caminho da aposentadoria. Eu vejo que para mim poderia melhorar [a prática], mas por enquanto me sinto bem dessa forma" (EG_P2). Tal postura não se reflete num outro professor que, embora esteja em final de carreira (30 anos de docência) procura expandir a sua formação ao frequentar um curso de doutoramento, além de ter frequentado recentemente disciplinas isoladas de pós-graduação numa área diferente da atual e participar em palestras e cursos de formação.

Em termos institucionais, a universidade em questão incentiva os seus docentes a promover a sua formação continuada ao nível de pós-graduação, com possibilidade de afastamento remunerado das atividades laborais, como refere o professor EG_P9:

Existem os afastamentos para você fazer capacitação em nível de doutorado e pós-doutorado. A instituição apoia, o afastamento é remunerado. A instituição não traz cursos de formação para dentro da universidade para que a gente possa se aperfeiçoar aqui dentro sem precisar sair. Se você quiser se aperfeiçoar você tem que sair daqui. (EG_P9)

Para além desse incentivo, a instituição promove semestralmente a 'Semana de formação continuada', que apenas seis dos professores que integraram este estudo têm participado. Porém, tais professores indiciam estar pouco satisfeitos com esse tipo de formação por abranger docentes de diferentes cursos, o que faz com que a oferta formativa seja demasiada generalista, o que nem sempre atende diretamente às suas necessidades, como afirma o professor P14: "Eu participei de algumas formações (...), mas não achei que foram muito pertinentes, porque é uma coisa muito geral. Não achei tão satisfatório para nossa área, não me acrescentou tanto" (EG_P14). Na visão dos professores, a contribuição deste tipo de formação direciona-se mais para despertar o interesse quanto à utilização de um dado recurso tecnológico e técnicas de promover o discurso, com base na oratória do palestrante, tal como exprimem os professores P7 e P1:

> Diretamente tem contribuído pouco, mas vi algumas coisas legais sobre o uso de tecnologias, dei uma olhada depois para ver o que eram os recursos que ela [palestrante] estava falando. (EG_P7)
>
> Acho que na maior parte delas [palestras] sempre se consegue aproveitar alguma coisa na prática (...) é mais em termo de conhecimento mesmo e eventualmente numa palestra ou noutra tem alguma atividade, a gente pega pela desenvoltura ou o método que a pessoa que está nos capacitando utiliza. (EG_P1)

Os professores têm conhecimento da existência de outras dinâmicas na instituição que incentivam a formação continuada, tais como recursos financeiros para participação em congressos, recursos financeiros para execução de projetos e alocação de carga horária para projeto de pesquisa. Porém, nem todos os professores usufruem desses recursos.

Conhecidos alguns traços dos professores que integraram a primeira fase deste estudo importa perceber como se caracteriza a sua prática profissional.

6.2. Prática profissional dos professores

Ao debruçar-me sobre a prática profissional dos professores, procurei identificar as disciplinas que já lecionaram, os aspetos que mais destacam na planificação das suas aulas e as suas perceções e/ou práticas sobre o trabalho colaborativo entre pares. Relativamente às disciplinas que lecionaram no seu percurso profissional, os professores indicaram, na sua globalidade, 34 disciplinas, que se agrupam por áreas, como sintetiza o Quadro 17.

Quadro 17. Áreas da matemática em que os professores já atuaram.

	Professores														
Áreas	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15
Cálculo Diferencial e Integral	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo Numérico		x	x	x	x				x	x			x	x	x
Álgebra	x	x	x									x			
Análise												x			
Geometria Analítica e Álgebra Linear	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Geometria		x							x			x			
Equações Diferenciais	x	x	x	x					x			x			
Estatística						x					x		x		x
Matemática Aplicada à Economia ou Administração						x				x	x	x	x		
Otimização				x							x				
Educação Matemática		x							x						
Disciplinas de Engenharia					x				x					x	

A integração das disciplinas por áreas deveu-se à opção de facilitar a análise da informação recolhida. Por exemplo, na área de Cálculo Diferencial e Integral agruparam-se as disciplinas de Matemática Básica, Cálculo I, Cálculo II, Cálculo Vetorial e Variáveis Complexas. Dos professores inquiridos, apenas um deles não lecionou disciplinas desta área. Dos restantes, dois atuaram apenas em duas áreas distintas que envolvem disciplinas básicas do currículo de cursos da área de Ciências Exatas (Cálculo Diferencial e Integral; Geometria Analítica e Álgebra Linear); cinco professores têm experiência nas áreas de Álgebra e/ou Análise, que envolvem disciplinas relacionadas com a aquisição de conhecimentos específicos da Matemática e cujos conteúdos têm uma perspetiva puramente axiomática, com uso de linguagem simbólica e formal, como acontece com a teoria da Álgebra Linear; nove docentes lecionaram disciplinas da área de Cálculo Numérico, que é uma área que estuda técnicas de natureza analítica e numérica na procura de soluções aproximadas de problemas matemáticos e que envolve conhecimentos de Álgebra Linear; quatro professores já lecionaram disciplinas da área de Equações Diferenciais, que são disciplinas que envolvem a resolução de problemas práticos e cuja teoria tem conexão com a Álgebra Linear. Constatou-se também que um número reduzido de professores ministrou disciplinas em áreas mais aplicadas como Otimização, Estatística e disciplinas de Engenharia, cuja experiência de ensino pode ampliar a visão sobre as possíveis aplicações da Álgebra Linear e da sua importância na formação dos alunos.

A análise do Quadro 17 permite ainda constatar que a maioria dos professores (86,6%) já lecionou disciplinas em três ou mais áreas distintas, em que pelo menos uma delas envolve a solução de problemas mais aplicados.

Entre as disciplinas que os professores já lecionaram, no que diz respeito à que é o foco deste estudo, Álgebra Linear, verifica-se que a maioria dos docentes já lecionou esta disciplina por cinco vezes ou mais (Tabela 6).

Tabela 6. Distribuição do tempo de experiência em ensino de Álgebra Linear.

Tempo de experiência (em semestres)	Frequência
Até 4 semestres	3
5 a 9	7
10 a 14	2
15 a 27	0
28 ou mais	3

O professor com menos experiência de ensino de Álgebra Linear tinha um tempo de docência de dois meses, enquanto que o mais experiente já lecionou a disciplina por volta de 54 vezes.

Independentemente da sua experiência profissional, parti do pressuposto de que os professores concretizam a sua prática letiva tendo como referência formas de planificar as suas aulas, que procurei conhecer.

Planificação de aulas

A planificação de aulas é um importante auxiliar da prática pedagógica, pois permite ao professor determinar o foco a dar ao conteúdo, os aspetos que deve enfatizar mais em detrimento de outros, as estratégias de ensino e os materiais a utilizar e adequar o tempo necessário para cada conteúdo (Viseu, 2009). Ao planificar, o professor explicita, conscientemente ou inconscientemente, as suas conceções sobre o que é ensinar e aprender Matemática, o seu conhecimento da Matemática que ensina, o seu conhecimento daquilo que os alunos sabem e da sua maneira de aprender (Serrazina, 2012). Na verificação da prática de planificação das aulas dos professores, constata-se que prevalece a preocupação com o conteúdo e com o ensino (Tabela 7).

Tabela 7. Aspetos que os professores valorizam na planificação das aulas.

	Frequência
O conteúdo e o seu ensino	12
O entendimento e aplicação dos conceitos, sem foco em demonstrações	4
Resolução de exercícios pelos alunos	2
Não planifica as aulas	1

A preocupação com o conteúdo e com o ensino envolve: a definição de estratégias de ensino; a explicação da natureza, da importância e da relação entre os conceitos e não apenas o método de resolução; a definição da sequência mais adequada para tratar os conceitos matemáticos; o aprofundamento gradualmente da teoria para propiciar uma maior compreensão dos alunos, como elucidam os professores P15, P1 e P8.

> Tentar fazer com o que eu estou falando faça sentido, ou seja, tentar explicar de onde vêm as coisas (...). Tenho muita preocupação com isso, de tentar passar aquilo de uma maneira o mais natural possível. Fazer com que ele entenda o que está fazendo, não só um método. (EG_P15)
>
> Eu sempre dou mais ênfase ao conteúdo, aquele que está colocado na ementa do programa da disciplina e às formas de trabalhar com esse conteúdo, quais são os objetivos de trabalhar com esse conteúdo, e maneiras de explicá-lo, além de exemplos relacionados. (EG_P1)
>
> Dependendo da teoria eu gosto de começar com um exemplo para eles descobrirem por que a gente precisa dessa teoria. Então, às vezes dá para fazer isso e às vezes não dá. Senão, começo de coisas bem básicas para o aluno entender de onde estão vindo as coisas, e daí vou aumentando o nível, dificultando. Os últimos exercícios que faço sobre o assunto geralmente são os mais difíceis que encontro. (EG_P8)

Tendo como referência o conteúdo matemático e o seu ensino, alguns professores, de acordo com as suas experiências e dependendo da disciplina que lecionam, procuram promover, com maior ou menor intensidade, a visualização geométrica dos conceitos, com recurso a materiais tecnológicos, e a resolução de exercícios, como explica o P12:

> Na minha planificação eu tento contemplar tudo. Por exemplo, se vou colocar uma definição, que essa definição eu coloque de uma forma que seja entendida pelos alunos, se eu vou demonstrar um teorema, que a demonstração desse teorema seja inteligível para os alunos, se vou fazer um exemplo, que esse exemplo seja inteligível pelos alunos. Se for possível uma visualização gráfica, utilização de recursos tecnológicos, eu uso... uso muito o GeoGebra, o Winplot, o Modellus. (...) Dependendo da disciplina dá para você fazer mais coisas do que noutra. Por exemplo, em Cálculo e Geometria Analítica, dá para explorar mais as visualizações gráficas por meio de software. Quando vai para Álgebra Linear, Álgebra Abstrata, ou outras disciplinas com um escopo mais teórico, não dá muito para você explorar. Aí tem que explorar mais exercícios, explorar mais exemplos. No fundo a minha preocupação é o conteúdo que eu vou discutir com os alunos em sala de aula, de forma que fique entendível, fique bem claro para eles. É essa a minha preocupação geral. (EG_P12)

A resolução de exercícios é uma atividade que emerge no discurso dos professores na concretização das planificações das suas aulas. Alguns deles acreditam que para o aluno assimilar o conteúdo precisa de resolver muitos exercícios, como evidenciam os professores P6 e P11.

> Eu priorizo a resolução de exercícios. Desde o primeiro dia deixo claro que eles têm que resolver centenas de exercícios para que o curso tenha uma efetividade na formação deles. (EG_P6)
>
> Eu foco mais em exemplos e exercícios. Dou a parte teórica e depois então a parte de exercícios para tentar concretizar a matéria. (EG_P11)

A forma como a ligação entre a teoria e a prática é concretizada depende de alguns fatores, tais como: a natureza do curso e a turma em que se leciona. Por vezes, existem diferenças entre o ensino de uma dada disciplina numa turma que é exclusiva de um curso e o ensino dessa disciplina numa turma constituída por alunos de diferentes cursos. Perante este cenário, alguns professores tendem a incentivar a prática dos conteúdos lecionados, valorizando a resolução de problemas contextualizados com o próprio curso, em detrimento de atividades que exigem um raciocínio de abstração e de demonstração de resultados matemáticos, tal como ilustram as afirmações dos professores P4 e P10:

> Como é um curso de engenharia, eu não consigo me aprofundar muito em certos aspetos teóricos. (...) O meu foco principal são as aplicações... porque se entrar apenas com a teoria eles questionam "para que eu vou usar?". Então, na minha preparação, eu tento na medida do possível dar aquele básico do teórico para que se um dia eles precisarem saibam aquelas propriedades, mas meu foco não é muito a demonstração. (EG_P4)
>
> Quando comecei a dar aulas, eu era mais teórico, fazia muitas demonstrações... por inexperiência mesmo. Mas há cursos, por exemplo, o Tecnólogo... não há tanta necessidade de focar em demonstração do que é uma função contínua, por exemplo, aí só explicar o que é. Tem cursos que são mais práticos, já tem cursos que sei que mais para a frente vão precisar de algo bem especificado. Por exemplo, Álgebra Linear é muito usada na Engenharia Mecânica no final [do curso], no doutorado. Mas tem curso, como Tecnólogo, que em geometria analítica e álgebra eles precisam saber fazer os cálculos e aplicá-los. (EG_P10)

Independentemente do curso que lecionam, há professores que sentem dificuldades em encontrar um nível adequado de profundidade dos conteúdos devido à falta de conhecimentos prévios dos alunos em Matemática quando iniciam a sua graduação, como refere o professor P5.

> Infelizmente hoje a gente está recebendo alunos despreparadíssimos (...). Se você entra com um grau de dificuldade bom, com temas aprofundados, você não consegue aprovar ninguém no final do semestre. É um dilema, porque se você tira muito o pé, você aprova alguns alunos, mas talvez acabe perdendo alunos que têm potencial, só que por estarem num meio onde a maioria não tem potencial acabam diminuindo. O que eu quero dizer é que minha preocupação é que todos os alunos de todas as minhas disciplinas saiam com uma base boa. Eu não tenho entrado tão a fundo nos conteúdos, explorado nos mínimos detalhes. A minha prioridade é que tenham base para que nas disciplinas mais

específicas, como dou tanto Álgebra Linear quanto cálculo numérico e uma depende da outra, eu mesmo tenho que preparar meus alunos de cálculo numérico na disciplina de álgebra. Eles têm que chegar em cálculo numérico sabendo o que é uma matriz, sabendo o que é um sistema linear, como vão fazer para solucionar, na limitação deles, claro. (EG_P5)

O conhecimento que se tem dos alunos, do currículo e do conteúdo são dimensões do conhecimento profissional que emergem no modo como cada professor planifica as suas aulas. A experiência acumulada é um fator que também pode intervir nesta prática, o que faz com que alguns professores não planifiquem as suas aulas, tal como acontece com o professor P13. Atendendo à sua experiência docente (30 anos), o professor sente-se confiante em relação ao conteúdo e à sua prática, recorrendo mais a esquemas mentais do que a planificações detalhadas.

Depois de tanto tempo, falando bem a verdade, eu nem planejo mais minhas aulas, já tenho tudo na mente... até sobra mais tempo para eu pensar no aspeto do ponto de vista prático, chamar a atenção para o dia a dia, para verificar a importância daquilo que estão vendo. (EG_P13)

Os professores que planificam as suas aulas recorrem a diferentes fontes (Tabela 8), das quais se destacam os livros didáticos e materiais disponibilizados na internet. Para além destas fontes, há professores que recorrem a vídeos do *youtube*; portais de aulas gravadas como *Coursera*, Khan Academy[8], Univesp TV[9]; apostilas; listas de tarefas criadas por colegas; cadernos utilizados na sua graduação; e a softwares.

Tabela 8. Fontes à que recorrem os professores na planificação das aulas.

Materiais didáticos	Frequência
Livros didáticos	13
Materiais disponíveis na internet	9
Vídeos do *youtube*	3
Portais de aulas gravadas	1
Apostilas	4
Listas de tarefas de colegas	2
Cadernos que utilizou na graduação	1
Softwares	2

[8] https://www.khanacademy.org/
[9] http://univesptv.cmais.com.br/cursos

Quanto aos livros didáticos, no Projeto Pedagógico dos cursos (PPC) da universidade onde se inseriu o estudo há a indicação da bibliografia básica e complementar a ser seguida pelo professor, a qual pode ser atualizada ou modificada desde que o professor a submeta à aprovação do Núcleo Docente Estruturante[10] (NDE) de cada curso. Assim, a planificação das aulas deve atender a essa bibliografia, mas o professor pode complementá-la com outros livros, materiais didáticos ou recursos tecnológicos, como salienta o professor P12:

> A primeira fonte que acho essencial é... aqui na universidade temos o site... é olhar no site a ementa, conteúdo programático, a bibliografia sugerida pela instituição. Dentro dessas bibliografias você pode optar por uma única ou não. Você pode ampliar essa bibliografia, daí é uma questão do professor. Mas ele tem que se basear pelo menos por aquilo que está ali. Mas, por exemplo, quando trabalho Cálculo, utilizo muito recursos tecnológicos, então eu busco fontes onde? Eu vou na internet e pesquiso o que que alguém já fez. Alguém já fez uma aula falando sobre esse assunto? Aí, por exemplo, tem vários vídeos na internet, aí vou olhar, o que a pessoa fez, será que ela usou um recurso tecnológico, se ela usou, como é que ela usou? Será que ela usou um exemplo da vida prática? Eu sempre estou dando uma olhadinha no que alguém já fez. Em alguns casos, em disciplinas como Cálculo I e Geometria Analítica, que a gente costuma ministrar com uma certa frequência, chega uma hora que você já tem mais ou menos delineado na sua cabeça o caminho das pedras, mas mesmo assim, por exemplo ministrei Cálculo I semestre passado e estou ministrando esse semestre, então eu tenho as atividades que já fiz semestre passado, faço uma revisita a essas atividades, como assim? Eu pego e vejo se não tem como melhorar. Então, muitas vezes eu mesmo sou a minha fonte, de coisas que já fiz. Mas algumas vezes eu crio... essas visualizações que eu crio no GeoGebra por exemplo, tanto para Cálculo como para Geometria Analítica, não me baseei em lugar nenhum. O que aconteceu foi que um dia alguém me falou: "oh, existe esse software chamado GeoGebra" e comentou comigo coisas básicas do GeoGebra... e aí por gosto pela coisa da tecnologia comecei a explorar no software e comecei a pensar como é que eu uso isso para as minhas aulas, e aí fui criando coisas. (EG_P12)

Reunindo o desejo de melhorar a sua prática de ensino, a preocupação com a adequação do conteúdo às necessidades dos cursos que lecionam, a carência de livros disponíveis na biblioteca ou falta de livros que contemplem todo o conteúdo previsto nas disciplinas, alguns professores procuram criar os seus próprios materiais didáticos ou utilizar os que já existem na sua instituição, como referem os professores P4 e P11:

> Como o Centro onde trabalho é novo, no início a gente não tinha muitos livros. Então a gente preparou uma apostila para que o aluno possa ter um referencial. Mas como é um curso de engenharia eu não consigo me aprofundar muito em certos aspetos teóricos. Sempre cito "tal demonstração você pode encontrar nesse livro, tal conteúdo está

[10] O NDE foi um conceito criado pela Comissão de Avaliação da Educação Superior (CONAES) do MEC no Brasil, instituindo que cada curso de graduação tenha, além do coordenador, um grupo de professores para auxiliar nas decisões pedagógicas.

relacionado com tal coisa, dou uma aplicação ou indico uma página da internet". (EG_P4)

Na parte de Cálculo me apego mais às apostilas. Tem algumas dúvidas que tiro no [livro] 'Cálculo A' ou outros livros básicos. Toda a parte de exercícios e a sequência [dos conteúdos] é a da apostila. De Álgebra Linear também, lista de exercícios e sequência [do conteúdo], também uso a apostila aqui da universidade. Faço complemento com livros. (EG_P11)

Relativamente aos materiais didáticos, os professores em início de carreira manifestam uma preocupação em ter uma diversidade de fontes de consulta dos conteúdos – livros, anotações de cadernos da graduação, internet e apostilas –, o que indicia dever-se à sua inexperiência profissional, como evidenciam os professores P8 e P5:

Em Cálculo eu recorro bastante a livros e às anotações que eu tenho no caderno de quando eu fiz Cálculo. Para Álgebra Linear também, livros e anotações de quando fiz Álgebra Linear. Tem algumas disciplinas que não tenho muitas anotações, por exemplo Geometria Analítica recorro mais a livros, internet. Mas os que eu tenho boas anotações, eu recorro a elas. (EG_P8)

Para Álgebra é basicamente Livros. Eu estou começando agora, então tenho minhas limitações, então lembro que no começo quando comecei a preparar minhas aulas eu peguei muito material, muitos livros, muitos vídeos na internet e acabou que chegou num momento que eu não conseguia me organizar porque era muita informação e eu não sabia qual era a melhor forma, um livro tinha uma ordem e um conteúdo e alguns tópicos, outro livro tinha outra ordem, outro conteúdo, claro tudo em volta de Álgebra. Eu preferi os livros. Para Cálculo Numérico uso livros, mas como também entra programação, então agora preciso de recursos tecnológicos, entendo de programação, mas preciso melhorar isso. E não temos tantos livros a respeito disso, então recorro bastante à internet. (EG_P5)

No início da carreira docente é comum ter dificuldades, como a relatada pelo professor P5, em definir como abordar os conteúdos, qual a sequência mais adequada para trabalhar determinado conteúdo, quais os materiais didáticos a utilizar, dentre outras. Uma forma que pode ajudar a ultrapassar algumas dessas dificuldades passa pelo trabalho conjunto entre pares, como, por exemplo, na partilha de experiências ou na planificação de aulas. Esta prática não é frequente nas atividades profissionais dos professores que integraram este estudo, que evidenciam ter uma postura individualista, sobretudo no que diz respeito à planificação das suas aulas. Apenas um dos professores, em início de carreira, planifica as suas aulas com um colega quando lecionam a mesma disciplina: "Toda matéria que eu dou junto com o Marcos, a gente sempre planeja em conjunto. Nas outras matérias [planifico] sempre sozinho. Nunca fiz parceria com outros professores além do Marcos" (EG_P8). Com exceção deste professor e do que não planifica as suas aulas (P13), os demais professores planificam as suas aulas individualmente, o que não quer dizer que não troquem ideias com os seus colegas, partilhem alguma experiência ou tirem dúvidas sobre um dado conteúdo. Essa partilha ocorre mais com os que estão no início da carreira ou quando ministram uma disciplina pela primeira vez, como destacam os professores P12, P15 e P11:

> Quando surge a oportunidade, quando você está conversando com um colega e ele levanta esse assunto, aí ele me fala: “ah eu costumo fazer assim”, aí eu também contribuo: “ah, eu costumo fazer de tal forma”. Mas eu não tenho esse hábito de me reunir para discutir, me reunir periodicamente com um grupo fechado de professores. Eu acho até que seria uma atividade bastante benéfica para todos nós, esse compartilhar de experiências, porém eu acho que em função da vida corrida de trabalho dificulta um pouco isso. Então, eventualmente, quando eu encontro alguma pessoa no corredor e esse assunto surge, a gente discute, mas também é uma discussão rápida, de certa forma superficial. (EG_P12)
>
> Aqui, como é um Centro pequeno, todo mundo se conhece, todo mundo se relaciona, então às vezes eu largo uma disciplina, outra pessoa vai pegar já passo todo o material, passo meu planejamento, também pego de outros professores, aí você não sai do zero, sempre tem uma participação, sabe onde estão as coisas. (EG_P15)
>
> Eu lembro que quando começava a dar uma disciplina eu perguntava bastante: "como faz aquele exercício?", "como tu davas essa matéria?", "como tu explicavas esse assunto?”, “o que significa isso?", "ah, o aluno me perguntou isso...". Eu me lembro de perguntar bastante. Nesse sentido..., era um tira dúvida, nunca foi troca de experiência, nem troca de ideias. (EG_P11)

Para alguns professores, a cultura de trabalhar isoladamente deriva de características da sua personalidade, como a timidez, o que tende a minimizar a interação com os colegas; pelo comodismo, pois a experiência acumulada nas disciplinas que lecionam indicia que os levam a replicar o que costumam fazer; e a ausência de oportunidade de ter com quem trabalhar, pois são os únicos que lecionam determinadas disciplinas afins (da Matemática) no Centro de ensino em que atuam. Tais posturas são exemplificadas pelas afirmações dos professores P2, P11 e P4:

> Muito pouco. Por causa de uma questão de personalidade. Eu não sou de ficar indo de uma sala para outra, de conversar. Sou de ficar no meu canto, quietinho, não interajo com os demais. (EG_P2)
>
> No começo [início da carreira] mais, agora nem tanto. Não sei se é porque tudo que acontece é uma coisa mais comum, não é tanta novidade, antes era mais novidade. "Ah, aconteceu isso, aconteceu aquilo... ah comigo aconteceu tal coisa". Mas agora todo semestre praticamente acontece a mesma coisa, então acho que é por isso que já não é compartilhado. (EG_P11)

> Não porque só tem eu e outro professor de Matemática no curso, então ele está com a parte dos Cálculos e eu dou a parte de Álgebra Linear, Cálculo Numérico e Pesquisa Operacional. Até discuto alguma coisa com ele, mas muito superficialmente. (EG_P4)

Um modo de os professores trocarem mais ideias e informações sobre as disciplinas que lecionam, compartilharem experiências e materiais, se ajudarem uns aos outros e se sentirem motivados para alterar a sua prática de ensino é por meio do trabalho em conjunto com os seus pares. Uma das formas de trabalho entre pares é o trabalho colaborativo entre docentes que ministram uma mesma disciplina, ou um conjunto de disciplinas.

Trabalho colaborativo

Como o trabalho colaborativo entre pares é o foco deste estudo, procurei averiguar as conceções e práticas dos professores relativamente a esse método de trabalho. No seu percurso profissional, oito professores revelaram ter vivenciado experiências de trabalho com os seus pares com o intuito de melhorar os processos de ensino e de aprendizagem. Seis destes professores participaram num Projeto de Ensino que envolvia as disciplinas de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear num dos centros da universidade. Cada uma destas disciplinas tinha um coordenador. Os professores de cada disciplina, conjuntamente com o respetivo coordenador, planificaram o plano de ensino das disciplinas (material didático; listas de tarefas; tipo, quantidade e datas das avaliações) e elaboraram as avaliações que eram iguais para todas as turmas. Porém, a planificação em conjunto das suas aulas, a discussão e reflexão sobre estratégias de ensino utilizadas, não eram consideradas, como explica o professor P9, que já foi coordenador da disciplina de Álgebra Linear no referido projeto:

> Tenho a experiência daquele projeto de ensino de Álgebra Linear em que eu era coordenador, mas que não era tanto assim colaborativo. Como eu coordenava, eu mesmo dava as diretrizes de como deveria ser o conteúdo, as provas, os exercícios, até elaborei uma apostila, mas não era bem um trabalho colaborativo. Colaboração até existia, tinha um feedback dos professores, davam um retorno, ajuda na apostila, ajuda nos exercícios, ajuda na elaboração da prova, mas não algo colaborativo em questão de discutir: "como vai ser dada a aula? Que estratégias usar?". Isso não (EG_P9)

Um outro professor revelou a participação num trabalho interdisciplinar entre pares na planificação de tarefas para os alunos de uma mesma fase da graduação na área de Administração de Empresas, cuja dinâmica dá a conhecer:

> A gente tem um formato de um trabalho interdisciplinar, mas aí envolve diferentes disciplinas para realizar um único trabalho. Então a gente [os professores] se reúne para

> encaminhar esse trabalho, [discutir] que tipo de abordagem a matemática poderia contribuir para eles [os alunos] melhorarem a empresa... o foco é eles chegarem numa empresa. Então o trabalho colaborativo não da mesma disciplina, mas interdisciplinar. Não ocorre na Álgebra Linear, mas entre outras disciplinas. (...) As vantagens desse tipo de trabalho é mostrar para o aluno a relação da tua disciplina com as outras, que ela não está isolada, desenvolver no aluno a capacidade crítica de criar relações que a gente não propõe e a formação integral do aluno. (EG_P6)

Nesse trabalho interdisciplinar, o professor destaca a preocupação que o grupo de docentes tem em relacionar os conhecimentos das diferentes disciplinas na resolução de problemas retirados de contexto empresariais.

Finalmente, o outro professor que revelou ter experiências de trabalho entre pares, numa modalidade diferente das citadas, mas com objetivos semelhantes, relatou o trabalho que dinamizou no NDE de um curso em que atua. Este trabalho consiste na análise da grade curricular, com a distribuição das disciplinas pelos professores, com a abertura de concurso para professores e com a partilha de experiências de cada um. Quer para este professor quer para os anteriores, o trabalho colaborativo é perspetivado como um conjunto de atividades que os professores realizam quando se reúnem em grupo, o que nem sempre adquire as características de um trabalho de natureza colaborativa (Boavida & Ponte, 2002).

A concretização de trabalho entre pares depende de vários fatores, alguns deles extrínsecos ao professor, como, por exemplo, a cultura profissional do meio em que se integra. Apesar das características desse tipo de trabalho, que alguns professores evidenciaram, e de alguns professores imergirem em instituições em que essa prática é ausente, não significa que os professores que integraram a primeira fase deste estudo não tenham perceções sobre as vantagens, as desvantagens e as limitações do trabalho colaborativo entre professores (Quadro 18).

Quadro 18. Perceções dos professores sobre o trabalho colaborativo.

Vantagens	– Trocar experiências. – Trocar ideias. – Aprender com os colegas. – Inovar a prática. – Sentir que não se está sozinho numa ação. – Sair da zona de conforto.
Desvantagens	– Receber críticas não construtivas. – Induzir o outro a fazer da sua forma. – Incutir a concorrência entre professores. – Julgar colegas. – Aumentar a quantidade de trabalho.
Limitações	– Disponibilidade de tempo e horário. – Saber trabalhar em equipa.

Como vantagens do trabalho colaborativo, os professores destacam a troca de experiências e de ideias entre os pares por possibilitar, principalmente aos professores em início de carreira ou os que ministram uma disciplina pela primeira vez. Além, do conhecimento do que já deu certo ou errado em diferentes estratégias de ensino, de diferentes abordagens que podem ser dadas aos conteúdos e da ênfase a dar a alguns tópicos que são pré-requisitos para outras disciplinas, como referem os professores P4, P2 e P10:

> Acredito que a principal vantagem seria a troca de experiências, saber o que já deu errado e o que já deu certo. Porque eu aprendi testando. (EG_P4)
>
> É uma coisa boa porque existe aquela troca de experiências e às vezes nessa troca a gente percebe algo que poderia trabalhar diferente, assim como pode também se estimular o outro a trabalhar algo diferente. (EG_P2)
>
> Eu acho que tem vantagens, uma delas é a troca de informações. Por exemplo, quando eu comecei a dar aula de Cálculo I e Geometria Analítica eu não tinha noção da importância que tinham alguns tópicos que são muito usados no Cálculo II. Agora que dou Cálculo II eu vejo a importância, com certeza ainda não sei todas porque eu não tenho conversado com o pessoal de CVE [Cálculo Vetorial] e nem das áreas mais específicas dos cursos. (EG_P10)

A reflexão gerada a partir da troca de ideias e experiências pode conduzir os professores, independente da fase da carreira docente, a experimentar novas abordagens e/ou estratégias de ensino, como exalta o professor P2. É de notar no discurso do professor P10 que, apesar de estar ciente da importância da troca de informações entre colegas e de já ter vivenciado a experiência de lecionar disciplinas sem ter muita noção da conexão com outras disciplinas, continua mantendo uma postura de isolamento na disciplina de Cálculo II, o que indicia que nem sempre tem presente a importância dessa conexão para a formação dos alunos.

Para além da troca de experiências e de ideias, alguns professores consideram que o trabalho colaborativo proporciona formas de aprender uns com os outros, sair da zona de conforto e de inovar as suas práticas de ensino, tal como enfatizam os professores P8, P9, P7 e P3:

> A maior vantagem é quando a gente está trabalhando sozinha, tem tanta coisa que a gente não enxerga que o outro fala uma coisinha e a gente pensa: “nossa, nunca tinha pensado nisso”. Principalmente com aplicações, na área de Matemática que tem muita coisa teórica, a gente não pensa em tantas aplicações. Tem gente que já viu uma aplicação, a gente pensa: “sempre fiz isso e não sabia para que servia”. (EG_P8)
>
> Pode ajudar [o professor] a dar o conteúdo de uma maneira nova, ajudar a preparar as aulas. Às vezes um professor diz: "em tal livro tem um assunto interessante", ou "olha

tem tal artigo..." (...) então, com a ajuda de outras pessoas a gente pode trazer outras referências, outras maneiras de ver o conteúdo. (EG_P9)

Uniformizar um pouco as abordagens entre vários cursos ou professores, aproveitar digamos o melhor do que cada um está contribuindo, ou seja, a experiência de cada um e como isso vai ser passado aos alunos. Um vê de uma maneira, outro vê de outra, as ideias de um podem ajudar a complementar um pouquinho as ideias do outro. (EG_P7)

Muita gente aprende bastante com isso e alguns professores que infelizmente ficam na zona de conforto tem que ir atrás. Os professores interessados aprendem com os colegas. (EG_P3)

Das vantagens que os professores evidenciam sobre o trabalho colaborativo emerge a noção de que as ideias não são impostas, mas são construídas a partir das contribuições e experiências dos membros do grupo de trabalho. Esta característica do trabalho colaborativo faz despertar um sentimento de pertencimento a um grupo e sentir apoio na realização de determinadas ações no ensino, como evidencia o professor P15:

No trabalho colaborativo não é nada imposto, então eu acho que a vantagem é que você não está sozinho naquela ação, você está compartilhando experiências, dando visão das coisas, às vezes a maneira de você abordar um conteúdo, a maneira de cobrar um conteúdo, acho que só tem contribuições boas. (EG_P15)

O professor P9 que, como já foi mencionado, tem a experiência de trabalhar com outros docentes em Álgebra Linear, advoga que o trabalho colaborativo existe quando todos os elementos participam nas atividades, se entreajudam uns aos outros e assumem um mínimo de protagonismo nas ações do grupo.

Tem vantagens se a equipe for participativa, se o pessoal que está ali colaborar. Se tiver um ou dois que não queiram colaborar, aí fica difícil trabalhar. A vontade de trabalhar junto é importante e também saber trabalhar em equipe, pois não são todos que sabem trabalhar em equipe. Então um trabalho colaborativo é bom se as pessoas estiverem com vontade de trabalhar em conjunto, trocar ideias. (EG_P9)

Para além das vantagens do trabalho colaborativo, os professores também apontaram desvantagens deste método de trabalho entre pares, tais como: as críticas não construtivas que podem ocorrer no grupo; a falta de colaboração de alguns dando a sensação que se está trabalhando para o colega; a concorrência entre os professores quando um quer mostrar que sabe mais que os outros; a falta de negociação prevalecendo as ideias de uma pessoa; e o aumento da carga de trabalho, como exemplificam as afirmações dos professores P8, P11, P3, P2 e P6:

> Quanto às desvantagens, acho que são as críticas não construtivas de um para o outro. (EG_P8)
>
> A desvantagem é que nem todos colaboram. Às vezes tu trabalhas para o outro, então quando todos colaboram é muito bom. (EG_P11)
>
> A desvantagem é que tem aquele espírito de concorrência, não aquela justa e honesta, uma concorrência do tipo 'quero fazer mais do que você, sei mais do que você'. (EG_P3)
>
> Às vezes acontece que alguns querem fazer as coisas do seu jeito e você nem sempre concorda. (EG_P2)
>
> A desvantagem é que mais trabalho para o professor, talvez seja a única desvantagem. (EG_P6)

Os indicadores que emergem das afirmações dos professores sobre a fragilidade perante os outros ganham mais relevância nos professores em início de carreira, o que indicia dever-se à inexperiência profissional, no geral, e em trabalhar colaborativamente entre pares, em particular, tal como afirma o professor P5: "Eu tenho receio, uma vez que estou começando, que num trabalho colaborativo [alguém] me repreendesse, ou talvez me julgasse" (EG_P5). Este professor não tem um vínculo de efetivo, atua na instituição que o formou e no seu próprio curso de formação, tendo como colegas alguns dos seus ex-professores. Tais circunstâncias tendem a influenciar a noção que tem de colaboração entre pares. Como este método de trabalho é um "processo emergente" (Boavida & Ponte, 2002, p. 5), que não se desenvolve de um dia para o outro, importa estabelecer um nível de confiança entre os professores para que estes se sintam confortáveis e apoiados para expor a sua prática e as suas ideias.

Quanto às perspetivas dos professores em relação às limitações do trabalho colaborativo, ganha destaque a conciliação de horários entre os professores para dinamizarem sessões de trabalho em conjunto e dispor de tempo tanto para essas sessões como para concretizar as tarefas negociadas com os colegas, tendo em vista as suas atividades dentro e fora da universidade, como evidenciam os professores P5 e P10:

> O empecilho é o horário comum para todo o grupo e o deslocamento, o tempo despendido para isso, porque hoje em dia ninguém tem tempo para nada... (EG_P5)
>
> Como estou fazendo esse curso [disciplina de doutorado], eu realmente fico bem cansada, então o tempo que estou aqui faço as coisas da universidade e tenho receio de me comprometer dia tal, hora tal, com fulano; até consigo, mas não consigo focar no que é para fazer porque estou muito cansada. (EG_P10)

Identificados alguns elementos significativos da prática profissional dos professores que integraram a primeira fase deste estudo, interessa também conhecer as suas perceções sobre o ensino de Álgebra Linear.

6.3. Ensino de Álgebra Linear

Na procura de caracterizar o ensino de Álgebra Linear dos professores que integraram este estudo, importa analisar as suas perceções quanto: à sua formação para ensinar esta disciplina; à importância de Álgebra Linear na formação dos alunos; às estratégias de ensino (método de ensino, tipologia de tarefas, envolvimento dos alunos); à exploração de aplicações contextualizadas, aos materiais didáticos; à avaliação das aprendizagens dos alunos; às diferenças entre o ensino de Álgebra Linear e noutras disciplinas que lecionam; às dificuldades no ensino e na aprendizagem desta disciplina; e à prática de reflexão sobre a sua ação letiva.

Formação para ensinar Álgebra Linear

Na sua prática letiva, o professor do ensino universitário nem sempre leciona disciplinas da sua área de especialização. Por essa razão, importa averiguar como os professores percecionam a sua formação, inicial e continuada, para ensinar Álgebra Linear (Tabela 9).

Tabela 9. Distribuição das perceções dos professores sobre a sua formação para ensinar Álgebra Linear.

	Frequência
Formação inicial e continuada adequada para ensinar Álgebra Linear	7
Formação inicial adequada e formação para ensinar com a prática	5
Formação inicial e continuada não foram adequadas	2
Formação continuada foi essencial para ensinar Álgebra Linear	1

Quase metade dos professores considera que a sua formação inicial e continuada é adequada para ensinar Álgebra Linear. Tais professores tiveram uma sólida formação teórica nessa área, o que lhes proporcionou um amplo conhecimento do conteúdo, como exemplifica o professor P9:

> A minha Licenciatura em Matemática foi muito pesada, sou do tempo antigo em que a carga de Matemática era muito grande, tinha muito conteúdo, tive três Análises, fiz equações diferenciais parciais, tive cinco Álgebras pura, Geometria Diferencial, duas Topologias (...). No doutorado tive (...) Álgebra Linear do ponto de vista matricial, então estudei muito isso. Depois tive que fazer o exame de qualificação nessa disciplina, aí tive

> que estudar mais ainda. Além disso, fiz também uma disciplina (...) de Álgebra Linear Computacional. Tive que fazer também duas disciplinas de Elementos Finitos que trabalhava muito com espaços, subespaços, resolver os problemas, então minha formação em Álgebra Linear foi muito forte, estudei muito. (EG_P9)

Um outro professor (P4) aponta que, como a sua formação o preparou para ser um professor mais teórico, sente dificuldades em ensinar a disciplina especificamente para o curso de Engenharia que atua, onde o foco é mais a aplicação do que as demonstrações. Por outro lado, apesar de não ter uma formação tão voltada para a aplicação, este professor destaca-se dos demais por ter a preocupação em ministrar a disciplina direcionada para o seu público, buscando trabalhar problemas contextualizados.

> Considero que tenho uma formação adequada em Álgebra Linear. Mas para trabalhar em curso de Engenharia acho que algumas coisas ainda têm que ser trabalhado bastante. (...) O meu curso de Licenciatura foi muito teórico, cobrando definição, cobrando demonstração. Não tinha um foco assim: 'como a gente pode ensinar isso?'. A minha formação me preparou para ser teórica, para fazer exercícios, para estudar... aí quando caí de paraquedas no curso de Engenharia não é bem assim que funciona. Você vai colocar lá 'teorema', eles dizem: 'o que é um teorema?'. Aí você troca 'teorema' por 'resultado importante'. (EG_P4)

Quanto aos professores que consideram que tiveram uma formação inicial adequada e que desenvolveram a sua formação para ensinar com a prática, verifica-se que o contacto com Álgebra Linear se limitou à sua graduação e à sua atividade profissional. Estes professores acreditam que a formação que tiveram nessa disciplina na graduação lhes permitiu ter condições de estudar e aprofundar os seus conhecimentos na disciplina, a ponto de conseguirem ensiná-la. Com a prática, a partir dos seus próprios questionamentos e dos questionamentos dos alunos, o seu conhecimento e o seu ensino foram evoluindo, tal como ilustram as afirmações dos professores P1 e P14:

> A formação inicial até foi boa em Álgebra Linear, mas ao mesmo tempo a gente só aprende a disciplina quando vai estudar para ministrar mesmo. Na formação continuada nunca fiz nada vinculado à Álgebra Linear. Aprender como ensinar a disciplina, só com a prática. A maneira que eu dei a disciplina nas últimas vezes que ministrei foi bem diferente do que pelas primeiras vezes e acho que melhor. Acho que vai havendo uma evolução natural, ao longo de cada semestre vai melhorando. (EG_P1)
>
> A formação continuada não tem nada a ver com Álgebra Linear. A formação inicial acho adequada. Obviamente fiquei anos sem estudar conceitos de Álgebra Linear específicos e não utilizei na minha pós-graduação, mas me sinto apta em pegar um livro e aprender. Me sinto apta em aprender várias coisas. Sempre novos desafios são interessantes. (EG_P14)

Enquanto para alguns professores a sua formação inicial é adequada para ensinar Álgebra Linear, o mesmo já não acontece para os professores que referem que tal formação não foi suficientemente adequada para ensinar esta disciplina. Quem desempenhou esse papel foi a sua prática de ensino, o seu estudo do conteúdo para a planificar e a maturidade adquirida no exercício da profissão docente, como expressa o professor P11:

> A Álgebra Linear que eu dou foi mais por mim do que pela minha formação, eu leio, eu busco, eu pesquiso, eu preparo a aula, mas não foi devido à minha formação não. Por isso que às vezes até penso, 'é amadurecimento', às vezes a gente cobra do aluno alguma coisa que realmente falta amadurecimento, a gente tem, mas eles não têm. Imagina, na graduação eu não entendia nada também. Às vezes os alunos respondem alguma coisa, até na resposta do aluno 'ah é verdade, não tinha pensado nisso...'. Mas é mais pela experiência de sala de aula [que vai aprendendo]. (EG_P11)

Por fim, um único professor afirma que a sua pós-graduação a nível de mestrado foi essencial para lecionar Álgebra Linear: "Só com minha formação inicial não seria suficiente. Aprendi bastante aqui na universidade quando comecei a lecionar Álgebra Linear. Mas acho que a formação continuada é essencial. Não conseguiria lecionar da maneira que ensino hoje se não tivesse o mestrado" (EG_P3).

Na análise das perceções dos professores constatamos que há indícios de que a sua formação, de forma geral, envolve mais o conhecimento do conteúdo do que o conhecimento didático sobre as estratégias de como ensinar conteúdos matemáticos, de como envolver os alunos nas suas atividades de aprendizagem, de como usar materiais didáticos, como, por exemplo, os tecnológicos.

> As disciplinas que poderiam ter trabalhado algo diferente foram jogadas e as disciplinas que fiz de educação foram do tipo 'educação para qualquer um'. Fiz Psicologia da Educação, mas não era para Matemática, era para qualquer pessoa. Então o cara que faz Educação Física vai fazer junto com o pessoal da Matemática, são realidades bem diferentes. (EG_P4)
>
> Não consigo ver aquela coisa da utilização de novas tecnologias, coisas assim, não consigo ver como usar isso em Álgebra Linear. (EG_P15)

Apontadas algumas perceções da formação dos professores, evidencia-se na sequência a importância da Álgebra Linear no olhar desses professores.

Importância da Álgebra Linear

A integração de uma dada disciplina no currículo de um curso universitário deriva da sua relevância na formação dos alunos que o frequentam. Relativamente à importância da disciplina de Álgebra Linear na formação dos alunos, os professores destacam o conhecimento do conteúdo matemático, a aquisição de uma ferramenta teórica que lhes permite resolver problemas de diferentes disciplinas e o desenvolvimento da capacidade de organização do raciocínio matemático e de abstração (Tabela 10).

Tabela 10. Distribuição das perceções dos professores sobre a importância da Álgebra Linear na formação dos alunos.

	Frequência
Conhecimento do conteúdo matemático	4
Ferramenta teórica para a resolução de problemas de diversas áreas	9
Desenvolvimento da capacidade de organizar o raciocínio matemático	5
Desenvolvimento da abstração	4

A maioria dos professores visualiza a Álgebra Linear como uma poderosa ferramenta teórica para a resolução de problemas dentro e fora da Matemática, como ilustram as afirmações dos professores P9 e P11:

> A ferramenta Álgebra Linear é muito poderosa para resolver problemas práticos, problemas de mecânica de fluidos, problemas de estruturas, problemas de engenharia elétrica, circuitos... todos esses problemas caem ou numa equação diferencial ordinária ou numa equação diferencial parcial e a base para resolver as equações diferenciais é a Álgebra Linear, são os espaços vetoriais. (EG_P9)
>
> Eu tento mostrar que hoje em dia a gente tem uma quantidade de informação muito grande e a gente tem que administrar essa informação de alguma forma, seja na hora de você planejar um tráfego, seja na hora de planejar como os funcionários de uma empresa vão trabalhar, então tento focar mais nessa parte de sistemas lineares, mostrar que depois no cálculo numérico acaba virando um sistema não-linear e depois este sistema acaba virando uma maneira de você otimizar alguma coisa, mostrar para eles como podem usar para resolver situações reais. (EG_P11)

Dentre os professores que veem a disciplina como ferramenta para a resolução de problemas, dois deles consideram que os alunos não se apropriam de um conceito de Álgebra Linear de modo a usá-lo diretamente para resolver um problema, visto que, frequentemente, têm que usar esse conceito associado a outras teorias para conseguirem resolver um problema.

> Sempre falo para eles [os alunos] que nunca vão pegar um assunto de Álgebra Linear e sair usando, não vão calcular o produto interno de tal coisa, mas às vezes vão estar

> utilizando o produto interno dentro de um outro assunto, mas vão estar utilizando. Ou seja, vão utilizar dentro de outra disciplina, mas vão precisar desenvolver isso para poder sair algum resultado. (EG_P11)
>
> Às vezes eles vão precisar de outras disciplinas do curso deles [além da Álgebra Linear] ou até mesmo de uma base matemática um pouco mais ampla para poder entender um problema aplicado. (EG_P12)

Para além da aplicabilidade de conceitos da Álgebra Linear na resolução de problemas com que os alunos se deparam, alguns professores aludem que a natureza do formalismo da teoria da Álgebra Linear promove o desenvolvimento da capacidade de organizar o pensamento matemático, pois é necessário que o aluno tenha um raciocínio pautado por teoremas, hipóteses e conclusões, diferente de um pensamento focado em cálculos e procedimentos.

> É a questão do formalismo, de você aprender a pensar numa maneira formal, de colocar as tuas hipóteses, desenvolver um raciocínio lógico (...). (EG_P15)
>
> É uma primeira matéria que é mais abstrata, é um estilo de pensamento diferente do Cálculo ou Geometria Analítica, onde se está mais focado nas contas, o que ajuda como forma de organizar ideias. (EG_P7)

A contribuição da Álgebra Linear na organização do raciocínio matemático do aluno é perspetivada por alguns professores como forma de desenvolver a capacidade de abstração matemática, como elucidam os professores P15 e P1:

> Acho que a abstração é o grande ganho da Álgebra Linear (...) você conseguir desvincular a coisa de um exemplo, entender melhor as regras da coisa, trabalhar com regras mesmo, desvincular do exemplo prático. (EG_P15)
>
> Porque acho que ela é um ramo do conhecimento que permite fazer muitas generalizações, permite um conhecimento mais amplo do que apenas aqueles conceitos geométricos, tem muito conceito geométrico que é ampliado para conceitos mais algébricos. (EG_P1)

Por fim, para alguns professores a importância da disciplina na formação do aluno resulta da aquisição de conhecimento do conteúdo matemático, de forma que no futuro tenha as ferramentas necessárias para compreender outras disciplinas, tal como expressa o professor P3.

> É importante para qualquer aluno de ciências exatas, porque qualquer engenheiro tem que resolver um sistema linear. Física também, para estudar equações diferenciais tem muita Álgebra Linear envolvida. Na Matemática, um dos pilares de formação básica é a Álgebra Linear junto com Cálculo. Futuramente esta Álgebra Linear vai ser muito

importante para a interação com outras disciplinas. Então acho a Álgebra Linear tão importante quanto o Cálculo. (EG_P3)

Um desafio que enfrentam os professores que lecionam disciplinas mais abstratas, como a Álgebra Linear, é encontrar estratégias que possibilitem aos seus alunos a perceção da aplicabilidade e da importância da disciplina.

Estratégias utilizadas no ensino de Álgebra Linear

Um indicador que determina o ensino de Álgebra Linear é a forma como o professor delineia as suas estratégias de ensino desta disciplina, o que permite conhecer como introduzem e como desenvolvem os seus conteúdos. As estratégias de ensino a que os professores recorrem circunscrevem-se nas que caracterizam o ensino tradicional, que se repercutem na exposição do conteúdo alternada com a resolução de exercícios realizada pelo professor. Mesmo nas aulas de caráter mais prático, a maioria dos professores indicia que recorre a formas de exposição da informação matemática e poucos propõem a resolução de exercícios em sala de aula (Tabela 11).

Tabela 11. Distribuição das perceções dos professores sobre as suas estratégias de ensino.

	Frequência
Exposição dos conteúdos pelo professor	15
Consideração dos conhecimentos prévios dos alunos	2
Exploração de conceitos com conexão à Geometria	6
Resolução de exercícios pelo professor	15
Resolução de exercícios pelo aluno	6

Na introdução de conteúdos de Álgebra Linear, há professores que utilizam a sequência descrita por Uhlig (2002), 'Definição-Lema-Prova-Teorema-Prova-Corolário', seguido de exemplos e exercícios, como expressam os professores P2 e P12.

> Sou muito direto, muito seco, eu vou realmente pela teoria. Um ou outro conteúdo eu começo pela prática no início, mas geralmente começo com a parte da teoria, vou desenvolvendo, demonstrando o que deve ser demonstrado. (EG_P2)
>
> A disciplina de Álgebra Linear é essencialmente teórica, a possibilidade de visualizações gráficas fica um pouco deficiente em função do próprio conteúdo que nós temos que discutir. Em geral, eu sigo o padrão comum: definições, teoremas, propriedades, exemplos, exercícios. (EG_P12)

Apesar da adoção de estratégias de ensino direto, alguns professores preocupam-se em questionar os alunos sobre conhecimentos prévios e aplicações do conteúdo e em motivá-los, dando uma retrospetiva do uso do tópico, seja noutras disciplinas ou na resolução de problemas do dia a dia, como relatam os professores P3 e P13.

> Por exemplo, quando falo de matrizes, explico um pouco de matrizes, depois pergunto: vocês sabem porque as matrizes são importantes? É importante por causa disso, têm aplicações na computação, na Geometria Diferencial, e a Geometria Diferencial está ligada à Computação Gráfica, por exemplo. De repente a pessoa quer saber a aplicação de sistemas no mercado financeiro, procuro falar sobre essas coisas. Contextualizo o que eu posso, mas meu conhecimento é bastante limitado quanto a isso. (EG_P3)
>
> Explico, por exemplo, o que são matrizes. Questiono os alunos quanto a importância de se estudar matrizes. Explico que é importante para estudar sistemas de equações. Quando falo de determinantes, questiono, 'mas afinal o que é determinante? Será que o próprio termo determinante não diz tudo? O que vocês entendem por determinante?' Dependendo do valor que vocês têm é 'determinante' para que o sistema tenha uma solução, infinitas soluções ou nenhuma. (EG_P13)

A preocupação em explorar os conhecimentos prévios dos alunos, como por exemplo advindo da Geometria Analítica, faz com que alguns professores partam de exemplos a duas ou três dimensões com o intuito de generalizar, como exemplificam as afirmações dos professores P7 e P1.

> Dependendo do conceito, parto de algum exemplo que tenha sido visto em Geometria Analítica e que depois vai ter uma versão geral para um outro espaço vetorial. (EG_P7)
>
> Sempre que possível então faço essa relação com o que os alunos já sabem muitas vezes da Geometria Analítica. Por exemplo, para trabalhar com o conceito de independência linear e dependência linear sempre explorava os conceitos de vetores colineares e coplanares que são da Geometria Analítica, nesse espírito generalizava para o conceito de vetores LIs e LDs. (EG_P1)

A exploração de exemplos e a resolução de exercícios em sala de aula tem como finalidade atenuar a natureza teórica da disciplina, o que para os professores P9 e P11 ajuda os alunos a entender os conteúdos.

> Inicio, às vezes, dando um exemplo. Mas geralmente é pelas definições, dou uma definição e começo a trabalhar aquela definição, dou exemplos, depois disso vem os resultados, teoremas. Procuro dar bastantes exemplos, além dos exemplos dos livros, crio alguns exemplos na hora. (EG_P9)
>
> Primeiro exponho o conteúdo, dependendo do assunto eu faço alguma demonstração para o aluno entender de onde é que está vindo aquele resultado e depois eu costumo

> fazer um exercício simples, depois um mais pesado. Como em álgebra um assunto depende do outro, eu costumo fazer um exemplo misturando várias partes do conteúdo para ver se o aluno entendeu de forma geral o conteúdo. Mas eu trabalho bastante com exercícios, não que eu não trabalhe com a parte teórica, não tem como trabalhar exercício sem a parte teórica. (EG_P11)

Relativamente à resolução de exemplos e de exercícios, há uma tendência que seja o professor a concretizá-la, competindo aos alunos registarem essa resolução. Entretanto, há alguns professores (menos de metade) que após resolverem alguns exemplos, para explorar os conteúdos, procuram propor aos alunos que resolvam exercícios como uma estratégia de os envolver nas atividades da sala de aula. Com esta preocupação, procuram que a aula se torne menos centrada na atividade do professor e esclarecer as possíveis dúvidas que surjam. Alguns destes professores costumam, inclusive, recolher as resoluções de alguns exercícios como componente da avaliação das aprendizagens dos alunos. Há outros professores que incentivam os alunos a apresentar as suas resoluções para os colegas no quadro. Tais constatações são ilustradas pelas afirmações dos professores P11 e P14:

> Eu dou o conteúdo, resolvo um exemplo e proponho outro, aí passo de carteira em carteira para tirar dúvidas, isso em aula normal do dia a dia. Quando é aula para tirar dúvidas eu estou mais sozinha mesmo. Eu até pergunto: alguém tem uma ideia, quem fez? Para eu não colocar o meu raciocínio direto, às vezes até uso a ideia do aluno e não uso a minha ideia, para tentar fazer com que eles colaborem na disciplina. (EG_P11)
>
> Eu tento às vezes fazer com que o aluno vá ao quadro resolver, chamo, nunca vou obrigar, é uma questão de liberdade, mas eu motivo: "vamos lá, vamos fazer juntos, vou te ajudar". Sempre tem os que gostam e os que não gostam. Acho que isso é importante, quebra aquela coisa do professor estar ali na frente o tempo todo. Torna a aula mais dinâmica. (EG_P14)

O trabalho dos alunos em sala de aula na resolução de exercícios é, em geral, livre, o que permite que o façam em grupos ou individualmente. Quando a resolução de exercícios adquire um elemento de avaliação, apenas um professor permite que os alunos o façam em duplas, enquanto os demais exigem que seja um trabalho individual.

> Os trabalhos são em dupla, mas pode pesquisar no caderno, mas tento fazer com que não trabalhem em grupo, só em dupla mesmo. Aí falo: "façam juntos, não dividam as questões". Às vezes quando passo na carteira um está fazendo uma questão, outro fazendo outra. Aí falo: "não é isso que eu quero, os dois fazem a primeira e os dois fazem a segunda, se der tempo deu, se não der quero ver o que vocês sabem", para eles aprenderem a trabalhar em grupo, não dividir tarefas. Nos exercícios normais em sala, deixo livre, podem trabalhar em dupla, desde que não atrapalhe a aula, mas geralmente não atrapalha não. (EG_P11)

As estratégias de ensino a que os professores recorrem inserem-se nas que espelham o ensino direto, com o protagonismo centrado no professor. Entretanto, importa conhecer como eles implementam em sua prática de ensino, mesmo sendo a tradicional, a aplicabilidade da disciplina.

Exploração de aplicações contextualizadas no ensino de Álgebra Linear

Ao incidir sobre a importância da Álgebra Linear para a formação dos alunos para os quais ensinam, a maioria dos professores reconhece-a como uma ferramenta básica da Matemática que está presente em muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Por outro lado, explorar essas aplicações no seu ensino constitui um desafio para a maioria dos docentes (Tabela 12).

Tabela 12. Distribuição das perceções dos professores sobre as aplicações contextualizadas em Álgebra Linear.

	Frequência
Conhece a existência de algumas aplicações, mas não as explora	9
Explora problemas contextualizados de sistemas lineares e/ou transformações lineares	4
Não explora	2

Da observação da Tabela 12 constata-se que a exploração de aplicações contextualizadas é muito pouco utilizada pelos professores no ensino de Álgebra Linear. A maioria dos professores (60%), embora faça referência à importância dos problemas aplicados no ensino de alguns conteúdos, não os explora concretamente na sua prática. Na perspetiva de Harel (2000), os alunos precisam de sentir a utilidade dos tópicos que estão a ser explorados pelo seu professor. Porém, só falar da importância de se aprender um tópico ou só falar das aplicações contextualizadas sem os envolver na resolução de, por exemplo, um problema contextualizado que os incentive a refletir sobre o uso de tais tópicos na resolução pode ser ineficaz. Um dos professores (P12) expressa o sentimento de frustração que sente nos alunos quando ele fala de situações onde podem usar o que estão a estudar, mas que não consegue concretizar essa intenção.

> A minha formação não me permite explorar uma situação contextualizada, eu consigo citar, consigo dizer "isso vocês vão estudar com o professor de engenharia", eu deixo bem claro "oh pessoal, não é minha área, por isso que eu não sei falar com propriedade, mas com certeza um professor da engenharia vai saber falar isso para vocês com grande propriedade porque é a formação dele", isso eu acho ruim porque eu consigo citar, sei que existe mas não consigo explorar de maneira mais adequada, inclusive eu sinto que

> os alunos ficam meio frustrados porque eu falo que existe, eles ficam animados, pensam "ah então tem aplicação na minha engenharia", aí é um balde de água fria porque aí falo "oh gente mas eu não sei explicar isso para vocês". (EG_P12)

Assim como o professor P12, outros professores atribuem à sua formação a dificuldade de visualizar as aplicações dos conhecimentos adquiridos e como integrá-las na sua prática, como, por exemplo, afirma o professor P10:

> Eu tento explicar alguma coisa no que eles podem utilizar, por exemplo quando falo em espaço vetorial, tento falar de tensores, quando falo de produto interno eu falo que vai utilizar o produto interno de matrizes, quando falo em autovalores e autovetores falo que utiliza na resolução de sistemas de equações diferenciais. Então, eu tento falar alguma coisa que me lembre vagamente de dizer que vão utilizar para não ficar tão vago. Falo aplicações de caráter geral porque somos matemáticos e nem mesmo a gente sabe exatamente onde usa e como usa. (EG_P10)

Quanto aos professores que exploram algumas aplicações, alguns deles (26,6%) referem que conseguem abordar apenas alguns problemas simples envolvendo sistemas lineares, os quais nem sempre estão contextualizados com o curso que lecionam. Um destes professores alude que somente com os conhecimentos da Álgebra Linear não se consegue resolver muitos problemas aplicados, porque os alunos precisariam de outros conteúdos que são estudados em disciplinas subsequentes. Por outro lado, o professor P4 propõe tarefas que envolvem aplicações contextualizadas de sistemas lineares e de alguns operadores lineares.

> A nível de graduação, você vai trabalhar espaço vetorial, é difícil contextualizar esses conteúdos. Alguns exemplos faço, os mais comuns são envolvendo sistemas lineares. Fora disso não dá. Mesmo quando chega na última parte do conteúdo que é autovalor e autovetor, você pode aplicar isso em estruturas, ou outra coisa, mas só que daí a aplicação é tão avançada que eles não vão entender, não chegaram àquele nível ainda, falta cálculo vetorial, diagonalização de operadores ou a forma canônica de Jordan. (EG_P9)
>
> Na disciplina de Álgebra Linear consigo trabalhar com aplicações em trabalhos que proponho. Uma delas é de aplicações de sistemas lineares, porque acaba sendo um ponto bastante importante dessa disciplina, e aí eles têm que pegar uma situação real, um problema e realmente montar um sistema, resolver, ver qual é a melhor solução, dentre infinitas soluções ver qual que é a real, aquela que por exemplo tem o menor preço, tento focar nesse sentido. Sempre faço um trabalho também de transformações lineares focando a rotação, projeção, translação, cisalhamento. Eles têm que definir o que é, dar um exemplo de uma figura e mostrar onde pode aplicar aquilo no dia a dia. Por exemplo, quando o grupo pega cisalhamento eles têm Resistência de Materiais I e

II, trabalham com tensionamento de vigas, tem que trazer para os colegas onde aquele tipo de situação [cisalhamento] está sendo aplicado. (EG_P4)

Fica evidente a fragilidade da contextualização da Álgebra Linear na perceção dos professores, seja devido a formação ou a natureza axiomática da disciplina. Interessa averiguar se na perceção deles há contrastes no ensino de Álgebra linear com as outras disciplinas que lecionam.

Diferenças entre o ensino de Álgebra Linear e de outras disciplinas de Matemática

A Tabela 13 sintetiza as categorias reveladas pela análise das perceções dos professores quanto às semelhanças e/ou diferenças entre seu ensino de Álgebra Linear e de outras disciplinas que lecionam.

Tabela 13. Distribuição das perceções dos professores sobre as diferenças entre o ensino de Álgebra Linear e de outras disciplinas de Matemática.

	Frequência
Utiliza o mesmo método de ensino nas disciplinas que leciona	10
Ensinar Álgebra Linear exige mais do professor para fazer os alunos entender	7
Em Álgebra Linear é mais teórico do que noutras disciplinas	4
Em Álgebra Linear preocupa-se mais em motivar os alunos do que noutras disciplinas	2

No ensino de Álgebra Linear, a maioria dos professores utiliza o mesmo método de ensino que utilizam noutras disciplinas. Por exemplo, o professor que em Álgebra Linear prioriza a resolução de exercícios pelos alunos em sala de aula, nas outras disciplinas mantém essa postura, como ilustram os professores P10 e P4:

> Na verdade, eu procuro lecionar da mesma forma. No caso específico Álgebra Linear, Cálculo I e Geometria Analítica há um tempo hábil para você conseguir explicar com calma, explicar um dia a teoria, no outro dia trabalhar bastantes exercícios, porque os alunos por mais que seja um conteúdo muito fácil para nós, tem aluno em Cálculo II que esqueceu derivada.... Já no Cálculo II é muito conteúdo para pouco tempo, daí quando dá eu consigo fazer [propor para os alunos trabalhar] algum exercício na sala. É bem semelhante todas as disciplinas que leciono. (EG_P10)
>
> Aqui na universidade eu ministro Álgebra Linear, Cálculo Numérico, Cálculo III e Pesquisa Operacional. Não vejo muita diferença na estrutura, tento seguir esse ritmo: passar teoria, dar exemplo. Não tem muita diferença, na estrutura de Cálculo Numérico os alunos trabalham muito mais, mas a disciplina permite isso, é mais aplicada. Na disciplina de Álgebra Linear ainda estão se acostumando, eles participam, fazem

> exemplos, resolvem alguma coisa em sala, mas eu gostaria que de forma geral participassem mais. (EG_P4)

Ao compararem a forma como ensinam as diferentes disciplinas que lecionam, alguns professores advogam que ensinar Álgebra Linear exige um maior esforço pelas características da disciplina, cuja teoria é mais abstrata. Além de exigir do professor um maior esforço na planificação em função da teoria ser mais axiomática, os alunos têm muitas dificuldades de compreender o conteúdo, o que implica um maior esforço do professor em sala de aula em encontrar diferentes formas de explicar os conteúdos, em estabelecer as conexões entre os conteúdos, em encontrar caminhos para auxiliar os alunos a construírem o raciocínio abstrato, como ilustram as narrativas dos professores P9 e P8:

> Não vejo muita diferença significativa do meu comportamento em sala de aula, procuro ter a mesma dinâmica, o que muda mesmo é o conteúdo. No conteúdo de Cálculo você tem que fazer mais contas para os alunos ver como estão sendo feitas as contas, agora em Álgebra Linear exige um pouco mais de raciocínio abstrato, então tentar passar isso para os alunos é mais difícil, às vezes eles não acompanham esse raciocínio. Em Cálculo eles já conseguem acompanhar, porque você está fazendo contas no quadro, eles falam: "ah somou isso aqui, dividiu, derivou...", é mais visual o Cálculo, Álgebra Linear não é tão visual assim. Você não consegue enxergar um espaço vetorial, uma combinação linear, isso é muito abstrato, então fica mais difícil para o aluno acompanhar seu raciocínio, então você tem que ser um pouco mais lento, tem que fazer mais analogias para eles poderem acompanhar. Em Cálculo é mais direto. (EG_P9)

> Gosto bastante de Álgebra Linear, mas acho que é diferente porque tenho que incentivar muito os alunos a ver coisas que eles têm mais dificuldade, por mais que eu até acho mais simples a Álgebra Linear, pelo menos as contas, tudo muito simples, mas às vezes eles têm mais facilidade com Cálculo, com contas supercomplicadas, que eles sabem que é sempre assim, acabou e pronto. Então acho que essa é a diferença, em Cálculo "essa é a aplicação, serve para isso, serve para aquilo...", e Álgebra sempre tem que estar pensando, cada caso é um caso, cada tipo de transformação tem uma regra, cada coisa tem um jeito diferente.... Dar aula de Álgebra com certeza me exige mais. (EG_P8)

Um aspeto que alguns professores diferenciam no ensino de Álgebra Linear do de outras disciplinas é a diversidade de representações a que pode recorrer. Essa diversidade faz com que alguns professores se sintam mais à vontade em lecionar outras disciplinas por poderem ligar a representação simbólica com a representação gráfica dos conceitos, muitas vezes utilizando um software, enquanto na Álgebra Linear exploram mais os aspetos teóricos e o desenvolvimento do pensamento matemático, como exemplificam as afirmações dos professores P13 e P7:

Tem uma certa diferença (...). Por exemplo, em Cálculo tem a definição, mas sempre tento apresentar a interpretação geométrica que é fundamental. Apenas em Álgebra Linear eu trabalho mais com o raciocínio. (EG_P13)

Por exemplo, no Cálculo já tenho mais facilidade para trazer exemplos que eu possa mostrar o gráfico, a interpretação geométrica de algum conceito. Tanto que já tenho usado o GeoGebra para fazer os gráficos, porque é uma coisa mais geométrica mesmo. Na Álgebra Linear, você não tem tanto da geometria a não ser que você foque essencialmente no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Não tenho usado tanto o computador quanto eu gostaria de usar. (EG_P7)

Outros professores referem que, ao contrário de outras disciplinas de Matemática que lecionam, em Álgebra Linear, em função da teoria abstrata, é necessário fazer um trabalho de 'convencimento' dos alunos para a importância da disciplina na formação deles. Eles esforçam-se por motivar com frequência os alunos para o porquê de estudar alguns tópicos, enquanto que noutras disciplinas mais práticas que lecionam a aplicação integra o contexto da disciplina, tal como salientam os professores P5 e P14:

Na Álgebra tenho que tentar mostrar a eles o porquê, 'isso vão usar em Cálculo Numérico, isso vão usar em Topografia, isso vão usar em Geomática, isso vão usar em Gestão'. Preciso mostrar isso para eles, para tentar justificar o porquê de eles aprenderem aquilo. (EG_P5)

Tentar motivá-los acho que é o maior desafio, não é fácil em Álgebra Linear. Por exemplo, a parte matricial não tem problema nenhum, quando entra na parte de espaços vetoriais, provar todas aquelas propriedades é que os alunos pensam 'o que é isso?', 'está falando outra língua'. A metodologia é muito parecida entre as disciplinas, mas obviamente eu tenho mais ferramentas em outras disciplinas mais específicas, é mais fácil, tenho mais experiência...em Cálculo Numérico, por exemplo, eu tenho muita experiência em programação, faço o tempo todo teoria-prática, o olho do aluno brilha. (EG_P14)

O uso de recursos tecnológicos foi apontado pelos professores como um dos aspetos que se diferencia no ensino de outras disciplinas que lecionam. Importa verificar quais os materiais didáticos que integram a prática do professor de Álgebra Linear.

Materiais didáticos

Na dinamização das suas atividades letivas o professor de Álgebra Linear tem ao seu dispor materiais didáticos que podem integrar nas suas estratégias de ensino. De entre esses materiais, os professores recorrem sobretudo ao quadro e giz/caneta, aos livros, às apostilas e poucos são os que utilizam materiais tecnológicos (Tabela 14).

Tabela 14. Distribuição dos materiais didáticos utilizados para lecionar Álgebra Linear.

Materiais	Frequência
Quadro e Giz/Caneta	15
Livros	11
Apostila	8
Softwares matemáticos	3
PowerPoint	2

Quanto ao uso do livro didático, alguns professores apontam que este material serve para o professor planificar as suas aulas e para o aluno ter uma referência de estudo e de exercícios resolvidos e/ou propostos. Entretanto, para lecionar a disciplina de Álgebra Linear recorrem a mais do que um livro tendo em vista a dificuldade de encontrar um livro consistente quanto à sequência dos conteúdos e à diversidade do tipo de tarefas. Neste caso, os professores compõem as suas próprias notas de aula a partir do que acham adequado de cada livro que consultam e as exploram com os alunos no quadro. Tais professores fazem a seleção de tarefas e alguns compõem as suas próprias listas de tarefas ou usam listas elaboradas por colegas, tal como exemplificam as afirmações dos professores P9 e P5:

> Alguns livros não cobrem todo o programa da disciplina, ou não cobre naquela ordem, ou tem alguns assuntos que são dados de uma maneira que a gente acha que não é a mais adequada para aluno de graduação. Então você sempre tem que trabalhar com dois ou três livros. Você tem que adaptar o conteúdo do livro, não é passar direto do livro para o quadro. Mas o livro é importante, o conteúdo está desenvolvido, tem uma linha de raciocínio e você segue aquela linha de raciocínio até onde dá, daí pega o conteúdo de um livro, de outro, junta e tenta passar o conteúdo da melhor maneira. (EG_P9)
>
> Não existe um livro completo, então você precisa organizar, tentar completar o deficit de um livro com um outro. A vantagem de usar livro é seguir uma estrutura, uma ordem, por mais que não seja a ordem ideal, ou a melhor, mas é um norte. Outra vantagem, os livros que tenho usado tem muito exemplo, muito problema resolvido e muito exercício, e essa é a forma de aprender matemática, acredito eu. (EG_P5)

Ao contrário dos professores que recorrem a mais do que um livro, há um professor (P6) que se restringe ao uso de apenas um livro por considerar que tem a estruturação e a sequência adequada para a disciplina de Álgebra Linear que leciona. O docente destaca inclusive a importância dessa sequência para servir de orientação para os alunos no seu estudo. Tal professor não vê desvantagens no uso de apenas um livro, visto que a sua aula não se fundamenta apenas neste material, mas sim na sua leitura, no seu conhecimento e na discussão do conteúdo com os alunos, utilizando inclusive o recurso do Excel para o estudo de alguns tópicos específicos.

> [Utilizo o] livro. A vantagem é que está estruturado inclusive na sequência que a gente aborda a disciplina, então o aluno que faltou algum dia de aula sabe que foi trabalhado

> tal conteúdo de tal capítulo. Acredito que se não tivesse essa estruturação aí, poderia estar variando e pulando uma parte. É o que acontece na Matemática Financeira, pula uma parte do livro, vai para outro. Na Estatística também. E na Álgebra me parece que está mais encaixado um conteúdo no outro. Desvantagem não vejo. Se fosse só o livro poderia ser uma desvantagem, mas a gente trabalha em aula, conversa, faz laboratório de informática. (EG_P6)

Diante da dificuldade mencionada, de ter um livro com uma abordagem adequada para o ensino de Álgebra Linear, alguns professores optam por usar apostilas construídas por eles mesmos ou por outros professores. A apostila é usada pelos professores em diferentes perspetivas. Há professores que utilizam a apostila como um roteiro e exploram todo o conteúdo de forma detalhada no quadro a partir de suas notas de aula, elaboradas tendo como princípio a sequência do conteúdo da apostila, mas o complementam com livros conforme a necessidade e a abordagem que desejam utilizar. Um desses casos é o professor P11, que para além de utilizar as suas próprias notas de aula explora exemplos e exercícios diferentes dos da apostila para motivar os alunos a participarem nas aulas:

> Só quadro e giz. Daí para a parte de matrizes, às vezes levo um PowerPoint porque é mais uma revisão. Uso a apostila também. Não falo para abrir a apostila na página tal e só explico o que está lá. Não, eu tenho o costume de passar tudo no quadro. Tento dar uma enxugada no que está na apostila e evito de usar os exemplos da apostila, pego outros exemplos diferentes para não acharem que é só ler e pronto, não precisa pensar. Faço complemento com o livro. (EG_P11)

Outros professores utilizam a apostila em sala de aula como um recurso didático, fazem breves explicações e esquemas no quadro e com isso ganham tempo na disciplina, pois os alunos não precisam de copiar o conteúdo, concentrando-se apenas na explicação e em fazer algumas anotações, como é o caso do professor P4.

> A vantagem é que os alunos podem prestar mais atenção na aula pela não necessidade de ter que copiar o conteúdo, pois eles já têm na apostila. Por exemplo, quando trabalho com espaços vetoriais, com transformações, às vezes tem que definir todas aquelas propriedades, uma por uma, o aluno não vai conseguir copiar e prestar atenção ao mesmo tempo, então como eles têm o material podem apenas fazer anotações. A aula flui mais também, consigo fazer mais exemplos. A desvantagem é que eles ainda estão mal-acostumados por não procurar outras fontes de pesquisa. Por outro lado, tento fazer um material que seja completo, que ele cite: "oh você pode procurar em tal livro", mas eles não procuram. (EG_P4)

O uso de softwares matemáticos nas aulas de Álgebra Linear foi mencionado por apenas três professores, que o fazem nas aulas para explorarem alguns tópicos específicos. Destes professores, apenas um deles propõe tarefas para os alunos as resolverem com recurso ao computador, enquanto os outros dois utilizam softwares em sala de aula para explicar alguns conteúdos remetendo os alunos para o papel de observadores. Um destes professores é o P12, que utiliza o GeoGebra para mostrar aspetos visuais de alguns operadores lineares especiais. Porém, sente-se inconformado por ainda não ter proporcionado aos alunos atividades de aprendizagem com recurso à tecnologia. O outro professor é o P1, que utiliza softwares para fazer alguns cálculos matriciais e para explorar a visualização de operadores lineares especiais.

> Naquela parte de operadores lineares e agora com o GeoGebra 3D dá para falar dos operadores lineares no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Nesse momento uso porque eu consegui vislumbrar uma maneira de fazer isso. Em toda aquela parte anterior do conteúdo [espaços vetoriais] fica complicado, eu não conheço, não consigo, não vislumbrei ainda uma maneira de usar um recurso tecnológico como esse, por exemplo. Vou te falar como vejo o uso de recurso tecnológico para a aprendizagem: não é usar o Moodle ou PowerPoint, trocar o quadro e giz por uma lousa na tela. Pensando no que significa usar recurso tecnológico para a aprendizagem é que eu ainda não consegui vislumbrar em Álgebra Linear. Usar um recurso tecnológico para exibir o conteúdo é um recurso para o ensino, mas não para a aprendizagem. (EG_P12)
>
> Além do livro didático, já usei alguns softwares que resolvem determinantes, que fazem escalonamento de matrizes e também já utilizei esses artefactos didáticos que permitem explorar a reflexão, translação, rotação..., transformações especiais no plano e no espaço. Procuro usar sempre que possível. (...) Os artefactos são vantajosos porque permitem a visualização de conceitos que são mais abstratos. Então eles podem permitir que o aluno visualize conceitos que estão sendo trabalhados. (EG_P1)

Dentre os professores, dois utilizam o PowerPoint nas aulas em alternativa a escrever os enunciados no quadro, ao qual recorrem para desenvolverem os conteúdos e resolverem exercícios, como expressa o professor P15:

> A vantagem do PowerPoint é ganhar tempo, porque no momento que você vai por exemplo definir espaço vetorial. Nossa, você leva 5 minutos para escrever aquilo no quadro. Então você simplesmente explica o que está ali. Aí claro, exemplo, demonstração, isso tem que ser no quadro, porque eles têm que acompanhar o raciocínio do que você está fazendo. (EG_P15)

Os professores que embora não usem softwares na sua prática de ensino referem-nos aos alunos para os explorar fora de sala de aula, como indica o professor P7:

> Sugeri programas que façam cálculos com matrizes, resolução de sistemas, como por exemplo Wolframalpha, Octave, Matlab. [Tais programas] auxiliam para fazer contas rápidas, assim como conferir os cálculos. Mas durante as aulas não tem sido usado, eu gostaria de estar usando mais, mas ainda não estou conseguindo. Por exemplo, na semana antes da prova, quando estava vendo sistemas, indiquei vídeo-aulas dessas que eu estava assistindo, pelo menos 3 canais diferentes, mandei o link pelo SIGA [Sistema Acadêmico] para eles assistir. Mas não foi durante a aula. (EG_P7)

Os recursos que estão inseridos na prática docente de Álgebra Linear não são muito diversificados, com características bem tradicionais. Importa averiguar se tal padrão se manifesta nas práticas avaliativas.

Práticas de avaliação

Relativamente à avaliação das aprendizagens dos alunos, todos os professores o fazem sobretudo através das provas escritas, independentemente da disciplina que lecionam (Tabela 15).

Tabela 15. Frequência de práticas de avaliação em Álgebra Linear e noutras disciplinas.

	Em Álgebra Linear	Noutras disciplinas
Somente prova escrita (individual)	7	7
Provas escritas e trabalhos	2	5
Provas escritas e listas de exercícios avaliativas	6	3

Um dos professores justifica a importância da avaliação escrita e individual, mesmo nas disciplinas de caráter mais prático:

> Sempre tem uma avaliação escrita porque ela é mais personalizada, individualizada e eu realmente vejo o momento individual [do aluno]. (...) Em Cálculo Numérico tem muita parte de prática, que é programação. Tem prova porque tem que avaliar teoricamente alguns conceitos e também se ele desenvolveu e sabe implementar numericamente esses conceitos. (EG_P14)

Em Álgebra Linear, sete dos professores avaliam os alunos essencialmente por provas. Igual número de professores aponta que recorrem também a este método de avaliação nas outras disciplinas que lecionam. Dos dois grupos fazem parte cinco professores. Os restantes dois professores apontam que em Álgebra Linear ou nas outras disciplinas realizam outras formas de avaliação além das provas. Um dos professores que avalia apenas por provas explica a sua motivação para essa prática:

> Avaliação para mim é prova. Vejo que não tem condições de dar trabalhos, se fosse dar, teria que ser um diferente para cada aluno, porque senão um faz e os demais copiam, aí se torna inviável pelo número de alunos e turmas que a gente tem. (EG_P2)

Alguns professores, além das provas, solicitam aos alunos a realização de trabalhos. Esses trabalhos consistem em exercícios para os alunos resolverem (dentro ou fora de sala de aula) e entregarem, ou em problemas ou relatórios (no caso de aula experimental). Relativamente aos trabalhos na forma de exercícios, prevalece o número de professores que realiza mais em Álgebra Linear (40%) do que noutras disciplinas que lecionam (20%). Já a proposição de trabalhos na forma de problemas ocorre o inverso, predomina o número de professores que mais os propõem noutras disciplinas (33,3%) do que em Álgebra Linear (13,3%). Nem todos os professores que propõem trabalhos os realizam em todos os conteúdos estudados e nem sempre os realizam todo o semestre, depende muito da turma, das dificuldades que a turma tem. Em Álgebra Linear, como é uma disciplina considerada difícil, a sua realização é uma forma de motivar os alunos para a aprendizagem, de sanar as dúvidas e propiciar o reconhecimento de seus erros em tempo hábil à prova. Exemplificamos algumas posições dos professores que explicam como são os trabalhos e qual o peso que lhes dão na avaliação:

> Esse semestre eu comecei a fazer o seguinte: solicitei para eles entregarem alguns exercícios, aí esses exercícios valem um ponto na média, mas esse ponto não é por nota de exercício, é por entrega, ele já tem esse ponto, só precisa entregar. Qual é a ideia? A ideia é tentar pegar eventuais erros antes da prova. Eu tenho uma monitora e passo para ela, ela corrige, daí a gente conversa, verifico o que ela viu, mas quem faz esse olhar é ela, até porque não tem como, a gente não dá conta, tenho 17 horas em sala de aula, depois devolvo aos alunos e comento alguns erros. (EG_P15)
>
> A prova vale de 0 a 10 e tem os trabalhos de sala de aula. Cobro exercícios em sala que tem uma pontuação de 2 décimos a mais. Tem alguns exercícios que são mais de pensar, mais elaborados, levam para casa para resolver e trazem para me mostrar, depois eu resolvo no quadro. (EG_P10)
>
> Já fiz algumas experiências como, por exemplo, cada prova cobrava um trabalho junto. A primeira prova valia 9 mais 1 de trabalho. Em outras situações fiz a prova valendo 10 e o trabalho 1 extra. Dentro da prova tem uma questão referente ao trabalho, a pessoa ganha a nota do trabalho proporcional ao que acertou nesta questão na prova. (EG_P3)

Dos dois professores que propõem trabalhos na forma de problemas em Álgebra Linear, um deles é o professor P4, que propõe dois trabalhos com problemas contextualizados, realizados pelos alunos em grupo, e solicita que um deles apresente a resolução à turma. O outro professor (P6) propõe trabalhos a realizar no computador.

> Faço quatro provas por semestre e ultimamente os dois trabalhos que falei, um de sistemas lineares e um de transformações lineares. O de transformações lineares, solicito que apresentem, então tem uma nota pelo trabalho e uma nota pela apresentação. Divido em grupos, um grupo fala só sobre projeção, outro só sobre reflexão... eles apresentam, os colegas têm que discutir. Na parte de sistemas lineares também dou de 8 a 10 problemas onde tem só a situação e eles têm que resolver e trazer para a gente a discussão. O que tenho feito e que dá muito trabalho é que todos os trabalhos dessa disciplina são diferentes, entre grupos e de um trabalho para outro. Tento evitar que um faça e os outros copiem. Todos eles têm problemas diferentes, mas a apresentação consigo fazer só nessa parte de transformações lineares, mas se eu pudesse faria mais apresentações, tenho poucos créditos, acaba não sobrando tempo. (EG_P4)
>
> Tem as provas e atribuo um ponto extra para trabalho, peço para programarem algumas coisas no Excel, algumas coisas de vetores, de matrizes, aí se sentem desafiados e cada um traz uma abordagem um pouquinho diferente. (EG_P6)

Nas disciplinas de caráter mais prático, que envolvem mais a resolução de problemas contextualizados ou envolvem programação, ou com aplicações físicas, além das provas, os professores conseguem diversificar mais o tipo de trabalho que propõem, muitas vezes equiparando o peso dado às provas e aos trabalhos. Um exemplo é o professor P14 que tende a explorar com os alunos trabalhos práticos com a respetiva apresentação para a turma. Outro caso é o professor P4, que em disciplinas mais aplicadas explora trabalhos interdisciplinares e os valoriza de forma equivalente às provas.

> Em cálculo vetorial, por exemplo, que tem aplicações físicas fortes, eu deixo trabalhos, experiências de avaliar o divergente, por exemplo. Em Cálculo Numérico tem muita parte de prática, que é programação. Trabalho a gente confia que seja a pessoa que fez. Solicito que apresentem alguns trabalhos, tento sempre fazer um feedback, questionando aqui, porque fez assim, para ver se a pessoa sabe defender ou explicar. É bom para eles aprenderem a explicar, porque a gente realmente aprende quando vai explicar. Eu sempre falo para eles que às vezes a gente faz de uma forma, mas quando realmente é questionado que a gente amadurece o conhecimento. (EG_P14)
>
> Em todas elas eu tenho provas, só que na disciplina de Cálculo Numérico e na disciplina de Pesquisa Operacional eu tenho mais trabalhos do que provas. Porque em Cálculo Numérico tento fazer questões integradas com outros professores. Semestre passado por exemplo fiz um trabalho com a disciplina de Química. Então eles tinham que pegar uma reação química, a reação química tinha uma certa característica e caia numa equação diferencial, eles tinham que resolver. Nessas duas disciplinas tem quase o mesmo peso para provas e trabalhos. São disciplinas mais práticas. (EG_P4)

Os professores apontam a natureza axiomática da disciplina como uma dificuldade de diversificação da avaliação. Que outras possibilidades se desvelam nos processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina?

Dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear

A natureza abstrata dos conteúdos de Álgebra Linear tende a ser um fator que dificulta os professores de os fazer entender aos alunos (Tabela 16).

Tabela 16. Distribuição das perceções dos professores sobre as dificuldades no ensino de Álgebra Linear.

	Frequência
Dificuldade em explicar de forma que os alunos entendam os conceitos abstratos	9
Dificuldade em ensinar Espaços Vetoriais	7
Dificuldade em ensinar Operadores Lineares	1
Dificuldades no conhecimento do conteúdo	1
Não sente dificuldades no ensino de Álgebra Linear	2

A maioria dos professores aponta que as dificuldades que enfrentam não são em relação ao domínio do conteúdo, mas em como ensinar os conteúdos, que são abstratos, de forma que os alunos possam entendê-los, como destaca o professor P12.

> Com relação ao meu domínio do conteúdo não. O que acontece é na hora de apresentar o conteúdo para os alunos que são conteúdos conceituais eu percebo que os alunos têm dificuldade de entender. Tento ser bem entendido pelos alunos, mas mesmo que você dê uma explicação muito boa, como aquilo é tão conceitual e tão abstrato, os alunos têm dificuldade de atingir esse entendimento. (EG_P12)

Dentre os conteúdos de Álgebra Linear, sete professores destacam o espaço vetorial como o que é mais difícil de ensinar aos alunos por conta da sua natureza abstrata (Dorier, 2000) e da dificuldade de trabalhar com aplicações contextualizadas desse conteúdo, como referem alguns professores:

> Tem alguns conteúdos que são difíceis de explicar, por exemplo, espaços vetoriais, por ser muito mais genérico, a dificuldade em fazer o aluno entender este conceito. (EG_P1)
>
> Espaços vetoriais. Não é o ensinar, não é o conteúdo, mas responder à questão: Para que eu vou usar? (EG_P4)
>
> Na parte de espaços vetoriais, subespaços vetoriais... que são definições teóricas. Eu não tenho dificuldade em explicar o conteúdo, o conteúdo é muito tranquilo, mas em

> fazer um link mais prático, é porque gosto disso e acho que o aluno sente falta disso (EG_P14).

Um dos professores revelou ter dificuldades de ensinar alguns operadores lineares específicos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, pela falta da sua própria compreensão plena do conteúdo, ficando limitado aos procedimentos envolvidos nessa teoria. Sua prática se resume a uma transferência de conteúdo, apesar de ter consciência que tal assunto tem aplicação prática.

> A parte de operadores lineares não acho palpável. Aí os alunos acham meio maçante, 'ah faz só assim'. Eu acho que falta uma metodologia diferenciada para a parte de operadores lineares. Acho que é porque eu tenho um pouco de dificuldade, porque acho que é só uma transferência de conteúdo. Vai lá passa a matriz, 'essa é a matriz rotação, essa é a matriz dilatação...'. Não consigo fazer relação com outras coisas. Até na hora da prova, determine uma matriz que tem uma rotação seguida de uma dilatação... não tem muita novidade. Eu acho que este assunto é bem aplicado, mas eu não levo [a aplicação]. (EG_P11)

Um outro professor revelou ter dificuldades no conhecimento dos conteúdos de espaços vetoriais, transformações lineares e autovalores e autovetores, devido a uma formação um pouco superficial em relação a tais tópicos. Para superar essas lacunas procura estudar os conteúdos que leciona, o que tem implicações na evolução da sua prática ao longo dos semestres (leciona a disciplina pela quarta vez).

> Espaço vetorial, transformação linear, autovalor e autovetor. Os demais conteúdos [sistemas lineares, matrizes] está bem tranquilo. A Álgebra que tive foi a da minha graduação, e enquanto primeira turma do curso, não foi muito boa, foi bastante limitada. Confesso que estudei muito, ainda estudo. Meu primeiro semestre, acredito que é normal, mas eu me cobro, não foi bom. Venho procurando sempre estar melhorando minha aula a cada semestre. (EG_P5)

A consciencialização das dificuldades que o professor tem sobre determinados conteúdos matemáticos pode ser um fator que o impulsiona a procurar formas de as ultrapassar. O conhecimento do conteúdo das disciplinas que leciona é um dos domínios do conhecimento profissional que o professor tem que adquirir. Para além deste domínio, importa desenvolver outros domínios do conhecimento profissional, como, por exemplo, o conhecimento do aluno com quem o professor trabalha. Ter conhecimento do aluno significa conhecer os seus processos de aprendizagem, os seus interesses e as suas dificuldades. Em consonância com o que aponta a literatura, os professores revelam que os alunos costumam apresentar muitas dificuldades de aprendizagem em Álgebra Linear, devido à abstração dos conteúdos, à realização de demonstrações e ao formalismo da sua linguagem (Tabela 17).

Tabela 17. Distribuição das perceções dos professores sobre as dificuldades dos alunos em Álgebra Linear.

	Frequência
Dificuldade em entender os conceitos	9
Dificuldade em abstrair	7
Dificuldade em demonstrar	3
Dificuldade com o formalismo e a linguagem da Álgebra Linear	1
Dificuldade com a matemática básica	2

Alguns professores (9) consideram que os alunos têm muitas dificuldades em entender os conceitos da Álgebra Linear, limitando-se ao uso de técnicas e algoritmos de resolução sem compreender o seu significado e suas implicações, tal como ilustram os professores P1 e P11:

> Costumam achar uma disciplina bem difícil. São dificuldades conceituais, eles não são tão maduros em termos de estudo para entender o conceito. Às vezes eles aprendem o raciocínio mecânico que tem por trás de um cálculo, mas como a Álgebra Linear envolve muito mais os conceitos, cada exercício é resolvido de uma forma diferente, então o aluno que tem essa habilidade operacional não consegue se dar bem na disciplina porque cada exercício envolve uma habilidade diferente. (EG_P1)
>
> Eu vejo que eles fazem as coisas mais de forma mecânica, não entendem muito o que estão fazendo. Eles estão fazendo, mas não sabem o que estão fazendo. Você dá uma coisinha para eles pensar, uma coisinha diferente e eles já se perdem. (EG_P11)

A dificuldade dos alunos com a abstração leva os professores a afirmar que os alunos conseguem aplicar os conceitos para em exemplos particulares, mas têm dificuldade de trabalhar com casos gerais e em diferentes espaços vetoriais, como constatam os professores P14, P6 e P7:

> Uma coisa que é incrível, eles têm dificuldades de trabalhar com letras, com entes matemáticos. Se você coloca número eles fazem. Eles têm dificuldade com a abstração. De entender que aquilo ali pode ser um número, pode ser uma matriz, pode ser uma coisa maior. (EG_P14)
>
> Uma das dificuldades é com a abstração, quando começa a falar em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ já perguntam: "onde é que eu vou usar isso?". Com certeza é uma disciplina que não é trivial para eles. (EG_P6)
>
> A questão da abstração. É preciso uma quebra de paradigma da forma como eles estão acostumados a pensar, aplicar uma mesma ferramenta em vários contextos diferentes [espaços vetoriais diferentes], isso dá bastante problema [de entendimento]. (EG_P7)

Alguns professores apontam a dificuldade que os alunos têm com as demonstrações, inferindo que alguns alunos têm um "bloqueio" quando se deparam com uma tarefa cujo enunciado envolve 'prove que', 'mostre que', mesmo quando envolve conteúdos bem familiares aos estudantes, como matrizes e determinantes. Um destes professores infere que essa dificuldade poderia ser atenuada se desde o Ensino Básico os alunos exercitassem algumas demonstrações. Uma dificuldade específica no caso das demonstrações, que foi mencionada, é provar que determinada afirmação se verifica para qualquer caso e não para apenas para casos particulares, como ilustram os professores P8, P4 e P6:

> A dificuldade que acho é principalmente quando tem que mostrar alguma coisa. Por exemplo, 'mostre que tal conjunto é um subespaço', 'mostre que uma transformação é linear'. Quando tem um exercício que já no enunciado fala 'mostre', parece que eles criam um bloqueio. Às vezes é uma coisa tão simples e quanto mais simples parece que é mais difícil para eles entender, eles não acreditam que é só aquilo, eles acham que tem que ter alguma coisa difícil aí. (EG_P8)
>
> Eles têm bastante dificuldade. Como alunos de engenharia, eles têm dificuldade em entender o que é uma definição, no seguinte sentido: 'ah, porque que eu tenho que mostrar essas 8 propriedades de um espaço vetorial? Não posso pegar um exemplo numérico e mostrar que vale?'. A dificuldade é esse começo de abstração, de entender a definição, de ver que tem que verificar para todos os elementos, não dá para fazer numericamente. Até tem uma frase que sempre fico inibida quando eu escrevo: 'onde $\boldsymbol{v}$ é um vetor arbitrário, é um vetor qualquer'. Eles falam: 'ah, se é qualquer eu posso escolher um'. (EG_P4)
>
> Eles têm dificuldade em fazer demonstrações (...). Demonstramos algumas propriedades de determinante, a regra de Cramer, coisas do tipo: 'mostre que é um subespaço vetorial'. É bem difícil porque nunca fizeram demonstração. É uma coisa bem triste da formação, não sei se tu percebes, eles não têm mais demonstração na escola, não demonstram nada. E se eu não fizer, acredito que... talvez no Cálculo trabalhem um pouquinho, uma demonstração ou outra. (EG_P6)

Um outro professor mencionou a dificuldade que os alunos têm em lidar com as diferentes linguagens da Álgebra Linear e entender a representação de cada objeto dentro de cada uma dessas linguagens, dificuldades conceituais oriundas do formalismo da teoria da Álgebra Linear, evidenciadas por Hillel (2000).

> A questão da Álgebra Linear é o formalismo, é a dificuldade de explicar o que está sendo feito, de notação, que um conjunto vira espaço gerado, um vetor vira matriz de coordenadas e assim vai... A dificuldade de entender a diferença entre as coisas, que não é a mesma coisa. (EG_P15)

As dificuldades com a matemática básica relacionadas com as matrizes e com a falta de habilidades em cálculos simples, como os necessários para fazer o escalonamento dos sistemas lineares, também foram apontadas por alguns professores (2) como fatores do insucesso dos alunos em Álgebra Linear.

> Outra questão é a da formação, eu percebo que muitos alunos não têm muito domínio de como lidar com matrizes, apesar de eu gastar bastante tempo com esta parte... parece que eles não se interessam porque acham que já sabem esse conteúdo. Eles são muito acostumados a usar as propriedades que são de números reais para matrizes, por exemplo, a comutatividade, ou cancelar coisas dos dois lados sem se preocupar com nada, divisão de matrizes. Às vezes é da formação básica que vem o problema. (EG_P7)
>
> A dificuldade da matemática básica, principalmente quando trabalham com escalonamento de sistemas, que aí envolve muita conta, muita fração. (EG_P4)

Face às dificuldades de aprendizagem dos alunos, os professores recorrem a estratégias para tentar minimizá-las, tais como são sintetizadas na Tabela 18.

Tabela 18. Distribuição das estratégias utilizadas pelos professores perante as dificuldades dos alunos.

	Frequência
Usa diferentes estratégias para explicar o conteúdo	6
Resolve mais exemplos em sala de aula	3
Propõe a resolução de mais exercícios dentro e/ou fora de sala de aula	2
Atende o aluno extra classe	3
Enfatiza a linguagem da Álgebra Linear e procura trabalhar o erro do aluno	1
Não cobra na prova além do que está proposto na lista de exercícios	1

Quando os alunos estão com dificuldade de entender algum tópico, alguns professores (33,3%) procuram utilizar diferentes estratégias para explicar o conteúdo. Um exemplo é o professor P10, que conforme foi adquirindo experiência de ensino, na tentativa de favorecer o entendimento dos alunos, passou a explorar os conceitos no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ para que os alunos consigam visualizá-los e progressivamente trabalha com exemplos mais complexos.

> Eu tento explicar de uma forma simples antes da complexa. Antigamente, com a inexperiência, eu explicava da forma complexa, densa para depois dar uns exemplos simples. Agora tento dar exemplos simples, coisinhas bem básicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ para depois ir para coisas mais complexas. (EG_P10)

Um outro exemplo é o professor P1, que procura chamar a atenção várias vezes para os tópicos de maior dificuldade e os revisita sempre que são pré-requisito para o estudo de tópicos subsequentes.

> Eu tento explicar de maneiras diferentes sempre que possível e explicar várias vezes e por vários dias seguidos, e no andamento das aulas procuro retomar aqueles conceitos que já foram trabalhados, aqueles conceitos que foram utilizados como base para o conceito seguinte. (EG_P1)

Um outro professor, diante das dificuldades dos alunos, procura utilizar no seu discurso as 'alavancas-meta', como sugerem Uhlig (2002) e Dorier et al. (2000a), na forma de questionamentos aos alunos para os induzir a uma reflexão sobre o conteúdo com o qual têm dificuldade ou sobre os seus erros.

> Tento de alguma forma fazer com que eles visualizem mais as propriedades, as definições. Por exemplo, "essa é a definição, entendeu o que está escrito aqui? O que ela significa? Agora vamos visualizar [tal propriedade/ a definição] vale para todo caso? Essa não satisfaz, por que não satisfaz?". Nesse sentido... (EG_P14)

Há professores (3) que, diante das dificuldades dos alunos, centram na sua exploração mais exemplos em sala de aula, como explica um deles: "Geralmente dar mais exemplos diferentes do que estão acostumados a ver, exercício que exija um pouco mais de raciocínio ou aqueles que têm uma cadeia de raciocínio, vários raciocínios envolvidos para chegar ao resultado" (EG_P9). Apenas dois professores afirmam que diante das dificuldades dos alunos abrem espaço para os alunos resolverem exercícios em sala de aula, como exemplifica a afirmação do professor P3: "A minha estratégia é sempre deixar um tempo no final da aula para fazerem exercícios e perguntarem alguma dúvida que têm" (EG_P3).

Alguns professores (3) disponibilizam horário de atendimento extra classe (presencial e/ou online) e procuram esclarecer dúvidas dos alunos de forma mais individual. Além disso, dependendo da dificuldade, procuram orientar os alunos quanto a outros materiais didáticos para complementarem o estudo. Também enfatizam a existência de alunos-monitores que têm horário disponível para auxiliar os alunos no esclarecimento de dúvidas, como dão a conhecer os professores P1 e P5:

> Tento orientar na resolução de exercícios e fornecer outros materiais para o estudo dos alunos. (EG_P1)
>
> Uma estratégia é a monitoria, temos uma monitora. Também disponibilizo a eles todo o material que utilizo para dar as aulas. Os livros estão disponíveis, as listas [de exercícios] estão. Se o aluno tem alguma dificuldade, pode ler o livro, tentar fazer os exemplos do livro, exercícios, se não conseguir, pode ir à monitoria. Se o monitor não conseguir explicar, me chama, sou muito disponível para o aluno, forneço e-mail, me chama no

facebook, tentamos trocar ideias pelo computador, se não rolou marcamos um horário para esclarecer a dúvida. Essa abertura costumo ter. (EG_P5)

Aquele professor que mencionou que os alunos têm dificuldades com a linguagem formal da Álgebra Linear e com as representações dos objetos matemáticos dentro dessa linguagem (Tabela 17), tenta minimizar essas dificuldades dando bastante ênfase à linguagem e à transição entre as diferentes representações. Além disso, procura dar um *feedback* das avaliações aos alunos, comentando e chamando a atenção para os seus principais erros. Esse professor também solicita aos alunos que lhe entreguem listas de exercícios resolvidos, que depois os devolve corrigidos, como uma maneira de antecipar o erro e procurar atenuá-lo antes da prova.

Olha, eu tento enfatizar em toda aula, explicar, comento: isso aqui é um conjunto, mudei a notação virou um espaço gerado, tento enfatizar muito nas aulas enquanto estou dando o conteúdo, e depois das provas sempre fazer uma devolutiva para eles. Eu não devolvo prova em sala, eles vêm ver a prova na minha sala. Mas, na aula seguinte, quando termino a correção, eu comento as coisas que apareceram e que eles têm que tomar cuidado. Enfatizo muito esta questão da diferença, que não pode estar trabalhando com vetor e de repente juntar matriz aí no meio, vetor é vetor e matriz é matriz. Claro, quando você pega um vetor e escreve na notação matricial passou a ser uma matriz, mas a notação tem que ser aquela. Tentar explicar essas diferenças. Então eu tento enfatizar isso aí. Mas é complicado, é muito difícil porque eu acho que tem uma questão ali de maturidade, que é uma coisa muito pessoal, então não tem muito como a gente, não dá para abrir a cabeça e colocar o negócio lá dentro. (EG_P15)

Como os alunos tendem a manifestar dificuldades em Álgebra Linear, um outro professor procura elaborar nas provas de avaliação questões que necessitam de um raciocínio semelhante ao que se realiza nos exemplos que propõe em sala de aula ou na resolução da lista de exercícios.

Quando faço a avaliação não tento sair muito do que eles têm, porque se saio muito do que eles têm aí [se perdem]. É uma forma que eu acho de minimizar, [porém] acaba ficando meio mecânico. Não tento cobrar muito além do que eles têm como lista de exercícios, como tem de exemplos. Quando os alunos se saem mal não faço prova de recuperação. Não porque não quero, mas acho que é porque é característica da universidade e a questão de tempo. (EG_P11)

Tal professor tem consciência de que a sua estratégia pode valorizar aquele aluno que consegue memorizar a técnica ou o procedimento de resolução ao invés de uma compreensão mais ampla do conteúdo.

Reflexão sobre o ensino de Álgebra Linear

A reflexão sobre a sua prática letiva indicia fazer parte das atividades profissionais da maioria dos professores. Em geral, essa reflexão é feita após as aulas que sentem que algo não ficou bem esclarecido, procurando estratégias que possam na aula seguinte melhorar aspetos críticos que identificam. Quando ministram Álgebra Linear em mais de uma turma, conseguem já na turma subsequente corrigir o que não deu certo na primeira turma, explicar de uma forma diferente o conteúdo, enfatizar mais alguns tópicos em função das dificuldades que ocorreram, inverter a sequência para trabalhar os conteúdos, como salientam os professores P11 e P15.

> Costumo [refletir]. Então, às vezes dou um assunto numa turma e vejo quais foram as dificuldades, quais foram as perguntas que vieram e para a outra turma eu já tento dar a matéria de forma diferente do que eu dei para a primeira turma, tentando minimizar as dificuldades que a outra teve e invertendo conteúdo às vezes. "Dei esse assunto primeiro, mas se tivesse dado aquele, talvez teria sido melhor...". Então faço isso quando tem duas turmas ou no semestre seguinte. (EG_P11)
>
> [Reflito] muito. Não só em Álgebra Linear, em todas [as disciplinas]. Principalmente depois que você deu a aula. Você sai e pensa, "isso não funcionou". Aconteceu na última aula de Álgebra Linear, fui falar com eles sobre imagem e núcleo, comecei a fazer o exercício de imagem e resolvi mostrar para eles como é que podem mostrar que os vetores são L.I. ao invés de resolver o sistema com os vetores como coluna, então o porquê você pode colocar nas linhas e resolver daquele jeito, e explicar por que quando você escalona você vai tirando os que ficam L.D., aí não sei, achei que ficou uma confusão. Aí saí da aula e pensei: "não funcionou, isso não dá para fazer mais". Aí então amanhã tenho que me redimir com eles. Eu saio da sala, e toda vez tenho isso na minha cabeça, "isso funcionou, isso não funcionou", anoto e vamos para o semestre que vem. (EG_P15)

A reflexão ocorre não apenas em relação à aula como um todo, mas também diante de tarefas específicas, como explica o professor P1: "Diante de uma tarefa proposta, procuro verificar se aquilo ajudou realmente com o propósito que eu tinha, ou se não ajudou o que poderia ser feito para trabalhar diferente" (EG_P1).

Entre os professores, três deles indiciam que refletem muito pouco sobre as suas aulas de Álgebra Linear. São professores em final de carreira, com bastante experiência de ensino na disciplina. A reflexão que indicam que fazem é mais ao nível de um semestre e ocorre em função das necessidades da turma para a qual vão lecionar, do foco a ser dado à disciplina, como evidenciam os professores P11 e P13:

> Não reflito muito não. Talvez porque já dou esta disciplina a tanto tempo, então para mim a coisa já é mais natural. Mas o que procuro é sempre melhorar a preparação do conteúdo... se tomei uma direção que não foi boa, enfoquei uma coisa que não era tão importante e deixei algo que é mais importante e vão precisar, então aí eu costumo rever isso. O professor sempre tem isso, aquela coisa que gosta mais que acha mais importante, mas nem sempre isso é o que os alunos precisam, então foco mais naquilo que eles precisam. (EG_P11)
>
> A reflexão é que a gente faz muito isso no início quando começa a ministrar essas cadeiras, depois de um certo tempo sabe, você chega à saturação. Mas às vezes a reflexão que faço é em cima de cada turma, uma turma é diferente da outra, vejo que tem cursos que tem uma dificuldade muito maior que outros, sei que sempre que estiver ministrando Álgebra Linear para aquele curso tem que fazer um trabalho diferente. (EG_P13)

Porém, há professores que fazem da reflexão uma prática mais continuada, tal como advoga o professor (P6). Este professor considera que esta prática tem implicações graduais no seu ensino e, contrariando os três professores em final de carreira, que o tempo de experiência profissional numa disciplina amplia a visão sobre as possibilidades para inovar a prática, desde que o professor esteja aberto a essa mudança. Uma das consequências da reflexão sobre a sua prática foi a integração do uso do computador para abordar alguns tópicos de Álgebra Linear.

Um outro professor (P4) aponta que a principal mudança decorrente da reflexão sobre as suas aulas, foi integrar na sua prática a proposição de tarefas aplicadas ao contexto do curso em que leciona.

> A gente está sempre refletindo como pode melhorar, já que a gente está ali e quer o melhor para eles, que eles aprendam, então muita coisa [contribuição da reflexão] é de reprodução do que deu certo e às vezes a gente vê que não deu certo e tenta mudar. O facto de ter experiência na disciplina facilita, se você está aberto a essa mudança. A reflexão ajuda, mas ela não é automática, demora às vezes um semestre para mudar um ponto apenas. Essas abordagens de computador [que faço] não aconteceram primeiro, foram acontecendo depois que a gente viu que era mecânico, que o negócio era sempre o mesmo. (EG_P6)
>
> A gente chega às vezes frustrada, bah depois de uma primeira aula de espaços vetoriais que não é aquela coisa, a gente tenta fazer de outra forma. As minhas principais mudanças de uns tempos para cá foram tentar fazer trabalhos mais aplicados. Isso vale tanto para Álgebra Linear, quanto para Cálculo Numérico. Nem sempre é possível fazer um trabalho, tentar que eles apresentem, que para mim é mais importante do que o trabalho em si. Eu tento na medida do possível fazer alguma coisa que envolva as outras disciplinas. Mas ainda estou engatinhando para chegar como eu gostaria que fosse. (EG_P4)

Síntese

Da análise das perceções dos professores que integram a primeira fase deste estudo emerge que, na sua maior parte, são professores com alguma experiência de ensino, vivenciada sobretudo no Ensino Superior, onde já exerceram a sua atividade docente no mínimo em três áreas distintas da Matemática, sendo uma delas mais destinada à resolução de problemas mais aplicados.

A maioria dos professores ainda parece não ter assumido que a formação ao longo da carreira é importante para a sua vida profissional. As suas práticas de formação continuada são principalmente voltadas para a progressão na carreira docente, ou em ações promovidas pela instituição, mas que parecem ter pouco poder transformador das suas práticas profissionais.

O trabalho em colaboração, na preparação e reflexão sobre as práticas de ensino não parece fazer parte da prática dos professores. A maioria trabalha isoladamente e eventualmente trocam ideias sobre a prática em conversas informais. O compartilhamento de experiências, informações e materiais ocorre mais quando os professores estão no início da carreira, pois estão num ciclo profissional de aprendizagem, ou quando lecionam uma disciplina pela primeira vez. Na planificação das aulas recorrem principalmente a livros e à internet e poucos professores utilizam recursos tecnológicos. Estes recursos são usados pelo professor com a finalidade de mostrar aos alunos algumas visualizações geométricas ou por professores e alunos em algumas disciplinas que envolvem programação.

Especificamente na disciplina de Álgebra Linear, as práticas letivas dos professores são essencialmente tradicionais. A metodologia de ensino utilizada para abordar tanto a parte teórica como a prática é a expositiva e os alunos assumem um papel mais de reprodutores da informação veiculada na sala de aula. Entretanto, eles recorrem a abordagens diferenciadas para apresentar o conteúdo de forma expositiva. Alguns seguem a linha 'definição, teorema, propriedades, exemplos'; outros, antes dessa sequência, tentam motivar os alunos para o estudo dos conteúdos falando um pouco das aplicações na resolução de problemas ou aplicações no conteúdo de outras disciplinas. Há professores que nessa motivação inicial tentam resgatar os conhecimentos prévios, sejam do ensino médio ou da Geometria Analítica, por meio de questionamentos ou por conexão dos conceitos utilizados. Os questionamentos são relativos à importância e à aplicação dos conceitos e as conexões são estabelecidas quando trabalham com exemplos, primeiro em duas e três dimensões para depois generalizar os resultados.

Quanto à tipologia de tarefas propostas em Álgebra Linear, os exercícios exercem um papel hegemônico nas práticas letivas dos professores. Os professores resolvem muitos exercícios em sala de aula como uma estratégia de explorar e fazer a conexão entre os tópicos. Essa resolução geralmente acontece de forma direta, do professor para o aluno, dialogada, onde o professor procura fazer questionamentos aos alunos para explorar o seu entendimento e trabalhar os possíveis erros. Poucos professores exploram a resolução de exercícios pelo aluno em sala de aula e de entre estes há alguns que oferecem pouco tempo para tal atividade, o que inferimos ter pouca significância no processo formativo do aluno. Apenas um dos professores propõe como tarefas (avaliativas) a resolução de alguns problemas (onde tem que modelar e resolver sistemas lineares) e de pesquisa de aplicações contextualizadas sobre um tópico específico que ensina, na forma de trabalhos extra classe realizados em grupo.

A avaliação dos alunos em Álgebra Linear é realizada por meio de provas escritas e individuais e poucos professores a diversificam propondo alguns trabalhos. Em outras disciplinas que lecionam, o método de ensino e de avaliação é o mesmo, porém em algumas disciplinas com caráter mais aplicado os professores diversificam as suas estratégias de ensino com o intuito de envolver mais os alunos na resolução de tarefas (exercícios, problemas contextualizados) e das formas de avaliação das aprendizagens (provas, trabalhos).

É consenso entre os professores que os alunos têm dificuldades em Álgebra Linear, as quais estão relacionadas com o formalismo, a linguagem axiomática e a conceitualização. A maior dificuldade que os professores enfrentam no ensino da disciplina é lidar com a dificuldade dos alunos em relação à abstração devido à natureza teórica e formal (Dorier, 2000) da disciplina. Alguns professores revelam ter dificuldades em responder aos alunos a finalidade dos conteúdos em estudo e em mostrar aos alunos a importância da abstração. Devido à dificuldade dos alunos com a abstração, o conteúdo que os professores revelam ser mais difícil de ensinar é o de espaços vetoriais. Alguns professores já utilizaram alternativas diferentes para ensinar este tópico, mas ainda não encontraram a forma ideal, se é que ela existe. Os professores, de forma geral, também revelam ter dificuldades de explorar aplicações contextualizadas dos tópicos de Álgebra Linear e de utilizar materiais tecnológicos na disciplina com a finalidade de envolver o aluno. Alguns referem as aplicações e softwares para, por exemplo, o escalonamento de matrizes, mas manifestam ter dificuldades em elaborar tarefas que envolvam tais materiais.

Frente as notáveis dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem apontadas pela ótica dos professores de Álgebra Linear, apresenta-se um caminho, não trivial, mas que pode se revelar uma direção propícia para o enfrentamento de tais dificuldades — o trabalho colaborativo. Assim, nos dois capítulos seguintes, apresenta-se o percurso de dois professores deste estudo que resolveram trilhar este caminho conjuntamente.

CAPÍTULO 7

ESTUDO DE CASO SOBRE TÉO

Este capítulo tem por finalidade evidenciar a forma como Téo se integrou nas atividades realizadas no seio do grupo de trabalho colaborativo em prol da sua prática docente de tópicos de Álgebra Linear, organizando-se em cinco secções. A primeira, incide sobre a caracterização do professor; a segunda, apresenta as suas perspetivas sobre o trabalho colaborativo; a terceira, trata das suas perspetivas sobre o ensino de Álgebra Linear; a quarta secção dá a conhecer a prática de Téo no contexto do grupo de trabalho entre pares e o processo de reflexão sobre a sua prática, bem como as implicações dessa reflexão para planificações futuras sobre o ensino de tópicos de Álgebra Linear abordados e planificados no grupo; e, por fim, a última secção ilustra as perspetivas de Téo sobre o contributo do trabalho vivenciado no grupo colaborativo para a sua prática.

7.1. Caracterização do professor Téo

No início das atividades realizadas no grupo de trabalho, Téo tinha pouco mais de 31 anos e apenas três semestres letivos de experiência de ensino. Iniciou nesta universidade brasileira a sua atividade profissional, com um vínculo laboral temporário, e almejava a aprovação num concurso para uma vaga de efetivo nesta ou noutra universidade pública, o que o incentivava, na medida do possível, a preparar-se para concretizar o seu desígnio.

No seu percurso formativo, Téo considera que fez um "tour pelas três grandes áreas" (EG) da Matemática: Ensino, Matemática Aplicada e Matemática Pura. Nesse percurso, obteve a Licenciatura em Matemática e trabalhou num projeto de iniciação científica que envolvia o desenvolvimento de um software de geometria dinâmica para o ensino de Geometria Descritiva, o grau de mestre em Análise Numérica e de doutor em Álgebra. A escolha pela formação inicial deveu-se à sua afinidade com a Matemática e ao incentivo dos seus professores do Ensino Básico. Já a escolha pelo mestrado na área computacional foi motivada pela experiência realizada na iniciação científica. No doutoramento preferiu seguir uma linha mais teórica e numa outra área, por não se ter identificado o suficiente com a "Matemática Aplicada ou pelo menos com o tópico que estava estudando naquele momento [no mestrado]" (EG).

Ao olhar de forma retrospetiva para a sua formação universitária, em particular sobre a sua adequação para ensinar Álgebra Linear, reconhece que a principal fragilidade está relacionada com o conhecimento didático, sobretudo no que diz respeito a estratégias de como ensinar conteúdos matemáticos:

> [A dificuldade é] a questão da didática mesmo, de lidar com os conceitos como professor para ajudar e não atrapalhar o contato dos alunos com a matéria, pois é a primeira vez que estão vendo. E essa questão da didática foi o que menos explorei porque não tenho muita experiência [de ensino]. Mesmo na Licenciatura, não tiveram grande peso as matérias de didática, de estágio. Preparação didática mesmo foi pouca. E no mestrado e doutorado não teve foco nisso. (EG)

Tal posição indicia que a sua formação incidiu mais sobre o conhecimento do conteúdo descurando a sua formação relativa ao conhecimento didático necessário para tornar compreensível o conteúdo matemático aos seus alunos.

Após o doutoramento e com o início da vida profissional, Téo procurou desenvolver a sua formação por meio de: (i) vídeos-aula relativos a assuntos que lhe interessavam, como, por exemplo, um curso de Inteligência Artificial que assistiu no *Coursera* como forma de se preparar para um projeto que combate o vandalismo dos artigos da Wikipédia (do qual é colaborador), como também relacionados com as disciplinas que leciona; (ii) leituras de artigos científicos e de livros acadêmicos; e (iii) palestras e seminários na própria universidade.

> No período (...) entre o fim do doutorado e entrar aqui na universidade, fiquei assistindo vídeos-aula do *Coursera*, peguei um curso de Inteligência Artificial (...). Teve duas motivações para este curso, uma que tinha curiosidade de conhecer coisas de computação e inteligência artificial e a outra é que eu costumo participar da *Wikipédia* voluntariamente, mexendo com artigos, ajustando uma coisinha aqui outra ali. (...) Eu tinha contato com uma parte interna do projeto que estava desenvolvendo uns projetos para combater o vandalismo aos artigos utilizando Inteligência Artificial. Convidaram-me para participar no projeto, e como não tinha a menor base teórica para isso, aproveitei que estava abrindo um curso no *Coursera* e fui assistir (...). Na primeira vez que as leciono [disciplinas], eu estou procurando refazer o curso assistindo vídeos-aula de algum professor de outro lugar, lendo os livros que não usei quando estudei para obter outros pontos de vista além daqueles que eu vi na primeira vez. (...) Estou complementando, digamos aquilo que eu sabia, com outras formas. (EG)

A maioria das dinâmicas formativas de Téo passa pelo uso da tecnologia. Téo revela curiosidade e afinidade pela tecnologia e quando entrou no grupo de trabalho colaborativo já procurava usar, por exemplo, o software GeoGebra para mostrar aos alunos algumas interpretações geométricas de conceitos matemáticos. Porém, este uso ainda era restrito a algumas das disciplinas que lecionava. Nunca tinha usado este software para lecionar tópicos de Álgebra Linear, apenas indicava aos alunos algumas fontes onde poderiam encontrar vídeos-aula ou softwares online para cálculos matriciais. Ao entrar no grupo de trabalho, já havia lecionado as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Geometria Analítica por três vezes, experiência que lhe despertava um sentimento de segurança no ensino de tais disciplinas, enquanto que em Álgebra Linear tinha apenas a experiência de um semestre.

> Ano passado [2015] comecei a lecionar nesta universidade. A experiência mesmo estou adquirindo agora. Cálculo já trabalhei três semestres, então está mais tranquilo. Mas Álgebra Linear foi a primeira vez que trabalhei no semestre 2016/01, tive três turmas. Foi uma experiência nova onde tive as boas e as más escolhas. No momento estou repensando sobre as ideias, as dificuldades que tive, as escolhas que achava que ia dar problema e não dava. Trabalhei a noite com a [Engenharia de] Produção, pela manhã com a Matemática e Física e à tarde com a turma de [Engenharia] Civil. (EGC1, 01/07/2016)

Durante o 1.º ano letivo em que se inseriu no grupo de trabalho, Téo tinha uma carga horária elevada de ensino, totalizando 18 horas/aula no 1.º semestre e 17 horas/aula no 2.º. Apesar de reduzir a carga horária de um semestre para o outro em uma hora/aula, lecionou no 2.º semestre a disciplina de Cálculo Numérico pela primeira vez (Quadro 19), exigindo-lhe tempo e dedicação para se preparar.

Quadro 19. Disciplinas e carga horária de ensino de Téo nos semestres 2016/02 e 2017/01

Semestre	Disciplinas	Carga horária total*
2016/02	Álgebra Linear Geometria Analítica e Álgebra Linear Geometria Analítica Cálculo Diferencial e Integral I	18 horas/aula
2017/01	Álgebra Linear (2 turmas) Cálculo Numérico Cálculo Diferencial e Integral I	17 horas/aula

*1 hora/aula=50 minutos

Um aspeto importante para uma maior rentabilidade do trabalho realizado num grupo de trabalho entre pares é o envolvimento profissional dos seus participantes. Apesar da sua discrição e timidez e de ter um vínculo com a instituição que não lhe dá os mesmos direitos e obrigações que um professor efetivo (como, por exemplo, o direito a alocação de carga horária em projetos, a obrigação da participação em reuniões de departamento), Téo procura integrar-se na instituição através da participação voluntária no coral, de palestras e semanas de formação de professores, das reuniões do Departamento de Matemática mesmo que a sua participação não conte no *quórum*, e da participação no grupo de trabalho sem alocação à sua carga horária. Trata-se de um professor afável, educado e atencioso com os outros, o que tem implicações positivas na forma como se relaciona com os seus pares e interage com os alunos. É comum o gabinete de trabalho de Téo estar cheio de alunos seus e de outros professores solicitando a sua ajuda para esclarecer dúvidas.

No grupo de trabalho, manteve sempre uma personalidade calma e foi sempre, a par da investigadora, assíduo em todos os encontros. Entretanto, como teve uma carga horária elevada de ensino, lecionando disciplinas pela primeira vez, ao avaliar a sua participação no grupo considerou que "me faltou tempo para me preparar melhor antes das reuniões, para o que seria discutido em cada uma delas" (EGR1). Apesar da falta de tempo que expressa para se preparar para algumas das sessões, uma das características que demarcou Téo no seio do grupo no 1.º semestre foram as questões que fazia aos colegas, como por exemplo: "como trabalham a ordem do conteúdo, primeiro matrizes e depois sistemas ou vice-versa?"; "vocês usam seta para denotar vetor?" (EGC2, 29/07/2016). Tais questões deviam-se à sua insegurança em relação aos aspetos didáticos, que acabaram, muitas vezes, por levar os demais colegas a pensar em questões sobre as quais não costumavam parar para pensar.

Como tem um temperamento mais introspetivo, de forma geral, nas reuniões do grupo assumia uma postura mais comedida tanto em relação às suas ideias quanto em relação às suas ações. Tinha a tendência de não ser o primeiro a expressar ideias, a não ser que fosse solicitado a fazê-lo pelos restantes colegas. Esta prudência, na formulação das suas ideias, resulta também de sentir que é importante refletir com mais tempo sobre os assuntos, procurando assim racionalizar mais as situações. Por conta da sua formação profissional, transparecia estar à vontade nos momentos do grupo relacionados com a discussão do conteúdo matemático e com o uso da tecnologia. Quando lhe surgia a oportunidade, era comum nos encontros compartilhar com o grupo vídeos, textos e páginas da Web relacionados com algum conteúdo matemático de interesse comum, como ilustram algumas das suas posições em encontros distintos do grupo:

> Para interpretação de sistemas tem outra possibilidade, explorando um pouco a notação matricial, que é pensar que as variáveis estão servindo para fazer combinação linear das colunas da matriz. Você pode visualizar os vetores, que são as colunas. O livro do Gilbert Strang faz o paralelo das duas interpretações, geométrica e por combinação linear. (EGC2, 29/07/2016)
>
> Esse aqui é um canal do *Youtube* que tem listas de vídeos de Matemática, e tem uma especificamente de Álgebra Linear que ele aborda quase tudo do curso, não exatamente numa ordem que seria a ordem do curso, mas fazendo ligações interessantes entre os conceitos. Esses vídeos têm animações e visualizações com recurso computacional para exemplificar as coisas que a gente está querendo explicar. Então é bem interessante assistir para explorar as ideias. Por exemplo, a gente estava vendo aquela atividade da multiplicação e a transformação das letras por multiplicação de matrizes, então tem

> alguns aqui que daria para fazer um link numa próxima vez, logo depois de fazer essa atividade. (EGC19, 17/03/2017)

No esboço do 'retrato' profissional e pessoal de Téo destaca-se o seu envolvimento com a instituição e a responsabilidade com o seu trabalho, a forma cuidada como se relaciona com os outros, o seu interesse em aprender e a postura de partilhar os seus conhecimentos com os seus pares. Ao longo deste capítulo, através da forma como o professor se envolve na ação que decorre no projeto colaborativo, este 'retrato' irá ganhando contornos mais nítidos.

7.2. Perspetivas e prática de Téo sobre o trabalho colaborativo

Antes de participar no grupo de trabalho, Téo vivenciou no doutoramento uma experiência de trabalho conjunto com um colega, ambos tinham o mesmo orientador, relativamente a um problema de pesquisa semelhante ao seu.

> Tive um tipo de colaboração, em que nós os dois estávamos discutindo o conceito, a teoria, tentando descobrir os factos interessantes da teoria que estávamos desenvolvendo, ou seja, propriedades dos objetos matemáticos que queríamos compreender. A colaboração ocorreu ao longo de um período de vários meses, então houve mais de um momento em que chegamos a alguma conclusão nova durante nossas reuniões/discussões. (EGR2)

Fora do meio acadêmico teve a experiência de *wikipedista*, em que participou na "construção e revisão de textos, e construção de ferramentas de forma colaborativa, também para a finalidade de criação de textos da *Wikipédia*" (EGR2). No seu recente percurso profissional ainda não tinha vivenciado qualquer experiência de trabalho entre pares, manifestando uma atitude mais individualista, sobretudo no que dizia respeito à planificação de aulas. Essa atitude não o inibia de conversar "com alguns colegas sobre alguma coisa que aconteceu nas aulas ou sobre provas" (EG) e partilhar as suas provas de Cálculo Diferencial e Integral I com outros professores que lecionavam a mesma disciplina por meio de uma pasta comum na *nuvem Dropbox*. A partir das experiências precedentes, Téo aponta a sua conceção sobre as vantagens do trabalho colaborativo entre professores:

> Uniformizar um pouco as abordagens entre vários cursos ou professores, aproveitar digamos o melhor do que cada um está contribuindo, ou seja, a experiência de cada um e como isso vai ser passado aos alunos. Um vê de uma maneira, outro vê de outra, as ideias de um podem ajudar a complementar um pouquinho as ideias do outro. (EG)

Téo considera que a partilha de experiências e ideias proporcionadas por essa modalidade de trabalho conjunto pode conduzir à melhoria e à inovação da prática de ensino dos envolvidos. E essa era a sua expectativa inicial para com o trabalho em conjunto com seus pares: "minha expectativa é a troca de ideias sobre aspetos didáticos do ensino dessa disciplina, aprender novas abordagens para o ensino" (EGC1, 01/07/2016).

Ao fazer um balanço sobre o primeiro semestre de trabalho com os seus pares relativamente à sua participação no grupo, destaca a sua postura de dar e receber por meio da partilha:

> Tem sido uma boa oportunidade para fazer uma troca de ideias sobre aspetos didáticos do ensino desta disciplina, tanto recebendo sugestões de abordagens que não teria pensado em seguir se trabalhasse por conta própria, quanto apresentando ao grupo ideias e materiais com que tive contato ao preparar minhas aulas. Acredito que esta via de mão dupla atenda perfeitamente ao que eu esperava do grupo. (EGR1)

A perspetiva de Téo é positiva em relação ao trabalho no grupo, pois como é um profissional curioso e interessado, na sua planificação explora diferentes fontes que lhe permitam conhecer diferentes aplicações de conteúdos de Álgebra Linear, o que sempre partilhou com o grupo de trabalho. Em contrapartida, entende que retira do grupo, a partir da partilha/discussão/planificação de diferentes abordagens para o ensino, contribuições sobre aspetos didáticos da disciplina, que é justamente o ponto que destaca como mais frágil na sua formação.

Na sua apreciação sobre as relações entre os participantes, destaca o sentimento de confiança construído no grupo ao longo do primeiro semestre letivo de trabalho: "acredito que tanto a organização, quanto a nossa relação no grupo estão boas, e tem permitido aos participantes colocar ideias, mesmo ainda cruas, em discussão, para um 'brainstorm', sem receio das críticas construtivas do grupo" (EGR1). A base relacional de *confiança* construída, na perspetiva de Téo, constituiu um meio favorável para que todos se sentissem à vontade para expor as suas ideias estando abertos às críticas construtivas dos seus pares.

Téo destaca também a interação com professores mais experientes no ensino de Álgebra Linear. Essa interação permitia-lhe planificar a sua prática levando em consideração as experiências partilhadas por esses professores sobre o que já havia dado certo ou errado em diferentes práticas ou sobre diferentes abordagens que poderiam ser dadas aos conteúdos.

> Tem sido proveitoso interagir com professores com diferentes níveis de experiência, pois do ponto de vista de quem tem menos experiência, ouvindo o que os outros têm a dizer, por exemplo em relação a metodologias já testadas em sala, coisas que deram certo ou não, ou que sabem que tem que mudar em algum aspeto, nesse sentido acabo já

> refletindo e às vezes planejando de outra forma as coisas que já experimentaram, visto que já sei o efeito que vai ter. (EGR1)

Para além da reflexão sobre as estratégias de ensino já utilizadas pelos colegas, que lhe proporciona outros rumos na sua planificação, Téo destaca que a participação no grupo lhe propiciou "mais segurança para experimentar metodologias diferentes, em vez de aulas apenas teóricas, particularmente o desenvolvimento das atividades durante a aula e do trabalho extra classe" (EGR1). Téo refere que antes da participação no grupo as suas aulas eram mais teóricas e centradas em si e que com a participação no grupo sentiu-se apoiado para experimentar atividades mais centradas no aluno.

No primeiro encontro de 2017, no processo de reflexão conjunta sobre o trabalho realizado no semestre anterior e de negociação/definição de perspetivas para a continuação do trabalho, Téo mantém o entendimento que as relações devem envolver uma postura de 'dar e receber', ao expor as suas expectativas sobre o que espera para si e dos colegas no trabalho conjunto:

> De forma geral, são duas coisas [que espero]. Uma primeira é que em algum momento do semestre eu possa trazer a solução para os colegas de algum problema do grupo. E que, reciprocamente, quando eu tiver um problema, alguém do grupo me ajude a encontrar a solução. (EGC16, 15/02/2017)

Para além de entender que as relações no grupo devem ser recíprocas, Téo espera que o mesmo proporcione um ambiente de ajuda mútua, em que todos se possam sentir apoiados pelos colegas para buscar uma solução para os seus problemas da prática pedagógica, como infere ao se referir às vantagens do trabalho em conjunto: "o facto da gente estar trocando ideias, alguém sempre vai poder dar ajuda a algum outro que está precisando ou em algum problema que surgiu no grupo. Acho que essa é a maior vantagem de trabalhar em conjunto" (EGC16, 15/02/2017).

Após um ano de realização de atividades com o grupo de trabalho, ao fazer um balanço sobre o que foi desenvolvido, considera que a sua maior participação aconteceu "nos momentos que tinha alguma atividade envolvendo o GeoGebra – planejamento dessas atividades, discussões com a Bruna para tentar implementar [atividades no GeoGebra]" (EGR2), o que se deveu à sua afinidade com a tecnologia. Considera que a sua participação foi menor "nos momentos, por exemplo, em que o grupo começou a sistematizar alguns dos dados das atividades – analisar as resoluções dos alunos, planejar *papers*" (EGR2). Isso não quer dizer que não tenha participado dessas atividades, apenas não partiu de si a iniciativa para as realizar, nem para as conduzir. Nesses momentos, Téo considera que "estava mais no 'embalo' do grupo do que dando o 'pontapé' inicial" (EGR2), pois devido à sua formação não tinha experiência com o tipo de atividade realizada. De forma geral, acredita que a sua participação teve relevância para o trabalho desenvolvido no grupo, no sentido de "trazer algumas ideias novas durante as discussões" (EGR2), como, por exemplo, a sugestão de uma situação-problema para ser trabalhada na introdução do tópico Mudança de Base, e a sugestão de uma tarefa para explorar a interpretação geométrica de operações de soma e multiplicação por escalar no estudo da definição de Espaços Vetoriais. Em contrapartida, considera "que aprendi bastante nesse processo também" (EGR2). Subjacente a essa aprendizagem, indicia destacar o seu desenvolvimento profissional no que diz respeito a sua preocupação com o envolvimento dos alunos nas suas aulas e a aprendizagem de que por meio da troca de ideias com os seus pares se podem construir novas ideias e colocá-las em prática mais facilmente do que se estivesse trabalhando sozinho.

> Teve a questão da interação com os alunos, que comecei a fazer na Álgebra Linear, mas que vou provavelmente passar a explorar um pouco mais em outras disciplinas. [Outra questão] Isso de trazer para um grupo de pessoas que estejam trabalhando com a mesma matéria [disciplina] uma ideia que talvez possa ser explorada. Ou seja, que de repente com essa troca, a ideia rascunho acabe virando uma ideia aplicável. Claro, cada um isoladamente vê aquela coisa no seu próprio entendimento, mas quando há troca, você vai talvez ter as duas peças que faltam para realmente virar uma coisa produtiva, para fazer com os alunos, para explorar em sala. E às vezes se estivesse só com a ideia guardada, você não a levaria a um nível que pudesse ser utilizada. Então, trocar essas ideias e tentar transformar em uma atividade, acho que é o que vai acabar acontecendo em outras áreas também. (EGR2)

A troca de ideias e o poder de reflexão sobre elas podem ser acrescidos quando num grupo se juntam pessoas com diferentes competências e experiências. Ao referir aspetos da sua prática pedagógica que foram desenvolvidos a partir da interação com os demais professores do grupo, aponta que lhe despertou uma maior determinação e confiança para envolver os alunos em atividades que os tornem mais ativos no seu processo de aprendizagem, como, por exemplo, a resolução de tarefas em sala de aula.

> Mais iniciativa para propor atividades para os alunos em sala ou acompanhar alguns momentos deles resolvendo alguma tarefa que tem sido proposta, para ter uma troca maior, em vez de ficar em uma coisa mais de transmitir informação, sem deixar que eles tentem praticar enquanto eu estou ali. Por exemplo, alguma ideia de tarefa que a gente fez uma parte no papel e outra no computador, sendo que a parte do papel é discutida em sala de aula. Eu tenho tentado ver em que outros momentos ou em que outras disciplinas eu posso ter iniciativa semelhante, que é o tipo de coisa que eu não tinha muita confiança para tentar explorar. Acho que nesse sentido a participação ajudou bastante. (EGR2)

Téo complementa que se não estivesse inserido no grupo, dificilmente desenvolveria atividades como as que foram criadas pelo grupo, seja para introduzir um tópico ou uma tarefa para fazer a conexão entre a teoria e a prática.

> A criação das atividades para sala de aula. Acho que sozinho não teria pensado em fazer. E muito menos a tempo de explorar o conteúdo que estava sendo ensinado, de ter uma atividade pronta para trabalhar com as turmas. Pelo menos as primeiras que fizemos no início do semestre, com certeza dependeu bastante de eu estar inserido no grupo e ter uma troca, para eu poder ter desenvolvido essas atividades. (EGR2)

Para além de se sentir apoiado para alterar a sua prática de ensino, refere o apoio recebido do grupo por meio da partilha de materiais e conhecimento acerca das potencialidades do software GeoGebra:

> Me senti apoiado sim. Por exemplo, em relação ao GeoGebra, às vezes ia lá conversar com a Bruna para ver o que ela sabia com relação a alguma ferramenta específica, ver como que era trabalhado. Também consultava o material (provas, slides, vídeos, listas de tarefas, pdf's de livros) que os outros tinham colocado na pasta para dar uma analisada. Acho que tive um bom apoio do grupo, tanto presencialmente quanto pelo tipo de material produzido. (EGR2)

Relativamente ao papel que desempenhou no grupo, acredita que contribuiu com a criação das atividades que envolviam o GeoGebra, além do apoio aos colegas com tal ferramenta. Em adição a isso, refere a sua contribuição com a revisão da escrita final das atividades elaboradas, atentando-se à linguagem matemática utilizada e à clareza do texto, e a partilha de algumas ideias para a elaboração das propostas de ensino do grupo.

> Coisas relacionadas ao GeoGebra, por exemplo, ou que envolvessem atenção ao detalhe, já que eu sou um pouco mais perfeccionista. Então, eu acabava revisando alguns detalhes de atividades propostas, de textos, de terminologia matemática ou precisão de alguma coisa. (...) Às vezes de leituras vagamente relacionadas, surgia alguma ideia para tentar ver se podia virar algum tipo de atividade, algum tipo de proposta para o pessoal [grupo]. (EGR2)

Quando alude a sua contribuição para a 'precisão de alguma coisa', refere-se ao papel que naturalmente assumia para 'acertar os cálculos' na elaboração de questões e sobre o seu olhar crítico sobre o enunciado das questões.

Ao fazer um balanço sobre a organização do trabalho no grupo, refere que, de forma geral, "as reuniões ocorreram bem em termos de como se desenvolviam as discussões, tendo sempre algum tópico específico para discutir" (EGR2). Destaca as atividades dinamizadas no 2.º semestre no grupo de trabalho, algumas delas desenvolvidas quase que inteiramente nos momentos coletivos, ocupando um tempo que poderia ser dedicado a outras atividades no seio do grupo. Infere que a discussão poderia ter acontecido no grupo, mas a concretização de propostas poderia ter sido realizada fora dos encontros e posteriormente discutida no seio do grupo para a avaliação e fechamento da versão final.

> Teve algumas atividades que a gente estava tentando fazer durante os momentos de reuniões. É claro que talvez esta tenha sido a forma mais rápida de chegar a algumas dessas atividades. As questões, por exemplo, de Produto Interno: talvez se tivéssemos distribuído alguns dos tópicos específicos para cada um elaborar, poderíamos ter ocupado melhor o tempo das reuniões que a gente discutiu isso, pois a gente ficou bastante tempo pensando nelas, mas não saia, digamos, uma questão elaborada da reunião, a gente ficava com os tópicos gerais. Demoramos várias reuniões até afunilar a ideia, até formar alguma coisa definitiva que pudéssemos colocar para os alunos. Mas já, por exemplo, a elaboração do artigo, alguém deu o pontapé inicial, cada um fez um pouquinho, no grupo revisamos. Então acho que fluiu bem para ver o ponto de vista do grupo. (EGR2)

No que concerne às relações entre os participantes, aponta que "todo mundo participou junto, (...) desenvolvemos uma relação boa, as coisas fluíram bem, sem muito aquela coisa de ter um líder" (EGR2). Na sua perspetiva, cada participante desempenhou o seu papel no grupo de acordo com as suas habilidades e, apesar de não haver divisão de papéis, naturalmente quem tinha a ideia sobre uma determinada ação, acabava assumindo um papel principal na sua execução.

> Acho que cada um pode contribuir ou aproveitar a própria potencialidade. Acho que a contribuição estava razoavelmente bem distribuída entre os participantes (EGR2).
>
> Eu acho também que alterna quem está de principal naquela atividade. Cada um que está com a ideia acaba ficando mais próximo da construção do material. (EGC28, 02/06/2017).

Um dos aspetos que, segundo Téo, contribuiu para uma maior proatividade do grupo ao longo do processo foi a periodicidade das reuniões, que passaram a ser semanais no 2.º semestre de trabalho, ao invés de quinzenais como no 1.º semestre.

> Outra coisa que eu achei legal foram as discussões semanais em vez de mais espaçadas. Nos fez ficar sempre na ativa pensando nisso [na disciplina], conjuntamente. Não dá tempo de morrer o interesse por Álgebra Linear para depois ter que fazer outra reunião. Em uma semana não dá para esquecer. (...) Dá para se programar bem com os tópicos também, porque ninguém está no mesmo ponto que os outros, então dá para ver 'Ah, preciso correr ou preciso ir devagar'. Então dá tempo para conversar, ver também como

um colega abordou um conteúdo, dependendo de como foi dá para trazer a discussão ao grupo. (EGC28, 02/06/2017)

Em sua perspetiva, com reuniões mais frequentes o grupo se sentiu mais envolvido, estabelecendo relações mais próximas uns com os outros e mantendo aceso o seu interesse e compromisso pela disciplina, visto que se estava discutindo o seu ensino e a aprendizagem dos alunos continuamente.

Por fim, ao comparar o seu conceito sobre a colaboração entre pares com relação à conceção que tinha no início do trabalho no grupo, afirma que "pude experimentar a colaboração num papel diferente dos outros que eu já participei" (EGR2). Com a vivência no trabalho conjunto entre professores a sua visão em relação ao leque de possibilidades para a colaboração se abriu: "é diferente do que já tinha participado, deixou mais abrangente o que eu entendia de colaboração" (EGR2).

Após o término das atividades realizadas, no primeiro ano, em torno do ensino de tópicos de Álgebra Linear, o trabalho colaborativo no grupo teve continuidade e Téo se mantém, mesmo sabendo que o seu contrato de trabalho na universidade está prestes a se encerrar e tendo que conciliar uma carga horária alta de ensino com os estudos de preparação para concursos públicos para tentar se efetivar em alguma Universidade.

Ao ser questionado se após a vivência no grupo de trabalho intencionaria integrar ou dinamizar no futuro outros grupos de trabalho colaborativo, Téo afirma que "eu participaria sim de outro grupo, dentro das limitações de tempo que tenho. Ignorando isso, com certeza" (EGR2). Ao avaliar as disciplinas em que faria sentido dinamizar um trabalho colaborativo entre professores, indicou

essencialmente as disciplinas que costumam ter mais demanda de professores. Em Cálculo I tem muitas turmas, então tem muitos professores que poderiam estar discutindo [a disciplina]. São vários professores com enfoques muito diferentes. Por exemplo, o Alfredo já traz algumas ideias de Integração ali no começo quando está tentando motivar o estudo dos conceitos do Cálculo. Na maioria das vezes eu tenho seguido a apostila do departamento, mas não tenho explorado muita atividade diferente. Ensino o conteúdo trazendo o GeoGebra para visualizar o que é visualizável, por exemplo, achar o máximo ou mínimo [de uma função] ou uma coisa de forma rápida quando for para discutir o conceito, interagir de alguma forma. E outras matérias? Com a Cláudia, por exemplo, tenho discutido os tópicos de Cálculo Numérico, mas é uma discussão informal, não é um grupo de trabalho. Mas acho que, potencialmente, qualquer disciplina que tenha dois ou mais interessados poderiam estar tentando aperfeiçoar. Principalmente quando pega a matéria que gosta de tentar aprimorar o ensino e a aprendizagem do conteúdo, você vai estar empolgado para tentar novas metodologias e novas estratégias. Basta ter demanda e o interesse. (EGR2)

Téo cita como exemplo a formação de grupos colaborativos entre professores que lecionam uma mesma disciplina, que é a sua experiência mais recente, isso não quer dizer que não visualize outras perspetivas para o trabalho colaborativo, como entre professores que lecionem disciplinas afins, que executem um projeto de pesquisa, ensino ou extensão, dentre outras possibilidades. Para Téo, a constituição de um grupo de trabalho colaborativo entre professores que lecionam uma mesma disciplina depende da sua disposição para estarem abertos à discussão de suas práticas. Ao indicar a importância de se formar um grupo de trabalho colaborativo para se discutir a prática de ensino em Cálculo I, visto que a disciplina no Centro de Ciências Tecnológicas não tem uma identidade, pois cada professor a leciona segundo uma abordagem diferente, Téo mantém a perspetiva revelada no início das atividades no grupo de trabalho, de que um grupo de trabalho colaborativo é um espaço para discussão/reflexão sobre diferentes ideias e que juntos podem construir ideias comuns ao grupo como um todo.

7.3. Perspetivas de Téo sobre o ensino de Álgebra Linear

De modo a evidenciar as perspetivas de Téo sobre o ensino de Álgebra Linear, organiza-se a informação recolhida em torno do ensino de Álgebra Linear, das dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina, do papel do aluno nestes processos, das tarefas propostas aos alunos, dos materiais utilizados no ensino da disciplina e no processo de avaliação das aprendizagens dos alunos.

7.3.1. Ensino de Álgebra Linear

Antes de integrar o grupo de trabalho entre pares, ao procurar referir a relevância da Álgebra Linear para a formação dos seus alunos, Téo a destaca como uma ferramenta para resolver problemas de diversas áreas do conhecimento. Entretanto, revela a dificuldade em gerir o cronograma da disciplina de Álgebra Linear de forma a inserir a resolução de problemas contextualizados:

> Vejo que é bem importante porque tem muitas aplicações, só que em um semestre de Álgebra Linear é limitado o tempo que a gente tem para chegar nessas aplicações e mostrar que realmente tudo aquilo que você fez de teoria é útil para alguma coisa. Eu conheço diferentes problemas de diferentes áreas que usam ferramentas da Álgebra Linear para sua solução, mas ainda não consegui trabalhar em sala de aula. Eu vejo que é importante ter contato com essas ferramentas mesmo que depois eles tenham que descobrir 'ah, era para isso que servia e ninguém me contou'. É uma primeira matéria que é mais abstrata, é um estilo de pensamento diferente do Cálculo ou Geometria Analítica onde se está mais focado nas contas. O que ajuda como forma de organizar ideias. (EG)

Na perspetiva de Téo, mesmo que não explorasse na disciplina a sua aplicabilidade, a exploração do conteúdo por si só já era importante, no sentido de desenvolver a capacidade dos alunos em organizar o pensamento matemático e a sua capacidade de abstração, visto que é necessário um raciocínio mais formal, ao contrário de um pensamento focado em cálculos e procedimentos.

Ao referir como ensina os tópicos de Álgebra Linear, revela que a sua abordagem apresenta características do ensino tradicional, com aulas expositivas pautadas por definições, teoremas e exemplos. Por vezes, alterna entre introduzir os conceitos diretamente pela definição e a partir da exploração dos seus conhecimentos advindos da Geometria Analítica. Téo reconhece a sua tendência em explorar os conceitos com tal profundidade para além do que é esperado para alunos de graduação que estão contactando a disciplina pela primeira vez:

> Dependendo do conceito parto de algum exemplo que tenha sido visto em Geometria Analítica e que depois vai ter uma versão geral para um outro espaço vetorial ou a partir da definição e depois explorando os exemplos. Na maioria das vezes acontece uma das duas coisas. A tendência é a aula ser mais expositiva. (...) Eu ainda percebo que tenho uma tendência a querer colocar (...) as coisas mais gerais do que elas realmente deveriam ser discutidas na aula. Até percebo que está um pouquinho atrasado meu cronograma em relação ao da Lisa, por exemplo, por causa dos exemplos a mais que tenho colocado de algumas coisas que não são exatamente o foco principal. Acho que fico colocando até um pouco mais do que deveria em relação a abstração ou a generalização de algumas coisas. (EG)

Após as experiências vivenciadas ao longo de um ano de trabalho conjunto no grupo, Téo considera que ocorreram algumas alterações na sua conceção sobre o ensino de Álgebra Linear:

> Na parte de conceção sobre o ensino, acho que eu vim de um ponto de vista mais abstrato do que particular, axiomático e depois a aplicação, teorema e demonstração. E o grupo trouxe um pouco mais da motivação geométrica das coisas antes de introduzir uma definição formal, ou de tentar dar uma ideia geométrica para as coisas, interpretar algum facto, alguma demonstração ou alguma coisa assim. Boa parte das atividades realmente foi voltada para a parte de aplicações, visualização, ou os próprios alunos tentando fazer esse tipo de coisa. Então acabou incorporando um pouquinho a necessidade de pensar o ponto de vista geométrico, também no início [na introdução dos tópicos]. (...) Não pensar a aula tanto como uma construção teórica de uma coisa de Matemática, digamos que você vai definir, dar exemplos, demonstrar. Mas algo que precisa ser motivado de um ponto de vista informal para eventualmente formalizar. Acho que essa seria uma das contribuições do grupo. (EGR2)

Téo considera que passou a explorar menos os aspetos abstratos e a dar mais ênfase à construção dos conceitos de forma mais intuitiva para depois os formalizar, a valorizar a interpretação geométrica e as aplicações contextualizadas dos conceitos. Destaca que as atividades realizadas procuraram envolver os alunos para que se tornassem mais participativos nos processos de ensino e aprendizagem. Téo destaca também a sua aprendizagem acerca das aplicações contextualizadas da Álgebra Linear:

> Acho que aprendi algumas coisas de aplicações, principalmente. Acho que as discussões, ou alguma dúvida que surgia acabava me motivando a pensar sobre aquelas coisas. Por exemplo, fui atrás de entender aquela interpretação de um espaço vetorial com operações não usuais. (...) Mais indiretamente também a questão da adição e de outras operações com matrizes que tinha um vídeo que a Nina Levou. Agora eu estou correndo atrás de ver a construção disso, é computacional, não é bem Álgebra Linear que está no foco do que eu estou aprendendo, mas é algo que de certa forma partiu do grupo também, para tentar fazer uma coisa que a gente possa usar na velocidade de uma aula ou dentro do contexto da aplicação que a gente está fazendo com matrizes, não tudo de uma vez como apareceu naquele vídeo. Das aplicações, por exemplo: para sistemas [lineares], que eu acho que a Bruna faz bastante, como o problema de tráfego ou do Google. São coisas que eu estou querendo explorar, mas ainda não parei para ver com detalhe o que preciso para poder trabalhar isso com as minhas turmas, mas acho que vai acabar sendo feito. (EGR2)

Mesmo que Téo tenha uma formação sólida em Álgebra Linear, considera que as discussões e reflexões geradas no grupo lhe despertaram o interesse para se aprofundar na interpretação de conceitos, bem como conhecer outras aplicações sobre a Álgebra Linear e refletir sobre como as integrar no ensino da disciplina.

7.3.2. Dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear

Antes de participar do grupo de trabalho entre pares, Téo considera não ter dificuldades quanto ao conteúdo de Álgebra Linear. Sua dificuldade no ensino da disciplina incidia sobre como lidar com a dificuldade dos alunos em aceitar que aprender os tópicos abstratos da disciplina é importante para a sua formação.

> A principal dificuldade é convencer quem está vendo essas coisas pela primeira vez, de que abstrair algumas ideias e trabalhar no contexto abstrato e teórico é importante em algum sentido. Eles não veem à primeira vista porque que tem que ver toda essa teoria. 'Ah, essa aula é muito chata, por que essas coisas são teóricas, para que serve?'. Quando está numa disciplina mais abstrata é difícil convencer. Não tem uma coisa diretamente que você já pode contar para que vai servir. Cria uma espécie de indisposição dos alunos para estudar este assunto. Então você vai falar de espaço vetorial, subespaço vetorial, base, geradores... Estes conceitos, a princípio, não tem um contexto. (EG)

Para além da dificuldade dos alunos em perceber a aplicabilidade da disciplina, Téo referiu a dificuldade dos alunos em aplicar um mesmo conceito em diferentes espaços vetoriais:

> Tem essa dificuldade da questão de ver para que vai servir ou de repente aceitar momentaneamente que vai ter utilidade. Geralmente quando há uma quebra de paradigma da forma como eles estão acostumados a pensar, aplicar uma mesma ferramenta em vários contextos diferentes, isso dá bastante problema. (EG)

Outra dificuldade relatada por Téo relaciona-se com os pré-requisitos para a disciplina. Como os alunos percecionam o conteúdo de matrizes ao nível de Ensino Médio, eles trazem alguns erros para o Ensino Superior, que tendem a ser persistentes nas suas atividades.

> Outra questão é a questão da formação, eu vi que muitos alunos não têm muito domínio de como lidar com matrizes, apesar de eu ter gastado mais tempo com matrizes nessa primeira parte, eu sei que tem algumas coisas que ainda não estão claras, eles são muito acostumados a usar as propriedades que são de números reais para matrizes, por exemplo a comutatividade ou cancelar coisas dos dois lados sem se preocupar com nada, divisão de matrizes. Às vezes é da formação básica que vem o problema. (EG)

Perante as dificuldades dos alunos descritas, quando se trata da dificuldade em visualizar a aplicabilidade da disciplina, Téo procura "dar um exemplo em linhas gerais de onde vai entrar este assunto, mas sem entrar em detalhes da aplicação. Não é exatamente uma coisa convincente em detalhes, fica uma coisa meio no ar" (EG). Téo indicia ter consciência de que apenas falar sobre a aplicabilidade não é suficiente para convencer os alunos, e que eles precisam se envolver na resolução de problemas concretos. Contudo, na sua curta experiência de ensino ainda não havia visualizado como inserir esses problemas no seu ensino. Já em relação às dificuldades formativas, procura esclarecer as dificuldades quando estas surgem ou quando os alunos o procuram e acredita que para as ultrapassar os alunos necessitam "de um pouco mais de prática, pegar a mecânica da coisa" (EG).

Durante o trabalho entre pares no grupo, Téo procurou dar significado a alguns dos conceitos da Álgebra Linear por meio da exploração da "visualização geométrica e das possíveis aplicações dos conceitos" (EGR1). Esta foi a abordagem que aos poucos foi desenvolvida pelo grupo de trabalho e que será evidenciada na prática de Téo na Secção 7.4.

A falta de conexão da Álgebra Linear com outras disciplinas do currículo dos cursos de graduação do Centro do Campus A, também era uma dificuldade manifestada por alguns professores do grupo de trabalho, especialmente por Téo. Segundo Téo, muitos alunos não dão importância à disciplina por não verem a sua relação com outras disciplinas do curso que frequentam:

> Eu já ouvi muito: 'eu passei, mas não vi muito para que servia a disciplina'; 'Não serviu para nada no meu curso, estou aqui há tantos anos e nunca usei para nada'; 'O que usei de Álgebra Linear? Nada'. Essa é outra visão que fica, não percebem a utilidade. (EGC15, 16/12/2016)

No grupo discutiu-se que muitas vezes esta conexão não é estabelecida pelo facto dos professores de disciplinas subsequentes não atribuírem a devida importância aos resultados advindos da Álgebra Linear. Téo inclusive obteve tal constatação ao procurar um professor da disciplina de Equações Diferenciais para verificar como ele explorava os conceitos da Álgebra Linear, tendo em vista a conexão existente.

> Ele disse que não vale muito à pena ele dar muita ênfase em usar a linguagem da Álgebra Linear, na hora que ele discute essas questões, de que, se você tiver duas soluções, as combinações lineares vão ser soluções de uma equação diferencial homogênea, por exemplo. É mais interessante, no contexto, lá, ele falar do princípio da superposição, usar terminologias próprias das equações diferenciais, e não fazer muito link. (...) E, pelo que ele vê, ele acha que é mais interessante essa ligação ser feita antes de eles verem Equação Diferencial, do que ir lá, tentar retomar a Álgebra Linear. (EGC21, 31/03/2017)

Sendo assim, quando possível, Téo partilha com o grupo algumas de suas experiências em sala de aula, bem como apresenta sugestões de como fazer a conexão da Álgebra Linear com outras disciplinas, e entre os próprios tópicos de Álgebra Linear.

> Sobre o que a gente vinha falando, da falta de ligação [da Álgebra Linear] com outras disciplinas... Na aula de subespaço [vetorial], o último exemplo que eu tomei, dentro das funções, era pegar o conjunto de todas as funções que satisfaziam a equação diferencial $F'' + F = 0$. Que é um exemplo que eles vão retomar no curso de Equações Diferenciais. (...) Daí, eu solicitei alguns exemplos de solução para a equação. Uns falaram o zero, outros o seno, o cosseno, e a partir desses aqui, eu solicitei para eles criarem mais. Aí depois de muita insistência surgiu os múltiplos do seno, do cosseno, a soma do seno e cosseno. Aí, comentei que, depois, no curso de Equações [Diferenciais] eles vão ver que todas as soluções são [do tipo] $\alpha\,\mathrm{sen}(x) + \beta\cos(x)$. E aí, quando você falar de combinação linear, você pode retomar isso aqui, como exemplo que a gente viu. Então, dessa vez eu pus esse exemplo para procurar estabelecer uma relação com o Cálculo. (EGC22, 07/04/2017)

A ideia do grupo de forma geral era de dar sentido aos conceitos da Álgebra Linear por meio da conexão com outras disciplinas, para além da exploração da visualização geométrica e das aplicações contextualizadas.

Com a abordagem que utilizou após a participação no grupo, Téo acredita que os alunos tiveram a oportunidade de ampliar a sua visão por meio de diferentes perspetivas sobre os conteúdos, embora alguns erros e dificuldades ainda persistam.

> Além de ensinar que Regra de Sarrus não se aplica a matrizes 4×4 ou ordens maiores que essa, tem mais alguma coisa que vocês fazem? Porque eles insistem em fazer isso em determinantes grandes. Aí chega lá na terceira avaliação de autovalores e eles erram porque calculam o determinante do jeito errado. [Outros professores do grupo referem o mesmo erro]. Eu não sei o que está faltando. (EGC16, 15/02/2017)
>
> Tive vários [alunos] que continuaram errando a representação matricial de uma transformação linear em bases distintas. (...) Fazem mecanicamente, não diferenciam o vetor das suas coordenadas em relação a uma base. (EGC28, 02/06/2017)

Tais erros citados relacionam-se com o uso equivocado da Regra de Sarrus para o cálculo do determinante de uma matriz e a interpretação da linguagem simbólica e das diferentes formas de representar um mesmo conceito, bem como a transição entre estas formas.

7.3.3. Papel do aluno

Antes de integrar o grupo de trabalho, Téo indicia que seus alunos assumem um papel passivo em suas aulas e atribui tal postura à sua inexperiência no ensino de Álgebra Linear para fazer os questionamentos que os conduzam a participar na construção de conceitos, nas demonstrações de resultados e na resolução das tarefas propostas:

> Tenho tentado fazer com que participem, mas é pouco. Talvez as perguntas ainda não tenham sido as perguntas certas para fazer eles perceberem as coisas, de participarem da construção das ideias e da solução de questões. É algo que precisa melhorar, ainda não achei as palavras-chave para surgir essas ideias deles. Muitas das perguntas ainda criam um momento de silêncio geral que talvez reformulando de outro jeito tivesse sido claro, tivesse surgido algum efeito. (...) Eles são mais ouvintes, mas varia com a turma. Nas turmas que têm mais gente que já tiveram aula comigo, em geral, participam um pouco mais, acho que têm menos vergonha de perguntar. (EG)

Com o trabalho no grupo, aos poucos, Téo foi apercebendo-se da necessidade de envolver os alunos para além dos questionamentos do professor em sala de aula, mas também por meio da resolução de tarefas dentro e fora da sala de aula.

> Teve a questão da interação dos alunos que comecei a desenvolver mais na Álgebra Linear. (...) Essa parte de fazer com que o aluno participe em sala de aula, seja oralmente ou propondo uma atividade para eles trabalhar em sala. Acho que isso está melhor.

> Consegui fazer algumas coisas que eles discutiam entre eles, eu ia de mesa em mesa, esclarecendo as dúvidas. (...) [O que] ainda não se tornou uma coisa comum, é (...) fazer algum aluno se manifestar para explorar ou explicar no quadro. (EGR2)

Apesar de Téo ainda estar em evolução em relação ao envolvimento dos alunos em suas aulas, valoriza os momentos de trabalho dos alunos em sala de aula como um momento em que é permitido errarem para aprenderem com os seus erros, como destaca Téo na planificação e na reflexão sobre uma das aulas sobre Espaços Vetoriais:

> Acho que é importante esse momento, (...) é melhor permitir o erro agora, pode ajudar a concertar para não errarem depois. (EGC19, 24/03/2017)
>
> Fui mesa por mesa, respondendo a mesma coisa. Todos tinham a mesma dúvida do zero: 'o que faz com esse zero'. (...) Acho que ter a chance de eles pensarem nisso, e a gente poder corrigir cada um, nesse momento, acho que ajuda no facto de que o espaço vetorial é mais que uma simples operação usual ou coisas que você está acostumado, você pode definir outras operações e, ainda assim, por sorte, talvez satisfazer as propriedades de espaço vetorial. Acho que, por conta eles não percebem isso e quando a gente só fala, não vê que eles não estão entendendo isso nas aulas. Então acho que isso é interessante para... pelo menos, os que tiveram dúvida, que eu pude corrigir, acho que vão estar mais atentos a isso. (EGC20, 31/03/2017)

Téo apercebe-se, aos poucos, também que nesses momentos de trabalho em sala de aula o professor consegue identificar dificuldades que passam despercebidas quando apenas fala e o aluno copia.

Com a evolução do trabalho no grupo, e consequentemente com o aumento das atividades que exigiam que os alunos fossem mais ativos no seu processo de aprendizagem, Téo em vários momentos relata a falta de hábito e interesse dos alunos para cumprir com as tarefas que lhes eram solicitadas. Relata inclusive a falta de interesse para verificar os seus erros nas avaliações e aprender com eles.

> Estas que não são com nota, não. (...) Para mim com nota, também não veio todos. [Resposta de Téo para o questionamento feito no grupo: 'Os alunos de vocês, todos eles estão entregando as tarefas que vocês pedem?']. (EGC22, 07/04/2017)
>
> Quando eu enviei a atividade para eles, eu mandei junto o link específico daquela série de Álgebra Linear que a gente estava comentando alguns dias atrás, que comentava justamente da mudança de base, que ele conta toda uma historinha com duas personagens, aí um usa essa linguagem, outro usa outra linguagem, e aí a conversa é feita por uma matrizinha. Aí quando retomei, só um ou dois [alunos] olharam o vídeo, para a aula de Matriz [Mudança de Base]. (EGC24, 05/05/2017)
>
> Não é nem interesse só na questão de resolver o exercício, mas nem para olhar a prova, e olha que eu levo na sala. Muitos nem assim olham a prova para ver o que eles erraram. (EGC28, 02/06/2017)

Tal postura dos alunos indicia a necessidade de estratégias de ensino que envolvam os alunos e despertem em si o senso de responsabilidade com o seu processo de aprendizagem também em outras disciplinas, para além da Álgebra Linear.

Téo, num momento da planificação das aulas sobre Espaços Vetoriais, em que o grupo estava empolgado com as ideias que surgiram, destaca a importância da participação do aluno em sala de aula:

> Digamos assim, nos colegas a gente encontra os alunos que a gente queria ter, em sala de aula. (...) E daí, saem discussões legais e a gente vai se empolgando com aquela ideia... é o que acontece. (...) Quando os alunos dão aquelas ideias legais, a gente fica com essa empolgação de agora. (...) Ou ao menos quando participam, fazem perguntas, por mais boba que seja, mas ao responder você pode pegar um gancho para uma ideia, a dúvida de um pode ser a dúvida de outro, ou pode a partir das perguntas surgir outras. (EGC21, 31/03/2017)

Téo reconhece que a interação em sala de aula gerada pelo lançamento de dúvidas, questionamentos e apresentação de dificuldades pelos alunos, fomenta a discussão do conteúdo em sala de aula, criando um ambiente em que os alunos aprendem com e a partir dos outros.

7.3.4. Tarefas

Na sua experiência anterior ao trabalho no grupo, Téo costumava elaborar listas de tarefas para serem resolvidas fora da sala de aula, como uma forma dos alunos praticarem e estudarem o conteúdo estudado na aula. Em sala de aula eram resolvidos exemplos pelo professor com o objetivo de ilustrar e esclarecer o conteúdo abordado, bem como para direcionar a resolução de algumas questões da lista de tarefas extra classe.

> Atualmente [tenho proposto] listas de tarefas. Estou tentando fazer uma seleção de algumas coisas e a cada duas ou três semanas proponho aos alunos conforme o decorrer das aulas. Geralmente resolvem em casa e daí nas aulas seria a introdução dos conceitos, tem resolução de algum problema que eles têm por exemplo da lista e que não está saindo ou algum exemplo que vai esclarecer alguma coisa ou dar uma dica de como resolver algum problema da lista. (EG)

Na sala de aula, Téo também procurava resolver questões da lista de tarefas quando era solicitado pelos alunos e não costumava proporcionar-lhes um espaço para discutirem entre si e resolverem tarefas. Esta atividade era toda centrada em si.

Nas listas de tarefas extra classe, Téo classificava as questões em cálculos, conceitos, teoria e software para os alunos terem uma orientação no seu estudo. Para Téo, primeiro era importante que os alunos fizessem as questões conceituais, para entenderem e memorizarem o conceito, depois resolvessem questões de cálculo, que envolvem o emprego dos conceitos, para então resolverem as questões que classificou como teóricas, sendo aquelas que envolvem demonstrações.

> Eu acabei fazendo assim, é mais importante pensar no que é o conceito para depois teoria. (...) A de conceito geralmente eu colocava mais para cima [início], não precisava fazer conta nenhuma. (...) O que eu entendo como conceitual? Se eu falar assim: a matriz nula é uma matriz reduzida escalonada. Isso para mim é conceitual, aí é só você olhar o que significa. (...) Essa ideia me veio de um livro de Álgebra Moderna. Ele [autor] colocava primeiro as questões que envolviam cálculos, que elas vão envolver continha mesmo. Depois as conceituais, geralmente com verdadeiro e falso, depois ele colocava as teóricas, que geralmente envolve demonstração. (EGC12, 04/11/2016)

Na lista de tarefas sobre Matrizes e Sistemas Lineares também acrescentou questões para o uso de softwares. Téo indicava o software e os comandos para inserir o objeto desejado e fazer a operação desejada. A ideia de Téo com as questões envolvendo software era de que os alunos "alterassem alguns parâmetros dos sistemas e visualizassem geometricamente o que acontecia, como a relação entre as soluções e a posição geométrica de retas, planos" (EGC11, 21/10/2016). A Figura 11 ilustra um recorte de uma destas listas com a classificação das questões.

Figura 11. Classificação das questões, quanto ao tipo, realizada por Téo.

Legenda

Cálculos   Conceitos   Teoria   Software

Questões

1. Exiba matrizes quadradas A e B de ordem 2×2 que exemplifiquem as situações a seguir. Compare com o que ocorreria se A e B fossem números reais.

   (a) É possível que $A^2 = B^2$ mesmo que $A \neq B$ e $A \neq -B$.

   (b) $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

   (c) Pode ocorrer que $A^2 = 0$ apesar de $A \neq 0$.

   (d) Há casos em que $AB = 0$ ao mesmo tempo em que $0 \neq A \neq B \neq 0$.

   (e) Mesmo que $A \neq B$ pode existir uma matriz P tal que $A = P^{-1}BP$.

2. Calcule, se existir, a inversa de cada uma das matrizes a seguir:

   (a) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Ao partilhar com o grupo a sua prática, o grupo adotou a classificação das questões para as listas de tarefas construídas/adaptadas em conjunto. Por exemplo, na lista de tarefas sobre Autovalores e Autovetores foi usada a classificação: Cálculos (Questões de aplicação dos conceitos), Teoria (Questões conceituais e de demonstração) e Geometria (quando envolvia alguma interpretação geométrica).

No decorrer do trabalho no grupo Téo foi inserindo, aos poucos, a resolução de tarefas pelos alunos em sala de aula e fora de sala de aula, para além das listas de tarefas extra classe. Téo refere que o facto de estar inserido num grupo de trabalho onde se discutia os processos de ensino e aprendizagem em Álgebra Linear é que lhe permitiu "ter mais segurança para experimentar metodologias diferentes, em vez de aulas apenas teóricas, particularmente o desenvolvimento das atividades durante a aula e do trabalho [tarefas] extra classe" (EGR1). As tarefas propostas em sala de aula ou tinham por objetivo a aplicação imediata de algum conceito ou eram de natureza exploratória, tendo por finalidade envolver os alunos a estabelecer conclusões na construção de algum conceito, como foi o caso da tarefa introdutória ao conceito de Matriz Mudança de Base e da tarefa introdutória aos Espaços Vetoriais. Extra sala de aula, propôs tarefas avaliativas, cujas questões envolviam tanto a aplicação imediata dos conceitos como demonstrações de resultados, e também tarefas de natureza exploratória, como a tarefa que envolveu a interpretação geométrica do produto de matrizes e a da criptografia.

Para além de recorrer a tarefas com a finalidade de introduzir e sistematizar conceitos, Téo também integrou tarefas na sua estratégia de ensino com o intuito de diagnosticar os conhecimentos prévios, como exemplifica a tarefa que propôs aos seus alunos, no primeiro dia de aula do semestre 2017/01, denominada "Pré-teste sobre matrizes":

> Na turma da Produção, eu tinha começado a falar das operações de matrizes, da adição e da multiplicação por escalar. De seguida é que eu fui ver a tarefa do Tito. Então só na aula seguinte que eu passei a tarefa a eles. Então foi antes de falar do produto de matrizes, e nessa turma a dificuldade foi com a notação ${}^{1}/_{B}$, que eles não sabiam se fazia sentido ou não. Teve os que colocaram entrada por entrada, uma dividida pela outra, ou fizeram como se fosse multiplicação, (...) foram dividindo termos correspondentes de linha por coluna e somando os resultados. (...) Na outra turma, eu propus antes de falar de qualquer operação, então realmente foi mais no sentido de pré-teste. (...) Alguns não tinham muita segurança pra distinguir entre $[12]D$ e $12D$ [D era matriz de ordem 1×4]. (...) Eu mudei um pouquinho para a segunda turma que eu apliquei. Coloquei algumas que apareciam a inversa, outra que era o produto de uma matriz pela sua inversa para dar a identidade e depois poder comentar o tipo de matriz. (...) Essas das matrizes linhas e colunas, eu acrescentei uma que era a coluna vezes a linha porque daí dava uma matriz quadrada, ao invés de dar só um valor numérico. (...) Esta $[A_{1\times 4}.B_{1\times 4}]$ é que dava problema, o pessoal multiplicava como se fosse produto escalar (...) ao invés de dizer que não existia. (...) Para aqueles que não sabiam muito bem o que fazer em algumas questões, como a $A.{}^{1}/_{B}$, eu sugeri que pelo menos dissessem o que eles achavam, se dava para fazer ou não. Para avaliar se eles achavam que era uma operação que existia e eu ter uma ideia do que eles estavam achando. (EGC17, 24/02/2017)

Tal tarefa foi construída e partilhada por Tito, sendo que Téo e os demais elementos do grupo se apropriaram da ideia e a propuseram aos seus alunos. O propósito da tarefa era reconhecer os conhecimentos prévios dos alunos sobre as operações com matrizes. Téo concretizou a tarefa com duas turmas de Álgebra Linear. Numa turma já havia introduzido o conceito de matriz e as operações matriciais, sendo que na outra turma introduziu matrizes com a tarefa. A partir da experiência com a 1.ª turma, Téo procurou aprimorar a tarefa para a aplicar na 2.ª turma, no sentido de explorar outros conceitos envolvendo matrizes que não foram contemplados na 1.ª versão da tarefa. Por meio da tarefa Téo apercebeu-se de algumas dificuldades dos alunos com o tópico e no decorrer das aulas procurou resgatá-las e trabalhar em 'cima' dos erros dos alunos: "Conforme eu estava desenvolvendo o conteúdo, eu fui fazendo alguns comentários usando estas questões, principalmente as que eles mais tinham errado. E dá para fazer isso nas próximas aulas também, conforme as coisas vão surgindo" (EGC17, 24/02/2017). Téo indicia que a partir da resolução da tarefa pôde reconhecer qual a ênfase que devia dar às operações matriciais: "Consegui passar mais rápido aquilo que vi que eles sabiam. Na Produção acabei nem formalizando as operações, trabalhei mais tomando como exemplo as questões que erraram. Isso é bom porque dá para ganhar tempo para enfatizar outras coisas importantes" (EGC17, 24/02/2017).

Na reflexão sobre a atividade realizada, Téo sugere ao grupo alguns cuidados a ter na seleção das matrizes para que o foco sejam as operações matriciais e não os cálculos algébricos.

> Alguns estavam demorando e em partes era porque os números começaram a ficar muito grandes, porque as matrizes tinham as entradas positivas e apareciam muitas somas. Então eu acho que a ideia dos negativos e dos zeros diminui um pouquinho o tempo de resolução (...) e o foco fica mais nas operações do que no cálculo de números. (...) Talvez a gente possa sugerir no enunciado da tarefa, que com base nas respostas que eles encontrarem, se é algum tipo específico que eles reconheçam, já para pensar na classificação das matrizes como triangulares, diagonais, coisas assim. (EGC17, 24/02/2017)

Nesta seleção sugere que para a evolução da tarefa se considerem matrizes que a partir das operações realizadas com elas resultem matrizes especiais, como as que serão abordadas na sequência do conteúdo.

De forma geral, na preparação das tarefas no grupo de trabalho, Téo sempre se mostrava preocupado com a adequação das tarefas, se realmente estavam cobrando o que se pretendia, se tinham um objetivo claro e se não poderiam induzir o aluno ao erro ou a criar falsos conceitos.

> Do jeito que está aqui [a tarefa] já está supondo muito conhecimento de transformação linear, então só poderia aplicar mais no final do conteúdo. Uma solução seria quebrar as questões e ir dando aos poucos, conforme a evolução do conteúdo. (...) Acho que é importante explicar a terminologia e depois retornar nessa noção em outros momentos para ficar uma linguagem comum para eles. (EGC13, 16/12/2016)

> Aí volto na pergunta: por que é importante que essas duas perguntas sejam feitas? Qual é o interesse do fechamento da soma e da multiplicação por escalar? (...) Eu acho que não está feito o link, ainda. (EGC20, 24/03/2017)
>
> É, mas aí eles vão ter aquele problema com aquela dualidade vetor-ponto e vetor-setinha. Eles vão achar que a setinha tem que estar contida na figura, não a extremidade da setinha que tem que ser o ponto da figura. (...) A extremidade do vetor e o vetor eles confundem muito. Eles pensam sempre que tem que estar contida na figura. Não o ponto. (...) Então quando a gente faz isso aí, a gente está dando os primeiros exemplos, dá a impressão de que vai ser assim sempre. (...) Eu acho que tem que evitar eles serem induzidos a continuar com essa ideia. (EGC24, 05/05/2017)

Com a experiência das primeiras tarefas propostas, Téo foi apercebendo-se da importância de preparar os alunos para a resolução das tarefas e procurou despertar esta ideia também no grupo. Para exemplificar, ao verificar que os alunos tiveram dificuldades na execução da tarefa sobre Transformações Lineares no semestre 2016/02, no que diz respeito ao uso do GeoGebra, Téo sugere ao grupo:

> Eu queria acrescentar uma coisa, (...) da questão da interatividade, que a gente esperava do trabalho deles [no GeoGebra], eu acho que a gente deveria meio que dar exemplos ao longo do semestre. 'Ah, o GeoGebra é capaz de fazer isso, isto e aquilo'. Para eles já pegarem o hábito de que é esperado no trabalho este tipo de coisa. (EGC16, 15/02/2017)

No semestre 2017/02, O GeoGebra foi sendo inserido desde o início do semestre, seja na resolução de tarefas extra classe pelos alunos, seja pelo professor em sala de aula. Sendo assim, ao propor novamente a tarefa sobre Transformações Lineares, com as devidas reformulações, os alunos já estavam familiarizados com o software e suas potencialidades.

7.3.5. Materiais didáticos

Antes de participar no grupo de trabalho, Téo recorria em suas aulas de Álgebra Linear apenas ao quadro e giz e, para o estudo extra classe, costumava indicar aos alunos vídeos-aula relacionados com os tópicos que estavam sendo abordados na disciplina, bem como softwares com os quais eles poderiam explorar e/ou conferir alguns cálculos.

> [Utilizo] quadro e giz. Mas nas listas de exercícios mencionei softwares que façam cálculos com matrizes, resolução de sistemas, como por exemplo, Wolframalpha, Octave e Matlab. [Tais softwares] auxiliam para fazer contas rápidas, assim como conferir os cálculos. Mas durante as aulas não tem sido usado. Eu gostaria de estar usando mais, mas ainda não estou conseguindo. (...) Por exemplo, na semana antes da prova, quando estava vendo sistemas, indiquei vídeos-aula que eu estava assistindo, pelo menos três canais diferentes, enviei o link pelo SIGA [sistema acadêmico] para eles assistirem e

> darem uma revisada, e até mesmo para aprender. Mas não foi durante a aula [o uso de vídeos]. (EG)

Na sua perspetiva, o acesso a diferentes fontes permite ampliar a visão dos alunos sobre o conteúdo, permitindo que façam comparações e estabeleçam relações entre os tópicos de Álgebra Linear ou com outros contextos.

> Sem me referir necessariamente a esses materiais em específico, mas o facto de você aluno ter contacto com duas ou mais visões diferentes daquilo que você está tentando aprender, às vezes acho que você extrai melhor a essência do negócio, qual é a ideia central, o que você realmente tem que saber e quais são os detalhes que um autor ou outro estão dando enfoque, você consegue comparar as abordagens e fazer uns links mais interessantes com outras coisas que você já viu, ideias de outro contexto. Existe a possibilidade de comparar. (EG)

Por outro lado, ao indicar apenas alguns recursos aos alunos e de não os integrar nas atividades fazia com que a exploração dependesse do interesse individual de cada aluno.

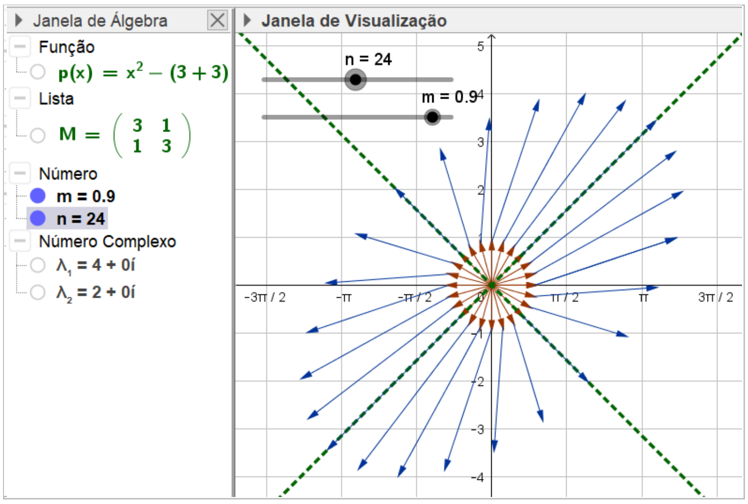
Ao integrar o grupo de trabalho, Téo passou a utilizar alguns recursos no seu ensino de Álgebra Linear. Ao longo de um ano, propôs duas tarefas avaliativas distintas mediadas pelo GeoGebra para serem realizadas extra classe, sendo uma delas replicada em dois semestres. Em sala de aula, aos poucos o computador foi-se tornando um 'aliado' de Téo, passando a fazer parte das suas aulas. Utilizava este recurso para projetar os enunciados das tarefas, no sentido de facilitar os momentos de discussão sobre as resoluções dos alunos, e para recorrer ao GeoGebra durantes as aulas para explorar a interpretação geométrica dos conceitos.

> Em sala de aula acabo utilizando mais para mostrar as coisas, para que visualizem propriedades que eu estou discutindo algebricamente, para fazer essa relação entre a teoria e a parte geométrica. Não tenho feito tantos questionamentos e esperado que respondam o que estão observando, por exemplo. Não que eu não tente. Eu tentei fazer isso em Mudança de Base, por exemplo. Ao final, acabei mais mostrando e explicando. No momento da exploração eu não tive tanto *feedback* deles, e ficou mais uma exibição de como é. Eles não interagiram tanto. (EGC28, 02/06/2017)

Téo levanta uma problemática que é a falta de hábito dos alunos com as aulas envolvendo uma dinâmica diferente, como ocorreu na aula em que procurou discutir uma tarefa resolvida pelos alunos sobre Mudança de Base, em que tentou intermediar a discussão das respostas, bem como a retirada de conclusões com o auxílio do GeoGebra. Os alunos acabaram por assumir uma postura passiva, esperando que o professor fizesse os questionamentos e ele próprio retirasse as conclusões.

Ao longo da Secção 7.4 será evidenciado detalhadamente como Téo dinamizou sua prática mediada pela tecnologia, em algumas atividades planificadas no grupo. Aqui procuro dar a conhecer outros materiais desenvolvidos por Téo, como dois aplicativos construídos no Geogebra e partilhadas por ele, que os utilizou para ensinar os tópicos Autovalores e Autovetores e Diagonalização de Operadores lineares, respetivamente. A primeira construção, representada na Figura 12, surgiu de uma discussão no grupo acerca de como introduzir a definição de Autovalor e Autovetor ainda no semestre 2016/02.

Figura 12. Aplicativo construído no GeoGebra para explorar o conceito de Autovalores e Autovetores.



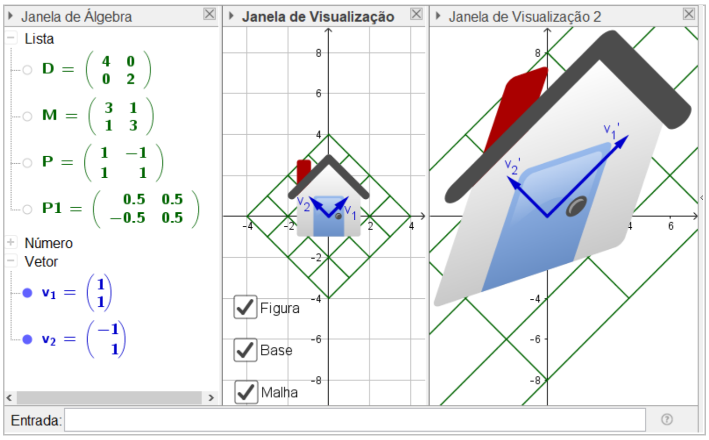
Numa pesquisa em livros de Álgebra Linear encontrou-se, num dos encontros do grupo, uma interpretação geométrica do referido conceito semelhante à da Figura 2, porém de forma estática. Constatou-se que seria inviável fazer uma representação de tal forma no quadro. Motivado pela discussão gerada, Téo implementou tal interpretação de forma dinâmica no GeoGebra. Porém, quando isso aconteceu, a maioria dos professores do grupo já havia introduzido o tópico nas suas turmas. Porém, no semestre 2017/01 voltou-se a discutir como utilizar a referida construção em sala de aula, como ilustra a seguinte transcrição:

> Isso aqui é uma coisinha que a gente pegou do livro do David Paul. (...) Eu peguei a transformação $T(x, y) = (3x + y, y + 3x)$. E essa matriz M quando a gente aplica, no vetor... a gente procuraria ver quais vetores que são levados em múltiplos deles. (...) Estou aumentando o número de vetores no domínio [em vermelho], e mostrando onde é que cada um deles vai parar. Aí para visualizar um pouco melhor quando é que está ficando alinhado e quando é que não está alinhado, eu vou mexer a origem do representante aqui para a ponta do vetor de onde ele saiu, senão começa a ficar um monte de coisas saindo da origem e não dá para entender nada. (EGC27, 26/05/2017)
> Aqui fiz como no livro do David Paul, ele movia o representante do $T(\boldsymbol{u})$ bem na ponta do $\boldsymbol{u}$, e daí estava fácil de visualizar quem estava sendo levado em quem. (...) O que é

esse $m = 0$? É para pegar o representante do $T(\boldsymbol{u})$. Então quando você coloca $m = 1$, você está pegando os representantes, ao invés de pegar o $T(\boldsymbol{u})$ na origem. (...) O n é o número de vetores que você quer que apareça. (...) Sim, coloquei essa matriz M, mas a ideia minha, pelo menos, é testar várias, colocar a rotação, cisalhamento, reflexão. (...) [Téo explica para Nina que faltou ao encontro anterior, como pensamos em inserir o aplicativo na estratégia de ensino] O que a gente falou em fazer na sexta-feira, foi depois de dar a definição, explorar o aplicativo. (EGC28, 02/06/2017)

O outro aplicativo que Téo partilhou com o grupo para ensinar Autovalores e Autovetores é apresentado na Figura 13:

Figura 13. Aplicativo construído no GeoGebra para explorar a interpretação geométrica da Diagonalização de Operadores Lineares.



Téo utilizou tal aplicativo para introduzir a noção de Autovalores e Autovetores fazendo a conexão entre este tópico e a Matriz de uma Transformação Linear, último tópico estudado no capítulo de Transformações Lineares, anterior a Autovalores e Autovetores.

Eu tinha pra passar para eles ainda a relação entre a matriz de um operador numa base α e numa base β, (...) que é aquela equação de semelhança de matrizes $\left[[T]_{\alpha}^{\alpha} = \left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta}\right]$. Eu fiz o enunciado e tentei justificar para eles a propriedade e em seguida eu fui explorar num exemplo específico. Peguei um exemplo específico de $\mathbb{R}^2$. (...) Enquanto eu ligava o computador eu os deixei fazendo a inversa e a conferência da relação e aí eu comentei da possível interpretação do que essa transformação estava fazendo. Porque quando você olha só para a fórmula $(3x + y, x + 3y)$, não dá para ter uma descrição muito direta de que efeito geométrico que ela tem nos vetores do plano, mas quando você olha na figurinha, dá para tirar conclusões. E aí pela interpretação geométrica eu pedi para eles descreverem aqui o que estava sendo feito. Aí depois de muita tentativa e erro alguns falaram que estava esticando numa certa direção, ou que estava duplicando assim, ou aumentando em $3x$ na memsa direção. (...) (A explicação de como abordou continua, mas não cabe colocar aqui). (...) Fiquei feliz que pelo menos um falou: 'Nossa, finalmente alguém explicou o porquê dessas coisas, não é só umas continhas, calcula essa, aquela, tem uma coisa que faz sentido'. A turma parecia que estava reagindo bem. (...) Só deu tempo para falar da definição e da nomenclatura... Não deu para, a partir da definição, resolver um exemplo. Tudo estava voltado para esse exemplo, estava tudo nos cantos do quadro e o Data show estava no meio, então eu apontava para as respostas específicas. (EGC28, 02/06/2017)

Téo procurou dar a conhecer ao grupo de trabalho a sua experiência com o uso do aplicativo que construiu, bem como a reação dos alunos diante da estratégia utilizada. Pelo que refere, apesar de utilizar o aplicativo, procurou criar com a exploração de tal recurso um espaço de discussão e de descoberta.

Importa destacar que para o tópico Autovalores e Autovetores não foi planificado um roteiro de aula comum ao grupo, apenas foi discutido como poderiam ser explorados pelos professores os aplicativos construídos por Téo.

Uma das limitações enfrentadas pelo grupo de professores para a proposição de tarefas em sala de aula, particularmente as mediadas pelo computador, era a questão do tempo que os alunos levam para as resolver que acabava sendo maior do que o estipulado, às vezes comprometendo o tempo destinado para uma prática diferenciada com outros tópicos da disciplina. Relativamente a esta questão, como o computador faz parte das atividades de suas aulas, Téo pensa em otimizar o tempo em sala de aula, nos semestres futuros, utilizando o GeoGebra para fazer cálculos que os alunos já estão familiarizados, e assim poder abrir mais espaço para a interpretação dos resultados ou a implementação de outras estratégias de ensino.

Estou pensando agora, pegar o CAS do GeoGebra e não fazer tanta resolução de sistemas em aula, por exemplo. Caiu no sistema, joga no CAS. Pega a resposta, continua com a matéria, já que ter um computador em sala é uma coisa que meio que está virando um hábito. E tentar otimizar o tempo de algumas coisas. (...) Claro, lá na teoria de sistemas, fazer as contas tudo certinho, mas eu digo mais no restante do conteúdo, quando já é para saberem sistemas, quando essa teoria já é uma ferramenta para o restante. (EGC28, 02/06/2017)

Para além do GeoGebra, Téo indicava aos alunos alguns vídeos relacionados com Álgebra Linear e em momento oportuno procurava comentá-los em sala de aula. A ideia dos vídeos era complementar a formação dos alunos. Entretanto, como Téo não os envolvia em nenhuma tarefa que os 'obrigasse' a assistir os vídeos, nem todos os alunos os acessavam, e quando em sala de aula procurava fazer a conexão entre o conteúdo estudado e os vídeos, a discussão acabava envolvendo mais os alunos familiarizados com os mesmos.

7.3.6. Avaliação

Antes de participar no grupo de trabalho, em todas as disciplinas que lecionava, Téo avaliava as aprendizagens dos seus alunos essencialmente por provas, sendo que em Álgebra Linear eram realizadas quatro ao total num semestre letivo: "Tenho feito as provas, são quatro provas essencialmente. Não estou fazendo correção de listas [de tarefas] e pontuando, por exemplo" (EG). Mesmo não tendo a experiência com um número menor de provas, a perspetiva de Téo no início do trabalho no grupo era de que quatro provas eram mais adequadas do que três, tendo em vista a distribuição do conteúdo para cada prova e para evitar que já numa primeira prova fosse cobrada a parte mais abstrata da disciplina, o que poderia implicar um baixo aproveitamento dos alunos e a desistência precoce da disciplina.

> Ainda não tive a experiência com três provas, mas acredito que teria que cobrar numa única prova [os conteúdos de] Matrizes, Determinantes, Sistemas [Lineares] e Espaços Vetoriais, os alunos já se assustariam na primeira prova com a parte abstrata. Só que com quatro provas a gente não tem folga, a gente passa corrigindo provas. Sem falar que sempre tem as provas de segunda chamada [Prova de reposição aos alunos que justificam ausência na data da prova oficial]. (EGC1, 01/07/2016)

Por outro lado, problematiza que quanto maior o número de provas, maior é o tempo despendido pelo professor com tal atividade em detrimento de outras, como a preparação de aulas, as atividades de pesquisa e extensão.

Neste início de trabalho no grupo, Téo também manifestou a dificuldade em se elaborar as provas de Álgebra Linear de forma que abrangesse todo o conteúdo, mas sem as tornar extensas.

> Uma dificuldade também é elaborar questões independentes uma da outra, porque os conteúdos são dependentes, mas não se pode colocar muita dependência entre os itens de uma questão porque senão o aluno erra alguma coisa no início do primeiro item e compromete a resolução dos demais itens. Então como elaborar uma prova sem torná-la extensa? (EGC1, 01/07/2016)

Téo aponta o cuidado que se deve ter ao elaborar as questões de forma que sejam independentes, embora haja dependência entre os tópicos, no intuito de minimizar o erro dos alunos.

No primeiro semestre de trabalho no grupo, ao contrário dos demais professores do grupo, que consideraram a componente avaliativa com média final igual a $\frac{3\times MP+MT}{4}$ – MP é a média das quatro provas e MT média das tarefas –, Téo manteve a componente avaliativa da disciplina composta apenas pelas quatro provas. Os demais professores realizaram duas tarefas avaliativas, para além das quatro provas. Téo, embora tenha participado da discussão sobre uma primeira tarefa envolvendo uma pesquisa por aplicações contextualizadas de tópicos de Álgebra Linear, decidiu por não a concretizar. Entretanto, concretizou a segunda tarefa elaborada em conjunto no grupo, envolvendo o conteúdo de Transformações Lineares, realizada em duas etapas, uma com recurso ao papel e lápis e a outra com recurso ao computador, a qual será apresentada e discutida na Subsecção 7.4.2. Téo atribuiu a pontuação máxima de 2 valores a esta tarefa, que a considerou como um 'bônus' aos alunos, visto que manteve o peso 10 valores para a prova.

A visão sobre uma avaliação diversificada dos alunos, para além das provas, aos poucos foi-se alterando, como salienta no final do primeiro semestre de trabalho no grupo:

> Outra estratégia em que fiquei interessado depois de ver os relatos do grupo, mas que ainda não explorei, é o uso de trabalhos como parte obrigatória da avaliação, em mais de um momento no semestre e/ou com apresentação dos alunos em sala de aula. (EGR1)

No segundo semestre de trabalho no grupo, Téo adotou o mesmo sistema de avaliação e o mesmo critério para o cálculo da média final utilizado pelos colegas do grupo (mesmo critério do semestre anterior), sendo que, para além das quatro provas, concretizou três tarefas avaliativas. A Figura 14 ilustra um recorte dos diários eletrônicos de Téo onde é possível comparar como mudou o número de avaliações de um semestre para o outro.

Figura 14. Atividades de avaliação das aprendizagens dos alunos promovidas por Téo, respetivamente, em 2016/02 e em 2017/01.

AVALIAÇÕES										MS	EX	MF	FAL	Res
P1	P2	P3	P4											
1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %											
8,10	8,50	8,30	7,50							8,1		8,1	2	APR
6,20	5,00	8,10	5,00							6,1	4,7	5,5	2	APR
7,70	7,50	7,20	8,70							7,8		7,8	2	APR
8,50	2,00	0,50	0,00							2,8	0,0	1,7	6	RN
8,80	9,00	9,20	8,00							8,8		8,8	2	APR
7,20	8,20	8,00	5,50							7,2		7,2	4	APR
9,20	10,00	10,00	7,80							9,3		9,3	0	APR
8,50	4,50	7,10	4,30							6,1	5,7	5,9	2	APR

AVALIAÇÕES										MS	EX	MF	FAL	Res
P1	P2	P3	P4	T1	T2	T3								
1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %								
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00				0,0		0,0	62	RF
4,50	4,50	4,50	3,30	9,00	7,90	7,00				5,1	2,0	3,9	8	RN
5,30	0,00	2,00	0,00	6,00	8,00	7,90				3,2	Ause	1,9	18	RN
7,00	4,60	1,00	0,00	7,50	10,00	7,80				4,5	Ause	2,7	8	RN
5,00	2,50	4,50	7,00	10,00	10,00	9,50				6,0	3,7	5,1	14	APR
8,30	1,60	2,50	3,50	10,00	10,00	7,50				5,3	4,6	5,0	10	APR
8,60	5,70	4,70	6,50	0,00	9,50	9,10				6,3	4,0	5,4	18	APR
6,00	0,00	0,00	0,00	0,00	7,00	0,00				1,7		1,7	42	RF

Téo costumava dar o *feedback* individual aos alunos sobre as provas em sala de aula, sobretudo para aqueles alunos que manifestavam interesse.

> Não costumo resolver a prova no quadro, mas quando surge uma situação relacionada aos erros na prova eu costumo comentar. (...) Levo as provas em sala de aula, eles olham, deixo olhar o gabarito, e se têm dúvidas tanto da correção quanto do conteúdo já esclareço ali mesmo. (...) Como eu disponibilizo o gabarito na minha página, tem alunos que já sabem o que erraram e não querem nem saber de olhar a prova. (EGC28, 02/06/2017)

Em momentos oportunos, quando em sala de aula surgiam situações envolvendo os erros cometidos pelos alunos nas avaliações precedentes, procurava destacá-los e esclarecê-los. Téo também costumava colocar uma questão extra na segunda e terceira prova, referente ao conteúdo da prova anterior, a qual servia de um incentivo para os alunos estudarem novamente o conteúdo, esclarecerem as dúvidas ainda existentes, aprenderem a partir dos seus erros e recuperarem parcialmente a nota:

> Eu pretendo pôr na terceira prova uma questão que vai valer ponto para somar na da anterior para quem se dê o trabalho de revisar os conceitos e ganhar o pontinho que precisava para melhorar a nota. (EGC26, 19/05/2017)
>
> Eu pus uma extra, da prova anterior. (...) Que é a questão que eles não tinham feito na outra prova. (...) Eu falei: 'Foquem nas [questões] desse conteúdo de agora, se sobrar tempo vocês olhem para a questão da prova anterior'. (...) Eu sei que alguns depois de muito tempo pensando nas questões da prova 3 mesmo, desistiram e foram pensar na [questão] da anterior. Pus a pontuação para contar na anterior. Porque estava tudo baixo, a média 3. (...) Vocês acham que era melhor, por exemplo, ter avisado já quando lancei a nota da segunda prova, que na próxima prova vai ter uma dessas questões passadas? (EGC28, 02/06/2017)

Téo já tinha esta prática antes de participar do grupo, porém não avisava os alunos sobre esta questão extra, era um bônus apenas para aqueles alunos que se tinham esforçado para recuperar aquele conteúdo em que apresentaram dificuldade na prova anterior. Ao expor esta prática ao grupo, foi-lhe sugerido que avisasse os alunos para que todos se sentissem desafiados a ultrapassar as suas dificuldades.

7.4. A prática de Téo no ensino de Álgebra Linear

Na procura de ilustrar a prática de Téo no ensino de Álgebra Linear durante o período de tempo em que integrou o grupo de trabalho, enquadrou-se essa prática em duas vertentes, uma que se relaciona mais estritamente ao ensino de tópicos de Álgebra Linear e outra que lhe é integrante ao incidir sobre tarefas de avaliação das aprendizagens dos alunos.

7.4.1. Ensino de tópicos de Álgebra Linear

Os tópicos de Álgebra Linear que são objeto de análise e de interpretação da prática letiva de Téo são 'Coordenadas e Mudança de Base' e 'Introdução a Espaços Vetoriais'. Cada um destes tópicos é organizado em torno de três fases: Fase prospetiva (Preparação de aulas); Fase interativa (Prática na sala de aula); e Fase retrospetiva (Reflexão sobre as aulas).

7.4.1.1. Coordenadas e Mudança de Base

Preparação de aulas

Ao descrever a forma como ensinava Mudança de Base, Téo revela que no semestre anterior (2016/01) procurou motivar os alunos para o estudo deste tópico a partir de um problema que envolve o reconhecimento de uma curva cônica, utilizando uma mudança de referencial adequada, tendo em vista que no referencial da base canônica esse reconhecimento não seria simples. Seguiu-se a dedução da matriz mudança de base para um espaço vetorial qualquer de dimensão finita, tal como explica:

> Eu iniciei com um exemplo envolvendo cônicas. Peguei uma equação de segundo grau, que seria uma elipse rotacionada [$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$], e mostrei, essencialmente, que se eu estivesse usando os eixos coordenados passando pelos eixos da elipse, ao invés dos eixos x e y usuais, (...) conseguiríamos uma outra equação, digamos, de variáveis u e v, mais no formato da Geometria Analítica, onde a gente consegue analisar a excentricidade, focos, vértices, olhando para dados da equação. Então eu peguei esse exemplo específico, já escolhi de antemão quais seriam as posições desses eixos, para ficar com $45°$ e não ser muito difícil de fazer a mudança de base. Aí quando fazia na equação original a substituição de variáveis, ela ficava com essa forma tradicional $\left[\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1\right]$, centrada na origem, sem o termo xy. Depois comentei que dava para representar a associação entre as variáveis usando a notação matricial. Após isso é que eu fiz a demonstração de como chega na matriz mudança de base, do jeito tradicional. Peguei duas bases genéricas, falei que um vetor poderia ser escrito nas duas [bases], aí um dos vetores da base podia ser escrito como combinação da outra [base], fui fazendo demonstração até chegar na matriz. (EGC6, 16/09/2016)

A ideia de Téo consistiu em trabalhar com um problema da Geometria Analítica, familiar aos alunos, mas que não era contemplado no conteúdo programático da disciplina (só contempla o estudo da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados), e mostrar aos alunos que a mudança de base está associada a uma mudança de referencial. Téo procurou conectar o problema com o conhecimento a priori da Geometria Analítica, como também estabelecer a conexão com os tópicos seguintes de Álgebra Linear, como no estudo da 'Diagonalização de operadores lineares', no qual procurou resgatar o problema para apontar as diferenças de o resolver pela mudança de referencial ou utilizando a diagonalização.

> E aí o que está escondido por baixo do pano, que provavelmente eles não percebem, mas é o que facilita o nosso processo, é que a gente já sabe qual é o ângulo que vai dar certo, o quanto você tem que rotacionar para ficar com a equação simplificada. Se eu tivesse rodado $30°$, a equação ia ficar ainda pior, se eu tivesse rodado outro ângulo qualquer, também ficava pior e é nessa escolha do ângulo certo que entraria a

> diagonalização. A diagonalização é para achar o ângulo, mas a mudança de base é que vai fazer realmente essa simplificação [da equação], ou seja, faz a troca para um sistema mais fácil de calcular ou de identificar propriedades. (...) Quando cheguei à parte da diagonalização, relembrei esse exemplo discutido em aula e mencionei que essa parte estava escondida. 'Que ângulo a gente tem que girar? Se eu pegar uma outra equação agora, como é que vai ser? Será que se giro $45°$ de novo desse jeito vai funcionar?' (EGC6, 16/09/2016)

A perceção das dificuldades dos alunos na aprendizagem da Mudança de Base é um aspeto importante para a tomada de decisão de como ensinar tal tópico. Téo reconhece que os alunos entendem o processo de como encontrar a matriz mudança de base, porém manifestam dificuldade de associar o processo à matriz correta $[I]_{\beta}^{\alpha}$ ou $[I]_{\alpha}^{\beta}$ (α e β, bases de um espaço vetorial qualquer) ou em utilizar corretamente as relações de mudança de coordenadas de uma base para outra: $[I]_{\beta}^{\alpha}[\boldsymbol{v}]_{\alpha} = [\boldsymbol{v}]_{\beta}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}[\boldsymbol{v}]_{\beta} = [\boldsymbol{v}]_{\alpha}$. Na sua perspetiva essa dificuldade emerge do facto de os alunos não entenderem o significado dessas matrizes, bem como das relações de mudança de coordenadas associadas a elas.

> Um dos erros comuns para eles é realmente: 'eu quero fazer mudança de base e aí eu faço um monte de conta, acho uma matriz, daí associo à matriz na direção errada. Ou pego o vetor de uma base, transformo para outra, mas usando a matriz errada, deveria ter sido a inversa'. Isso eu vi acontecer em várias provas, [o aluno] não percebe exatamente onde está sendo usada a relação e nem o que ela realmente significa. (EGC6, 16/09/2016)

Reconhece que a notação simbólica utilizada para denotar a matriz mudança de base, que é diferente em diferentes livros, e que por vezes confunde a si mesmo, pode também gerar dificuldades nos alunos, pois não há uma notação padrão na literatura.

> Uma coisa que me confunde até hoje, eu nunca lembro, tenho que dar uma revisada sempre, é que há livros que denotam a matriz de mudança de α para β assim $[I]_{\beta}^{\alpha}$, e outros assim $[I]_{\alpha}^{\beta}$, aí eu nunca lembro qual é qual e qual é a mais usada. (...) Pode ser que os alunos também se deparem com esse material que está invertida a notação e cause alguma estranheza. (EGC6, 16/09/2016)

Tendo em vista as dificuldades dos alunos e dos próprios professores em ensinar tal tópico de forma que os alunos o compreendam, algumas questões eram fruto de discussão no seio do grupo de trabalho durante a planificação do ensino de Mudança de Base: "qual a vantagem de usar matriz mudança de base?"; "como mostrar aos alunos o significado e a importância da mudança de base?"; "como possibilitar aos alunos a compreensão do procedimento utilizado para a construção da matriz mudança de base?” (EGC6, 16/09/2016). Ao apresentar o seu ponto de vista sobre a vantagem de se usar a matriz mudança de base para encontrar as coordenadas de um vetor em relação a uma base, Téo defende que “uma vez encontrada a matriz, qualquer vetor que tiver você consegue achar coordenadas em outra base simplesmente por um produto matricial” (EGC6, 16/09/2016). Na sua conceção, quando se quer encontrar as coordenadas de n vetores, esse processo tem mais vantagens do que seguir um outro caminho que seria “conhecidas as coordenadas de $\boldsymbol{v}$ numa base, encontra $\boldsymbol{v}$, e depois resolve um sistema linear para encontrar as coordenadas numa outra base. Por esse processo teria que resolver um sistema linear por n vezes” (EGC6, 16/09/2016).

No que diz respeito à importância de mudança de base, após ouvir diferentes perspetivas dos colegas sobre problemas que usam a Mudança de Base como ferramenta para os resolver – “um professor da Engenharia Elétrica me disse que utiliza na disciplina de Eletrônica de Potência”; “Eu vi alguma coisa no meu mestrado em Mecânica” (EGC6, 16/09/2016) –, Téo justifica porque introduziu o tema, no semestre anterior, com um problema que era familiar ao nível de um aluno do 2.º semestre de graduação:

> O detalhe é que não estamos preparados para explicar estes problemas e também faltam ferramentas para o aluno entender, porque em geral estão no contexto de disciplinas específicas dos cursos, que necessitam de outros pré-requisitos para o seu entendimento. (...) Em partes, foi por isso que eu acabei pondo esse [exemplo] da elipse, porque já é algo que todos viram. Aliás, se vocês precisarem da parte teórica, depois que já chega lá na diagonalização, no [livro do] ProfMat ele faz umas questõezinhas para aplicação de diagonalização e para análise de cônicas também. (EGC6, 16/09/2016)

Ao indicar uma referência bibliográfica aos colegas, procura incentivar a curiosidade nos colegas em se familiarizarem com a conexão que mencionou fazer entre o problema da elipse que explorou e a diagonalização de matrizes.

Na perceção de Téo fica evidente que nem sempre o significado de um conceito está atrelado à sua aplicação imediata, mas também às possibilidades de trabalhar com a generalização e a compreensão que ela possibilita ao objeto matemático em questão. Essa foi uma das estratégias que utilizou no semestre anterior para explicar o papel da matriz Mudança de Base e a importância de se construir um método que fosse generalista para se encontrar a matriz que faz esse papel, fazendo uma analogia com a mudança entre sistema de coordenadas estudado na Geometria Analítica.

> Uma das analogias que eu comentei, foi que cada espaço vetorial tem mais de uma base, que pode representar os mesmos vetores e a questão é: como é que a gente relaciona a representação [de um vetor] em relação a primeira base e a representação

> em relação a outra base? Na Geometria Analítica, aprendemos a mudar as coordenadas de um ponto de coordenadas polares para cartesianas e vice-versa. Você usa as fórmulas de conversão que vão ter seno, cosseno, coisas trigonométricas, porque não são coisas lineares. Na Álgebra Linear agora, é tudo linear, a conversão é apenas em coordenadas cartesianas e ocorre entre vetores de bases diferentes, e quem faz essa conversão é uma matriz. Mas aqui, como a gente tem uma infinidade de bases, a gente tem uma infinidade de fórmulas para decorar. A gente não quer decorar uma infinidade de fórmulas, a gente quer um procedimento geral, por isso é necessário achar a generalização. É assim, são duas ou três explicações mais ou menos, para você tentar com as três juntas tentar convencer que 'você tem que estudar isso aqui'. Não é nenhuma delas muito convincente por si só, por falta de pré-requisitos, por falta de contexto. (EGC6, 16/09/2016)

Outra questão levantada no grupo incidiu sobre o conteúdo de mudança de base que era ensinado de forma isolada e que no estudo de tópicos subsequentes não era resgatado. A esse respeito Téo apontou uma possibilidade sobre como retomar esta temática no estudo do tópico Matriz de uma Transformação Linear:

> Dá para resgatar quando você dá matriz da transformação e aí, em particular, transformação identidade, ela transforma um vetor nele mesmo. A matriz da transformação identidade, que é a identidade, nada mais é do que a matriz mudança de base na base canônica. (EGC6, 16/09/2016)

Perante a perspetiva levantada por alguns colegas de não trabalhar o tópico Mudança de Base dentro do capítulo de Espaços Vetoriais, mas sim dentro do capítulo de Transformações Lineares, no estudo de Matriz da Transformação Linear, Téo questiona o grupo sobre os ganhos e as perdas no sentido da aprendizagem, quando o aluno vê os tópicos de forma concentrada ou aos poucos, de forma que o professor possa ir resgatando o tópico e estabelecendo novas relações.

> E por outro lado, essa história de não ter a repetição, não é ruim em termos de fixação de conteúdo? Porque, geralmente, quando você vê uma coisa e daqui a um tempo você relembra e faz link com uma coisa nova, isso também ajuda em longo prazo. Aí se você vê uma vez só, tudo junto, aí fique talvez uma carga conceitual bem maior quando você está estudando isso. (EGC6, 16/09/2016)

O grupo concordou com a argumentação de Téo e assim decidiu-se trabalhar com o tópico de Mudança de Base na sequência do tópico Base. Como o reconhecimento do conceito de coordenadas em diferentes representações é fundamental para a compreensão do conceito de Mudança de Base, decidiu-se começar a planificação por este tópico. A prática sobre Coordenadas foi organizada da seguinte forma: Definição de coordenadas; interpretação geométrica; e Teorema da Unicidade das coordenadas de um vetor em relação a uma base e Contextualização. A contextualização envolveu o problema da elipse partilhado por Téo. Na discussão da estratégia de como abordar o problema, ao ouvir a perspetiva de uma colega que referiu que o grupo estava mais preocupado em como resolver a questão para os alunos ao invés de também se preocupar com as estratégias de como envolvê-los na sua resolução, propôs alguns questionamentos que poderiam ser feitos durante a exploração.

> Nesse ponto da matéria você tem duas perguntas. Uma delas é: será que a representação de curvas, por exemplo, em relação a qualquer base, sempre dá o mesmo nível de complexidade para você analisar a curva? E a outra é: se existe uma que fica mais fácil, como é que eu encontro? (...) Será que isso é realmente uma elipse? Como é a equação de uma elipse? O que a gente via em Geometria Analítica? As elipses e as outras cônicas a gente sempre pegava o eixo horizontal paralelo ao eixo da elipse, o vertical paralelo ao outro eixo, então será que agora não é em relação a um eixo inclinado? (...) E os vértices da elipse, como que se encontram? Deixa eles pensarem. (...) Na vez passada eu tentei primeiro fazer um esboço, daí para começar colocando os vetores da base, daí dá para pedir um ponto por onde a elipse passa. O $(1,1)$ da base vai satisfazer a equação. (EGC6, 16/09/2016)

Além da exploração por meio de questionamentos aos alunos, discutiu-se como fazer a conexão entre a questão e a matriz mudança de base. A esse respeito, Téo sugeriu ao grupo como poderia ser tal exploração:

> Entre as perguntas, depois que você já tem essas relações aqui [relações de mudança de variável], poderia estar: represente as equações que você encontrou em notação matricial. Você tem um sistema linear $\begin{cases} x' - y' = \mathrm{x} \\ x' + y' = \mathrm{y} \end{cases}$, que pode ser representado matricialmente por $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Daí pode pedir quem é $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. O vetor $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ nada mais é do que as coordenadas de um vetor qualquer $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ na base β, e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa as coordenadas desse mesmo vetor na base canônica. E aí a matriz é a que faz a mudança de referencial. (EGC6, 16/09/2016)

No encontro do grupo elaboramos o enunciado, discutimos a resolução em conjunto, bem como propusemos outra situação semelhante, para os alunos resolverem em sala de aula, ou extra classe, conforme o tempo disponível. Quanto à abordagem da aula de forma geral, combinou-se que a parte teórica seria de forma 'dialogada' com os alunos, os quais seriam solicitados para resolverem alguns exemplos em sala de aula com posterior discussão. Quanto ao exemplo da elipse a exploração seria dialogada com questionamentos conforme o modelo sugerido por Téo.

Quanto à abordagem do tópico Mudança de Base, a ideia central do grupo não era apresentar a definição tal como ela aparece nos livros didáticos, mas sim formular questões que os levassem a construir o conceito de Mudança de Base. Sendo assim, valorizou-se uma tarefa construída por Tito com questões que exploravam a construção da matriz mudança de base no $\mathbb{R}^2$. Com o intuito de validar o procedimento realizado na tarefa para outras bases do $\mathbb{R}^2$, a ideia era utilizar um aplicativo do GeoGebra proposto por Bruna, no qual era possível explorar as coordenadas de um vetor no plano em diferentes bases, explorando as representações algébrica e geométrica e a conversão entre elas, bem como a matriz mudança de base e, em seguida, fazer a generalização. As seguintes posições de Téo ilustram a elaboração da abordagem do ensino de Mudança de Base.

> Nesse ponto, feita uma atividade como essa, dava para falar: "será que foi por acaso que funcionou assim?" (...) Abre o GeoGebra e mostra que vai funcionar para outros. (...) Você pode mostrar o indutivo e dizer: 'agora vamos deduzir'. 'Vamos mostrar que isso vale sempre'. (...) A ideia agora é então dar exemplos que o aluno consiga enxergar primeiro isso algebricamente, exploramos visualmente com o GeoGebra, e no final a gente pode fazer a dedução. (...) Acho que pode ser para o caso 3 [sobre a generalização]. Não precisa ser o $\mathbb{R}^3$, pode ser um espaço qualquer com dimensão 3. Você vai pegar uma base genérica com os vetores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$. (EGC6, 16/09/2016)

Com base nas diferentes intervenções dos elementos do grupo construiu-se um roteiro para as aulas de 'Coordenadas' e 'Mudança de Base'. Para esse efeito foram divididas tarefas entre os participantes do grupo: "Téo ficou responsável por digitar a questão sobre a elipse, fazer o gabarito e auxiliar Bruna na adaptação do aplicativo do GeoGebra" (NC, setembro de 2016).

Prática na sala de aula

Foram observadas 5 horas/aula (1 hora/aula = 50 minutos) referentes aos tópicos Coordenadas e Mudança de Base, conforme o Quadro 20.

Quadro 20. Síntese do conteúdo trabalhado em cada aula relacionada com os tópicos de Coordenadas e Mudança de Base

Aulas	Conteúdo
2 horas/aula 100 minutos	– Teorema da Unicidade das coordenadas de um vetor v em relação a uma base de um espaço vetorial. – Definição de Coordenadas. – Exploração de uma situação-problema.
2 horas/aula 100 minutos	– Tarefa para introduzir o conceito de Mudança de Base no $\mathbb{R}^2$ resolvida pelos alunos. – Discussão sobre a resolução da tarefa mediada pelo GeoGebra
1 hora/aula 50 minutos	– Generalização do conceito de Mudança de Base para espaços vetoriais quaisquer.

A turma observada era noturna, com 19 alunos matriculados oriundos de diferentes cursos de Engenharia (Elétrica, Civil e Produção) e de Ciência da Computação, sendo que todos já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear pelo menos uma vez.

Coordenadas

A aula sobre o tópico 'Coordenadas' ocorreu no dia 21/09/2016, no período das 20h50min às 22h30min (2 horas/aula) e estavam presentes 9 alunos. Téo organizou a aula de acordo com o seguinte esquema: (i) Enunciado do Teorema da Unicidade das coordenadas de um vetor v em relação a uma base de um espaço vetorial; (ii) Interpretação do teorema para exemplos particulares no $\mathbb{R}^2$; (iii) Demonstração do teorema; (iv) Definição de coordenadas e exploração da interpretação geométrica; (v) Resolução de um exercício pelos alunos; (iv) Exploração de uma situação-problema envolvendo a equação da elipse e a mudança de referencial.

Téo iniciou a aula relembrando a aula anterior sobre o tópico 'Base', particularmente a última discussão sobre a unicidade da solução quando se escreve um vetor como combinação de vetores de uma base. Para formalizar a discussão enunciou o teorema da unicidade:

> Se $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ é formado por vetores de um espaço vetorial V, então β é uma base de V se, e somente se, cada $v \in V$pode ser escrito de forma única como $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$, com $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, \boldsymbol{n}.$ (OAT1)

Para procurar explicar o que significa a unicidade, propõe que os alunos escrevam um dado vetor do $\mathbb{R}^2$ como combinação linear de três vetores linearmente dependentes (LD's), ou seja, que não formem uma base para o $\mathbb{R}^2$. Téo escreve o problema no quadro para os alunos entenderem o que ele quer dizer e questiona-os quanto às possibilidades de escrever o vetor como combinação dos vetores LD's.

Téo:	Como poderíamos escrever este vetor $[\boldsymbol{v} = (2,2)]$ como combinação linear desta lista de vetores $[\{(1,0), (0,1), (1,1)\}]$? (Não obtém respostas) Quais seriam os coeficientes que eu tenho que colocar na lista de vetores para eu obter o vetor (2,2)?
Aluno3:	$0, 0$ e 2.
Téo:	Pode ser $0, 0$ e 2. Então fica $(2,2) = 0(1,0) + 0(0,1) + 2(1,1)$. E podemos escrever este mesmo vetor como combinação da lista de outras formas? Se sim, quais seriam estas formas? Alguma imediata de visualizar?
Aluno3:	$2, 2$ e 0.
Téo:	Pode ser. Daí fica $(2,2) = 2(1,0) + 2(0,1) + 0(1,1)$. (OAT1)

Em seguida, Téo anota no quadro as duas sugestões de um aluno para a tal combinação linear e as esboça geometricamente. Afirma que se retirar um dos vetores, os outros dois são linearmente independentes (LI's), e, portanto, uma base, logo a combinação linear será única. Porém, neste momento não explora a resolução do exemplo com os vetores LI's. Embora solicite os alunos para participarem apresentando exemplos, não os envolve na interpretação geométrica dos exemplos apresentados nem na retirada de conclusões.

Na sequência do seu ensino, Téo demonstra o teorema de forma expositiva, sem explorar a participação dos alunos e, por sua vez, estes não lhe colocam qualquer questão. Com o intuito de promover a assimilação do teorema, propõe um exemplo envolvendo um espaço vetorial de polinômios:

O conjunto $\beta = \{x^2,\ x + x^2, 1 + x + x^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2 = \{\mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2 \ / \ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}\}$ (Verifique!). Então o vetor $\mathrm{q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$ tem única representação como combinação linear dos vetores de β. Qual é essa representação? (OAT1)

Téo questiona os alunos, mas não dá tempo para eles pensarem, dando ele mesmo a resposta, observando que $\mathrm{q}(x)$ nada mais é do que a soma dos polinômios de β. O facto de só fazer a afirmação e não fazer os cálculos, nem solicitar aos alunos que os fizessem, leva uma aluna a questionar a notação simbólica envolvida na questão:

Aluno1: Posso pegar esse polinômio e colocar como vetor?
Téo: Colocar como vetor, em que sentido?
Aluno1: Colocar $(3, 2, 1)$, fazer matriz para resolver o sistema?
Téo: Até dá, mas daí o que você está fazendo é a conversão das coordenadas que é o que vamos ver logo mais. O que queres dizer é resolver, tomando os coeficientes e ignorar os polinômios $1, x, x^2$que multiplicam esses coeficientes. Você quer dizer tomar os coeficientes de cada polinômio e escrever na forma de vetor?
Aluno1: É.
Téo: Mas a princípio, se olhares a definição do que é esse conjunto de vetores [$\mathcal{P}_2 = \{\mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2 \ / \ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}\}$], e olhares quem são os vetores da base, você precisaria escrever o polinômio $1 + 2x + 3x^2$ como uma combinação linear de x^2, $x + x^2$ e $1 + x + x^2$. (OAT1)

O questionamento do Aluno1 o leva a chamar a atenção de que qualquer polinômio $p(x) = a + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios de β, pois é uma base de $\mathcal{P}_2$. Em seguida, faz a demonstração dessa afirmação e a participação dos alunos se dá oralmente somente no momento de resolver um sistema linear para encontrar os coeficientes da combinação linear, que é um momento que envolve cálculos ao invés de um raciocínio teórico.

Na sequência, apresenta a definição de coordenadas e propõe um exemplo no $\mathbb{R}^2$ com o propósito de encontrar as coordenadas de um mesmo vetor em relação a duas bases distintas. Um aluno apresenta a resposta e Téo a coloca no quadro. O facto de só colocar a resposta, leva outro aluno a intervir na procura de entender os cálculos para chegar à resposta.

Aluno2: Esse 3 e 2, na primeira base, representam a_1 e a_2?
Téo: Sim. Aqui foi por observação que o colega encontrou, mas a rigor você está procurando quem são os valores que ocupam essa posição, um a_1 e a_2, tais que a igualdade $[\mathrm{a}_1(2{,}0) + \mathrm{a}_2(1{,}3) = (8{,}6)]$ fique verdadeira. Esse a_1 e a_2 são duas incógnitas que tens que encontrar.
Aluno2: Daí a forma seria resolvendo um sistema.
Téo: Sim, tem que resolver um sistema linear, que supostamente tem solução única, como vimos no teorema, pois estes vetores formam uma base.
Aluno2: É que para estes vetores está fácil, mas se forem maiores precisaria resolver o sistema. (OAT1)

Ao aperceber-se que para os alunos a transposição entre o conceito e a sua aplicação não é algo tão simples de ser internalizado, Téo representa o sistema para os alunos e procura questioná-los sobre a unicidade da solução e a interpretação geométrica dessa solução: “O que podemos dizer sobre o tipo de solução que vamos encontrar? (...) É única? Por quê?” (OAT1), de forma que os alunos percebam a relação com o teorema da unicidade explorado anteriormente. Além disso, procura questioná-los sobre o significado geométrico das coordenadas a_1 e a_2, explorando a transição da representação algébrica para a geométrica do conceito de coordenadas.

Em seguida, ao propor outro exemplo explorando o mesmo conceito, porém no espaço vetorial P_2, proporciona algum tempo para os alunos pensarem.

Sejam $\mathrm{V} = \mathrm{P}_2$ e $\beta = \{x^2, x + x^2, 1 + x + x^2\}$ e $\gamma = \{3{,}1 + x, x^2\}$ bases de $\mathcal{P}_2$. a) Qual vetor $q(x) \in \mathrm{P}_2$ tem coordenadas $[q]_\beta = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$? b) Quais as coordenadas $[q]_\gamma$? (OAT1)

Ao notar que poucos alunos tentam resolver o exemplo, sem sucesso, e que outros não prestam atenção na aula, procura incentivá-los e auxiliá-los na interpretação por meio de questionamentos: “o que significa a matriz $[q]_\beta = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$? (Não obtém respostas) Qual o papel das coordenadas $1{,}1$ e 2? (Não obtém respostas) Como eu encontro o vetor $q(x)$, se conheço a matriz de coordenadas e conheço a base β?" (OAT1). Por fim, solicita que uma aluna apresente a sua solução no quadro referente a uma segunda etapa do exemplo que solicitava para encontrar as coordenadas $q(x)$ numa outra base dada.

Com o intuito de mostrar que problemas semelhantes ao exemplo anterior podem ser resolvidos utilizando uma matriz (matriz mudança de base) que permite fazer a conversão entre coordenadas de duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial, procura explorar um problema contextualizado.

> Suponha que uma partícula descreve uma trajetória elíptica centrada na origem dada pela equação $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$. Reescreva esta equação na forma padrão em relação a um referencial apoiado nos eixos da elipse sabendo que β ={(1,1), (-1,1)} é uma base para este referencial. (OAT1)

Para resolver a questão, Téo procura resgatar com os alunos o reconhecimento da equação padrão de uma elipse e do seu gráfico, faz um esboço do gráfico dos vetores da base dada no problema e da base canônica. A interpretação e resolução do problema são totalmente centradas em si, sem promover o envolvimento dos alunos. Por fim, Téo procura fazer um link entre o problema apresentado e a Mudança de Base, tema da aula seguinte:

> Na próxima aula vamos ver que a questão de como fazer a transição de uma base para outra de uma forma mais eficiente. Vamos fazer a conversão direta de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Vamos fazer isso para vetores de tamanhos quaisquer. Vamos ver que isso pode ser feito por matrizes. Por exemplo, essas equações de conversão podem ser escritas assim: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Vamos ver que essa matriz [dos coeficientes] é a responsável por fazer essa transição. (OAT1)

Mesmo não tendo feito uma exploração que valorize a atividade dos alunos, o professor procura despertá-los fazendo a conexão entre o problema abordado e a temática da próxima aula.

Mudança de base

A aula sobre o tópico Mudança de Base ocorreu no dia 27/09/2016, no período das 20h 50min às 22h 30min (2 horas/aula) e estavam presentes 14 alunos. Tal aula foi estruturada da seguinte forma: (i) Revisão sobre o teorema da unicidade, sobre a definição de coordenadas e sobre o exemplo da elipse vistos na aula anterior; (ii) Distribuição e resolução de uma tarefa pelos alunos para introduzir de forma intuitiva o conceito de mudança de base; (iii) Exploração da tarefa pelo professor utilizando o GeoGebra; (iv) Discussão mediada pelo professor para retirada de ilações sobre a tarefa.

Téo inicia a aula relembrando o conteúdo explorado na aula anterior, como a definição de coordenadas e o teorema da unicidade das coordenadas de um vetor em relação a uma base. Faz um resumo no quadro com ênfase na notação algébrica. Na procura de motivar os alunos para o tema a ser discutido na aula, resgata o exemplo da elipse para evidenciar que a solução de muitos problemas pode ser simplificada quando se usa uma mudança de base (referencial).

> Na última aula eu coloquei um exemplo em que conhecíamos a curva, porém a equação não estava no formato que conhecíamos da Geometria Analítica, que é com os eixos paralelos aos eixos coordenados. Então, apenas olhando para a equação, a gente não reconhece quem são os comprimentos dos eixos da elipse, então a gente não sabe onde ela vai estar posicionada. No exemplo da aula passada, escolhendo uma base levemente rotacionada, conseguíamos um outro sistema de coordenadas em relação a essa base, na qual, por meio de uma mudança de coordenadas, conseguimos a equação da elipse na forma tradicional. Então, escolher uma base apropriada pode ser uma forma de simplificar determinados problemas. E nessa ideia de simplificar, a gente tem que saber converter coordenadas de um sistema para outro. Essa vai ser essencialmente a discussão da aula de hoje – como transformar coordenadas entre duas bases diferentes, mas para um mesmo vetor. (OAT2)

Na fase subsequente da aula, introduz o conceito de Mudança de Base a partir de uma tarefa proposta aos alunos para realizarem em sala de aula, conforme o Quadro 21.

Quadro 21. Questões da tarefa para introdução do tópico Mudança de Base.

Mudança de Base

Vimos no exemplo da elipse que a construção do gráfico da curva se torna muito simples quando utilizamos um outro referencial que não o determinado por $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$. Vamos ver que a mudança de coordenadas de um referencial para outro pode ser feita através de um produto matricial. Para isso, considere o exemplo:

Considere as bases $\alpha = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ e $\beta = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}\}$, onde $\boldsymbol{u_1} = (1,0)$, $\boldsymbol{u_2} = (1,1)$, $\boldsymbol{w_1} = (-1,1)$ e $\boldsymbol{w_2} = (-1,0)$.

a) Determine as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (1,3)$ em relação à base α e represente geometricamente.
b) Determine as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (1,3)$ em relação a base β e represente geometricamente.
c) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, determine A$[\boldsymbol{v}]_\alpha$.
d) Compare $A\ [\boldsymbol{v}]_\alpha$ e $[\boldsymbol{v}]_\beta$.
e) Calcule as coordenadas de $\boldsymbol{u_1}$ em relação a base β e represente graficamente.
f) Calcule as coordenadas de $\boldsymbol{u_2}$ em relação a base β e represente graficamente.
g) Qual a relação entre os resultados obtidos nos itens e), f) e a matriz A?

Questionamentos:

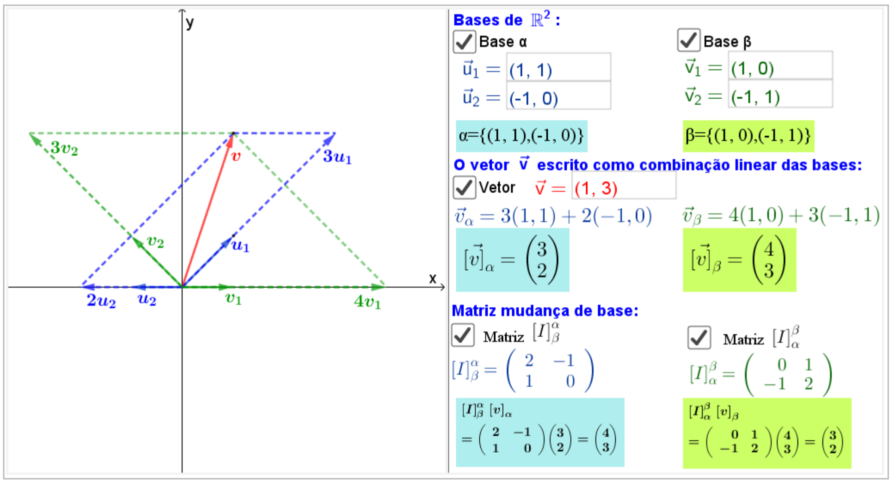
1. Será que o procedimento do exercício funciona para outros casos? Ou seja, se mudarmos as bases α e/ou β, as coordenadas de um vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ vão continuar relacionadas pela equação $A.[\boldsymbol{v}]_\alpha = [\boldsymbol{v}]_\beta$?
2. E se quiséssemos determinar as coordenadas de $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$em relação à base α? Como isso poderia ser feito?

Téo permitiu que os alunos trabalhassem individualmente ou em pares. Inicialmente, oito alunos trabalharam em pares e no decorrer do trabalho outros dois pares se formaram. Além dos alunos receberem as questões da tarefa, Téo usou o Data show para a projetar no quadro e dar as orientações iniciais e, posteriormente, para diligenciar a discussão sobre as questões. Durante a resolução, os alunos solicitaram várias vezes a ajuda do professor, que circulava pela sala e procurava inicialmente atender os alunos de forma individual. As dúvidas iniciais eram em relação à notação e ao enunciado das questões. Era perceptível que os alunos não tinham estudado entre uma aula e outra, como ilustra o diálogo entre o professor e um dos alunos presentes na aula anterior. Inclusive havia cinco alunos que não compareceram na aula anterior e pareciam não se terem inteirado sobre o conteúdo no período entre a aula que faltaram e a aula atual.

> Aluno3: Nessa primeira, é assim?
> Téo: Então, vai pegar esse vetor e escrever como combinação de um múltiplo desse e um múltiplo desse outro.
> Aluno3: Como assim, não entendi.
> Téo: Naquele exemplo ali, peguei uma base qualquer β, de $\boldsymbol{v_1}$ até $\boldsymbol{v_n}$ $[\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}]$, e peguei um vetor qualquer e escrevi $\mathrm{a}_1\boldsymbol{v_1} + \mathrm{a}_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\boldsymbol{v_n}$.
> Aluno3: Então aqui no caso esse é o $\boldsymbol{v}$?
> Téo: $\boldsymbol{v}$ é um parzinho, porque agora estamos no $\mathbb{R}^2$. Então vais pegar esse vetor e escrever igual a $\mathrm{a}_1\boldsymbol{u_1} + \mathrm{a}_2\boldsymbol{u_2}$.
> Aluno3: Assim? Essas são as coordenadas?
> Téo: O que tu fizeste?
> Aluno3: Eu peguei $(1{,}3)$ e fiz essa soma $[\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} = (2{,}1)\ ]$? Então essas são as coordenadas [2 e 1]?
> Téo: O que nós queremos encontrar? Vamos olhar para a definição. O que você quer encontrar é o a_1 que multiplica o primeiro vetor e o a_2 que multiplica o segundo, tal que a soma tenha como resultado o $(1{,}3)$. (OAT2)

Diante da resolução incorreta do aluno, o professor procura resgatar a definição de coordenadas que acabara de revisar no quadro, para que o aluno entenda como fazer a transposição entre a definição formal e o caso particular do $\mathbb{R}^2$ que trata a tarefa. Ao verificar que era uma dificuldade comum dos alunos a representação geométrica referente às duas primeiras questões da tarefa, Téo utiliza o aplicativo do GeoGebra (Figura 15) desenvolvido pelo grupo de trabalho para explicar à turma como fazer a transição da representação algébrica para geométrica, bem como evidenciar o papel das coordenadas de um vetor em relação a uma base. Na sequência faz uma correção rápida e em forma de síntese das questões (c) até (g) utilizando o software, visto que já havia acompanhado a resolução individual dos alunos.

Figura 15. Aplicativo do GeoGebra utilizado por Téo para explorar a tarefa sobre Mudança de Base.



Ao explorar o 'Questionamento 1', solicitou aos alunos que apresentassem outras bases e foi simulando no aplicativo as respostas apresentadas por eles, procurando questioná-los para que eles intuitivamente concluíssem como que a matriz A é construída, independentemente de quem forem as bases α e β, como ilustra o diálogo entre o professor e alunos:

Téo:	Se tivéssemos outras duas bases quaisquer, será que ia continuar tendo a mesma relação? Posso pegar essa mesma matriz obtida com coordenadas de combinações lineares de uma base em relação a outra, formar essas colunas, e usar essa matriz A para fazer a mudança de uma base para outra?
Aluno4:	Inverter os vetores entre as bases?
Téo:	Se eu usasse outros vetores nas bases. Digam vetores para as bases α e β.
Aluno4:	(3,4) e (2,2)
Téo:	Então o que acontece entre essa nova base α e a mesma base β de antes? A questão é, essa matriz é produzida do mesmo jeito que antes? As colunas dessa matriz vêm de onde?
Aluno3:	Vem lá da combinação linear do $\mathbf{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$ na base β.
Téo:	Exatamente. Se eu pego os vetores da base α e escrevo como combinação da base β, vou encontrar os valores que vou colocar em cada coluna. E sobre esta matriz, para essas bases, ela é única ou podem existir outras? De onde surgiram as colunas?
Aluno5:	É que as colunas são a solução daqueles dois sistemas. Acho que é única.
Téo:	Por quê?
Aluno5:	Porque é base.
Téo:	Exatamente. Por causa do teorema da última aula. Se tivesse infinitas soluções é porque os vetores seriam LD's e, portanto, não seria uma base. Como estou com bases essa solução será única e, portanto, terá uma única matriz. (OAT2)

Para que os alunos participassem e respondessem aos seus questionamentos foi necessário que Téo fosse insistente e por muitas vezes refizesse as questões para que estes as compreendessem. Em cima das respostas deles, procurou lançar outras questões que não se apresentavam diretamente na tarefa, como a relacionada com a unicidade da matriz mudança de base. Conforme Téo foi questionando, aos poucos os alunos foram se soltando, participando mais, discutindo entre si e tirando as suas próprias conclusões, como aconteceu no debate do segundo Questionamento:

Téo: Então se você pega qualquer vetor $\boldsymbol{v}$, a forma de encontrar ele em relação a essas duas bases vai estar relacionada por essa matriz. Fixadas essas duas bases tem uma matriz que relaciona de um lado para outro, certo? Mas e para voltar? Se eu soubesse quem é $[\boldsymbol{v}]_\beta$, como eu encontraria $[\boldsymbol{v}]_\alpha$?

Aluno3: Tem que fazer esse como combinação linear do $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$, na base β.

Aluno5: Acho que é na base α.

Aluno3: Não, né?

Téo: α ou β?

Aluno3: É o caminho de volta, né? Vou pegar o vetor definido aí. Vou fazer uma combinação linear da base β, dos vetores $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$. Daí vai dar a matriz de mudança de base, no caso da base β para α.

Aluno5: Não. Pega os vetores $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$ e faz combinação dos de α.

Téo: Exato. O que fizemos antes para encontrar a matriz que muda de α para β? Escrevemos os vetores de α como combinação dos de β. Agora queremos o contrário, como E falou.

Aluno3: Ah, então para achar $[\boldsymbol{v}]_\alpha$, monto a matriz, fazendo $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$, como combinação de $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$, e depois multiplico por $[\boldsymbol{v}]_\beta$. É isso né?

Téo: Exato. (OAT2)

Para além dos questionamentos apresentados na tarefa, Téo lança outras questões com o intuito de envolver os alunos a refletir sobre a finalidade de se encontrar a matriz mudança de base: "E qual seria a vantagem de ter a matriz? Como isso facilitaria o processo? Porque para achar ela deu um pouco de trabalho, tivemos que resolver dois sistemas lineares. Que vantagem tem encontrar essa matriz?" (OAT2). Perante a ausência de respostas dos alunos, Téo utiliza no GeoGebra duas bases fixas e simula a mudança de coordenadas para diferentes vetores, para os alunos perceberem que "uma vez encontrada a matriz, pode-se fazer inúmeras mudanças entre as coordenadas de um referencial para outro, bastando conhecer as coordenadas em relação a um referencial [base] e fazendo um produto matricial" (OAT2). Téo também procura comparar o papel da matriz mudança de base, com a Geometria Analítica, quando se muda de um sistema de coordenadas para outro de modo a simplificar uma equação:

> Compare esta situação com o contexto de Geometria Analítica quando vocês têm coordenadas cilíndricas, esféricas e cartesianas. Daí para mudar de um sistema para outro, não é um produto matricial, são um conjunto de equações envolvendo seno,

> cosseno... Uma vez que você tem duas bases escolhidas, é como se tivesse um sistema de coordenadas cartesianas e um sistema de coordenadas esféricas, por exemplo, e agora você tem que transitar de um sistema de coordenadas para outro. Só que aqui a transição vai ser feita por essas matrizes. (OAT2)

Com o propósito de serem os alunos a identificar que as matrizes $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$ são inversas uma da outra, Téo questiona:

> E qual a relação entre essas duas matrizes? A primeira que faz a transição de α para β, e a segunda de β para α? O que tem a ver uma com a outra? (...) Vocês encontraram a primeira matriz, certo? E a segunda, fizeram no braço? (OAT2)

Ao perceber que os alunos olham para casos particulares e apresentam respostas, como "uma é a transposta da outra"; "tem as colunas trocadas"; "a diagonal principal invertia os valores"; "a matriz de baixo $\left[[I]_{\alpha}^{\beta}\right]$ é duas vezes a de cima $\left[[I]_{\beta}^{\alpha}\right]$" (OAT2), o professor altera as bases no aplicativo do GeoGebra para ver que tais padrões observados não se mantêm para todas as matrizes. Ao insistir com a questão, a resposta de um aluno vai ao encontro do esperado:

> Téo: Se você conhece a matriz que faz a transição num sentido, o que você faz com essa matriz para encontrar a que faz a transição no sentido contrário?
> Aluno5: Seria a inversa?
> Téo: A inversa é que vai fazer a transição no sentido contrário. Porque sempre vai ser inversível?
> Aluno5: Porque as colunas são LI's. (OAT2)

Téo aproveita um exemplo anterior de um aluno que citou equivocadamente um conjunto LD como uma base, para mostrar que a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$ não era inversível e que o software falhava ao tentar encontrar a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

Para sumarizar a discussão sobre as questões da tarefa, Téo anota no quadro algumas conclusões: a definição das matrizes $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e como elas são construídas; a propriedade que tais matrizes são a inversa uma da outra; e as relações de transição entre uma base e outra, $[I]_{\beta}^{\alpha}[\boldsymbol{v}]_{\alpha} = [\boldsymbol{v}]_{\beta}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}[\boldsymbol{v}]_{\beta} = [\boldsymbol{v}]_{\alpha}$. Procurou esclarecer que a notação que utilizou para a matriz mudança de base não é única e que nos livros aparecem outras notações, e que "o importante é saber de que base para que base se está fazendo a transição" (OAT2). Téo finaliza esclarecendo que foram tiradas conclusões de forma intuitiva para o $\mathbb{R}^2$ e que na aula seguinte mostraria que as conclusões seriam válidas para qualquer espaço vetorial. Para encerrar a aula, retoma o exemplo da elipse, em particular as equações de conversão de um referencial para outro, e as escreve matricialmente identificando a relação existente: $[I]_{\alpha}^{\beta}[\boldsymbol{v}]_{\beta} = [\boldsymbol{v}]_{\alpha}$. Por fim propõe um exemplo semelhante para os alunos resolverem em casa.

Generalização da Mudança de Base

Nesta aula, que aconteceu no dia 28/09/2016, observei apenas 1 hora/aula, que correspondia ao conteúdo planificado no grupo, e que faltou tempo para Téo o abordar na aula anterior. Estavam presentes 12 alunos de um total de 19 matriculados.

Téo inicia a aula resgatando e sumarizando, de forma oral e com algumas anotações no quadro, o que fora desenvolvido na aula anterior, e em seguida apresenta o objetivo da aula: generalizar o processo de mudança das coordenadas de um vetor $\boldsymbol{v}$ de um espaço vetorial V em relação a duas bases distintas α e β desse mesmo espaço vetorial.

> Hoje nós vamos fechar a discussão que estávamos fazendo sobre a Mudança de Base. Estávamos explorando alguns exemplos no $\mathbb{R}^2$, onde pegávamos um par de bases, dois conjuntos LI's que geram qualquer elemento do $\mathbb{R}^2$, e comparávamos as coordenadas de um vetor qualquer do plano em relação a essas duas bases. Vimos que fixadas duas bases quaisquer conseguíamos associar as coordenadas em relação a uma das bases com as coordenadas da outra base por meio de uma matriz. Fazíamos uma multiplicação matricial, a qual permitia transitar de uma base para outra. Se eu ia de uma base α para uma base β, usava a matriz que denotamos por $[I]_{\beta}^{\alpha}$, e usava a sua inversa, $[I]_{\alpha}^{\beta}$, para fazer a conversão de coordenadas no sentido contrário. Vou fazer o cálculo que está por trás daquele padrão que conhecemos no experimento que fizemos, para vermos que sempre vai aparecer uma multiplicação matricial para fazer a conversão de uma base para outra. (OAT3)

Na sequência, deduz de forma genérica para um espaço vetorial bidimensional qualquer a matriz mudança de base, bem como a relação $[I]_{\beta}^{\alpha}[\boldsymbol{v}]_{\alpha} = [\boldsymbol{v}]_{\beta}$ e propõe, como tarefa extra classe, para os alunos encontrarem a relação $[I]_{\alpha}^{\beta}[\boldsymbol{v}]_{\beta} = [\boldsymbol{v}]_{\alpha}$. A demonstração é feita totalmente de forma expositiva, sem participação dos alunos. Na sequência da aula resolve exemplos referentes a este conteúdo, bem como outros de revisão do capítulo de Espaços Vetoriais, pois esta era a última aula referente a tal tópico.

Reflexão sobre as aulas

Ao analisar a sua ação sobre o tópico 'Coordenadas', Téo manifestou o sentimento de que os alunos não se sentiram à vontade com a filmagem da aula, pois participaram menos do que em outras aulas:

> Eu tenho a impressão que, pelo contrário [dos alunos da Lisa que foram mais participativos], os meus ficaram acanhados com a filmagem. Eles falaram um pouco, comentaram algumas coisas, mas acho que foi um pouco menos do que nas situações não gravadas. Em parte, talvez porque a metade chegou depois que a aula havia iniciado, já estava tudo lá e não viram a conversa inicial. Além disso, quando comentamos, na véspera, sobre a observação e filmagem nem todos estavam presentes. (EGC7, 23/09/2016)

Como a planificação das aulas de 'Coordenadas e Mudança de Base', bem como a decisão pela observação, aconteceram na semana precedente, e as aulas de Álgebra Linear desta turma aconteciam em dois dias seguidos (terça e quarta), só foi possível conversar com eles sobre a observação na véspera (terça), quando nem todos os alunos estavam presentes. A participação dos alunos foi tímida, o que indicia dever-se à sua desmotivação pela disciplina.

> Eles estavam inibidos, mas ele [Téo] tem poucos alunos, e além de que vários faltaram, outros chegaram atrasados. Já haviam passados 40 minutos do início da aula e ainda havia aluno chegando. (...) Observei que alguns alunos ficavam mexendo no telemóvel ou estudando para outra disciplina, nem sequer olhavam para o quadro, e já são poucos alunos, então, o Téo tem um grande desafio pela frente para estimular esses alunos. (Investigadora, EGC7, 23/09/2016)

Téo reconhece esse desafio de os envolver na aula, tanto para os ajudar a ultrapassar as suas dificuldades como para os motivar na aprendizagem da disciplina:

> Pois é, teve alguns que fizeram [a disciplina] várias vezes, então esses estavam participando bem porque eles já têm uma noção. Tem um aluno, o C, ele fez Álgebra Linear comigo semestre passado, e acho que tinha feito mais vezes também. Ele está se esforçando, mas tem dificuldade em algumas coisas, na primeira prova ele não foi muito bem não. (...) Ainda não é natural para mim, chamar a atenção deles para participarem. Acho que ainda eu vou meio que no automático. (EGC7, 23/09/2016)

Relativamente ao conteúdo abordado, Téo manifestou um sentimento de insatisfação com o segundo exemplo que selecionou, algo que não foi debatido no grupo de trabalho, para resolver envolvendo polinômios logo após a definição de Coordenadas, por considerar que não lhe permitiu fazer muitas considerações sobre o conteúdo.

> Em termos do conteúdo, eu acho que um dos exemplos que peguei, não ficou muito interessante. Eram dadas as coordenadas de um vetor numa base, você acha quem é o vetor, e você acha as coordenadas desse vetor numa outra base. Acho que o exemplo que eu escolhi para fazer isso poderia ter sido um pouco mais elaborado. (...) Depois que eu vi lá, não gostei muito do exemplo, não deu para explorar muita coisa naquela questão específica. (EGC7, 23/09/2016)

Este foi o único exemplo que, na referida aula, Téo deixou um tempo para os alunos pensarem sozinhos e que, diante da dificuldade em apresentarem uma solução, resolveu um dos itens no quadro e solicitou que uma aluna apresentasse à turma a solução do outro item. Relativamente à ação de solicitar a aluna para ir ao quadro, Téo não se sentiu muito confortável, visto que não era um hábito seu atender a tal procedimento nas suas aulas. No entanto, ao observar a falta de etapas na resolução dada pela aluna, problematiza a sua prática ao aperceber-se que ao invés de explorar tal resolução apontou à turma como resolver, perdendo a oportunidade de identificar se os alunos compreenderam ou se estavam apenas seguindo um processo.

> Ainda não tenho hábito de solicitar a eles para fazer coisas no quadro, de pedir para o aluno ir ao quadro e explorar o que o aluno faz, não ficou muito natural. (...) E ela [a aluna] estava querendo resolver direto com a matriz do sistema que surgiria depois, após comparar as coordenadas que aparecem como coeficiente do 1, do x, do x^2. Ela estava dando um salto, pulando uma etapa, e eu logo fui apontando o caminho por onde ela devia começar. Eu poderia ter explorado mais em cima da resolução dela, por exemplo, ter questionado de onde surgiu a matriz do sistema, até para os outros alunos perceberem. Porque esse tipo de coisa os alunos fazem, pulam etapas, e na correção de uma prova você nunca sabe se eles sabiam o que estavam fazendo ou fizeram mecanicamente. (EGC7, 23/09/2016)

Ao refletir sobre a abordagem da situação-problema que envolvia a mudança de referencial para encontrar a equação padrão de uma elipse rotacionada, com a qual se objetivava despertar nos alunos o interesse para o estudo do tópico Mudança de Base, Téo revelou que centrou a explicação mais em si: “Eu acho que quando eu comecei a fazer esse exemplo, eu meio que desliguei um pouco do *feedback* deles” (EGC7, 23/09/2016). Como já explicitado, foi Téo quem apresentou ao grupo de trabalho tal situação–problema, a qual tinha explorado no semestre anterior nas três turmas que lecionara. Infere que em tal ocasião, em pelo menos uma das turmas, procurou envolver mais os alunos na discussão do problema do que nesta vez: “Eu tenho a impressão que na primeira vez que comentei este tipo de exemplo, fiz melhor e consegui interagir mais com uma das turmas pelo menos" (EGC7, 23/09/2016). Téo concordou com Lisa, Nina e Bruna de que tal postura mais centrada na sua atividade na exploração de tal questão pode dever-se ao desconforto que sentiu com a observação e filmagem da aula.

Como Téo não apontou as alterações que fez em relação ao roteiro da aula planificado no grupo de trabalho, procurei destacar ao grupo de trabalho um ponto que, na minha perspetiva, contribuiu para auxiliar a compreensão do teorema da unicidade:

> Como alguns de nós ainda não deram essa aula, eu gostaria de destacar uma ideia interessante que o Téo fez, para abordar o teorema da unicidade. Por que o que diz o teorema? Quando escreve vetores como combinação linear de vetores de uma base, essa combinação é única. (...) O que ele fez foi enunciar o teorema e, antes de demonstrá-lo, propôs um exercício: pegou um conjunto C que não vai ser uma base para $\mathbb{R}^2$ e questionou 'De quantas formas eu posso escrever esse vetor como combinação desses três vetores?' E perguntou aos alunos e eles exemplificaram umas duas formas. Daí comentou: 'Então olha só, você está escrevendo um vetor com uma combinação de vetores que não são de uma base, tem infinitas formas. Então, quando você vai escrever como combinação de uma base, o que preciso provar no teorema? Que essa forma é única'. Achei que essa ligação ficou interessante para os alunos entenderem que se não for base a solução não é única. E eles podem entender que o teorema é a generalização dessa ideia. (Investigadora, EGC7, 23/09/2016)

O grupo considerou pertinente a forma como Téo trabalhou e sugeriu ainda que, no exemplo proposto por Téo, se trabalhasse com um conjunto LD e com um LI. Téo verificou com os alunos que um dado vetor do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de três vetores LD's de infinitas formas e afirmou que para ser de uma única forma os vetores deveriam formar uma base para o $\mathbb{R}^2$, e logo partiu para a demonstração dessa afirmação. A ideia que surgiu no grupo de trabalho induziu os alunos a tirarem intuitivamente tal conclusão. Dessa forma, foram feitas alterações no roteiro da aula com as contribuições de Téo e com o que surgiu do grupo de trabalho na discussão. Posteriormente, quando outros professores concretizaram esta aula, houve novas contribuições para aprimorar o roteiro da aula.

Relativamente à tarefa introdutória sobre Mudança de Base, realizada na segunda aula, Téo não notou problemas quanto à elaboração das questões durante a sua concretização, apenas referiu que os alunos demoraram mais tempo para realizar a tarefa do que o imaginado. Um colega do grupo de trabalho sugeriu que numa próxima vez deveriam solicitar aos alunos a resolução da tarefa em casa e só fazer a discussão em sala de aula, como uma solução para otimizar o tempo. Téo considera que resolver a tarefa na aula pode motivar os alunos menos comprometidos a trabalhar, enquanto se deixasse para casa haveria o risco de não fazerem ou apenas copiarem dos colegas.

> Em relação à tarefa não tenho sugestões, acho que as questões eram bem objetivas. Mais é a questão do tempo, eles gastaram muito tempo na atividade durante a aula. (...) Quando é na sala de aula, os desinteressados fazem também. Percebi que tinha aluno meu que nunca abre o caderno estava tentando fazer. O aluno interessado vai fazer de qualquer jeito, seja na sala, seja em casa. Agora os desinteressados em casa não vão fazer, com certeza, o máximo que eles vão fazer é pegar de alguém e copiar. (EGC8, 07/10/2016)

Téo complementa ainda que a realização da tarefa em sala de aula lhe oportunizou identificar as dificuldades dos alunos: "Foi produtivo para eu poder ter um pouco dessas dúvidas básicas, conceituais, que aparecem ali. Do jeito que eles perguntam você percebe que não tem segurança nenhuma em alguns conceitos bem elementares" (EGC8, 07/10/2016). Apercebendo-se das dificuldades, além de procurar esclarecê-las individualmente, procurou retomá-las na discussão da tarefa mediada pelo aplicativo do GeoGebra. Reconhece que na exploração do GeoGebra evidenciou a sua atividade em detrimento da dos alunos, com o foco nas dificuldades que emergiram e na sintetização do conteúdo envolvido. Já no segundo momento em que trabalhou as questões 1 e 2 (Quadro 21) que levariam a tirar as conclusões a que objetivava a tarefa, refere que conseguiu envolvê-los mais na discussão:

> No início com o GeoGebra [os alunos] não interagiram tanto. Acabei focando mais na explicação e interpretação geométrica, pelas dúvidas que já tinham surgido quando eu circulava pela sala. Já na discussão das duas perguntinhas consegui explorar melhor essa parte da participação deles, acho que eles participaram bem. (EGC8, 07/10/2016)

Quanto à possibilidade levantada no grupo de trabalho de numa próxima vez, ao propor a tarefa, também disponibilizar o aplicativo para os alunos utilizarem simultaneamente, Téo sugeriu que tal aula poderia ser realizada num laboratório de informática. Na sua perspetiva, o uso do aplicativo pelos alunos durante a resolução da tarefa pode contribuir para enriquecer as discussões, tendo em vista que os alunos podem testar diferentes bases e se concentrar na interpretação dos cálculos.

> Ter os comentários enquanto você está interagindo com o software, dá para pegar alguma coisa deles, é interessante fazer isso. Eu acho que funcionaria talvez o uso do laboratório, como sugeriu a Nina. Até porque certamente alguém vai pôr um número lá que vai dar um negócio inesperado e aí vai gerar mais discussão. Acho que pode levantar mais discussões porque é diferente um aluno testar do que ele ver o professor fazendo. (EGC8, 07/10/2016)

Ao analisar a contribuição da tarefa introdutória para a compreensão da demonstração da generalização da Mudança de Base para espaços vetoriais quaisquer (3.ª aula), a ilação que Téo retira é que a demonstração ocorreu de forma mais natural, pois os alunos já estavam familiarizados com o conceito, comparado com o semestre anterior em que introduziu o conceito diretamente de forma genérica.

> E na hora da generalização eu senti que eles acompanharam melhor do que no outro semestre. É que eu acho que eles já sabiam onde ia chegar. Então foi meio que natural para eles. Mas não vi eles empolgados no sentido de: 'Ah então isso funciona para todo caso'. Foi só mais uma demonstração, mas de algo que já tinham a noção do que era. (...) Eu fiz dois exercícios, um com polinômios e um no $\mathbb{R}^3$. Eles iam me dizendo o que era para fazer, então deu para perceber que eles sabiam. (EGC8, 07/10/2016)

Síntese

No encontro de discussão e planificação sobre o ensino de 'Coordenadas' e 'Mudança de Base', Téo partilha a sua experiência sobre o ensino de tais tópicos, realçando a resolução de um problema contextualizado que explorou com o intuito de motivar os alunos para a aprendizagem de Mudança de Base. Téo explica o problema ao grupo de trabalho, auxilia a resolução conjunta, apresenta sugestões de questionamentos que poderiam ser feitos aos alunos para sua exploração e de como o problema poderia ser resgatado posteriormente no ensino de Diagonalização de Operadores Lineares. Apesar de procurar motivar os alunos com um problema contextualizado, a sua abordagem do conceito de Mudança de Base era similar ao que a maioria dos livros faz e como os professores do grupo faziam: partia da dedução da generalização da mudança de base para espaços vetoriais quaisquer e depois resolvia exercícios que exploravam o procedimento de encontrar a matriz. O grupo de trabalho desafiou-se a elaborar uma estratégia de ensino em que se trabalhasse a contextualização, se explorasse as representações algébrica e geométrica dos conceitos envolvidos, se construísse a generalização da Mudança de Base para um espaço vetorial qualquer e que os alunos se envolvessem nas atividades da aula, de modo a entenderem o processo e fugirem à mecanização, o que na perspetiva do grupo de trabalho poderia minimizar alguns erros causados por essa falta de uma maior compreensão do conteúdo.

A postura que Téo assumiu na discussão da estratégia de ensino reflete uma conceção de ensino que valoriza sobretudo a atividade do professor em detrimento da do aluno, embora quando no grupo de trabalho se discute o envolvimento dos alunos aponte caminhos para a exploração do problema contextualizado, que foi a sua contribuição direta para a construção da estratégia. Também revelou bastante preocupação com o conteúdo e procurou problematizar algumas questões levantadas por colegas, como, por exemplo, a possibilidade de trabalhar a Mudança de Base em conjunto com

Transformações Lineares. De forma geral, na reunião de planificação manteve uma característica que é comum em si, de primeiro ouvir para depois falar, sendo que as suas intervenções ocorreram mais em cima do discurso dos colegas do que sobre a tomada de decisões sobre a construção do roteiro das aulas.

As aulas de Téo foram organizadas em três fases bem claras: (i) Início – inicia a aula resgatando os temas principais da aula anterior e que são pré-requisitos para a aula que se inicia, e expondo os objetivos para a aula; (ii) Desenvolvimento – desenvolve os conteúdos, propõe exemplos e tarefas de forma que haja um link entre eles; e (iii) Conclusão – faz um fechamento da aula com uma síntese do que foi trabalhado ou do último tópico trabalhado e indica o que vai ser assunto na aula seguinte. Na aula de Coordenadas, a sua postura valoriza, sobretudo, o conteúdo e a sua atividade. Em alguns momentos, na resolução e discussão de exemplos coloca algumas respostas diretas o que leva os alunos a questionarem. Nesses momentos aproveita os questionamentos para uma maior exploração do conteúdo. A abordagem do problema contextualizado foi totalmente centrada em si, diferentemente do que havia sugerido durante a planificação, que poderia envolver os alunos na resolução por meio de questionamentos e na resolução de pequenos cálculos. Já na aula de Mudança de Base, Téo assume outra postura, mais centrada na atividade dos alunos do que em si. Auxilia os alunos individualmente ou aos pares na resolução da tarefa, que depois a explora no GeoGebra. Nesse momento a atividade volta a ser centrada em si, pois procura sumarizar o que os alunos fizeram com recurso ao papel e lápis e focar nas dúvidas que surgiram. Na retirada de ilações sobre a tarefa, retoma a participação dos alunos, insiste que participem refazendo as perguntas de outra forma ou dando direções para encontrarem as respostas. Por fim, sintetiza no quadro as conclusões retiradas e resgata o problema contextualizado da aula anterior. No processo de formalização da generalização da mudança de base (3.ª aula), assume uma postura de fechamento da parte teórica do conteúdo, centrando a aula na sua atividade.

De forma geral, nas aulas observadas, Téo valoriza o formalismo e não fica restrito apenas ao roteiro que fora planificado em conjunto com os seus colegas. Os exemplos propostos, a estratégia utilizada para abordar o teorema da unicidade e os seus questionamentos aos alunos são no viés de fazer com que o aluno avance para a generalização dos conceitos envolvidos. Em relação à postura dos alunos, observa-se certa passividade com a sua aprendizagem, que se revela, por exemplo, pelo ato de não se inteirar sobre o que o conteúdo trabalhado quando faltam à aula e/ou não estudar o conteúdo de uma aula para outra, o que lhes dificulta o acompanhamento da aula seguinte, e a própria falta de frequência às aulas. Apesar de haver 19 alunos matriculados na turma, nem todos foram assíduos às aulas, sendo que havia respetivamente nas aulas observadas, 9, 14 e 12 alunos. Além disso, dentre os presentes, sempre havia os que chegavam após o início da aula.

Na reflexão sobre a sua ação, manifesta o sentimento de insegurança sentido pela observação principalmente da primeira aula, de Coordenadas, fator que pode ter interferido tanto na participação mais tímida dos alunos na aula quanto no seu ensino, que foi predominantemente centrado em si. Problematiza a sua ação ao reconhecer que, ao longo da primeira aula, nem sempre conseguiu fomentar a interação com a turma. Em particular, reconhece que ao solicitar para uma aluna resolver uma questão no quadro poderia ter explorado mais a sua resolução ao invés de apontar o caminho correto para a resolução. Reconhece que a exploração do problema contextualizado foi totalmente centrada em si e infere que tal postura pode ser decorrente da observação da aula. Na análise da sua aula sobre Mudança de Base demonstra um sentimento de satisfação em relação à sua ação na aula bem maior do que com a aula de Coordenadas e em momento algum refere desconforto com a observação. Refere a importância da resolução pelos alunos da tarefa introdutória à Mudança de Base em sala de aula para se aperceber das dificuldades dos alunos e para lhes oportunizar um momento de aprendizagem em sala de aula. Para Téo, a participação conjunta da discussão que promoveu sobre a tarefa evoluiu com o decorrer da aula. Ao refletir sobre o que poderia ser melhorado na estratégia de ensino utilizada nessa aula, concorda com outros colegas que poderia tirar melhor proveito para a aprendizagem dos alunos se estes também fizessem uso do aplicativo do GeoGebra durante a aula, ao invés de ser o professor a utilizar. Por fim, refere a impressão de que a tarefa contribuiu para o entendimento do processo de generalização da Matriz Mudança de Base.

7.4.1.2. Introdução a espaços vetoriais

Preparação de aulas

Na preparação das aulas sobre o tópico de espaços vetoriais, inicialmente, procuramos identificar como os professores do grupo ensinavam esse conteúdo e quais as dificuldades sentidas em sua prática, para então discutir qual seria a estratégia de ensino utilizada pelo grupo. Ao fazer uma retrospetiva sobre como introduziu a definição de espaço vetorial no semestre anterior (2016/02), Téo refere que procurou analisar com os alunos o comportamento de alguns conjuntos numéricos em relação às propriedades algébricas envolvidas na definição de espaço vetorial. Segundo o professor, em sala de aula, constatou que os conjuntos dos números racionais e dos números reais tinham comportamento idêntico em relação a tais propriedades. Téo explicou aos alunos que passariam a analisar a validação destas propriedades para outros conjuntos, além dos numéricos.

> Para introduzir as propriedades algébricas eu fazia assim: 'ah, que conjuntos numéricos vocês conhecem?' Daí surgia inteiros, racionais, reais, complexos. Eu colocava numa listinha e também montava uma listinha das propriedades que a gente já ouviu falar de coisas algébricas, como a comutatividade, a associatividade... E aí perguntava quais [propriedades] falhavam para quais conjuntos e porque falhavam. E aí ia meio que preenchendo uma tabelinha, marcava com um 'xis' assim: 'isso funciona, isso não funciona'. E aí conseguia uma comparação rápida entre esses conjuntos. Por exemplo, nos naturais não vai ter neutro independentemente de como definir, não vai ter oposto. Aí era possível observar que para os racionais e para os reais, é tudo bonitinho, todas as propriedades são satisfeitas. Então falei que isso era um modelo para a gente fazer de uma lista de propriedades para exigir de outros conjuntos, como matrizes, polinômios... que passaríamos a analisar em seguida. Foi essa a maneira que achei para falar das propriedades da definição de Espaço Vetorial. Só que também não é aquela coisa que você consegue dar uma interpretação contextualizada ou geométrica. (EGC19, 17/03/2017)

A ideia de Téo foi resgatar as propriedades algébricas de conjuntos já direcionando para aquelas relacionadas com as operações de adição $(+)$ e multiplicação por escalar $(\cdot)$, e analisar a sua validade para um contexto familiar aos alunos, os conjuntos numéricos, sem apresentar diretamente a definição de espaço vetorial. "Após a introdução inicial, Téo referiu que apresentou a definição formal e passou a explorá-la na resolução de exemplos que envolviam conjuntos em que as operações definidas de $(+)$ e $(\cdot)$ eram tanto usuais como não usuais" (NC, março de 2017).

Na discussão no grupo de trabalho sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos no entendimento da definição de espaço vetorial, Téo reconhece que os alunos conseguem mostrar algebricamente que conjuntos como o $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^3$, os polinômios de grau $\leq n$ $(\mathcal{P}_n)$, as matrizes de ordem $m \times n$ $(M_{m\times n})$, são espaços vetoriais com as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ usuais definidas para esses conjuntos. Porém, os alunos têm dificuldade de verificar essa definição quando se trabalha com alguma restrição na definição desses conjuntos, tal como explica Téo:

> Mesmo com as [operações] usuais, às vezes, quando você escreve o conjunto como se fosse um subespaço, por exemplo, todas as triplas ordenadas do tipo $(x - y, x + y, x + y + z)$. Para eles justificarem que [o conjunto] está sendo fechado, (...) eles não conseguem perceber que tem que mostrar que o resultado [da adição de dois vetores quaisquer e da multiplicação de um escalar por um vetor qualquer] também tem que ser da forma: alguma coisa menos outra, alguma coisa mais outra e três coisas somadas. (...) Eles não percebem, só quando tem um zero e algo diferente de zero, por exemplo, quando tem $(x, 0,0)$. Isso eles percebem fácil. (...) Já na primeira situação

que falei, não fica claro. Eles começam a demonstrar, meio que pegando o estereótipo da nossa aula: tem umas coisas que você distribui, tem umas coisas que você põe em evidência e outras que põe de forma aleatória. É uma 'salada', não é uma justificativa do cálculo que era para fazer. (...) É essa abstração que eles não têm, é isso que é difícil. (EGC20, 24/03/2017)

Téo refere a dificuldade particular dos alunos em mostrar para determinados conjuntos as propriedades do fechamento das operações de $(+)$ e $(\cdot)$, que são condições necessárias para um conjunto ser um espaço vetorial.

Uma outra dificuldade identificada no grupo de trabalho e corroborada por Téo é mostrar que um conjunto é um espaço vetorial quando as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ definidas nesse conjunto não são as usuais. Téo partilhou com o grupo um exemplo que explorou com os alunos no semestre anterior e referiu as dificuldades que surgiram:

> Outro problema é quando as operações mudam, quando não são as usuais. (...) Tomei o exemplo de pegar o $\mathbb{R}$ com a parte positiva $[\mathbb{R}_+^*]$, fazer a soma virar o produto $[x + y = xy;\ x, y \in \mathbb{R}_+^*]$ e a multiplicação por escalar virar a potenciação $[kx = x^k;\ k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^*]$. Eles entraram em 'parafuso' quando mostrei que o neutro da soma passa a ser o 1. A preocupação era 'o professor não vai colocar esse exemplo na prova, né?'. (...) Não ficava claro para eles que como as operações já foram definidas, o conjunto já é fechado e que é a lista das propriedades em que as operações foram definidas é que podem falhar. (EGC19, 17/03/2017)

Téo usou o referido exemplo para ilustrar aos alunos a situação que o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ não é um espaço vetorial para as operações usuais de $(+)$ e $(\cdot)$, pois falha a propriedade do fechamento para a operação de $(\cdot)$, visto que $\alpha x \notin \mathbb{R}_+^*$ para $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^*$. Enquanto que se forem mudadas as operações, como fez Téo no exemplo que citou, o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ é um espaço vetorial. Embora o exemplo partilhado por Téo fosse contemplado por alguns livros de Álgebra Linear, alguns dos professores do grupo o desconheciam. À exceção de Téo, os demais professores costumavam propor exemplos de conjuntos com operações não usuais, mas que não satisfaziam a definição de espaço vetorial, ao contrário do exemplo apresentado por Téo.

De forma geral, os professores do grupo manifestaram que uma dificuldade que surge quando se trabalha com exemplos em que as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não são as usuais, é explicar aos alunos a finalidade de se mudar as operações. Embora não conseguisse apresentar uma situação concreta em que houvesse a necessidade da mudança das operações, Téo partilhou uma questão semelhante ao exemplo anterior, que propôs numa avaliação, para a qual sugeriu um questionamento que poderia conduzir os alunos a refletirem sobre as operações. Sugeriu para as interpretar geometricamente, bem como as propriedades associadas a elas, como, por exemplo, os elementos neutro e oposto.

> Na prova eu tomei o 1.º quadrante com as operações $(x,y)+(z,w)=(xz,yw)$ e $k(x,y)=(x^k,y^k)$. (...) Uma vantagem disso aqui é que não é o plano cartesiano que interessa, é o 1.º quadrante. O 1.º quadrante com as operações usuais não funciona. Agora, pode funcionar se mudar as operações. Então, como é que eu poderia definir uma soma só dentro do primeiro quadrante de forma que tivesse oposto? O oposto nesse caso seja $\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$. (...) Nessa operação, está aqui o $(1,1)$ que é o neutro, a noção de oposto é meio que pegar esses vetores [com a origem em (1,1) e extremidade fora do quadrado unitário de vértices (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)] aqui e fazer uma simetria para cair dentro do quadradinho [unitário], esses que estão aqui dentro do quadradinho vão cair dentro desse pedaço aqui [fora do quadradinho]. (EGC19, 17/03/2017)

Inicialmente, não era senso comum no grupo a exploração em sala de aula de exemplos que envolvessem as operações não usuais, pelas dificuldades dos alunos e dos próprios professores em mostrar aos alunos alguma aplicação contextualizada onde o espaço vetorial envolvido estivesse definido com operações não usuais. Diante da sugestão de colegas do grupo para cobrar apenas na lista de tarefas esse tipo de questão, Téo problematiza a ideia e mostra sua preocupação em preparar os alunos para o tipo de tarefa proposta.

> Se eles [alunos] só virem coisas usuais e não virem nada não usual, por que a gente está pondo na lista [de tarefas]? (...) Acho que a questão que temos que considerar é se trabalhar com operações não usuais importa para eles? (EGC20, 24/03/2017)

Tais questões lançadas por Téo provocam um momento de reflexão no grupo que conclui que é importante trabalhar com exemplos que envolvam operações não usuais, para os alunos refletirem o que significa o elemento neutro e o elemento oposto nestas operações, levando em consideração a sua definição e não apenas o que já é senso comum $\left(\vec{0}=(0,0) \text{ e } -\boldsymbol{u}=(-x,-y).\right)$. O grupo também considerou que é neste tipo de exemplo que é possível evidenciar a importância de serem satisfeitas as oito propriedades associadas às operações de $(+)$ e $(\cdot)$, que são as condições suficientes para um conjunto ser um espaço vetorial. Caso contrário, surge um outro problema que é a confusão que os alunos fazem entre a definição de espaço vetorial e de subespaço vetorial, como sugere Téo:

> Eles acabam pensando que é suficiente mostrar que os conjuntos são fechados para a $(+)$ e $(\cdot)$. Eles pensam que se o conjunto é fechado, então automaticamente as oito propriedades são satisfeitas. Acabam confundindo com a definição de subespaço vetorial. (EGC20, 24/03/2017)

Após a identificação de como cada professor introduzia o conceito de espaço vetorial e das dificuldades sentidas por estes no seu ensino, bem como realizada uma análise conjunta de como o conceito era exposto em alguns materiais didáticos apresentados por membros do grupo, chegou-se a um esboço de como seria a abordagem para o tópico. A ideia do grupo não era apresentar diretamente a definição de espaço vetorial, mas iniciar com uma tarefa que explorasse o que significa um conjunto ser fechado para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$, que é uma condição necessária para um conjunto ser um espaço vetorial, e também uma dificuldade dos alunos que foi identificada pelo grupo de trabalho. Após este entendimento seria apresentada a definição de espaço vetorial, seguida da resolução de exemplos, e por último seria proposta uma tarefa que explorasse a definição de espaço vetorial em conjuntos em que as operações definidas de $(+)$ e $(\cdot)$ seriam não usuais.

A 1.ª tarefa era inicialmente composta por duas questões que visavam explorar o fechamento de subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, que é um contexto concreto para os alunos, bem como a exploração das representações algébrica e geométrica desses subconjuntos, e a transição entre estas representações. As questões foram planificadas em conjunto com base nas diferentes intervenções dos elementos do grupo, dentre as quais destaco algumas posições de Téo que contribuíram na definição da redação final do respetivo enunciado:

> Do jeito que está escrito está induzido o caso específico. (...) Eles vão, de novo, ficar com a ideia de que testar um é suficiente para todos. Vão pegar, por exemplo, 'esse vetor mais esse, dá aquele. Então é fechado'. Não! É para esse par que é fechado. Será que para os outros vai ser também? Tem que deixar claro que nem sempre é para todos os pares de vetores. Senão, quando começarmos a pedir para eles demonstrarem coisas e eles fizerem o exemplo, vamos brigar com eles, porque eles não fizeram o caso geral, fizeram só um exemplo. (...) Do jeito que está [A soma de dois vetores de H está em H?] vai continuar a história do pegar o específico e querer dizer que vale para todos. Acho que resolve colocando 'a soma de quaisquer'. (...) Sim, a resposta pode ser sim ou não. E se tiver além dessa pergunta, o porquê? (EGC20, 24/03/2017)

Tais posições evidenciam o cuidado de Téo para com a clareza e objetividade das questões de forma que não induzam os alunos ao erro. Ao analisar a versão final das questões, Téo problematizou a falta de objetividade da tarefa: "acho que uma coisa que não fica claro é porque a gente quer saber se a soma de dois vetores está lá dentro, se a multiplicação também está lá dentro" (EGC20, 24/03/2017). O grupo considerou pertinente a observação de Téo e elaborou outras duas questões para a tarefa que visavam a retirada de conclusões, particularmente sobre a definição de 'conjunto fechado para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$', bem como promover a reflexão sobre outros conjuntos que poderiam satisfazer tais propriedades. Ficou combinado que na sequência da discussão com a turma sobre a tarefa se apresentaria a definição de espaço vetorial, bem como alguns exemplos que envolvessem a definição. Para esta etapa não foi desenvolvido um roteiro, mas discutiu-se quais exemplos poderiam ser abordados.

A 2.ª tarefa foi composta por duas questões, que envolviam a verificação da definição de espaço vetorial em conjuntos em que as operações definidas de $(+)$ e $(\cdot)$ eram não usuais. A 1.ª questão foi adaptada de livros de Álgebra Linear e a 2.ª foi construída a partir da questão de uma prova que Téo partilhou com o grupo. Na elaboração do enunciado dessa segunda questão, ao ouvir a sugestão de uma colega sobre subquestões que poderiam ser feitas, como "qual é o elemento neutro dessa operação? Qual é o elemento oposto?" (EGC20, 24/03/2017), Téo sugeriu deixar explícito algebricamente quem são tais termos.

> O único porém disso aí é que, se for usar esses termos – elemento neutro e elemento oposto – tem que ficar no sentido mais algébrico. Porque senão sempre vão pensar que o neutro é o $(0,0)$. O elemento neutro é alguém, para ser somado com outro vetor [neutro], para dar ele mesmo. E aí eles têm que usar essa regra da soma para concluir que $\vec{0} = (1,1)$. (EGC20, 24/03/2017)

A preocupação de Téo incide sobre como direcionar os alunos a encontrar o caminho que dever ser utilizado para encontrar os vetores que assumem o papel de elemento neutro e elemento oposto para a operação que foi definida, de forma a evitar que os alunos os confundam com os vetores que assumem esse papel quando as operações são usuais. Após a discussão no grupo, a redação das subquestões ficou a seguinte: "(e) Mostre que o vetor nulo nesse espaço é o vetor $(1,1)$, ou seja, $\vec{0} = (1,1)$. Verifique então o axioma 3 $[\boldsymbol{u} + \vec{0} = \boldsymbol{u}]$; (f) Se $\boldsymbol{u} = (x, y)$, quem é $-\boldsymbol{u}$?; (g) Verifique o axioma 4, ou seja, mostre que $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \vec{0}$. Lembre-se que $\vec{0} = (1,1)$" (EGC20, 24/03/2017).

Na discussão sobre como seria a abordagem desta 2.ª tarefa, Téo sugeriu que os alunos resolvessem extra classe, mesmo sabendo que estes encontrariam dificuldades, principalmente na 2.ª questão. A sua ideia, corroborada pelo grupo, era de que os alunos se familiarizassem com as questões para que na discussão em sala de aula se pudessem focar nas dificuldades encontradas.

> Acho que eles têm que pensar primeiro. Talvez deixar da 1.ª para a 2.ª aula de espaço vetorial. Podemos dar para eles pensarem em casa e daí discutirmos na aula seguinte. (...) Cada um deles vai ter uma dificuldade, uma velocidade muito diferente, para entender isso aí. Então, se todos tiverem, pelo menos, uns dois dias para pensar, acho que dá tempo de todo mundo, mais ou menos, chegar no mesmo ponto, e todo mundo empacar na mesma coisa. Daí você consegue discutir. (...) Essa [última] questão tem que ser discutida, porque ela tem várias coisas estranhas para eles. Numa primeira vez

> eles não vão entender, por exemplo, que o neutro não é $(0,0)$. Talvez os [alunos] repetentes consigam ver isso. De qualquer forma tem que ser discutido com eles. (EGC20, 24/03/2017)

A ideia do grupo sobre a resolução da tarefa extra classe e da discussão em sala de aula teve por objetivo ganhar tempo, pois era sabido que atividades em sala demandam tempo, além de incentivar os alunos para se dedicarem à disciplina extra classe. Foi idealizado no grupo que o conteúdo planificado para a Introdução a Espaços Vetoriais contemplasse no máximo 4 horas/aula (dois dias de aula), sendo que nas primeiras duas horas/aula se exploraria a 1.ª tarefa e a definição de espaço vetorial, e no restante a discussão sobre a 2.ª tarefa e, se possível, a definição de subespaço vetorial.

Após a planificação das duas primeiras aulas, na semana que ocorria a prática na sala de aula, Téo reuniu-se com Bruna e surgiu-lhes a ideia de interpretar geometricamente com o auxílio do GeoGebra o espaço vetorial com as operações não usuais de $(+)$ e $(\cdot)$ da 2.ª questão da 2.ª tarefa. Tal atitude emergiu em resposta à inquietação que havia no grupo quanto à interpretação daquele espaço vetorial com operações não usuais. No encontro do grupo daquela semana Téo partilhou as construções que realizou no GeoGebra por meio das quais era possível observar no $\mathbb{R}^2$ o comportamento de tais operações usando a escala linear e a escala logarítmica.

> Eu encontrei a Bruna, daí não sei de qual dos dois saiu a ideia de tentar interpretar geometricamente as operações da Questão 6 [2.ª questão da 2.ª tarefa]: 'deixa eu ver como é que sai no GeoGebra'. Daí, eu fui fazer figurinha no GeoGebra... fiz um monte de figurinha. Aí, peguei aqui, por exemplo, dois vetores, A e B, a soma deles, conforme a regrinha da multiplicação das coordenadas $[(x,y)+(z,w)=(xz,yw)]$. (Mostrando no GeoGebra) Ali você tem o $(4{,}2)$ e $(4{,}4)$, ele vai parar no $(16{,}8)$. (...) Se você mudar de escala, eles [vetores] formam o paralelogramo bem certinho. (...) A regra parecia uma coisa estranha, mas se você mudar de escala não parece tão estranho. (...) Está com escala logarítmica e eu fiz essas operações em cima da grade, com escala logarítmica na base 2. Ao colocar os vetores na escala logarítmica você lineariza aqueles vetores. (...) Por exemplo, na multiplicação usual, os múltiplos estão sempre na mesma reta. Na nova operação $[k(x,y)=(x^k,y^k)\,]$, se eu represento na escala normal, os múltiplos não estão alinhados, mas agora na escala logarítmica eles ficam alinhados. (EGC21, 31/03/2017)

Téo procurou mostrar ao grupo que ao utilizar uma escala adequada, no caso a logarítmica, o espaço vetorial $V=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ com as operações definidas por:

- $(x,y)+(z,w)=(xz,yw)$, para quaisquer $(x,y)\in V$ e $(z,w)\in V$ e
- $k(x,y)=(x^k,y^k)$, para todo $k\in\mathbb{R}$ e todo $(x,y)\in V$,

preserva, para estas operações, as mesmas características geométricas que as operações usuais.

Ao ouvir a perspetiva de Téo, o grupo procurou entender o que era a escala logarítmica e como era construída, além de nos inteirar de problemas cuja compreensão é facilitada se tal escala for usada. Também descobrimos que os alunos de Engenharia e Licenciaturas em Matemática e Física usam tal escala na disciplina de Física Experimental. Considerou-se então propor uma tarefa aos alunos com o propósito deles fazerem uma análise comparativa do comportamento de tais operações não usuais em relação às escalas linear e logarítmica, como sugeriu Téo:

> Eu acho que podemos dar a eles uma folhinha, com uma logarítmica e uma não logarítmica, para somar e multiplicar. Acho que eles têm que fazer na mão para eles verem a diferença. (...) Dá para a gente escolher um vetor fixo e pedir para representar quatro múltiplos, que a gente escolher, e a soma de dois vetores, que a gente escolher, também, para desenharem nas duas escalas. Acho que isso funcionaria bem e não demoraria muito tempo. (EGC21, 31/03/2017)

A ideia do grupo com a tarefa era também que os alunos entendessem como fazer a transição da representação algébrica para a representação geométrica dos vetores no espaço vetorial em questão, visto que o vetor nulo agora é o $(1,1)$. Sendo assim, ficou combinado que os alunos resolveriam a tarefa em sala de aula na sequência da discussão da resolução da 2.ª tarefa. Téo se prontificou para elaborar as questões da tarefa e posteriormente partilhar com o grupo para uma análise crítica (NC, abril de 2017).

Relativamente ao ensino de subespaço vetorial, que seria o tópico subsequente a ser abordado em sala de aula, não se elaborou um roteiro de aula no grupo, mas discutiu-se que se poderia retomar nos exemplos os conjuntos explorados na 1.ª tarefa, que envolvia o fechamento de conjuntos.

Prática na sala de aula

A concretização em sala de aula do que fora planificado para a introdução de Espaços Vetoriais ocorreu em 6 horas/aula (1 hora/aula=50 minutos), conforme o Quadro 22. A turma observada continha 18 alunos, sendo a sua maioria do curso de Engenharia de Produção e Sistemas. Na turma havia alunos que cursavam a disciplina pela primeira vez e outros que já haviam cursado pelo menos uma vez.

Quadro 22. Síntese do conteúdo trabalhado em cada aula relacionada à introdução do conceito de espaço vetorial.

Aulas	Conteúdo
2 horas/aula 100 minutos	– Resolução de uma tarefa pelos alunos para introduzir o conceito de fechamento de um conjunto para as operações de soma $(+)$ e multiplicação por escalar $(\cdot)$. – Definição de espaço vetorial.
2 horas/aula 100 minutos	– Definição dos espaços vetoriais do $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n, \mathcal{P}_n$, $M_{m \times n}$ e das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com as respectivas operações usuais de $(+)$ e $(\cdot)$. – Resolução de uma tarefa pelos alunos com o objetivo de explorar a definição de espaço vetorial para subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, com operações não usuais de $(+)$ e $(\cdot)$.
2 horas/aula 100 minutos	– Correção da tarefa da aula anterior. – Resolução de uma tarefa pelos alunos envolvendo a interpretação geométrica de um dos espaços vetoriais com operações não usuais da tarefa anterior. – Definição de subespaço vetorial.

Introdução a espaços vetoriais

A primeira aula observada sobre a introdução de Espaços Vetoriais ocorreu no dia 27/03/2017, numa segunda-feira, no período das 16h 10min às 17h 50min e estavam presentes 13 alunos. A aula foi assim organizada: (i) Introdução da aula com a apresentação do capítulo de Espaços Vetoriais; (ii) Distribuição e orientações sobre a tarefa introdutória de Espaços Vetoriais; (iii) Discussão na turma sobre a resolução da tarefa pelos alunos; (iv) Definição formal de espaço vetorial; (v) Distribuição da tarefa para explorar a definição de espaço vetorial para o $\mathbb{R}^2$, com operações não usuais de $(+)$ e $(\cdot)$.

Ao introduzir o tema da aula, Téo apresenta o capítulo de Espaços Vetoriais, procurando explicar o objetivo de se estudar tal tópico para o estudo de Transformações Lineares, capítulo seguinte. Em seguida, com o objetivo de dar um direcionamento para a tarefa introdutória que pretende abordar na sequência da aula, recorre a um exemplo que envolve encontrar a solução do sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Explora a notação algébrica do conjunto solução do sistema, a saber, $S = \{(z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$, e toma algumas soluções particulares para verificar intuitivamente que a soma de quaisquer duas delas também é uma solução e que o mesmo vale para a multiplicação de qualquer solução por uma constante. Por fim, associa tais características aos termos ‘fechamento para a soma’ e ‘fechamento para a multiplicação por escalar’ e introduz o tema da aula.

> Quanto um conjunto satisfaz essa característica da soma e da multiplicação por escalar para todos os seus vetores, dizemos que é fechado para a soma e fechado para a

multiplicação por escalar. Vamos ver que qualquer sistema linear homogêneo tem essas características, ou seja, que é fechado tanto em relação à multiplicação por constantes, quanto para soma de vetores. Vamos discutir hoje outros conjuntos que tem essa característica, que quando soma vetores pertencentes ao conjunto o resultado está no conjunto e quando multiplica por escalar pertence ao conjunto. (OAT4)

Depois desta introdução, Téo distribui a tarefa exploratória que envolve o fechamento para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ no $\mathbb{R}^2$ (Quadro 23).

Quadro 23. Tarefa utilizada para introduzir o tópico de Espaços Vetoriais.

Introdução a Espaços Vetoriais - 1ª Etapa

Nas atividades 1 e 2, considere as operações de adição e multiplicação por escalar de vetores do $\mathbb{R}^2$ definidas por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ e $k \cdot (x, y) = (kx, ky), k \in \mathbb{R}$.

1. Cada uma das figuras apresenta um subconjunto H do $\mathbb{R}^2$.
   a) A soma de quaisquer dois vetores de H está em H? Por quê?
   b) Os múltiplos dos vetores de H estão em H? Por quê?
   c) Represente cada subconjunto H algebricamente.

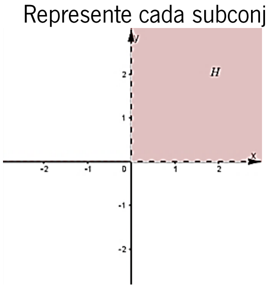


Figura 1: 1.º quadrante

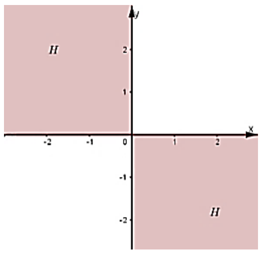


Figura 2: 2.º e 4.º quadrantes

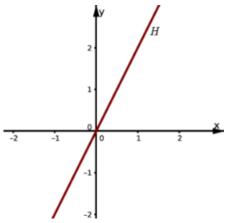


Figura 3: Reta definida por $y = 2x$

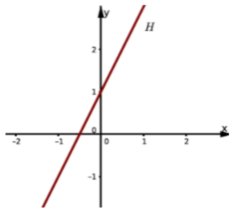


Figura 4: Reta definida por $y = 2x + 1$

2. Seja $H = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   a) Represente geometricamente H.
   b) A soma de quaisquer dois vetores de H está em H? Por quê?
   c) Os múltiplos dos vetores de H estão em H? Por quê?

3. Em qual(is) subconjunto(s), das questões 1 e 2, os vetores resultantes da soma e da multiplicação por escalar estão em H?

4. Pesquise exemplos de outros conjuntos nos quais ao somar os seus elementos ou multiplicá-los por números reais, os resultados ainda pertencem a tais conjuntos, isto é, conjuntos que são *fechados em relação à adição* e a *multiplicação por escalar*.

Téo propõe aos alunos que trabalhem em grupo ou individualmente, sendo que apenas quatro alunos se reuniram em pares. Como na primeira questão, os conjuntos a serem analisados eram dados graficamente, procurou orientá-los por meio do esboço de outra figura geométrica no quadro, sobre como tomar um vetor pertencente a um conjunto e como explorar intuitivamente se este conjunto seria ou não fechado para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$. Enquanto os alunos resolviam as questões, Téo circulava pela sala e procurava esclarecer as dúvidas que surgiam. Diante dos questionamentos dos alunos, Téo procurava não dar respostas prontas, procurando dar orientações e incentivá-los a tirarem as suas conclusões.

Téo: Dúvidas?
Aluno1: Então, nesse primeiro vai satisfazer sempre.
Téo: Porquê?
Aluno1: Porque as componentes são positivas, então a soma vai dar componentes positivas.
Téo: Então está. Registra isso.
Aluno1: Está certo?
Téo: Não sei. Vão discutindo e comparando as respostas para ver a que conclusão chegam.
Aluno3: Na (c), como eu representaria? Não estou entendendo.
Téo: Qual o conjunto de pontos que pertence ao H?
Aluno3: Todos os pontos que pertencem?
Téo: Sim. Essencialmente tens que saber que propriedade caracteriza os elementos aqui de dentro [do conjunto]. Aqui no meu exemplo é todo vetor que tem a mesma coordenada, exceto pelo sinal na coordenada do meio [referindo-se ao exemplo do sistema linear]. Ali deve ter uma versão equivalente para descrever o H.
Aluno3: Eu estava fazendo tudo errado. Estava pensando que para o primeiro eu poderia pegar, por exemplo, o $(1, 2)$, porque é tudo positivo.
Téo: Ele pertence, mas tens que pegar um vetor que represente todos os que estão ali dentro.
Aluno3: Sim, entendi agora. (OAT4)

Depois de observar que a maioria dos alunos já tinha concluído ao menos as duas primeiras questões, procura fazer uma discussão com a turma. Nessa discussão incita os alunos a verbalizarem as suas repostas e as anota no quadro.

Téo: Pessoal, em relação à soma de vetores, para quais das quatro figuras quando a gente pega um par de vetores e faz a soma, vai estar sempre caindo dentro da região e para quais figuras nunca está caindo lá dentro ou às vezes não cai dentro?
Aluno2: Nas Figuras 1 e 3 cai dentro para a soma.
Téo: Todo mundo concorda com isso ou teve alguém que encontrou uma resposta diferente? (Todos concordam)
Téo: Então teve uma região ali que é o 1.º quadrante. A soma de vetores do 1.º quadrante está caindo sempre no 1.º quadrante. As coordenadas desses pontos aí são o quê?
Aluno2: Positivas.
Téo: Isso, todas positivas na primeira figura e no caso da Figura 3 está sempre dando sobre a reta. E para múltiplos o que vocês encontraram?
Aluno6: [As figuras] 2 e 3.
Téo: E nas que não preserva dentro da região, para quais constantes não preservou o vetor resultante dentro da região?
Aluno4: Na primeira figura não funciona para valores negativos.

Téo: Certo. O que acontece quando multiplica por valor negativo?
Aluno4: Inverte o sentido.
Téo: Exato. Preserva a direção, mas inverte o sentido. Foi esse o problema que apareceu na Figura 1. E no caso da Figura 4 qual é o problema?
(Não obtém respostas)
Téo: Porque para a reta $y = 2x + 1$ os múltiplos de um vetor pertencente à reta não vão estar sobre a reta? Ou seja, não vai dar um ponto sobre a reta?
(Não obtém respostas)
Téo: Sempre falha? Às vezes falha? Quando falha?
(Não obtém respostas)
Téo: O que a multiplicação por números reais faz com os vetores?
Aluno2: Pode aumentar, diminuir, inverter se a constante é negativa.
Téo: Isso, aumenta se a constante for mais que 1, encolhe se for entre 0 e 1, encolhe e inverte o sentido se estiver entre 1 e 0, e aumenta e inverte se for menor que -1. Então aqui se pegarmos um ponto sobre a reta e tomarmos o vetor associado a ele, tem algum múltiplo dele que vai cair sobre a reta?
Aluno1: Só se multiplicar por 1.
Téo: Isso, somente o $1.\boldsymbol{v}$ vai estar sobre essa reta. Se multiplicarmos por 2, por exemplo, vai dar um vetor cujo ponto que está na extremidade não pertence à reta. (OAT4)

No diálogo precedente, são apresentadas as respostas para as questões 1(a) e 1(b) relativamente à análise do fechamento para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ para as Figuras 1, 2, 3 e 4. Para as três primeiras figuras os alunos apresentaram respostas de forma imediata, já para a Figura 4 foi necessário que Téo refizesse os seus questionamentos de diferentes formas até que algum aluno apresentasse a resposta. Na observação da aula percebi que os alunos apresentaram dificuldade em como tomar vetores pertencentes a uma reta que não passa pela origem, sendo que Téo procurou esclarecer tal dúvida.

Após a conclusão efetuada sobre o fechamento para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ para os quatro subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ apresentados nas quatro figuras propostas na Questão 1 da primeira tarefa (Quadro 23, surgiu a discussão sobre como representar algebricamente cada um dos subconjuntos:

Téo: E representações algébricas para estes conjuntos? Como descreveram caso a caso?
Aluno2: x e y têm que ser positivos.
Téo: Como escrevo algebricamente isso? Como tu representaste isso, Aluno2?
Aluno2: Eu coloquei $H = \{(x > 0, y > 0)\}$
Téo: É por aí, só temos que arrumar um pouco essa notação. Vamos dar uma olhadinha como apresentei o conjunto S lá no sistema do início da aula. Vamos pegar todos os vetores do plano, ou seja, todos os pares ordenados (x, y) do $\mathbb{R}^2$, em que as coordenadas x e y são positivas. Então fica assim: $H = \{(x, y)/\ x > 0\ e\ y > 0\}$.
Téo: E para a Figura 2, como descreveram H?
Aluno6: Eu escrevi como a união de dois conjuntos: $H = \{(x, -y)/\ x, y \in \mathbb{R}_+\} \cup H = \{(-x, y)/\ x, y \in \mathbb{R}_+\}$.
Téo: Tem jeito de fazer isso de forma mais simplificada. Alguém achou alguma outra forma?

Aluno4: $x = -y$?

Téo: Mas, por exemplo, o $(2, -3)$ está no 4.º quadrante e não satisfaz $x = -y$. A ideia é que os sinais têm que estar trocados, certo? Mas em módulo as coordenadas não precisam ser iguais, ok? Uma outra possibilidade seria $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy < 0\}$. (OAT4)

À medida que os alunos foram respondendo, Téo foi discutindo as suas respostas procurando validá-las ou refutá-las, além de apresentar outras formas de representar os conjuntos para além do que os alunos iam apresentando, bem como dando ênfase à notação algébrica correta. Na sequência explora a resolução da Questão 2, em que o conjunto H era apresentado na forma algébrica e os alunos tinham que fazer inicialmente a transição dessa representação para a geométrica e analisar o fechamento de tal conjunto.

Téo: E na questão 2, o que concluíram? O que seria geometricamente a região do conjunto H?

Aluno3: Uma circunferência.

Téo: Circunferência é um conjunto de pontos que estão a uma mesma distância do centro, no caso a uma distância igual a 1 do centro. Mas ali não é 1, está dizendo que é menor que 1. Então o que muda?

Aluno6: É a área total da circunferência.

Téo: Exato, e como tem a igualdade, a circunferência, o contorno também. Então é o círculo de raio 1. O que podemos concluir para a soma de dois vetores dessa região? A soma cai sempre dentro?

Aluno6: Pega $(1, 0)$ e $(0, 1)$, dá $(1, 1)$ que não pertence ao círculo.

Téo: E os múltiplos de qualquer vetor caem ali dentro?

Aluno2: Depende do vetor e da constante que multiplicar. Mas claro, nem tudo cai ali dentro, o $(1, 0)$, multiplica por um valor maior que 1, já está fora.

Téo: Este é um caso que não é fechado nem para a soma nem para a multiplicação por escalar. (OAT4)

Quando um aluno responde que o conjunto de pontos do plano que satisfazem a condição $x^2 + y^2 \leq 1$ é uma circunferência, Téo procura utilizar a definição de circunferência para que os alunos visualizem que existem outros pontos que satisfazem a condição que define o conjunto H. Procura questioná-los de modo a tirar conclusões sobre a resolução da tarefa, mas Téo em seu discurso dá respostas mais diretas aos alunos, ao invés de esperar que os alunos apresentassem as conclusões.

Após a discussão sobre as respostas das Questões 1 e 2 da tarefa, Téo propõe um momento de síntese/discussão sobre quais conjuntos analisados são fechados para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ e questiona-os quanto a outros subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ que conhecem e que preservam tais características para todos os seus elementos. Téo começa a listar no quadro os subconjuntos indicados.

Téo: Então, em resumo, quais dos conjuntos analisados preservam a soma e a multiplicação por escalar, ou seja, em quais exemplos os vetores resultantes de qualquer soma e de qualquer multiplicação por escalar sempre caem dentro da região?
Aluno2: A Figura 2 e a reta.
Aluno4: Não, a Figura 2 falha a soma.
Aluno2: É verdade, somente a reta.
Téo: Que outros tipos de conjuntos têm essas duas características? Se somar dois elementos do conjunto o resultante está lá dentro, se multiplicar por uma constante, o resultante está lá dentro?
Aluno7: Se pegar todos os quadrantes funciona.
Téo: Você quer dizer o $\mathbb{R}^2$. Se somar vetores do $\mathbb{R}^2$ sempre vai dar um vetor do $\mathbb{R}^2$ e o mesmo acontece com a multiplicação, em nenhum desses casos vai dar um vetor do $\mathbb{R}^2$, por exemplo. Então o $\mathbb{R}^2$ é fechado para essas duas operações.
Aluno1: 1.º e 3.º quadrantes.
Téo: Fica parecido com o caso que vimos do 2.º e 4.º. Funciona para os múltiplos, mas se pegar um vetor de cada quadrante em cima dos eixos, a soma cai fora. Por enquanto temos o $\mathbb{R}^2$ e o caso da reta que passa pela origem. Mas têm mais exemplos, quais?
Aluno4: Se pegar um quadrante sozinho.
Téo: Mas tínhamos o item (a) [Figura 1] que era sozinho e não deu. Falhou o que? Os múltiplos com a constante negativa. (OAT4)

Os alunos que já haviam cursado a disciplina apontam que o conjunto formado pelos pontos de qualquer reta que passa pela origem deve satisfazer e que o conjunto formado apenas pelo vetor nulo também.

Aluno10: A reta $y = ax + b$ com $b = 0$.
Téo: Pessoal, por que neste caso dá certo? Vejam que ele pegou a equação de uma reta qualquer que passa pela origem.
Aluno10: Os pontos de uma reta qualquer quando somados sempre serão pontos da reta. Os múltiplos sempre vão ser um ponto da reta.
Téo: Quem seria H nesse caso? Como seria a cara de cada vetor dessa reta? Seria $\mathrm{H} = \{(x, ax)/x \in \mathbb{R}\}$. O a está fixo, no meu caso era 2 [Figura 3 da tarefa]. Mas pode ser qualquer. Mais algum exemplo?
Aluno4: O vetor nulo, qualquer múltiplo do vetor nulo vai dar (0,0), se somar vetor nulo com nulo, dá nulo. (OAT4)

Téo procurou questionar o porquê das suas afirmações para que os alunos as justificassem. Em seguida, questiona quais seriam os subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ fechados para as duas operações e faz considerações semelhantes ao que fez para o $\mathbb{R}^2$. Ao questionar se além do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ há outros objetos matemáticos que preservam as características do fechamento para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$, um aluno que já havia cursado a disciplina fala dos polinômios e matrizes. Téo verifica oralmente como se comportam tais operações para os conjuntos citados e refere que fará um estudo mais detalhado na próxima aula.

Como já se aproxima o final da aula, distribui uma folha com a definição de espaço vetorial e a explica fazendo pequenas anotações no quadro sobre o significado dos axiomas envolvidos. Por fim, distribui uma folha com a segunda etapa da tarefa inicial (Quadro 24), que envolve duas questões para verificar se o $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar não usuais. Téo procura que os alunos pensem sobre as questões em casa para então as discutir na próxima aula.

Quadro 24. Tarefa para explorar a definição de espaço vetorial com operações de soma e multiplicação por escalar não usuais.

Introdução a espaços vetoriais – 2ª Etapa

5. Considere V o conjunto dos pares ordenados de números reais com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas como segue:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$
- $ku = k(x, y) = (kx, 0)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $u + v$ e ku, com $u = (-1,2), v = (3,4)$ e $k = 3$.
b) Explique por que V é fechado na adição e multiplicação por escalar.
c) Como a adição de V é a adição padrão de $\mathbb{R}^2$, certos axiomas de espaço vetorial valem para V por valerem em $\mathbb{R}^2$. Quais são esses axiomas?
d) Mostre que valem os axiomas 5,6 e 7.
e) Mostre que o axioma 8 falha e que, portanto, V não é um espaço vetorial.

6. Considere o subconjunto H da Figura 1 (Quadro 23), com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas como segue:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (xz, yw)$
- $ku = k(x, y) = (x^k, y^k)$, onde $k \in \mathbb{R}$

a) Calcule $u + v$ e ku, com $u = (1,2), v = (3,4)$ e $k = 3$.
b) Verifique que os axiomas 1 e 2 são satisfeitos.
c) Mostre que o vetor nulo nesse espaço é o vetor $(1,1)$, ou seja, $\vec{0} = (1,1)$. Verifique então o axioma 3.
d) Se $u = (x, y)$, quem é $-u$?
e) Verifique o axioma 4, ou seja, mostre que $-u + u = \vec{0}$. Lembre-se que $\vec{0} = (1,1)$.
f) Verifique que os axiomas 5,6,7 e 8 são válidos e que, portanto, H é um espaço vetorial.

Obs.: Observe que o subconjunto H da Figura 1 (Quadro 23) não é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$
- $ku = k(x, y) = (kx, ky)$, onde $k \in \mathbb{R}$

No entanto, o mesmo conjunto tem a estrutura de um espaço vetorial se forem usadas outras operações de 'adição' e 'multiplicação por escalar':

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (xz, yw)$
- $ku = k(x, y) = (x^k, y^k)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Definição de espaço vetorial

A segunda aula observada sobre a Introdução a Espaços Vetoriais foi realizada no dia 29/03/2017, quarta-feira, no período das 19h às 20h 50min, com a presença de 17 alunos. A aula foi organizada da seguinte forma: (i) Revisão sobre a aula anterior; (ii) Definição dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e

$\mathcal{P}_n$ em relação às operações da adição $(+)$ e multiplicação por escalar $(\cdot)$ usuais; (iii) Definição do espaço vetorial das matrizes de ordem $m \times n$, $M_{m\times n}$, com m e n fixos; (iv) Definição do espaço vetorial das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; (v) Resolução da tarefa do Quadro 24 pelos alunos.

Téo inicia a aula fazendo um esboço no quadro das figuras da tarefa (Quadro 23) que os alunos resolveram na aula anterior e faz uma síntese sobre as conclusões retiradas sobre o fechamento para a $(+)$ e para a $(\cdot)$ para cada um dos subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ representados em cada figura. Relembrou outros conjuntos que foram mencionados e que são fechados para as duas operações, como o $\mathbb{R}^n$, polinômios, funções reais e alguns subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$, retas que passam pela origem, vetor nulo). Em seguida relembrou a definição de espaço vetorial, em particular os oito axiomas que devem ser satisfeitos relativos às operações de $(+)$ e $(\cdot)$.

Posteriormente, considerou o subconjunto $H = \{(x, y)/y = 2x\}$ do $\mathbb{R}^2$, relativo à Figura 3 da tarefa, e provou algebricamente que tal conjunto é fechado para as operações $(+)$ e $(\cdot)$, pois na aula anterior a conclusão foi intuitiva. Da mesma forma provou algebricamente que o subconjunto $H = \{(x, y)/y = 2x + 1\}$ do $\mathbb{R}^2$, relativo à Figura 4, não é fechado para nenhuma das duas operações. Na aula anterior esta análise foi realizada por meio de contraexemplos. Nessa fase de retomada da aula anterior, Téo sintetiza o que fora abordado de forma expositiva, e embora lance algumas questões para os alunos relembrarem a aula anterior, ele próprio as acabava respondendo e os alunos apenas confirmando.

No momento seguinte, discutiu de forma informal, fazendo algumas anotações no quadro, como provaria alguns dos axiomas da definição de espaço vetorial para o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$, com as operações usuais de $(+)$ e $(\cdot)$. Em particular, enfatizou quem são o elemento neutro e o elemento oposto da adição para tais conjuntos. Definiu as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ usuais para o $\mathbb{R}^n$ e para $\mathcal{P}_n$, e foi discutindo os axiomas oralmente.

Ao definir o espaço vetorial das matrizes de ordem $m \times n$, com m e n fixos, procurou resgatar as propriedades de matrizes que acabara de explorar no capítulo anterior.

Téo: Qual a condição para poder somar matrizes?
Aluno4: Tem que ter a mesma ordem.
Téo: A ordem delas tem que ser idêntica. Tem que ter o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas. E quando a gente soma matrizes de mesma ordem, a matriz resultante tem a mesma ordem, certo? O mesmo acontece quando a gente multiplica por uma constante, multiplica todos os temos, mas a ordem não altera. Isso quer dizer que esse conjunto $M_{m\times n}$é fechado para as duas operações.
Téo: E para matrizes vocês lembram se era válida essa lista de propriedades [os 8 axiomas] ou tinha alguma propriedade que não era válida?

Aluno1: Acontece o mesmo que polinômios quando soma com a oposta.
Téo: Mas quando soma uma matriz com a oposta não muda o tamanho.
Aluno1: Mas não fica zero?
Téo: Fica uma matriz com todas as entradas nulas.
Aluno1: Mas se tiver tudo zero ainda posso considerar que tem a mesma ordem?
Téo: Sim. A gente abrevia, simboliza a matriz nula por um 0. No caso, por exemplo, de uma matriz 2×2, denotamos $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$. É a matriz nula que vai fazer o papel de neutro.
Téo: E o elemento oposto nesse caso quem é? Quem é a matriz oposta?
Aluno1: Troca o sinal de todos os elementos.
Téo: E a comutatividade é válida?
Aluno4: O produto não é comutativo.
Téo: Sim. Mas o primeiro axioma que tem que ser satisfeito é relativo à operação da adição. Então aqui estávamos investigando a comutatividade da soma. Queremos saber se $A + B$ é igual a $B + A$. Vimos que é válida essa propriedade lá no estudo de matrizes. (OAT5)

Nessa discussão Téo aproveita os aspetos críticos referidos por alguns alunos para salientar algumas propriedades matriciais. Por fim, definiu as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ para o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dando destaque a quem é o elemento neutro deste conjunto e fez um fechamento desta primeira fase da aula:

> Os conjuntos que acabamos de citar $-$ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, polinômios, matrizes, funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ $-$ são objetos matemáticos de natureza distinta, mas todos satisfazem os oito axiomas da definição de espaço vetorial. Estes conjuntos são exemplos de espaços vetoriais, cada um com as respetivas operações de $(+)$ e $(\cdot)$ que acabamos de definir. A maior parte dos factos que vamos estudar aqui no curso, resulta de assumir que você está trabalhando num conjunto que tem as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ e que satisfazem estas características [oito axiomas]. (OAT5)

Na fase seguinte da aula propõe que os alunos resolvam a segunda etapa da tarefa (Quadro 24), que explora a definição de espaço vetorial no $\mathbb{R}^2$ com operações não usuais de $(+)$ e $(\cdot)$. Durante a resolução Téo foi circulando entre os alunos procurando auxiliá-los nas dificuldades que surgiam. Tais dificuldades estavam associadas a:

(i) entender que deveriam usar as regras de $(+)$ e $(\cdot)$ definidas para cada questão. Alguns alunos insistiam em usar as regras usuais para verificar os axiomas da definição de espaço vetorial;

(ii) entender que V já foi definido como um conjunto fechado para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ que foram definidas. Por exemplo, houve o caso de uma aluna que concluiu que V não era fechado para a operação de $(\cdot)$ porque $k(x,y)=(kx,0)$ e indicou que o correto seria $k(x,y)=(kx,ky)$;

(iii) como fazer a verificação da validade das igualdades envolvidas nos oito axiomas associados as operações de $(+)$ e $(\cdot)$.

Como não houve tempo para os alunos finalizarem a tarefa em sala de aula, orientou-os para finalizarem em casa e deixou a correção/discussão para a aula seguinte. Observei que os alunos tinham concluído a resolução apenas da Questão 5.

Interpretação geométrica de um espaço vetorial com operações não usuais e definição de subespaço vetorial

A terceira aula observada sobre a introdução a Espaços Vetoriais foi realizada no dia 03/04/2017, segunda-feira, no período das 16h 10min às 17h 50min, com a presença de 11 alunos, e foi assim organizada: (i) Correção/discussão sobre a tarefa realizada na aula anterior; (ii) Resolução de uma tarefa pelos alunos com a interpretação geométrica do espaço vetorial com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais utilizado na questão 6 da tarefa anterior; (iii) Correção da tarefa; (iv) Definição de subespaço vetorial.

Téo inicia a aula com apenas quatro alunos presentes, sendo que os demais começam a chegar após 15 minutos do inicio da aula, recorrendo ao Data show para projetar o enunciado das questões da tarefa da aula anterior (Quadro 24) para então fazer a sua correção. Como os alunos concluíram a resolução da questão 5 na aula e Téo conseguiu acompanhá-los, opta por retomar apenas o enunciado da questão e explicá-lo e deixa para fazer uma correção detalhada da questão 6. Na correção desta última questão procura dar ênfase aos aspetos que os alunos tiveram dificuldades na resolução da questão anterior, tais como a notação algébrica e em como fazer a verificação de uma igualdade. No grupo foi discutido essa dificuldade dos alunos e chegado à conclusão de que deveríamos explicar-lhes, na correção de uma das questões, como demonstrar uma igualdade. Em particular, demonstrar que o elemento neutro para tal caso é o vetor $(1,1)$ e que por convenção se usa o símbolo $\vec{0}$. A abordagem adotada por Téo durante a correção foi predominantemente expositiva e com foco no conteúdo, embora em algumas subquestões solicitou as respostas aos alunos, que as desenvolve no quadro explicando-as.

Na sequência da aula, distribui a tarefa (Quadro 25) sobre a interpretação geométrica do espaço vetorial com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais da questão 6 da tarefa anterior, que Téo acabara de fazer a discussão.

Quadro 25. Tarefa sobre a interpretação geométrica de um espaço vetorial com operações de soma e multiplicação por escalar não usuais.

Interpretação geométrica de um espaço vetorial não usual

Seja $V = \{(x, y)|x > 0, y > 0\}$ o espaço vetorial em que as operações são definidas por:

- $(x, y) + (z, w) = (xz, yw)$, para quaisquer $(x, y) \in V$ e $(z, w) \in V$.
- $k(x, y) = (x^k, y^k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$ e todo $(x, y) \in V$.

Em relação a este espaço V, responda:

1. Se $\boldsymbol{u} = (8,4)$, $\boldsymbol{v} = (4,6)$ e $\boldsymbol{w} = (4,2)$, quanto é $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$? E $k\boldsymbol{w}$, para cada $k \in \{-1, 2, 3\}$?
2. Represente a seguir os vetores e resultados das operações acima, quando for possível.

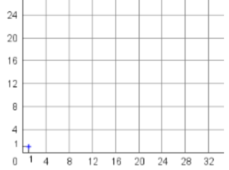


Figura 1a. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

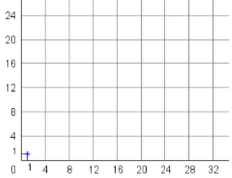
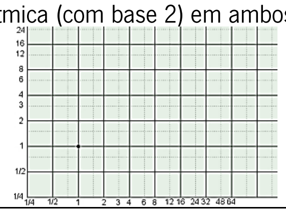
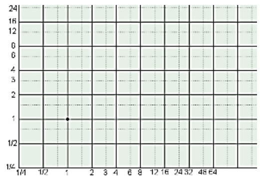


Figura 1b. $k\boldsymbol{w}$

3. Há como obter as mesmas respostas geometricamente, como se faz com as operações usuais da geometria analítica? Explique.
4. Em Física Experimental e nas Engenharias é comum plotar dados em gráficos *dilog*, que usam escalas logarítmicas em ambos os eixos. Numa escala logarítmica com base 2, por exemplo, deve-se dobrar os valores ao andar uma unidade para a direita, ou para cima. Isso é útil ao analisar dados que percorrem intervalos muito grandes.
   Represente novamente os resultados das operações realizadas em V, mas dessa vez utilize uma escala logarítmica (com base 2) em ambos os eixos.





Os alunos iniciaram a resolução da tarefa individualmente e conforme avançavam na resolução das questões, Téo realizava paralelamente a correção. Primeiramente solicitou que diferentes alunos verbalizassem as suas respostas para cada operação da Questão 1 e as anotou no quadro. De seguida passou a discutir a Questão 2, sem se aperceber que a maioria dos alunos ainda não a tinha respondido na folha da tarefa.

Téo: Quais destes vetores são viáveis de representar nessa região?

Aluno2: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ e $2\boldsymbol{w}$

Téo: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dá e $2\boldsymbol{w}$ dá. Qual o problema de $-\boldsymbol{w}$?

Aluno2: É muito pequeno.

Téo: É muito pequeno para essa ordem de grandeza da região que demarquei. E esse aqui [$3\boldsymbol{w}$] acontece o contrário, tem valores muito grandes nas coordendas para conseguir representar nessa área aqui.

Téo: E em relação à Geometria Analítica, quando eu somava vetores, qual era o procedimento?
(Um aluno responde gesticulando o que parece ser a regra do paralelogramo, Téo faz o registro no quadro e relembra a regra).

Téo: Funciona essa mesma interpretação para este espaço vetorial que estamos trabalhando agora?

Aluno3: Não. Não é mais um paralelogramo.

(Téo representa os pontos associados aos vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ no GeoGebra, para os alunos verificarem que o ponto associado a $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ está muito afastado dos associados a $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$)

Téo: E se eu tenho um vetor $\boldsymbol{w}$ e multiplico por -1, o que acontece com $\boldsymbol{w}$?

Aluno4: Inverte o sentido.

Téo: Inverte só o sentido, a direção é a mesma. O $2\boldsymbol{w}$ duplica o tamanho e preserva a direção. Eles ficariam todos alinhados nesse exemplo. Funciona da mesma forma nesse outro espaço vetorial?

(Alunos não respondem e Téo representa os pontos associados a $\boldsymbol{w}, -\boldsymbol{w}, 2\boldsymbol{w}$ e $3\boldsymbol{w}$ no GeoGebra para os alunos verificarem que não ficam alinhados). (OAT6)

Embora alguns alunos respondam à maioria das questões formuladas, a forma como Téo as faz não favorece a apresentação por parte destes dos seus conhecimentos prévios. Téo inicialmente faz alusão apenas à representação geométrica dos pontos associados aos vetores em questão. Quando no GeoGebra associa setas a estes vetores, não chama atenção para a origem no ponto $(1,1)$ e nenhum dos alunos o questiona a esse respeito. Entretanto, na fase seguinte da tarefa, após Téo esclarecer o objetivo da Questão 4 e o que é a escala logarítmica, dá tempo aos alunos para responderem, sendo que a primeira questão que surge é sobre a representação gráfica dos vetores.

Aluno7: Professor, o vetor sai aqui de baixo, ou eu só desenho a parte que fica dentro da região?

Téo: O zero neste espaço quem é? Quem é o vetor nulo da questão 6? Lembra que calculamos o vetor nulo?

Aluno7: É o $(1,1)$.

Téo: Então se quiser fazer a setinha tem que partir do $(1,1)$, que está fazendo o papel da origem agora. Se quiseres pensar que tem quadrantes, agora eles são meio esticados. Os eixos que dividem os quadrantes são estas duas retas que passam pela origem $(1,1)$.

(...)

Aluno2: Como eu represento o vetor nulo? Ele não teria que partir da origem, do $(0,0)$?

Téo: Qual é a origem dessa vez?

Aluno2: Não sei.

Téo: Quando a gente está no plano cartesiano com as operações usuais, a origem é o par $(0,0)$. (aluno concorda)

Téo: Neste espaço vetorial a origem...

Aluno2: Ah, sei, é o $(1,1)$.

Téo: Então se for fazer uma setinha representando o deslocamento da origem até o ponto que você quer, essa setinha deveria partir do (1,1). Estas são as coordenadas do centro do sistema. Então não é bem no cantinho esquerdo que a gente está acostumada. (OAT6)

Tais questionamentos reforçam o indício de que os alunos não tinham realizado a representação gráfica da questão anterior quando Téo a explorou e que, mesmo vendo a representação gráfica no GeoGebra, não se atentaram de que a origem não era o vetor $(0,0)$. Alguns alunos sequer haviam percebido que a tarefa se tratava da interpretação geométrica do espaço vetorial da Questão 6 da tarefa cuja correção foi discutida no início da aula. Tal situação indicia que apenas ver/ouvir a explicação do professor nem sempre é suficiente para os alunos refletirem sobre as questões colocadas e que se torna necessário deixar um tempo para pensarem e perceberem as suas dúvidas.

Após Téo circular entre todos os alunos e esclarecer suas dúvidas, faz um fechamento sobre a tarefa onde observa que com a escala logarítmica "os dois eixos encolheram de forma logarítmica e os vetores que não cabiam na área representada do 1.º quadrante agora cabem" (OAT6), que "os vetores múltiplos ficaram alinhados numa mesma reta que passa pela origem que agora é o (1,1)" (OAT6), e que a soma de vetores "parece que obedece a regra do paralelogramo, a diagonal que antes estava esticada, encolheu" (OAT6).

Na última fase da aula, Téo define subespaço vetorial e resolve dois exemplos. Ao explicar a definição utiliza diagramas e ao explorar os exemplos procura resgatar subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ que foram trabalhados na tarefa da primeira aula de espaços vetoriais em que se abordou o fechamento. Em particular, verifica se os conjuntos $W = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$ são subespaços do $\mathbb{R}^2$. Na tarefa da 1.ª aula de espaços vetoriais, tais conjuntos foram apresentados geometricamente e era necessário descrevê-los algebricamente, enquanto que aqui Téo faz o contrário. Na exploração dos exemplos, embora lance questões como: "Vocês lembram que objeto geométrico tem essa característica aqui, que mantém fixa a primeira coordenada e duplica a segunda?"; "Como eu tomo dois vetores distintos pertencentes a este conjunto?"; "Se eu pegar dois vetores distintos com essa característica aqui e somar, o vetor resultante continua tendo esse formato?" (OAT6), não dá tempo suficiente para que os alunos pensem e ele próprio as responde. Isso não quer dizer que esta seja a mesma abordagem na aula seguinte. Os exemplos aqui abordados já foram explorados intuitivamente na tarefa no fechamento, sendo que nesta aula Téo fez a formalização. Para além disso, eram os instantes finais da aula e "percebi a preocupação de Téo em explorar nos exemplos ao menos um conjunto que satisfazia a definição de subespaço vetorial e outro que não satisfazia, ao invés de finalizar a aula apenas com a definição de subespaço vetorial" (OAT6).

Téo fecha a aula apontando que na aula seguinte a discussão sobre subespaços vetoriais será ampliada e indicando a conexão entre espaços e subespaços vetoriais e o capítulo seguinte de Transformações Lineares:

> Na próxima aula vamos discutir subespaços para outros espaços vetoriais que já discutimos, como polinômios, matrizes, funções. Vamos trabalhar com coisas que não são vetorzinhos como setinhas, mas que também dá para olhar que tem essa estrutura de fechamento, de preservar as características dos axiomas. O que fizemos aqui já dá uma ideia do tipo de conjunto que vamos trabalhar. Lembrando que, a longo prazo, estes conjuntos serão domínios de transformações lineares, domínios das funções que a gente quer estudar. Vamos pensar em funções que saem de conjuntos como esse $[\mathbb{R}^2]$, ou conjuntos desse tipo $[\mathbb{R}^n,\ \mathcal{P}_n,\ M_{m\times n}]$ e que vão para outros espaços dessa natureza, desse tipo de espaço. (OAT6)

Reflexão sobre as aulas

No momento de reflexão no grupo sobre a concretização em sala de aula do que fora planificado para introduzir a definição de Espaço Vetorial, Téo faz uma retrospetiva sobre as suas aulas. Em particular, ao referir a resolução da tarefa que explorava o fechamento das operações de $(+)$ e $(\cdot)$, Téo reconhece que uma das dificuldades dos alunos na primeira questão estava associada a como representar geometricamente um vetor, mesmo que tenha explicitado como fazer isso. Indicia ter desafiado os alunos a apresentarem mais de uma forma para representar algebricamente os conjuntos envolvidos em cada figura dessa questão, ao invés de ser ele mesmo as apresentar:

> A 1.ª parte da atividade foi na segunda, e na aula de quarta-feira deu para pelo menos começar a discussão das Questões 5 e 6. Na 1.ª aula, que foi a tarefa do fechamento, tiveram um pouquinho de dúvida na Questão 1, das figuras, quanto à representação do vetor, que é a partir da origem... alguns confundiam essa representação. Eu até fiz um exemplo, meio genérico no quadro, mostrando que a setinha deveria partir da origem e a extremidade é que tinha que estar dentro do conjunto H, para eu discutir o que estava acontecendo. A Figura 2, que eram os dois quadrantes, eles também tinham a visão da união... Eu até falei para um deles: 'tem um jeito mais rápido, para você descrever isso aí. Dá uma pensada, para ver se não dá para melhorar essa descrição que você apresenta'. Ele ia pôr todas as condições, isso ou aquilo... ele ficou pensando um tempo, mas não chegou à resposta do produto das coordenadas. (EGC21, 31/03/2017)

Uma outra dificuldade dos alunos identificada por Téo, na primeira questão, se manifestou no momento dos alunos apresentarem justificativas para os questionamentos: 'A soma de quaisquer dois vetores de H está em H? Por quê?' e 'Os múltiplos dos vetores de H estão em H? Por quê?'

> A respeito da primeira questão da tarefa, 1.º quadrante [Figura 1, Quadro 23]. Teve o caso de um aluno que já fez duas vezes comigo, inclusive, a disciplina. A justificativa dele sobre o porquê a soma permanecer no 1.º quadrante era: 'a soma permanece lá dentro porque é fechado para a soma'. Aí tinha o porquê, certo? Ele colocou: 'Sim, porque sim'. (...) E eu tentando-o fazer apresentar um outro motivo. Ele falava: 'está positivo'. Eu falava: 'Então, escreve isso que você falou agora, não um 'sim, porque sim'.

> (...) Então, tem esse tipo de dificuldade, do aluno não saber o que ele precisa justificar e nem o que seria uma justificativa para o que ele precisa. (...) Não percebem muito a relação de causa e efeito nas demonstrações. (EGC21, 31/03/2017)

Segundo Téo, alguns alunos na apresentação de justificações têm dificuldade com a argumentação matemática. Em particular, observou a dificuldade em saber quando devem justificar utilizando um contraexemplo ou demonstrando que determinada característica é válida para todos os elementos daquele contexto.

> Eles não têm bem claro, ainda, o que é dar um contraexemplo e o que é provar para todos os vetores. Quando eles têm que demonstrar que vale para todo caso, eles querem dar um exemplo específico e quando é para dar um contraexemplo, fazem genérico. (EGC21, 31/03/2017)

Relativamente à segunda tarefa planificada no grupo que explorava a definição de espaço vetorial para conjuntos com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais, Téo refere que uma das dificuldades foi os alunos aceitarem que o conjunto envolvido já foi definido como fechado em relação às operações de $(+)$ e $(\cdot)$, e que estas não eram as usuais.

> Deixei a tarefa com as questões cinco e seis para eles olharem em casa, mas sem eu ter explicado nada. (...) E depois [de ter explorado a definição de espaço vetorial para vários exemplos], solicitei para resolverem as Questões 5 e 6, deixei para eles pensarem, [pois] não tinham nem olhado em casa. Levou um bom tempo para eles aceitarem que tinham que usar o zero, na segunda coordenada, ao invés da operação usual de multiplicação por escalar [sobre a Questão 5]. (...) Todos tinham a mesa dúvida do zero: 'o que faz com esse zero?'. Eu olhava os que tinham feito, e estava posto lá o produto usual, não tinham posto o zero. Nem tinham se tocado que a operação era outra. Alguns questionavam, e alguns já faziam do jeito que estavam acostumados, e colocavam o zero. (EGC21, 31/03/2017)

Ao perceber que os alunos não olharam para a tarefa em casa, ao invés de partir para a correção/discussão, Téo prefere dar um tempo para resolverem em sala de aula e assim poder esclarecer as suas possíveis dúvidas. No grupo já se esperava que tal dificuldade relatada por Téo surgisse, pois seria a primeira vez que os alunos teriam contacto com operações que não fossem as usuais que aprenderam na Geometria Analítica. Assim, a tarefa foi proposta com o intuito de que houvesse uma discussão acerca desse tipo de exemplo em sala de aula e não apenas deixar para que os alunos tivessem contacto por meio de livros ou de listas de tarefas.

Outra dificuldade observada por Téo durante a resolução da tarefa diz respeito à verificação dos axiomas da definição de espaço vetorial, sobretudo em relação às técnicas para provar igualdades.

> Eles têm um problema sério com verificação dos axiomas, porque eles têm duas coisas, e uma é igual a outra. (...) Eles meio que assumem que é verdade e começam a escrever que é verdade. (...) Não desenvolvem o lado esquerdo, para comparar com o lado direito e ver que são iguais. Ou sair de um lado e chegar no outro. (...) Eles pensam: 'mas é igual, o que é para fazer?' (EGC21, 31/03/2017)

Embora os alunos levaram mais tempo do que o esperado para a concretização das tarefas, o que poderia inclusive comprometer o tempo com discussões sobre outros pontos do conteúdo, tais momentos de trabalho proporcionaram, na visão de Téo, alguns contributos para a aprendizagem do conteúdo sobre espaço vetorial, tal como explica:

> A gente realmente subestimou o tempo que eles iam gastar com isso aí. Eles demoram muito mais do que a gente imagina. (...) Mas também não deu para terminar as duas [questões], eu deixei para eles terminarem em casa e na próxima aula pretendo discutir as questões [da segunda tarefa]. (...) Acho que dar a chance de eles pensarem nisso e a gente poder corrigir cada um, ajuda no facto de perceberem que um Espaço Vetorial não está definido apenas para operações usuais. Você pode definir outras operações e, ainda assim, talvez satisfaçam as propriedades [da definição] de Espaço Vetorial. Acho que, por conta eles não percebem isso. E quando a gente só fala, não vê que eles não estão entendendo isso nas aulas. Então para, pelo menos, os que tentaram fazer, os que pediram ajuda, e que eu pude corrigir, acho que vão estar mais atentos a isso depois. (...) Acho que, de forma geral, deu para perceber muita coisa importante [com as duas tarefas]. [Graciela: Em que sentido?] Acho que foi identificado onde que os alunos têm dificuldade, que [antes] a gente passava batido por cima. (...) Deu para ver também como os alunos pensam, como eles raciocinam para verificar propriedades, para tentar entender o que está na definição, no enunciado, inclusive. (EGC21, 31/03/2017)

Téo reconhece que apenas falar sobre o conteúdo e suas particularidades ou resolver exemplos no quadro não é suficiente para que os alunos compreendam o conteúdo e que tal postura também não é suficiente para que o professor perceba qual o nível de entendimento dos alunos. Assim, Téo reconhece que por meio da resolução das tarefas conseguiu perceber algumas dificuldades que antes lhe passavam despercebidas e no decorrer das suas reflexões sobre as aulas seguintes é possível observar que se atenta a pormenores que poderiam condicionar a aprendizagem dos alunos.

Nesse momento de reflexão no grupo, também procurei relatar minhas impressões sobre as duas primeiras aulas de Téo. Em particular destaquei a sua postura de responder aos questionamentos dos alunos com outras perguntas que os conduzissem a visualizar o caminho para a solução, ao invés de dar respostas prontas. Apontei a pouca ênfase que deu à linguagem algébrica de conjuntos ao denotar alguns espaços vetoriais, bem como à transição entre esta linguagem e a linguagem natural, tendo em vista às dificuldades dos alunos com a notação algébrica, que foram identificadas na resolução das tarefas.

> Investigadora: Os alunos o chamavam bastante (...). Os alunos perguntavam e ele não dava as respostas prontas, ele respondia com uma outra. Isso achei importante, não dar as respostas prontas, deixá-los pensarem.
> (...)
> Investigadora: O que talvez tenha faltado na tua aula foi escrever esses conjuntos formalmente, para dar evidência à linguagem formal e fazer a relação com a linguagem natural.
> Bruna: Eu não escrevi também.
> Téo: Por exemplo, o conjunto de polinômios, na outra turma que eu tinha aula depois da que assistiu, eu coloquei entre chaves: 'todos os polinômios de grau menor ou igual a n'. Realmente, na turma da Engenharia de Produção ficou pior. Na outra [turma] já fiz melhor. (EGC21, 31/03/2017)

Téo indicia ter percebido que poderia ter explorado mais a linguagem para denotar conjuntos, tanto que refere que ao ministrar a mesma aula em outra turma subsequente à aula observada, procurou atender a tal detalhe.

Na reflexão sobre a terceira aula, particularmente sobre a tarefa que envolvia a interpretação geométrica de um subespaço vetorial não usual, Téo referiu que os alunos "tinham a tendência de representar a origem no ponto $(0,0)$ ao invés do ponto $(1,1)$" (EGC22, 31/03/2017). Apesar de Téo ter proposto tal tarefa na sequência da correção da Questão 6 da que envolvia o referido espaço vetorial não usual (os alunos a tinham resolvido em casa), em que os alunos tiveram que provar que o elemento neutro é o (1,1), eles não conseguiram fazer a transição entre as representações algébrica e geométrica de tal objeto matemático, sem o apoio do professor. "Téo alertou o grupo sobre tal dificuldade e sugeriu a alguns dos colegas que ainda não haviam concretizado a segunda tarefa, que a propusessem juntamente com a tarefa da interpretação geométrica" (NC, março de 2017), no sentido de facilitar a conexão entre as tarefas. Entretanto, tais professores perceberam nos alunos a mesma dificuldade. Na reflexão conjunta do grupo constatou-se que pode não ter ficado claro aos alunos de que o elemento neutro do espaço vetorial em que se está trabalhando representa a origem do sistema cartesiano.

Como fruto das discussões realizadas no grupo sobre a concretização das aulas planificadas, Téo infere que na aula de subespaços vetoriais, subsequente às aulas observadas, procurou dar ênfase às diferentes representações dos objetos matemáticos envolvidos, bem como ao processo de como se mostra que um conjunto é ou não um subespaço vetorial.

> Nos exemplos de subespaços, que eu fiz na última aula – que eu pude fazer com as duas turmas – eu pegava alguns subespaços de matrizes, alguns de polinômios, alguns

de funções, e todos em que eu ia justificar, eu ia fazendo a sequência de igualdades e em cada sinal de igual, eu justificava o porquê, explicitamente: 'esse aqui é por causa da definição', 'esse aqui é por causa das propriedades dos números reais', 'esse aqui é por causa da característica do conjunto onde você pegou os vetores'. (...) Indiquei onde estavam sendo usadas as hipóteses, porque eles não têm claro isso. Só iniciei a parte de intersecção, mas já fiz um exemplo e tentei que eles descrevessem o conjunto intersecção. Fui forçando, dizendo 'oh, encontramos essa relação entre as variáveis, agora como que escrevo um vetor que satisfaz essas condições?', e até que saiu alguma coisa. Escrevemos de duas formas diferentes o conjunto. (...) Na parte de subespaço gerado também vai dar para voltar nessa questão da notação dos conjuntos, que a gente viu que é a dificuldade deles. (EGC22, 07/04/2017)

Inclusive Téo aponta em que outros momento a questão da notação algébrica para conjuntos poderia ser retomada, como no estudo do tópico subespaço gerado.

Uma das implicações da reflexão do grupo sobre a abordagem dada à definição de espaço vetorial foi a construção de uma nova lista de tarefas para os alunos resolverem extra classe, a partir das listas utilizadas em semestres anteriores pelos professores do grupo, sobre todo o capítulo referente a este tópico, focando no tipo de questão proposta nas tarefas e nas dificuldades que surgiram na concretização das mesmas. Sendo assim, foram valorizadas questões que exploravam a definição de espaço vetorial com operações não usuais, a interpretação geométrica de espaços vetoriais não usuais, a transição entre a linguagem natural e a linguagem algébrica na descrição de subconjuntos de diferentes espaços vetoriais. Algumas das questões foram adaptadas a partir de questões de uma lista de tarefas partilhada por Téo, como ilustra um trecho do diálogo no grupo sobre a elaboração das questões da lista de tarefas extra classe:

Investigadora: Eu substituí essas duas primeiras por essas duas da lista que Téo me passou. Para cada uma montei questõezinhas, bem para ser o estilo da tarefa que a gente deu para eles. (...) A Bruna me passou esta do livro do Anton. É uma questão geométrica. Você tem os vetores representados no cubo e tem que verificar se é LI ou LD. Primeiro, eu coloquei a geométrica e depois os exercícios numéricos.

Téo: Acho importante acrescentar pelo menos mais uma onde só pede para verificar se é espaço vetorial, sem direcionar o passo a passo de cada axioma que devem verificar, para irem fixando os axiomas. (...) Dá para pegar mais dessas geométricas no livro do Boulos, ele faz dependência e independência linear no $\mathbb{R}^3$, lá tem algumas coisas. Vou dar uma olhada, e se tiver algo diferente dessa aí eu compartilho.

(Discussão sobre a dificuldade dos alunos em expressar algebricamente os conjuntos na tarefa do fechamento)

Téo: Na minha lista de tarefas eu escrevia [na linguagem natural] e já usava a notação [algébrica], só que isso já no enunciado. Eu não pedia para eles pensarem qual era a notação.

Bruna: Eu vi essa tua notação, pois peguei umas questões de subespaço da tua lista para trabalhar em sala. Eu vi que você escrevia: 'conjunto das funções pares, isto é,...', que você dizia o que eram função pares tanto na linguagem natural como na linguagem matemática.

Téo: Mas eu acho válido forçar eles a treinarem a linguagem. Então acho bom fazer diferente do que essa mistura que eu fiz. Dá para colocar duas questões para verificar se é subespaço. Uma coloca os enunciados na linguagem natural, daí eles vão ter que ao menos saber descrever qual a carinha de um vetor pertencente a este conjunto, e outra questão com os conjuntos na linguagem algébrica. (EGC22, 07/04/2017)

Téo referiu que neste semestre não utilizaria a nova lista de tarefas extra classe, mas adaptaria a lista que utilizava anteriormente com base nas discussões realizadas, tendo em vista que já a havia divulgado na página da disciplina. Sendo assim, divulgaria aos alunos uma errata da lista.

> O problema é que eu já pus online. Mas eu não disse ainda para eles: 'está ali, podem fazer'. É claro que alguém já pode ter pegado, sempre tem aqueles interessados. Mas se pegaram, foram poucos, então acho que dá para fazer uns ajustes de acordo com o que modificamos aqui e daí passo para eles. (EGC22, 07/04/2017)

Ao refletir sobre o que poderia ser melhorado na abordagem que foi dada à introdução de espaços vetoriais, Téo apresenta uma sugestão para clarificar o enunciado da primeira questão da primeira tarefa, visto que inicialmente os alunos não entenderam que tinham que responder a três questionamentos para cada uma das quatro figuras.

> Eu acho que a gente pode melhorar a primeira questão. Colocar a primeira figura e depois as três perguntas, sobre essa figura. Aí, só depois que eles tiverem resolvido isso como um primeiro item, perguntar com um segundo enunciado, para três figuras diferentes... Repetir as três perguntas. 'Respondam o exercício anterior, para esse caso, para esse e para esse'. Talvez, isso enfatize que eles vão ter o dobro de coisas para fazer. (EGC21, 31/03/2017)

A sugestão de Téo foi adaptada para o semestre seguinte, sendo que primeiramente foram apresentadas as figuras e depois os três questionamentos, ao contrário do que aparece no Quadro 5. Téo também sugeriu o controle do tempo para os alunos otimizarem o seu tempo na resolução das tarefas, além de projetar as questões no quadro para facilitar a discussão das mesmas.

> Dá para deixar projetada a questão, e você controlando o tempo, para eles não demorarem muito e todos ficarem no mesmo ponto. Principalmente nas primeiras, que foi onde mais demoraram. Na correção, a projeção ajuda bastante. Todo mundo fica focado na questão, não dispersa. (EGC22, 07/04/2017).

Nas suas aulas observei que Téo utilizou a estratégia que sugeriu, entretanto nem sempre ao fazer a discussão todos os alunos haviam finalizado a resolução. Ainda em relação à questão do tempo, ao ouvir a perspetiva de alguns membros do grupo de que em função do cumprimento do cronograma da disciplina, ficaria difícil preparar aulas diferenciadas para todos os tópicos da disciplina, Téo sugere que na continuidade do trabalho do grupo seja dada atenção "aqueles tópicos principais, aqueles de maior dificuldade" (EGC22, 07/04/2017). Para a seleção de tarefas, sugere "tarefas curtas ou até aquilo que você pode retomar em várias aulas depois, aquele exemplo bom que você tem" (EGC22, 07/04/2017).

Síntese

No encontro para discussão e planificação das aulas sobre a 'Introdução a Espaços Vetoriais', Téo partilha com o grupo a sua experiência com o ensino do tópico, em particular uma breve motivação à definição de espaço vetorial resgatando propriedades algébricas de conjuntos numéricos, além de dois exemplos envolvendo espaços vetoriais com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais. Embora tais exemplos fossem contemplados em alguns livros de Álgebra Linear, não eram de conhecimento geral do grupo. Téo auxilia os colegas na compreensão dos exemplos e discute-se no grupo a finalidade de abordar com os alunos os espaços vetoriais não usuais. Téo relata ao grupo que as principais dificuldades que observou nos alunos em semestres anteriores, se relacionavam à verificação da definição de espaço vetorial quando as operações eram não usuais e à verificação da definição de subespaço vetorial.

Após o levantamento das estratégias de ensino de cada professor e das dificuldades sentidas no ensino e na aprendizagem do conceito de Espaço Vetorial, o grupo elaborou a sua estratégia de ensino focada inicialmente em duas tarefas principais. A primeira visava o entendimento do que é o fechamento de um conjunto para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ usuais, condição necessária para um conjunto ser um espaço vetorial. Na definição das questões desta tarefa, cuja ideia emergiu durante uma reunião de trabalho a partir das intervenções dos diferentes elementos do grupo, Téo problematizou a redação de duas das questões que induziam ao erro do aluno e apontou a solução para evitar tal problema. Apontou a falta de clareza do objetivo da tarefa para os alunos, o que implicou em outras duas questões que induziam a retirada de conclusões. A segunda tarefa, composta por duas questões, que envolviam a definição de espaço vetorial em conjuntos com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais, uma das questões foi adaptada de um dos exemplos apresentados por Téo ao grupo. No grupo era latente a discussão sobre a aplicação contextualizada dos espaços vetoriais com operações não usuais. Motivados por esta discussão Téo e Bruna idealizam a interpretação geométrica do espaço vetorial da questão da segunda tarefa que fora adaptada do exemplo de Téo, que simula tal interpretação no GeoGebra, apresenta a ideia ao grupo, donde surge a ideia de uma terceira tarefa. Téo se prontifica a elaborar as questões, já amadurecidas no grupo.

As aulas de Téo são organizadas em torno da Introdução – onde procura resgatar o conteúdo da aula anterior e fazer a conexão com o conteúdo a ser trabalhado na aula –, Desenvolvimento e Conclusão – procura sintetizar o que fora trabalhado em aula e indica o que vai ser trabalhado na aula seguinte. Em particular, na primeira aula, para introduzir a tarefa do fechamento, inicia com o estudo do fechamento do conjunto solução de um sistema linear homogêneo, que era objeto de estudo no capítulo anterior. Assim, procura introduzir um novo conceito a partir de um problema familiar aos alunos. Tal introdução não havia sido planificada no grupo, somente a tarefa. De forma geral, em suas aulas, Téo não fica totalmente preso ao que fora planificado no grupo. Ao contrário da primeira tarefa, onde por meio de um exemplo Téo procurou preparar os alunos para a sua concretização, ao propor a segunda tarefa que explorava a definição de espaço vetorial, não havia resolvido nenhum exemplo completo com os alunos. No grupo fora comentada a importância de se resolver um exemplo, provando todos os axiomas da definição de espaço vetorial. Durante a resolução Téo apercebe-se de algumas dificuldades, principalmente em relação à prova de igualdades, a interpretação dos elementos oposto e neutro, e procura na correção das questões e nas aulas subsequentes dar atenção a tais dificuldades.

Durante a resolução de tarefas em sala de aula, Téo procura não dar respostas prontas aos alunos e sim fazer questionamentos ou dar pequenas explicações, que os levem a retirar conclusões. Porém, nos momentos de discussão em grande grupo, na maioria das vezes, Téo é quem apresenta as questões e já as responde procurando explicar o porquê daquele resultado e sua relação com a teoria. Por outras vezes, acaba não discutindo as suas respostas e as utiliza como ponte para obter a resposta do questionamento seguinte. Tais atitudes transparecem ser fruto da pressa em avançar com o conteúdo, visto que os alunos demoram na resolução de tarefas na sala de aula, ou não cumprem com o compromisso de resolver em casa a tarefa, como aconteceu com a segunda, ou faltam muito às aulas e então ficam perdidos na resolução das tarefas, fatores estes que acabam comprometendo o aproveitamento do tempo em sala de aula. Importa destacar que, por exemplo, na tarefa da interpretação geométrica do espaço vetorial não usual, Téo dá pouco tempo para os alunos pensarem na 1.ª questão e em seguida a discute. Ao solicitar que os alunos resolvam a 2.ª, Téo apercebe-se que os alunos não entenderam o papel do elemento neutro daquela soma não usual e então dá tempo suficiente para que todos os alunos resolvam a questão e esclarece as dúvidas que surgem.

No grupo tivemos dois momentos de reflexão, o primeiro após as duas primeiras aulas observadas e o segundo após a terceira aula observada. Em ambos os momentos Téo procura fazer uma retrospetiva de suas aulas, realçando as dificuldades manifestadas pelos alunos, que na sua maioria eram similares às verbalizadas pelos demais elementos do grupo. Téo mostra-se receptivo a sugestões sobre a sua aula, relacionadas com a dificuldade dos alunos em fazer a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica de conjuntos, e sugere ter-se apercebido de que poderia ter explorado mais essa transição ao referir que em outra turma de Álgebra Linear deu mais ênfase a este elemento. Tais reflexões sobre as dificuldades dos alunos incidem sobre a lista de tarefas para os alunos praticarem extra classe, que é adaptada, de modo a incorporar questões semelhantes às exploradas nas tarefas, questões que explorem a linguagem algébrica dos conjuntos e que explorem a interpretação geométrica da (in) dependência linear de vetores. Além disso, Téo relata ao grupo a atenção que passou a dar para ensinar como os alunos devem justificar que um conjunto é ou não um subespaço vetorial.

7.4.2. Tarefas avaliativas

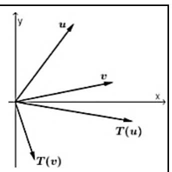
No grupo de trabalho foram planificadas algumas tarefas com caráter avaliativo das aprendizagens dos alunos. Tais tarefas emergiram com o intuito de os professores complementarem a componente avaliativa dos alunos, para além das provas escritas, denominados no grupo por 'trabalhos'.

7.4.2.1. Trabalho sobre "Transformações Lineares"

A tarefa sobre Transformações Lineares era composta por duas etapas. A primeira etapa, para ser resolvida com recurso ao papel e lápis, consistia num conjunto de sete questões, sendo que seis exploram o conceito de Transformação Linear e a sua interpretação geométrica no plano ($\mathbb{R}^2$), e a outra questão explora apenas o conceito somente para espaços vetoriais quaisquer (Quadro 26).

Quadro 26. Questões da tarefa proposta com recurso ao papel e lápis.

PARTE I (com recurso ao papel e lápis)



1. Na figura abaixo estão representados os vetores $u, v, T(u)$ e $T(v)$ onde $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear. Determine, geometricamente os vetores:

$a)\ u+v$ b) $u-v$ c) $T(u+v)$ d) $T(u-v)$ e) $T\left(2u+\frac{1}{2}v\right)$

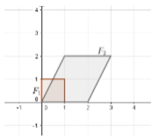
2. Dois professores de Álgebra Linear do departamento de Matemática - DMAT, Téo e Lisa, estavam discutindo sobre a definição de Transformação Linear. Téo afirmou que "Uma transformação $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, onde V e W são espaços vetoriais, é uma transformação linear se dados quaisquer vetores $u, v \in \mathrm{V}$, tem-se $\mathrm{T}(u+v) = \mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v)$ e $\mathrm{T}(\alpha u) = \alpha\mathrm{T}(u),\ \alpha \in \mathbb{R}$".

Lisa afirmou que "Uma aplicação $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é, onde V e W são espaços vetoriais, é uma transformação linear se $\mathrm{T}(\alpha u + v) = \alpha\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v)$, $\forall\, u, v \in \mathrm{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$".

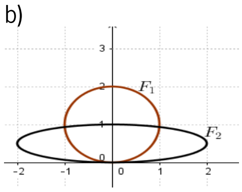
Verifique se a afirmação de Lisa é equivalente à afirmação de Téo. Justifique sua resposta.

3. Verifique em cada caso, se a transformação que transforma a figura F_1 na figura F_2 é linear. Justifique sua resposta e em caso positivo, dê a lei que define a transformação linear.

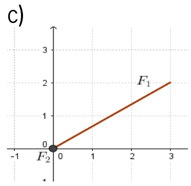
a)



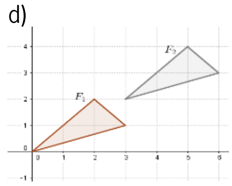
b)



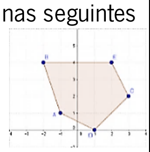
c)



d)



4. Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Em caso positivo, dê a lei da transformação linear e represente geometricamente. Em caso negativo, justifique.
5. Dado o polígono $ABCDE$, na figura abaixo, represente geometricamente a imagem desse polígono nas seguintes transformações:



a) reflexão em torno do eixo x; b) reflexão em torno do eixo y; c) reflexão em torno da reta $y = kx$
Para a escolha do k, verifique quais são as vogais presentes no primeiro nome dos membros da equipe, e use o maior valor numérico associado, conforme abaixo:

A	E	I	O	U
1	2	3	4	5

Por exemplo: Gabriel e Róger. Usar $k = 4$.
6. O quadrado $ABCD$, onde $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$ é transformado por um operador linear no paralelogramo $A'(0,0)$, $B'(2,3), C'(8,4), D'(6,1)$. Determine a matriz do operador.
7. No exercício anterior, se tomarmos $B'(1,5)$, o problema teria solução? Justifique.

A segunda etapa, no ambiente computacional, era composta por duas questões (Quadro 27). Uma delas consistiu na implementação de forma dinâmica no $\mathbb{R}^2$ da Transformação Linear definida pela reflexão de uma determinada figura geométrica através de uma reta qualquer. Esta questão já fora explorada na primeira etapa com recurso ao papel e lápis. A outra questão também envolveu a implementação de forma dinâmica, porém no $\mathbb{R}^3$, de uma das Transformações Lineares: Rotação em torno de um eixo, Reflexão através de um plano qualquer, Reflexão através de uma reta qualquer que passe pela origem e Cisalhamento nas direções xy, xz ou yz. O objetivo desta segunda etapa era propiciar ao aluno a visualização de forma dinâmica do efeito geométrico das transformações lineares envolvidas sobre um objeto geométrico, além da transição da representação algébrica para a geométrica.

Quadro 27. Questões da tarefa proposta no ambiente computacional em duas e três dimensões.

PARTE II (mediada por tecnologias)

1. Escolha uma ferramenta tecnológica para representar dinamicamente as transformações ocorridas no polígono $ABCDE$ da questão 5 da parte I da tarefa.
2. Utilizar uma ferramenta tecnológica para implementar um dos operadores lineares no $\mathbb{R}^3$: Rotação em torno do eixo x, Rotação em torno do eixo y, Rotação em torno do eixo z, Reflexão através de um plano que passa pela origem, Reflexão através de uma reta que passa pela origem, Cisalhamento na direção xy, Cisalhamento na direção yz, Cisalhamento na direção xz.

Diretrizes para a questão 2:

Escolha um objeto geométrico para aplicar o referido operador no $\mathbb{R}^3$ e apresente a atividade, na ferramenta tecnológica, de maneira organizada, dinâmica e interativa. (Deve ficar claro qual o papel do operador linear ao transformar o objeto escolhido). A implementação deve atender os requisitos:

i. Rotação em torno de um eixo coordenado: apresentar campo de entrada para o ângulo de rotação, fazer a transformação do objeto geométrico para cada ângulo e apresentar a matriz do operador correspondente a transformação para cada ângulo.
ii. Reflexão através do plano: apresentar campo de entrada para a equação do plano, fazer a transformação do objeto geométrico para o plano qualquer da entrada e apresentar a matriz do operador correspondente a transformação.
iii. Reflexão através da reta: apresentar campo de entrada para a equação da reta, fazer a transformação do objeto geométrico para a reta qualquer da entrada e apresentar a matriz do operador correspondente à transformação.
iv. Cisalhamento: apresentar campo de entrada para o fator de cisalhamento, fazer a transformação do objeto geométrico e apresentar a matriz do operador correspondente para cada fator de cisalhamento.

Preparação da tarefa

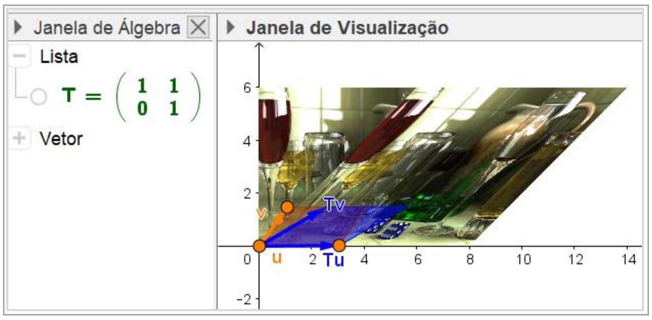
A ideia de propor a tarefa surgiu da expectativa comum dos elementos do grupo de diversificar a avaliação das aprendizagens dos alunos, trabalhar com a interpretação geométrica dos operadores lineares (que era uma dificuldade manifestada por Nina) e explorar o uso da tecnologia no processo de aprendizagem. Na reflexão sobre a prática de ensino sobre Mudança de Base, concluiu-se que deveriam ser propostas tarefas para os alunos explorarem a tecnologia ao invés apenas de o professor mostrar aos alunos algumas interpretações.

No encontro em que o grupo se reuniu para iniciar a planificação, primeiramente identificamos como cada participante ensinava o conteúdo de Transformações Lineares para então discutirmos a avaliação (tarefa). Ao contrário dos demais professores, que ensinavam primeiramente a teoria de Transformações Lineares e tratavam como um capítulo à parte os Operadores Lineares especiais em duas e três dimensões (Cisalhamento, rotação, reflexão, dilatação/contração), Téo manifestou que no semestre anterior (antes de participar no grupo) considerou os dois conteúdos num único capítulo e abordou os operadores especiais nos exemplos sobre tópicos de transformações lineares:

> Eu fui fazendo meio misturado semestre passado. Eu não quebrei: isso é Transformação Linear e isso são Operadores Lineares. (...) Quando fui falando das transformações lineares, alguns dos exemplos já eram de operadores, na verdade. Aí eu pegava numa aula a rotação de tantos graus, aí eu comentava que a forma geral ficava com os cossenos e senos. Em outra aula projeções no plano, reflexão, coisas desse tipo. Só que eu não fiz assim, vou ver todas as operações que são possíveis no plano e no espaço. Acabei não fazendo isso. Dava para ter experimentado mais, para eles conhecerem mais exemplos. (...) É interessante, na hora de exemplificar alguma coisa, já tentar ver quais dos exemplos dessas transformações geométricas se encaixavam naquele momento. Para ir criando uma bagagem de exemplos e aos poucos ir explorando estes operadores geométricos. (...) Porque quando chega nessa parte de transformação, já estamos meio atrasados, já está chegando o final do semestre. Então semestre passado já fui pondo algumas coisas de operadores nesse sentido também, para não ficar só nisso e faltar no finalzinho tempo para trabalhar Produto Interno. (EGC8, 07/10/2016)

A abordagem de Téo, também utilizada por alguns livros didáticos, na visão do grupo parecia ser mais adequada, pois poderia dar mais sentido às transformações lineares por meio da exploração simultânea da teoria e interpretação geométrica. Téo, que na data do referido encontro já havia introduzido o conteúdo, ao partilhar com o grupo uma construção no GeoGebra que utilizou para introduzir o conceito de Transformação Linear (Figura 16), revela a sua iniciativa e preocupação em motivar o aluno para o estudo do referido tópico por meio da visualização do efeito de uma transformação geométrica (linear) sobre uma imagem.

Figura 16. Visualização do efeito de uma transformação linear sobre uma imagem.

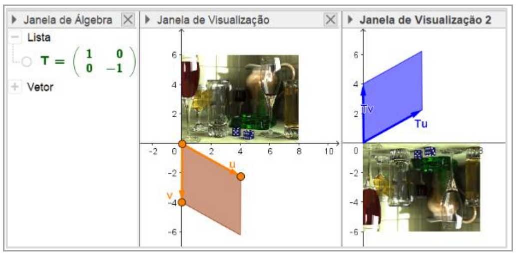


A forma como introduziu o conteúdo indicia a sua preocupação com a contextualização e o próprio uso da tecnologia para explorar de forma dinâmica as transformações ocorridas na imagem. Este último aspeto seria difícil de visualizar apenas com recurso ao quadro, pois seria necessário desenhar uma figura diferente para cada transformação que aplicasse, o que implicaria limitação do tempo de aula para explorar, por exemplo, a definição de Transformação Linear de forma algébrica. Téo evidencia como fez a exploração do GeoGebra:

> Para introduzir a definição de Transformação Linear [no atual semestre] eu usei um exemplo com o GeoGebra e transformações de imagens. Falei a eles que no *Photoshop*, você pode esticar uma imagem, rotacionar a imagem, fazer aquelas coisas que a gente está acostumada. Isso tudo envolve Transformação Linear. (...) Aí fui alterando a matriz para ver como ficava a imagem resultante. Apliquei todas aquelas transformações. Aí peguei essa figura coloquei uns vetores em cima para ver onde a soma de vetores ia parar na imagem resultante. (EGC8, 07/10/2016)

Em contrapartida, Téo recebeu contribuições do grupo para clarificar a sua construção no GeoGebra, de forma que melhorasse a visualização do efeito da transformação linear sobre a imagem e sobre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, conforme a Figura 17:

Figura 17. Reformulação da Figura 16 após contributo do grupo.



Por fim, foi consensual no seio do grupo que se adotaria uma abordagem semelhante à de Téo, e que se deveria adaptar a lista de tarefas (já utilizada pelos professores) para explorar a teoria geral de transformações lineares intercalada com tarefas que valorizassem a sua interpretação geométrica. Definida a forma como o conteúdo seria trabalhado, procurou-se construir a tarefa avaliativa de modo a atender tal abordagem.

No primeiro momento de discussão da construção da tarefa, em que foram partilhadas ideias que surgiram a partir das experiências vivenciadas por alguns dos participantes do grupo, Téo não apresentou inicialmente nenhuma ideia e manteve uma postura que é característica de si, primeiro ouvir para depois falar: "Téo se manteve em silêncio praticamente o tempo todo. Ouvia atentamente as manifestações dos colegas e tentava construir (individualmente) uma questão no seu *Tablet* a partir das ideias que iam sendo postas no grupo" (NC, outubro de 2016). Após ouvir as perspetivas dos colegas para a elaboração da tarefa, apresenta uma sugestão de uma tarefa para ser feita com recurso ao GeoGebra:

> Estou pensando em algo assim com o GeoGebra: pegar uma foto, uma imagem ou alguma figura geométrica, identificar alguns vértices, aplicar umas quatro das transformações lineares dessas geométricas (rotação, cisalhamento, reflexão, dilatação) e apresentar a figura transformada. E aí fazer perguntas do tipo: Tem alguma entre essas transformações que preserve o ângulo entre os vetores associados a esses pontos? Tem alguma que transforme um quadrado em um segmento? Que aí tem algumas que vão satisfazer, outras que não. Essas perguntas estão associadas, de certa forma, a classificações que a gente pode fazer para os operadores lineares. (EGC8, 07/10/2016)

A ideia de Téo consistia em apresentar uma figura no GeoGebra e a sua respetiva imagem, após aplicar uma das transformações geométricas estudadas na aula, e fazer questionamentos aos alunos relacionados com as propriedades que se poderiam observar em tais transformações.

Num segundo momento de discussão sobre a tarefa, ao analisar a ideia de Téo, que não foi apresentada formalmente, apenas verbalizada, o grupo considerou que não faria diferença o uso de software para a concretização da tarefa e que a mesma ideia poderia ser trabalhada apenas com recurso ao papel e lápis, opinião que foi corroborada por Téo:

> Se não tivesse o GeoGebra ou essa ideia de usar um software, se pegar uma figura estática, dá para indicar alguns pontos e as respetivas imagens. Tendo as imagens é possível, por exemplo, ter como tarefa de esboçar como é que seria a imagem de uma figura, baseado nesses elementos que foram transformados. (EGC9, 10/10/2016)

O grupo problematiza a finalidade do uso do software para a realização da tarefa. Téo aceita os argumentos dos colegas e reformula a sua ideia. Por fim, a proposta de Téo foi lapidada por alguns professores do grupo e culminou nas questões 3 e 5 da primeira etapa da tarefa (Quadro 26). A segunda etapa, mediada pelo GeoGebra, foi construída a partir de uma ideia compartilhada por duas professoras do grupo. Téo participou diretamente na construção das diretrizes da questão 2 (Quadro 27), como elucida a seguinte transcrição:

> Acho que dá para pedir para entrar com o plano e apresentar qual é a matriz dessa reflexão [através de um plano qualquer]. Aí sim, [o aluno] vai ter que saber a teoria para encontrar a reflexão através de um plano qualquer. (...) Teria que ficar claro que para quem vai abrir o arquivo, e interagir com ele, que tem que entrar com o plano, de forma que a matriz e a imagem da transformação sejam atualizadas dinamicamente. (...) Temos que colocar uma instrução para cada uma das transformações, porque uma instrução pode não funcionar bem para outra [transformação], então tem que ser para cada uma. (...) A ampliação e redução é o mais simples. Acho que daria para pedir para implementarem dois [operadores]. Ou tira dilatação/redução e dá mais opções. Por exemplo, abre a rotação em torno dos eixos e para o cisalhamento, a mesma coisa [em diferentes direções], aí dá mais opções. (EGC10, 17/10/2016)
>
> O cisalhamento no $\mathbb{R}^3$ não foi trabalhado em sala de aula, apenas no $\mathbb{R}^2$. Na segunda-feira, eu, Téo e Tito, acrescentamos esse item [cisalhamento no $\mathbb{R}^3$] e até discutimos: 'é um trabalho, eles podem pesquisar, perguntar aos professores, pesquisar nos livros'. (Investigadora, EGC11, 21/10/2016)

Ao ouvir os colegas sobre a importância do *feedback* aos alunos em relação à etapa da tarefa mediada pelo software e sobre a possibilidade de fazer isso por meio da apresentação pelos alunos dos seus trabalhos em sala de aula, Téo indicia que primeiro vai analisar os trabalhos para então decidir como dar esse retorno:

> Uma possibilidade é sortear alguns para apresentar, digamos, só o suficiente para cobrir a ideia geral do conteúdo. Por exemplo, um entre os que fizerem uma rotação e da mesma forma para os que pegarem outras transformações. E aí todos vão ver como que é, serve como uma revisão. Dependendo do que surgir nos trabalhos dá para fazer uma discussão, ou comentar para cada grupo os erros e acertos. Particularmente eu iria fazer

caso precisasse, depende do que vier nos trabalhos. Vou ver a questão do tempo, de como vai estar meu tempo na disciplina. Não consigo marcar aula extra com essa turma. (EGC9, 10/10/2016)

Na perspetiva de Téo, a apresentação não faria parte da avaliação, seria uma forma de socializar alguns trabalhos com a turma e a partir deles fazer uma revisão do conteúdo para a prova.

Reflexão no grupo

Na concretização da tarefa no semestre 2016/02, Téo foi o único entre os professores do grupo que propôs aos alunos, aos pares, que resolvessem em sala de aula a primeira etapa. Durante a resolução, os alunos apresentaram muitas dificuldades, que de acordo com Téo se deviam à falta de uma rotina de estudos: "Eles não sabiam a teoria. Dava para ver claramente que eles não tinham estudado ainda" (EGC14, 02/12/2016). Revelou que foi circulando entre os pares, procurando esclarecer as dúvidas que surgiam, sendo que em alguns momentos "praticamente resolvia junto com eles" (EGC14, 02/12/2016) devido às dificuldades existentes.

> Eu fiz a primeira parte em sala de aula. Na terça, dei meia hora de aula para acabar algo da aula anterior, e deixei cerca de uma hora para eles pensarem nas questões do trabalho. Não conseguiram terminar, daí na aula seguinte [quinta-feira] dei um pouco de conteúdo e dei mais meia hora para eles finalizarem. (...) No fim, essa primeira parte do trabalho... vou colocar 1,0 ponto a mais para eles. Eu fiz a parte escrita valendo 1,0 ponto a mais na prova e a parte do GeoGebra também. (...) Na prática mesmo, serviu para eles terem um tempo de pensarem e para eu poder atendê-los em aula, para aprenderem em aula, mais isso do que classificar mesmo. Eles tinham muita dificuldade, eu pensei mesmo que eles estudavam em casa, mas não...eu vi que eles realmente precisavam desse momento, eu precisei ficar circulando bastante nas duplas, esclarecendo as dúvidas. (EGC12, 04/11/2016)

Ao fazer uma reflexão sobre a sua ação, considera que, embora o caráter avaliativo dessa primeira etapa da tarefa tenha dado lugar ao formativo, foi importante dedicar esse tempo em suas aulas para a resolução da tarefa, tanto para oportunizar um momento de estudo aos alunos sobre o conteúdo explorado, já que não o tinham feito fora da sala de aula, como para identificar as dúvidas dos alunos e procurar esclarecê-las.

Ao partilhar a sua atitude na condução da tarefa ao grupo, Téo desperta em alguns colegas a problematização de suas ações, tal como aconteceu com Bruna:

> A maneira como Téo fez achei muito mais interessante do que a maneira como fiz. Fazer em sala de aula é interessante para ir tirando as dúvidas conforme forem surgindo. Eu consegui dar um *feedback* a eles, mas depois, quando já tinha inclusive passado a prova.

> Esse *feedback* teria sido muito mais interessante para identificarem os erros antes do que agora, não que não seja importante o *feedback*, mas acho que o tempo meu não foi muito adequado. (Bruna, EGC14, 02/12/2016)

Bruna avalia que o momento em que Téo realizou o *feedback*, antes da prova, foi mais adequado para a aprendizagem dos alunos do que o seu que foi após a prova escrita.

Na avaliação da primeira etapa da tarefa, Téo chamou a atenção para uma questão em que os alunos sentiram dificuldade. Trata-se de uma questão teórica (Questão 2, Quadro 26), que envolve uma equivalência, em que os alunos mostraram apenas a implicação e não a recíproca.

> Eu tenho um comentário pontual da questão dois, que é sobre as duas definições de transformação, eles não sabem o que é uma equivalência em Matemática. Eles só mostraram a ida [implicação]. Não faz sentido para eles que tenha alguma coisa a mais para fazer, não cai a 'ficha'. Então, se for perguntar alguma coisa dessas, tem que ser em dois itens. (EGC14, 02/12/2016)

Observou-se no grupo que a dificuldade dos alunos pode ter origem do facto dos professores não terem explorado teoremas ou tarefas que envolvessem a demonstração de uma equivalência. Sendo assim, a linguagem utilizada na questão não era comum para os alunos, como ilustra o diálogo no grupo que evidencia a posição de Téo na discussão:

Téo:	Eu não me lembro de ter explorado esse tipo de questão em aula.
Bruna:	Na correção eu também pensei: 'Talvez eu não fui clara, eu não explorei isso'.
Nina:	Eu não explorei. E agora, o que vamos fazer?
Téo:	Uma saída é colocarmos em dois itens separados a ida e a volta da equivalência.
Investigadora:	Outra saída é explicar o que é equivalência aos alunos.
Lisa:	Acho que temos que explicar.
Téo:	Antes de chegar nisso, que outros teoremas no curso envolvem equivalência? Onde poderíamos enfatizar esta questão?
Investigadora:	Em sistemas lineares tem o teorema: 'Seja A uma matriz nxn, então as seguintes afirmações são equivalentes: (i) A é inversível; (ii) o sistema não homogêneo $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ tem única solução, (iii) $\mathrm{Posto(A)} = \mathrm{n}$'. Algo desse tipo.
Bruna:	O Tito demonstrou no segundo encontro um teorema que envolvia uma equivalência, lembram?
Téo:	Acho que é importante explicar a terminologia e depois retornar nesta noção em outros momentos para ficar uma linguagem comum para eles. (EGC15, 16/12/2016)

Na avaliação retrospetiva da sua ação, Téo apercebe-se de que os erros dos alunos podem ser causados pela forma como o professor trabalha o conteúdo ou pela falta de clareza do enunciado das questões dentro da abordagem trabalhada. Ao chamar a atenção para as dificuldades dos alunos sobre a questão, Téo provoca os colegas para refletirem sobre a questão e consequentemente sobre a sua ação em sala de aula e no cuidado que devem ter na preparação das tarefas.

Na sequência da problematização que Téo efetuou à questão 2 da tarefa, o grupo apercebeu-se de outra questão da tarefa avaliativa, que apresentava problema na sua formulação. Na questão 3, esperava-se que os alunos encontrassem a lei de formação das transformações que fossem lineares e que em seguida mostrassem que de facto tais transformações satisfaziam a definição de transformação linear para quaisquer vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Porém, os alunos encontraram a lei de formação para as transformações que eram lineares e mostraram a linearidade apenas para vetores específicos referentes aos vértices das figuras.

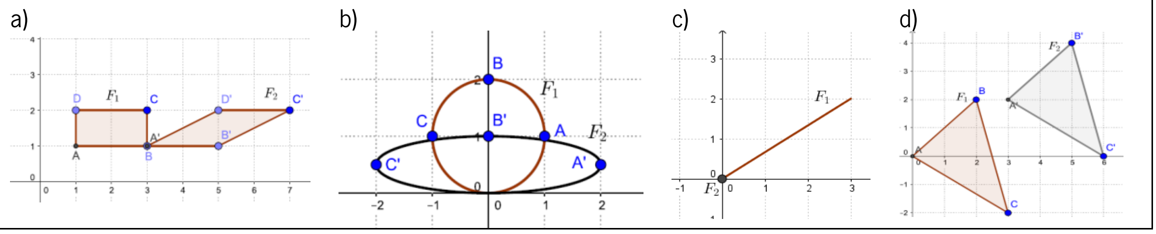
Como Téo propôs que os alunos resolvessem a tarefa na sala de aula, identificou o problema do enunciado que havia e procurou induzir os alunos a resolverem segundo o caminho que se esperava, como refere: "Eu tive que induzir eles a fazerem exatamente isso [primeiro achar a lei e depois mostrar que é linear] porque não tinha no enunciado algo que permitisse eles a fazerem algo a mais" (EGC14, 02/12/2016). Entretanto, ao identificar o problema no enunciado da questão, não partilhou com os demais colegas do grupo, que só se aperceberam do problema no momento da correção da referida questão, visto que solicitaram a resolução fora da sala de aula. Na análise desta questão, Téo referiu também que nas figuras não é claro para o aluno quais são as imagens, na figura transformada (F_2), correspondentes aos vértices da figura do domínio (F_1) da transformação. Acrescentou que se devia trabalhar mais com este tipo de questão em sala de aula e enfatizar que a cada vértice está associado um vetor com origem no ponto (0,0), pois os alunos tiveram dificuldade de fazer esta relação ao resolver a questão.

> Nessas questões com figuras não fica claro qual ponto é levado em qual, teríamos que especificar isso. Outro cuidado que temos que ter é de alguma forma especificar quando é ponto e quando é vetor, pois eles confundem muito e não sabem o que fazer. (...) Fazer a transição entre ponto e vetor nesse contexto, não é uma coisa que eles têm facilidade, às vezes tem que usar uma seta para você ver somas e múltiplos. Acho que nós temos que explorar mais isso em sala de aula. (...) Depois da experiência dessa tarefa, na prova eu coloquei uma questão com esse mesmo objetivo, porém ao invés da figura coloquei três vetores, A, B e C, e indiquei as respectivas imagens $T(A), T(B)$ e $T(C)$. Uma delas era linear e a outra não. Na prova, até eles me perguntaram: 'Mas como eu faço agora com três vetores? Eu sabia com dois. Eu posso escolher qualquer um?' Eles não sabiam bem o que fazer, não enxergavam que os três vetores eram LD's, que tinham que pegar uma base e daí ver se o terceiro vetor satisfazia a transformação encontrada. Então acho que com a figura fica melhor, mas tem que colocar a indicação da imagem de cada ponto. (EGC15, 16/12/2016)

Após a reflexão no grupo sobre as dificuldades encontradas pelos alunos na referida questão, e atendendo as sugestões de Téo e de outros professores do grupo, tal questão foi reformulada tanto em relação ao enunciado quanto às figuras, conforme o Quadro 28.

Quadro 28. Questão 3 da tarefa reformulada.

Há alguma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma a figura F_1 na figura F_2? Em caso positivo, obtenha $T(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e mostre que T realmente é linear. Em caso negativo, use um contraexemplo para mostrar que não há linearidade.



A segunda etapa da tarefa, mediada pelo GeoGebra, foi realizada fora da sala de aula. Observou-se no grupo que as dificuldades que surgiram estavam relacionadas com a falta de familiaridade dos alunos com o software. Além disso, nas diretrizes da tarefa exigia-se a implementação de forma dinâmica, porém alguns alunos fizeram de forma estática. A esse respeito, Téo manifestou que usou pouco o software em aula ao longo do semestre, e que o uso foi restrito para mostrar aos alunos algumas visualizações geométricas. Então, esta foi a primeira tarefa que exigiu que os alunos manipulassem o software. Na sua perspetiva, os professores deveriam preparar os alunos ao longo do semestre para tal tipo de atividade por meio da exploração em sala de aula das potencialidades do GeoGebra.

> Na atividade do GeoGebra, acho que eles ficaram meio perdidos, em parte porque não usei muito o GeoGebra anteriormente. Eles não conheciam o software, então não sabiam como lidar. Talvez precisasse ter explorado ao longo do semestre, ir dando dicas de como usar para alguma coisa. Quando chega numa atividade dessas eles conseguirem ter autonomia para fazer. Fiquei devendo um pouco nesse sentido para eles. (EGC14, 02/12/2016)
>
> Eu queria acrescentar uma coisa, da questão da interatividade, que a gente esperava do trabalho deles, eu acho que é algo que a gente deveria dar exemplos ao longo do semestre. 'Ah, o GeoGebra é capaz de fazer isso, isto e aquilo'. Para eles já pegarem o hábito de que é esperado no trabalho este tipo de coisa. (...) É que não dá pra esperar no final que eles cheguem e façam sem mostrar antes. (EGC16, 15/02/2017)

Alguns professores do grupo solicitaram aos alunos para apresentarem à turma as questões que envolviam o GeoGebra, e para aqueles que continham erros ou poderiam ser melhorados (interface, parte dinâmica) foi oportunizado que entregassem novamente para uma reavaliação e nova classificação. Houve quem solicitasse aos alunos a apresentação no quadro também das questões que estes erraram na primeira parte da tarefa e as reconsideraram na avaliação para quem conseguiu superar a dificuldade e resolver corretamente. Ao ouvir as perspetivas de colegas sobre a experiência com a apresentação dos trabalhos e a maneira com que trabalharam o erro dos alunos, no encontro de 02/12/2016, Téo considerou enviar “um e-mail aos alunos com comentários sobre a avaliação dos trabalhos do GeoGebra, visto que já não havia mais aulas, apenas o exame final da disciplina, e que os alunos não tinham o hábito de procurá-lo no atendimento extra classe” (NC, dezembro/2016).

No primeiro semestre de 2017, diante da possibilidade discutida no grupo de propor a resolução da primeira parte da tarefa em sala de aula, Téo manifestou resistência, apesar da sua experiência positiva no semestre anterior.

> Eu vou ter que limitar agora o tanto de trabalho que eu vou dar para eles fazerem em sala de aula. Senão vou ter que correr muito para vencer o conteúdo. (...) Também tem o trabalho de Produto Interno que pensamos em fazer em sala de aula. (...) Na verdade, estou oscilando entre fazer este ou o de Produto Interno em sala. (EGC24, 05/05/2017)

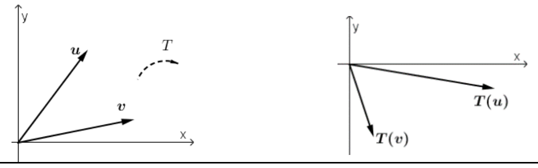
A sua resistência se dava em função da sua preocupação em abordar o tópico de Produto Interno, que não foi contemplado no semestre anterior por nenhum dos professores. No grupo estava em discussão/construção uma tarefa para explorar tal tópico, e que até o momento estava sendo planificada para ser resolvida em aula. Ao colocar numa balança as duas tarefas (Operadores Lineares e Produto Interno), sob o risco de não conseguir cumprir o cronograma da disciplina, tendia a escolher Produto Interno (último tópico do conteúdo programático da disciplina). Além disso, a sua preocupação em limitar o tempo com tarefas avaliativas em sala de aula para não ter que ‘correr’ com o conteúdo, indicia o seu cuidado com a aprendizagem dos estudantes e não apenas em ‘vencer’ o conteúdo.

Por fim, decidiu-se no grupo por propor a tarefa para ser resolvida fora da sala de aula, como no semestre anterior. Ao revisitarmos as questões, Téo apresentou uma proposta para reformulação da primeira questão (Quadro 29), que foi aceita pelo grupo. Téo reescreveu o enunciado e alterou a figura em relação ao original.

Quadro 29. Questão 1 da tarefa reformulada.

Nas figuras abaixo estão representados o domínio (à esquerda) e o contradomínio (à direita) de uma transformação linear $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sabendo que T transforma os vetores u e v do domínio nos vetores $\mathrm{T}(\mathrm{u})$ e $\mathrm{T}(\mathrm{v})$ do contradomínio, determine, geometricamente, os seguintes vetores:

(a) $\mathrm{u} + \mathrm{v}$ (b) $\mathrm{u} - \mathrm{v}$ (c) $\mathrm{T}(\mathrm{u} + \mathrm{v})$ (d) $\mathrm{T}(\mathrm{u} - \mathrm{v})$ (e) $\mathrm{T}\left(2\mathrm{u} + \frac{1}{2}\mathrm{v}\right)$



Especificamente, na discussão da questão de equivalência, ao concordar com o grupo que tal questão estava fora do contexto geométrico da tarefa, e que poderia ser excluída da lista de questões, Téo sugeriu que os professores a discutissem em sala de aula: "Essa é uma questão que dá para discutir em sala de aula com eles, quando explorar a definição de Transformação Linear" (EGC24, 05/05/2017).

A segunda parte da tarefa, mediada pelo GeoGebra, foi mantida como no semestre anterior. Entretanto, atendendo às necessidades manifestadas por alguns integrantes do grupo, Téo juntamente com Bruna organizaram um momento no grupo para os professores manipularem a ferramenta 3D do software e esclarecerem as suas dúvidas, e assim conseguirem dar mais apoio aos alunos na concretização da tarefa. Tendo em vista o seu perfil introspetivo, este foi um dos momentos em que Téo foi mais ativo durante os encontros do grupo.

> Como no primeiro encontro do semestre Tito e Nina esperavam o apoio do grupo para aprender mais sobre as potencialidades do GeoGebra, em particular a ferramenta 3D, Téo e Bruna, que dominavam o software, se responsabilizaram por organizar para o encontro de 12/05/2017 uma atividade para tal fim. (...) Eles auxiliaram a executar a mesma tarefa que seria proposta aos alunos, a qual incidia sobre a construção de um aplicativo que tinha por função verificar o efeito de uma Transformação Linear sobre um objeto geométrico, de forma dinâmica, bem como sobre uma interface com orientações na tela com informações sobre o uso do aplicativo e sobre a Transformação Linear em si (lei da transformação, matriz associada à transformação). (NC, maio/2017)

A correção/análise das resoluções da tarefa mediada pelo software foi realizada em conjunto num dos encontros do grupo. Ao ouvir as perspetivas dos colegas sobre a importância de dar um *feedback* aos alunos sobre a tarefa e sobre formas de como o fazer, Téo indicia concordar ao fazer anotações sobre os pontos frágeis das resoluções. Entretanto, num outro momento de reflexão sobre a tarefa indicou que somente deu um *feedback* aos alunos que o procuraram para discutir o resultado da avaliação:

> Analisamos os trabalhos de todos os alunos dos professores presentes. Procuramos padronizar a correção, verificar quais trabalhos poderiam ser melhorados por não atenderem às diretrizes da tarefa ou por apresentarem erros. Observei que se estivéssemos corrigindo sozinhos, erros passariam despercebidos ou consideraríamos errado para casos que estavam parcialmente corretos. A ajuda dos colegas para fazer essa identificação foi fundamental. Observei que Téo concordava com expressões que manifestávamos, do tipo: 'Aqui tem que refazer, não fez nada', 'Os meus, todos têm que refazer, todos!', 'É preciso dar um *feedback* a eles'. Inclusive fez anotações sobre nossas observações sobre seus trabalhos. Porém não manifestou como iria dar esse *feedback*. Enquanto que Nina indicou que vai solicitar aos alunos para refazerem, com posterior

apresentação para a turma. Tito indicou que vai solicitar para refazerem. (NC, 09/06/2017)

Eu dei o *feedback* aos que me procuraram em sala, no final da aula, ou no horário de atendimento [extra classe]. (...) Não solicitei para refazerem. (EGC30, 23/06/2017)

A falta de uma discussão coletiva sobre os trabalhos dos alunos acabou impedindo que os alunos conhecessem os trabalhos uns dos outros e aprendessem com os colegas diferentes recursos do GeoGebra que estes pudessem ter utilizado, para além de terem a oportunidade de aprenderem com os erros existentes. Por outro lado, o trabalho foi realizado no final do semestre, o que poderia não haver espaço no cronograma da disciplina para realizar tal discussão, ou a possibilidade de realizar uma aula extra para tal finalidade. Há fortes indícios para esta última hipótese, tendo em vista que no respetivo semestre não foi possível que Téo explorasse em sala de aula o conteúdo de Produto Interno, último tópico da disciplina.

7.4.2.2. Trabalho sobre "Interpretação geométrica da multiplicação de matrizes"

No contexto da Geometria, uma matriz pode representar uma figura geométrica. Por exemplo, uma figura poligonal de n lados pode ser construída pelos vértices $(A_1, A_2, A_{3,\ldots,}A_n)$. No plano, cada um desses vértices A_i de coordenadas (x, y) representará a coluna i de uma matriz de ordem $2 \times\ i$, com $3 \leq i \leq n$. Aliado a situações de computação gráfica, é possível aferir qual o efeito geométrico da multiplicação dessa matriz por outra matriz predefinida, numa determinada figura geométrica. Nesse contexto, desenvolvemos uma tarefa, denominada "Interpretação geométrica da multiplicação de matrizes" com o intuito de mostrar, naquele momento, uma aplicação de multiplicação de matrizes e, na sequência do conteúdo, conectar com o tópico de transformações lineares.

A tarefa foi composta por duas etapas: a primeira etapa, com recurso ao papel e lápis, tinha por objetivo propiciar a transição entre os registros geométrico e algébrico de uma matriz, aferindo o efeito geométrico da multiplicação de matrizes; a segunda etapa, com recurso ao GeoGebra, visava implementar essas representações propiciando aos alunos a visualização dinâmica dos efeitos das transformações produzidas pelas multiplicações de matrizes realizadas.

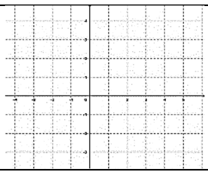
Na primeira etapa, foi solicitado aos alunos a poligonal da letra inicial do nome deles, representando-a nos registros geométrico e matricial, conforme Quadro 30. Posteriormente, foi solicitado a interpretação geométrica do produto entre uma determinada matriz dada (transformação) e a matriz poligonal.

Quadro 30. Interpretação geométrica do produto de matrizes com recurso ao papel e lápis.

Parte I (Com recurso ao papel e lápis)

No contexto da Geometria, uma matriz pode representar uma figura geométrica. No plano, cada um dos pontos de coordenadas (x, y) será uma coluna de uma matriz que os representa. Aliado a situações de computação gráfica, é possível aferir qual o efeito da multiplicação dessa matriz por outra predefinida.

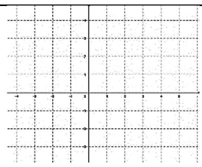
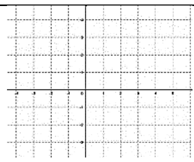
1) Escolha convenientemente as coordenadas dos vértices da letra maiúscula da inicial do seu nome e represente-os numa matriz A.

Representação geométrica	Representação matricial
	

2) Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.1 Qual o efeito gráfico provocado pela multiplicação da matriz D pela matriz A?

2.2 Qual o efeito gráfico provocado pela multiplicação da matriz E pela matriz A?

Representação geométrica: DA	Representação geométrica: EA
	

Na segunda etapa, os alunos deveriam implementar no GeoGebra o polígono relativo a letra inicial do seu nome, representando-o geometricamente e matricialmente, bem como realizar outras multiplicações de matrizes, representando cada um dos produtos algebricamente e geometricamente (Quadro 31).

Quadro 31. Interpretação geométrica do produto de matrizes no GeoGebra.

Parte II (No ambiente computacional)

1) Represente matricialmente e geometricamente a primeira letra do seu nome no GeoGebra.

2) Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{G} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Represente geometricamente e matricialmente no GeoGebra os produtos: $DA, E\mathrm{A}, FA$ e GA.

Preparação da tarefa

A ideia da tarefa denominada 'Interpretação geométrica da multiplicação de matrizes' surgiu a partir de um exemplo partilhado por Bruna, tal como ela o explica:

> Ano passado quando eu fiz com meus alunos, eu pedi para eles escolherem com a letra do nome deles. Eles montaram a matriz A, sendo que nas colunas colocaram os vértices

> da letra [poligonal]. Eu levei esse exemplo para mostrar, com a letra T. E a matriz D é dada convenientemente. Eles fizeram o produto $[DA]$, daí solicitei para eles representarem graficamente para ver como é que ficava aquela letra com essa multiplicação. (EGC17, 24/02/2017)

Bruna havia solicitado os seus alunos para resolverem na aula o referido exemplo apenas com recurso ao papel e lápis, sendo que na discussão da tarefa utilizou um aplicativo que construiu no GeoGebra para mostrar o efeito da multiplicação de uma matriz D predefinida pela matriz dos vértices da letra T.

No grupo decidiu-se que a tarefa seria proposta em duas etapas, a primeira com recurso ao papel e lápis e a segunda com recurso ao computador. Na definição da primeira etapa, para além do produto utilizado por Bruna na sua tarefa, cujo efeito da multiplicação representa um cisalhamento na direção x, Téo apontou a possibilidade de se explorar um outro produto que estivesse associado a conteúdos a serem abordados ao longo da disciplina.

> Dá inclusive para fazer com duas matrizes. Uma [matriz] D que faz o cisalhamento e uma E que faz a inversa, por exemplo, ou outra transformação entre as que a gente vai explorar mais tarde. (...) E pedir para eles descreverem em palavras o que é que aconteceu, que mudança que aconteceu. (EGC17, 24/02/2017)

A sugestão de Téo foi amadurecida no grupo e decidiu-se por explorar na primeira etapa da tarefa, dois produtos matriciais que resultariam numa ampliação e num cisalhamento da letra poligonal, sendo que na segunda etapa os alunos implementariam no GeoGebra estes dois produtos, além de outros dois referentes a uma rotação e uma reflexão. Tais transformações envolvidas nas duas etapas, bem como propriedades associadas a elas, seriam exploradas mais tarde no estudo de Transformações Lineares.

Ainda em relação à definição da primeira etapa da tarefa, com base na sugestão de Téo, foram elaborados dois questionamentos para os alunos referirem o efeito de cada multiplicação realizada sobre a letra. Para o grupo era claro que nem todos os alunos usariam os termos 'Cisalhamento' e 'Ampliação' para o efeito das multiplicações sobre a letra, mas esperava-se que descrevessem, utilizando a linguagem natural, características associadas a tais transformações, como destaca Téo:

> E provavelmente alguém pode falar, que a sua letra ficou em itálico mesmo. Sem muitos termos técnicos ainda. (...) É, e os que já têm alguma dificuldade vão conversar com alguém que já fez. E esses provavelmente já sabem algum nome de algumas das transformações, já trocam essas informações. (...) Principalmente cisalhamento, que tem um nome feio e desconhecido para a maioria deles. (EGC17, 24/02/2017)

Téo ainda sugere que os alunos podem descobrir os nomes 'técnicos' por meio da troca de informações com alunos que já fizeram a disciplina.

A tarefa foi delineada para os alunos a resolverem individualmente e extra classe. Após ser distribuída a primeira etapa da tarefa e dadas as devidas orientações, os alunos deveriam entregá-la na aula seguinte, quando seria realizada uma discussão em grande grupo. Sobre como fazer essa discussão foram levantadas possibilidades como:

> Solicitar para um dos alunos ir ao quadro representar o que aconteceu (Lisa, EGC18, 03/03/2017);
>
> Pedir para um voluntário ir ao quadro e discutir com eles, antes de corrigir. Foi isso que vocês encontraram? Vocês chegaram a essa solução. (...). Mostrar no GeoGebra um exemplo e questionar: 'vocês chegaram nessa letra? A multiplicação da matriz deu isso'? (Bruna, idem);
>
> Chamar um voluntário para fazer uma multiplicação, o cisalhamento (...) E na outra dá para dizer: 'e o que aconteceu na segunda'? Aí mostra no GeoGebra qual é o efeito (Nina, idem).

Diante das possibilidades apresentadas Téo não se manifestou e nem sugeriu qual seria a estratégia que utilizaria para fazer a discussão.

Seguido à discussão, seria proposta a segunda etapa da tarefa, com prazo de uma semana para os alunos a concretizarem. Como orientação aos alunos seria fornecido um tutorial sobre matrizes no GeoGebra e sugeriu-se no grupo mostrar um exemplo, como o aplicativo da letra construído por Bruna, no sentido de aguçar a curiosidade dos alunos para descobrir como fazer a implementação. A ideia do grupo era promover o primeiro contacto dos alunos com algumas ferramentas do GeoGebra relacionadas com as matrizes. Na discussão sobre como dar um *feedback* sobre essa segunda etapa, Téo corroborou com a perspetiva de uma colega de que a partir do que os alunos apresentassem nos trabalhos poderiam ser dadas sugestões e apresentados recursos do GeoGebra para os melhorar, tal como ele explica:

> Acho que pode depois mostrar a eles alguns dos trabalhos e falar o tipo de resultado que você esperava. Apontar os pontos problemáticos. (...) Inclusive dá para falar sobre os recursos do GeoGebra que eles poderiam ter utilizado para melhorar aquilo que fizeram. Dá para ir direcionando sobre o que a gente quer depois lá no trabalho de transformações lineares. (EGC18, 03/03/2017).

A sugestão de Téo incide sobre familiarizar progressivamente os alunos para o uso do software, no sentido de prepará-los para o que era esperado que eles fizessem no trabalho de Transformações Lineares, que se pretendia reeditar do semestre anterior.

De forma geral, na planificação da tarefa, Téo não foi o primeiro a lançar ideias, mas a partir do que surgia no grupo, procurava apontar possibilidades sobre o que poderia ser feito. Toda a construção da tarefa aconteceu no seio do grupo de forma presencial, sendo que os diferentes elementos iam complementando as ideias uns dos outros, até se chegar à versão final. O seguinte diálogo ilustra essa complementação de ideias na definição do título da tarefa.

Investigadora:	Vamos lá gente, título da tarefa?
Nina:	Aplicação de Matrizes.
Tito:	Efeito gráfico de matrizes.
Investigadora:	Efeito gráfico da multiplicação de matrizes.
Téo:	Interpretação geométrica da multiplicação de matrizes.
	[Todos concordam com a última versão] (EGC17, 24/02/2017)

Entretanto, nem todas as ideias eram consensuais, sendo algumas questionadas e inclusive refutadas, como aconteceu com Téo ao sugerir que ao invés de se fazer apenas uma ampliação na letra, se fizesse também uma reflexão da mesma em relação à origem, como ilustra o seguinte diálogo:

Téo:	Põe a ampliação com o sinal negativo. Que aí dependendo da letra, para alguns vai ser simétrico e para outros não. Vai gerar uma discussão sobre o que houve na mudança de sinal.
Tito:	Eu acho que não precisa botar sinal negativo, que vai dar simetria. Deixa só com a ampliação mesmo. Porque o sinal negativo é outro efeito que provoca. (...) São dois efeitos em uma operação, deixa só com um que é mais fácil.
Téo:	Eu não sei, eu pensei que a discussão poderia ser interessante depois, comparando as respostas entre eles. Por exemplo, você pega um que não seja uma letra simétrica, quando eles falarem o que aconteceu, eles podem falar que inverteu a forma da letra. E aí vai depender da letra, e podem ter discussões diferentes.
Tito:	Esse é o problema, vai demorar mais para fazer a discussão. Eu acho que deixa para explorar esses detalhes em transformações lineares. Aqui a ideia seria mostrar uma aplicação do produto de matrizes – não precisa explorar todas as possibilidades –, e introduzir o GeoGebra. (EGC17, 24/02/2017)

Decidiu-se, neste caso, apenas por explorar a ampliação e deixar para explorar a ideia de Téo, que envolve uma composição de transformações lineares, num capítulo específico para isso, onde inclusive discutiu-se no grupo que a tarefa deveria ser resgatada para estabelecer a conexão com transformações lineares. Assim, a tarefa proposta envolveu a interpretação geométrica de matrizes, conforme o que fora apresentado nos Quadros 30 e 31.

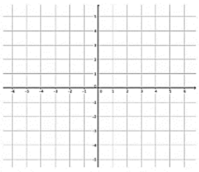
Reflexão no grupo

Téo distribuiu a primeira etapa da tarefa aos alunos na semana seguinte à maioria dos demais professores do grupo. Assim, já tinha um *feedback* sobre como alguns dos professores a haviam conduzido, sobre as reações dos alunos, bem como sobre as problemáticas encontradas. Ao perceber, por meio deste *feedback*, que as questões 2.1 e 2.2 (Quadro 30) não ficaram claras, gerando a interpretação equivocada de que apenas os registros gráfico e matricial eram suficientes para descrever o efeito de cada multiplicação sobre a letra original, Téo reescreveu todas as questões procurando deixar explícito o que se queria em cada uma delas (Quadro 32).

Quadro 32. Adaptação realizada por Téo sobre a primeira etapa da tarefa.

1) Represente a primeira letra (maiúscula) do seu nome:
   a) Por um polígono no plano cartesiano, indicando as coordenadas dos vértices usados.
   b) Por uma matriz L, de ordem $2 \times n$, cujas colunas sejam as coordenadas dos n vértices (a coordenada x vai na primeira linha e a coordenada y na segunda linha).
2) Calcule os produtos BL e CL, sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
3) Represente geometricamente os polígonos correspondentes às matrizes BL e CL considerando, como antes, um vértice em cada coluna. Lembre-se de ligar os vértices correspondentes na mesma ordem em que estavam ligados no polígono inicial.
4) Descreva o efeito que cada multiplicação teve sobre a figura original.

Representação Geométrica:



Representação Matricial: $L =$ $BL =$ $CL =$

Ao reescrever a tarefa, a primeira etapa passou de duas para quatro questões, sendo que o objetivo da tarefa não foi alterado. Téo também reescreveu as questões da segunda etapa, nos moldes da primeira, incluindo uma questão em relação à versão elaborada no grupo, para também referir nesta etapa o efeito das multiplicações realizadas sobre a letra original (Quadro 33).

Quadro 33. Adaptação realizada por Téo sobre a segunda etapa da tarefa.

1) Utilize o software GeoGebra para representar a primeira letra (maiúscula) do seu nome:
a) Por um polígono no plano cartesiano, indicando as coordenadas dos vértices usados.
b) Por uma matriz L, de ordem $2 \times n$, cujas colunas sejam as coordenadas dos n vértices (a coordenada x vai na primeira linha e a coordenada y na segunda linha).
2) Insira as matrizes $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ no GeoGebra e utilize o aplicativo para obter os produtos BL, CL, PL e $\mathrm{Q}L$.
3) Represente geometricamente os polígonos correspondentes às matrizes BL, CL, PL e $\mathrm{Q}L$ considerando, como antes, um vértice em cada coluna. Lembre-se de ligar os vértices correspondentes na mesma ordem em que estavam ligados no polígono inicial.
5) Descreva o efeito que cada multiplicação teve sobre a figura original.

Téo partilhou a nova versão da tarefa por meio da pasta comum que o grupo mantinha no Dropbox. Ao referir ao grupo como orientou os alunos sobre a tarefa, Téo mencionou que, na primeira etapa, apenas explicou como fazer a transição da representação algébrica para a matricial de uma letra específica. Já para a segunda etapa, utilizando o GeoGebra, apresentou os recursos mínimos para depois sozinhos, os alunos, explorarem e avançarem na concretização da tarefa, tal como explica:

> Eu só expliquei como montar a matriz. Fiz um I, a matriz deu 2x11. (...) Eu os deixei bem à vontade, falei que cada um podia fazer a letra que quisesse. Falei, 'esse I não pode ser só um risco, tem que usar a criatividade'. (...) Na aula em que eu propus a tarefa, eu estava com o GeoGebra na sala e eu passei rapidamente a sintaxe de matriz, digitada tanto na barra [campo de entrada] quanto na planilha, mostrei que tinha um botão para você criar um polígono. Olha, tem esses recursos aqui, vocês explorem, tentem fazer a atividade com as quatro matrizes. (EGC19, 17/03/2017)

Como Téo havia reescrito as questões da tarefa, não verificou nenhuma dificuldade dos alunos em relação à interpretação das mesmas, como aconteceu com os demais professores. Téo referiu que na sequência da conclusão pelos alunos de cada etapa, procurou fazer uma discussão para que apontassem o efeito geométrico de cada matriz sobre a letra original e pudessem comparar as respostas.

> Alguns mencionaram, por causa das coordenadas que eles colocaram, que a base [da letra] permaneceu sobre o eixo x, mas o resto inclinou. E alguns que colocaram para cima [base da letra acima do eixo x] falaram que ela também moveu para o lado, virou itálico. (...) Surgiu uma discussão boa, deu para comparar o efeito, principalmente do cisalhamento, para diferentes letras e diferentes formas de desenhar a letra. (...) [Na discussão da 2ª parte] Alguns alunos comentaram que a letra ficou com a mesma área na maioria das transformações. Acho que a gente pegou a maioria das matrizes com o determinante [igual a] um, como o cisalhamento, a rotação e mais alguma. (...) A reflexão mantém a área, ao pegar o módulo o determinante é um. (...) Perceberam que estava mantendo a área, exceto uma que duplicou a área [Ampliação]. Então, a partir desse comentário daria para ligar com interpretação de determinante. (EGC19, 17/03/2017)

Ao verificar as características observadas pelos alunos em cada transformação sobre a letra, Téo apercebe-se da riqueza das respostas que surgiram e da importância da sua discussão em sala de aula, para os alunos perceberem outras possibilidades além das observadas por si mesmo. A partir da observação realizada por alguns alunos sobre a preservação da área da letra poligonal após a transformação, Téo aponta ao grupo a possibilidade de numa próxima vez explorar, a partir da tarefa, a interpretação geométrica do determinante de uma matriz.

Um aspeto problemático na prática de alguns membros do grupo, em particular de Téo, era a demora em realizar a correção das tarefas e a avaliação dos alunos, fator que acabava comprometendo o tempo adequado para o *feedback* individual aos alunos e para a reflexão no grupo. Na referida tarefa, como promoveu uma discussão sobre cada uma das etapas em sala de aula, Téo tinha uma noção das respostas dos alunos e pode promover um *feedback* coletivo. Além disso, ao receber por e-mail os arquivos do GeoGebra, abriu cada um para ver se estavam funcionando e pode perceber, inicialmente, alguns aspetos problemáticos, tal como aponta:

> Eu vi que alguns faziam um arquivo para cada operação, alguns colocaram todas [as figuras] uma em cima da outra. Teve um que me falou que estava meio confuso, falei para separar ao menos um em cada arquivo, mas acabou deixando por assim mesmo. Alguns nem ligaram os pontos do polígono, eles sabiam fazer a multiplicação, mas não sabiam fazer o polígono e aí só fizeram o polígono na folha que eu tinha entregado com os enunciados. Foram coisas desse tipo que eu vi até agora, mas não corrigi, só fui baixando para ver se abriam os arquivos. (EGC19, 17/03/2017)

Entretanto, uma análise criteriosa e individual das respostas dos alunos para ambas as etapas só aconteceu 15 dias após a entrega da segunda etapa devido à pressão do grupo, tendo em vista o desejo de escrever uma comunicação científica sobre a tarefa, para a qual era necessária a análise das resoluções dos alunos, como ilustra o seguinte diálogo no grupo:

> Bruna: Mas o grande problema é que temos que analisar esses dados hoje à tarde, porque o prazo é domingo.
> Téo: É. Então, eu não corrigi nada ainda.
> Lisa: Eu não corrigi.
> Téo: Nenhuma das duas, na verdade.
> Lisa: Mas eu faço isso agora, depois do almoço, mas preciso de, no mínimo, umas duas horinhas.
> Téo: Eu também. Vamos ver o que precisa de dados que a gente já retira na correção. (EGC21, 31/03/2017)

Tal análise, bem como a escrita da comunicação se revelou um meio para a reflexão coletiva do grupo sobre a tarefa, mesmo que já se vinha discutindo a concretização da tarefa aos poucos. Foi nesse momento em que se parou para olhar efetivamente para o trabalho dos alunos, avaliar as suas dificuldades e avaliar a tarefa como um todo. O diálogo seguinte ilustra a análise da primeira etapa da tarefa de um dos alunos no grupo:

> Bruna: Já esse aqui não teve dificuldade de representar graficamente e algebricamente.
> Lisa: Ele não teve dificuldade de fazer o produto...
> Téo: Mas ele não conseguiu sair do produto e ir para a representação geométrica.
> Bruna: Ele conseguiu, do geométrico, ir para o algébrico, mas do algébrico para o geométrico, ele não conseguiu.

Na avaliação sobre os benefícios da tarefa para os processos de ensino e aprendizagem da disciplina, Téo corroborou com os demais integrantes do grupo de que foi uma oportunidade dos alunos se familiarizarem com o software a partir da manipulação das suas ferramentas, de visualizarem uma aplicação na computação gráfica para o produto de matrizes, além da hipótese de que a tarefa iria auxiliar mais tarde na compreensão de Transformações Lineares, como sugere o seguinte diálogo durante a planificação do texto da comunicação:

Investigadora: E uma coisa, que eu acho que é importante, que tenha que aparecer no texto é: 'qual foi o ganho com essa atividade?'.
Bruna: Vai ter que ser nas conclusões.
Lisa: Isso entra em transformações lineares. Já vão ter uma noção do que é.
Téo: Tem também a questão do GeoGebra. Tem gente que usa o GeoGebra, já. Ao menos eles já estão familiarizados agora.
Investigadora: Sim, inclusive eu observei que na questão de criptografia eles já usaram o GeoGebra, para fazer aquela multiplicação.
Lisa: E para mim, eles falaram exatamente isso: 'a gente via o professor fazendo o gráfico de uma função, mas a gente nunca tinha manipulado antes'.
Bruna: Eu acho que, nós, como grupo, temos que ter a hipótese que isso vai, depois, nos auxiliar, na hora de trabalhar com as transformações lineares.
Téo: É isso que a gente espera. Além de tudo, tem a questão que era nosso propósito, o de mostrar uma aplicação, pelo menos para alguns tópicos... (Todos concordam). (EGC21, 31/03/2017)

Após a análise das resoluções dos alunos dos professores do grupo, Bruna traça o seu parecer sobre as questões da tarefa que fora reformulada por Téo. Bruna evidencia que os alunos não tiveram nenhum problema de interpretação, pois as questões apresentadas por Téo eram objetivas. Entretanto, critica a forma como na primeira etapa da tarefa Téo induziu os alunos a apresentarem num único sistema de eixos a letra poligonal e as suas transformações após o cisalhamento e a ampliação (Quadro 32), dificultando a visualização das características de cada transformação.

Bruna: Eu tenho uma consideração sobre teus trabalhos, Téo. (...) A parte da linguagem natural ficou boa, na maneira de eles escreverem – porque eles tinham um enunciado claro, você mudou a maneira de perguntar – mas a tua dica para representar a figura geométrica não ficou boa. Eles fizeram a letra original e os desenhos resultantes das multiplicações todos juntos [num único sistema de eixos], e aí poluiu, não ficou boa a visualização (...). Então, uma dica é que ficou boa a parte natural, o teu não teve o problema que tivemos com a parte da linguagem natural, mas visualmente, ficou poluída a representação gráfica.
Téo: A minha ideia era facilitar a comparação entre a letra original e a final. Imaginei que fazendo no mesmo sistema de eixos iria facilitar. Mas realmente, deveria ter solicitado para fazerem cada uma em um gráfico separado. Só percebi que não ficou bom na hora da correção. (EGC22, 07/04/2017)

Téo é receptivo à crítica e revela que ao corrigir as questões também retirou as mesmas impressões de Bruna quanto à dificuldade de visualização.

Por fim, no grupo concluímos que deveríamos, aos poucos, trabalhar 'em cima' das dificuldades dos alunos referentes à implementação no GeoGebra, para mais tarde propormos o trabalho sobre Transformações Lineares, o qual fora apresentado no início desta Secção.

7.4.2.3. Trabalho sobre Criptografia

O trabalho intitulado 'Aplicação de matrizes à Criptografia' tinha por objetivo explorar a multiplicação de matrizes e a inversa de uma matriz num problema contextualizado relacionado à Criptografia. O trabalho era composto por duas tarefas que envolviam a codificação e decodificação de mensagens (Quadro 34).

Quadro 34.Tarefa elaborada no grupo envolvendo a aplicação de matrizes à Criptografia.

Aplicação de matrizes à Criptografia

A criptografia é um ramo da Matemática relacionado com a codificação e decodificação de mensagens. Literalmente, a criptografia é a técnica em que a informação transmitida pode ser transformada da sua forma original para outra impossível de ser identificada; a intenção é que apenas o destinatário certo e com a chave específica possa ter acesso àquela informação.

Tarefa 1: Vamos entender como funciona o processo de codificação de uma mensagem, para isso ajude Alice a enviar uma mensagem codificada para Bob.

- Para codificar a mensagem, Alice usará a relação entre as letras e números conforme a Tabela 1:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**_**	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0	

Tabela 1: relação entre letras e números

- A chave que Alice usa para criptografar a mensagem é $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- As letras da frase a codificar, incluindo os espaços, serão representadas numa matriz de 3 linhas, atribuindo valores numéricos aos caracteres em conformidade com a relação apresentada na Tabela 1. Se as linhas ficarem incompletas, insira o caractere "-". Por exemplo, para codificar ADORO ALGEBRA LINEAR, Alice procedeu do seguinte modo:

A	**D**	**O**	**R**	**O**	**-**	**A**
1	4	15	18	15	0	1
L	**G**	**E**	**B**	**R**	**A**	**-**
12	7	5	2	18	1	0
L	**I**	**N**	**E**	**A**	**R**	**-**
12	9	14	5	1	18	0

$$\Rightarrow \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 15 & 18 & 15 & 0 & 1 \\ 12 & 7 & 5 & 2 & 18 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 14 & 5 & 1 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

- Alice deseja enviar a mensagem: A DÚVIDA É O PRINCÍPIO DA SABEDORIA.
  1. Faça a equivalência entre letras e números da mensagem, incluindo os espaços.
  2. Represente a mensagem na matriz M.
  3. Codifique a mensagem fazendo $M_c = C \times M$. (M_cé a matriz com a mensagem criptografada).
  4. Para escrever a mensagem na forma de texto, encontre o equivalente alfabético para cada entrada das linhas da matriz M_c. No entanto, poderá acontecer de alguns valores da tabela não terem o equivalente alfabético por serem maiores do que 26. Então proceda como segue:

- Sempre que ocorrer um número inteiro maior do que 27 ($a_{ij} > 27$, 27 é o número de caracteres da Tabela 1), ele será substituído pelo resto (r) da divisão por 27. Caso houver valores negativos ($a_{ij} < 0$), faça $a_{ij} = 27 - r$, onde r é o resto da divisão $\frac{|a_{ij}|}{27}$.

Por exemplo, se $a_{ij} = -41$, então fazendo $41 \div 27$ obtemos o resto $r = 14$, assim a nova entrada da matriz que substituirá $a_{ij} = -41$ é $m - r = 27 - 14 = 13$ que equivale a letra M.

Para facilitar a equivalência, apresentamos a tabela de conversão para alguns valores:

-53	-52	-51	-50	-49	-48	-47	-46	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39	-38	-37	-36	-35	-34	-33	-32	-31	-30	-29	-28	-27
-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**_**
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81

Tarefa 2: Decodifique as mensagens que Alice enviou para Bob (cada bloco de caracteres representa uma linha da matriz com a mensagem codificada) .

a. WASEIDIICRGAN NVEJYYWIOCLBW ASHBV_W_CLTYS
b. FIXTGF_U MNRYSF_K FYPSAG_A
c. ERFAWHTTRECJ SZVFSGUFKEXF DZMDUPDAQECI
d. DXKWRIBZXP AXIUVYQBXM SIVZGCKTFQ
e. KBAWHWGKPP CQBJMBLQLM _KJQGJTKFQ
f. BKJSETQRAT HCDXFYEMOU DZBRUKNXZR
g. BIWIGQCBCV KRC_UNWFDB GIWVSDPFAD
h. LAIBXDKWIFAFJ DJNNLFAMIFFXB XAYYFMCD_GQUY
i. DTDBLPJUHHFEO JCFLRQKY_ITC_ ZVLRVAGMTEEEI
j. TDRJFXLOPN RKYTJUWOLJ SYOPVOYOBQ

Preparação da tarefa

A ideia da tarefa surgiu em função do desejo do grupo de trabalhar com algumas aplicações contextualizadas de conceitos envolvidos na Álgebra Linear. No início do semestre 2017/01 cada membro do grupo deveria sugerir alguns problemas envolvendo matrizes, determinantes ou sistemas lineares, que poderiam ser explorados com os alunos, sendo que eu e Lisa sugerimos o mesmo tema, Criptografia. Eu apresentei concretamente um problema que adaptei de um exercício que encontrei num livro de Álgebra Linear que envolvia codificar e decodificar uma mensagem e Lisa sugeriu um texto de um outro livro de Álgebra Linear que abordava um método para codificar e decodificar mensagens.

No grupo resolvemos o problema em conjunto para que todos o entendessem e assim pudéssemos avaliar a possibilidade de propor como uma tarefa aos alunos. Na resolução surgiu uma série de dúvidas, sendo que foi necessário recorrer ao texto sugerido por Lisa e fazer um estudo em conjunto sobre o método apresentado para codificar/descodificar mensagens.

Na discussão sobre como propor a tarefa a partir da ideia apresentada, foi levantada a possibilidade de propor que cada aluno transmitisse uma mensagem codificada para um colega decodificá-la. Ao ouvir tal proposta Téo a problematizou, visto que cada aluno teria que criar uma matriz chave que faria a codificação. Tal matriz deveria ser inversível e as entradas da inversa deveriam ser números inteiros. Na sua perspetiva, e de outros membros do grupo, a tarefa se tornaria mais desafiadora se os alunos não tivessem tal informação e visualizassem matematicamente que para decodificarem a mensagem seria necessário multiplicar a inversa da matriz codificadora pela matriz da mensagem codificada, tal como explica:

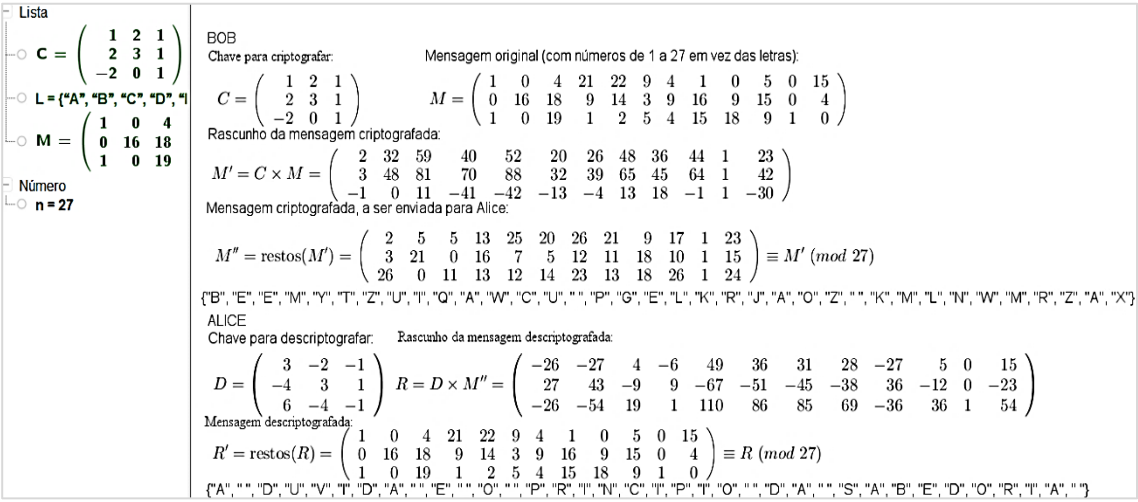
> E se for para eles criarem a chave e a gente ainda não tiver falado para eles da inversa? A gente tem que avisar que pode aparecer uma matriz inversível de alguma maneira, ou que pode aparecer matriz inversível que não é inteira. (...) Não sei, mas acho que seria mais interessante deixar eles descobrirem que vai ter que aplicar a inversa, ao invés de eu dizer isso. (EGC18, 03/03/2017)

Além de Téo, Lisa também problematizou a ideia ao levantar a possibilidade de os alunos serem corporativos entre si e passarem uns aos outros o gabarito da decodificação da mensagem. Após um longo debate, foi refutada a proposta de cada aluno codificar uma mensagem a ser decodificada pelo colega.

Como eu havia apresentado a solução do problema que sugeri por meio de um passo-a-passo, alguns membros do grupo sugeriram que a etapa de codificação de uma mensagem poderia ser proposta por meio de um roteiro com etapas a serem seguidas. Tal proposta foi aceita por unanimidade. Entretanto, Téo alertou que ainda teria "o problema de os alunos copiarem uns dos outros" (EGC18, 03/03/2017), caso o trabalho fosse realizado extra classe, pois a mensagem a ser codificada seria única. Sendo assim, decidiu-se que no processo de decodificação, que é onde seria usado o conceito de matriz inversa, cada aluno ou grupo de alunos receberia uma mensagem diferente.

Como eu havia apresentado a proposta inicial da tarefa, me responsabilizei por adaptar a redação das questões a partir do que fora discutido no grupo e de seguida partilhar com o grupo para uma nova análise. Inicialmente, cada membro do grupo ficou de me enviar sugestões de mensagens já codificadas para serem propostas uma diferente das outras aos alunos. No grupo já havíamos concluído que era um processo trabalhoso montar tais frases criptografadas, pois além de codificar, teria que decodificar para verificar possíveis erros na conversão entre caracteres e valores numéricos. A ideia era implementar de forma dinâmica no GeoGebra o processo de codificar/decodificar uma mensagem, porém dedicamos parte do encontro de planificação para isso e não obtivemos êxito. Téo havia ficado incomodado com isso e, de seguida, no término do encontro do grupo, dedicou-se a estudar o processo e as ferramentas do GeoGebra para tal, sendo que no mesmo dia partilhou com o grupo o aplicativo que construiu no GeoGebra, conforme a Figura 18:

Figura 18. Aplicativo no GeoGebra implementado por Téo para codificar/descodificar uma mensagem.



Tendo posse de tal aplicativo ficou fácil de codificar diferentes mensagens, pois bastava fazer a equivalência entre caracteres e números e distribuí-los nas linhas da matriz M, que era editável na 'janela de álgebra' do GeoGebra (Figura 18). Téo sugeriu colocar como mensagens alguns dos temas a serem estudados ao longo da disciplina, como por exemplo, 'Autovalores e Autovetores', 'Matriz de uma transformação linear', 'Conjunto Linearmente Independente' (NC, março de 2017). Ao apresentarmos a proposta ao grupo, esta foi aceita e corresponde à Tarefa 2 do Quadro 34.

A ideia do grupo era que o trabalho da Criptografia fosse proposto aos alunos na data em que estes entregariam a segunda etapa da tarefa 'Uma interpretação geométrica da multiplicação de matrizes' e que fosse realizado pelos alunos aos pares. Cada professor deveria verificar se haveria espaço no seu cronograma da disciplina para realizar o trabalho em sala de aula, caso contrário seria proposto para ser realizado extra classe com prazo de entrega de uma aula para outra. À exceção de Tito, cuja turma tinha poucos alunos, todos os demais professores mencionaram que o trabalho seria proposto para os alunos realizarem aos pares, tendo em vista a riqueza da discussão que poderia ser gerada entre os alunos, bem como facilitar o trabalho de correção.

Reflexão no grupo

Téo sugeriu aos alunos que fizessem o trabalho de Criptografia aos pares, mas houve alunos que resolveram individualmente, referindo que "nem todos têm afinidade ali, são poucos que realmente estão na sua turma certinho, que se conhecem. (...) É mais difícil para se encontrarem [fora de sala de aula]" (EGC22, 07/04/2017).

No encontro em que foi discutida a concretização do trabalho, Téo ainda não havia realizado a correção do mesmo, mas tinha uma noção do que os alunos haviam realizado, em função dos questionamentos que lhe fizeram e do facto de ter dado "uma folheada quando eles entregaram" (EGC22, 07/04/2017).

Os problemas relatados no grupo com a tarefa relacionavam-se à interpretação das questões devido à falta de clareza quanto ao que o grupo de professores esperava que os alunos respondessem. Um destes problemas estava relacionado com o facto de muitos alunos não apresentarem os cálculos, apenas as respostas, em cada questão que envolvia cálculo. Téo ponderou que: "Eu me lembro de alguns [alunos] comentarem que, como eles já tinham feito com o GeoGebra o trabalho da letra, eles usaram o GeoGebra para o cálculo das matrizes" (EGC22, 07/04/2017). No grupo avaliou-se tal facto como positivo no sentido de que os alunos estavam, a partir do trabalho avaliativo precedente a este, integrando o uso da tecnologia no seu processo de aprendizagem. Por outro lado, o objetivo era, por exemplo, verificar a necessidade do uso da inversa da matriz codificadora ao decodificar uma mensagem, bem como calcular a inversa. Neste caso houve alunos que, na Tarefa 2 (Quadro 34), apenas apresentaram a matriz inversa, sem apresentar os cálculos, houve aqueles que só apresentaram a matriz que armazenava os valores numéricos correspondentes à mensagem decodificada e em seguida a mensagem, mas sem mostrar como chegaram na matriz.

> Nos meus acho que tem quem fez as contas porque eu tirei dúvida, e era bem nessa parte de inversa. (...) Teve uns que me perguntaram se poderiam usar o GeoGebra para os cálculos. Eu falei que sim, claro. Só que não me dei conta de que poderiam colocar apenas a resposta. (...) E outra coisa, que talvez dê para melhorar, é pedir para apresentar os cálculos. (...) Não colocar explicitamente que tem que calcular a inversa. Porque essa informação está contida dentro dessa. (...) Lembra que queríamos que descobrissem que tem que achar a inversa? Então, só apresente os cálculos. (EGC22, 07/04/2017)

Ao incentivar que os alunos utilizassem o software, a ideia de Téo e de outros membros do grupo era de que fosse para cálculo de produto matricial e/ou para confirmação de resultados. Diante do ocorrido, Téo sugeriu que para a evolução da tarefa seja deixado explícito no enunciado que os cálculos devem ser apresentados, observação esta corroborada pelos colegas de grupo.

Outro problema de interpretação que surgiu foi com a Questão 4 da Tarefa 1. Era esperado que os alunos fizessem a conversão da representação matricial da mensagem codificada para a forma de texto. Entretanto, poderia acontecer de alguns valores numéricos da tabela não terem um equivalente alfabético por serem maiores do que 27 – que foi o número de caracteres com equivalente alfabético dado no enunciado do problema. Então era necessário fazer uma conversão de tais valores de forma que correspondessem a um valor numérico entre 0 e 26, sendo que no enunciado foram dadas as devidas instruções para a conversão. Muitos alunos fizeram a conversão, mas apresentaram como resposta a matriz da mensagem e não o texto codificado. Na perspetiva de Téo, tal equívoco na interpretação pode ter surgido porque no enunciado havia a instrução de como fazer a conversão da representação matricial para os respetivos caracteres, porém não estava escrito de forma explícita que era para apresentar a mensagem na forma de texto, tal como explica:

> O que eles entenderam foi que era para fazer a passagem da mensagem para a matriz. (...) Tem que colocar separado, a parte que é instrução sobre alguma coisa, e a parte que é atividade. (...) Ao invés de 'Para escrever a mensagem na forma de texto, encontre o equivalente alfabético....', teria que ser: 'Escreva a mensagem na forma de texto. Para isso, faça tal coisa...'. (EGC22, 07/04/2017)

Sendo assim, Téo sugere que em questões com características semelhantes a esta, é necessário deixar claro no enunciado qual é o objetivo da questão e quais as instruções para atingir tal objetivo.

Para além da dupla interpretação gerada, o grupo constatou nesta mesma questão que a instrução que foi dada sobre como fazer a tal conversão foi desnecessária, uma vez que também foi apresentada uma tabela com o resultado dessa conversão para valores no intervalo $[-53, 81]$. Aqueles alunos que precisavam fazer a conversão para valores fora deste intervalo, acabaram entendendo a lógica de construção da tabela e, sem fazer cálculos, ampliaram a tabela e encontraram o correspondente caractere. Sendo assim, concluiu-se no grupo que para a evolução da tarefa deve-se apresentar apenas a instrução de como fazer a conversão e não a tabela pronta.

7.5. Contributo do trabalho colaborativo na prática de Téo no ensino de Álgebra Linear

A partir da experiência vivenciada no grupo de trabalho, no final do 1.º semestre de trabalho, Téo reconhece algumas mudanças em relação à sua prática anterior, que era mais centrada na sua atividade, em que valorizava mais os elementos teóricos do que a interpretação geométrica e as aplicações contextualizadas dos conceitos: "A participação no grupo tem me ajudado a ajustar aos poucos o quanto pretendo enfatizar os aspetos teóricos, abstratos, demonstrações, exemplos, interpretação geométrica e aplicações" (EGR1). Em particular, passou "a explorar menos alguns aspetos abstratos e enfatizar mais algumas das interpretações e possíveis aplicações dos conceitos" (EGR1). Acrescenta que a participação no grupo lhe proporcionou "mais segurança para explorar diferentes estratégias de ensino, ao invés de aulas apenas teóricas, como a resolução de tarefas [pelos alunos] na sala de aula e o trabalho [avaliativo] extra classe" (EGR1). Téo refere-se à tarefa introdutória planificada no grupo de trabalho sobre 'Coordenadas' e 'Mudança de Base' e à tarefa avaliativa sobre 'Transformações Lineares'. Destaca a influência das discussões no grupo acerca de como envolver os alunos nas aulas, para além das estratégias definidas em conjunto sobre o envolvimento dos alunos na resolução de tarefas específicas. Paulatinamente, tem procurado envolver os alunos na resolução de tarefas tanto nas aulas de Álgebra Linear como em outras disciplinas que leciona.

> Umas das coisas que passei a tentar explorar melhor são aulas (ou momentos de aulas) de resolução de tarefas, em que posso acompanhar de perto algumas das dificuldades dos alunos (antes das provas). Isso tem ocorrido também em outras disciplinas. (...) Uma situação interessante aconteceu na aula de revisão antes da última prova [de Álgebra Linear] em que aproveitei para discutir questões de verdadeiro ou falso. Foi possível induzi-los a construir exemplos e contraexemplos para tentar confirmar ou refutar os palpites que tinham sobre cada afirmação. O processo permitiu discutir alguns aspetos mais conceituais, e eles também tentaram identificar falhas na argumentação ou nos exemplos dos colegas. A forma como ocorreu aquela aula teve influência da experiência anterior com a tarefa sobre transformações lineares, em que solicitei que resolvessem em sala de aula e fui esclarecendo dúvidas, procurando fazer perguntas para induzi-los a ver o caminho para chegar à solução. (EGR1)

Sobre a experiência em particular que refere sobre a tarefa avaliativa relativa a 'Transformações Lineares', destaca como contributo pessoal para a sua prática uma maior interação com os alunos, a qual foi proporcionada pela dinâmica da resolução da primeira etapa da tarefa na sala de aula.

Ao avaliar o contributo do trabalho colaborativo na construção de tal tarefa, salienta o trabalho conjunto com os colegas do grupo tendo como referência a partilha de experiências anteriores de cada um e a copropriedade que a tarefa adquiriu através da participação de todos os elementos do grupo tanto na construção como, a posterior, da apresentação de sugestões para melhorar as questões. Téo corrobora que a dinâmica subjacente à elaboração dessa tarefa promoveu alterações na abordagem do conteúdo, que antes era mais teórica, para uma abordagem que passou a valorizar também a interpretação geométrica dos conceitos envolvidos, como ilustra um recorte de um momento de reflexão no seio do grupo de trabalho:

> Tito: O meu foco sempre foi mais analítico. Então, a contribuição do grupo aqui foi trazer essa parte geométrica.
>
> Bruna: O que eu gostei desse trabalho é que foi construído de forma bem colaborativa, as pessoas deram bastantes sugestões de melhoria, foram olhando as questões. (...) Não é o trabalho da Nina, da Bruna, do Téo, do Tito... Foi uma composição que ficou um trabalho bacana. Realmente foi um trabalho construído a várias mãos de uma ideia que

já nasceu de coisas que já tinham sido feitas e que a gente adaptou, inclusive trabalhos de pesquisa. Fomos adaptando, dizendo: 'Essa questão aqui não explora isso'.

Téo: Outro benefício no meu caso foi uma associação de maior interação com a turma nessas questões, por enquanto ainda tenho uma tendência de não fazer muita interação durante a aula nessas atividades. Nesse semestre, eu acabei fazendo algumas aulas assim, não só na Álgebra Linear, mas em outras disciplinas, tentava fazer o tipo de coisa que aconteceu nessa. Funcionou bem. (EGC14, 02/12/2016)

Apesar de ter realizado algumas aulas em que procurou valorizar a atividade dos alunos, ao avaliar a sua prática problematiza-a ao reconhecer que, no geral, centraliza as atividades da sala de aula em si, mas que a participação no grupo de trabalho lhe permitiu visualizar alguns caminhos para avançar na direção de alterar tal postura quando lecionar novamente a disciplina:

> Ainda não explorei o suficiente a participação dos alunos na resolução de algumas questões no quadro, ou mesmo a resolução de tarefas em sala, acompanhando as dúvidas de cada um. Eu explorei, mas foi pouco, apenas em aulas específicas. Acredito que poderei intercalar mais destas atividades ao longo do semestre no futuro. (EGR1)

No 1.º semestre de trabalho, o grupo enfatizou, nas atividades a desenvolver, a promoção da visualização geométrica dos conceitos de Álgebra Linear. Na sua prática, Téo já costumava explorar, por vezes, a visualização geométrica dos conceitos antes de participar no grupo de trabalho. Com exceção à Álgebra Linear, fazia essa exploração com uso de software, além de esboços gráficos no quadro. Segundo Téo, as discussões acerca dessa temática no seio do grupo de trabalho e as planificações realizadas com ênfase nessa abordagem lhe oportunizaram "conhecer outras perspetivas e ver que valia a pena levar para a sala de aula algumas dessas discussões, outros pontos de vista, em relação ao conteúdo ou para reforçar algum tópico específico por meio da visualização geométrica" (EGR1). Essas perspetivas a que Téo se refere sobre o 1.º semestre de trabalho, incidem sobre:

(i) a estratégia utilizada para ensinar Mudança de Base, onde se introduziu tal tópico por meio de uma tarefa exploratória no $\mathbb{R}^2$, uma discussão sobre a tarefa por meio de um aplicativo do GeoGebra e a partir disso a construção da generalização para espaços vetoriais quaisquer, ao contrário do que fazia antes, em que iniciava o tópico a partir da generalização;

(ii) a proposição da tarefa com caráter avaliativo sobre transformações lineares, onde propõe e acompanha a resolução dos alunos para uma primeira etapa, com recurso ao papel e lápis, em sala de aula, e uma segunda etapa (extra classe) com recurso ao computador.

Ao refletir sobre a influência dessas atividades na aprendizagem dos alunos, Téo acredita que a abordagem da visualização geométrica os tenha auxiliado a perceber as relações entre conceitos abstratos e estruturas concretas. Porém, aponta que alguns alunos continuam a apresentar dificuldades com a linguagem simbólica e com as diferentes representações dos conceitos, bem como com a transição entre elas.

> Acredito que tenha ajudado a entender os conceitos envolvidos, por terem mais de uma forma para pensar sobre eles. Mas ainda assim continuaram existindo vários casos em que os cálculos parecem ser feitos mecanicamente, às vezes de forma incorreta, sem perceber a relação entre o que está sendo escrito e o significado dos símbolos e conceitos envolvidos. O exemplo que me vem à mente é o de matrizes de uma transformação linear em relação a bases distintas no domínio e no contradomínio, e a confusão entre as bases, vetores e suas coordenadas, e a interdependência entre essas coisas. (EGR1)

Após um ano de trabalho no grupo, ao olhar retrospetivamente para a sua prática de ensino de Álgebra Linear na procura de identificar diferenças com a sua prática anterior, Téo aponta que a participação no grupo de trabalho lhe despertou uma maior preocupação com a aprendizagem dos alunos. Antes da sua participação no grupo, a sua maior preocupação era com o conteúdo e em vencer o cronograma da disciplina. No grupo, tendo em vista que o ensino de alguns tópicos planificados em conjunto demorou mais tempo do que o planejado, discutiu-se em alguns momentos a prioridade do ensino de alguns tópicos essenciais para a formação inicial dos alunos. Nesse sentido, além de se sentir apoiado pelo grupo para fazer essas escolhas, refere que se tem preocupado em ensinar os tópicos tendo em consideração a aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades.

> Cumprir a ementa [conteúdo programático da disciplina] completamente, mesmo que seja de forma superficial em alguns tópicos ou em todos os tópicos por causa da limitação de tempo, é algo que eu estou menos preocupado, porque é meio geral, não é só uma particularidade do andamento do meu curso de Álgebra Linear. A maioria [dos professores] acaba tendo dificuldade para cumprir, então não tive mais tanta preocupação com o facto de isso acontecer, de ter que sair correndo com a matéria para chegar ao final. Na primeira vez que eu dei a disciplina, que foi um semestre antes da gente começar a discussão, eu achava meio absurdo ter que pular algum tópico. O que acontecia é que tanto eu, como outros professores, chegava à segunda metade do curso e começávamos a correr com o conteúdo, principalmente para dar conta também da parte de Produto Interno [último tema]. Nesse sentido, agora fico mais tranquilo de poder abrir mão talvez de um tópico para abordar com mais detalhe, com mais calma algumas coisas que tenham sido escolhidas para trabalhar no curso, e optar pela qualidade das discussões dessas questões. (EGR2)

Ao aperceber-se das dificuldades dos alunos para a realização de algumas tarefas avaliativas que foram propostas, infere que se podem dever à falta de familiaridade com o tipo de tarefa proposta ou com o recurso tecnológico necessário para a resolver. Assim, considera que a participação no grupo lhe despertou a preocupação em explorar ao longo do semestre algumas potencialidades de softwares a serem utilizados para os alunos se familiarizem com eles. A preocupação de Téo é que o aluno aos poucos tenha contacto com o software para depois se concentrar na execução da tarefa e na interpretação dos dados.

> Por exemplo, no que se refere ao uso do software, quando a gente falar de propostas para eles usarem o GeoGebra, ou alguma proposta de outra ferramenta, tenho pensado mais em explorar como é que a gente usa algumas das funcionalidades ao longo das aulas, para dar uma ideia de como eles podem adaptar ou fazer algum trabalho em cima desse tipo de programa. E a mesma coisa em disciplinas que não sejam Álgebra Linear, como Cálculo Numérico. Os programas que dá para usar como ferramenta para implementar, eu já tenho tentado mostrar a eles aos poucos. Começo mostrando a interface, mostro um comando ou outro, conforme dá eu vou mostrando alguma coisa que dê para explorar num pequeno exemplo, em que os alunos já vão tendo algum contacto. (…) A Bruna já fazia alguma coisa no sentido de mostrar as ferramentas, no caso o GeoGebra, para a turma. Daí quando tem alguma tarefa, eles se viram um pouquinho melhor com o software, e sobra mais tempo para entender melhor o conteúdo que está envolvido no problema, ver algumas propriedades. Lembro que nas reuniões teve essa discussão, que os alunos achavam difícil [a realização das tarefas] por não ter contacto nenhum [com o software]. Parte era dessa falta de apresentação do material antes, de ficar dizendo: 'faça o trabalho, use o GeoGebra, descubra como funciona'. (EGR2)

Essa preocupação em preparar os alunos para as atividades a serem realizadas, passou a refletir-se em outras disciplinas que Téo lecionava e não se restringia a apenas ao uso de softwares. Para citar outro exemplo, Téo teve uma posição semelhante no final do 1.º semestre de trabalho, ao avaliar uma questão da tarefa avaliativa sobre Transformações Lineares, que era teórica e envolvia a demonstração de uma equivalência. Tal questão se revelou uma fonte de dificuldades para os alunos, pois no seu entendimento para mostrar uma equivalência era suficiente mostrar a implicação, ao invés de também mostrar a recíproca. Téo destacou a importância de explicar aos alunos o que significa uma equivalência e envolvê-los na resolução de tarefas que envolvam esse tipo de demonstração ao longo do semestre e não apenas na avaliação.

> Na questão de equivalência não preparamos os alunos para isso. Acho que temos que explicar o que é equivalência ou separarmos a questão em dois itens, um para a ida [implicação] e outro para a volta [recíproca]. (…) Antes de chegar nisso [neste conteúdo] que outros teoremas no curso envolvem equivalência? (…) Acho que é importante

> explicar a terminologia e depois retornar nessa noção em outros momentos para ficar uma linguagem comum para eles. (EGC15, 16/12/2016)

Para além de se preocupar mais em preparar os alunos para o tipo de tarefa proposto, seja teórica ou com o auxílio de software, considera que aos poucos tem procurado envolver mais os alunos em suas aulas por meio de questionamentos ou do trabalho em equipe. Entretanto, após um ano de trabalho no grupo, revela que o aspeto menos atingido nas suas aulas é o envolvimento dos alunos na resolução de questões no quadro ou na apresentação de trabalhos à turma.

> Acho que às vezes ainda me empolgo com as explicações. Mas está melhor que antes, acho que consigo prestar mais atenção se estou ou não falando demais. Estou conseguindo fazer mais perguntas a eles, deixando que eles falem com uma frequência razoável durante a aula. Acho que, pelo menos, estou mais atento a isso. (...) O que ainda não se tornou uma coisa comum é propor alguma tarefa para o pessoal resolver no quadro, o resultado de alguma atividade, fazer algum aluno se manifestar para explorar ou explicar alguma questão no quadro. No semestre passado eu até fiz alguma vez, mas foi pouco. Em equipes sim, teve vários momentos de trabalho assim. Mas para solicitar para eles irem ao quadro, ainda não peguei o hábito de fazer, ainda não explorei muito. Acho que é uma coisa que eu poderia fazer e que não exploro ainda muito. (EGR2)

Quando se iniciou um novo semestre e o grupo de trabalho continuava em atividade, constatei que Téo, em resposta à sua expectativa de envolver os alunos na apresentação de suas atividades aos colegas, propôs uma tarefa avaliativa sobre aplicações de tópicos de Álgebra Linear em que solicitava a apresentação na turma, além de um relatório escrito sobre a tarefa. Tal tarefa retomava a que foi elaborada no grupo de trabalho sobre aplicações da Álgebra Linear no semestre 2016/02, em que Téo participou na elaboração, mas que não a concretizou com os seus alunos.

> Neste semestre propus aquele trabalho de aplicações: 'Encontre uma situação do cotidiano em que a Álgebra Linear tem aplicação'. É um trabalho em equipe e vai ser a primeira vez que vou pedir para eles apresentarem alguma coisa. Deixei aberto numa aula que não pude comparecer para eles iniciarem a pesquisa preliminar e daqui a um mês eles vão começar a apresentar. Também pedi um relatório escrito, além da apresentação. Isso eu nunca tinha feito e não sei também como vai ser. (EGR2)

Essa postura indicia que Téo não tenciona abandonar as ideias que emergiram no grupo. Inclusive, na entrevista final, afirmou que pretende continuar e/ou aprimorar tais ideias e, dentro do possível, estendê-las para outros tópicos do conteúdo de Álgebra Linear que não foram explorados no 1.º ano de trabalho do grupo.

> Acho que a ideia vai ser continuar aprimorando, usando algumas coisas, tentando mudar ou melhorar algumas das atividades. Temos uma boa quantidade de propostas de atividades, assim dependendo da forma que trabalharmos dá para usar exatamente do jeito que está lá. Agora, por exemplo, se fizermos alguma inversão na ordem dos conteúdos, acabará afetando a abordagem, sendo necessário fazer adaptações. Mas acho que vai acabar sendo aprimorado esse tipo de material ou complementado com outros que a gente ainda não fez nenhum tipo de atividade, tentar repetir o mesmo tipo de experiência com outros tópicos do currículo que não foram abordados. A gente já foi fazendo escolhas sobre os tópicos que iríamos abordar. A ideia é essa, de acordo com as necessidades, ir alternando os tópicos para ir aprimorando, porque não se consegue tudo de uma vez. (EGR2)

Particularmente, em relação à evolução da sua prática com o uso da tecnologia em sala de aula, refere que tem utilizado o GeoGebra para introduzir alguns conceitos e explorar de forma dinâmica a sua visualização geométrica, bem como as suas propriedades e suas diferentes representações, por meio da alteração de parâmetros. Além disso, revela que costuma compartilhar com os alunos alguns vídeos e outros materiais que encontra na Internet relacionados com os tópicos de Álgebra Linear e em momento oportuno costuma resgatá-los e fazer as relações cabíveis com o conteúdo.

> Em sala de aula eu uso para mostrar alguma coisa. Utilizo às vezes para introduzir um tópico, às vezes para poder variar algum parâmetro que afeta o conceito que estou tentando discutir. O GeoGebra facilita dinamicamente essa visualização a partir do uso de um seletor ou coisa assim. Então posso trabalhar, pelo menos na parte da intuição, com vários exemplos em bloco, com uma certa liberdade. Nesse sentido, ajuda mais na interpretação ou na introdução de um conceito, que foi o que mais ou menos fiz na introdução de Operadores Lineares. Explorei as transformações de figuras no plano, em que eu podia mexer nas entradas da matriz, para ver o tipo de comportamento e ilustrar mais ou menos as características/propriedades que as transformações lineares preservavam ou não preservavam. (EGR2)
>
> No meu caso [uso] mais o GeoGebra, ou, às vezes, de forma mais indireta, vídeos-aula e materiais de coisas que eu tenho curiosidade na computação que às vezes eu estou assistindo ou lendo e encontro e: 'Ah, essa é a ideia que eu precisava para Álgebra Linear'. Mas não estou procurando especificamente, às vezes vem o gancho, aconteceu na hora certa. (...) Compartilhei aquela série de vídeos do *Youtube*, da Essência de Álgebra Linear que fazia o panorama geral do curso, então quando surgia a oportunidade eu retornava e: 'Ah, lembra aquele vídeo lá?'. E comentava alguma coisa breve sobre a relação do vídeo com o conteúdo. O problema é que nem todos os alunos tinham assistido. Sempre tinha também alguém que assistia e vinha no final da aula comentar. (EGC28, 02/06/2017)

No 2.º semestre, os alunos de Téo trabalharam com o GeoGebra apenas fora da sala de aula na realização de duas tarefas. Como já explicitado, uma das tarefas tinha por objetivo explorar a relação entre o produto de matrizes e a computação gráfica, e a outra tarefa visava explorar de forma dinâmica as diferentes representações de alguns Operadores Lineares especiais. Ao refletir sobre o contributo da integração da tecnologia na sua prática, pondera que é difícil mensurar o impacto na aprendizagem dos alunos. Porém, acredita que aliar a teoria com a visualização geométrica por meio do software de geometria dinâmica propicia que o aluno veja um conceito sobre diferentes perspetivas, o que pode aumentar as suas chances de compreensão.

> Não sei o quanto melhorou a aprendizagem deles. Não consigo mensurar. Mas tiveram uma forma alternativa de visualizar os conceitos que eles tinham em mãos. Por exemplo, se não tivesse usado a tecnologia, ficaria só na parte mecânica, na parte teórica e acabou. Se fosse para eles interpretarem alguma coisa, verem que essas coisas podem ser usadas no computador, que pode ser usado o computador para entender essas coisas, teria que ter partido da iniciativa deles. O facto de estar usando em sala, estar propondo as atividades para eles, isso contribui para aumentar a chance de aprender. (EGR2)

Ao apontar aspetos da sua prática relacionados com o uso da tecnologia que podem ser melhorados de modo a favorecer a aprendizagem dos alunos, refere a "realização de atividades em sala de aula pelos alunos com o uso do computador" (EGR2), ao invés dessa atividade ser centrada em si.

Por fim, Téo aponta que a participação no grupo lhe suscitou o interesse pela leitura de textos no âmbito da Educação Matemática, em particular os relacionados com o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear:

> [Me despertou] a vontade de fazer leituras, digamos, de publicações na parte de Educação da Matemática, voltada para o ensino de Álgebra Linear, ou da Educação Matemática em geral. Por exemplo, nas reuniões que eram voltadas para desenvolver textos para publicação, consolidando as ideias, eu percebo a facilidade do grupo em se entender com os conceitos da educação que eu sei que existem e não tenho a menor ideia do que são. É o tipo de coisa que eu tenho vontade de ler, e o grupo está me despertando o interesse de fazer essas leituras efetivamente o quanto antes. Acredito que vou poder interagir mais com o pessoal que já conhece ou lida bastante com a parte de Educação Matemática na hora de produzir textos. (...) Além disso, percebi num texto que usamos numa das reuniões e num livro que continha tal texto, que a Bruna postou na pasta [do Dropbox], que muitas dessas coisas já são abordadas, ou já foram abordadas e eu desconheço essas informações. Não sei o que os outros já pensaram sobre esses problemas [relacionados ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear], que eu poderia estar usando em vez de estar descobrindo de novo por conta própria. (...) Acho que ajudaria na fundamentação teórica das propostas de ensino. (EGR2)

Téo justifica que o interesse pelos textos surgiu em função da necessidade de fundamentar teoricamente as discussões futuras sobre propostas de ensino na continuação do trabalho no grupo e a produção de textos relacionados com o trabalho desenvolvido.

Síntese

No final do 1.º semestre de trabalho no grupo, ao refletir sobre a influência do trabalho realizado no grupo sobre a sua prática, Téo pondera algumas alterações na sua prática, comparada com a prática anterior. Ao confrontar a sua prática letiva, refere que anteriormente adquiria uma ênfase teórica e que passou a integrar para o ensino de alguns tópicos a visualização geométrica dos conceitos e as aplicações contextualizadas, além de ponderar o quanto trabalhar de cada aspeto mais teórico ou mais prático. Refere que as discussões no grupo lhe propiciaram conhecer outras perspetivas para o ensino de Álgebra Linear, como a visualização geométrica dos conceitos mediada pelo uso da tecnologia, bem como um sentimento de segurança para colocar em prática tais perspetivas. Téo avalia que aliar a exploração da visualização geométrica no ensino de Álgebra Linear oportuniza aos alunos ver as relações entre o concreto e o abstrato. Entretanto, ao avaliar o contributo das atividades desenvolvidas no grupo e que concretizou em sala de aula para o processo de aprendizagem, pondera que alguns alunos continuaram a manifestar dificuldades como em lidar com linguagem simbólica e com as transformações entre as representações dos conceitos.

Téo considera que as atividades que dinamiza na sala de aula ainda se centram mais em si do que nos alunos, mas que aos poucos tem procurado interagir mais com eles e envolvê-los no seu processo de aprendizagem por meio da resolução de tarefas dentro e fora da sala de aula e por meio de questionamentos que conduzam os alunos a validar ou refutar hipóteses. Para além da Álgebra Linear, tem procurado em outras disciplinas que leciona desenvolver dinâmicas que promovam a interação com os alunos, particularmente em sala de aula, com o intuito de os apoiar e de conhecer as suas dificuldades.

Ao fazer uma retrospetiva sobre a sua prática no final de um ano de trabalho conjunto com os seus pares, Téo considera que a participação no grupo lhe despertou uma maior preocupação com a aprendizagem dos alunos. Revela que se sentiu apoiado pelos colegas do grupo para priorizar o ensino de alguns tópicos que considera importantes para a formação dos seus alunos e os que eles têm mais dificuldade, ao invés de se preocupar em abordar todo o cronograma da disciplina sem levar em consideração a aprendizagem. Ao preocupar-se com a aprendizagem, reconhece que algumas dificuldades que surgiram na concretização pelos alunos das tarefas planificadas pelo grupo de trabalho no semestre anterior podem ter resultado da falta de familiaridade dos alunos com o uso do GeoGebra e com o tipo de questões propostas. Como implicação dessa reflexão reconhece que passou a preocupar-se em preparar os alunos para a resolução das tarefas. Relativamente ao uso da tecnologia, tem utilizado predominantemente o GeoGebra em sala de aula para mostrar aos alunos a interpretação geométrica dos conceitos e no segundo semestre propôs duas tarefas avaliativas com o uso de tal software para serem concretizadas extra classe.

Ao comparar a evolução da sua prática entre o 1.º e o 2.º semestre de trabalho no grupo, em relação ao envolvimento dos alunos, revela que desenvolveu mais atividades que considerem o seu ritmo de aprendizagem, porém problematiza a sua ação ao constatar que poderia ainda explorar outros recursos, como envolvê-los na apresentação de trabalhos, na resolução de tarefas no quadro e em tarefas mediadas pelo uso do computador em sala de aula.

Téo destaca ainda que o grupo de trabalho lhe despertou o interesse para realizar leituras relacionadas com pesquisas no âmbito da Álgebra Linear e da Educação Matemática, para contribuir na análise da sua prática letiva, dos dados produzidos no grupo de trabalho, na escrita de artigos sobre experiências na sala de aula, bem como para fundamentar e ter novas ideias na continuidade da atividade do grupo de trabalho.

CAPÍTULO 8

ESTUDO DE CASO SOBRE NINA

Este capítulo dá a conhecer as atividades realizadas por Nina no grupo de trabalho com os seus pares, em prol da sua prática docente em Álgebra Linear, estruturando-se em cinco secções. A primeira, apresenta a caracterização da professora; a segunda, incide sobre as suas perspetivas sobre o trabalho colaborativo; a terceira, expressa as suas perspetivas sobre o ensino de Álgebra Linear; a quarta secção, ilustra momentos da prática de ensino de Nina no contexto do grupo de trabalho entre pares e o processo de reflexão sobre a sua prática, bem como as implicações dessa reflexão para planificações futuras sobre o ensino de tópicos de Álgebra Linear abordados e planificados no grupo; e, por fim, a quinta secção ilustra as perspetivas de Nina sobre o contributo do trabalho colaborativo com os seus pares na sua prática de ensino de Álgebra Linear. A fim de minimizar a repetição de ideias, sintetizo alguns detalhes sobre a descrição de tarefas dinamizadas por Nina, já elucidadas no estudo de caso anterior.

8.1. Caracterização da professora Nina

Ao iniciar as atividades no grupo de trabalho, Nina tinha pouco mais de 40 anos de idade e 15 anos de experiência profissional. Nina é casada e tem dois filhos, que eram menores de seis anos de idade, exigindo-lhe ainda bastante atenção. No seu percurso formativo, Nina graduou-se em Licenciatura em Matemática. A escolha por esta formação inicial foi motivada pela sua afinidade com a Matemática e por ser um curso de pouca concorrência no processo de seleção que realizou para acesso ao Ensino Superior, pois não se sentia preparada para concorrer a uma vaga em cursos de maior procura pelos estudantes. Na sua formação continuada, Nina cursou o mestrado e o doutoramento em Engenharia de Produção, porém trabalhou com problemas envolvendo a Matemática Aplicada, área da Matemática com a qual possui maior afinidade. Após a conclusão do doutoramento, tem procurado atualizar-se profissionalmente por meio de leituras e dos estudos realizados para o desenvolvimento dos projetos de pesquisa que participa:

> Eu me interesso, só que a questão de tempo está complicada. Mas eu sempre fico atenta à minha formação, às vezes não é indo [a um curso], mas às vezes é lendo. (...). Eu estou envolvida com pesquisa, (...) na parte da aplicação da Matemática, que também é um meio para a atualização [profissional], de envolvimento com a instituição e de troca de ideias com outras pessoas. (EG)

Ao refletir sobre a adequação da sua formação para ensinar Álgebra Linear, Nina considera que a sua graduação foi frágil nesse sentido e que no doutoramento, embora utilizasse matrizes como ferramenta para a resolução do problema de pesquisa, não havia um caráter formativo em Álgebra Linear. Nina refere que foi adquirindo o conhecimento para ensinar Álgebra Linear por meio da sua prática de ensino, do seu estudo do conteúdo para o planificar e da experiência adquirida no exercício da profissão docente:

> A Álgebra Linear que eu dou foi mais por mim do que pela minha formação, eu leio, eu busco, eu pesquiso, eu preparo a aula, mas não foi devido à minha formação não. Por isso que às vezes até penso, 'é amadurecimento', às vezes a gente cobra do aluno alguma coisa que realmente falta amadurecimento, a gente tem, mas eles não têm. Imagina, na graduação eu não entendia nada também. Às vezes os alunos respondem alguma coisa, até na resposta do aluno 'ah é verdade, não tinha pensado nisso...'. Mas é mais pela experiência de sala de aula [que vai aprendendo]. (EG)

Relativamente à sua experiência profissional, Nina iniciou sua carreira docente ensinando Matemática para alunos de Ensino Fundamental e Médio por um período de um ano. Em seguida, assumiu uma vaga de professora efetiva na universidade que serviu de contexto do estudo. No início do trabalho no grupo, com uma experiência no Ensino Superior de 14 anos, já havia lecionado Álgebra Linear por oito semestres não consecutivos, para além das disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral I e II, Geometria Analítica, Pesquisa Operacional, Estatística, Matemática Financeira e Laboratório de Ensino de Matemática IV.

Na sua atividade profissional, antes de participar do grupo, Nina assumia uma postura mais individualista, principalmente no que diz respeito à planificação de suas aulas. Mais no início da carreira, ou quando lecionava uma disciplina pela 1.ª vez, a professora recorria aos colegas para esclarecer dúvidas ou para verificar como os colegas ensinavam determinados conteúdos: "Eu me lembro que quando começava a dar uma disciplina eu perguntava bastante: 'como faz aquele exercício?', 'como tu davas essa matéria?', 'como tu explicavas este assunto?', 'o que significa isso?', 'ah, o aluno me perguntou isso...'" (EG). Entretanto, como refere, sempre recorreu aos colegas para "um tira-dúvidas, nunca foi troca de experiência, nem troca de ideias" (EG).

De forma geral, no Departamento de Matemática, Nina assume uma postura crítica tanto em relação às questões de ensino como em relação às questões administrativas. No grupo, a docente também procurou ter um olhar crítico, construtivo, sobre as atividades realizadas, sobretudo em relação à adequação do objetivo das propostas de ensino, bem como ao nível de dificuldade delas. Por outro lado, Nina não apresentou novas ideias ao grupo, tão pouco participou da elaboração efetiva das propostas de ensino que surgiram no grupo, o que não quer dizer que não tenha participado das discussões que as originaram, apenas não foi quem colocou 'as ideias no papel'. A esse respeito, num momento de reflexão sobre o trabalho no grupo, Nina argumenta que "eu vejo que vocês saem da reunião e já vão para o departamento trabalhar. E eu não sou assim. Eu não tenho essa proatividade" (EGC28, 02/06/2019). Uma análise mais crítica por si, destas propostas, como por exemplo, em relação aos enunciados de questões, era realizada após a concretização delas com os seus alunos. Apesar de Nina não apresentar novas ideias ao grupo, procurava incitar os colegas para a discussão/criação conjunta de novas ideias, levantando questões, como por exemplo:

> Os nossos primeiros assuntos são matrizes e sistemas lineares, vamos fazer alguma coisa para esta parte? (...) Semestre passado a gente trabalhou no grupo com essa parte de sistemas. (...) A gente começou por sistemas, e cada um de nós apresentou uma aplicação para o grupo. Depois propomos o trabalho de aplicações aos alunos. Vamos fazer isso de novo? (EGC16, 15/02/2017)
>
> Posso dar uma sugestão? E aquela ideia de fazer a interpretação da multiplicação de matrizes utilizando a letra inicial do nome, aquele exemplo com a letra T que a Bruna fez, nós não vamos fazer? Eu gostei da ideia. (EGC17, 24/02/2017)

Por vezes, a reflexão sobre as questões levantadas levava o grupo a elaborar algumas propostas de ensino aos alunos, como, por exemplo, a tarefa sobre a interpretação geométrica da multiplicação de matrizes, cuja elaboração foi motivada por Nina a partir de uma ideia de Bruna. Para além de procurar estimular o grupo como um todo para a criação das propostas de ensino, Nina procurava desafiar particularmente alguns dos colegas a alterarem a sua prática.

> Nina: O trabalho de operadores todo mundo vai fazer, está decidido. Tito, tu vais fazer só de operadores? [Tito responde que sim]. Faça mais Tito, é interessante, eles aprendem com isso, é uma disciplina difícil para eles. Saia da zona de conforto Tito!
>
> Bruna: Tito, vou te dar uma sugestão. Como tua turma é vinculada ao curso de Matemática, solicite a eles no mesmo sentido que eu vou fazer, só que aplicações de Álgebra Linear na educação básica. (...). Já que serão professores de Educação Básica, dá para propor para verificarem como os conteúdos podem ser trabalhados lá.
>
> Tito: Ah, boa ideia.
>
> Nina: Acho interessante Tito, mesmo que na turma tenha alunos de outros cursos. Até mesmo para eles ver: 'a gente vai estudar Álgebra Linear e isso tem aplicação'. (EGC2, 29/07/2016)

Nesta ilustração de um momento no grupo, a professora desafia Tito a ampliar o seu sistema de avaliação em Álgebra Linear, incluindo pelo menos mais uma tarefa avaliativa.

Nina também assumia no grupo uma atitude problematizadora em relação ao ensino de Matemática, de forma geral. Por exemplo, ao discutirmos questões como a importância de dar o feedback das avaliações (provas/tarefas) aos alunos e como trabalhar o erro do aluno nestas avaliações, Nina problematiza a forma como tratávamos essas duas questões com os alunos.

> Esse *feedback* é importante, mas não adianta eu ir lá e resolver com eles novamente e eles dizerem assim: 'Ah, está bom professora, mas já ganhei 4 [pontos], já ganhei 2 [pontos], já ganhei 3 [pontos]. O que eu vou fazer com isso agora? Estudar para o final do semestre para fazer o exame[11]?'. (...). Não adianta você dar o *feedback* e não refazer essa prova. Você teria que fazer algo para ele recuperar essa nota. A recuperação teria que ser paralela. O exame no final não é uma recuperação dessa aprendizagem. (EGC16, 15/02/2017)

Na sua perspetiva, de nada adianta o professor discutir com os alunos os seus erros se não promove uma forma de recuperação da avaliação malsucedida. Este tipo de discussão paulatinamente levou alguns professores, individualmente, a promoverem alguma forma de recuperação da aprendizagem dos alunos, seja oportunizando que os alunos refizessem uma tarefa avaliativa, seja elaborando questões avaliativas relacionadas com os erros cometidos nas avaliações de forma a complementar a respetiva nota.

Mesmo tendo um perfil bastante crítico, Nina sempre manteve uma relação cordial com os demais participantes do grupo, colocando a sua opinião com cuidado e mostrando-se aberta a ouvir as ideias dos outros. Houve momentos, principalmente no primeiro semestre de trabalho, que a primeira reação de Nina diante de novas ideias foi a de resistência. Porém, ao ouvir diferentes argumentos no grupo e após o próprio amadurecimento da ideia proposta, Nina acabava mudando de opinião, concretizando com os seus alunos todas as ideias elaboradas no grupo.

Este é, em traços largos, um retrato da professora Nina, onde se destaca o seu perfil crítico em relação aos processos de ensino e aprendizagem e às mudanças que poderiam ocorrer em sua prática para melhorar estes processos. Se sobressai a sua característica pouco proativa, seja para individualmente colocar em prática tais mudanças, seja para contribuir com o grupo com ideias concretas. Por outro lado, se apresenta disponível para colocar em prática as ideias construídas no grupo e contribuir com a avaliação de tais ideias. A sua presença num ambiente de discussão/reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear é um elemento importante para a alteração de sua prática

[11] O **exame** na universidade é uma prova de recuperação de nota realizada ao final do semestre, em cada disciplina, para os alunos que não conseguiram atingir a média final para serem aprovados (7,0 pontos). A média final para ser aprovado após o exame é 5,0 pontos, sendo calculada pela fórmula: $MFE = (6 \times MF + 4 \times NE)/10$, onde MFE é a média final após exame, MF é a média final das provas e NE é a nota obtida no exame.

de ensino, pois a sua tendência ao comodismo dificulta que sozinha repense a sua prática, como aponta: "Tem coisas que tu sabes que pode melhorar, (...) mas sozinha tu não faz. (...) Quando tu estás em grupo, tu te arriscas muito mais. (...) As nossas aulas estão sempre mudando, sempre estamos fazendo alguma coisa nova" (EGR2).

8.2. Perspetivas e prática de Nina sobre o trabalho colaborativo

Antes de participar do grupo de trabalho, Nina já havia vivenciado no próprio Departamento de Matemática do Centro do Campus A a experiência de trabalho conjunto entre professores nas disciplinas de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral I, tal como explica:

> Fiz parte dos projetos de Geometria Analítica, de Cálculo I e de Álgebra Linear. Em cada projeto a gente trabalhava com o mesmo material didático, aplicava a mesma prova. Só que não era um trabalho colaborativo. (...) A gente achava que a responsabilidade era do Coordenador [de cada projeto], ele que tinha que elaborar a prova, ele que tinha que reservar as salas para as provas, ele tinha que fazer o gabarito. (...). Aquilo era administrativo e não pedagógico. Aí a prova era conjunta para todo mundo, o coordenador pedia sugestões, mas poucos davam. A gente acabava se reunindo para discutir a prova que o coordenador fazia. Agora, a responsabilidade se tinha algum erro era da pessoa que digitou, do coordenador, entende? Então, na verdade, era um conjunto de pessoas, mas não era colaborativo. (EG)

Na perspetiva de Nina, o trabalho conjunto realizado em cada um dos projetos que participou não se caracterizava como colaborativo. Os professores de cada disciplina definiam um cronograma comum a ser seguido e aplicavam provas comuns, que muitas vezes eram elaboradas por um professor que assumia o papel de coordenador do projeto. Não havia a discussão conjunta sobre a metodologia de ensino. Mesmo dentro da forma como se configurava o trabalho conjunto que vivenciou, Nina conseguia apontar alguns pontos positivos do trabalho entre pares numa mesma disciplina:

> A vantagem seria a troca de ideias, principalmente na hora de montar a prova. Às vezes, a gente tem um método e a prova fica sempre a mesma cara. Quando a gente trabalha num grupo vai mudando a cara da disciplina. A prova comum era uma forma de nivelar o ensino. Outra vantagem é a sequência, sempre a gente tentava trabalhar na mesma velocidade. Esse ritmo eu achava que era importante para me localizar, se estava indo rápido ou devagar com relação a disciplina porque eu sou meio rapidinha. (EG)

Nina considera que a troca de ideias com seus pares, mesmo que fosse apenas sobre a avaliação, já era suficiente para provocar alterações na forma de ensinar as disciplinas envolvidas, tendo em vista o desejo pelo êxito dos alunos nas avaliações comuns. Além disso, sentia-se segura tanto quanto à sequência definida para o conteúdo – havia uma apostila para cada disciplina, quanto à evolução no cronograma da disciplina, visto que as provas comuns definiam o ritmo a ser dado. Tomando por base a sua experiência, considera que para um trabalho entre pares obter sucesso é necessário que todos os envolvidos deem a sua parcela de colaboração, para evitar o sentimento de que se está trabalhando para o outro: “A desvantagem é que nem todos colaboram. Às vezes tu trabalhas para o outro, então quando todos colaboram é muito bom” (EG). Nina tinha também a conceção de que para participar de um trabalho entre pares com a cultura colaborativa seria necessário sair da sua zona de conforto, estar aberta para o novo e ter disposição para alterar a sua prática, se este fosse o objetivo do grupo, como elucida parte de um diálogo entre Nina e Tito:

> Tito: Também vejo, não que seja um ponto negativo, mas alguns professores se sentem amarrados. Ah, estou num grupo então vou ter que fazer aquilo que um ou outro estão querendo fazer, gosto de fazer da minha maneira. Mas isso é uma questão individual.
>
> Nina: Mas sabe por que Tito? Porque quando você participa de um grupo como esse tu tens que sair da zona de conforto e tu não quer sair. Aí, então, o que acontece? Ah, eu quero fazer do meu jeito, não quero fazer daquele jeito. Por quê? Porque daquele jeito tu vais ter que sair da zona de conforto e do teu jeito tu continuas fazendo do jeito que sempre fez. Então acho que não é um ponto negativo, é um ponto positivo. Quem não gosta de sair da zona de conforto não deveria participar de grupo colaborativo. (EGC1, 01/07/2016)

Ao integrar o grupo de trabalho conjunto com seus pares, Nina esperava, inicialmente, associar à sua prática de ensino em Álgebra Linear metodologias que promovessem uma atitude de envolvimento com a disciplina, tanto para os professores como para os alunos: “Minha expectativa maior está em conhecer metodologias novas para trabalhar esta disciplina. E em motivação, algo que nos motive a ir para a sala de aula e que motive o aluno a estudar Álgebra Linear” (EGC1, 01/07/2016).

Ao fazer um balanço após o 1.º semestre de trabalho, sobre a sua participação no grupo, considera que, de forma geral, se sentiu desafiada a alterar a sua prática de ensino introduzindo em suas aulas elementos que não costumava explorar, como as aplicações contextualizadas e a interpretação geométrica de alguns conceitos:

> Achei o projeto muito interessante e desafiador. Consegui colocar em sala de aula algumas aplicações de Álgebra Linear, que sem a participação no grupo eu jamais pensaria em colocar. Também trabalhei a parte geométrica dos conceitos que antes eu não costumava trabalhar. Eu acho que ainda tenho muito a melhorar, mas minha prática foi diferente dos semestres anteriores, e acho que para melhor, pois o resultado [êxito dos alunos] surpreendeu. (EGR1)

Ao refletir sobre o seu papel no grupo, Nina faz uma autocrítica indicando que no início do semestre trabalhou mais do que no final e justifica sua postura pelos compromissos inerentes à prática docente.

> Acho que no início do semestre eu contribuí mais, trouxe material, me envolvi mais. Mas no decorrer do semestre as coisas apuraram muito e não consegui me dedicar. Outra coisa que tive dificuldade foi trabalhar com o GeoGebra. Eu não sei trabalhar direito com o GeoGebra. Isso me deixou meio insegura e fiquei um pouco afastada da parte da elaboração das tarefas que envolviam o GeoGebra. Eu superei estudando, tentando mexer no software e seguindo a metodologia adotada. (...) Mas eu apliquei em sala de aula tudo o que foi feito e procurei discutir esta aplicação. (...) Acho que meu papel é mais para receber, aplicar e trazer as minhas reflexões ao grupo. (EGR1)

A docente destaca que seu envolvimento no grupo foi maior com a aplicação em sala de aula das atividades planificadas em conjunto do que com a própria planificação, e como contrapartida procurou contribuir com suas reflexões para aprimorar tais atividades. Em particular, Nina justifica que sua participação foi menor na planificação de tarefas que envolviam o uso do GeoGebra, pela sua falta de familiaridade com o software.

Ao avaliar as relações entre os participantes do grupo, Nina destaca a cordialidade e a valorização das ideias e experiências tanto dos professores mais novos na profissão como dos mais velhos, para a construção de ideias comuns do grupo:

> Acho que o grupo conseguiu trabalhar muito bem, tanto na cordialidade, como na forma de trabalho, aproveitando o melhor de cada um. Seis professores com ideias, experiências e práticas diferentes fazem o grupo se tornar rico em informações. Por exemplo, o Tito teve uma metodologia bem legal, mesmo teórica, que a gente seguiu na parte de mudança de base, depois veio o Téo com a questão da elipse, fizemos uma mudança de base para encontrar a equação da elipse num novo sistema de coordenadas. Juntamos a teoria do professor que tem mais experiência, com a ideia da parte geométrica do professor com menos experiência e no final o resultado foi muito bom. O grupo está trabalhando muito bem, a Lisa e o Téo, que são novos, estão contribuindo muito. Até teve aluno da Lisa assistindo minha aula e dizia 'Ah professora, a Lisa explicou de tal forma', coisa que eu não tinha pensado. Não é o tempo que faz com que ideias boas venham, porque às vezes pode estar há 20 anos e não vem nada, tem que estar disponível, aberto para o novo. (EGR1)

Nina, que é experiente na profissão docente, infere que tem desenvolvido o seu conhecimento profissional com os professores menos experientes e destaca que não é o tempo de experiência que implica que novas ideias surjam, mas sim a disponibilidade para ouvir o outro, para debater criticamente suas ideias e para alterar a sua prática de ensino. Para além das aprendizagens que retira por meio da interação com seus pares, a professora considera que o aspeto que mais conseguiu desenvolver após a participação no grupo foi a forma como avalia as aprendizagens dos alunos:

> Creio que o aspeto mais importante foi a avaliação. Eu dei essa disciplina por várias vezes, mas foi a primeira vez que fiz dessa forma. Eu nunca tinha feito trabalhos [tarefas avaliativas], fazia trabalhinhos que na verdade eram questõezinhas da lista de exercícios ou de provas antigas para resolver em aula, mas não trabalhos de ter que pesquisar sobre sistemas lineares, encontrar aplicações na área deles, fazer um trabalho sobre transformações lineares, utilizar software, apresentar o trabalho, eu fazer uma prova com questões que envolva interpretação geométrica, foi tudo muito diferente. (...) No começo me angustiava o facto de mudar a metodologia de trabalhar o conteúdo e não mudar minha forma de avaliar. Eu me lembro de ter colocado ao grupo na 2.ª prova, 'poxa, a gente está mudando tanto, fizemos um monte de coisa diferente, utilizamos o GeoGebra, e agora nossa prova vai ser igual às anteriores?'. A partir daí fizemos uma questão diferente, a 3.ª e a 4.ª provas ficaram totalmente diferentes, direcionadas para a forma com a qual estávamos trabalhando. Então, com o passar do tempo o grupo adaptou as provas às aulas dadas. Achei isso muito bom. (EGR1)

Nina destaca as mudanças na sua forma de avaliar os alunos, incluindo na componente avaliativa dos trabalhos (tarefas) envolvendo aplicações contextualizadas e o uso de software, para além das provas. Quanto às provas, indica que a mudança ocorreu paulatinamente, com a inserção de questões que iam ao encontro da metodologia adotada pelo grupo em suas aulas, incluindo a interpretação geométrica dos conceitos, para além dos aspetos teóricos. É importante destacar aqui o contributo de Nina para com o grupo, no sentido de chamar o grupo para refletir sobre a coerência entre as aulas e a respetiva avaliação.

Ao refletir sobre a existência de pontos na execução do projeto que menos apreciou no 1.º semestre de trabalho com o grupo, Nina cita a falta de um planejamento prévio sobre as atividades que seriam realizadas ao longo do semestre, implicando que a planificação de algumas atividades ocorresse muito próxima à sua concretização.

> O que não me agrada, não está relacionado diretamente ao projeto. O que faltou, no meu ponto de vista foi tempo. Para cada metodologia a ser aplicada seriam necessários uma discussão, um planejamento, a execução e por fim um feedback. As coisas aconteceram dessa forma, porém de maneira meio 'atropelada'. Não houve tempo para amadurecimento. Por exemplo, não consegui me preparar o suficiente para utilizar o GeoGebra. Na parte de apresentação de trabalhos, não conseguimos discutir como explorar esta apresentação. Creio que no próximo semestre isso irá mudar, já que esse nosso processo de amadurecimento como grupo também veio a ocorrer durante o semestre. (EGR1)

Nina pondera que a falta de um cronograma sobre as atividades realizadas ao longo do semestre deveria resultar de um processo de amadurecimento do trabalho e da própria construção da identidade do grupo. Na sua perceção, um outro ponto que merece a devida atenção na condução do trabalho pelo grupo foi a falta de uma discussão das resoluções dos alunos diante de algumas questões de prova e, em particular, da tarefa avaliativa sobre transformações lineares.

> O que eu senti em relação ao grupo nesse sentido é que a troca de informação poderia ter sido maior. Eu não sei o resultado dos teus alunos em algumas questões de prova, eu não sei o resultado dos teus alunos com relação ao trabalho de transformações lineares. Algum aluno teu foi te procurar para tirar dúvida do trabalho? Quais foram as dificuldades deles? Os meus alunos não vieram tirar dúvidas, quando eu vi os trabalhos fiquei surpresa, estavam muito ruins, tive que pedir para alguns refazerem. Acho que faltou discutirmos os trabalhos que os alunos entregaram antes da apresentação deles para verificar os erros e poder dar um *feedback*. Acho que a entrega desse trabalho [etapa do trabalho mediada pelo GeoGebra] e apresentação devia ter acontecido antes da prova. Eu acho que o grupo se reuniu mais para fazer, desenvolver a metodologia e não para discutir os resultados. Mas acho que temos tempo para isso no próximo semestre. (EGR1)

Relativamente à discussão sobre a resolução de provas, o grupo fez uma análise da concretização por todos os alunos de uma questão sobre mudança de base planificada em conjunto, porém Nina esperava que tal análise tivesse sido realizada para mais questões. Também esperava que o grupo tivesse analisado em conjunto as resoluções dos alunos da tarefa sobre transformações lineares, mediada pelo GeoGebra, previamente à apresentação em sala de aula pelos alunos, para ter um suporte do grupo sobre como dar o *feedback* aos alunos. Tal análise foi realizada individualmente por cada professor (que exigiu a apresentação) previamente à apresentação e somente no final do semestre é que o grupo fez uma análise coletiva.

Ao iniciar o segundo semestre de trabalho no seio do grupo (2017/02), no processo de reflexão conjunta sobre o trabalho realizado no semestre anterior e de negociação/definição de metas para a continuação das atividades a realizar, Nina expõe suas expectativas sobre o trabalho entre pares. Tais expectativas estão em consonância com os pontos que identificou que poderiam evoluir em relação ao semestre anterior, como o *feedback* no grupo da concretização das atividades planificadas em conjunto e o planejamento das atividades a serem realizadas com antecedência à sua concretização.

> O que eu gostaria de alcançar neste semestre é a questão do *feedback* dentro do grupo. Por exemplo, apliquei em sala de aula o que planejamos, vamos discutir mais o que aconteceu. Vamos melhorar a nossa comunicação, porque às vezes eu não fico sabendo o que aconteceu na aula de alguém que deu o assunto antes de mim. Às vezes não

consigo compartilhar a experiência que aconteceu na minha aula, sendo que outro professor poderia se utilizar dela para melhorar a aula dele. (...). Temos que fazer um planejamento, por mais que não seja definitivo, mas fazer um cronograma do que a gente quer trabalhar. Volto na questão do trabalho de transformações. Foi bom? Foi. Só que a apresentação foi depois da prova. Então a gente acabou retomando coisas num tempo que não foi muito adequado. Teria sido mais positivo se tivesse sido antes. Então agora dentro dessa nossa abordagem que estamos dando para esse conteúdo já sabemos o tempo que precisa para acabar o assunto. Então vamos fazer esse planejamento para que a gente possa abordar com o aluno antes de fazer a prova, antes de entrar em outro assunto. Em resumo, a minha expectativa é que a gente planeje as coisas com bastante antecedência. Porque a gente trabalhou assim: 'Ah, semana que vem é esse assunto, então vamos lá, vamos ver como é que funciona, vamos dar essa aula'. (EGC16, 15/02/2017)

Ao referir que a comunicação entre os membros do grupo deveria melhorar, isso não quer dizer que ela não existia. Formalmente, todo o feedback das atividades do grupo ocorria nos encontros presenciais que eram quinzenais e neste intervalo cada professor ministrava oito horas/aula de Álgebra Linear. Entretanto, os professores deveriam conversar ‘fora’ do grupo de trabalho neste intervalo de tempo entre si, pois o grupo não tinha o hábito de fazer relatos escritos sobre os encontros e/ou sobre as suas impressões sobre a concretização de suas aulas. Nina, por exemplo, por razões várias, quando se ausentava de alguns encontros do grupo de trabalho, para ter acesso ao que fora discutido, procurava conversar com os seus pares fora do grupo de trabalho.

Ainda em relação às expectativas sobre o trabalho a realizar no grupo, Nina esperava que se reavaliasse as atividades já realizadas, tomando por referência os pontos que os professores identificaram que deveriam ser melhorados em cada uma delas. Para além disso, esperava refletir com seus pares sobre o ensino de conteúdos de Álgebra Linear ainda não abordados no grupo: “A minha expectativa é que neste semestre a gente melhore o que já fizemos no semestre passado e se possível, que façamos algo novo. Não sei o que vocês estão pensando. Vamos olhar para os outros conteúdos?” (EGC16, 15/02/2017). Pessoalmente, Nina tinha como expectativa desenvolver sua prática com o uso do GeoGebra, como exalta:

O aspeto que gostaria de me desenvolver mais é em relação ao GeoGebra, espero aprender mais neste semestre. (...) Só que a gente tem que cuidar para não focar o nosso trabalho nisso. Senão daqui a pouco vamos só querer aprender o GeoGebra e não levar o trabalho adiante. (...). Concordo com o que o Téo falou, temos que usar em sala de aula e aos poucos ir passando alguns comandos para dar suporte a eles, para depois poder exigir que usem. Porque, sinceramente, eu fico constrangida de pedir para o aluno fazer tal coisa e eu não saber fazer tal coisa, entende? ‘Ah, eu queria que você programasse dinamicamente tal e tal coisa. Então professora, me ajuda? Então, eu não posso te ajudar porque eu também não sei’. Eu acho muito chato eu não conseguir

> ajudar o aluno e ele ter que se virar, mas ainda bem que eles se viram bem, muito bem, às vezes até me ensinam. (EGC16, 15/02/2017)

Nina sentia-se constrangida diante dos alunos por exigir deles tarefas com o uso do GeoGebra e não poder auxiliá-los na concretização das suas atividades por não dominar o software. Tal sentimento era compartilhado por outros professores do grupo. Sendo assim, foi definido como um dos objetivos do grupo para o semestre 2017/02 que os professores mais experientes com o uso do software auxiliassem os menos experientes com o GeoGebra. Nina também compartilhava da opinião de Téo, que os professores deveriam explorar em sala de aula as potencialidades do GeoGebra para preparar os alunos para as tarefas mediadas pelo software.

Diante das suas expectativas, Nina se mostra otimista para a retomada do trabalho no grupo, inferindo que houve alterações que considera serem positivas em sua prática de ensino.

> Eu penso que se trabalhamos bem como grupo, se a aula de Álgebra Linear melhorou, por que não dar continuidade nisso daí? Mesmo de forma individual, se a gente está se sentindo bem, se está sendo legal, eu acho que eu continuo. Porque para mim está sendo muito rico. (...) Tenho vontade de estar aqui, gosto de estar aqui, mas ao mesmo tempo eu me sinto desconfortável. Eu me sinto incomodada, desafiada, desassossegada e saio completamente da minha zona de conforto. Porque as minhas aulas estavam todas preparadas, mas depois que eu entrei no grupo, eu não chego com a minha aula preparada, estão sempre ocorrendo mudanças. (...) Não quero mais fazer aquelas aulas como fazia antes, já não fiz semestre passado. Então estou esperando definirmos o próximo passo para começarmos já. Então eu sinto bem isso, gosto de participar, mas desafiada. Então se depender de mim, a gente está no grupo. E vocês, estão no grupo também? Se sentem assim também? (EGC16, 15/02/2017)

O sentimento de Nina corroborava com o que ela pensava no início do trabalho no grupo, de que as relações num trabalho colaborativo não devem ser confortáveis e que os participantes devem se sentir desafiados, saindo da sua zona de conforto. Nina indicia que havia um clima de confiança e respeito no grupo ao observar que “no nosso grupo não tem aquela história de ‘ah, essa ideia foi minha, essa ideia foi tua’. As ideias são colocadas no grupo, são lapidadas, e passam a ser de todo o grupo” (EGC16, 15/02/2017).

Após um ano de trabalho conjunto, ao fazer um balanço sobre as atividades realizadas, a professora considera que participou mais nos momentos de reflexão – sobre as ideias apresentadas pelos colegas e sobre a concretização em sala de aula do que fora planificado –, do que na construção das ideias em si.

> Eu não era muito de 'meter a mão na massa', construir uma ideia, digitar e trazer [para o grupo]. Mas quando alguém apresentava a ideia, eu discutia, depois de pronto discutia também, nesse sentido foi mais a minha participação. Não foi uma participação de construção: 'Ah, a ideia discutida no grupo foi essa, mas alguém precisa colocar no papel, então vou colocar'. Não fiz isso em nenhum momento. Mas aplicava em sala de aula tudo que foi planificado no grupo e depois trazia e discutia: o que foi positivo, o que não foi, onde teve falhas, onde pode melhorar. Isso aí sempre tentava trazer. (EGR2)

Tal postura já fora reconhecida por Nina no final do 1.º semestre de trabalho e não se alterou no 2.º semestre. Por outro lado, a sua participação nos momentos a que se refere foi mais intensa no 2.º semestre, tendo em vista a frequência semanal dos encontros e o número de atividades realizadas, que foi maior. No processo de construção e reflexão sobre as atividades realizadas, considera que a sua maior participação incidiu na planificação/concretização das aulas sobre o tópico 'Introdução a espaços vetoriais': "A parte que eu acho que trabalhei e participei mais foi na de introdução a espaços vetoriais" (EGR2). Enquanto que o de menor participação foi na discussão sobre como ensinar o tópico 'Autovalores e autovetores'. Sobre este tópico considera que colocou em prática pouco do que fora discutido no grupo, o que indicia dever-se, por um lado, a inexperiência com o GeoGebra, e por outro lado, por ser o último tópico a tratar no semestre.

> Em autovalores e autovetores eu não me lembro de ter dado alguma contribuição. Não utilizei muito do que foi discutido em grupo, não foi uma parte que teve um diferencial muito grande. Eu até trabalhei com a ideia que surgiu no grupo da interpretação geométrica, mas não usei o GeoGebra como outros utilizaram, por exemplo. (EGR2)

Relativamente ao papel que assumiu nos momentos em que mais participou – de reflexão sobre as ideias que surgiam e sobre as que eram concretizadas –, Nina considera que sempre teve a preocupação de se colocar na posição do aluno, tanto em relação ao nível de dificuldade e complexidade das ideias, como quanto à clareza das mesmas, como explica:

> Uma coisa que eu sempre tento fazer, que acho que foi bem relevante [no grupo], é me colocar no lugar do aluno. (...) Olha, eu acho a matéria difícil, mesmo dando essa disciplina várias vezes, tem coisas que eu acho complicadas. (...) Por isso que eu acho que sempre coloco a visão do aluno. Se eu como professora acho difícil, será que ele se deparando com aquilo pela primeira vez vai conseguir entender realmente que o que a gente quer é tal coisa? (EGR2)

Por algumas vezes, tal postura de Nina propiciou novos rumos nas planificações, tal como aconteceu na planificação de uma tarefa sobre o tópico produto interno. Como não houve tempo hábil no cronograma da disciplina para explorar tal tópico, a ideia inicial era propor uma tarefa avaliativa para ser desenvolvida em etapas pelos alunos, de forma que progressivamente explorassem o conteúdo por si só. Procurando se colocar no papel do aluno, Nina argumentou sobre o nível de dificuldade que se estava impondo para com as referidas etapas, provocando no grupo a reflexão que acabou por promover a elaboração de uma tarefa mais acessível aos alunos, tal como elucida:

> Então, algumas vezes tentei 'frear' o grupo. Por exemplo, na hora de montar o trabalho de Produto Interno, eu coloquei uma posição e acho que foi bem relevante. Foi por causa dessa posição que a gente acabou não fazendo aquele trabalho [tarefa avaliativa] tão pesado, que eu achei que era demais para alunos de segunda fase, entende? Acho que eu consegui expor a minha ideia de que aquilo ali não estava dentro de um momento certo. (EGR2)

Relativamente às relações entre os participantes do grupo, Nina considera que, embora não houvesse uma divisão de papéis pré-definida, cada participante acabava assumindo um papel diferente, de acordo com o seu perfil profissional.

> É engraçado que por mais que não se tenha feito uma divisão de papéis, talvez seja por causa do perfil de cada participante, mas cada um acaba assumindo um papel. Um de executor, outro de idealizador. Por exemplo, eu via que o Téo e a Bruna traziam muitas ideias. Você [investigadora] é mais de colocar essa ideia no papel: 'vamos ver se realmente isso vai dar certo'. O Tito trouxe algumas ideias, mas ele era mais de criticar, mas uma crítica construtiva. Eu era mais de executar em sala de aula, gosto dessa parte, de ver se o experimento vai funcionar, quais são os pontos positivos e negativos em sala de aula. Mas eu acho interessante que cada um tem a sua função para que o grupo funcione num todo, cada um tem um pontinho positivo ali dentro. (EGR2)

Para Nina, essa diferenciação de papéis promovia diferentes contribuições, que se complementavam, e eram importantes tanto para o funcionamento do grupo em si, como para a construção das ideias do grupo. A docente destaca também que a interação com os colegas do grupo lhe permitia dar outros rumos para a planificação de suas aulas, tendo em vista as experiências partilhadas por estes no ensino de Álgebra Linear, seja em relação às diferentes abordagens que poderiam ser dadas ou à própria sequência dos conteúdos:

> Eu alterei bastante [minha prática] por questão de conversas no grupo: 'Ah, como você trabalha isso? Trabalho assim, por exemplo, na parte de espaços vetoriais, eu dava intersecção [de subespaços vetoriais], dava soma [de subespaços vetoriais], dava tudo isso para depois trabalhar base. Aí a Bruna falou: Ah não, eu dou primeiro geradores, base e por último dou a parte de operações com subespaços'. E ela falou assim: 'Eu dou tudo isso para o aluno ter uma noção do que são geradores, do que é subespaço gerado, do que é base, para os alunos amadurecerem estes conceitos, para depois trabalhar com a parte de operações [com subespaços]. E eu coloquei em prática essa

ideia e acho que realmente funcionou melhor. Então, estar num grupo fazendo estas discussões, colabora muito no sentido de trazer ideias de como ajudar a facilitar o aprendizado do aluno, sendo que o assunto [Espaços vetoriais] é um assunto muito complicado para o aluno entender. Então quando você tem alguma prática que lhe ajuda a fazer com que o aluno entenda de forma mais fácil, nossa, é muito bom! (EGR2)

Para além de retirar contribuições para a sua prática por meio da partilha de experiências por seus pares, no final do 2.º semestre de trabalho, Nina conclui que com o auxílio dos colegas mais experientes com o uso do GeoGebra, conseguiu minimizar a sua dificuldade com o uso de tal software.

> Eu acho que a questão daquela insegurança, com relação ao GeoGebra, parece que eu me senti mais à vontade. (...). Com relação ao GeoGebra, foi dedicado um tempo no grupo para o Téo e a Bruna mostrarem para a gente como é que funciona. É claro que eu não tenho aquela segurança de abrir o GeoGebra na sala de aula para visualizar alguma coisa que de repente surgiu ali na aula, sem ter me preparado antes, sem ter treinado antes como fazer. Mas o que está pronto eu fico mais segura de utilizar. Antes eu não tinha muita segurança de mexer nem com o que estava pronto. (EGR2)

Ao comparar a sua evolução com o uso do software em relação ao semestre anterior, a docente conclui que se sente mais segura a utilizá-lo. Porém, tem consciência que ainda precisa evoluir a sua prática neste sentido, para, por exemplo, utilizá-lo em momentos em que surge alguma questão em sala de aula, que com o uso do software pode facilitar a visualização da situação em estudo.

Ao fazer um balanço sobre a organização do trabalho no grupo, refere que a realização de reuniões semanais no 2.º semestre contribuiu para uma maior interação entre os participantes do grupo, do que no 1.º semestre, em que as reuniões eram quinzenais.

> Eu vi que a reunião semanal foi mais interessante pelo facto de: 'Eu estou fazendo isso, o que vocês estão fazendo? Como vocês estão fazendo? Na minha turma surgiu tal problema'. Deu para interagir melhor. Neste ponto achei que superou as minhas expectativas, a interação nesse semestre foi muito maior do que no anterior. (EGR2)

Para Nina, com reuniões mais frequentes, o grupo se sentiu mais envolvido, passou a conversar mais e a trocar ideias sobre a sua prática mais frequentemente. Este maior envolvimento entre o grupo era uma das expectativas que Nina apontou para o trabalho conjunto neste 2.º semestre.

Ao refletir sobre o que poderia ser melhorado para a continuidade do trabalho conjunto, Nina sugere que o grupo deveria dar mais atenção à avaliação das metodologias desenvolvidas em conjunto para o ensino de alguns dos tópicos de Álgebra Linear:

> Eu achei bom que no grupo deixamos bem aberto a questão das provas. Cada um fez as provas de acordo com o foco das suas aulas, não teve aquilo de todo mundo ter a mesma prova. Claro que teve uma ou outra questão que elaboramos em conjunto. Mas, para questão de uma melhor avaliação de nossa prática talvez tenha que se fechar mais a questão das provas, principalmente se quisermos publicar nossos resultados. Talvez tenhamos que pensar em questões com objetivo comum. (...) Nas tarefas para introduzir algum assunto, alguns pediam para os alunos devolverem, outras não pediam, alguns corrigiam, outros não corrigiam, outros só corrigiam o que valia nota. Então teve momentos que ficou muito aberto e aí fica difícil de fazer uma avaliação da prática: o que nós conseguimos trabalhando com isso aqui em sala de aula? A gente conseguiu alcançar nosso objetivo? (...) A gente trabalhou com aplicações de sistemas lineares, então acho que todo mundo deveria fazer uma questão de aplicação de sistemas lineares. Isso não aconteceu, na prova uns colocaram aplicação, outros não colocaram. Como vamos analisar se nossa metodologia funcionou ou não funcionou? Talvez, para a gente publicar, falte isso. Para um primeiro momento, acho que já conquistamos bastante coisa com o grupo, agora é uma questão de continuar trabalhando e ir ajustando essas coisas. (EGR2)

Embora tivessem sido elaboradas algumas questões de prova comuns, bem como algumas tarefas avaliativas comuns, Nina admite que cada professor tinha liberdade sobre a sua avaliação, de acordo com a sua abordagem em sala de aula. Esta foi uma opção do grupo desde o princípio, tendo em vista o receio de recair no modelo de trabalho conjunto vivenciado por alguns membros do grupo, em que a maior preocupação era as avaliações comuns, sem discussão da abordagem de ensino. Porém, na perspetiva de Nina, para uma avaliação mais efetiva das metodologias desenvolvidas, dever-se-ia repensar a avaliação dos alunos no sentido de coletar dados comuns a todos os professores, para poder tirar conclusões mais concretas. Por outro lado, conclui que o grupo está em processo de amadurecimento, e que com a continuidade do trabalho conjunto é possível ir ajustando os pontos que podem ser melhorados para atingir os objetivos.

Por fim, ao comparar o seu conceito de colaboração em relação à conceção que tinha no início do trabalho no grupo, Nina afirma que se alterou, e indica alguns elementos presentes no grupo que caracterizam para si o que é o trabalho colaborativo:

> Olha, mudou sim. O conceito que eu tinha de trabalho em grupo era aquele que tinha um coordenador, o coordenador fala e o restante executa, que era aquele trabalho em grupo de professores que tínhamos aqui. Aí mudou bastante este conceito, porque o trabalho num grupo colaborativo te deixa mais à vontade. Outra coisa que eu senti, não tinha aquele constrangimento de dizer 'eu não consegui fazer isso aqui, eu não entendi como faz isso'. Não tinha aquela coisa de 'tu dá aula e tu não sabe isso aí?'. (EGR2)

Para Nina, num trabalho colaborativo, não há a figura de um líder, que dá ordens e os demais as executam. Pelo contrário, os participantes sentem-se à vontade para apresentar suas ideias e, na base do diálogo, tomam as decisões sobre estas ideias, para além de se sentirem confiantes em se expor, ao partilhar as suas dúvidas e dificuldades. A professora considera que no trabalho colaborativo as críticas são construtivas, que todos se ajudam e aprendem juntos, implicando no enriquecimento profissional dos participantes. Relativamente aos momentos de observação de suas aulas pela investigadora, que inicialmente lhe causaram algum constrangimento, Nina considera que resultaram numa ação construtiva no grupo, tendo em vista a reflexão gerada a partir do *feedback* destas observações no grupo. Na sua perspetiva, a observação de suas aulas implicou um maior cuidado de si tanto com a planificação, como com a linguagem matemática utilizada nas aulas.

> Com relação a filmar minha aula, no começo eu pensava assim: 'vai que eu fale alguma besteira, que eu explique um conceito errado'. Então no começo, quando era filmada, eu começava a aula meio que me perdendo, fiquei meio constrangida, mas depois não, na segunda vez me senti bem mais à vontade, foi uma coisa espontânea. Por um lado, é bom a filmagem, porque tu ficas mais atenta no que realmente tu vais falar, tu preparas melhor a tua aula. Outra coisa que eu achei bem positivo, foi tu [investigadora] teres trazido ao grupo: 'Ah, eu gostei da forma como tu fizestes tal colocação na aula. Naquele momento tu poderias ter feito tal coisa...'. Tu [investigadora] trouxeste sempre algumas coisas do que tu assististe das nossas aulas, isso foi bom, tanto para ver que poderia melhorar algo, como para ver algo interessante que aconteceu e que poderia servir de exemplo para os demais. Então, grupo colaborativo é para ajudar, para enriquecer e todo mundo aprender junto! Não é para te criticar, não é para falar teus defeitos, é para te enriquecer profissionalmente. (EGR2)

Após a experiência do primeiro ano no grupo, Nina, juntamente com alguns dos demais colegas, manifestou a vontade de dar continuidade ao trabalho conjunto, mantendo como foco o ensino de Álgebra Linear, mantendo-se Nina ativa no grupo.

Ao ser questionada sobre a possibilidade de integrar novos grupos de trabalho conjunto com seus pares, Nina advoga que "Se alguém disser: 'Vamos criar um grupo colaborativo? Vamos, estou dentro!'. Porque você muda muito a sua prática, você muda para melhor. Em nenhum momento eu tive a sensação de estar me prejudicando ou perdendo meu tempo" (EGR2). A docente avalia que "em qualquer disciplina da Matemática" (EGR2) faz sentido dinamizar um trabalho colaborativo entre professores. Porém, alerta que é necessário "ter disponibilidade para se dedicar, porque não é só reunião do grupo, tem que fazer extra, tem que pesquisar e você tem que aplicar em sala de aula" (EGR2). Nina aponta que cada professor na universidade tem uma carga horária pedagógica alocada, mas que é apenas suficiente para realizar as atribuições básicas do professor, como "elaborar uma prova, elaborar um exercício, corrigir provas, atender os alunos [no horário de atendimento extra classe]" (EGR2). Conclui, a partir da experiência vivenciada no grupo, que "a elaboração de novas ideias é trabalhosa" e despende muito tempo do professor. Em contrapartida, avalia que os ganhos para com sua prática de ensino compensam todo o trabalho extra que fora despendido por si.

> Eu achei muito enriquecedor você sair do isolado. Quando você trabalha num grupo, você está discutindo, surgem novas ideias, muda a sua aula, a sua avaliação. Você começa a criar trabalhos [tarefas avaliativas]. Nunca imaginei que dava para criar trabalho em Álgebra Linear. Imagina em disciplinas como Geometria Analítica, como Cálculo, dá para fazer bons trabalhos, mas sozinha você não faz. (EGR2)

Nina entende que o trabalho colaborativo é um meio para o professor sair do individualismo e, junto com seus pares, discutir novas ideias e integrá-las em sua prática, o que sozinha não faria.

8.3. Perspetivas de Nina sobre o ensino de Álgebra Linear

Para dar a conhecer as perspetivas de Nina sobre o ensino de Álgebra Linear, organiza-se a informação recolhida em torno do ensino de Álgebra Linear, das dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina, do papel do aluno nestes processos, das tarefas propostas aos alunos, dos materiais utilizados no ensino da disciplina e no processo de avaliação das aprendizagens dos alunos.

8.3.1. Ensino de Álgebra Linear

Antes de integrar o grupo de trabalho, ao refletir sobre a importância da disciplina de Álgebra Linear na formação dos seus alunos, Nina a destaca como uma ferramenta para resolver problemas em diversas áreas do conhecimento.

> É uma matéria muito importante. Eu sempre tento falar a eles que, por exemplo, na Engenharia Civil, que a sustentação de uma viga depende da parte de vetores; na parte de transporte precisa de indicadores e isso envolve autovalores e autovetores; na parte da Computação eles precisam de transformações lineares para fazer translação, rotação; na Mecânica, para um avião sair do lugar precisa também de direcionamento, essa parte de vetores é muito importante. Sempre falo a eles que dificilmente vão pegar um assunto de Álgebra Linear e sair usando direto, mas vão utilizar dentro de outra disciplina para poder chegar a algum resultado. (EG)

Apesar de indicar aos alunos algumas situações relacionadas com o curso que leciona, onde a Álgebra Linear tem aplicabilidade, Nina não costumava explorar situações-problema concretas com os seus alunos: "Só falo onde é usada, tento relacionar com o curso específico que estou trabalhando, mas nada de um problema concreto que tenha que usar Álgebra Linear. Seria bem interessante, mas nunca levei" (EG). Nina justifica o facto de não trabalhar com situações concretas pela sua dificuldade em visualizar problemas que poderiam ser resolvidos apenas com os conhecimentos teóricos que dispõe um aluno de 2.ª fase de um curso de graduação: "Tem muita aplicação, mas eu desconheço um problema que eu poderia levar para a sala de aula. Por exemplo, a computação gráfica é uma realidade para os alunos, mas que tipo de problema eu poderia propor que eles conseguissem resolver?" (EGC1, 01/07/2016). Ao referir como ensina Álgebra Linear, revela que a sua abordagem tem características do ensino tradicional, com aulas em que o conteúdo é exposto alternadamente à resolução de exemplos/exercícios.

> Primeiro exponho o conteúdo, dependendo do assunto eu faço alguma demonstração para o aluno entender de onde é que está vindo aquele resultado e depois eu costumo fazer um exercício simples, depois um mais complexo. Como em Álgebra Linear um assunto depende do outro, eu costumo fazer uma mistura do conteúdo para ver se o aluno entendeu de forma geral o assunto. Mas eu trabalho bastante com exercícios, não que eu não trabalhe com a parte teórica, não tem como trabalhar exercício sem a parte teórica. (EG)

Como estratégia para esclarecer a teoria aos alunos, Nina procurava propor uma série de exemplos/exercícios com diferentes níveis de dificuldade.

Após um ano de trabalho conjunto, Nina considera algumas alterações na sua conceção sobre o ensino de Álgebra Linear, que antes tinha por referência a apresentação da teoria, seguida da resolução de exemplos, para além da preocupação com o cumprimento do cronograma da disciplina.

> Mudou a maneira de eu ver a Álgebra Linear, antes eu passava o conteúdo sem pensar muito no significado. Eu trabalhava mais com a parte analítica. Com as nossas discussões, procurando sempre colocar o ponto de vista geométrico, eu passei a entender melhor alguns conceitos. Agora eu consigo enxergar o que é geometricamente o núcleo, a imagem de uma transformação linear. Autovalores e autovetores, eu definia e fazia exemplos. Tratava como se fosse algo independente de transformações lineares. Agora eu faço essa conexão, trabalho o significado geométrico, faço o desenho dos autoespaços. Então, eu sinto que estou conseguindo trabalhar muito melhor os conteúdos porque eu entendo melhor. (EGR2)

A docente considera que com a abordagem da visualização geométrica que foi dada à disciplina, alguns conceitos passaram a ter mais significado para si, implicando que se sentisse mais segura em sala de aula para abordar os tópicos de Álgebra Linear sob diferentes perspetivas. Nina destaca que passou a ter uma conceção de ensino mais focada no aluno, permitindo a sua participação na construção dos conceitos, ao invés de os 'receber' de forma passiva.

> Outra coisa que achei interessante da nossa metodologia, foi a construção do conceito ao invés de dar pronto. Isso aconteceu com mudança de base, espaços vetoriais, transformações lineares. Só que é um processo lento, nem todos no grupo entendiam isso no início, quando atrasava o conteúdo. Se a prática fosse a anterior, dava para dar tudo e ainda sobrava uma aula antes da prova para fazer uma revisão do conteúdo. Agora não dá mais tempo. Quando tu trabalhas com o tradicional, tu apertas o acelerador e vai. Quando tu trabalhas com essa parte de construção, até o aluno entender e embalar não tem como tu ir rápido, porque se tu acelerares o aluno não faz. Para a gente [professor] é muito mais fácil o tradicional. Qual era nossa preocupação antes? Eu venci o conteúdo e acho que dei da melhor forma possível. Mas será que eles aproveitavam da melhor forma possível? (EGC28, 02/06/2017)

Entretanto, acredita ser necessário respeitar o tempo dos alunos, o que pode comprometer o cumprimento do cronograma, havendo a necessidade de o professor ter que priorizar o ensino de alguns tópicos mais importantes para a formação dos seus alunos.

8.3.2. Dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear

Antes de integrar o grupo de trabalho, Nina revela que suas dificuldades no ensino de Álgebra Linear incidiam sobre como mostrar a aplicabilidade da disciplina, como motivar os alunos para aprender e sobre como ensinar alguns tópicos específicos. A docente sente uma falta de motivação nos alunos para aprender tópicos de Álgebra Linear, visto que não visualizam a importância da disciplina na sua formação. Tal atitude, segundo Nina, pode ser fruto da forma como ensina, priorizando os procedimentos de resolução, em detrimento de estabelecer conexões com outras disciplinas dos cursos que leciona ou de explorar aplicações contextualizadas:

> Às vezes eu me coloco no lugar dos alunos, porque eu particularmente acho uma disciplina muito abstrata para eles. Por exemplo, quando trabalho com Cálculo I, já sei onde devo focar mais visto que já trabalhei com Cálculo II. Quando trabalho com Geometria Analítica já sei o que é importante para Cálculo II e Álgebra Linear. Quando dou Álgebra Linear, eu sei que vão precisar de alguma coisa em Cálculo Numérico, mas não sei nada de muito específico. Mas tem coisas que vai ser tão específico do curso deles que eu não consigo fazer esse link com outras disciplinas como eu faço com Cálculo I, com Geometria Analítica. Eu, como professora, tenho essa dificuldade de motivar eles para aprender a disciplina porque eu não sei onde vão usar a Álgebra Linear no curso deles e não sei um problema do dia a dia que eu poderia levar para a sala de aula, que use a matéria para resolver. (...). Eu como aluna pensava, mas o que é essa tal de transformação linear? Tinha dificuldade de enxergar aquilo como função. É uma

coisa difícil para o aluno abstrair. É importante, claro que é. Precisa estudar? Sim, precisa. Eles estudam porque precisam passar na disciplina, mas não conseguem enxergar lá na frente a importância do que estão aprendendo. (EGC1, 01/07/2016)

Relativamente ao ensino do conteúdo de Álgebra Linear, Nina considera a disciplina, de forma geral, difícil de ser ensinada, por causa da sua natureza abstrata. Em particular, revela ter dificuldade de ensinar os operadores lineares especiais, tais como os operadores rotação, reflexão, cisalhamento e dilatação/contração, pela sua falta de uma compreensão mais ampla deste tópico.

Tenho bastante dificuldade. De forma geral a Álgebra Linear é difícil. A parte de 'operadores lineares' não acho palpável. Aí os alunos acham meio maçante, 'ah faz só assim ...'. Eu acho que faltaria uma metodologia diferenciada para ensinar esta parte. É que 'transformações lineares' é difícil porque eles não sabem identificar uma transformação como uma função, mas a parte de operadores é mais difícil ainda. Acho que é porque eu tenho um pouco de dificuldade. Porque acho que é só uma transferência de conteúdo. Vai lá passa a matriz, 'essa é a matriz rotação, essa é a matriz reflexão.'. Não consigo fazer relação com outras coisas. Até na hora da prova, 'determine a matriz de uma rotação seguida de uma reflexão...'. Não tem muita aplicação e eu acho que este assunto é bem aplicado, mas eu não levo [a aplicação]. (EG)

A sua prática, no ensino dos operadores lineares, se resumia a uma transferência de conteúdo, ficando limitada aos procedimentos algébricos envolvidos nessa teoria.

No decorrer do trabalho no grupo, Nina foi-se apercebendo de outras dificuldades relacionadas com o conhecimento do conteúdo que possuía, como, por exemplo, a compreensão dos conceitos de espaço e subespaço vetorial, o significado do que é o núcleo e a imagem de uma transformação linear, a finalidade de se encontrar uma matriz mudança de base, dentre outras. Algumas dessas dificuldades serão evidenciadas na Secção 8.4. A professora indicia que aos poucos foi superando, ao menos parcialmente, as suas dificuldades relacionadas com o conteúdo, o que atribui às discussões no grupo sobre como ensinar os tópicos de Álgebra Linear.

Uma coisa que eu acho que foi bem enriquecedora, foram as nossas discussões sobre como ensinar os conteúdos. Cada um trazia uma contribuição, um falava que ensinava de uma forma, outro de outra, eu acho que isso vai abrindo a visão da gente sobre o conteúdo. Eu aprendi bastante com isso. (...) Sempre surgiam umas perguntas que eu nunca tinha parado para pensar, coisas que eu ensinava meio que mecanicamente. Por exemplo, o que é a matriz mudança de base, para que serve? (...) E também a questão da sequência do conteúdo, 'Ah, como é que tu ensinas essa matéria? Ah, eu dou assim...'. Lembro que a Bruna falou: 'Ah, eu primeiro dou combinação linear, subespaço gerado, conjuntos LI´s e LD´s, e as operações de soma e de intersecção só no final'. Eu dava as operações antes de falar de base. Eu achei bem legal assim. Foi mais enxuto. (...) A mesma coisa aconteceu com os operadores lineares. Antes era tudo muito separado. Primeiro a gente dava transformações para depois falar de operadores, ficava desconectado. Daí passamos a trabalhar tudo junto. (...) Agora tem muito mais sentido para mim, trabalho a teoria e a interpretação geométrica juntos. (...) Saber que alguém fez a mudança ou que está fazendo junto contigo, te dá mais coragem para tu fazeres também. (EGC28, 02/06/2017)

Ao fazer uma retrospetiva sobre tais discussões, Nina destaca as que se relacionam com a finalidade de ensinar determinados tópicos e com as inversões na sequência do conteúdo.

Relativamente à dificuldade identificada pela docente de como evidenciar aos alunos a aplicabilidade da Álgebra Linear, que era partilhada por todo o grupo, procuramos em conjunto superá-la. Para tal, procuramos construir uma estratégia de ensino voltada para a interpretação geométrica dos conceitos e para a resolução de alguns problemas contextualizados. Para atingir tal objetivo e desenvolver tal estratégia, foi necessário em alguns momentos o grupo dedicar-se em conjunto ao estudo de alguns problemas aplicados, como aconteceu com matrizes e sistemas lineares, que cada professor trouxe um problema para apresentar e discutir em conjunto, como também aconteceu com o problema da criptografia.

Quanto às dificuldades dos alunos em Álgebra Linear, antes de iniciar o trabalho no grupo, Nina destaca as que incidem sobre o próprio entendimento dos conceitos. Na sua perspetiva, os alunos se limitam ao uso de técnicas e algoritmos de resolução sem entender o seu significado e as suas implicações: “Eu vejo que eles fazem as coisas mais de forma mecânica, não entendem muito o que estão fazendo. (...). Você dá uma coisinha para eles pensar, uma coisinha diferente e eles já se perdem” (EG). Diante das dificuldades dos seus alunos, advoga que procura minimizar os erros dos alunos fazendo avaliações com questões semelhantes às exploradas nos exemplos em sala de aula ou na lista de tarefas extra classe.

Quando faço a avaliação não tento sair muito do que eles têm, porque se saio muito do que eles têm aí [se perdem]. É uma forma que eu acho de minimizar, [porém] acaba ficando meio mecânico. Não tento cobrar muito além do que eles têm como lista de exercícios, como tem de exemplos. Quando os alunos se saem mal não faço prova de recuperação. Não porque não quero, mas acho que é porque é característica da universidade e a questão de tempo. (EG)

Tal postura de Nina valorizava a memorização de técnicas e procedimentos de resolução pelos alunos em detrimento do entendimento mais amplo do conteúdo, de modo a explorar os conceitos em diferentes espaços vetoriais bem como estabelecer conexões entre os diferentes tópicos.

Ao integrar o grupo de trabalho com seus pares e ao desenvolver aos poucos na sua prática a abordagem da visualização geométrica dos conceitos, no final do 1.º semestre de trabalho, Nina dá indícios de que os alunos obtiveram um melhor aproveitamento na disciplina do que em outras vezes que a ministrou.

> Eu fiquei bem surpresa com os nossos índices de aprovação. Eu vi as provas de todo mundo no dropbox, ninguém baixou o nível de cobrança em relação ao que era cobrado antigamente, apenas focamos mais na parte da visualização geométrica que não fazíamos antes. (EGC15, 16/12/2016)

Para Nina, a abordagem geométrica, aliada à exploração das aplicações contextualizadas "ajuda eles [alunos] a ter uma melhor compreensão do conteúdo" (EGR2). Particularmente, avalia que a abordagem da visualização geométrica mediada pelo GeoGebra permitiu aos alunos "uma visualização que apenas com o quadro é difícil de mostrar" (EGR2). Entretanto, pondera que o uso do software pode ter contribuído mais para a aprendizagem dos alunos quando os alunos o manusearam do que quando o uso ficou restrito a si.

> Quando a gente deu os trabalhos para eles mexerem no GeoGebra, eu acho que refletiu mais na aprendizagem. Quando era apenas a gente mexendo lá na frente, eu acho que facilita a vida do professor, porque tu consegues, por exemplo, mostrar um cisalhamento de forma dinâmica, ficar alterando os parâmetros, mas tu conseguirias fazer isso no quadro, só que demora mais. Claro que é estático, então no software tu consegues girar, melhorar a visualização, principalmente porque nossos alunos têm muito problema com o 3D. Mas é diferente quando o aluno utiliza, do que ele ver a gente utilizando (EGR2).

A professora também refere que o facto de ter diversificado a avaliação, para além das provas, e ter proposto tarefas em sala de aula para introduzir alguns dos conceitos, pode ter contribuído para minimizar algumas dificuldades, uma vez que "fazer os trabalhos era uma maneira de já ir estudando [ao longo do processo], não apenas na véspera da prova". (EGR2). Nina complementa que "nas tarefas em sala de aula a gente [professores] conseguiu acompanhar, conseguiu esclarecer as dúvidas que surgiam. E no decorrer do conteúdo fomos trabalhando em cima das dificuldades que a gente observava quando eles faziam as tarefas" (EGR2). Sendo assim, na sua perspetiva "todo esse conjunto [de ações] contribuiu" (EGR2) para o processo de aprendizagem dos alunos. Isso não quer dizer que algumas dificuldades ainda não persistam, como por exemplo:

> Eles têm esse bloqueio com polinômios. (...) Eles fazem tudo certinho com vetores, com matrizes, mas coloca a mesma questão com polinômios, eles já se perdem. (...) Antes

da prova eles sempre perguntam, 'a professora vai cobrar questão com polinómios?'. (EGC22, 07/04/2017)

Eles acertaram o vetor nulo algebricamente e na representação geométrica continuaram colocando o vetor nulo na origem. (...) Dos meus 16 acertaram [algebricamente] e apenas quatro fizeram certo o geométrico. (...) Eles estão condicionados que o nulo é o $(0,0)$. (...) Ainda não é claro para eles o que é o elemento neutro. (EGC30, 30/06/2017)

As dificuldades citadas referem-se à abstração de um mesmo conceito para diferentes espaços vetoriais, em particular para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual que n; e à compreensão do que é o elemento neutro para a operação de adição num espaço vetorial real, bem como a transição da representação algébrica para a geométrica desse vetor que exerce o papel de elemento neutro num espaço vetorial com operações de adição e multiplicação por escalar não usuais.

8.3.3. Papel do aluno

Antes de integrar o grupo de trabalho, Nina refere que procura que seus alunos assumam um papel ativo em suas aulas, envolvendo-os por meio de questionamentos e da resolução de tarefas em sala de aula.

Eu fico sempre chamando a atenção deles, sempre tento fazer eles participarem. Quando a turma é muito quieta vou chamando pelo nome. Sempre tento fazer com que eles participem, mas também tento não os constranger, quando não sabem eu mesma respondo. São participativos. (...) Eu dou o conteúdo, resolvo um exemplo e proponho outro, aí passo de carteira em carteira para tirar dúvidas. (...) Nos exercícios normais em sala, deixo livre, podem trabalhar em duplas, desde que não atrapalhe a aula. (...) Por ser uma disciplina mais abstrata, mais difícil, eu faço vários trabalhinhos [exercícios avaliativos] em sala de aula. (...) Os trabalhos são em duplas, mas pode pesquisar no caderno. (EG)

De modo a valorizar o papel dos alunos em classe, procurava atribuir uma nota às atividades que realizavam.

No início do trabalho conjunto com os seus pares, ao discutirmos sobre as estratégias de como envolver mais os alunos no seu processo de aprendizagem, em particular sobre enviar os alunos ao quadro para apresentar/discutir seus desenvolvimentos sobre as questões propostas, Nina considera que "em Álgebra Linear eu nunca pensei, porque é mais resolução" (EGC5, 06/09/2016). A docente oportunizava que os alunos fossem ao quadro apenas noutras disciplinas que lecionava, para a exploração de questões envolvendo gráficos: "Em Geometria Analítica quando o assunto é de superfícies, eu peço para eles irem desenhar um paraboloide, por exemplo. No Cálculo I peço para fazerem algum gráfico" (EGC5, 06/09/2016).

No 1.º semestre de trabalho conjunto, continuou a procurar que os alunos se mantivessem ativos em sala de aula, utilizando estratégias adicionais às que já utilizava para os envolver nas atividades da aula, como a resolução de questões no quadro e a apresentação de trabalhos. Avalia que, sobretudo, é nos momentos que propõe que os alunos resolvam tarefas em sala de aula que consegue verificar "se eles estão entendendo (...), e é uma forma de dar um *feedback* sobre o que eles estão fazendo" (EGC16, 15/02/2017). Entretanto, problematiza a forma como responde aos questionamentos dos alunos, principalmente nos momentos de trabalho em sala de aula. Reconhece que acaba por dar as respostas aos alunos ao invés de devolver as suas perguntas com outras perguntas de forma a organizarem o seu pensamento e encontrem sozinhos a solução, como evidencia: "Quando o aluno me pergunta, não tenho essa forma de trabalhar, de devolver a pergunta dele com outra pergunta. Às vezes vou ao quadro: 'Gente, vocês entenderam errado, essa questão é assim'. Acabo dando a resposta pronta" (EGC16, 15/02/2017). Quanto aos questionamentos que coloca aos alunos para procurar envolvê-los nas atividades das aulas, Nina acredita que passaram a ser mais frequentes, mas problematiza a forma como os faz, visto que muitas vezes ela mesma os responde: "Mas, mesmo que eu acabe perguntando e às vezes respondendo, eu acho que os questionamentos estão mais fortes em sala de aula" (EGC16, 15/02/2017). Podemos aferir, neste caso, que Nina não dá o tempo suficiente para o aluno pensar sobre os questionamentos que formula ou a forma como os faz não permite que reflitam a ponto de conseguir respondê-los.

No início do 2.º semestre, ao revisitarmos os objetivos do trabalho conjunto no grupo, Nina corroborou com a opinião de outros colegas que se deveria focar mais a atividade do aluno. Na sua perspetiva, era preciso oportunizar mais momentos para os alunos trabalharem em sala de aula, pois acredita que é nesta oportunidade que eles refletem sobre os conceitos e fazem perguntas ao professor, como explica:

> Quando é que eles [alunos] vão fazer perguntas? Quando tu propões uma tarefa para eles fazerem em sala de aula. Quando eu estou lá na frente resolvendo o exercício todo mundo entende, é fácil. Eu falo para eles, 'eu estou pensando, estou mostrando a vocês o meu raciocínio, vocês estão entendendo meu raciocínio. Mas agora eu quero ver vocês pegarem e fazer o raciocínio de vocês no papel'. Então por isso que eu digo, quando é que eles vão perguntar para ti? Somente quando eles estão fazendo. Quando é que eles estão fazendo? Na hora da prova. Na hora da prova eu não vou responder. Adianta eu responder com uma pergunta? Eles vão refletir quando? Depois que eles saírem da prova, na prova é muito pouco tempo para eles pensarem. (...). Temos que elaborar atividades que envolvam os alunos. Temos que propor coisas para eles pensarem, para

> eles retornarem alguma coisa para nós. Mas não adianta esperar para responder apenas em prova. O forte da nossa prática ainda são as provas. O aluno só faz alguma coisa em prova, antes disso ele faz pouca coisa. (EGC16, 15/02/2017)

Ao final de um ano, Nina indicia que com a evolução do trabalho conjunto, as suas expectativas quanto a uma abordagem de ensino que torne o aluno mais ativo no seu processo de aprendizagem fora atingida, como evidencia:

> Nossa, neste semestre eles trabalharam bastante. Eu gosto de trabalhar com o aluno em sala de aula e eu acho que nós conseguimos fazer bastante coisa. Já começamos no 1.º dia de aula com o pré-teste de matrizes, depois fiz a criptografia em sala, mudança de base, transformações, espaços vetoriais.... Eles trabalharam muito mais em grupo do que antes também. (...) 'Ah, vamos trabalhar com transformações lineares, sentem em grupo para vocês verem se é transformação linear ou não é. Mudança de base, sentam-se em grupo e façam. O trabalho de transformação linear foi em grupo. Só o da letra que foi individual, mas cada tópico tem ao menos um trabalho [tarefa avaliativa], e ao menos um é em grupo. (EGR2)

Nina exalta que com o aumento do número de atividades propostas aos alunos, possibilitou que eles trabalhassem mais em sala de aula, e destaca o trabalho em equipes pelos alunos como um meio para aprenderem uns com os outros. Durante a realização de tarefas em equipes e na discussão da concretização das mesmas, a professora passou a ter o cuidado de não apresentar as respostas prontas aos questionamentos dos alunos, mas sim orientá-los de forma que conseguissem retirar suas conclusões, como evidencia um extrato da observação que efetuei às aulas dos professores do grupo sobre espaços vetoriais: "tanto nas aulas de Nina, como de Téo e Tito que assisti, quando os alunos perguntavam, eles não davam as respostas prontas, eles respondiam com uma outra pergunta, para fazer os alunos pensarem" (Investigadora, EGC21, 31/03/2017).

De forma geral, Nina sempre procurou valorizar o trabalho dos alunos atribuindo uma nota e procurou incentivar isso no grupo de trabalho. Na sua perspetiva, essa era uma maneira de fazer com que eles realizassem as tarefas, principalmente as propostas extra classe, como destaca:

> Vamos trabalhar com os alunos? Vamos. Eu estou disposta, eu gosto de fazer o aluno fazer. Só que a gente tem que estar bem consciente que ele só faz se tiver nota em troca. Não adianta tu querer pedir para ele fazer e não dar nota. Ele vai fazer a primeira vez, mas depois não vai fazer mais... Mas, eu acho assim, se ele faz e ele aprende, eu não me custo a dar nota. O importante para mim é ele aprender. Semestre passado eu fiz os trabalhos que propusemos, o resultado foi muito bom. Eu tive cinco alunos que reprovaram apenas. (EGC16, 15/02/2017).

> Eu sei o que tu fazes [para eles fazerem as tarefas de casa]. Dá uma nota, qualquer nota, pode ser um 0,5. A partir do momento que disser: 'vale nota', eles entregam tudo. (EGC22, 07/04/2017)

Nina reconhece que é seu papel, como professora, incentivar os alunos a realizarem as tarefas, mesmo que 'a moeda de troca' seja a nota, para em contrapartida se comprometerem com o seu processo de aprendizagem.

8.3.4. Tarefas

Na sua prática anterior ao grupo de trabalho, as tarefas que Nina propunha em sala de aula eram exemplos ou exercícios para a "assimilação do conteúdo" (EG) pelos alunos. Em sua estratégia procurava alternar a resolução, ora os resolvia no quadro, ora solicitava que os alunos os resolvessem e ia circulando entre eles, procurando esclarecer as dúvidas que surgiam.

> Eu dou o conteúdo, resolvo exemplo e proponho outro, aí passo de carteira em carteira para tirar dúvidas, isso em aula normal do dia a dia. Quando é aula de exercícios, para tirar dúvidas para a prova, eu estou mais sozinha mesmo. Eu até pergunto: alguém tem uma ideia, quem fez? Para eu não colocar o meu raciocínio direto, às vezes até uso a ideia do aluno, para tentar fazer com que eles colaborem na disciplina. (EG)

A docente propunha listas de tarefas extra classe como meio de orientar os alunos no seu estudo e prepará-los para as avaliações (provas). Na aula-véspera de cada prova, Nina costumava fazer uma aula para esclarecer dúvidas sobre a lista de tarefas, sendo que tal atividade era centrada em si, porém procurando valorizar as ideias dos alunos. Tais listas de tarefas extra classe integravam uma apostila que utilizava como referência na disciplina. Por vezes, a professora propunha algumas tarefas avaliativas, elaboradas em conjunto com outros professores, que eram compostas por exercícios semelhantes aos da lista de tarefas extra classe, envolvendo alguma demonstração ou a aplicação/verificação dos conceitos.

Ao integrar o grupo de trabalho, Nina passou a integrar em sua prática tarefas de outra natureza, para além dos exercícios de fixação de conteúdo – que envolviam a aplicação imediata de conceitos ou alguma demonstração. Logo no início do trabalho conjunto, a professora propôs uma tarefa avaliativa denominada "Trabalho sobre sistemas lineares", cujo objetivo era apresentar uma situação-problema do cotidiano envolvendo sistemas lineares, bem como a representação matemática do sistema linear que descrevesse o problema e a respetiva solução. A tarefa foi realizada em equipes fora da sala de aula com posterior apresentação e discussão no grupo turma.

> Foram três apresentações numa aula e continuamos na aula seguinte. Nesse meio tempo eu conversei com a investigadora. Ela falou: ‘na minha turma foi assim, questionei eles, os alunos tinham que fazer perguntas aos que apresentavam’. Ela me disse que perguntou: 'e se cair uma questão dessa na prova? Vocês conseguem resolver? Aí todo mundo começou a participar e se interessar pelas apresentações’. Eu fiz a mesma coisa na minha turma, na 2.ª aula de apresentação. Pronto! Como teve questionamentos. Eles se soltaram, queriam entender tudo. Inclusive teve grupos que usaram a mesma temática, mas a abordagem era diferente, então esses grupos discutiam entre si, queriam complementar as ideias uns dos outros. (EGC5, 06/09/2016)

Na apresentação da tarefa pelos alunos, realizada em duas aulas distintas, Nina destaca a sua mudança de estratégia, de uma aula para a outra, para despertar o interesse e o envolvimento dos alunos com as apresentações. Tal estratégia surgiu da partilha da experiência com a tarefa por um de seus pares, destacando que “eu sinto que consegui colocar em prática algo que antes eu nunca tinha pensado em colocar em sala de aula. Nunca tinha imaginado em fazer um trabalho assim com aplicações, muito menos a apresentação de trabalho em Álgebra Linear” (EGC5, 06/09/2016). Nina dá indícios da sua motivação com a integração da tarefa em sua prática. Tal motivação nesse início do trabalho conjunto pode ter sido um elemento favorável para a integração de outras mudanças em sua prática.

Ao longo do trabalho conjunto com seus pares, Nina propôs aos seus alunos outras tarefas avaliativas com o intuito de explorar as aplicações contextualizadas e/ou a interpretação geométrica de alguns conceitos, tais como: (i) a tarefa denominada ‘Interpretação geométrica da multiplicação de matrizes’; (ii) a tarefa ‘Aplicação de matrizes à criptografia’; e (iii) a tarefa sobre transformações lineares. Tais tarefas serão descritas em detalhe na Secção 8.4. Nina integrou também na sua prática algumas tarefas exploratórias com a finalidade de envolver os alunos na construção de alguns conceitos, como foi o caso das tarefas introdutórias aos conceitos de mudança de base, de espaços vetoriais, que serão abordadas na Secção 8.4., e de uma tarefa para introduzir transformações lineares. Esta última tarefa, composta por três questões que exploravam geometricamente no $\mathbb{R}^2$ a linearidade de uma transformação, foi elaborada por Bruna e brevemente discutida com Tito e Téo, sendo partilhada com o grupo. Nina apropriou-se da tarefa, assim como outros integrantes do grupo. Nina propôs que os alunos realizassem em pares a tarefa em sala de aula. Na reflexão sobre a sua ação, a docente problematiza a forma como realizou a discussão/correção com os alunos, tendo em vista a pouca interação entre eles. Afirma ter focado a discussão nas dificuldades que surgiram enquanto resolviam a tarefa.

> Na hora de retomar eu fiz cada uma das figuras no quadro e fui discutindo, eles não interagiram muito. Como vocês fizeram para retomar? (...) Eu achei que ficou meio cansativo. Ficou aquela coisa assim: ‘o que a professora está querendo com isso? (...)

Eu fiquei na dúvida se eles realmente tinham entendido, ou se estava muito fácil, que não deram importância. Quem mais se interessou foi quem tinha errado. (...) Mas eu discuti assim, na 1.ª, quem é o $T(u+v)$? É a imagem do $u+v$. Isso eu percebi que nem todos tinham entendido, quando eu circulava nas mesas. Tentei reforçar que $u+v$ é uma soma no domínio, e $T(u+v)$ é uma soma na imagem. (...) A maior dúvida foi na última. Eles não sabiam o que era $T(v)$, porque lá embaixo pede $2T(v)$. Muitos usaram que $T(2v)=2T(v)$, mas não podia afirmar isso. (EGC25, 12/05/2017)

Tal tarefa foi elaborada e partilhada de uma aula para outra, sendo que no grupo, como um todo, só foi discutida após a concretização. Nessa discussão, Nina interessou-se por ouvir como os colegas realizaram a discussão com os alunos, o que lhe poderia servir de referência para fazer a conexão com a definição de transformação linear, tendo em vista que na aula seguinte iria explorar exemplos a esse respeito. Na reflexão sobre a 3.ª questão da tarefa, observou-se no grupo que o enunciado poderia ter gerado dupla interpretação. A transcrição seguinte ilustra a posição de Nina na discussão, onde percebe a 2.ª interpretação para a questão, e procura auxiliar quem se envolveu na elaboração da questão a visualizá-la:

Vocês [Bruna e Téo] sabiam que não era linear porque vocês tinham pré-definido que não seria. (...) Pode ver, o vetor $2v$ é 4 vezes o vetor v. Se tu ves o $T(2v)$ é 4 vezes o vetor v, então $T(2v)$, é duas vezes o $2v$. (...) Exatamente, está pegando cada vetor e duplicando. (...) E a mesma coisa acontece com o vetor u. (...) Se vocês fizerem a conta vai dar a mesma coisa para $T(u+2v)$, vai dar 2 vezes o $u+2v$. Então para os 3 vetores funciona a mesma regra. (...) É que como conversei com a Bruna antes, eu perguntei sobre essa questão, eu resolvi como ela. (...) Como eu não usei a lei da transformação, para mim não era linear. (...) Mas eles [investigadora e Tito] pensaram como alunos. E realmente, se olhar só para os vetores representados é linear. (...) É que é dado o v, mas não $T(v)$, ele pode estar em qualquer lugar. Mas concordo que vocês foram induzidos a pensar que $T(kv)=kT(v)$. (EGC25, 12/05/2017)

Para além de recorrer a tarefas com a finalidade de introduzir e sistematizar conceitos, Nina propôs uma tarefa com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos prévios dos seus alunos. Tal tarefa, denominada "Pré-teste sobre matrizes", foi partilhada por Tito. Não havendo tempo hábil para discussão em grupo, Nina e os demais colegas se apropriaram da ideia. A docente a propôs no 1.º dia de aula do semestre 2017/01, tal como explica:

Eu fiz assim, apliquei no primeiro dia de aula o pré-teste, aí recolhi. Na quarta-feira conversei com a Bruna e ela me mostrou a resolução no GeoGebra. Discutimos os problemas que dava no GeoGebra com a resolução da questão 10 e do $A \cdot \frac{1}{B}$. Aí eu levei para sala de aula, fiz como tu [Bruna] fizeste, projetei e entreguei a folhinha [com a resolução] para eles, e aí falei: 'Vocês não podem mexer na folhinha, é só para vocês

> verem o resultado de vocês, comparar, ver onde é que está o erro, para a gente discutir'. Então a maioria acertou, pelo que eles me falaram, e pelo que eu tinha visto na resolução. Mas quando chegou na 10 eu mostrei que o GeoGebra apresentava solução. E aí eles: 'Mas professora, a minha não deu solução'. E eles já ficaram todos perturbados. 'Como é que pode, a minha não deu solução?'. É que era $FA + B$, e realmente não tinha solução, porque FA era 3×2 e B era 2×2, então a soma não existia. Só que o GeoGebra faz $A + B$ e depois $F(A + B)$, tendo solução. Então deu para ver que realmente eles tinham feito e aproveitei para falar 'estão vendo, não dá para confiar 100% no software, tem que saber os conceitos para poder confrontar os resultados'. Outra coisa que eu chamei atenção, mas porque tu [Bruna] falaste para mim, foi o $A \cdot \frac{1}{B}$. Teve gente que fez usando a inversa da matriz, outros dividiram um por cada elemento da matriz. Mostrei que também o GeoGebra considera como inversa, mas que na verdade se tem um quociente de matrizes e que isso matematicamente não existe. Essa teve bastante erro, que acho que era esperado, mas de forma geral se saíram bem. (...) Conforme eu ia comentando a correção no GeoGebra, teve alunos que 'ah, não lembro disso', eu ia para o canto do quadro e fazia alguns cálculos. Teve uma aluna que falou 'eu não me lembrava de nada, agora com as questões e com a tua aula eu relembrei'. (EGC17, 24/02/2017)

Após a apresentação da disciplina (cronograma, conteúdo programático, bibliografia, datas de avaliações), no restante da aula Nina propôs a referida tarefa. Para a correção/discussão, que ocorreu na aula seguinte, a professora confronta as respostas dos alunos com a resolução no GeoGebra, que fora partilhada a Nina por Bruna. No confronto das respostas, houve discrepância em duas delas, sendo a resposta equivocada apresentada pelo software. Nina destaca aos alunos a importância do conhecimento teórico para poder avaliar os resultados que o software apresenta. Tal estratégia utilizada no debate com os alunos foi fruto, segundo Nina, da discussão prévia que teve com Bruna sobre como retomar a tarefa com os alunos. A docente destacou ser positiva a estratégia de propor a tarefa aos alunos para trabalharem, ao invés dela mesma retomar as operações matriciais como costumava fazer em outros semestres: "Eu gostei bastante, principalmente por ser o 1.º dia de aula, para não começar direto com teoria. Assim deu para trabalhar o que a gente daria como conteúdo, mas eles trabalhando e não a gente" (EGC17, 24/02/2017). Sua expectativa consistia em "criar um pouco mais essa cultura deles fazerem" (EGC17, 24/02/2017). Foi essa a estratégia que, como grupo, buscamos fazer mais no 2.º semestre de trabalho, centrar mais nas atividades dos alunos.

Na reflexão sobre o que poderia ser melhorado para a evolução da tarefa surgiram algumas ideias no grupo, sendo que Nina sugeriu uma nova apresentação para o enunciado, levando em consideração um erro de interpretação dos alunos que surgiu e uma exploração mais ampla das operações matriciais, por exemplo, a transposta de uma matriz.

> O que eu acho que dá para fazer também, é colocar no cabeçalho, como tu [Bruna] fizeste no GeoGebra, 'sejam A, B, C, D tais matrizes'. E depois pedir as operações. Porque tu [Tito] colocaste a operação e as matrizes correspondentes ao lado. Teve um caso que causou muita confusão, aquela DD^T. O Tito já deu a D e a D^T, então não tinha que fazer a transposta, mas uns fizeram. Então colocando o enunciado e depois as operações, no caso dessa DD^T, já poderemos avaliar se eles sabem fazer a transposta. (EGC17, 24/02/2017)

Todas as sugestões que surgiram foram colocadas em prática na reedição da tarefa no semestre 2017/02, com a continuidade do trabalho em grupo.

8.3.5. Materiais didáticos

Antes de integrar o grupo de trabalho, Nina recorria nas suas aulas de tópicos de Álgebra Linear apenas ao quadro e ao giz. Quando lecionava o conteúdo específico de matrizes, que os alunos já tinham uma noção prévia, para além do quadro e giz, utilizava eventualmente o PowerPoint para fazer a explanação deste conteúdo. Como suporte à planificação de suas aulas e como material de apoio ao estudo dos alunos, utilizava uma apostila de Álgebra Linear que fora desenvolvida no Departamento de Matemática da universidade, tal como explica:

> Só quadro e giz. Na parte de matrizes, às vezes levo um PowerPoint porque é mais uma revisão. Uso a apostila também. Não falo para abrir a apostila na página tal e só explico o que está lá. Não, eu tenho o costume de passar tudo no quadro. Tento dar uma enxugada no que está na apostila e evito usar os exemplos da apostila, pego outros exemplos diferentes para não acharem que é só ler e pronto, [que] não precisa pensar. (EG)

Resultante das atividades realizadas no grupo de trabalho, a docente, para além do PowerPoint, utilizou vídeos e recorreu ao uso do GeoGebra. Os vídeos, relacionados com os conteúdos de matrizes e sistemas lineares, foram usados por Nina em sala de aula para ilustrar algumas aplicações contextualizadas dos referidos tópicos. O GeoGebra foi utilizado tanto por si em sala de aula como pelos alunos na concretização de tarefas mediadas pela tecnologia, realizadas extra classe. Em sala de aula, a professora utilizou o GeoGebra para a exploração do tópico mudança de base e para mostrar aos alunos a interpretação geométrica de forma dinâmica de algumas transformações lineares especiais, como aponta:

> Eu usei [recursos tecnológicos] mais na primeira parte. Em espaços vetoriais e transformações lineares levei, mas foi pouco. Na primeira parte de matrizes, eu levei vídeos, levei um vídeo de RGB [sistema de cores], para eles verem como armazena uma

figura numa matriz, para ver o efeito da multiplicação dessas matrizes, da soma, da transposta. Teve o vídeo sobre o Google. Nos outros conteúdos eu levei, mas não foi com muita frequência, entendeu? Foi mais para introdução dos conteúdos. (...) Em mudança de base eu levei para explorar mesmo a mudança de base. Agora, em transformação linear eu levei mais para mostrar o que era o cisalhamento, a reflexão. (...) O software em si eu também não manipulo, não trabalho com ele, não construo nada nele em sala. Eu tento explorar o que está pronto, mostrando o que é o vetor, o que é transformação do vetor, por exemplo. Altero os parâmetros para ver o que acontece na transformação. (EGC28, 02/06/2017)

Os aplicativos do GeoGebra utilizados por Nina, que refere que já estavam prontos, foram construídos no grupo de trabalho conjunto. Nas atividades realizadas extra classe, a docente procurou envolver os alunos em duas tarefas mediadas pela tecnologia, sendo que uma delas foi replicada nos dois semestres letivos de trabalho conjunto no grupo. Tais tarefas, bem como a forma como Nina dinamizou a sua prática mediada pela tecnologia, serão evidenciadas na Secção 8.4.

8.3.6. Avaliação

Reportando-se à forma como avaliava as aprendizagens dos seus alunos antes de participar no grupo de trabalho, em todas as disciplinas que lecionava, Nina expressa que recorria a provas e, particularmente em Álgebra Linear, propunha algumas tarefas, que chamava de trabalhos, para complementar a nota das provas.

A avaliação de forma geral é por provas. Mas acabo avaliando também através de trabalhos. Uma coisa que acho que deu certo é aquele trabalho, que você já fez também, (...) valendo uma nota proporcional à [nota da] prova, vejo que tem dado bons resultados. (...) Faço o trabalho valendo 2,0 [pontos] mas é proporcional ao quanto o aluno tira na respetiva prova, ou seja, se ele tira 8,0 [pontos] na prova, ganha 80% da nota do trabalho e acrescenta na nota da prova. É uma nota extra, não é obrigatório fazer. Mas todos fazem, e como tem uma recompensa eles acabam estudando para a prova, para que o trabalho possa realmente valer alguma coisa. (...) Os trabalhos são em dupla, mas pode pesquisar no caderno. Tento fazer com que não trabalhem em grupo, só em dupla mesmo. Aí falo: 'façam juntos, não dividam as questões'. Às vezes quando passo na carteira um está fazendo uma questão, outro fazendo outra. Aí falo: 'não é isso que eu quero, os dois fazem a primeira e os dois fazem a segunda, se der tempo, deu, se não der, quero ver o que vocês sabem', para eles aprenderem a trabalhar em grupo, não dividir tarefas. (EG)

Na perspetiva de Nina, tais trabalhos serviam também de incentivo aos alunos para estudarem para a prova, visto que faziam jus da nota do trabalho de forma proporcional à nota da prova. A docente já tinha o hábito de propor aos alunos que trabalhassem em sala de aula, geralmente em pares, como uma estratégia de promover a sua aprendizagem por meio da discussão das questões entre si e com a professora.

No início do trabalho no grupo, ao refletir sobre o número ideal de provas em Álgebra Linear, Nina, com base na sua experiência, considerava que o mais adequado eram quatro provas, no sentido de haver uma distribuição equilibrada dos conteúdos para cada prova. Além disso, acreditava que envolver na primeira prova apenas os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares poderia ser um meio de os preparar para o estudo dos espaços vetoriais.

> Realmente trabalhei com três provas e depois com quatro provas. Três provas eu acho que acaba ficando muito assunto para a primeira prova, porque entra matrizes, sistemas e espaços vetoriais. Tudo bem que eles sabem bastante a parte de matrizes e sistemas, eles dominam bem porque a maioria saiu do Ensino Médio há pouco. Mas às vezes, até por acharem que sabem o conteúdo, acabam não estudando muito essa parte. Eu gostei mais de trabalhar com quatro provas. (...) Na primeira prova coloquei apenas matrizes, determinantes e sistemas. O que eu vejo é que, por mais que seja básico, depois quando entra nos conteúdos de espaço vetorial precisa muito dessa parte de matrizes, de sistemas, daí, como eles já estudaram para a primeira prova, estão com uma base mais sólida para entrar na parte mais abstrata do conteúdo. (EGC1, 01/07/2016)

Ainda no início do trabalho no grupo, Nina manifestou a sua dificuldade na elaboração das provas de Álgebra Linear, no sentido de serem abrangentes, mas com um número adequado de questões, de modo a não prejudicar os alunos com o excesso ou com um número reduzido de questões. A docente também manifestou a dificuldade em definir um parâmetro de correção das questões de modo a valorizar as aprendizagens dos alunos, tal como explica:

> Com relação à correção acho muito difícil corrigir prova de Álgebra Linear porque às vezes eles erram o início da questão, mas o resto desenvolveu tudo certo, então para determinar um parâmetro de correção é difícil. Tem que ficar pensando, o que eu estou cobrando mesmo? O que ele acertou? O que posso considerar ou não posso? Eu gasto muito tempo para corrigir. (...) Eu acho também difícil elaborar as provas de Álgebra Linear, principalmente a última prova, pois tem bastante conteúdo, mas uma questão seria o suficiente para cobrar tudo. (EGC1, 01/07/2016)

No grupo de trabalho, cada professor era livre de elaborar a sua avaliação das aprendizagens dos seus alunos, embora alguns se reunissem para elaborar provas em conjunto, além de terem acesso às provas de todos os colegas, pois era uma prática do grupo partilhá-las numa pasta comum. Nina, por sua vez, ao discutir a elaboração de algumas provas no grupo de trabalho, procurou levar em consideração a forma como abordara o conteúdo, sentindo-se à vontade para alterar aquelas questões que envolvessem algo que não deu a ênfase necessária em sala de aula, como exalta num diálogo do grupo:

Bruna:	Uma coisa que falei para o Tito é que não padronizamos provas, como fazíamos nos projetos de ensino. Cada um continuou fazendo sua avaliação do jeito que queria, fazendo o plano de ensino do jeito que queria.
Investigadora:	Até tivemos algumas questões comuns, mas foram elaboradas em conjunto.
Bruna:	Mas cada um continuou avaliando da sua forma.
Nina:	Por exemplo, eu e a Investigadora fizemos as duas primeiras provas em conjunto, mas o que não me senti à vontade em cobrar eu mudei. Na terceira prova, por exemplo, peguei questão da Bruna, adaptei uma questão do Téo, mas outras eu elaborei de acordo com o que tinha trabalhado.
Bruna:	Sim, eu e a investigadora sentamos para elaborar a última prova juntas, mas ela colocou uma questão de polinômios, que não trabalhei muito, e decidi por colocar outra. (EGC15, 16/12/2016)

Em algumas das provas foram contempladas questões comuns a todos os professores, planificadas no seio do grupo. A elaboração de tais questões foi impulsionada pelo incômodo manifestado por Nina, em meados do 1.º semestre de trabalho no grupo, em relação à avaliação dos alunos.

> Na primeira parte, foi tudo bem diferenciado, levei aquele vídeo de aplicação de matrizes, aquele vídeo do *Google* para introduzir sistemas, [slides com] a interpretação geométrica de sistemas lineares, teve apresentação de trabalho. Mas para mim faltou tempo, eu gostaria de ter explorado mais o conteúdo, e na hora de cobrar foi aquela coisa bem tradicional. Talvez, se eu tivesse dado uma aula tradicional, eles teriam ido melhor do que como eu fiz. Eu gostei mais das aulas como foram, para mim foi muito legal, porque [eles] visualizaram o que são as coisas, mas na hora da prova foram muito mal, porque não cobrei nada daquilo. (...) Na prova foi o tradicional, deu um contraste, minha aula não foi isso e agora eu coloquei isso. (EGC7, 26/09/2016)

Nina sentiu-se incomodada, pois na sua perspetiva, havia alterado a sua forma tradicional de abordar o conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares, valorizando o trabalho dos alunos e a interpretação e aplicação dos conceitos, porém a sua respetiva prova foi tradicional, valorizando o procedimento de resolução e os aspetos teóricos. A preocupação de Nina com a avaliação provocou a reflexão no grupo, que ao discutir a abordagem de ensino para alguns tópicos, passou a se preocupar também com a avaliação de acordo com essa abordagem. Por exemplo, para o tópico de coordenadas e mudança de base, que fora planificado em conjunto, elaborou-se uma questão para a prova que contemplava tal tópico; o mesmo aconteceu para a introdução de espaços vetoriais e definição de transformação linear.

Para além das provas, Nina integrou na componente avaliativa da disciplina algumas tarefas. Antes de participar no grupo, a docente considerava a média aritmética das provas como a média final de cada aluno e quando propunha alguma tarefa avaliativa designava uma pontuação que era acrescida à nota da respetiva prova. Ao integrar o grupo de trabalho, Nina passou a considerar as tarefas como componente obrigatória para o cálculo da média final. Nos dois semestres de trabalho no grupo, Nina considerou a média final igual a $\frac{3 \times MP + MT}{4}$, sendo MP a média das quatro provas e MT a média das tarefas.

No 1.º semestre, Nina propôs duas tarefas avaliativas aos alunos, as quais foram elaboradas no grupo. Na 1.ª tarefa, os alunos deveriam descrever uma situação-problema na qual o conteúdo de sistemas lineares fosse aplicado, apresentar o sistema linear que descrevesse a situação-problema, resolver matematicamente tal sistema e interpretar a solução dentro do contexto do problema e, por fim, apresentar à classe o trabalho realizado. A tarefa teve como ponderação 10 valores e os alunos a executaram em grupos. A 2.ª tarefa, também com a ponderação de 10 valores, realizada aos pares pelos alunos, envolvia o conteúdo de Transformações Lineares e foi proposta em duas etapas, uma com recurso ao papel e lápis e a outra com recurso ao computador. Tal tarefa será apresentada e discutida na Subsecção 8.4.2. Já no 2.º semestre, Nina propôs três tarefas avaliativas. Manteve a mesma tarefa do semestre anterior sobre Transformações Lineares, com algumas alterações nas questões realizadas após reflexão no grupo sobre a concretização no semestre anterior, as quais serão evidenciadas na Subsecção 8.4.2. A docente substituiu a tarefa sobre sistemas lineares do semestre anterior por outras duas tarefas elaboradas no grupo – a tarefa sobre a interpretação geométrica do produto de matrizes e a tarefa sobre criptografia, que serão apresentadas e discutidas na Subsecção 8.4.2. A Figura 19 ilustra um recorte dos diários eletrônicos de Nina onde é possível verificar o número de avaliações em cada semestre.

Figura 19. Atividades de avaliação das aprendizagens dos alunos promovidas por Nina, respetivamente, em 2016/02 e em 2017/01.

AVALIAÇÕES										MS	EX	MF	FAL	Res
P1	P2	P3	P4	T1	T2									
1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %									
0,00	0,00	0,00	0,00	8,00	0,00					1,0		1,0	50	RF
1,50	0,00	0,00	0,00	9,50	0,00					1,5		1,5	24	RF
4,00	6,10	9,00	10,00	8,00	8,90					7,6		7,6	0	APR
5,80	9,00	7,00	10,00	8,00	8,40					8,0		8,0	2	APR
8,00	10,00	5,10	9,80	7,50	8,70					8,2		8,2	8	APR
5,50	9,00	8,70	8,40	8,50	8,70					8,1		8,1	2	APR
1,80	6,00	9,60	8,40	8,00	9,40					7,0		7,0	0	APR
3,00	7,50	6,00	10,00	7,50	8,90					7,0		7,0	2	APR

AVALIAÇÕES										MS	EX	MF	FAL	Res
P1	P2	P3	P4	T1	T2	T3								
1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %								
8,00	7,00	5,50	4,50	7,00	8,50	8,00				6,6	6,8	6,7	6	APR
6,30	7,50	7,00	5,00	7,50	8,50	9,50				7,0		7,0	10	APR
6,50	9,60	6,00	6,00	4,50	7,50	8,50				7,0		7,0	12	APR
8,40	5,00	4,00	6,50	10,00	8,50	6,00				6,5	3,5	5,3	8	APR
9,80	10,00	9,50	10,00	7,00	8,00	9,10				9,4		9,4	6	APR
3,00	0,00	0,00	0,00	4,30	7,50	0,00				1,5		1,5	53	RF
9,00	7,20	6,80	6,50	9,30	8,50	8,00				7,7		7,7	6	APR
7,20	10,00	8,00	5,00	10,00	10,00	10,00				8,2		8,2	0	APR

Relativamente ao *feedback* aos alunos do seu desempenho nas avaliações realizadas, no que concerne às provas, Nina não fazia a correção em sala de aula, mas oportunizava que os alunos a procurassem no atendimento extra classe para analisarem a correção e discutirem os seus erros. A professora procurava publicar as classificações das provas sempre dentro do prazo estipulado pela universidade. Já a mesma preocupação não acontecia com as tarefas avaliativas, como ilustram algumas posições de Nina, que indiciam a sua postura de demora na sua correção:

Bruna:	Eu vejo na questão da correção dos nossos trabalhos, a maioria não corrige no tempo que deveria. Por que isso é importante? Não é a nota, é voltar e discutir em sala de aula. E se a gente tivesse isso para discutir aqui no grupo, seria muito interessante.
Nina:	Eu sinto também que 'ah, eu largo o trabalho para lá'. Eu sei que tenho que dar nota até o fim do semestre, entendeste? Aí fica meio atrasado...
Bruna:	Você deixa até no final do semestre?
Nina:	Não todos, eu já publiquei a nota de dois trabalhos. Mas falta o de transformação linear e aquela questão de mudança de base.
Bruna:	Eu levo o trabalho na mesma regra da prova, 10 dias úteis. Eu corrijo e divulgo dentro desse prazo.
Nina:	Sim. As minhas provas já estão no 10.º dia útil.
Tito:	Eu demoro um pouco para corrigir, não divulguei as notas dos trabalhos ainda.
Investigadora:	Tu não divulgaste para os alunos ainda?
Tito:	Não.
Bruna:	Se todos nós encararmos o trabalho como uma avaliação de 10 dias úteis, nós temos condições de discutir aqui, mas se nós deixarmos livre, a gente nunca vai conseguir analisar com mais rigor o erro do aluno.
Nina:	Mas Bruna, (...) a gente não discute o trabalho, mas também não discute a prova. E a gente poderia discutir, porque todo mundo corrige. É uma avaliação, entendeste?
Investigadora:	Teríamos que fazer um estudo como fizemos naquela questão de mudança de base semestre passado. Nós paramos para olhar todos os alunos e inclusive reformulamos o problema que deu com a base canônica.
Nina:	Exatamente, a gente não criou o hábito de discutir os erros dos alunos, de fazer uma análise minuciosa nas questões. Então essa questão de discutir mais trabalho do que prova.... Prova também é uma avaliação. (EGC28, 02/06/2017)

Essa demora na correção das tarefas avaliativas, que não era uma postura apenas de Nina, foi inclusive debatida num momento de reflexão sobre o modo de trabalhar no grupo. Tal demora por vezes comprometeu tanto o *feedback* de Nina, num tempo adequado, aos alunos como para com o grupo. Para os alunos, era importante para identificarem os seus erros e aprenderem com eles, e para o grupo era importante o feedback de cada professor tanto para realizar uma análise mais efetiva das tarefas propostas bem como para promover ideias de estratégias para com o trabalho sobre os erros dos alunos.

O erro que nos referimos aqui é sobre as tarefas avaliativas e as provas. Isso não quer dizer que Nina nunca trabalhou o erro dos seus alunos. A docente procurou trabalhar nas tarefas que propunha em sala de aula. Após a discussão no grupo, destacada acima, procurou-se analisar em conjunto, para cada aluno, a resolução da tarefa sobre transformações lineares e uma questão da prova de espaços vetoriais, relacionada à estratégia de ensino deste tópico, que fora planificada em conjunto. Entretanto, esta última análise só ocorreu no final do semestre, e as considerações retiradas foram colocadas em prática no semestre 2017/02, com a continuidade do trabalho conjunto.

8.4. A prática de Nina no ensino de Álgebra Linear

De modo a evidenciar momentos da prática letiva de Nina, esta secção incide sobre o ensino de tópicos de Álgebra Linear e sobre tarefas de avaliação das aprendizagens dos alunos.

8.4.1. Ensino de tópicos de Álgebra Linear

Os tópicos de Álgebra Linear que são objeto de análise e de interpretação da prática letiva de Nina são 'Coordenadas e Mudança de Base' e 'Introdução a Espaços Vetoriais', reportando-se a informação recolhida na fase prospetiva (Preparação de aulas), na fase interativa (Prática na sala de aula) e na Fase retrospetiva (Reflexão sobre as aulas).

8.4.1.1. Coordenadas e Mudança de Base

Preparação de aulas

As aulas sobre coordenadas e mudança de base foram delineadas num único encontro presencial do grupo. A redação final do seu respetivo roteiro e a construção de um aplicativo no GeoGebra, usadas nas aulas, foram realizadas fora do encontro presencial, com a colaboração da maioria dos elementos do grupo. Nina apenas pode participar neste encontro informal onde foi realizado o fechamento da versão final do roteiro das aulas.

O conteúdo de coordenadas e mudança de base foi planificado para ser abordado em quatro horas/aula (1 hora/aula = 50 minutos). As duas primeiras aulas foram reservadas ao estudo de coordenadas, sendo assim organizadas: definição de coordenadas; interpretação geométrica; teorema da unicidade das coordenadas de um vetor em relação a uma base; e resolução de um problema contextualizado. Quanto à abordagem, cada professor deveria explorar a parte teórica de forma 'dialogada' com os alunos, reservando alguns exemplos para os alunos resolverem em sala de aula com posterior discussão. Quanto ao problema contextualizado, a exploração seria dialogada com questionamentos aos alunos. As duas aulas seguintes, destinadas ao estudo de mudança de base, foram assim organizadas: resolução de uma tarefa pelos alunos para introduzir no $\mathbb{R}^2$ a matriz mudança de base; utilização pelo professor de um aplicativo do GeoGebra para validar o procedimento para encontrar a matriz mudança de base realizado na tarefa anterior; e generalização do processo de mudança de base.

Nina não tinha experiência com o GeoGebra, sendo o aplicativo construído no grupo, para as referidas aulas, o seu primeiro contacto com o software. No referido encontro informal, conjuntamente com Bruna, auxiliamos a professora a experimentar o aplicativo, para explorar tanto as representações algébrica e geométrica das coordenadas de um vetor do $\mathbb{R}^2$ em diferentes bases, como a conversão entre estas representações.

Prática na sala de aula

Foram observadas 5 horas/aula referentes aos tópicos Coordenadas e Mudança de Base, conforme o Quadro 35. A turma observada era vespertina, com 39 alunos matriculados oriundos de diferentes cursos de Engenharia (Elétrica, Civil, Mecânica e Produção) e de Ciência da Computação, sendo que a maioria já havia cursado a disciplina de Álgebra Linear pelo menos uma vez.

Quadro 35. Síntese do conteúdo trabalhado em cada aula relacionada com os tópicos de Coordenadas e Mudança de Base.

Aulas	Conteúdo
1 hora/aula 50minutos	– Definição de Coordenadas.
2 horas/aula 100 minutos	– Teorema da Unicidade das coordenadas de um vetor v em relação a uma base de um espaço vetorial. – Exploração de uma situação-problema. – Tarefa para introduzir o conceito de Mudança de Base no $\mathbb{R}^2$ resolvida pelos alunos. – Discussão parcial sobre a resolução da tarefa, mediada pelo GeoGebra
2 horas/aula 100 minutos	– Retomada da discussão sobre a resolução da tarefa da aula anterior e retirada de conclusões. – Generalização do conceito de Mudança de Base para espaços vetoriais quaisquer.

Coordenadas

A aula sobre coordenadas ocorreu no dia 22/09/2016, com a duração de 50 minutos (1 hora/aula) e foi assim organizada: (i) Introdução resgatando o conceito de combinação linear e sua interpretação geométrica no $\mathbb{R}^2$; (ii) Definição de coordenadas de um vetor em relação a uma base de um espaço vetorial qualquer; e (iii) Resolução de uma tarefa pelos alunos no $\mathbb{R}^2$, de aplicação imediata da definição de coordenadas.

Para introduzir o tópico de coordenadas, Nina procura resgatar a definição de combinação linear e sua interpretação geométrica no $\mathbb{R}^2$. Para tal, escreve o vetor $v = (6,10)$ como combinação linear dos vetores canônicos v_1 =(1,0) e $v_2 =$ (0,1), o que implica ter $v = 6v_1 + 10v_2$. A docente solicita que algum voluntário vá ao quadro para fazer a representação geométrica da referida combinação linear, convidando alguns alunos, mas como nenhum aceita ela mesma a faz. Na sua exploração, procura destacar que na combinação linear $v = av_1 + bv_2$, os escalares a e b têm o papel de esticar/contrair ou ainda mudar o sentido dos vetores v_1 e v_2, mas que a direção é sempre preservada. De seguida, solicita que os alunos repitam o exercício utilizando o mesmo vetor $v = (6,10)$, alterando a base formada pelos vetores v_1 e v_2. Nina dá algum tempo para os alunos resolverem, solicitando posteriormente que um aluno vá ao quadro registrar a sua resolução. A professora compara geometricamente os dois exemplos destacando a mudança de referencial que há ao escrever um vetor em relação a bases distintas, e introduz o conceito de coordenadas.

> Notem que o vetor v é o mesmo nos dois exemplos, mas a base não é a mesma. Então dependendo da base que eu tenho, eu vou ter coordenadas diferentes. Esses escalares que multiplicam v_1 e v_2 em cada um dos exemplos é o que chamamos de coordenadas do vetor v em relação à base que foi dada em cada caso. Vejam bem, quando estou trabalhando na base canônica, o paralelogramo formado com os vetores foi um retângulo, pois a base estava sobre os eixos. Já no outro exemplo, eu tenho um paralelogramo também, só que esse retângulo ficou deformado, porque a base mudou. (OAN1)

De seguida, define formalmente as coordenadas de um vetor em relação a uma base de um espaço vetorial real qualquer. Na sequência, propõe uma tarefa, prevista no roteiro que recebeu, semelhante ao que utilizara na sua introdução inicial.

Considere o vetor $v = (8,6)$ e as bases $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta = \{(2,0),(1,3)\}$ e $\gamma = \{(1,-3),(2,4)\}$. Encontre as coordenadas de v em relação a cada uma das bases α, β e γ, e represente geometricamente. (OAN1)

Nina dá um tempo aos alunos para resolverem e depois chama nominalmente três alunos para apresentarem a sua resolução no quadro. Reforça à turma cada uma das resoluções dando destaque à representação geométrica e à notação algébrica.

Por fim, com o término do tempo da aula, questiona: "Dúvidas? Entenderam o que são as coordenadas de um vetor em relação a uma base?", e anuncia o tema da aula seguinte: "este assunto de coordenadas é superimportante para entender a nossa próxima aula, nós vamos ver o que é a mudança de base" (OAN1).

Teorema da unicidade das coordenadas de um vetor v em relação a uma base de um espaço vetorial e introdução à mudança de base

Esta aula aconteceu no dia 27/09/2016, no horário das 15h20mim às 17h e foi organizada da seguinte forma: (i) Apresentação do teorema da unicidade das coordenadas de um vetor v em relação a uma base de um espaço vetorial; (ii) Exploração de uma situação-problema envolvendo a equação da de uma elipse e a mudança de referencial; e (iii) Resolução de uma tarefa pelos alunos para introduzir de forma intuitiva o conceito de mudança de base.

Nina inicia a aula propondo o teorema da unicidade no formato de uma tarefa teórica:

Seja $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base para um espaço vetorial V. Então todo vetor $v \in V$ é combinação linear dos $v_i's$, ou seja, $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Mostre que essa representação de v é unica. (OAN2)

A resolução da tarefa consiste, na prática, na demonstração do teorema. A docente faz a resolução de forma expositiva, sem explorar a participação dos alunos que, por sua vez, não lhe colocam qualquer questão. No roteiro preparado no grupo para a aula, constava a proposição de uma tarefa envolvendo o espaço vetorial P_2, com o objetivo da assimilação pelos alunos do teorema, que Nina não concretizou.

Na sequência, a professora propõe a resolução de uma situação-problema com o intuito de evidenciar a importância da conversão entre coordenadas de um vetor em relação a duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial. A ideia era representar geometricamente a elipse de equação $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$. Para tal, era necessário reescrever esta equação na forma padrão $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ em relação a um referencial apoiado nos eixos da elipse. A base para este referencial foi fornecida, a saber $\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$.

Na sua abordagem do problema, Nina não faz uma ligação com o teorema da unicidade, tão-pouco apresenta um enunciado para o problema. Inicia uma discussão, resgatando da Geometria Analítica (GAN) a equação de uma elipse com centro na origem e eixos sobre os eixos cartesianos, e propõe que seja feito o gráfico da elipse com equação $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$, obtida através de uma rotação dos eixos da elipse original:

Nina: Essa equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa o que? (Pergunta apontando para um dos alunos)

Aluno1: Elipse.

Nina: Uma elipse. Como a gente representava? Em que base estamos trabalhando aqui? (Pergunta apontando para outro aluno)

Aluno2: $\mathbb{R}^2$.

Nina: No $\mathbb{R}^2$, mas em que base? Qual base?

Aluno3: Canônica.

Nina: Canônica. Temos uma elipse, vou colocar o eixo maior sobre o x, o eixo menor sobre o y. Os eixos estão seguindo o referencial da base canônica. Trabalhamos em GAN com a elipse transladada. Mas não trabalhamos com ela rotacionada. Vejam bem, vou pegar essa elipse e vou rotacionar um dado ângulo θ. Ao fazer a rotação, os eixos da elipse continuam no referencial da base canônica com os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$? Não. Teremos uma outra base. Veremos que a equação não terá mais esse padrão que vocês aprenderam em GAN. Um exemplo é a equação $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$. Eu gostaria de ver a representação gráfica dessa elipse. Vocês conseguem fazer? (Espera dois minutos para pensarem, mas eles não chegam a nenhuma conclusão). Lembram da equação de uma elipse transladada? Era: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1$. Tinha os termos x^2, y^2, x, y, mas não tinha esse xy. Vocês não vão conseguir representar essa equação na base canônica. Terão que rotacionar esses vetores canônicos, então utilizar uma outra base. Vamos considerar $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(-1,1)\}$. Considerem um ponto $P(x,y)$ sobre a elipse e o vetor $\overrightarrow{OP} = (x,y)$. Em termos da base canônica como podemos escrever?

Aluno4: $(x,y) = a(1,0) + b(0,1)$.

Nina: Quem é a e b? O próprio x e y. Então fica $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$. Agora, como escrevo esse mesmo vetor na base β?

Aluno4: $(x,y) = a(1,1) + b(-1,1)$.

Nina: Cuidado aqui, o vetor $\overrightarrow{OP} = (x,y)$ é o mesmo, mas a base é outra. Então as coordenadas mudam. Lembram do exercício que fizemos escrevendo um vetor em bases distintas na aula passada? As cordenadas não eram as mesmas. Vamos usar $(x,y) = m(1,1) + n(-1,1)$. Então, $x = m - n$ e $y = m + n$. Agora vou substituir na equação $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ para reescrevê-la na base β, no novo referencial. [continua a resolução de forma expositiva] (OAN2)

Na sua explanação, Nina procura direcionar a resolução do problema, fazendo questionamentos aos alunos, sendo que em alguns momentos é ela mesma quem os responde e em outros são os alunos. Ao finalizar os cálculos, surgem algumas dúvidas nos alunos, que se relacionavam com a finalidade da mudança de coordenadas e à compressão da questão de forma geral:

Nina: Então eu tinha o vetor $\overrightarrow{OP}$ na base α [canônica] e escrevi na base β. Depois reescrevi a equação que estava no referencial da base canônica, no referencial da base β, ficando uma equação que vocês conhecem $\left[m^2 + \frac{n^2}{\frac{1}{4}} = 1\right]$. Então eu fiz uma mudança de coordenadas, escrevi as coordenadas x e y, em função das coordenadas m e n.

Aluno4: Mas porque você está fazendo isso?

Nina: Para poder fazer o gráfico da elipse. Olhando para a equação que foi dada eu não conseguia identificar os semieixos a e b, agora eu consigo.

Aluno2: Mas tem que ser dada a base β? Senão, não tem como representar?

Nina: Sim, esta base aqui foi escolhida para que ocorresse uma rotação.

Aluno5: Então a representação da equação obtida tem que ser em relação aos eixos da base β?

Nina: Sim. (OAN2)

Tais dúvidas podem ter sido originadas por não haver um enunciado claro para o problema. De seguida, Nina propõe uma tarefa semelhante e solicita aos alunos para a realizarem em pares e entregarem na aula seguinte. Porém, novamente não escreve um enunciado, apenas coloca no quadro a equação da elipse e a base em relação à qual devem tomar como referencial para sua representação geométrica.

Para dar sequência à aula, solicita que os alunos se juntem em pares ou em trios para resolverem a tarefa (Quadro 36) com a qual pretende introduzir o conceito de mudança de base.

Quadro 36. Questões da tarefa para introdução do tópico Mudança de Base.

Mudança de Base

Vimos no exemplo da elipse que a construção do gráfico da curva se torna muito simples quando utilizamos um outro referencial que não o determinado pelos vetores canônicos i e j. Vamos ver que a mudança de coordenadas de um referencial para outro pode ser feita através de um produto matricial. Para isso, considere o exemplo:

Considere as bases $\alpha = \{u_1, u_2\}$ e $\beta = \{w_1, w_2\}$, onde $u_1 = (1{,}0)$, $u_2 = (1{,}1)$, $w_1 = (-1{,}1)$ e $w_2 = (-1{,}0)$.

a. Determine as coordenadas de $v = (1{,}3)$ em relação à base α e represente geometricamente.
b. Determine as coordenadas de $v = (1{,}3)$ em relação a base β e represente geometricamente.
c. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, determine A$[v]_\alpha$.
d. Compare $A\,[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$.
e. Calcule as coordenadas de u_1 em relação a base β e represente graficamente.
f. Calcule as coordenadas de u_2 em relação a base β e represente graficamente.
g. Qual a relação entre os resultados obtidos nos itens e), f) e a matriz A?

Questionamentos:

1. Será que o procedimento do exercício funciona para outros casos? Ou seja, se mudarmos as bases α e/ou β, as coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ vão continuar relacionadas pela equação $A.[v]_\alpha = [v]_\beta$?
2. E se quiséssemos determinar as coordenadas de w_1 e $w_2$em relação à base α? Como isso poderia ser feito?

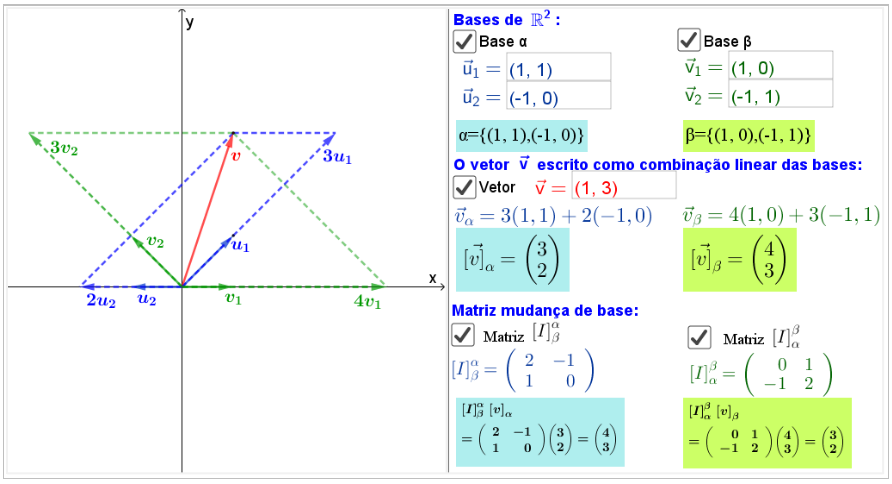
Durante a resolução, os alunos interagiam tanto entre os elementos de um mesmo grupo como entre os grupos vizinhos, para além de solicitarem várias vezes a ajuda de Nina, que circulava pela sala e procurava atender individualmente cada um dos grupos. As dúvidas iniciais que surgiram se relacionavam com a interpretação do enunciado das questões e com a notação algébrica das coordenadas de um vetor em relação a uma base.

Aluno1: Professora, eu não entendi o que é para fazer aqui [Sobre o item c, Quadro 2]?
Nina: Tu tens que multiplicar essa matriz pelas coordenadas do vetor em relação à base α.
Aluno1: É o que eu fiz na primeira?
Nina: Exatamente. Aqui faltou tu escrever na notação de coordenadas.
Aluno1: Como assim?
Nina: Lembra da aula passada? Quando eu pego $v = (1,3)$ e escrevo $(1,3) = a(1,0) + b(1,1)$, as coordenadas são os valores de a e b. Que deu quanto?
Aluno1: -2 e 3.
Nina: Então tu vais denotar $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Agora tu vais pegar a matriz A e vai multiplicar por essa matriz de coordenadas.
(...)
Aluno6: Como assim comparar aqui na letra d?
Nina: Tu calculaste o produto da matriz A pelas coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base α?
Aluno6: Sim.
Nina: Deu quanto? 3 e -4? Existe alguma relação com o resultado obtido das coordenadas de v na base β? Que valores vocês encontraram aí?
Aluno6: É igual.
Nina: Tu encontras os mesmos valores, então quer dizer que o produto $A.[v]_\alpha$ é igual a $[v]_\beta$. É só isso que quero saber. (OAN2)

Alguns alunos também apresentaram dúvidas quanto à transição da representação algébrica para a representação geométrica das coordenadas do vetor v em relação a uma base. Também foi possível perceber que ainda persistiam dúvidas sobre o produto de matrizes, que se evidenciou ao fazerem o produto $A.[v]_\alpha$. Nina procurou atender a todos alunos e orientá-los para que encontrassem a solução.

Para fazer a correção da tarefa, a docente utiliza o aplicativo do GeoGebra desenvolvido pelo grupo, conforme a Figura 20. Nina procura fazer a correção dos itens (a) até (g) na forma de síntese, uma vez que já havia acompanhado a resolução nos grupos. Nessa correção a docente não envolve diretamente os alunos, apenas os questiona para que confirmem se encontraram as respostas, conforme as mostra no aplicativo (que está projetado no quadro).

Figura 20. Aplicativo do GeoGebra utilizado por Nina para explorar a tarefa sobre Mudança de Base.



Diante de um questionamento de um aluno, que não concordou com uma representação geométrica apresentada no aplicativo, Nina percebe que ainda havia dificuldade no reconhecimento de que as entradas da matriz $[v]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ não são as componentes do vetor v, mas sim a solução da equação $v = aw_1 + bw_2$.

Aluno7: Professora, a minha representação ficou diferente, o meu vetor $(3, -4)$ ficou para baixo, no quarto quadrante.

Nina: Deixa-me ver o que tu fizeste. Pessoal, prestem atenção porque mais gente pode estar pensando assim. É que tu pegaste como se fosse um vetor. Mas $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ não é um vetor. Essa é a notação para coordenadas de um vetor na base β. Ou seja, eu tenho o vetor $v = (1,3)$, ao escrever na base β fica $v = (1,3) = 3(1,0) - 4(1,1)$. Dexia eu mudar aqui a base α para a canônica. Se vocês pegassem $v = (1,3)$ e colocassem na base canônica, ficaria $v = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$. Neste caso as coordenadas são 1 e 3, coincide com o vetor $v = (1,3)$, por isso que usamos a notação matricial $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, para não confundir com o vetor. O que a colega fez foi considerar $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ como se fosse um vetor e representou na base canônica, ou seja, pegou $(3, -4) = 3(1,0) - 4(0,1)$. Não é isso.

Aluno7: Eu tinha entendido que a professora falou que tinha que representar na base canônica. Então tenho que usar estes valores para representar v na base β.

Nina: Exatamente. Quero chamar a atenção de vocês do que eu vi passando nas carteiras. Vocês estão encontrando os valores de a e b, escrevam na notação de coordenadas, $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, senão vocês vão se perder. Eu vi que tinha gente que não sabia o que fazer nessa multiplicação $A.[v]_\alpha$. Por que isso aconteceu? Porque vocês não estão usando a notação, daí não sabem o que é para fazer. (OAN2)

Ao reconhecer tal dificuldade nos alunos, a docente procura esclarecer a diferença entre componentes de um vetor e suas coordenadas em relação a uma base, bem como deixar claro a importância da utilização de uma notação adequada. para minimizar os erros de interpretação das questões, como os que os alunos tiveram sobre o significado do produto $A.[v]_\alpha$.

Com o fim do tempo da aula, Nina não conseguiu concluir a discussão sobre a tarefa, deixando os dois questionamentos propostos (Quadro 33) para a aula seguinte. Para esta aula, solicitou que cada grupo tomasse duas bases do $\mathbb{R}^2$ e repetisse a tarefa, para verificar que intuitivamente o procedimento utilizado para encontrar a matriz A é sempre o mesmo.

Generalização da mudança de base

Esta aula decorreu no dia 29/09/2016 no horário das 13h30min às 15h10min e foi assim organizada: (i) (Re)discussão mediada pelo GeoGebra da tarefa introdutória à mudança de base realizada na aula anterior; (ii) Retirar ilações sobre a tarefa; e (iii) Generalização do processo de mudança das coordenadas de um vetor v de um espaço vetorial V em relação a duas bases distintas α e β desse mesmo espaço vetorial.

Nina inicia a aula retomando a tarefa da aula anterior, em particular o 'Questionamento 1', que visava que os alunos concluíssem intuitivamente como a matriz A é construída, independentemente das bases α e β. Para tal, coloca no aplicativo (Figura 20), projetado no quadro, as bases sugeridas por um aluno e discute os itens a) a g). A seguir, convida uma dupla para ir ao seu computador digitar duas novas bases e explicar as conclusões retiradas. Entretanto, os alunos apenas digitam as bases, mas quem faz a explicação é Nina. Por fim, conclui intuitivamente que a relação $A.[v]_\alpha = [v]_\beta$ é válida para quaisquer bases α e β do $\mathbb{R}^2$ e explica como construir a matriz A, que corresponde à matriz de mudança da base α para a base β. Um aluno questiona se o método para encontrar a matriz mudança de base é válido para o $\mathbb{R}^3$, o que leva a professora a simular no quadro um exemplo para explicar que o método se mantém. De seguida complementa: "Eu estou trabalhando com vocês no $\mathbb{R}^2$ porque é mais fácil de fazer as contas, de interpretar geometricamente. Se vocês entenderem o que acontece no $\mathbb{R}^2$, é isso que acontece no $\mathbb{R}^3$, com matrizes, com polinômios" (OAN3).

Entretanto, um outro aluno a solicita para explicar novamente como obter a matriz mudança de base, pois ainda não lhe era claro. Nina então fornece aos alunos duas novas bases, e ao invés dela usar o aplicativo para mostrar os cálculos como antes, deixa que cada um os faça individualmente para poder entender o processo. A docente faz a correção no quadro e concomitantemente confere os resultados no aplicativo.

Para sintetizar a discussão iniciada com a tarefa da aula anterior, que se estendeu grande parte da presente aula, Nina anota no quadro as conclusões retiradas, tais como: a definição das matrizes $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e as relações de transição entre uma base e outra, $[I]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha} = [v]_{\beta}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}[v]_{\beta} = [v]_{\alpha}$. De seguida, deduz de forma genérica para um espaço vetorial bidimensional qualquer a matriz mudança de base, bem como a relação $[I]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha} = [v]_{\beta}$ e propõe, como tarefa extra classe, para os alunos encontrarem a relação $[I]_{\alpha}^{\beta}[v]_{\beta} = [v]_{\alpha}$. A demonstração é feita, sem a participação dos alunos.

Com o intuito de estabelecer a relação entre as matrizes $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$, a docente propõe que os alunos retomem a tarefa da aula anterior (Quadro 36) que usou para introduzir a mudança de base, onde foi dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, que corresponde à matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$, para obterem a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e efetuarem o produto $[I]_{\beta}^{\alpha} \, . \, [I]_{\alpha}^{\beta}$. De seguida, os alunos verificam que $[I]_{\beta}^{\alpha} \, . \, [I]_{\alpha}^{\beta} = I$. Nina então finaliza, concluindo que ambas as matrizes são inversas uma da outra, deixando por conta dos alunos a demonstração de tal propriedade para quaisquer espaços vetoriais e indicando a temática da aula seguinte:

> Se vocês tiverem, por exemplo, a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$, e eu pedir a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$, vocês precisam fazer todo o processo novamente? [Alunos respondem que não] Não, porquê? Porque uma é a inversa da outra. Então se eu conheço uma das matrizes, para obter a outra basta fazer a inversa. Isso funciona sempre ou só neste exemplo? [alunos não respondem] Vocês podem mostrar que sempre funciona. Façam como tarefa para casa, basta substituir a relação $[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha}$ na relação $[I]_{\alpha}^{\beta}[v]_{\beta} = [v]_{\alpha}$. Na próxima aula vamos praticar mais a mudança de base, fazer exercícios em $\mathbb{R}^3$, com matrizes. (OAN3)

Reflexão sobre as aulas

Ao fazer uma retrospetiva a respeito do seu ensino sobre o tópico 'Coordenadas', Nina indicia que, em relação à sua prática anterior à participação no grupo, procurou envolver mais os alunos em sua aula, para além de integrar a exploração de uma situação-problema que envolvia uma mudança de referencial para encontrar a equação padrão de uma elipse rotacionada:

> Na parte de definição de coordenadas não teve um diferencial na nossa planificação, foi como a gente fazia antes. (...). Sim, mudou a forma de envolver os alunos, eles foram ao quadro resolver um exercício de coordenadas, fizeram a interpretação geométrica.

> Isso mudou. Em termos de conteúdo, o que teve de diferente mesmo foi o problema da elipse. (...). Eu não senti que eles ficaram motivados [com o exemplo da elipse]. Eu fui resolvendo, mostrando como que fazia. Mas acho que para eles ficou uma ideia solta, não consegui fazer direito uma ligação com a mudança de base. (EGC7, 23/09/2016)

Entretanto, problematiza a forma como explorou tal problema no contexto da sua aula, tendo a sensação de que com o mesmo não conseguiu atingir seu objetivo, que era despertar nos alunos o interesse para o estudo do tópico 'Mudança de Base'. Neste momento, aproveitei a oportunidade para tecer a minha impressão sobre a sua segunda aula, que ia ao encontro do sentimento de Nina relativamente à situação-problema:

> Eu também tive esta sensação quanto ao teorema da unicidade, você propôs como exercício, conforme nosso roteiro, demonstrou, mas não ficou claro qual era o objetivo. Ficou meio solto, faltou uma ligação. Ficou como se fosse um exercício a mais para eles. Talvez poderia ter dito que era um teorema, que aquele resultado ia ser muito importante para a mudança de base. Acho que faltou fazer um exercício na sequência. A gente tinha no roteiro um exercício com polinômios para fazer. (Investigadora, EGC7, 23/09/2016)

Nina indicia aceitar a 'crítica' e considera que a postura que assumiu em sua aula, deixando de fazer as conexões entre os temas abordados, resulta do desconforto que sentiu com a observação e filmagem da aula.

> Eu também achei que ficou solto. Não fiz o exercício de polinômios porque achei que seria pesado após uma demonstração, mas poderia ter proposto outro com vetores ou com matrizes. Mas sabe o que é, eu senti que o facto de estar sendo filmada me deixou travada. É uma situação que eu não estou acostumada. Eu sinto que o comportamento muda um pouco, porque tu ficas com medo de errar. Há uma certa preocupação do olhar do outro em cima da gente. (EGC7, 23/09/2016)

Tal desconforto também foi partilhado pelos demais professores cuja aula foi filmada, tendo em vista que era a primeira vez que passavam por tal situação.

Relativamente à tarefa introdutória sobre Mudança de Base, realizada na segunda aula, Nina refere que os alunos demoraram mais tempo para realizar a tarefa do que tinha imaginado e que solicitaram bastante a sua ajuda para esclarecer dúvidas. No grupo de trabalho surgiu a ideia de numa próxima vez propor a tarefa extra classe e só fazer a discussão em sala de aula, para otimizar o tempo. Nina defende que a realização em sala de aula encoraja os alunos a apresentarem as suas dúvidas ao professor, e este, por sua vez, tem a oportunidade de reconhecer as suas dificuldades e os seus erros, para além de dar um *feedback* num tempo adequado.

O que eu sinto é que quando é em sala de aula, eles perguntam. E tu consegues ver onde está o problema, onde está a dificuldade. Porque eu achei que aquilo ali não ia gerar tanto 'Professora? Professora? Professora?'. Eu achei que eles iam fazer rapidinho. Tanto é que eu disse: 'vocês vão fazendo aí que eu vou lá buscar o Notebook'. Quando eu cheguei, eu não conseguia nem entrar no GeoGebra, porque era tanto 'Professora? Professora?', entendeste? Eles tomaram muito tempo nisso. Eles estavam com dúvidas. Então eu achei legal trabalhar em sala de aula porque a gente consegue enxergar esse tipo de coisa, daí tu consegues retomar na hora de corrigir, tu sabes onde está o ponto [que deves dar mais atenção]. Eu senti muito isso. (EGC8, 07/10/2016)

Nina refere que os questionamentos que surgiram com a realização da tarefa em classe, a orientaram sobre os pontos que deveria dar mais destaque no momento da correção/discussão.

Entretanto, ao avaliar a forma como decorreu a discussão sobre a tarefa com os alunos, a docente relata dois pontos que lhe causaram dificuldade. O primeiro relaciona-se com o facto de não ter conseguido encerrar a discussão na aula em que os alunos realizaram a tarefa, sendo necessário retomá-la na aula da semana seguinte. Nina sentiu que teve uma quebra na sua linha de raciocínio para a retirada das conclusões que intuitivamente gostaria de obter com os alunos sobre como construir a matriz mudança de base e sobre a finalidade de se fazer essa mudança entre bases. Sentiu, também, que com o intervalo entre as aulas os alunos não se recordavam sobre o que fizeram na tarefa, o que infere que não tinham por hábito revisar o conteúdo de uma aula para outra.

Agora eu gostaria de estar falando o seguinte, eu senti muita dificuldade, não sei se foi o caso de vocês. Mas eu comecei numa aula, explorei um pouco do GeoGebra, mas não concluí a correção, tive que continuar na outra aula. Aí isso para mim ficou difícil. (...). Porque estava tudo tão encaixado, mas parei numa quinta e eu retomei numa terça. Talvez se fosse de terça para uma quinta não teria dado essa quebra. Mas, estava tudo tão encaixado e de repente: 'ai, o que eu tenho que fazer?'. (EGC8, 07/10/2016)

O segundo ponto envolve o uso do GeoGebra para a mediação da discussão da tarefa. A dificuldade não era em relação ao software em si, mas em relação à sua estratégia com o uso do mesmo para explorar a tarefa. Nina refere que a partir do momento que os alunos lhe colocaram algumas questões, conseguiu identificar as suas dúvidas e verificar que eles não estavam conseguindo associar os cálculos que tinham realizado, com o que estava sendo explorado no aplicativo.

Na hora de explorar o GeoGebra com eles, 'me dá uma base, o que acontece quando a gente escreve uma base como combinação linear da outra?'. Então, eu senti dificuldade, eles ficaram 'o que a professora está falando?'. E até eu mesma, fiquei 'até onde eu quero chegar', entendeste? Aí depois teve alunos que começaram: 'Professora? Professora? Professora?'. Então eles começaram a dizer onde estavam as dúvidas deles.

> ‘Professora eu não sei achar uma matriz de mudança de base’. Então, pronto! Aí eu consegui me achar. Mas isso aí demorou uns 20 ou 30 minutos para retomar a aula. Eles trouxeram a base que eu pedi para testar, só que eles não estavam entendendo o que era para ver no GeoGebra. Eu acho que no braço eles iam conseguir enxergar melhor que no GeoGebra. Ou talvez se eles estivessem com o GeoGebra, mexendo ali, era melhor para eles. (EGC8, 07/10/2016)

Nina infere que com o uso do software despendeu um tempo desnecessário, pois acabou confundindo os alunos. Se recordarmos a sua 3.ª aula, foi após os alunos apresentarem dúvidas sobre a construção da matriz mudança de base, quando ela utilizava o software, que solicitou que os alunos realizassem um exercício com papel e lápis, e então eles conseguiram entender o que Nina referia no software. Nina ficou com a sensação de que se tivesse realizado a discussão apenas com recurso ao quadro e giz, seria mais objetiva e minimizaria as dificuldades de entendimento dos alunos. Porém, a docente não descarta o uso do software numa próxima vez que ensinar este tópico. Sugere que a estratégia de ensino envolva a resolução com recurso ao papel e lápis aliada ao uso do computador pelos alunos, ao invés de apenas olharem a professora a utilizá-lo.

> Porque é diferente quando o aluno está mexendo no computador. Eu até pedi para uns alunos irem lá na frente mexer. Eles foram, mas mesmo assim, eles ficaram meio apáticos. Então eu acho que se eles estivessem mexendo, eles perceberiam melhor o que estava acontecendo. (...) Mas eu acho que foi por causa do diferencial que deu. Eu no GeoGebra e eles no lápis e papel. Eles tentando entender o que aconteceu no GeoGebra. Parece que eles largaram o papel e ficaram olhando o GeoGebra como se fossem coisas diferentes, talvez se eles estivessem com o GeoGebra seria diferente. (EGC8, 07/10/2016)
>
> Acho que seria mais interessante eles trabalharem em grupo e eles mesmos entrarem com a base, eles verem o que está acontecendo com a mudança de uma base para outra. Eu acho que ficaria uma tarefa mais interessante. (EGC16, 15/02/2017)

A apresentação das ferramentas dinâmicas no aplicativo não tinha a mesma sequência nas diferentes questões da tarefa, o que, na perspetiva de Nina, fez com que os alunos interpretassem o que ela explorou no aplicativo como se fosse algo independente da tarefa que realizaram. A docente acredita que ao manipularem o aplicativo poderão entender melhor esta relação, para além de tecerem conjeturas sobre a construção da matriz mudança de base e sobre o seu papel na mudança de coordenadas de um referencial para outro.

Ao avaliar a estratégia que utilizou no ensino de ‘Mudança de base’, Nina entende que as dificuldades de entendimento dos alunos que surgiram na discussão da tarefa foram ultrapassadas, e que os alunos conseguiram compreender o conceito de mudança de base. Nina sustenta este entendimento pelo bom aproveitamento dos alunos numa questão avaliativa elaborada em conjunto no grupo.

> Mesmo assim, eu vi que eles aprenderam bastante. Tanto é que saiu o resultado em prova, eles resolveram aquela questão da prova, que era diferente, era geométrica. E a gente focou bastante essa parte geométrica em sala de aula. Foi uma questão diferente do que eles tinham na lista de exercícios, mais focada na interpretação do conceito e eles conseguiram fazer. (EGC16, 15/02/2017)

Tal questão envolvia, no $\mathbb{R}^2$, as transformações entre as diferentes representações, algébrica e geométrica, dos conceitos de coordenadas e mudança de base.

Síntese

As aulas sobre os tópicos 'Coordenadas' e 'Mudança de base' foram planificadas para serem concretizadas em 4 horas/aula. Nina concretizou-as em 5 horas/aula. Na primeira aula sobre Coordenadas, procura resgatar o conceito de combinação linear e sua interpretação geométrica no $\mathbb{R}^2$, para então introduzir o conceito de coordenadas para espaços vetoriais quaisquer. A docente procurou envolver os alunos na resolução de uma tarefa de aplicação imediata do conceito e interpretação geométrica do mesmo em sala de aula, e convidando alguns deles para ir ao quadro registar suas respostas. Nesta aula, Nina não ficou restrita apenas à estratégia definida em conjunto com os seus colegas, principalmente em relação ao envolvimento dos alunos.

Na segunda aula, Nina explora o teorema da unicidade das coordenadas de um vetor em relação a uma base na forma de um exercício, porém fica uma ideia solta em sua aula, pois não faz relações com o conteúdo de coordenadas e/ou explora algum exemplo em que aplique o teorema. A docente não segue o roteiro planificado no grupo em relação à exploração do conceito de coordenadas para outros espaços vetoriais, para além do $\mathbb{R}^2$. Na abordagem do problema contextualizado, Nina procura envolver os alunos por meio de questionamentos tanto sobre o reconhecimento da equação de uma elipse como sobre o conceito de coordenadas, mas estes têm um pouco de dificuldade de entender o propósito do problema. Tal entendimento pode ter sido dificultado porque a professora não lhes apresentou o enunciado do problema, simplesmente foi apresentando as ideias e resolvendo-o. Nesta mesma aula propõe a tarefa introdutória sobre mudança de base. Os alunos trabalham em grupo, e apesar de Nina já ter envolvido os alunos, na primeira aula, na resolução de uma tarefa que explorava o conceito de coordenadas no $\mathbb{R}^2$ com respetiva interpretação geométrica, estes apresentaram uma série de dúvidas. Nina orienta-os individualmente na interpretação das questões e na identificação dos seus erros. A docente faz uma discussão de parte das questões, utilizando o aplicativo do GeoGebra construído pelo grupo. Nesta discussão procura focar as dificuldades dos alunos, principalmente em relação à notação simbólica das coordenadas de um vetor em relação a uma base.

Na terceira aula, a professora procura resgatar a discussão da tarefa iniciada na aula anterior e retirar ilações da mesma, tendo por objetivo generalizar o processo de mudança de base para espaços vetoriais quaisquer. Nina utiliza o GeoGebra e inicialmente os alunos têm dificuldade de relacionar a tarefa realizada com a exploração que a professora realiza. Diante de um questionamento de um aluno, Nina entende a dificuldade e propõe um exercício semelhante ao da tarefa para realizarem com recurso ao papel e lápis, com o intuito de esclarecer o processo de encontrar a matriz mudança de base. Por fim, generaliza este processo para um espaço vetorial qualquer bidimensional. Nesta última etapa da aula, a atividade é centrada em si.

De forma geral, nas aulas observadas, Nina procura envolver os alunos, seja por meio de questionamentos, da resolução de questões no quadro ou do trabalho em grupo. Quanto aos questionamentos, nem sempre a docente dá tempo suficiente para pensarem e ela mesma os responde. Nas três aulas observadas, Nina desenvolveu os conceitos, no que diz respeito à parte prática, somente no $\mathbb{R}^2$. Isso não quer dizer que não tenha explorado em outros espaços vetoriais. É possível que tenha explorado na aula seguinte à terceira aula observada, que seria uma aula mais prática de revisão do capítulo, pois era véspera de prova.

Na reflexão sobre as suas aulas, sente-se motivada com a interação que conseguiu estabelecer com os alunos, seja envolvendo-os no registro de suas resoluções no quadro, seja por meio do trabalho em grupo na resolução da tarefa introdutória à mudança de base. Nina reconhece que foram momentos em que pôde reconhecer as dificuldades dos alunos e trabalhar em cima dos seus erros, para além de ser uma oportunidade para os alunos trabalharem em conjunto com colegas com a orientação e supervisão da professora. Entretanto, problematiza a forma como conduziu as suas aulas em alguns momentos, apresentando algumas ideias soltas, sem fazer a conexão entre os temas envolvidos. Infere que tal postura resulta do desconforto que sentiu no início com a observação e filmagem das aulas. Este desconforto pode ter influenciado inclusive na administração do tempo que destinou para cada atividade. Salienta que o facto de não ter concluído a discussão de uma tarefa e ter que retomá-la de uma semana para outra ocasionou uma 'quebra' tanto na sua linha de raciocínio como na dos alunos. Problematiza a forma como explorou o aplicativo do GeoGebra para retomar esta tarefa, causando a sensação nos alunos de que a tarefa que haviam realizado era independente da discussão que estava a realizar. Nina sugere que para a evolução da estratégia de ensino, na próxima vez que for ensinar os tópicos de coordenadas e mudança de base, sejam os alunos a usar o aplicativo ao invés de apenas olharem a professora a utilizá-lo. Por fim, Nina conclui que, apesar das dificuldades enfrentadas, o objetivo com a estratégia de ensino, focada na exploração geométrica dos conceitos de coordenadas e mudança de base, foi atingido. Tal conclusão é suportada pelo bom aproveitamento dos alunos numa questão avaliativa envolvendo as transformações entre as representações algébrica e geométrica dos conceitos de coordenadas e mudança de base.

8.4.1.2. Introdução a espaços vetoriais

Preparação de aulas

Ao iniciarmos a discussão sobre como introduzir o tópico espaços vetoriais, procuramos identificar a estratégia que cada professor utilizava e as dificuldades sentidas para ensinar esse tópico. Nina pouco explorava a definição de espaço vetorial, dando maior ênfase à definição de subespaço vetorial.

> Eu costumo definir espaço vetorial, não trabalho a interpretação geométrica, só a parte algébrica. Eu dou direto a definição, mostro que o $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com operações usuais, dou um exemplo com o $\mathbb{R}^2$ mudando as operações, que não vai ser espaço vetorial. Em geral é um que falha o axioma $1.u = u$. E já entro em subespaço vetorial. Os exemplos de polinômios e matrizes são explorados em subespaços vetoriais. (...) Na verdade, eu não dou muita importância para espaço vetorial. Vou ser bem sincera, eu dou mais importância para subespaço. (...) É difícil. Esse assunto é muito complicado. (EGC20, 24/03/2017)

Nina apenas explorava a definição de espaço vetorial verificando que o $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição $(+)$ e multiplicação por escalar $(\cdot)$, e que deixa de ser um espaço vetorial quando as operações não são as usuais. Ao explorar a definição de subespaço vetorial procurava envolver também subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ e dos espaços vetoriais mais abstratos como $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, P_n, M_{m\times n}$, mesmo sem os definir previamente. Tal abordagem realizada por Nina indiciava valorizar mais o procedimento de como provar que um determinado subconjunto é um subespaço vetorial do que a teoria e as conexões que existem entre os conceitos de espaço e subespaço vetorial.

Ao refletir sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos relativamente ao tópico de espaços vetoriais, a docente considera que se relacionavam com a demonstração dos axiomas envolvidos na definição de espaço vetorial e com a representação algébrica de forma genérica dos elementos de um conjunto, seja ele ou não um espaço vetorial, tal como explica:

> As dificuldades eram com o formalismo das demonstrações das oito propriedades. E também na representação algébrica de um conjunto. Por exemplo, dou um conjunto e pergunto 'quais são os vetores que pertencem ao conjunto?'. Na maioria das vezes eles não conseguem representar algebricamente os vetores que pertencem aos conjuntos. E isso é importante para mostrar que um conjunto é um subespaço, para encontrar os geradores e base de um subespaço. (EGC20, 24/03/2017)

Após a identificação da forma como cada professor introduzia o tópico de espaços vetoriais, das dificuldades sentidas no seu ensino, da maneira como este tópico é introduzido nos livros didáticos e ouvidas as ideias apresentadas por membros do grupo, decidiu-se por iniciar a planificação abordando o que é o fechamento de um conjunto em relação às operações $(+)$ e $(\cdot)$. Depois da internalização deste conceito, definiríamos espaço vetorial, seguido da resolução de exemplos com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ usuais. Por fim, seriam abordados exemplos envolvendo operações não usuais.

Na definição de uma tarefa para explorar o que é o fechamento de um conjunto para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$, ao ouvir as perpetivas de outros colegas quanto à elaboração de questões que resgatassem conteúdos recém estudados, como matrizes e sistemas lineares, Nina se manisfestou contra. Na sua perspetiva, tais conteúdos são intrínsecos aos conteúdos associados ao tópico de espaços vetoriais, sendo assim resgatados naturalmente. Nina defende que se deveria fazer a conexão com a Geometria Analítica, explorando o fechamento de subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, espaço este onde os alunos têm a possibilidade de visualizar geometricamente o comportamento dos elementos de tais subconjuntos em relação às operações de $(+)$ e $(\cdot)$.

Bruna:	Vamos pensar o seguinte, o que a gente deu para eles? A gente deu matrizes. Então, por exemplo, a gente poderia pegar um conjunto formado por matrizes, pegar as matrizes simétricas, por exemplo.
Tito:	Simétricas, triangular superior...
Investigadora:	Eu acho que devíamos começar com algo mais simples. Primeiro, $\mathbb{R}^2$.
Nina:	Eu também acho.
Bruna:	Daí, vamos colocar vetores. Vamos pegar vetores do $\mathbb{R}^2$. Daí, os sistemas lineares.
Nina:	Eu acho que a gente poderia resgatar essa ideia da Geometria Analítica.
Bruna:	Sistemas lineares. Eu gostaria de trabalhar com esses três pontos: matrizes, sistemas lineares e vetores.
Nina:	Eles viram matrizes, mas a gente vai resgatar isso de qualquer forma. Quando eles vão verificar se um conjunto é LI, eles vão ter que resolver sistema, eles vão ter que fazer escalonamento de matriz, eles vão ver que aquilo que a gente fez com eles até agora não foi besteira. Mas eu acho interessante resgatar a Geometria Analítica, porque eu sempre falo para eles, não sei se vocês falam, isso que vocês estão vendo em Geometria Analítica vai ser importante para Álgebra Linear. Aí, quando chega em Álgebra Linear, a gente esquece de puxar:

> ‘lembra que vocês viram lá, em Geometria Analítica?’. Então, eu acho que seria interessante começar essa exploração do fechamento, que vai envolver operação de vetores, resgatando a Geometria Analítica. Começar com o $\mathbb{R}^2$, para eles visualizarem geometricamente o que está acontecendo. Porque, quando eles conseguem visualizar isso, que a soma é um vetor que pertence a esse conjunto, aí fica mais fácil para irem para qualquer outro espaço vetorial. (EGC20, 24/03/2017)

Após reflexão no grupo, definimos que a 1.ª tarefa deveria envolver inicialmente duas questões que visavam explorar o fechamento de subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, bem como a exploração das representações algébrica e geométrica desses subconjuntos, e a transição entre estas representações. As questões foram planificadas em conjunto com base nas diferentes intervenções dos elementos do grupo. Nina não apresentou ideias para a formulação da tarefa em si, mas procurou refletir e discutir sobre as ideias que surgiam dos colegas. Destaco algumas posições de Nina que auxiliaram na definição da redação do enunciado da 1.ª questão da tarefa:

> Como é que ele vai responder isso? (...) Se eu der um exemplo, vai ficar claro. Agora, se ele ler isso aí, ele não vai saber o que a gente está pedindo... não está claro o que a gente quer. (...) Está claro para a gente, porque a gente já sabe. Agora, é a primeira vez que tu estás lendo isso aí, tu vais saber o que a pessoa está querendo? Não vai. ‘Quais são as características das componentes do vetor? O que é isso’ (...) Mas primeiro, o que ele tem que sentir? Quais são os vetores numéricos, depois ele vai generalizar. Ele tem que sentir isso, se não, ele não consegue fazer isso. (...) Está bem direcionado para o algébrico. Dá impressão que essas figuras aí estão sobrando. (...) Sim, uma opção seria inverter a ordem das questões, primeiro pedir a soma e quem são os múltiplos e depois descrever algebricamente o conjunto. (EGC20, 24/03/2017)

Tais intervenções de Nina ilustram a sua preocupação quanto à objetividade e clareza das questões para o aluno que lê o enunciado pela primeira vez.

Cabe destacar que ainda durante a planificação da 1.ª tarefa, Nina contou com o apoio dos colegas para discutir algumas de suas dificuldades conceituais, que aos poucos foram sendo esclarecidas, no processo como um todo de preparação, concretização e reflexão das aulas. Por exemplo, uma das dificuldades dizia respeito a relação entre um ponto $A(x, y)$ e o vetor posição $v = (x, y)$ associado a este ponto, cuja representação geométrica tem origem em $(0,0)$ e extremidade no ponto A, como ilustra a seguinte discussão no grupo:

> Nina: Mas depois, a gente pede para montar o conjunto... não é isso a gente ia fazer? Para cada conjunto represente algebricamente o conjunto de vetores associado?

Téo: Só que se pôr vetores vai confundir eles, porque vetor é setinha, até o momento, para eles. Não pontinhos. Quando chamava de vetor era porque, geralmente, era seta, e não a extremidade da seta.

Nina: Não entendi, Téo.

Téo: Porque o conjunto é um conjunto de pontos, não um conjunto de setas, esses que estão desenhados. E vetor, na Geometria Analítica, para eles, é uma setinha e não o ponto associado ao vetor.

Nina: Não, mas está se pedindo vetor, aqui dentro, não é? Por que ponto? Não estou enxergando o ponto.

Téo: Porque o conjunto aqui, é conjunto de todos os pontos da reta.

Nina: Mas não quer isso, não é? Quer que represente o conjunto de vetores. Não é isso?

Lisa: Eu entendi o que o Téo quis dizer, Nina. Por exemplo, aqui, o que é esse plano? Ele tem infinitos pontos.

Téo: Cada ponto pode ser visto, tanto como ponto, quanto como vetor.

Nina: Mas a gente quer que ele enxergue como vetor, não como ponto.

Téo: Mas enquanto conjunto, é conjunto de pontos.

Lisa: Mas eu acho que dá para falar, que cada ponto é a extremidade de um vetor. A cada ponto tem um vetor associado com origem na origem. (EGC20, 24/03/2017)

Uma outra dificuldade manifestada por Nina relacionava-se com o entendimento dos conceitos de espaço vetorial e de subespaço vetorial. Para a professora, verificar se um conjunto V é um espaço vetorial consistia simplesmente em analisar a validade dos oito axiomas associados às operações $(+)$ e $(\cdot)$. Nina não tinha claro que uma condição necessária para um conjunto ser um espaço vetorial é ser fechado para tais operações e que, portanto, esta deveria ser a primeira verificação a ser realizada. A análise do fechamento de um conjunto era realizada por si apenas na exploração de subespaços vetoriais.

Nina: A gente não usa fechamento para espaço, usa? Só para subespaço, não é?

Lisa: Para subespaço é o fechamento. Isso só para quando a gente está trabalhando com subconjuntos de conjuntos que a gente já sabe que funcionam [que são espaços vetoriais].

(...)

Nina: Eu acho que a gente está focando no fechamento... a gente está abordando de forma contrária. A gente está focando no fechamento, para voltar para as propriedades. Daqui a um pouquinho a gente está só trabalhando com fechamento.

Investigadora: Primeira coisa, o aluno tem que entender o que é o fechamento de um conjunto para cada uma das operações de $(+)$ e $(\cdot)$. Esse era o objetivo dessa 1.ª tarefa. Feito isso, definiríamos espaço vetorial

(...)

Nina: Não faz sentido isso. Ser válido o fechamento e não funcionar para os axiomas... não faz sentido, não é esse o nosso objetivo. A gente quer mostrar que o fechamento é válido. Não precisa testar as oito, eles têm que ter confiança de que, se a gente está usando o fechamento, é porque serve para os oito, se não, não faz sentido.

Lisa: Tu estás confundindo. Ser válido o fechamento da soma e da multiplicação por escalar é uma condição necessária, não é suficiente para ser espaço vetorial. É suficiente, quando as oito propriedades são satisfeitas. (EGC20, 24/03/2017)

Tal dificuldade de Nina começou a manifestar-se no momento de definirmos como faríamos a conexão entre a 1.ª tarefa e a definição de espaço vetorial. Para Nina não fazia sentido propor a tarefa do fechamento de um conjunto em relação às operações $(+)$ e $(\cdot)$ antes de trabalharmos com a definição de espaço vetorial. Para si, em tal tarefa estávamos analisando se os subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ eram subespaços vetoriais do próprio $\mathbb{R}^2$.

Após a discussão sobre a definição de espaço vetorial, passamos para o delineamento de uma 2.ª etapa da tarefa, a ser trabalhada após explorarmos a definição de espaço vetorial. Tal tarefa foi composta por duas questões, que envolviam a verificação da definição de espaço vetorial em conjuntos em que as operações definidas de $(+)$ e $(\cdot)$ eram não usuais. A 1.ª questão era familiar ao grupo, inclusive era um exemplo que Nina costumava explorar com os alunos, sendo apenas reescrito o seu enunciado. A 2.ª foi construída a partir de uma questão partilhada por Téo. Deseja-se nesta questão verificar se o subconjunto do $\mathbb{R}^2$, $H = \{(x, y): x, y > 0\}$ que não é espaço vetorial com operações usuais, se tornaria um espaço vetorial com outras regras para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$. Inicialmente, Nina problematizou tal questão, pois no seu entendimento não fazia sentido analisar se H é um espaço vetorial, mas sim apenas se é subespaço vetorial, pelo facto de ser um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, que é um espaço vetorial, porém com operações usuais, como ilustra o seguinte diálogo:

Nina: Mas se o fechamento for válido, fecha as oito propriedades automaticamente, não é? Porque senão, não é subespaço.
Téo: Não.
Bruna: Mas não é obrigação serem válidos.
Téo: Só se a operação fosse a mesma.
Nina: Não. Vocês estão me confundindo... mas então porque, quando a gente está trabalhando com subespaço, a gente só prova o fechamento e já conclui que é um subespaço vetorial?
Téo: Por causa da operação. Tu estás restringindo a operação do teu conjunto universo. Para o subconjunto tu estás pegando uma outra operação.
Lisa: Acho que entendi. Quando a gente está trabalhando com subespaço, a gente sempre trabalha com operações usuais. Eu nunca trabalhei com outras operações. Por isso que a gente só prova o fechamento, porque a gente já sabe que, por exemplo, para o $\mathbb{R}^n$ valem as oito propriedades. Agora, se pegar um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ com as operações diferentes, aí tem que verificar as oito. Eu também estava confundindo isso.
Téo: Isso, porque não sabemos se o $\mathbb{R}^n$ herda as propriedades associativa, comutativa e etc.

Nina:	Então, todo subconjunto que não tem operação usual tem que verificar as oito propriedades, não só o fechamento?
Téo:	Exatamente.
Nina:	Entendi. (EGC20, 24/03/2017)

Tal dúvida de Nina também era compartilhada por Lisa, que com o apoio de Téo conseguiram esclarecê-la. Após tal discussão, Nina se mostrou favorável à proposição da referida questão, afirmando:

> Acho interessante dar uma que é espaço vetorial com operações não usuais. Se não, eles ficam com aquela impressão de que só funciona [que é espaço vetorial] com as [operações] usuais. (...) Eles vão perceber que com as usuais [tal conjunto] não é espaço vetorial, mas com as não usuais vai ser válido. (EGC20, 24/03/2017)

Na definição do enunciado, Nina apenas ouvia atentamente as discussões, procurando inclusive entender como obter os vetores que assumem o papel de elemento neutro e elemento oposto para a operação que foi definida em tal questão. Sendo assim, não apresentou sugestões para o enunciado, apenas concordou com o que fora decidido.

Bruna:	Eu acho que deixa essa questão por último. Mas temos que trabalhar este tipo de questão, acho que eles precisam desse amadurecimento, de conseguir responder 'qual é o elemento neutro dessa operação? Qual é o elemento oposto?'.
Nina:	Tem que explorar.
Bruna:	Para eles responderem isso, numa outra aula, deixá-los pensar, depois a gente debater.
Nina:	Eu acho que vou pedir como trabalho. Se der nota eles se esforçam para fazer.
Lisa:	Mas acho importante fazer a discussão
Nina:	Sim, eles entregam e faço a discussão. Mas valendo nota eles fazem. Nem que seja errado, mas fazem. (EGC20, 24/03/2017)

Nina indicou que solicitaria que os alunos fizessem extra classe esta última tarefa, e atribuiria alguma pontuação, como uma maneira de os incentivar a fazerem a resolução. No grupo ficou combinado de que deveria ser feita uma discussão com os alunos sobre a 2.ª questão da tarefa, tendo em vista que os elementos neutros da adição e elemento oposto não seriam triviais.

Prática na sala de aula

A concretização em sala de aula do que fora planificado para a introdução do tópico 'espaços vetoriais' decorreu em 6 horas/aula (1 hora/aula=50 minutos), conforme o Quadro 37. A turma observada continha 22 alunos, oriundos de diferentes cursos de Engenharia e que já haviam cursado a disciplina ao menos uma vez.

Quadro 37. Síntese do conteúdo trabalhado em cada aula relacionada à introdução do conceito de espaço vetorial.

Aulas	Conteúdo
2 horas/aula 100 minutos	– Resolução de uma tarefa pelos alunos para introduzir o conceito de fechamento de um conjunto para as operações $(+)$ e $(\cdot)$.
2 horas/aula 100 minutos	– Correção da tarefa da aula anterior. – Definição das operações usuais $(+)$ e $(\cdot)$ para os conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n, \mathcal{P}_n, M_{m \times n}$. – Definição de espaço vetorial.
2 horas/aula 100 minutos	– Correção de uma das questões de uma tarefa realizada extra classe, com o objetivo de explorar a definição de espaço vetorial para subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, com operações não usuais $(+)$ e $(\cdot)$.

Introdução a espaços vetoriais

A primeira aula observada sobre a introdução a espaços vetoriais ocorreu no dia 28/03/2017, no horário das 15h20min às 17h, sendo que estavam presentes 21 alunos. Nina inicia a aula solicitando que os alunos se reúnam em pares e, em seguida, distribui a tarefa exploratória que envolve o fechamento de conjuntos para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ de vetores no $\mathbb{R}^2$ (Quadro 38).

Quadro 38. Tarefa utilizada para introduzir o tópico de Espaços Vetoriais.

Introdução a Espaços Vetoriais - 1ª Etapa

Nas atividades 1 e 2, considere as operações de adição e multiplicação por escalar de vetores do $\mathbb{R}^2$ definidas por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ e $k \cdot (x, y) = (kx, ky), k \in \mathbb{R}$.

1. Cada uma das figuras apresenta um subconjunto H do $\mathbb{R}^2$.
   a. A soma de quaisquer dois vetores de H está em H? Por quê?
   b. Os múltiplos dos vetores de H estão em H? Por quê?
   c. Represente cada subconjunto H algebricamente.

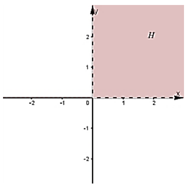


Figura 1: 1.º quadrante

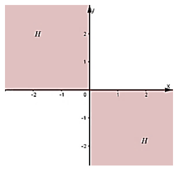


Figura 2: 2.º e 4.º quadrantes

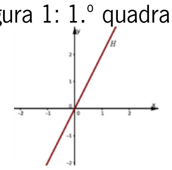


Figura 3: Reta definida por $y = 2x$

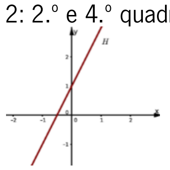


Figura 4: Reta definida por $y = 2x + 1$

2. Seja $H = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   a. Represente geometricamente H.
   b. A soma de quaisquer dois vetores de H está em H? Por quê?
   c. Os múltiplos dos vetores de H estão em H? Por quê?
3. Em qual(is) subconjunto(s), das questões 1 e 2, os vetores resultantes da soma e da multiplicação por escalar estão em H?
4. Pesquise exemplos de outros conjuntos nos quais ao somar os seus elementos ou multiplicá-los por números reais, os resultados ainda pertencem a tais conjuntos, isto é, conjuntos que são *fechados em relação à adição* e a *multiplicação por escalar*.

Nina não indica que o tema da aula é espaços vetoriais, apenas indica que o objetivo é a resolução da tarefa. O contacto com o tema se dá por meio da leitura pelos alunos do enunciado da tarefa. Ao distribuir a tarefa, a docente faz uma leitura da 1.ª questão e explica que para cada figura os alunos têm que responder a três questionamentos, mas deixa que eles os interpretem. Enquanto os alunos discutiam as questões, Nina circulava entre as duplas procurando esclarecer as dúvidas que surgiam.

Inicialmente, a turma teve dificuldade na interpretação da 1.ª questão. Apesar das explicações da professora, nem todos os alunos entenderam que deveriam responder três itens para cada uma das figuras. Para além disso, apresentavam dificuldades de interpretação sobre o que era para fazer em cada um dos itens.

Aluno1:	Está sobrando uma figura, só tem três perguntas.
Nina:	Vocês vão ter que fazer letra (a), letra (b) e letra (c) para esse conjunto, depois a mesma coisa para cada um dos outros três conjuntos.
Aluno1:	Entendi.
	(...)
Nina:	Qual a característica dos vetores que estás tomando?
Aluno2:	Eu sei que sempre que $y > 0$, então $x > 0$.
Nina:	Então tens que escrever isso. Podes escrever com tuas palavras ou usando a notação matemática. E o que acontece quando tu somas vetores com essa característica?
Aluno2:	Vai continuar sendo positivo.
Nina:	Então é isso, pega dois vetores com a característica que identificaste, soma e verifica se o resultante preserva a característica.
Nina:	E os múltiplos de um vetor de H, pertencem a H?
Aluno3:	Para o 1.º caso sim. Não! Depende... se for um múltiplo negativo, já não está mais.
Nina:	Então é isso que vocês têm que fazer. Depois representa este conjunto algebricamente. Como faz isso? Qual a 'cara' desse conjunto?
Aluno3:	Pode ser um vetor qualquer com x e y positivo.
Nina:	Ok, agora tenta escrever isso. (OAN3)

Ao esclarecer as dúvidas que surgiam, Nina procurava não dar respostas prontas, orientando e incentivando os alunos a tirarem as suas próprias conclusões. Uma outra dúvida que surgiu foi sobre como tomar geometricamente vetores pertencentes aos conjuntos. Nina, de forma geral, orienta os alunos para que percebam que devem tomar vetores com origem no ponto $(0,0)$ e com extremidade num ponto pertencente ao respectivo conjunto, como ilustra a seguinte transcrição. Porém, não procura resgatar as noções da Geometria Analítica, que relacionam um ponto (x, y) com o vetor-posição associado a ele.

Aluno4: Posso pegar vetores assim? [vetor definido por dois pontos, diferentes de $(0,0)$]
Nina: Pode. Mas tem que tomar cuidado porque esse vetor é um representante de um vetor com origem no $(0,0)$.
Aluno4: Então posso pegar assim? [o aluno representa um vetor cujo respetivo representante com origem em $(0,0)$ não pertencia a H]
Nina: Desenha um representante desse vetor com origem em $(0,0)$. (...) A extremidade desse vetor é um ponto, certo? Este ponto está no primeiro quadrante?
Aluno4: Não. Ah, então sempre tem que pegar com a origem em $(0,0)$. (OAN3)

Mesmo esclarecendo a dúvida precedente para os dois primeiros conjuntos, ela persistiu, para a maioria dos alunos, nas figuras 3 e 4 da tarefa, que envolviam retas. Na figura 4, os alunos tomavam, geometricamente, os vetores sobre a reta, mesmo que ela não passasse pela origem.

Aluno5: Professora, qual a diferença desses dois?
Nina: Uma reta passa na origem e a outra não.
Aluno5: Mas se tomar dois vetores em qualquer uma das duas e somar sempre vai estar na reta.
Nina: Me tira um vetor de cada reta.
Aluno5: Eu pego um maior e um menor aqui, o resultante vai ser um vetor mais ou menos desse tamanho, mas está na reta.
Nina: Agora pega nessa outra reta.
Aluno6: É que não passa pela origem, não pode pegar o vetor?
Aluno5: Vai dar a mesma coisa.
Aluno6: Não, porque tem que sair aqui da origem, e a reta não passa na origem, então não tem como pegar um vetor, não é?
Nina: Qual é o vetor? Tu tomaste esses vetores sobre a reta, mas quem são os equipolentes a eles partindo da origem? Desenha aí.
Nina: Esse vetor pertence a H? Ele é equipolente ao que tu tomaste na reta. Mas ele pertence?
Aluno5: Não. Mas então nenhum vai pertencer?
Nina: Olha por exemplo esse vetor aqui, $(0,2)$, ele pertence à reta, por quê? Porque satisfaz a equação da reta, quando $x = 0$, $y = 2$. Origem no (0,0) e extremidade num ponto da reta. Olha esse vetor, sai da origem e tem a extremidade na reta, então pertence à reta.
Aluno5: Então, nessa outra vão pertencer todos os que têm a inclinação da reta, mas é porque passa pela origem.
Nina: Sim, senão seria de outro conjunto. (OAN3)

Importa destacar, no diálogo precedente, que mesmo percebendo que um dos alunos da dupla compreendeu a relação entre ponto e o seu respetivo vetor-posição, Nina persiste, incentivando que o outro aluno faça esboços dos vetores, lança-lhe questões, até que esclareça a sua dúvida.

De forma geral, os alunos conseguiam identificar as características de cada um dos conjuntos da 1.ª questão, porém tinham dificuldade em como descrever essas características, seja usando a linguagem natural ou a linguagem algébrica.

Aluno7:	Professora, eu sei que se pegar dois vetores aqui, a soma vai estar em H, mas não sei como escrever isso.
Nina:	Ok. Tu pegaste esses dois vetores. Como tu podes escrever eles? Por exemplo, tu pegaste aqui esse vetor, o $(x,0)$ e este, o $(0,y)$. Tu tens que mostrar para mim que a soma deles é um vetor de H, ou seja, que pertence ainda ao 1.º quadrante. Só tu tens que ver se estes vetores descrevem qualquer vetor do 1.º quadrante.
Aluno7:	Como assim?
Nina:	Dois vetores do 1.º quadrante sempre estão sobre os eixos, como tu escreveste aí?
Aluno8:	Não. Pode estar aqui. Entendi. E eu mostro em forma de esboço ou tenho que escrever os vetores?
Nina:	As duas coisas, geometricamente e algebricamente. (OAN3)

É de notar que ao possibilitar que os alunos usem a linguagem natural para apresentar as justificativas para os questionamentos, Nina procura induzir que ao menos os alunos descrevam algebricamente os vetores envolvidos, com o intuito de introduzir a notação algébrica e facilitar posteriormente a descrição algébrica de cada conjunto. Quando uma dupla de alunos toma vetores apenas sobre os eixos coordenados, Nina não aponta diretamente se está certo ou errado, mas sugere-lhes que investiguem outras possibilidades sobre como tomar vetores do 1.º quadrante, de forma a visualizarem genericamente as características que deve ter qualquer vetor no referido conjunto.

Ao perceber que a dúvida sobre como representar algebricamente cada conjunto era reincidente entre as diferentes duplas de alunos, Nina decide ir ao quadro explicar para a turma como um todo, apresentando exemplos para servir de referência aos alunos.

> Pessoal, estou sentindo que vocês estão com dificuldade com a notação de conjunto. Quando fala que é para descrever algebricamente, significa que é para usar a notação de conjunto e descrever os elementos desse conjunto genericamente. Ali embaixo [Questão 2], vocês até têm um exemplo: $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. É isso que estou querendo na letra (c). Vocês podem dizer $H = \{(x,y) / x \neq 0 \; e \; y \in \mathbb{R}\}$, por exemplo. Vocês coloquem qual é a restrição do x e do y para um vetor qualquer poder pertencer a cada um dos conjuntos apresentados aí. (OAN3)

Importa destacar também que, ao perceber que algumas duplas estavam dividindo a resolução das questões entre si, Nina chama-os a atenção e solicita que não haja divisão de tarefas, exigindo que discutam e retirem conclusões em conjunto para cada item de cada uma das questões.

Eu quero que vocês resolvam juntos, peguem a primeira questão e resolvam juntos, depois a segunda questão. O trabalho é em duplas. Como que trabalha em duplas? Os dois fazem, os dois discutem. Não é divisão de tarefas, um faz uma questão, o outro faz outra. Não é isso. Os dois discutem juntos e anotam as conclusões. (OAN3)

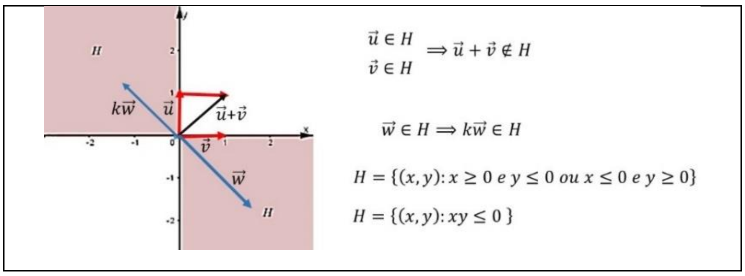
A maioria dos alunos não conseguiu concluir a resolução da 2.ª Questão da tarefa, sugerindo Nina que a resolvessem extra classe. Nina dedicou alguns minutos no final da aula para dar um feedback aos alunos da correção da 1.ª avaliação, que havia ocorrido na aula anterior.

Definição de espaço vetorial

A aula em que Nina apresentou a definição de espaço vetorial aconteceu no dia 30/03/2017, no horário das 15h20min às 17 h, com a presença de 17 alunos. A aula foi assim organizada: (i) Correção da 1.ª questão da tarefa resolvida pelos alunos na aula anterior (Quadro 38); (ii) Discussão sobre o fechamento de outros conjuntos [de diferente natureza] para as operações $(+)$ e $(\cdot)$ usuais; (iii) Definição formal de espaço vetorial; (iv) Distribuição da tarefa para explorar a definição de espaço vetorial para o $\mathbb{R}^2$, com operações não usuais de $(+)$ e $(\cdot)$.

Nina inicia a aula com a correção da 1.ª questão da tarefa da aula anterior, anotando as respostas dos alunos no quadro. A docente procura explorar a representação geométrica e algébrica dos vetores, porém na representação algébrica não explora o formalismo desta notação. Por exemplo, na Figura 1 da tarefa, desenha dois vetores quaisquer, soma-os e verifica que estão no 1.º quadrante. Algebricamente, simplesmente escreve $u = (x_1, y_1) \in H$; $v = (x_2, y_2) \in H$, então $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in H$, mas apenas verbaliza a restrição das componentes dos vetores u, v e $u + v$. Fazia sentido que anotasse as restrições para o aluno perceber que, por exemplo, o vetor $u = (x_1, y_1) \in H$ somente porque $x_1, y_1 > 0$. Já para os conjuntos das figuras da tarefa em análise, Nina não escreve os vetores como pares ordenados, restringindo-se mais à exploração geométrica. Quando se refere ao conjunto H, evidencia o formalismo da notação algébrica, como ilustra o registro que efetuou no quadro:

Figura 21. Registro do quadro de Nina na discussão sobre o conjunto da figura 1 da 1.ª questão da tarefa. (OAN4)

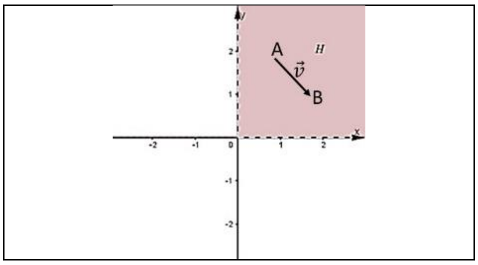


Embora seja Nina quem efetua as resoluções no quadro, procura dialogar com os alunos, os questiona quanto às suas respostas e utiliza as suas contribuições para a construção das soluções.

Nina: Temos agora 2.º e 4.º quadrantes. A soma de quaisquer dois vetores de H está em H?
Aluno1: A soma não.
Nina: Por quê?
Aluno2: Se pegar um do 2.º e outro do 4.º pode dar no 1.º ou no 3.º.
Nina: Quais vetores vocês tomaram?
Aluno2: O $\vec{\imath}$ e o $\vec{\jmath}$.
Nina: Esses vetores pertencem ao conjunto H, estão sobre os eixos e os eixos estão em H, senão teria um pontilhado. Então posso tomar esses vetores. A soma vai dar esse vetor aqui [$u + v = (1,1)$]. Então, u e v pertencem a H, mas $u + v$ não pertence a H. Tem algum momento que pertence?
Aluno1: Se pegar dois no mesmo quadrante.
Nina: São vetores válidos? São. Só que eu posso dizer que existe pelo menos um caso, em que pego um vetor do 2.º e um do 4.º que resulta num vetor fora destes quadrantes. Então basta um que não funcione, um contraexemplo. Dar um contraexemplo, significa encontrar ao menos um caso numérico que não funciona. Não precisa fazer genericamente. (OAN4)

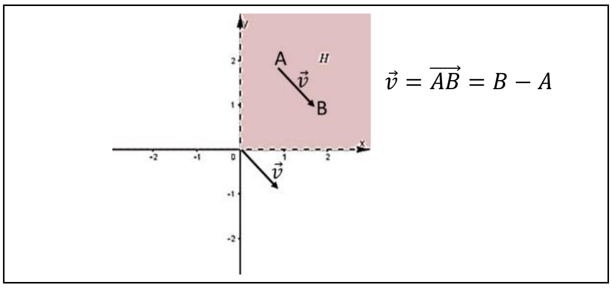
Tomando por referência as respostas que os alunos apresentam, Nina procura explicar-lhes o que são os contraexemplos e quando é possível utilizá-los para justificar afirmativas, no sentido de preparar os alunos para as demonstrações, que se farão mais presentes a partir do capítulo de espaços vetoriais. Nina procura também chamar a atenção dos alunos para algumas dificuldades que enfrentaram na resolução da tarefa, como, por exemplo, a de que H é um conjunto de pontos e a cada ponto existe um vetor associado com origem em $(0,0)$, mas que se tomar o vetor definido por dois destes pontos, ele pode não pertencer a H.

Eu gostaria de chamar a atenção de vocês para o seguinte. [Nina faz o seguinte esboço no quadro:]



Este vetor v pertence ou não ao 1.º quadrante? [Alunos respondem que não]. Porque não pertence? [Alunos não respondem]. Lá na Geometria Analítica, a gente dizia que

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$, então o resultante $B - A$ é equipolente a $\overrightarrow{AB}$. Ele tem origem no (0,0) e extremidade no ponto $B - A$. Então ele é equipolente a $\vec{v}$, mas não pertence ao 1.º quadrante. Então, tem que tomar cuidado, ao fazer $B - A$ a gente está 'transportando' o vetor para a origem. [Nina faz a seguinte abordagem no quadro:]



(OAN4)

Faria sentido Nina resgatar da Geometria Analítica a relação entre a expressão analítica de um vetor como par ordenado e o ponto associado a ele, para realmente ficar claro aos alunos o porquê da origem sempre estar em (0,0).

De seguida à correção da 1.ª Questão (Nina não faz a correção da Questão 2 da tarefa), a docente verifica com os alunos que o conjunto da Figura 3 (reta que passa pela origem) é o único conjunto que satisfaz as operações $(+)$ e $(\cdot)$, simultaneamente. Nina questiona os alunos quanto à existência de outros conjuntos que preservam tais características.

> Eu pergunto a vocês, para quais dos conjuntos, quando eu tomo dois vetores quaisquer o vetor resultante continua em H, quando multiplico por um escalar, o vetor resultante continua em H? [Alunos respondem que é a reta da figura 3 da tarefa]. Vocês conhecem algum outro conjunto que acontece a mesma coisa que aconteceu com a figura 3? Ou seja, para quaisquer dois vetores a soma é definida e se eu pegar os múltiplos de qualquer vetor desse conjunto, continua pertencendo ao conjunto? Conhecem algum além da reta $y = 2x$? (OAN4)

Os alunos mencionam conjuntos, como: a reta $y = x$, o $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^3$, o plano $y + x = 1$, a função $f(x) = sen(x)$. Nina fica em dúvida quanto ao último exemplo, mas o inclui na lista de exemplos. Inclui ainda os conjuntos $\mathbb{R}^n$, P_2, $M_{n\times n}$ e o plano qualquer $ax + by + cz = 0$. A professora procura verificar formalmente o fechamento para as operações $(+)$ e $(\cdot)$ de alguns dos conjuntos citados, mas não se refere ao exemplo da função $f(x) = sen(x)$. Nina procura fazer tal verificação de forma dialogada com os alunos, sempre lançando questões, como: "Quem é um vetor genérico da reta $y = x$?", "Quem é um vetor do $\mathbb{R}^2$?", "Quem seria um vetor do $\mathbb{R}^n$?" (OAN4). Os alunos tiveram dificuldades de citar genericamente vetores do plano $y + x = 1$, então Nina os auxiliou e, de seguida, solicitou que, em pares, fizessem a verificação do fechamento, enquanto circulava na sala para esclarecer as dúvidas que surgiam. Houve uma dupla de alunos que questionou se poderiam utilizar um contraexemplo para mostrar que o conjunto formado pelos vetores do plano $y + x = 1$ não seria fechado para as operações $(+)$ e $(\cdot)$. Nina solicitou que fizessem também de forma genérica. Entretanto, ao fazer a correção no quadro, a docente não valoriza as respostas dos alunos nem os envolve na resolução, fazendo-a totalmente de forma expositiva e centrada em si. De seguida, Nina define as regras usuais para as operações $(+)$ e $(\cdot)$ para o conjunto P_2, mas não chama atenção dos alunos que este conjunto inclui todos os polinômios de grau menor ou igual a 2.

Com o intuito de introduzir a definição de espaço vetorial, Nina questiona os alunos quanto às propriedades estudadas na Geometria Analítica relacionadas com as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ com vetores. Alguns alunos citaram as operações relacionadas à adição e Nina complementou com as da multiplicação por escalar, anotando-as no quadro, identificando-as e explicando-as uma a uma. Relativamente à propriedade do elemento neutro, $u + 0 = u$, Nina referia-se a u como vetor e ao vetor nulo como 'zero'. Aqui seria importante ter enfatizado que dependendo da natureza dos conjuntos com os quais se está trabalhando, o elemento neutro representado por '0' pode ser um número, um vetor, uma matriz, um polinômio ou uma função. Na sequência da aula, Nina entrega aos alunos uma folha com a definição formal de espaço vetorial, e procura explorá-la resgatando a 1.ª questão da tarefa que fora corrigida no início da aula.

> Um espaço vetorial é um conjunto cujos elementos são chamados de vetores. Para esses vetores devem estar definidas as operações $(+)$ e $(\cdot)$, e para essas operações devem estar satisfeitas essas oito propriedades que vimos aí. Daqueles quatro conjuntos que nós estudamos, qual que tem a chance de ser um espaço vetorial? [Um aluno responde a reta $y = 2x$]. A reta $y = 2x$, por quê? Porque vimos que era o único conjunto em que a as operações $(+)$ e $(\cdot)$ eram válidas. Então este conjunto vai ser um espaço vetorial se estas oito propriedades forem satisfeitas. É isso que vamos fazer agora, vamos pegar o conjunto $H = \{(x, y): y = 2x\}$ e verificar as propriedades, porque já vimos que as operações $(+)$ e $(\cdot)$ são válidas para este conjunto. (OAN4)

Centrando a atividade em si, Nina demonstra no quadro alguns dos axiomas da definição de espaço vetorial para o referido conjunto e deixa os demais para os alunos finalizar em casa. De seguida, entrega outra tarefa, com duas questões que exploram a definição de espaço vetorial no $\mathbb{R}^2$, com operações $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais (Quadro 39). A docente esclarece o enunciado das questões e solicita que resolvam extra classe e lhe entreguem na aula seguinte, visto que a aula chegava ao fim.

Quadro 39. Tarefa para explorar a definição de espaço vetorial com operações de soma e multiplicação por escalar não usuais.

Introdução a espaços vetoriais – 2ª Etapa

5. Considere V o conjunto dos pares ordenados de números reais com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas como segue:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$
- $ku = k(x, y) = (kx, 0)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

a. Calcule $u + v$ e ku, com $u = (-1,2), v = (3,4)$ e $k = 3$.

b. Explique porque V é fechado na adição e multiplicação por escalar.

c. Como a adição de V é a adição padrão de $\mathbb{R}^2$, certos axiomas de espaço vetorial valem para V por valerem em $\mathbb{R}^2$. Quais são esses axiomas?

d. Mostre que valem os axiomas 5,6 e 7.

e. Mostre que o axioma 8 falha e que, portanto, V não é um espaço vetorial.

6. Considere o subconjunto H da Figura 1 (Quadro 38), com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas como segue:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (xz, yw)$
- $ku = k(x, y) = (x^k, y^k)$, onde $k \in \mathbb{R}$

a. Calcule $u + v$ e ku, com $u = (1,2), v = (3,4)$ e $k = 3$.

b. Verifique que os axiomas 1 e 2 são satisfeitos.

c. Mostre que o vetor nulo nesse espaço é o vetor $(1,1)$, ou seja, $\vec{0} = (1,1)$. Verifique então o axioma 3.

d. Se $u = (x, y)$, quem é $-u$?

e. Verifique o axioma 4, ou seja, mostre que $-u + u = \vec{0}$. Lembre-se que $\vec{0} = (1,1)$.

f. Verifique que os axiomas 5,6,7 e 8 são válidos e que, portanto, H é um espaço vetorial.

Obs.: Observe que o subconjunto H da Figura 1 (Quadro 38) não é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$
- $ku = k(x, y) = (kx, ky)$, onde $k \in \mathbb{R}$

No entanto, o mesmo conjunto tem a estrutura de um espaço vetorial se forem usadas outras operações de ‘adição’ e ‘multiplicação por escalar’:

- $u + v = (x, y) + (z, w) = (xz, yw)$
- $ku = k(x, y) = (x^k, y^k)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Espaços vetoriais com operações de soma e multiplicação por escalar não usuais

A 3.ª aula observada sobre a introdução de espaços vetoriais aconteceu no dia 04/04/2017, no horário das 15h20min até 17h, com a presença de 18 alunos. A aula foi desenvolvida em três fases: (i) Síntese da aula anterior e discussão sobre um exemplo referido por um aluno que Nina não deu atenção por ter ficado com dúvidas sobre o mesmo; (ii) Discussão/Correção da questão 6 da 2.ª etapa da tarefa de introdução a espaços vetoriais, realizada pelos alunos extra classe; (iii) Interpretação geométrica do espaço vetorial da questão 6.

Nina inicia a aula fazendo uma síntese sobre as conclusões retiradas sobre o fechamento para as operações $(+)$ e $(\cdot)$ para cada um dos subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ representados em cada figura na tarefa que fora discutida na 1.ª etapa da aula anterior. Em particular, relembra que apenas para o conjunto $H = \{(x, y): y = 2x\}$ eram satisfeitas simultaneamente as duas operações, e também os oito axiomas da definição de espaço vetorial, e que, portanto H é um espaço vetorial. Relembrou outros conjuntos que foram mencionados e que são fechados para as duas operações, como polinômios, matrizes, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$. De seguida analisou o fechamento de um conjunto formado pela função seno, que fora sugerido por um aluno na aula anterior, e que não havia discutido com a turma. Ampliou tal discussão verificando, por meio de um contraexemplo, que o conjunto formado por todas as funções trigonométricas não é fechado para a operação de $(+)$. Esta fase inicial da aula foi mais expositiva por parte de Nina.

A fase seguinte da aula destina-se à correção da Questão 6 da tarefa que fora proposta para resolver extra classe (Quadro 39), recorrendo ao data show para projetar o enunciado no quadro. Inicialmente, Nina enfatiza a diferença entre as operações usuais e as não usuais utilizadas nas questões 5 e 6. Para realizar a correção, a docente convida alunos voluntários, de forma a envolver todas as diferentes duplas, para resolver cada um dos seis itens da Questão 6.

Particularmente no 1.º item, que envolvia o cálculo da operação Ku, Nina não se restringiu à exploração apenas para o valor de k envolvido no enunciado. Tendo em vista que na 1.ª etapa da tarefa fora verificado que o conjunto $H = \{(x, y): x, y > 0\}$ não é fechado para a operação de $(\cdot)$, pois tomando $K < 0$ e $u \in H$, tem-se que $ku \notin H$, Nina solicitou que um outro aluno fosse ao quadro para explorar esta situação, com a a operação de $(\cdot)$ não usual. A ideia da professora era que os alunos verificassem que com a mudança da operação, $ku \in H$, para $K < 0$.

Nina:	Vejam que ao fazer ku, com $k = 3$, positivo, manteve no 1.º quadrante, como já acontecia se utilizasse operações usuais. E se fosse $k = -2$?
Aluno1:	Vai continuar.
Nina:	Faça aqui no quadro para nós. [O Aluno A vai ao quadro]
Nina:	E então? Continua no 1.º quadrante?
Aluno1:	Continua. Vai satisfazer para $K > 0$ e para $k < 0$.
Aluno2:	Mas e se fosse $k = -3$? Vai dar 3.º quadrante.
Nina:	Cuidado, qual operação tu usaste? Vem aqui no quadro fazer que te ajudo. [O aluno B vai ao quadro]
Nina:	Vejam então que $-3u = (1^{-3}, 2^{-3})$. O expoente negativo indica uma inversão, então fica $\left(\frac{1}{1^3}, \frac{1}{2^3}\right)$ que é igual a $\left(1, \frac{1}{8}\right)$. Este vetor está em H?
Aluno2:	Sim, fica no 1.º quadrante.
Nina:	Então, dependendo do expoente pode dar um número muito pequeno, mas positivo.

Como se pode observar na transcrição precedente, mesmo após explorar a operação de $(\cdot)$ não usual, para $k < 0$ e $K > 0$, pelo menos um aluno tende em utilizar a operação usual. Ao invés da docente dar a resposta pronta ao aluno, solicita que vá ao quadro e o auxilia a entender a operação e o respetivo resultado.

Ao verificar que para provar as igualdades envolvidas nos axiomas da definição de espaço vetorial, os alunos estavam desenvolvendo os dois lados simultaneamente e chegando a uma afirmação verdadeira, Nina chama-lhes a atenção evidenciando que este não é um caminho totalmente correto para se demonstrar uma igualdade. A docente afirma: “Não está errado, mas não é o procedimento correto. Como a gente faz? A gente sai de um lado e desenvolve até chegar no outro lado da igualdade” (OAN5). Entretanto, não explica porque o caminho tomado pelos alunos que foram ao quadro não era totalmente correto. De seguida, Nina faz no quadro a verificação de um dos axiomas para os alunos terem como referência, pelo procedimento que citou como o mais correto. Ao questionar se alguém havia feito por outro caminho, um aluno se manifestou: “eu desenvolvi os dois lados separadamente e depois comparei os resultados” (OAN5). Nina afirma que esta também é uma forma correta de fazer a verificação de uma igualdade. Faria sentido a professora ter justificado que ao desenvolver simultaneamente os dois lados da igualdade, já se está tomando por hipótese que a igualdade é verdadeira, enquanto que o objetivo é chegar à conclusão sobre a veracidade. Sendo assim, a sugestão do aluno, em desenvolver os dois lados separadamente e comparar os resultados seria mais apropriada.

Quando Nina solicita que um aluno mostre que o elemento neutro da adição é o $(1,1)$, tal aluno faz o seguinte cálculo:

$u = (3,4)$	$u + \vec{0} = u$
$\vec{0} = (1,1)$	$(3,4) + (1,1) = (3.1,4.1) = (3,4)$ (OAN5)

A docente alerta que o que aluno fez foi uma verificação de que o vetor $(1,1)$ faz o papel de elemento neutro para um caso particular: “Aqui tu estás afirmando que $\vec{0} = (1,1)$ e tu estás fazendo uma verificação para um vetor particular. Você pode fazer assim para ver o funcionamento. Mas para provar um axioma, tens que fazer genericamente. Tens que concluir que $\vec{0} = (1,1)$” (OAN5). Nina solicita então que outro aluno apresente a sua resposta no quadro:

$0u = \vec{0}$	$ku = (x^k, y^k) \Rightarrow 0u = 0(x,y) = (x^0, y^0) = (1,1)$	$\Rightarrow \vec{0} = (1,1)$ (OAN5)

A professora pondera que “matematicamente faz sentido essa demonstração, mas o que queremos é o elemento neutro da adição, ou seja, queremos encontrar um vetor m tal que $u + m = u$. E mostrar então que esse $m = (1,1)$. Essa é a definição de elemento neutro da adição” (OAN5). Para o aluno ainda fazia sentido a sua resolução, pois ao refazê-la no quadro assumiu que $\vec{0} = (1,1)$ e mostrou que $u + (1,1) = u$. De seguida, Nina faz a demonstração genericamente no quadro. Faria sentido Nina ter clarificado que a hipótese tomada pelo aluno de que $0u = \vec{0}$, só é válida se H for um espaço vetorial. E no caso ainda está se provando que H é um espaço vetorial com as operações que foram definidas, então em rigor não se poderia fazer tal hipótese. De qualquer forma, ao oportunizar que diferentes alunos apresentem suas diferentes respostas, fomenta a discussão em sala de aula, permite que os alunos se sintam envolvidos e consigam aprender com os seus erros, além da professora conseguir identificar as dificuldades dos seus alunos e trabalhar em cima das mesmas.

Na sequência da correção, o único aspeto problemático que surgiu foi o caso de um aluno que utilizou operações usuais para provar um dos axiomas associado à operação de $(\cdot)$. Nina foi para o quadro e resolveu utilizando as operações definidas no enunciado da questão.

De forma geral, os alunos foram bem participativos, indo voluntariamente ao quadro, alguns mais do que uma vez. Houve inclusive o caso de alunos que não tinham feito a tarefa em casa, ou tinham feito erradamente, e após verem a prova dos primeiros axiomas no quadro pelos colegas, com as devidas intervenções da professora, acabaram entendendo o procedimento e indo ao quadro também para resolver.

De seguida à correção da tarefa, Nina procura fazer um fechamento da tarefa enfatizando que o conjunto $H = \{(x, y): x, y > 0\}$ não é um espaço vetorial utilizando operações usuais, mas pode tornar-se um, caso as operações de (+) e $(\cdot)$ forem redefinidas:

> Vimos então que o 1.º quadrante não é espaço vetorial com as operações usuais porque não é fechado para $(\cdot)$. Mudamos as regras das operações, tanto a (+) como a $(\cdot)$ são satisfeitas. Além disso todos os axiomas são satisfeitos. Então com essas operações este conjunto é um espaço vetorial. Então para ser um espaço vetorial depende da métrica que se está usando. Vocês viram que a origem passou a ser o $(1,1)$ e o inverso de u passou a ser $(1/x, 1/y)$. Então deixamos de trabalhar numa escala linear e passamos a trabalhar numa escala logarítimica. (OAN5)

Por fim, Nina procura dar uma breve noção sobre a interpretação geométrica do espaço vetorial com operações de $(+)$ e $(\cdot)$ não usuais utilizado na questão 6, que acabara de corrigir. Nina menciona alguns problemas que matematicamente podem ser melhor interpretados utilizando uma escala logarítmica, como a intensidade de um terremoto, ondas sonoras. De seguida mostra, utilizando uma construção no GeoGebra realizada por Téo, e compara o comportamento das operações de $(+)$ e $(\cdot)$ para alguns vetores específicos, em relação à escala linear e à escala logarítmica.

Reflexão sobre as aulas

Após a concretização das suas aulas, Nina manifestou a sua curiosidade sobre a minha apreciação em relação à sua ação, o que proporcionou uma primeira análise das atividades realizadas. Dos registos que efetuei destaquei o incentivo que deu aos alunos para trabalharem conjuntamente e buscarem a solução, sem apresentar respostas prontas, a postura questionadora que teve em sala de aula. Particularmente sobre a 2.ª aula, apontei o pouco formalismo que deu à notação algébrica ao explorar o fechamento dos conjuntos em relação às operações de $(+)$ e $(\cdot)$, na correção da 1.ª Questão da Tarefa 1. Nina concordou com a observação realizada, referindo que ficou com dúvida quanto ao exemplo apontado por um aluno de conjunto fechado para a soma envolvendo a função seno. Discutimos que se fosse formado apenas por esta função, seria fechado para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$. Entretanto, se tomasse um conjunto formado por funções trigonométricas, neste caso não seria fechado para a operação de adição e que poderia tomar como contraexemplo as funções $f(x) = cos^2(x)$ e $g(x) = sen^2(x)$, cuja soma não resulta numa função trigonométrica.

Na reflexão no grupo sobre a sua ação na 1.ª aula da introdução a espaços vetoriais, Nina faz uma retrospetiva da forma como procurou envolver os alunos na resolução da tarefa que propôs:

> Eu os coloquei em duplas e eles trabalharam super bem. Era uma barulheira na sala, de tanto que eles discutiam. Eu falei a eles: 'só vão para a Questão 2 depois que vocês fizerem a Questão 1, discutam entre vocês, não dividam tarefa'. Eu falei: 'não precisa ter pressa. É para entregar, mas nosso objetivo é avaliar o que vocês sabem, é identificar as dificuldades de vocês, e é para vocês entenderem melhor este conteúdo. Então, discutam e aprendam, sem pressa para acabar logo'. Deu para ver que eles estavam discutindo bem, eles me chamavam bastante. Deu para ver algumas dificuldades que em aula a gente não percebe, só percebe na prova. (EGC21, 31/03/2017)

Ao orientar que os alunos, em pares, discutissem as questões, estabelecessem conjeturas e retirassem conclusões conjuntamente, evitando a divisão de tarefas, Nina oportuniza que todos os alunos reflitam sobre as questões, aprendam uns com os outros, para além de receberem seu suporte para esclarecer dúvidas. A docente reconhece que a resolução da tarefa em sala de aula lhe oportunizou identificar algumas dificuldades dos alunos, que se ela apenas tivesse exposto o conteúdo envolvido aos alunos, não as teria percebido. Na sua perspetiva, a dificuldade inicial relacionava-se com a interpretação do enunciado da 1.ª questão, mesmo que tenha procurado explicá-lo aos alunos ao distribuir a tarefa.

> Entreguei para eles e falei: "para cada uma dessas figuras, vocês têm que responder os três itens". Enfatizei bastante isso. Entreguei, e umas três equipes me chamaram e disseram: 'professora, mas aqui só tem três itens e tem quatro desenhos. Um se

> encaixou para cada um e ficou um sobrando?'. Fui lá na frente, expliquei de novo, daí eu acho que entenderam. Uma outra coisa que senti, que já comentei com a investigadora e alertei a Lisa antes da aula dela..., eles tiveram muita dificuldade para interpretar o que era para fazer em cada item na Questão 1. Eu deixei livre, para ver o que eles sabiam. Não expliquei como tomar um vetor num conjunto. Mas não sei vocês, o que sentiram, mas talvez se eu tivesse mostrado um exemplo com a soma de vetores, que o que importa para o vetor estar dentro é a extremidade, que a origem está sempre na origem, tudo bem explicadinho no começo, eles não teriam se perdido no início e tivessem acabado mais rápido. (...) A maioria dizia: 'mas o vetor está aqui, tem que estar todo vetor, toda a flechinha'. Eu expliquei para eles: 'não, aqui vocês estão trabalhando no plano cartesiano, agora o vetor é um par ordenado, então é a extremidade que tem que pertencer ao conjunto'. (EGC21, 31/03/2017)

Nina problematiza a forma como conduziu inicialmente a tarefa, tendo em vista a dificuldade dos alunos para tomar vetores pertencentes aos conjuntos dados. Na sua visão, deveria ter orientado os alunos por meio da resolução de um exemplo sobre como tomar um vetor pertencente a um conjunto e como explorar intuitivamente se este conjunto seria ou não fechado para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$. Tal atitude minimizaria o erro dos alunos e estes poderiam se concentrar no objetivo da tarefa que era a análise do fechamento e a representação algébrica dos conjuntos. Nina reconhece outras dificuldades, comuns às identificadas pelos professores do grupo, como em apresentar justificativas utilizando argumentação matemática, em saber quando devem apresentar um contraexemplo e quando devem justificar de forma genérica, e em fazer a transição da representação geométrica para a algébrica dos conjuntos que foram dados.

> Os meus [alunos] também tiveram dificuldade de justificar [se o conjunto era ou não fechado]. Eles sabiam que funcionava, mas não sabiam como escrever. (...). Não. Eles não têm bem claro o que é um contraexemplo e quando devem apresentar um. (...) Também tive casos que fizeram com vetores numéricos e tinha alguns fazendo só com as setinhas, daí tive que chamar atenção que tinham que traduzir matematicamente aquela representação. (...) Uma outra dificuldade deles foi escrever o H na forma algébrica. Eu tinha que ficar dizendo: 'me dá um vetor do 1.º quadrante, que característica ele tem? Ah, x e y são positivos. Então, agora como tu representa essa informação matematicamente?'. (...) A questão dois não teve problema. Eles conseguiram descrever quem era a figura. São todos repetentes, então uns fazem Cálculo II, outros já fizeram, e veem bastante esse tipo de equação lá. (EGC21, 31/03/2017)

Ao referir a forma como fez a discussão da tarefa com os alunos, Nina indica ter trabalhado em cima dos erros dos alunos, mas problematiza o facto de ter realizado a tarefa numa aula e a correção noutra, visto que inicialmente os alunos tiveram dificuldade em interagir por não se lembrarem das suas resoluções.

> Ontem eu fiz a correção da atividade no quadro. Fiz figura por figura, em detalhe. Eu fui perguntando para eles: 'o que vocês responderam aqui?'. No início não respondiam, pareciam perdidos. Isso achei ruim, parece que teve uma quebra fazer a atividade numa aula e a correção na outra. Mas daí pedi para sentarem com a dupla da aula anterior para relembrarem o que tinham feito, daí começaram a participar. Daí conforme iam respondendo fui trabalhando o erro deles, explicando o que é um contraexemplo, tomei um vetor no 1.º quadrante fora da origem, perguntei se pertencia à figura, eles disseram que não, mas não souberam justificar o porquê. Então fui trabalhando em cima disso e até essa parte da aula eles foram bem participativos. (EGC21, 31/03/2017)

Ao refletir sobre como procurou fazer a conexão entre a tarefa que utilizou para definir o fechamento de um conjunto em relação às operações de $(+)$ e $(\cdot)$ e a definição de espaço vetorial, Nina problematiza a sua postura indicando não ter formalizado as ideias que surgiram, transparecendo pouca objetividade e clareza nas ideias.

> Quando comecei a introdução a espaços vetoriais, eu acho que eu fui muito monótona, muito repetitiva, comecei a perceber que os alunos começaram a entrar e sair da sala. Eu pedi para eles irem citando alguns conjuntos que poderiam ser fechados [para as operações de $(+)$ e $(\cdot)$], falaram do $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, matrizes, a reta $y = x$. Mas daí eu fui seguir muito o que a Bruna tinha falado sobre o que tinha feito na aula dela e acabei me perdendo. Para cada conjunto que citaram fui tirando vetores genéricos. Mas fui fazendo muito na forma de rascunho, sem formalizar, não sei se entenderam o meu objetivo. Peguei um plano genérico $ax + by + cz = 0$, eles não conseguiam tirar um vetor, um representante daquele conjunto formado por vetores de um plano qualquer. Só quando pedi para eles tirar os vetores de um plano específico que acho que entenderam, porque dei um tempo para eles fazer e fui circulando para ajudar. Então, eu perdi um tempo que não precisava ter perdido. Eu devia ter sido mais objetiva e ter feito com eles direto o exemplo da reta $y = 2x$, ter mostrado que é espaço vetorial, eu fiz, mas foi no final, nem consegui explorar todas as propriedades. Na próxima aula vou ter que concertar isso. (...). Eu distribuí as Questões 5 e 6 para fazer em casa e vou corrigir na próxima aula. (EGC21, 31/03/2017)

Na reflexão sobre a 3.ª aula ministrada, que envolveu a discussão sobre a 6.ª questão da tarefa, Nina tinha o sentimento de que a aula havia sido produtiva, pois envolvera os alunos na resolução da questão no quadro. Na oportunidade conseguira perceber as suas dificuldades, pois não tinha acompanhado a resolução por eles a terem resolvido extra classe, para além de trabalhar os seus erros. Nina acredita que além da participação dos alunos, a projeção das questões no quadro colaborou para uma melhor dinâmica da aula.

Eu gostei da minha aula. Foi muito legal. Todos os meus alunos fizeram as questões [5 e 6]. (...) A Questão 5 eu vou corrigir, vou considerar como trabalho. Eu só retomei a 6, para fazer o link com a Questão 1, que não era um espaço vetorial, e agora, como mudaram as operações é um espaço vetorial. (...) A investigadora me falou que o Téo projetou as questões para fazer a correção, daí também fiz isso e gostei bastante. Todo mundo fica prestando atenção. (...) Eu gostei bastante da minha turma. Sabe o que eu fiz? Eles me entregaram e mandei cada dupla para o quadro. E, então, a gente ia corrigindo junto, porque se não ia ficar muito chato só eu ficar fazendo. Eu já tinha feito isso na correção da 1.ª questão, então agora deixei para eles fazer e funcionou bem. (...) Teve alguns que realmente usaram as operações usuais. Mas daí eu falei assim: 'nós vimos que um espaço vetorial precisa conter o vetor nulo. Na aula passada vimos que o 1.º quadrante não era espaço vetorial porque não continha o nulo. Agora está afirmando que é um espaço vetorial, mas com outras operações. Cadê o vetor nulo?'. Pois eles me responderam, 'é o (1,1)'. Para a minha turma funcionou super legal. Eu gostei. E aí, ontem eu retomei essa questão e eles: 'professora, é o (1,1)'. Então, pronto! (...) Também senti essa dificuldade deles de mostrar uma igualdade (...). Teve uma ou duas duplas que fizeram tudo numericamente. Eles usaram os vetores numéricos que foram dados na letra (a). Não sei se não ficou muito claro o enunciado. (...) Sim, os meus também colocaram $-1.u$, e aí utilizaram a operação [de multiplicação por escalar]. Daí expliquei para eles como fazer usando o conhecimento do elemento neutro que tinham acabado de determinar. (EGC22, 07/04/2019)

As dificuldades percebidas por Nina, também semelhantes às observadas pelos demais professores, relacionavam-se: (i) às técnicas para provar as igualdades envolvidas nos axiomas da definição de espaço vetorial, e (ii) ao uso das operações usuais ao invés das operações dadas no enunciado, consequentemente utilizavam o vetor nulo como (0,0) ao invés do vetor (1,1). Nina problematiza o enunciado da referida questão, tendo em vista que alguns alunos resolveram todos os itens com os vetores numéricos envolvidos apenas no 1.º item. No semestre seguinte, com a continuidade das atividades no grupo, ao revisitarmos a tarefa, reescrevemos o enunciado para evitar a dupla interpretação apontada por Nina.

Relativamente à tarefa envolvendo a interpretação geométrica do espaço vetorial não usual envolvido na 6.ª questão, que fora planejada no grupo, Nina esclarece que não a propôs aos alunos, apenas mostrou no GeoGebra o gabarito da tarefa com a respetiva interpretação geométrica, em função do tempo que a dinâmica com as tarefas anteriores demandou:

O facto de os alunos irem ao quadro toma um tempo bem grande. A experiência foi ótima, a discussão foi boa, mas fiquei a aula toda em função dessa questão. Não podia ficar mais uma aula, tinha que dar subespaço na quinta, então aproveitei a oportunidade que estava com o computador aberto e mostrei a interpretação geométrica no GeoGebra, para pelo menos dar uma ideia do que seria. Alguns já conheciam a escala log, foi interessante. Acho que com isso fechei bem a análise da questão 6. (EGC22, 07/04/2019)

No grupo, após a discussão sobre a concretização das tarefas, procuramos refletir sobre como poderíamos trabalhar em cima das dificuldades dos alunos que foram identificadas. Nessa reflexão, discutimos como a questão da notação algébrica para conjuntos poderia ser retomada, como, por exemplo, no estudo do tópico subespaço gerado e na lista de tarefas extra classe, na ênfase a dar ao processo de como se mostra que um conjunto é ou não um espaço vetorial, com o intuito de que aos poucos eles aprendam a fazer demonstrações. Como fruto dessa reflexão, também se discutiu as alterações que deveriam ser feitas na lista de tarefas extra classe que o grupo já utilizava em semestres anteriores, bem como discutiu-se a elaboração de uma questão para a prova relacionada ao conteúdo explorado nas tarefas. Em todo este processo de reflexão, Nina ouviu atentamente os colegas, concordando, verbalmente ou sinalizando com a cabeça, com as ideias que surgiam. A transcrição seguinte ilustra o posicionamento de Nina nas referidas discussões:

Bruna:	Onde que a gente vai adentrar, de novo, nisso? Como o Téo falou antes, quando a gente falar em...
Nina:	...quando estiver em geradores e for encontrar o subespaço gerado.
Bruna:	Exato, em subespaço gerado. Nós, como professores, dentro da sala de aula, vamos dizer: 'vocês tiveram muita dificuldade para escrever algebricamente os conjuntos, lá na primeira questão daquela tarefa... Agora vamos retomar isso, aqui é importante essa notação, como podemos denotar matematicamente esse conjunto gerado por esses vetores?'. (...)
Nina:	E agora? O que a gente vai fazer?
Investigadora:	Eu acho que na avaliação tinha que ter algo relacionado a isso, também. É uma maneira de avaliarmos se eles realmente entenderam. E também, como a Nina falou já aqui, não adianta a gente mudar a nossa forma de dar o conteúdo se a avaliação continua a mesma. Vocês não acham?
Nina:	Sim, acho que poderíamos pensar
Lisa:	Eu acho que poderíamos cobrar a questão 6.
Téo:	Mas com as mesmas operações?
Lisa:	Não, dá para mudar as operações. Também não precisa colocar aquelas dicas que tinha nos itens. Dá para ser bem direto.
Bruna:	Eu acho que tem que fazer um contraste, colocar uma geométrica, como a 1.ª que a gente fez, e uma do estilo da 5 ou 6.
Nina:	É, eu também acho.

As possibilidades que foram levantadas quanto à ênfase a ser dada na linguagem algébrica bem como as reformulações na lista de tarefas e a discussão sobre a questão da prova podem ter contribuído para a prática de ensino de Nina.

Síntese

Na fase de discussão e preparação das aulas da introdução aos espaços vetoriais, Nina faz uma retrospetiva sobre como introduzia tal tópico, referindo que explorava a definição de espaço vetorial apenas no $\mathbb{R}^2$, dando maior enfoque à definição de subespaço vetorial. Explorava a definição de subespaço vetorial para espaços vetoriais como o $\mathbb{R}^n, P_n$ e $M_{m\times n}$, mesmo sem os definir previamente. Refere que os alunos, em geral, têm muitas dificuldades em lidar com as demonstrações envolvidas na teoria de espaços vetoriais, principalmente quando é necessário provar os axiomas da definição de espaço vetorial. Refere ainda que eles apresentam dificuldades com a notação algébrica dos conjuntos, principalmente na identificação dos vetores genéricos que descrevem os conjuntos, na tarefa de provar que um determinado conjunto é um subespaço ou de encontrar o conjunto de vetores geradores de um subespaço.

A definição da estratégia de ensino para introduzir os espaços vetoriais teve por referência as experiências vivenciadas por alguns dos professores do grupo e a análise de como o conteúdo é apresentado em livros didáticos, e foi construída dentro do grupo pela intervenção dos seus diferentes elementos. Tal estratégia foi delineada com a preocupação de envolver mais os alunos no processo de construção do seu conhecimento e de modo que a definição de espaço vetorial fosse explorada primeiramente num contexto concreto para os alunos. Nesta perspetiva foram elaboradas tarefas, no contexto do $\mathbb{R}^2$, para os alunos resolver dentro e fora da sala de aula. Para a construção da estratégia, as ideias não partiram de Nina, porém procurou refletir e discutir as ideias que surgiam no grupo, colocando-se no papel do aluno ao verificar a adequação das questões elaborados, a sua objetividade e clareza.

Durante a construção da estratégia, ao expor suas ideias, Nina manifestou ter uma interpretação frágil dos conceitos de espaço e subespaço vetorial, muitas vezes os confundindo. Também demonstrou certa fragilidade ao discutir a relação entre, por exemplo, um ponto $P(x, y)$ e o vetor posição associado a este ponto $v = (x, y)$, noção advinda da Geometria Analítica. Importa destacar que a docente manifestou abertura para se expor diante do grupo, demonstrando sua falta de aprofundamento sobre os conceitos envolvidos na planificação, bem como sobre a sua estratégia de ensino que parecia valorizar mais os procedimentos algébricos do que um entendimento mais profundo dos conteúdos e sobre as relações existentes entre eles. Tampouco demonstrou alguma atitude de constrangimento ao perceber os seus equívocos, transparecendo ser um aprendiz naquele momento do grupo. Tal postura indicia que no grupo havia um clima de confiança e apoio mútuo para superar as dificuldades que surgiam.

Na concretização de suas aulas, Nina procurou envolver os alunos por meio: (i) do trabalho em pares na resolução de tarefas dentro e fora da sala de aula; (ii) da discussão conjunta sobre as tarefas, seja com Nina no quadro registrando as respostas verbalizadas pelos alunos, seja com os alunos indo ao quadro registrar suas resoluções; (iii) da discussão sobre os erros dos alunos e (iii) por meio de questionamentos. Durante a resolução de tarefas em sala de aula, Nina procurou não dar respostas prontas aos alunos, lhes fazendo questionamentos que os ajudassem a refletir e superar as dificuldades que surgiam. Entretanto, nem sempre Nina foi objetiva em suas aulas, demonstrando às vezes certa insegurança em sua abordagem, bem como deixando de dar algumas justificativas teóricas aos alunos. Para exemplificar, na 1.ª aula observada, quando inicia um novo capítulo, Nina não apresenta a temática da aula, apenas solicita que seja realizada uma tarefa, sem deixar claro o que se objetiva com ela. A docente afirma que ao tomarem geometricamente vetores de um conjunto, estes devem ter origem no ponto (0,0), mas não deixa claro o porquê. Ao discutir o fechamento de alguns conjuntos citados pelos alunos, na 2.ª aula observada, Nina faz na forma de rascunho no quadro, sem que a maioria dos alunos perceba que deveriam de alguma forma registar tal explanação, pois fazia parte do conteúdo.

Na reflexão individual sobre as suas aulas, Nina recebe bem as sugestões que lhe apresento quanto a uma maior ênfase a dar à notação algébrica dos conjuntos. Também se sente à vontade para discutir um exemplo sugerido por um aluno que no momento da aula ficou insegura para discutir, tanto é que na aula seguinte o retoma com os alunos. Ao fazer uma retrospetiva sobre as suas aulas no grupo, Nina reconhece algumas dificuldades dos alunos, semelhantes às relatadas pelos colegas, e enfatiza a importância de ter proposto as tarefas para o reconhecimento de tais dificuldades, que podem passar despercebidas se o ensino for centrado na sua atividade. Problematiza a sua atitude em sala de aula ao propor a 1.ª tarefa, sem inicialmente ter resolvido um exemplo para os alunos terem como referência, o que os levou a terem algumas dificuldades de interpretação e demorado mais tempo para a resolução do que havia planejado. Como consequência, a discussão da tarefa precisou de ser realizada na aula seguinte, o que na sua perspetiva não foi bom porque alguns alunos não se lembravam das suas respostas ou pouco interagiam em relação aos questionamentos que lhes eram feitos. Nina também problematizou a forma como fez a ligação entre a 1.ª tarefa, do fechamento, com a definição de espaço vetorial, inferindo não ter sido objetiva e formal nas suas ideias. Nina se mostrou entusiasmada em relação à dinâmica que utilizou para envolver os alunos, como o trabalho entre pares de alunos na resolução de tarefas e a resolução de uma tarefa pelos alunos no quadro.

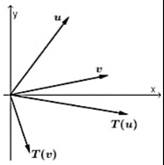
8.4.2. Tarefas avaliativas

8.4.2.1. Trabalho sobre 'Transformações Lineares'

A tarefa designada por 'Trabalho sobre Transformações Lineares' fora proposta para ser resolvida em duas etapas, sendo a 1.ª com recurso ao papel e lápis e a 2.ª com recurso ao GeoGebra. A 1.ª etapa (Quadro 40) buscava, na maioria das questões, explorar a definição de transformação linear e a sua interpretação geométrica no espaço vetorial do $\mathbb{R}^2$, sendo que uma das questões explorava esta definição para espaços vetoriais quaisquer.

Quadro 40. Questões da tarefa proposta com recurso ao papel e lápis.

PARTE I (com recurso ao papel e lápis)



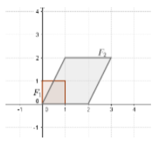
1. Na figura abaixo estão representados os vetores $u, v, T(u)$ e $T(v)$ onde $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear. Determine, geometricamente os vetores:

$a)\ u+v$ b) $u-v$ c) $T(u+v)$ d) $T(u-v)$ e) $T\left(2u+\frac{1}{2}v\right)$

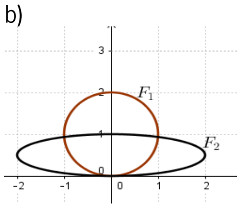
2. Dois professores de Álgebra Linear do departamento de Matemática - DMAT, Téo e Lisa, estavam discutindo sobre a definição de Transformação Linear. Téo afirmou que "Uma transformação $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, onde V e W são espaços vetoriais, é uma transformação linear se dados quaisquer vetores $u, v \in \mathrm{V}$, tem-se $\mathrm{T}(u+v) = \mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v)$ e $\mathrm{T}(\alpha u) = \alpha\mathrm{T}(u),\ \alpha \in \mathbb{R}$".
Lisa afirmou que "Uma aplicação $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é, onde V e W são espaços vetoriais, é uma transformação linear se $\mathrm{T}(\alpha u + v) = \alpha\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v)$, $\forall\, u, v \in \mathrm{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$".
Verifique se a afirmação de Lisa é equivalente à afirmação de Téo. Justifique sua resposta.

3. Verifique em cada caso, se a transformação que transforma a figura F_1 na figura F_2 é linear. Justifique sua resposta e em caso positivo, dê a lei que define a transformação linear.

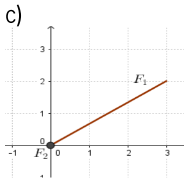
a)



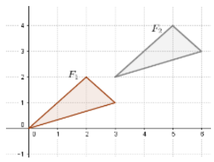
b)



c)

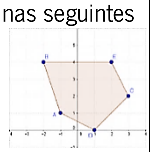


d)



4. Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Em caso positivo, dê a lei da transformação linear e represente geometricamente. Em caso negativo, justifique.

5. Dado o polígono $ABCDE$, na figura abaixo, represente geometricamente a imagem desse polígono nas seguintes transformações:



a) reflexão em torno do eixo x; b) reflexão em torno do eixo y; c) reflexão em torno da reta $y = kx$
Para a escolha do k, verifique quais são as vogais presentes no primeiro nome dos membros da equipe, e use o maior valor numérico associado, conforme abaixo:

A	E	I	O	U
1	2	3	4	5

Por exemplo: Gabriel e Róger. Usar $k = 4$.

6. O quadrado $ABCD$, onde $A(0{,}0), B(1{,}0), C(1{,}1), D(0{,}1)$ é transformado por um operador linear no paralelogramo $A'(0{,}0),\ B'(2{,}3), C'(8{,}4), D'(6{,}1)$. Determine a matriz do operador.

7. No exercício anterior, se tomarmos $B'(1{,}5)$, o problema teria solução? Justifique.

A 2.ª etapa envolvia a exploração de forma dinâmica de algumas transformações lineares especiais, tais como a reflexão através de retas e planos, a rotação em torno de um eixo e o cisalhamento (Quadro 41).

Quadro 41. Questões da tarefa proposta no ambiente computacional em duas e três dimensões.

PARTE II (mediada por tecnologias)
1. Escolha uma ferramenta tecnológica para representar dinamicamente as transformações ocorridas no polígono $ABCDE$ da questão 5 da parte I da tarefa. 2. Utilizar uma ferramenta tecnológica para implementar um dos operadores lineares no $\mathbb{R}^3$: Rotação em torno do eixo x, Rotação em torno do eixo y, Rotação em torno do eixo z, Reflexão através de um plano que passa pela origem, Reflexão através de uma reta que passa pela origem, Cisalhamento na direção xy, Cisalhamento na direção yz, Cisalhamento na direção xz. Diretrizes para a questão 2: Escolha um objeto geométrico para aplicar o referido operador no $\mathbb{R}^3$ e apresente a atividade, na ferramenta tecnológica, de maneira organizada, dinâmica e interativa. (Deve ficar claro qual o papel do operador linear ao transformar o objeto escolhido). A implementação deve atender os requisitos: *i. Rotação em torno de um eixo coordenado*: apresentar campo de entrada para o ângulo de rotação, fazer a transformação do objeto geométrico para cada ângulo e apresentar a matriz do operador correspondente a transformação para cada ângulo. *ii. Reflexão através do plano*: apresentar campo de entrada para a equação do plano, fazer a transformação do objeto geométrico para o plano qualquer da entrada e apresentar a matriz do operador correspondente a transformação. *iii. Reflexão através da reta*: apresentar campo de entrada para a equação da reta, fazer a transformação do objeto geométrico para a reta qualquer da entrada e apresentar a matriz do operador correspondente à transformação. *iv. Cisalhamento*: apresentar campo de entrada para o fator de cisalhamento, fazer a transformação do objeto geométrico e apresentar a matriz do operador correspondente para cada fator de cisalhamento.

Preparação da tarefa

Antes de iniciarmos a planificação da tarefa avaliativa, procuramos identificar como cada professor ensinava as transformações lineares, bem como as dificuldades no ensino deste tópico, com o intuito de planificar uma avaliação coerente com a abordagem utilizada pelo grupo. Nina manifestou que ensinava primeiramente a teoria de transformações lineares e tratava como um capítulo à parte os operadores lineares especiais em duas e três dimensões (Cisalhamento, rotação, reflexão, dilatação/contração).

> Da maneira tradicional, eu começava associando com funções. Todos os conceitos eu começava: 'Lembram de função? Em função é tal coisa. Então em transformação linear funciona de tal forma'. Para introduzir [a definição] de transformação linear eu começava com uma função que não era linear, que levava de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, aí depois pegava uma função que levava de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, que não era linear, para associar com [a disciplina de] Cálculo II. Aí depois que eu começava a falar da definição. Quando acabava transformação, passava para operadores [lineares]. (...) A apostila faz assim, então acho que é por isso que a gente faz separado. (...) Eu fazia os desenhos no quadro, encontrava a matriz para cada operador. Mas é uma aula chata, né? É uma coisa que eles não estão

nem um pouco interessados. Tu dás aquela matriz, tu mostras os elementos. Eu acho chato, imagina eles. Até seria muito bom mudar essa coisa. (EGC8, 07/10/2016)

Tal abordagem era a apresentada numa apostila de Álgebra Linear do Departamento de Matemática e utilizada pela maioria dos professores do grupo. Nina considera que os alunos não costumavam mostrar interesse pelo estudo dos operadores lineares especiais, postura que pode ser reflexo da forma como abordava o tópico, uma vez que dá indícios de não gostar de o ensinar. Num outro momento, Nina já havia revelado ter dificuldade de ensinar os operadores lineares especiais, pela falta da sua compreensão plena do conteúdo, resumindo o ensino deste tópico a uma transferência de conteúdo, limitando-se aos procedimentos envolvidos, como foi evidenciado na Secção 8.3.2.

No grupo, discutiu-se a possibilidade de abordar os operadores lineares dentro do capítulo de transformações lineares, no intuito de trabalhar simultaneamente a teoria e a interpretação geométrica das transformações lineares. Diante de tal perspetiva, a primeira reação de Nina foi de resistência, mesmo tendo manifestado achar necessário uma mudança na abordagem dos operadores lineares.

Tito: [O livro do] Boldrini faz isso. Ele define transformação linear, faz a correspondência matrizes e em seguida trabalha com os operadores no $\mathbb{R}^2$.

Lisa: Eu acho interessante porque o aluno já vai vendo o que significa uma transformação linear, antes de ver toda a teoria, porque eles acham que transformação é uma coisa e operadores é outra.

Nina: Está, mas daí a gente vai ter que mudar todo o planejamento da aula. Tenho que refazer toda minha aula. Tenho que refazer tudo, porque eu não dou aula assim.

Investigadora: Mas Nina, tu já tens o conteúdo planificado, seria uma reorganização. Teríamos que puxar os operadores antes.

Nina: Não sei se é puxar antes..., não é puxar antes. É que tem que achar o momento para encaixar, entendeu? (...) Eu não sei, é que o Téo já está fazendo assim. Agora nós três não estamos fazendo assim. (EGC8, 07/10/2016)

Sua resistência incidiu sobre ter que replanificar as suas aulas, uma vez que já as tinha prontas de semestres anteriores, e em poucos dias, pois na semana seguinte à discussão no grupo já iniciaria o capítulo de transformações lineares. Após ouvir a experiência partilhada por Téo, que ensinava os dois conteúdos concomitantemente, e ser realizada uma análise conjunta no grupo de como alguns livros abordavam os referidos conteúdos num único capítulo, Nina altera o seu ponto de vista, e passa a apontar caminhos sobre a exploração dos tópicos nessa nova abordagem:

Agora, sim! Entendi! É só cada um decidir como fazer esse início, se começa com o conceito de transformação linear, depois dá a matriz, e vai inserindo como exemplos os operadores, ou da forma como o livro faz... Acho que vou fazer dessa maneira também, porque daí eu acho que dá mais sentido para o conteúdo. (...) Ao invés de tu dares um exemplo de uma transformação linear qualquer, pode dar um exemplo de operadores. Tu passas o que é núcleo, o que é a imagem, e daí: 'Vamos ver um exemplo'. Passa um exemplo de operadores. Na composta dá para explorar bem os operadores. (...) Gente, mas olha só! Aí a gente vai ter que pensar também na lista de exercícios [extra classe]. (EGC8, 07/10/2016)

Nina alerta o grupo sobre a necessidade de adequar a lista de tarefas extra classe que os professores utilizavam anteriormente, para a nova abordagem. O grupo avaliou as duas listas existentes, e transformando-as numa única, o que fez com que algumas questões foram reestruturadas e outras inseridas para explorar mais os aspetos geométricos das transformações lineares.

A discussão sobre a construção da tarefa iniciou com a partilha por duas professoras do grupo sobre a sua experiência com uma tarefa envolvendo os operadores lineares especiais do $\mathbb{R}^2$. Tratava-se de uma tarefa extra classe, composta por duas etapas: na 1.ª os alunos deveriam apresentar aplicações sobre os operadores lineares relacionadas ao seu curso de graduação, e na 2.ª etapa, deveriam implementar no GeoGebra os operadores lineares especiais do $\mathbb{R}^2$. Como não havia nenhuma outra proposta, a ideia era avaliar a existente e, então, refutá-la ou amadurecê-la no grupo. Nina foi a primeira a manifestar-se de forma resistiva, não somente à proposta, mas à ideia de propor uma tarefa avaliativa, para além da prova.

> Olha, sinceramente, eles têm que estudar para a prova desse conteúdo. Esse é um trabalho que vai exigir muito tempo. Aí eles vão ter que optar, ou o trabalho ou a prova, gente! Porque se cobrarmos isso tudo num trabalho, nós não vamos fazer prova de transformações lineares, porque eles não vão ter tempo para estudar. (...) A gente tem que se colocar no lugar do aluno, entende? Eles não têm só a Álgebra Linear para estudar! Então, quando o professor chega assim: 'quero trabalho, quero prova, quero isso...', temos que entender que eles não têm só a nossa disciplina. Eu acho que estamos exigindo muito de Álgebra Linear. (EGC8, 07/10/2016)

Ao se colocar no papel dos alunos, Nina acredita que a proposta da tarefa, tal como foi apresentada, iria exigir muita dedicação e que poderia comprometer o seu estudo para a realização da prova referente a tal conteúdo. Sua preocupação estava fundamentada na experiência com a primeira avaliação da disciplina, em que os alunos tiveram que realizar uma tarefa sobre aplicações contextualizadas de sistemas lineares, sendo que naquela respetiva prova sua turma não teve um bom aproveitamento, tal como explica: "Estou preocupada porque os meus alunos, aqueles que fizeram o trabalho de sistemas, foram muito mal na primeira prova. Agora vou ver como foram na segunda [prova], ainda não corrigi" (EGC8, 07/10/2016). No grupo, observou-se que os alunos, de forma geral, não tinham obtido um bom aproveitamento na primeira prova, incluindo os alunos dos professores que realizaram a primeira avaliação apenas por provas. Também foi observado que tal aproveitamento dos alunos era semelhante aos semestres anteriores. Sendo assim, o grupo tomou por hipótese que o fraco aproveitamento se dava em razão dos alunos pensarem que sabiam o conteúdo e não estudarem o suficiente, tendo em vista que era um conteúdo contemplado no Ensino Médio, como ilustra um diálogo do grupo:

> Lisa: Só que na primeira prova, eu observei que os meus alunos não estudaram. Tinha até certo desinteresse em aula. Já para a segunda prova eles estudaram, me procuraram para tirar dúvidas.
>
> Tito: Sabe por quê? Eles acham que como [o conteúdo] são as matrizes, os determinantes e os sistemas, então eles sabem.
>
> Nina: É, até pode ser.
>
> Investigadora: Mas isso não foi só neste semestre. Vocês lembram como era nos outros semestres?
>
> Tito: Em todos os outros semestres têm sido assim. Eles começam a acordar para a disciplina quando entra em espaços vetoriais, porque aí é novidade para eles. (EGC8, 07/10/2016)

Ao ouvir a sugestão de Tito ao grupo para propor apenas a parte da tarefa que envolvia a implementação dos operadores lineares especiais no GeoGebra, Nina se mostrou favorável referindo que neste caso a tarefa auxiliaria os alunos na compreensão do conteúdo:

> Tito: Eu acho que só as questões do GeoGebra seriam suficientes.
>
> Nina: Eu acho também. Com essa parte do GeoGebra eles vão aprender. Ótimo! O negócio é aprender! Ou então só a primeira parte... Uma coisa ou outra. Senão, acho que a gente está exigindo muito.
>
> Tito: Eu acho que a parte do GeoGebra reforça o que eles estão estudando. Eles vão ter que usar os operadores, vão ter que usar a matriz de cada operador, vão enxergar geometricamente o que significa cada operador.
>
> Nina: Se vocês quiserem fazer em duas partes o trabalho vocês fazem. Eu não vou fazer. (...) Eu não vou fazer porque eu acho que é muito trabalhoso, ok? A parte do GeoGebra eu faço, porque eles vão aprender com isso. Quanto à parte da aplicação, é claro que eu acho legal eles saberem como este conteúdo se relaciona com o curso deles. O problema é que na hora da prova não vai ser assim. (EGC8, 07/10/2016)

Na perspetiva de Nina, a avaliação deveria estar de acordo com a abordagem utilizada pelo professor na disciplina. Sendo assim, em sua opinião, como na prova o foco era o conteúdo, a tarefa deveria ter como objetivo a aprendizagem do conteúdo pelos alunos, ao invés das aplicações contextualizadas. Tais considerações de Nina e Tito propiciaram a reflexão do grupo, que decidiu por substituir na tarefa a exploração das aplicações contextualizadas por um conjunto de questões que envolvessem o conceito de transformação linear, bem como a sua interpretação geométrica. A transcrição seguinte ilustra a reação de Nina diante da nova perspetiva para o que seria a 1.ª etapa da tarefa:

> Aí eu concordo! É um trabalho para eles pararem, estudarem os conceitos e resolverem. Não é um trabalho que eles vão ter que parar, pesquisar, montar... Porque neste caso, se tu quiseres uma coisa bem feita, exige tempo deles. E assim não, assim a gente direciona bem... (...) [Desta forma] Vai ajudar eles a estudar, vão tirar dúvidas, vai mudar aquela questão de só estudar na véspera da prova. (...) Porque quando tu vais procurar uma aplicação para o teu curso não está ajudando a estudar. (...) Tem que ter aquelas questões diferentes, envolvendo mais a parte geométrica. (...) A aplicação talvez eles tenham condição de fazer, mas agora o foco é que eles entendam o conteúdo. Eles têm que sair daqui com domínio desse conteúdo para poderem utilizar em outras disciplinas. E a geometria ajuda a entender. (...) Eu acho legal não ter só aquelas questões assim: 'encontre o operador definido por uma reflexão...'. Acho que podemos colocar uns probleminhas mais aplicados. Daí eles não precisam correr atrás para pesquisar, mas que eles, ao resolver, usem os conceitos e a geometria. Tem que pensar. Mas que não seja uma coisa mecânica. (EGC8, 07/10/2016)

Nina passa a concordar com a proposta da tarefa em duas etapas, e sugere que a 1.ª etapa, a ser resolvida com recurso ao papel e lápis, envolva questões que explorem mais os conceitos e a sua interpretação geométrica, ao invés de apenas o procedimento de resolução.

Num segundo momento de discussão sobre a tarefa, Téo sugeriu a construção de uma questão que consistia em apresentar uma figura no GeoGebra e a sua respetiva imagem, após aplicar uma das transformações geométricas estudadas na aula, e fazer questionamentos aos alunos relacionados com as propriedades que se poderiam observar em tais transformações. Ao analisar a proposta de Téo, Nina questionou a finalidade do uso do software para a interpretação/resolução da questão:

> Vamos supor, clicou no número 2, apareceu isso [figura transformada], pronto, aí vai ter que descrever que tipo de transformação ocorreu, certo? Qual é a diferença disso daí para o papel? Eu posso imprimir isso e colar aqui, qual é a diferença de dar na folha de papel? Mesmo que não seja estático tu vais cobrar uma coisa estática, entendeu? Ah, é dinâmico, mas o que tu estás cobrando é estático, todos eles vão encontrar a mesma transformação, é estático. Essa é a questão, não é assim, dependendo se o beltrano colocar um ponto, outro beltrano colocar outro, vai dar resultado diferente. Aí não vai dar resultado diferente, aí vai dar o mesmo resultado para todo o mundo, então eu posso copiar, entendeu? (...) Aí não há diferença nenhuma em você dar no papel a figura original e a figura transformada e pedir qual é a transformação. Agora, se eles usarem o GeoGebra para construir alguma coisa, tipo aquele que a gente estava pensando, cada um vai fazer uma figura e aplicar a transformação, aí isso daí é outra coisa, entendeu? (...) Para mim não faz sentido usar o GeoGebra para ele só clicar num botão e ver a figura transformada. EGC9, 10/10/2016)

Na perspetiva de Nina, o GeoGebra deveria ser envolvido na tarefa no sentido de que cada aluno construísse um objeto geométrico, aplicasse uma transformação linear neste objeto e que por meio da alteração dos parâmetros envolvidos, observasse o efeito da transformação ocorrida. Tal perspetiva tinha por referência a ideia partilhada por duas das professoras do grupo e que culminou na 2.ª etapa da tarefa (Quadro 41). O questionamento que fora levantado por Nina provocou a reflexão no grupo, que considerou que não faria diferença o uso de software para a concretização da questão sugerida por Téo, e que a mesma ideia poderia ser trabalhada apenas com recurso ao papel e lápis. Tal ideia foi lapidada por outros professores do grupo e resultou nas questões 3 e 5 da primeira etapa da tarefa (Quadro 40). As questões 1, 2 e 4 (Quadro 40), emergiram de um conjunto de questões de um trabalho de graduação orientado por Tito, sendo que no grupo tais questões foram reescritas. A transcrição seguinte ilustra a participação de Nina na definição de tais questões:

> Essa aí eu acho que é uma questão bem interessante para propor, porque é estática, é geométrica e eles têm que ter a teoria. Eles vão fazer tranquilamente $u + v$, mas para obter $T(u + v)$, eles têm que saber a teoria.
> Está, mas aqui pede para comparar com a sua definição se está correto ou não. (...) Está, então tem que mudar a questão. Olha como está aqui: faça uma comparação com a sua definição dada anteriormente. (...) Então vamos reescrever a ideia da questão. (...) Tu estás perguntando se as duas definições são equivalentes e pedindo para justificar a resposta, Tito. São duas coisas diferentes. (...) Pode ser sim ou não. Eu não estou dizendo: mostre que as duas definições são equivalentes. (...) Eu estou pedindo: as duas definições são equivalentes? Justifique. Pronto!
> Mas que tal a gente colocar assim: existe uma transformação linear que transforma um quadrado num segmento? Se sim, exiba-a, se não justifique porque não existe. (EGC9, 10/10/2016)

Relativamente à 2.ª etapa da tarefa, mediada pelo GeoGebra, Nina participou da definição do que seria esta etapa, como elucida a transcrição seguinte, mas não participou diretamente na construção das questões que aconteceu num encontro do grupo em que ela não pôde estar presente.

> Eu acho que tem que ter essa parte para eles criarem. Essa parte para eles criarem eu gostaria que eles apresentassem. (...) Vocês lembram que na reunião passada eu falei assim, o que faltou lá no GeoGebra [na tarefa sobre mudança de base]. Eles gostaram? Gostaram. Mas se eles estivessem ali mexendo ia ser muito diferente. (...) Exatamente, não sou eu que vou lá e vou mexer e vou mostrar para ele. Não, ele é que vai construir, até pode ser fácil, até pode ter uns comandos prontos, mas é ele vendo ali, é ele mexendo, é ele colocando de repente uma matriz que não faz o que era para ser, ele vai ter que ver o que tem de errado, é diferente, gente. (...) A gente tem que direcionar para ver se vai chegar aonde a gente quer. Dizer o que a gente quer que façam para cada transformação. (...) A gente direcionar o aluno não quer dizer que a gente está dando pronto para ele. Eu acho que direcionar é uma boa, eu sempre acho assim, que pelo

menos tu sabes o que o aluno vai fazer em seguida, se tu deixar muito aberto para o cara, ele se perde, [pois] ele não tem o fundamento teórico que a gente tem. (EGC9, 10/10/2016)

Para Nina, esta etapa da tarefa, em que os alunos deveriam mobilizar os seus conhecimentos para construir no software as transformações lineares aplicadas a algum objeto, seria muito mais importante para sua aprendizagem do que apenas visualizarem o efeito das transformações num aplicativo pronto. Nina alerta o grupo que, para que esta mobilização de conhecimentos seja efetiva, deveriam ser elaboradas diretrizes claras no sentido de direcionar os alunos para o que era esperado da tarefa.

No encontro em que o grupo se reuniu para a avaliação final das questões da tarefa, após uma leitura em conjunto, nenhum professor sugeriu alterações na redação das questões. Sendo assim, foi discutido como seria a aplicação da tarefa. Nina manifestou que iria propor para seus alunos resolverem aos pares, como esclarece: “Eu vou propor em duplas, acho que eles trabalham bem, eles discutem mais e aprendem com isso” (EGC11, 21/10/2016). Quanto à parte da tarefa mediada pelo GeoGebra, decidiu conjuntamente com o grupo em sortear um dos operadores lineares especiais do $\mathbb{R}^3$para cada par de alunos fazer a implementação. No grupo foi discutido que poderia haver cópias dos trabalhos entre os alunos se a tarefa fosse realizada extra classe. Nina manifestou que não havia espaço no seu cronograma para propor a tarefa em sala de aula e que iria propor a apresentação pelos alunos da parte mediada pelo GeoGebra. Também sugeriu que na prova fosse cobrada uma questão relacionada à primeira etapa da tarefa:

> Pode ter cópia? Pode. Não vejo isso como um grande problema. Se copiar, vai ter que saber o que copiou. Vamos cobrar alguma coisa relacionada com a prova, não vamos? (...) Vai ter apresentação da segunda parte, então mesmo que tenha copiado, vai ter que estudar para explicar aos colegas. (...) Como vocês vão fazer para dar a nota? (...) Mas tu vais dar uma nota pelo GeoGebra e outra pela apresentação? (EGC11, 21/10/2016)

Na perspetiva de Nina, a troca de informações sobre a tarefa entre os diferentes pares poderia implicar na aprendizagem dos alunos, pois mesmo que copiassem as resoluções uns dos outros, eles teriam que estudar o conteúdo envolvido tanto para a prova como para a apresentação. Relativamente ao peso (nota) de cada uma das etapas da tarefa, Nina questiona os colegas para ouvir suas opiniões, mas não manifesta a sua escolha.

Em suma, na planificação da tarefa, Nina não apresentou nenhuma proposta concreta relacionada com as questões, mas realizou intervenções sobre as ideias apresentadas que provocaram a reflexão no grupo, contribuindo tanto para a definição do que seriam as etapas da tarefa, bem como na escolha e redação de algumas das questões e sobre como concretizar a tarefa. Ao contrário da sua resistência inicial sobre a proposição de mais uma tarefa avaliativa, para além das provas, no último encontro da planificação, Nina se mostrou otimista para a proposição da tarefa sobre transformações lineares aos alunos.

> Eu vejo que estou me atrasando toda por causa das coisas diferentes que estamos fazendo. Mas eu vejo que eles estão aprendendo. Eu percebo que eles estão entrando na matéria, eles não estão só copiando, entende? Eles foram tão bem na prova [sobre Espaços vetoriais]. (...) Eu estava assim bem decepcionada com a primeira prova. Eles foram muito mal e eu pensei que fosse porque dei o trabalho e fiz a apresentação no lugar de fazer uma aula de exercícios antes da prova. Essa vez não. Também não deu tempo de fazer a aula de exercícios, mas foi diferente, eles trabalharam mais. Teve a tarefa de mudança de base em sala, teve a correção, teve uma discussão. Eu percebi que eles entenderam, sabe? (...) Não foi fácil para mim, tive que trabalhar diferente, teve essa parte geométrica que eu não trabalhava. Mas eu me empenhei e deu certo. (EGC11, 21/10/2016)

Nina havia percebido que a tarefa que estava sendo proposta ia ao encontro da metodologia que tinha passado a adotar, focada na interpretação geométrica dos conceitos e no envolvimento dos alunos no seu processo de aprendizagem, a qual parecia estar refletindo positivamente na aprendizagem dos alunos.

Reflexão no grupo

Nina propôs que os alunos concretizassem a tarefa aos pares e extra classe. Os alunos entregaram-lhe a tarefa em dois tempos distintos, previamente à data da prova referente ao capítulo de transformações lineares. Entretanto, a avaliação por si da concretização dos alunos ocorreu após a realização da prova, implicando que os alunos não receberam um *feedback* em tempo hábil à realização da mesma. Entretanto, acredita que o contributo da realização do trabalho para a aprendizagem dos alunos tenha sido positivo, tendo em vista o bom aproveitamento na respetiva prova: "Eu não consegui corrigir antes da prova. Mas na prova eles foram tão bem, que eu acho que realmente o trabalho ajudou" (EGC15, 16/12/2016).

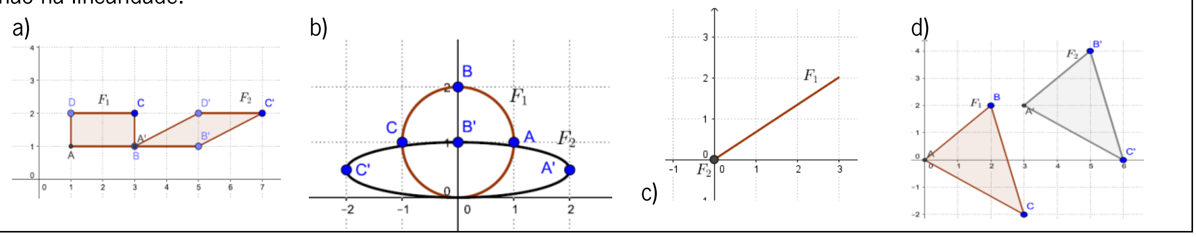
Na reflexão sobre a primeira etapa da tarefa, Nina problematiza a Questão 3, indicando que seus alunos realizaram o processo de resolução ao contrário ao que era esperado pelo grupo ao elaborar a questão, como explica:

> Eu queria estar falando a vocês sobre a questão três. Nós pedimos para verificar se a transformação é linear e em caso positivo determinar a lei, certo? Os meus alunos mostraram que a definição de transformação linear é satisfeita para dois vetores numéricos, pois não tinham a lei ainda, e depois é que encontraram a lei. Mas não deveria ser ao contrário? (...) Eu tive dificuldades para avaliar esta questão, porque não dava para saber se o aluno sabia que tem que usar vetores genéricos para provar que é linear. Estava induzindo-o a usar vetores numéricos. (...) Na correção eu acabei considerando certo para quem fez assim, porque estava induzindo ao erro. (EGC15, 16/12/2016)

Nina reconhece que há um problema de formulação na referida questão, além de mostrar coerência na sua avaliação das resoluções dos alunos, tendo em vista que estes possam ter sido induzidos ao erro, ao verificar a definição de transformação linear para vetores específicos do $\mathbb{R}^2$, ao invés de tomar vetores genéricos deste mesmo espaço vetorial. Após reflexão sobre esta problemática, que também já havia sido identificada por outros professores, e sobre outras que surgiram durante a discussão no grupo, tal questão foi reformulada tanto em relação ao enunciado quanto às figuras, conforme o Quadro 42.

Quadro 42. Questão 3 da tarefa reformulada.

Há alguma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a figura F_1 na figura F_2? Em caso positivo, obtenha $T(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e mostre que T realmente é linear. Em caso negativo, use um contraexemplo para mostrar que não há linearidade.



Dentre as demais questões da primeira etapa, a Questão 2 foi problematizada por outros professores. Em tal questão, que envolvia uma equivalência, os alunos mostraram apenas a implicação e não a recíproca. Na reflexão sobre a sua ação, Nina constata que: “Eu não explorei isso [com os alunos]” (EGC15, 16/12/2016). Assim como os demais professores do grupo, Nina tinha o sentimento de que não havia preparado os alunos para este tipo de questão, visto que não explorara teoremas ou tarefas que envolvessem a demonstração de uma equivalência. Nina não revelou ao grupo se tal fato foi levado em consideração no seu critério de correção, nem se trabalhou a problemática identificada com os alunos, porém “manifestou-se a favor do argumento levantado por Téo de que deveria se preparar melhor os alunos para as tarefas propostas” (NC, dezembro de 2016). A reflexão coletiva no grupo sobre a tarefa ocorreu após o encerramento do semestre letivo, sendo assim as ilações retiradas poderiam ser colocadas em prática apenas no semestre seguinte.

Relativamente à etapa da tarefa mediada pelo GeoGebra, que fora concretizada extra classe, Nina solicitou a apresentação pelos alunos em sala de aula. Na apresentação, Nina percebeu que alguns alunos não tinham entendido as diretrizes da tarefa no que diz respeito a: (i) implementação dinâmica – tendo representado de forma estática as transformações, e (ii) aplicação da transformação sobre um objeto geométrico – tendo aplicado sobre um vetor específico do $\mathbb{R}^3$, como explica:

> Mandei refazer vários porque eles não utilizaram objeto geométrico e não fizeram dinâmico. (EGC15, 16/12/2016)
>
> Quando eu vi os trabalhos no dia da apresentação: 'Gente, não era isso. O que é o dinâmico para vocês? Dinâmico é isso.... Vocês vão ter que refazer e vão ter que entregar novamente'. Daí eles entregaram, mas não teve mais aulas para rediscutir. (EGC16, 15/02/2017)

Nina oportunizou aos alunos que refizessem a tarefa para atender às diretrizes e realizou uma nova avaliação da mesma, entretanto não conseguiu fazer uma nova discussão com os alunos, tendo em vista o encerramento do semestre letivo. A docente sugeriu ao grupo que, para o caso de replicar a tarefa no semestre seguinte, fosse organizado um cronograma tanto de execução da tarefa, como de avaliação conjunta no grupo dos trabalhos, em tempo hábil para dar um feedback aos alunos antes da respetiva avaliação.

> Sobre este trabalho, eu acho que ficou meio tumultuado, a apresentação ficou no final, no penúltimo dia de aula. Teve erros, veja que este [erro] eu nem vi. Muitos [alunos] tiveram que refazer e não deu tempo para rever com detalhes. Talvez devêssemos mudar essas datas para o próximo semestre, preferencialmente antes da prova. (EGC15, 16/12/2016)
>
> Não deu tempo de discutirmos [os trabalhos no grupo]. Eu fui ver o trabalho de vocês depois dos meus apresentarem. Então eu penso que para uma próxima vez a gente possa ver o que cada professor recebeu, como é que ficou o trabalho de cada um, qual foi o melhor, qual foi o pior, o que pode melhorar. Entende? Eu acho que faltou isso no grupo, uma avaliação geral dos trabalhos, antes da apresentação. Então, por exemplo, se vocês tivessem trocado alguma coisa, eu poderia ter acrescentado para os meus alunos. (EGC16, 15/02/2017)

Na perspetiva de Nina, faltou uma discussão conjunta no grupo dos trabalhos dos alunos nesta 2.ª etapa, previamente a apresentação dos alunos, no sentido de estabelecer um critério de avaliação, de discutir o que poderia ser questionado aos alunos na apresentação, bem como identificar erros que poderiam ter passado despercebidos pelos professores. Tal avaliação conjunta dos trabalhos ocorreu, porém foi após o encerramento do semestre, onde inclusive Nina percebe um erro num dos trabalhos de seus alunos que lhe passara despercebido. Nina também constata a importância de preparar os alunos para a tarefa, seja apresentando um modelo sobre o que se espera que seja contemplado na tarefa, seja construindo um exemplo com os alunos:

> Agora como temos os trabalhos do semestre passado, talvez fosse interessante escolher um que atendeu tudo o que pedimos e levar para eles verem o que é que a gente quer. (...) Seria legal a gente trabalhar uma aula com eles isso, talvez construir um exemplo simples para depois pedir para eles fazerem. (EGC16, 15/02/2017)

Ao fazer uma avaliação geral sobre a experiência com a tarefa, constata que: "Na minha visão o trabalho obrigou eles a estudarem antecipadamente, e não apenas na véspera da prova, como é comum acontecer" (EGC15, 16/12/2016). Nina indicia que com a tarefa os alunos se envolveram mais com a disciplina, saindo da sua zona de conforto, ao terem que estudar antecipadamente à prova e ao ter que desenvolver um aplicativo em um software que não tinham tanta familiaridade. Nina reconhece também a importância de se trabalhar com as diferentes representações no ensino das transformações lineares, no sentido de dar significado a elas:

> Acho que foi bem importante fazer essa transição do algébrico para o geométrico e vice-versa, para eles enxergarem o que realmente é uma transformação linear. Antes ficávamos muito no analítico. Falávamos de reflexão através do plano, rotação, mas eles não viam essas coisas, só viam a lei, mas não viam o que significava. E acho que eu aprendi também bastante com isso, pois nunca tinha explorado esse conteúdo da forma como exploramos no trabalho. (EGC15, 16/12/2016).

Por fim, Nina destaca que as discussões sobre a tarefa, desde a planificação, concretização e reflexão, lhe permitiram também entender melhor o significado das transformações lineares. Cabe recordar que Nina havia indicado, no início do trabalho no grupo, que não visualizava a importância das transformações lineares especiais, como as envolvidas na tarefa, e acabava explorando esse conteúdo apenas pelo viés analítico.

No primeiro semestre de 2007, na discussão sobre propor novamente a tarefa de transformações lineares do semestre anterior, Nina mostrou-se favorável, levantando hipóteses sobre a possibilidade de resolver a 1.ª etapa em sala de aula e sobre o que fazer para minimizar as supostas cópias que podem ter ocorrido entre os alunos na etapa mediada pelo GeoGebra:

> Eu gostaria de propor novamente esse trabalho. O que a gente poderia fazer é propor a parte escrita dentro de sala de aula. Mas tem que ver como vai estar o nosso tempo [cronograma]. Você fez assim né, Téo? (...) O que vocês acharam, teve muita cópia entre

eles? (...) Dá para começarem em sala de aula e levar para terminar em casa, porque aí eles não vão pegar trabalho de outro. Já começaram mesmo, porque eles vão pegar de outro? (...) O meu teve cópia na parte de 3D, na 2D não, mas na 3D a maioria fez o cubo igualzinho. Daí só mudava a matriz. Não se prestaram nem para alterar a cor, mudar a interface. Teve trabalho bom? Teve. Mas teve aqueles espertinhos que pegaram o mesmo. (...) Então, como estamos com poucos alunos, podemos pensar assim: tu vais fazer o cisalhamento com cubo, tu vai fazer cisalhamento com uma esfera, tu vai fazer uma rotação com uma pirâmide, talvez dizer o elemento geométrico para ele, para ele ter que quebrar a cabeça nisso. (EGC24, 05/05/2017)

No grupo analisamos a viabilidade de realizar a primeira etapa em sala de aula, e constatamos que não seria possível, pois o cronograma da disciplina estava comprometido devido ao tempo que fora despendido com as novas tarefas desenvolvidas pelo grupo e que já haviam sido realizadas em sala de aula, como, por exemplo, as tarefas sobre a introdução de espaços vetoriais.

Ao revisitarmos as questões da primeira etapa, para além da Questão 3, que já fora redefinida no momento da reflexão sobre a tarefa no semestre anterior, a Questão 1 foi reformulada por Téo, e Nina sugeriu que a Questão 2, sobre a equivalência (Quadro 40), fosse retirada do conjunto de questões, pois tal questão estava fora do contexto geométrico da tarefa. A transcrição a seguir ilustra a posição de Nina na discussão:

Nina: Eu retiraria essa questão. Eu não vi impacto nenhum nessa questão.
Bruna: Pode retirar. Não teve impacto.
Nina: Eu acho que foge do contexto essa daí.
Téo: Essa é uma questão que dá para discutir em sala de aula com eles, quando explorar a definição de transformação linear.
Nina: Ou colocar na lista de exercícios. (EGC24, 05/05/2017)

O grupo decidiu por manter a etapa mediada pelo GeoGebra tal como no semestre 2016/02. Cabe resgatar que Nina foi um dos elementos do grupo que manifestou desconforto com esta etapa, pelo facto de não dominar o GeoGebra e assim não conseguir auxiliar os alunos. Sendo assim, foi dedicado um dos encontros do grupo para os professores executarem a tarefa que estava sendo proposta aos alunos. Neste momento, os professores mais experientes com o GeoGebra auxiliaram os demais. Nina manifestou que esta e outras atitudes em que o grupo manifestou apoio entre si para com o uso do GeoGebra foram importantes para a sua evolução em relação ao semestre anterior, tanto para o seu uso em sala de aula como para dar suporte aos alunos na execução da tarefa de transformações lineares.

Eu estou conseguindo mexer mais agora [sobre o GeoGebra]. Aquele roteiro que a Bruna fez para a construção da letra ajudou bastante. (...) A gente parar aqui e mexer juntos, fazer a questão do trabalho, foi [uma atitude] bem bacana. (...) Sim, consigo mexer, uma coisa básica, mas estou conseguindo, semestre passado eu tentei, mas não consegui. Tenho que treinar mais, mas aos poucos estou evoluindo. (...) Eu tenho explorado o que está pronto, mostrando o que é o vetor, o que é transformação do vetor, mudando os parâmetros para ver o que acontece na transformação. Antes eu não me sentia segura em explorar nem o que estava pronto. (...) Agora já consegui dar umas dicas aos alunos, 'olha, coloca um botão aqui, coloca a matriz assim...', principalmente a parte de matriz, não sabia como usar aquela planilha [para digitar uma matriz no GeoGebra]. (EGC28, 02/06/2017)

No semestre 2017/01, a correção/análise das resoluções da tarefa mediada pelo software foi realizada em conjunto num dos encontros do grupo. Tal atitude surgiu em resposta à problematização de Nina no semestre anterior em relação à falta de uma discussão conjunta no grupo e à falta de uma definição de critérios de avaliação, previamente à apresentação dos trabalhos dos seus alunos em sala de aula. Na análise conjunta foi possível estabelecer um critério comum para avaliação dos trabalhos dos alunos, bem como um professor ajudar o outro a perceber alguns erros e/ou verificar se as diretrizes do trabalho estavam ou não sendo atendidas pelos alunos. A transcrição seguinte ilustra a análise da resolução da tarefa de um aluno de Nina:

Nina: Olha esse aqui. Reflexão. Não tem nada de reflexão aqui.
Téo: Tem.
Investigadora: Ah não, esse está funcionando Nina.
Nina: Reflexão através do plano?
Téo: Eu só quero saber o que ele vai fazer. Ali no [vértice] D, muda o zero para outro valor.
Nina: Aonde? Aqui?
Téo: Muda o D. O problema é que agora ele não fez nenhuma matriz, por isso que não está dando certo... porque ele está usando a ferramenta certa.
Nina: Pois é, eu não estou conseguindo ver a matriz.
Investigadora: Ah, ele está usando a ferramenta pronta do GeoGebra.
Téo: Aí não vai dar.
Investigadora: Então Nina, eles têm que apresentar a matriz da transformação. E tem que estar vinculada ao objeto, ele usou a ferramenta de reflexão, que já tem pronta.
Nina: E cadê a matriz?
Téo: Aqui embaixo não tem nenhuma matriz escondida?
Nina: Deixa-me ver.
Téo: Não tem não. Usou ferramenta pronta. Muda um vértice ali Nina.
Nina: Aqui?
Investigadora: Está vendo, deforma a figura. Não está vinculado.
Nina: Então está certo, né?
Téo: Quase certo. Tem que apresentar a matriz e deixar o objeto vinculado a matriz. (EGC29, 09/06/2017)

A resolução em análise relaciona-se a uma transformação linear no $\mathbb{R}^3$ definida por uma reflexão através de um plano. Ao verificar a resolução, a primeira reação de Nina foi pensar que o aluno não tinha feito o que era solicitado na tarefa, tendo em vista que ele não tinha conectado dinamicamente a representação matricial da transformação com a representação dinâmica. Entretanto, recebe o apoio dos colegas tanto para perceber que a resolução atendia parcialmente as diretrizes da tarefa quanto para identificar quais eram os pontos problemáticos.

Ao discutirmos diferentes possibilidades sobre como dar o *feedback* desta etapa da tarefa aos alunos, Nina afirmou que iria solicitar para refazerem a tarefa, para uma posterior socialização em sala de aula por meio da apresentação dos trabalhos pelos alunos, em pares.

> Vou pedir para refazer. Nossa! Este semestre os trabalhos estão muito ruins, se eu for dar nota nisso daqui [mostrando um trabalho], o que eu vou dar? Eu acho que tem que refazer todos os meus. (...) Só 14 alunos me entregaram, de 21. (...) Fizeram em duplas. (...) Aí para quem não entregou eu vou dar mais uma chance para entregar. Já que tem que refazer, vou fazer isso, dar uma chance. (...) Tito, eu vou pegar esse teu trabalho aí para levar para os alunos para dizer o que eu quero. (...) Vou pedir para refazerem antes da apresentação. Vou chamar um por um e dizer o que está bom e o que não está. (...) E eu acho legal dar esse retorno para eles, senão só ganham nota e não sabem nem o porquê da nota. (EGC29, 09/06/2017)

A discussão coletiva sobre os trabalhos dos alunos pode ser um meio para os alunos conhecerem diferentes recursos do GeoGebra que os colegas possam ter utilizado, para além de terem a oportunidade de aprenderem com os erros uns dos outros. Quando Nina refere que vai dar uma oportunidade àqueles alunos (33% dos alunos) que não concretizaram a tarefa, para fazerem num novo prazo, revela a sua preocupação com o processo de aprendizagem com o coletivo da turma.

Importa ressaltar que, apesar da crítica de Nina em relação ao cronograma apertado no semestre anterior para a execução da tarefa e do *feedback* em sala de aula da 2.ª etapa, mesmo com um cronograma mais flexível neste semestre, tal *feedback* da tarefa como um todo só ocorreu após a respetiva avaliação. Ao contrário da maioria dos professores do grupo, Nina aplicou a respetiva prova, sem ainda ter dado um *feedback* da primeira etapa da tarefa, como revela: "Ontem eu fiz prova e só dois [alunos] que não fizeram. (...) É eu nem corrigi ainda, mas eu tenho do semestre passado [sobre o gabarito da 1.ª etapa da tarefa], não mudou muita coisa para este semestre" (EGC29, 09/06/2017). O facto de ela não ter dado um *feedback* a tempo, não significa que tenha tido uma implicação negativa no aproveitamento dos alunos na prova, pois estes podem ter sanado suas dúvidas sobre a tarefa e sobre o conteúdo em si a tempo da prova. Para além disso, a tarefa envolvia uma pequena parcela do conteúdo de transformações lineares que fora contemplado na prova. Mesmo que ainda restassem dúvidas, cabe ressaltar que o processo de aprendizagem em Álgebra Linear é contínuo, visto que os tópicos estão totalmente interligados. Inclusive, Nina refere que, para introduzir o capítulo subsequente, de autovalores e autovetores, procurou fazer a conexão com o capítulo anterior, resgatando a interpretação geométrica de uma das transformações lineares abordada na tarefa [cisalhamento]: "Eu peguei um hexágono e apliquei um cisalhamento. Fiz no quadro mesmo. Fui pegando uns vetores, testando e observando aqueles que mantêm a direção, aqueles que mudam a direção [sobre autovalores e autovetores]" (EGC29, 09/06/2017).

8.4.2.2. Trabalho sobre 'Interpretação geométrica da multiplicação de matrizes'

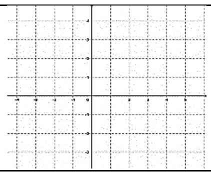
Esta tarefa foi composta por duas etapas (Quadro 43). A 1.ª etapa, realizada com recurso ao papel e lápis, tinha por objetivo propiciar a transição entre os registros geométrico e algébrico de uma matriz, aferindo o efeito geométrico da multiplicação de matrizes.

Quadro 43. Interpretação geométrica do produto de matrizes com recurso ao papel e lápis e ao GeoGebra, respetivamente.

Parte I (Com recurso ao papel e lápis)

No contexto da Geometria, uma matriz pode representar uma figura geométrica. No plano, cada um dos pontos de coordenadas (x, y) será uma coluna de uma matriz que os representa. Aliado a situações de computação gráfica, é possível aferir qual o efeito da multiplicação dessa matriz por outra predefinida.

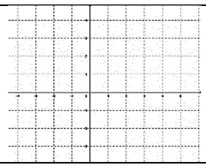
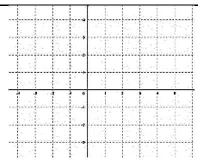
1) Escolha convenientemente as coordenadas dos vértices da letra maiúscula da inicial do seu nome e represente-os numa matriz A.

Representação geométrica	Representação matricial
	

2) Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.1 Qual o efeito gráfico provocado pela multiplicação da matriz D pela matriz A?

2.2 Qual o efeito gráfico provocado pela multiplicação da matriz E pela matriz A?

Representação geométrica: DA	Representação geométrica: EA
	

Parte II (No ambiente computacional)

1) Represente matricialmente e geometricamente a primeira letra do seu nome no GeoGebra.

2) Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{G} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Represente geometricamente e matricialmente no GeoGebra os produtos: DA, EA, FA e GA.

A 2.ª etapa, com recurso ao GeoGebra, visava implementar essas representações propiciando aos alunos a visualização dinâmica dos efeitos das transformações produzidas pelas multiplicações de matrizes realizadas.

Preparação da tarefa

No semestre 2016/02, Bruna havia partilhado com o grupo uma tarefa que havia proposto aos seus alunos envolvendo a interpretação geométrica da multiplicação de matrizes. No semestre 2017/01, de seguida à reflexão no grupo sobre a concretização da tarefa 'Pré-teste sobre matrizes', que explorara as operações com matrizes, Nina sugere que o grupo invista numa proposta sobre a tarefa partilhada por Bruna.

> Eu achei legal essa ideia da letra. A gente poderia montar alguma coisa em cima disso para eles fazerem a letra, nem que seja no papel. (...) Essa ideia que a Bruna trabalhou no semestre passado, ela pediu para cada um fazer com a primeira letra do nome, e colocar numa matriz as coordenadas [dos vértices da letra poligonal] e depois multiplicar aqui pela matriz [matriz de um cisalhamento], aí eles viram que deu esse T itálico. (EGC17, 24/02/2017)

A ideia de Nina incide sobre envolver os alunos na resolução de um problema concreto, de seguida à exploração das operações matriciais, para dar sentido à multiplicação de matrizes. Todos concordaram com a ideia, sendo que a proposta foi sendo amadurecida no seio do grupo a partir das intervenções de seus colaboradores, como ilustra o seguinte diálogo:

Investigadora:	Eu acho que a gente poderia pedir para eles fazerem com lápis e papel, aí eles entregam e a gente pode pedir para eles implementarem no GeoGebra.
Tito:	Exatamente.
Bruna:	Cada um apresenta o seu nome em sala de aula, e pede para eles apresentarem o seu depois.
Nina:	Eu acho legal, cada um com a sua letra.
Tito:	Utiliza lápis e papel, para ser uma atividade rápida. Aí depois implementa com outras matrizes.
Téo:	Isso, dá para eles quatro matrizes. Duas para aula, duas para casa.
Nina:	Não, se for para implementar, a gente pode pedir várias e várias matrizes.
Tito:	Exatamente, aí já pergunta qual efeito que teve em cada uma das matrizes [nas diferentes multiplicações].
Nina:	E eu acho legal porque a gente já está introduzindo transformações [lineares]. (EGC17, 24/02/2017)

A ideia partilhada por Bruna compreendia apenas a resolução da tarefa, com recurso ao papel e lápis, que consistia na multiplicação de uma matriz que continha em suas colunas os vértices de uma letra poligonal, por uma dada matriz de ordem 2×2. Na discussão com os alunos, Bruna mostrou aos alunos no GeoGebra qual seria o efeito geométrico da referida multiplicação. No grupo surgiu a ideia de propor a tarefa em duas etapas, uma com recurso ao papel e lápis e outra com recurso ao GeoGebra. Nina defende que na etapa do GeoGebra sejam solicitadas outras multiplicações matriciais, envolvendo a matriz da letra poligonal, que provoquem diferentes efeitos sobre a letra, de modo a fazer posteriormente uma relação com transformações lineares.

A decisão sobre se a tarefa seria realizada dentro ou fora da sala de aula era um elemento importante na definição das questões, tendo em vista o tempo disponível para a realização da mesma. Nina defende que seja realizada extra classe, uma vez que o conteúdo matemático envolvido na tarefa já fora amplamente abordado em sala de aula.

> Tito: Eu acho que deveria ser feito em sala de aula.
>
> Nina: Mas Tito, tu vais perder tempo em sala de aula numa coisa que tu já deste. Já deste um pré-teste, eles já multiplicaram matrizes. Tu explicaste como multiplica matrizes, aí tu vais ficar batendo nesta tecla com a dinâmica em sala de aula? (...) Eu acho que agora é um momento de eles verem como é aplicado a multiplicação de matrizes e [ter a noção de] que mais para frente eles vão utilizar isso de novo [em transformações lineares]. (EGC17, 24/02/2017)

Após a discussão no grupo decidiu-se por propor extra classe. Nina defende também que a tarefa integre a componente avaliativa da disciplina, de modo a valorizar o trabalho dos alunos, para além deles a tratarem com maior seriedade.

> O que tem que fazer é: 'Pessoal, vocês vão ter que trazer para a próxima aula, mas vocês vão ter que me entregar'. Agora se for dizer que é só para discutir em sala de aula, alguns não vão fazer. Tem que te entregar. (...) Eu, sinceramente, gostaria que valesse alguma coisa. Eles vão ter trabalho para fazer, principalmente no GeoGebra, que a maioria desconhece. Não sei vocês, mas penso em acrescentar pelo menos um ponto na prova. (...) A primeira parte, junto com a segunda. Vamos considerar um trabalho valendo de 0 a 10? Eu acho que dar nota os incentiva a fazer. (EGC17, 24/02/2017)

O facto de tornar avaliativa a tarefa, foi outro elemento que contribuiu para a construção das questões, complexidade e nível de exigência da tarefa.

No decorrer da planificação, Nina apresenta as suas posições, que incidem, sobretudo, nos aspetos mais didáticos e na estratégia de como aplicar a tarefa, deixando a cargo de outros colegas a redação das questões. Relativamente à 1.ª etapa da tarefa, decidiu-se no grupo que cada professor deveria mostrar por meio de um exemplo como fazer a transição da representação geométrica da letra poligonal para a representação algébrica matricial, como ilustra o diálogo a seguir:

Bruna: Essa primeira parte é para eles fazerem em casa e trazerem na próxima aula, que aí a gente vai ver o que eles fizeram.
Lisa: Antes disso a gente dá o exemplo para eles?
Tito: Explica no quadro. Tem que explicar como você desenha a letra.
Nina: Só vou mostrar como é que é pego as coordenadas. A multiplicação eu não vou fazer porque já ensinei isso.
Bruna: É só para mostrar a eles qual é a posição do x e y de cada ponto na matriz.
Nina: Tem que tomar cuidado que se desenhar a letra assim [mostrando a letra I, com um vértice na origem e apoiada nos eixos cartesianos], eles vão trabalhar assim também.
Bruna: Mas tu poderias dizer: 'Eu posso construir o I assim, ou o I assim [mostrando diferentes formas]. É uma escolha'. (EGC17, 24/02/2017)

Nina chama a atenção do grupo para exemplificar a representação geométrica da letra poligonal em diferentes perspetivas, para evitar que os alunos a representem de uma única forma, seguindo o modelo do professor. As diferentes perspetivas sobre a representação de uma mesma letra poderiam enriquecer a discussão sobre a tarefa em sala de aula.

Ao referir como faria a discussão sobre a concretização da 1.ª etapa da tarefa e como introduziria a 2.ª etapa, a professora infere que iria fazer uma abordagem centrada em si, mostrando no GeoGebra qual seria o feito sobre determinada letra a partir da multiplicação das duas matrizes que seriam dadas (matrizes que causam, respetivamente, cisalhamento e dilatação na letra) pela matriz que contém os vértices da letra. De seguida, indicaria que a 2.ª etapa envolveria a implementação no GeoGebra semelhante à que acabara de mostrar.

> Eu tinha pensado em não resolver com eles, só recolher. (...) Poderia mostrar a resolução no GeoGebra. Falar assim: 'agora vocês vão fazer computacionalmente e olha o que vai ter que acontecer'. Eles já sabem o que vai acontecer com as duas primeiras multiplicações. E se não visualizaram ainda, aí eles vão conseguir ver. (...) É para eles trazerem feito, mas não sei se vão acertar. Eu tinha pensado em fazer aquele T que a Bruna já tem implementado. 'Vocês chegaram nessa letra, clica aqui, foi a multiplicação da matriz que deu isso. E agora vocês vão ter que fazer isso com a letra de vocês e apresentar o efeito sobre a letra para cada uma dessas quatro multiplicações'. Mas eu não vou fazer no braço porque eu vou perder muito tempo. (EGC18, 03/03/2017)

Nina revela a sua preocupação com o cronograma da disciplina, uma vez que já dedicara uma das aulas sobre matrizes para a realização da tarefa 'Pré-teste sobre matrizes' pelos alunos. Ao ouvir a perspetiva de outros colegas sobre como retomar a tarefa, valorizando a participação dos alunos e focando nas transformações geométricas ocorridas sobre a letra, Nina altera a sua posição quanto à abordagem a ser feita, seguindo as sugestões de alguns colegas do grupo.

Lisa: Uma ideia que talvez a gente pode fazer, é solicitar para um dos alunos vá ao quadro representar o que aconteceu.
Nina: Só que tu vais perder uma aula inteira. [Tito concorda]
Bruna: Vamos perder ou vamos ganhar tempo? Eu acho que vai minimizar nosso tempo depois em transformações [lineares].
Bruna: Eu pretendo fazer isso para resgatar. Pedir para um voluntário ir ao quadro e discutir com eles, antes de corrigir. Foi isso que vocês encontraram? Vocês chegaram a essa solução? Questioná-los para ver se teve alguém que não conseguiu observar. Depois a gente vai ver o que eles escreveram no material entregue. (...) Depois eu penso em dizer assim: 'eu vou apresentar aqui para vocês como que isso ficaria usando tecnologia, e a 2.ª parte do trabalho é vocês implementarem'.
Nina: É uma boa ideia.
Investigadora: Eu acho que ao ir ao quadro, ele não precisa fazer a multiplicação matricial. Ele só pode dizer qual foi a matriz que ele retirou com os pontos e mostrar a figura resultante após a multiplicação.
Nina: Está, vamos chamar um voluntário para fazer uma multiplicação, o cisalhamento.
Lisa: E a dilatação também?
Bruna: Dá para mostrar no GeoGebra.
Nina: Na outra dá para dizer: 'e o que aconteceu na 2.ª [multiplicação]'? Aí mostra no GeoGebra qual é o efeito. (EGC18, 03/03/2017)

Gerou-se no grupo a hipótese de que a partir da tarefa proposta e da discussão realizada com os alunos, poder-se-ia 'ganhar tempo' no ensino de transformações lineares, uma vez que os alunos já teriam a noção da interpretação geométrica de algumas delas, bem como da sua representação matricial.

Relativamente à 2.ª etapa da tarefa, mediada pelo GeoGebra, decidiu-se por deixar os alunos livres para pesquisarem as ferramentas disponíveis no software, não fazendo exigências quanto ao uso das funções dinâmicas do software. Para os alunos terem uma referência, sugeriu-se que cada professor mostrasse um exemplo construído no GeoGebra, para 'aguçar' a curiosidade dos alunos sobre como fazer a implementação, e fornecesse um tutorial sobre matrizes no GeoGebra. Na discussão sobre como dar o feedback desta etapa da tarefa, Nina corroborou com a ideia de primeiramente deixar os alunos terem o contacto com o software para então discutir as suas potencialidades a partir da concretização da tarefa:

> E daí como que a gente retoma? Eles vão entregar os arquivos. Mas daí a gente só avalia ou a gente faz alguma análise? (...) Deixamos para ver o que vem? (...) Vai que tenha um que faz dinâmico, coisa mais linda. Aí a gente pode até pedir para esse ir lá na frente e dar uma orientação de como que faz. (EGC18, 03/03/2017)

Na discussão sobre as diferentes perspetivas sobre as quais os alunos poderiam apresentar a tarefa, Nina apresentou uma série de questões aos colegas que tinham mais domínio com o software, para se inteirar sobre as suas ferramentas para a execução da tarefa.

> Quando vocês falam que a matriz tem que estar vinculada à letra, o 'vinculado', o que é? Ele digita a matriz e aparece a letra? Pode não acontecer isso? (...) Tu fazes o produto matricial, e depois vai lá numa função, alguma coisa assim e manda gerar a letra? (...) Na parte geométrica, coloco os pontinhos e já vai saindo a matriz? Como é que funciona? (...) Eu entro com a matriz a partir da planilha. Deixa-me ver, como é que tu fazes Téo? (...) Bruna, você vai fazer um passo a passo para nós sobre como fazer no GeoGebra? Quero implementar a minha letra, quero ver como faz isso aí direitinho. (EGC17, 24/02/2017)

Nina pondera implementar no GeoGebra um exemplo para se inteirar das ferramentas necessárias à concretização da tarefa, e conta com o apoio de Bruna para esse efeito.

Reflexão no grupo

A reflexão no grupo sobre esta tarefa aconteceu em dois momentos diferentes. O 1.º momento ocorreu no intervalo em que as etapas foram distribuídas e concretizadas. Entretanto, como Nina não fez a correção dos trabalhos dos alunos de seguida à concretização de cada etapa, os relatos que inicialmente trouxe ao grupo se restringiam à forma como operacionalizou cada uma das etapas. Nina solicitou que os alunos resolvessem a tarefa individualmente, sendo que ao distribuir a 1.ª etapa instruiu-os sobre como construir tanto a letra poligonal como a sua representação matricial, estabelecendo que deveriam concretizá-la até a aula seguinte.

> Eu dei a folhinha da primeira parte... Nossa! Já queriam fazer na hora! 'Ah, essa multiplicação não vai dar em nada. Não vai dar em nada? Não, eu já vi, já vi'. (...) 'Nossa professora, estou com dificuldade em fazer a minha letra, o B...'. (...) Pedi para fazerem em casa e foi individual. (...) Eu expliquei no quadro, dei como exemplo a letra K e comecei a montar a matriz, para eles verem que tinha que ser uma matriz de 2 linhas e n colunas, dependendo da quantidade de vértices. (...) Eu falei para eles: 'se alguém for fazer a letra I, não quero só um risquinho, tem que ser um polígono, mas não quero apenas um retângulo, usem a criatividade de vocês'. (EGC18, 03/03/2017)

Nina tinha o sentimento de que os alunos se sentiram motivados pela tarefa. Ao entregarem a 1.ª etapa, a docente procurou oralmente que os alunos verbalizassem o efeito geométrico de cada multiplicação matricial sobre a letra original e utilizou o GeoGebra para mediar a discussão. De seguida, distribuiu a 2.ª etapa, sugerindo-lhes o exemplo que utilizou no GeoGebra como um modelo para terem como referência.

> Eu ainda não corrigi nada, mas pelas respostas que eles me davam quando a gente discutiu a 1.ª parte, tive a impressão que fizeram tudo certo. Mas tenho que ver no papel. (...) Eu levei o computador para a sala de aula e mostrei a letra T, daquele arquivo que a Bruna fez no GeoGebra, o do cisalhamento. Então usei para discutir o que eles tinham feito no papel. Daí, como ela fez com os botões para aparecer a letra inicial e a letra cisalhada, eu falei que poderiam fazer assim, mas que não era uma obrigação. Deixei-os livres. (EGC20, 24/03/2017)

Num 2.º momento, em que o grupo decidiu escrever uma comunicação científica sobre a tarefa, é que ocorreu uma reflexão mais concreta e conjunta, pois foi realizada uma análise individualizada e criteriosa sobre as resoluções dos alunos. Apesar de ainda não ter realizado a correção da tarefa, mesmo já transcorrido 15 dias da devolutiva pelos alunos da 2.ª etapa, Nina sentiu-se pressionada a fazê-la para contribuir com a análise no grupo. Nesta análise, corroborando com a maioria dos integrantes do grupo, Nina identificou que as questões 2.1 e 2.2 (Quadro 43) não ficaram claras, gerando a interpretação equivocada de que apenas os registros gráfico e matricial eram suficientes para descrever o efeito de cada multiplicação sobre a letra original:

> Nos meus também teve vários que não justificaram. E os que responderam, a maioria foi bem sucinto. Escreveram: 'inclinou, dobrou o tamanho'. (...) Teve um que colocou que preservou a área. (...) Então, para mim era óbvio que tinha que explicar, para eles não foi óbvio, então isso eu quero discutir com eles, que tinha uma pergunta, e para uma pergunta sempre tem que ter uma resposta. (...) Mas a questão ficou com problema de escrita. Acho que como vocês colocaram ali no artigo 'descreva e represente geometricamente', resolve o problema. (EGC22, 07/04/2017)

Esperava-se que os alunos descrevessem usando a linguagem natural qual seria o efeito de cada multiplicação sobre a letra. Nina apercebe-se que é necessário reformular o enunciado para uma próxima vez que propor a tarefa. Prevendo a necessidade de realizar demonstrações e/ou justificativas teóricas no decorrer da disciplina, refere ainda que pretende discutir com os alunos a importância de responder explicitamente os questionamentos realizados, para que nenhuma ideia fique subentendida.

Relativamente à etapa mediada pelo GeoGebra, Nina refere que os alunos não apresentaram dificuldades. Entretanto, como era para alguns o primeiro contacto com o software, a maioria dos alunos apresentou as representações geométrica e algébrica de forma estática.

> Ninguém me procurou para tirar dúvida sobre o GeoGebra. Algum aluno meu procurou vocês? (...) A maioria fez assim, a letra numa janela, aí abre nova janela para cada multiplicação. Tem uns que fizeram tudo no mesmo arquivo, bem difícil de identificar as figuras. (...) Teve os que não usaram polígono para construir a letra, fizeram por segmento, daí não apagaram o rótulo dos segmentos, ficou uma bagunça. (...) Eu tenho dois que fizeram com botãozinho para aparecer e desaparecer a figura, tudo certinho. (EGC22, 07/04/2017)

No grupo concluímos que deveríamos, aos poucos, trabalhar com os alunos no sentido de evoluírem seu conhecimento em relação às ferramentas do GeoGebra e prepará-los para a tarefa sobre transformações lineares (discutida na Subsecção 8.4.2.1), que seria proposta no decorrer do semestre. Para isso, levantou-se a possibilidade de cada professor propor a resolução da tarefa conjunta com os alunos, mostrando-lhes as ferramentas necessárias para a evolução da tarefa. Nina argumentou que "estou com um problema de tempo na disciplina, teria que ser numa aula extra. Teria que ver se eles têm um horário" (EGC20, 24/03/2017). No intuito de auxiliar, como eu [investigadora] já havia marcado uma aula extra com os meus alunos para explorar a tarefa no GeoGebra, estendi o convite aos alunos de Nina para participarem, mas nenhum compareceu.

8.4.2.3. Trabalho sobre 'Criptografia'

O trabalho intitulado 'Aplicação de matrizes à Criptografia' foi proposto no semestre 2017/01 e tinha por objetivo a contextualização da multiplicação de matrizes e da matriz inversa. O Trabalho era constituído por duas tarefas que envolviam a codificação e decodificação de mensagens (Quadro 44).

Quadro 44. Tarefa elaborada no grupo envolvendo a aplicação de matrizes à Criptografia.

Aplicação de matrizes à Criptografia

A criptografia é um ramo da Matemática relacionado com a codificação e decodificação de mensagens. Literalmente, a criptografia é a técnica em que a informação transmitida pode ser transformada da sua forma original para outra impossível de ser identificada; a intenção é que apenas o destinatário certo e com a chave específica possa ter acesso àquela informação.

Tarefa 1: Vamos entender como funciona o processo de codificação de uma mensagem, para isso ajude Alice a enviar uma mensagem codificada para Bob.

- Para codificar a mensagem, Alice usará a relação entre as letras e números conforme a Tabela 1:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0	

Tabela 1: relação entre letras e números

- A chave que Alice usa para criptografar a mensagem é $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- As letras da frase a codificar, incluindo os espaços, serão representadas numa matriz de 3 linhas, atribuindo valores numéricos aos caracteres em conformidade com a relação apresentada na Tabela 1. Se as linhas ficarem incompletas, insira o caractere "-". Por exemplo, para codificar ADORO ALGEBRA LINEAR, Alice procedeu do seguinte modo:

A	**D**	**O**	**R**	**O**	**-**	**A**
1	**4**	**15**	**18**	**15**	**0**	**1**
L	**G**	**E**	**B**	**R**	**A**	**-**
12	**7**	**5**	**2**	**18**	**1**	**0**
L	**I**	**N**	**E**	**A**	**R**	**-**
12	**9**	**14**	**5**	**1**	**18**	**0**

$$\Rightarrow \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 15 & 18 & 15 & 0 & 1 \\ 12 & 7 & 5 & 2 & 18 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 14 & 5 & 1 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

- Alice deseja enviar a mensagem: A DÚVIDA É O PRINCÍPIO DA SABEDORIA.

1. Faça a equivalência entre letras e números da mensagem, incluindo os espaços.
2. Represente a mensagem na matriz M.
3. Codifique a mensagem fazendo $M_c = C \times M$. (M_cé a matriz com a mensagem criptografada).
4. Para escrever a mensagem na forma de texto, encontre o equivalente alfabético para cada entrada das linhas da matriz M_c. No entanto, poderá acontecer de alguns valores da tabela não terem o equivalente alfabético por serem maiores do que 26. Então proceda como segue:

- Sempre que ocorrer um número inteiro maior do que 27 ($\mathrm{a_{ij}} > 27$, 27 é o número de caracteres da Tabela 1), ele será substituído pelo resto (r) da divisão por 27. Caso houver valores negativos ($\mathrm{a_{ij}} < 0$), faça $\mathrm{a_{ij}} = 27 - \mathrm{r}$, onde r é o resto da divisão $\frac{|\mathrm{a_{ij}}|}{27}$.

Por exemplo, se $\mathrm{a_{ij}} = -41$, então fazendo $41 \div 27$ obtemos o resto $\mathrm{r} = 14$, assim a nova entrada da matriz que substituirá $\mathrm{a_{ij}} = -41$ é $\mathrm{m} - \mathrm{r} = 27 - 14 = 13$ que equivale a letra M.

Para facilitar a equivalência, apresentamos a tabela de conversão para alguns valores:

-53	-52	-51	-50	-49	-48	-47	-46	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39	-38	-37	-36	-35	-34	-33	-32	-31	-30	-29	-28	-27
-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81

Tarefa 2: Descodifique as mensagens que Alice enviou para Bob (cada bloco de caracteres representa uma linha da matriz com a mensagem codificada).

a. WASEIDIICRGAN NVEJYYWIOCLBW ASHBV_W_CLTYS
b. FIXTGF_U MNRYSF_K FYPSAG_A
c. ERFAWHTTRECJ SZVFSGUFKEXF DZMDUPDAQECI
d. DXKWRIBZXP AXIUVYQBXM SIVZGCKTFQ
e. KBAWHWGKPP CQBJMBLQLM _KJQGJTKFQ
f. BKJSETQRAT HCDXFYEMOU DZBRUKNXZR
g. BIWIGQCBCV KRC_UNWFDB GIWVSDPFAD
h. LAIBXDKWIFAFJ DJNNLFAMIFFXB XAYYFMCD_GQUY
i. DTDBLPJUHHFEO JCFLRQKY_ITC_ ZVLRVAGMTEEEI
j. TDRJFXLOPN RKYTJUWOLJ SYOPVOYOBQ

Preparação da tarefa

A elaboração da tarefa sobre Criptografia foi motivada pelo desejo do grupo de trabalhar com problemas contextualizados e assim despertar os alunos para a aplicabilidade da Álgebra Linear. Como já fora detalhado no estudo de caso de Téo, a tarefa foi construída a partir de um problema que apresentei ao grupo, o qual adaptei de um livro de Álgebra Linear. Tal problema envolvia a codificação de uma mensagem e a posterior decodificação de uma outra mensagem. Ao apresentar o problema ao grupo, surgiram uma série de questões sobre o método de codificar/decodificar mensagens. Então, fizemos um estudo conjunto sobre tal método para então partirmos para a discussão/definição da tarefa. Neste processo de definição, a ideia apresentada por Nina consistia em primeiramente resolver um exemplo em sala de aula para os alunos terem um modelo de como codificar/decodificar uma mensagem e, de seguida, propor que cada aluno transmitisse uma mensagem codificada para um colega decodificá-la, como explica:

> Eu penso assim: dar um exemplo em sala de aula, mostrar como codificar uma mensagem curtinha e depois eles fazem o processo inverso, para eles aprenderem como decodificar. E daí falar assim: 'cada um tem a tarefa de me entregar na próxima aula, um código e a matriz decodificadora'. E já explicar para eles: 'como a gente já viu anteriormente, a matriz decodificadora tem que ser inversível, então vocês têm que ter cuidado'. Daí fazer uma troca dos códigos entre eles, para cada um decodificar a mensagem do outro. (...) Não vai ter cópia, porque um vai ficar trabalhando com o código do outro. (...) Tem que falar: 'vocês têm que ter cuidado para não passar um código errado. Porque senão aí vou considerar o trabalho de vocês errado'. Eles têm que fazer a questão e treinar a ida e a volta. (...) Senão eles fazem qualquer coisa e ao dar para o colega, ele fica se batendo porque não consegue chegar a uma mensagem que tenha significado. (EGC18, 03/03/2017)

Tal ideia, da forma como foi apresentada, foi problematizada por alguns dos membros do grupo, pelos seguintes motivos: (i) os alunos poderiam ser corporativos com os colegas e trocarem entre si o gabarito da decodificação da mensagem; (ii) os alunos teriam que criar a matriz chave que faria a codificação, que deveria ser inversível e as entradas da inversa deveriam ser números inteiros. Discutiu-se no grupo que a tarefa se tornaria mais desafiadora se os alunos não tivessem tal informação e visualizassem matematicamente que para decodificarem a mensagem seria necessário multiplicar a inversa da matriz codificadora pela matriz da mensagem codificada.

Após um longo debate, ao ouvir as diferentes opiniões dos colegas, Nina concorda com a ideia que surge no grupo, de propor a etapa de codificação de uma mensagem por meio de um roteiro com etapas a serem seguidas, como ilustra o diálogo seguinte:

> Bruna: E por que a gente não propõe um passo a passo como a investigadora fez ali? Que seria exatamente como a gente resolveria com eles.
> Nina: É uma boa ideia. Daria para dar tudo escrito, e ao fazerem os passos eles saem com a mensagem codificada.
> Tito: Exatamente, um passo a passo de como codificar.
> Nina: Mas eu acho que ao menos tem que dar um exemplo de como passar a mensagem para a sua forma matricial. Pega essa que fizemos, MATEMÁTICA, e escreva numa matriz.
> Bruna: Tudo por escrito. Não debateria em aula nenhuma.
> Téo: Eu faria assim, para ter um desafio. Porque senão vai ser uma repetição de ideias.
> Tito: Exatamente, você tem que dar um roteiro como que codifica e depois dar uma outra mensagem...
> Lisa: E diz para ele: 'agora como decodifica isso?'. (EGC18, 03/03/2017)

Nina sugere que no enunciado da tarefa se apresente um exemplo sobre como fazer a equivalência entre os caracteres da mensagem e a sua representação numérica, bem como a sua representação matricial. Tal sugestão foi incluída no roteiro da tarefa. Quanto à etapa da decodificação, ao invés da troca de mensagens entre os alunos, como havia sugerido Nina, decidiu-se criar uma mensagem diferente para cada um dos alunos ou grupo de alunos, para evitar a troca de informações entre eles. Nina sugeriu que a tarefa fosse realizada em pares pelos alunos, levando em consideração o trabalho para os professores corrigirem a tarefa, para além da interação e troca de ideias que poderiam surgir entre eles: "Em duplas, dá menos trabalho para corrigir. (...). E até para eles, eu acho que é legal essa discussão" (EGC18, 03/03/2017).

Como eu havia apresentado a proposta inicial da tarefa, me responsabilizei por adaptar a redação das questões a partir do que fora discutido no grupo e de seguida partilhar com o grupo para uma nova análise. Cada membro do grupo responsabilizou-se por me enviar sugestões de mensagens já codificadas para serem propostas para a etapa de decodificação da tarefa. Entretanto, apenas Téo colaborou com esta etapa. Após uma nova análise no grupo, foram apresentadas apenas sugestões para melhorar a redação e clareza das questões, sendo que a versão final corresponde ao Quadro 44.

Reflexão no grupo

Os alunos de Nina realizaram a tarefa em pares, sendo que iniciaram a resolução em sala de aula e finalizaram em casa, ao contrário dos demais professores que propuseram a tarefa extra classe.

Quando foi realizada a discussão sobre a concretização do trabalho, Nina ainda não a corrigira, mas tinha uma noção do que os alunos realizaram, visto que acompanhou parte da resolução em sala de aula. Nina não teceu abertamente uma opinião sobre a estratégia de ter proposto a tarefa em sala de aula, porém conforme alguns problemas foram apontados por alguns colegas, foi corroborando com alguns e minimizando outros. Por exemplo, alguns professores relataram que em algumas questões muitos alunos omitiram os cálculos, apresentando apenas o resultado final. Foi identificado no grupo que eles não realizaram os cálculos manualmente, pois utilizaram o GeoGebra, que na visão do grupo era positivo, visto que integraram a tecnologia no seu processo de aprendizagem. Porém, o cálculo da inversa da matriz codificadora era um dos objetivos da tarefa. Sendo assim, identificou-se um problema de redação nas questões, pois não ficou explícito que os cálculos deveriam ser apresentados. Nina acabou minimizando tal problema, pois os seus alunos realizaram boa parte da tarefa em classe, apenas com recurso ao papel e lápis, como explica: "Vocês pediram para fazer no GeoGebra a tarefa da Criptografia? (...). Eu também não pedi e não usaram. (...) Como eles começaram a fazer em sala de aula, eu vi os cálculos. Aí eu os deixei terminarem em casa" (EGC24, 05/05/2017). Tal estratégia pode ter contribuído para Nina fazer uma avaliação mais efetiva do conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo matemático envolvido na tarefa, quando comparada à estratégia utilizada pelos seus colegas de grupo.

Na Questão 4 da Tarefa 1 (Quadro 44), também foi constatado que nem todos os alunos responderam como era esperado pelo grupo. Os alunos apresentaram a mensagem criptografada na forma de matriz, enquanto que era esperado que fizessem a conversão para um texto codificado. Tal conversão não era imediata, sendo preciso seguir as devidas instruções fornecidas no enunciado. No grupo interpretou-se que no enunciado havia a informação sobre como obter a conversão, mas não estava explícito a apresentação da mensagem na forma de texto. Ao refletir sobre a concretização desta questão, Nina reconhece que apesar de alguns alunos apresentarem a mensagem na forma de texto, ela mesma entendeu que apenas a representação matricial era suficiente, como explica: "Alguns até escreveram a mensagem codificada. (...) É. Eu acho que sim. Eu acho que a maioria dos meus alunos deixou na forma de matriz. Eu sei porque eu fiz em sala de aula. (...) Até eu entendi assim" (EGC22, 07/04/2017). O facto de Nina ter o mesmo entendimento da maioria dos alunos, confirma a falta de clareza da questão e justifica porque não chamou a atenção dos alunos para completarem a questão, visto que propôs a tarefa em sala de aula.

Nina também corroborou com o grupo que nesta mesma questão a instrução que foi dada sobre como fazer a tal conversão da representação matricial da mensagem para a forma de texto foi desnecessária, uma vez que também foi apresentada uma tabela com o resultado dessa conversão para valores no intervalo $[-53, 81]$, como destaca o diálogo no grupo:

Bruna: Nós colocamos a regra para eles encontrarem a matriz resto, caso não encontrassem o equivalente alfabético direto. Olhem este caso aqui, ele escreveu a mensagem como texto, mas não fez a matriz resto. Ele pegou direto essa matriz e já transformou direto, só usando a tabela que colocamos.

Nina: Eu acho que tem dois ou três valores [da matriz resto] que não estavam nessa tabela.

Bruna: Mas eles entenderam a lógica da tabela e encontraram o que faltava sem fazer contas. (...) Então, para quê essa regra aqui? Se nós vamos dar a tabela, essa regra não faz sentido.

Nina: É. Eu também achei isso. (...) E se deixar a regra, não tem porque deixar a tabela. (...) Quando eles viram essa tabela aí, eles ignoraram o resto.

Bruna: E daí eles não leram as instruções. (EGC22, 07/04/2017)

Ao reconhecer os problemas de dupla interpretação que houve na quarta questão, tanto quanto à falta de clareza no enunciado quanto com à duplicidade de uma mesma informação, concluiu-se no grupo que para a evolução da tarefa deve-se: (i) deixar claro no enunciado qual é o objetivo da questão e quais são as instruções para o atingir; e (ii) apresentar apenas as instruções de como fazer a conversão e não a tabela pronta.

8.5. Contributo do trabalho colaborativo na prática de Nina no ensino de Álgebra Linear

No início do trabalho conjunto, Nina verbalizou ao grupo a sua preocupação com o foco das propostas de ensino que iríamos preparar em conjunto, levando em consideração o entendimento do que seria uma aula não-tradicional: "o que me incomoda é pegar um Notebook, projetar alguma coisa para os alunos por uns cinco minutos e depois continuar a aula tradicional. Me sinto desmotivada em fazer isso" (EGC1, 01/07/2016). Também manifestou a sua preocupação com o cumprimento do cronograma da disciplina, tendo em vista que a realização de aulas com caráter diferente do tradicional poderiam demandar um tempo maior no cronograma:

> Eu fico preocupada com o cronograma das aulas. Vocês se sentem seguros em fazer mudanças e ainda cumprir o cronograma? Ou vamos deixar a disciplina bem em aberto, fazer o que der para fazer em termos de cumprir todo o cronograma? Eu penso que no início podemos fazer tudo lindo, mas com o decorrer do semestre pode haver atraso no cronograma e daí teríamos que voltar ao tradicional, na correria, para vencer o conteúdo. (EGC1, 01/07/2016)

No decorrer do 1.º semestre de trabalho conjunto, Nina conseguiu realizar algumas mudanças na sua prática de ensino de Álgebra Linear, que anteriormente ao trabalho conjunto era mais focada no conteúdo e no cumprimento do cronograma da disciplina. Dentre as mudanças que observou, Nina pontua a exploração de aplicações contextualizadas de alguns dos tópicos e acrescenta que "sem a participação no grupo, jamais [as] pensaria em incluir" (EGR1) na disciplina:

> Em relação às aplicações, consegui trabalhar alguns problemas concretos em sistemas lineares e em autovalores e autovetores. Retomei aquele problema do *Google*, pois envolve autovalores e autovetores, para você poder fazer o ranqueamento da prioridade dos sites. Teve aplicações em transformações lineares, mas foram mais geométricas. Antes eu não trabalhava com aplicações, eu dizia por alto onde se aplicava, mas nada concreto de pegar uma aplicação, resolver o problema, isso é completamente diferente. Inclusive na primeira parte, matrizes e sistemas, eu gostaria de ter trabalhado mais, discutimos no grupo uma série de aplicações, mas não consegui me organizar para explorar tudo, não deu tempo. Mas tenho certeza que eles saíram sabendo que a Álgebra Linear é aplicável. (EGR1)

Um dos objetivos do grupo era mostrar aos alunos a finalidade do estudo da Álgebra Linear, visto que frequentemente nos deparávamos com questões sobre este fim realizadas pelos alunos e tínhamos dificuldade de responder com propriedade apresentando e/ou propondo problemas concretos. Para além de resolver alguns problemas aplicados com os alunos, ao propor duas tarefas avaliativas – uma que envolvia aplicações de sistemas lineares e outra que envolvia aplicações geométricas das transformações lineares, Nina tinha o sentimento de que os alunos se "envolveram com a disciplina" (EGR1), e tiveram a noção da finalidade de se estudar a Álgebra Linear. Relativamente às tarefas avaliativas, Nina considera que no semestre seguinte pretende novamente propor tarefas com caráter semelhante às que realizou:

> Eu gostei muito dos trabalhos, nunca tinha proposto trabalhos aos alunos como estes que fizemos. Vou propor novamente semestre que vem, apesar de que acho que deve ter uns ajustes nestes que propomos. Mas pretendo fazer até mais. Vamos ver o que vamos definir quanto a isso no grupo. (EGR1)

Outra mudança referida por Nina na sua prática, no 1.º semestre de trabalho conjunto, foi a abordagem do conteúdo focada na interpretação geométrica dos conceitos, como explica:

> Fazendo um balanço agora, eu trabalhei de forma completamente diferente de como trabalhei em semestres anteriores e o resultado me surpreendeu. Por exemplo, em autovalores e autovetores, eu nunca tinha interpretado geometricamente um autoespaço. Eu sabia o conceito teoricamente, mas nunca tinha parado para pensar o significado geométrico. Então, essa parte geométrica eu achei bem legal, mesmo achando que eu tenho que melhorar. Por exemplo, na parte de transformações lineares eu foquei a parte geométrica no trabalho [tarefa avaliativa] e também cobrei na prova esta parte, em função do trabalho, para ver se realmente tinham entendido e para valorizar o que tinham feito. Mas no próximo semestre eu tenho que focar mais nisso em sala de aula, neste semestre eu não foquei muito. É que agora eu acho que realmente eu entendi geometricamente o que é o núcleo, o que é a imagem de uma transformação linear. Eu acho que eu também tive um aprendizado grande na disciplina, principalmente na parte geométrica. Às vezes a gente na disciplina quer trabalhar um monte, quer dar conta dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, matrizes, polinômios, e acaba não focando no $\mathbb{R}^2$ que é fácil de entender e deles visualizarem, depois generalizar é mais simples. (EGR1)

Nina revela que por meio das discussões no grupo, tendo em vista a ênfase adotada da visualização geométrica, passou a entender melhor o significado de alguns conceitos, em particular os relacionados com as transformações lineares. Como consequência dessa aprendizagem, problematiza a sua prática sobre tal tópico no semestre corrente, indicando que no semestre seguinte deve dar mais atenção ao significado geométrico dos conceitos em sala de aula, e não apenas nas tarefas avaliativas. Através das discussões no grupo, a docente visualizou outras possibilidades tanto sobre a sequência de alguns tópicos, como das relações que podem ser realizadas entre os tópicos. Particularmente, passou a explorar as transformações lineares concomitantemente com as transformações lineares geométricas, com o objetivo de dar significado às transformações lineares.

> Por exemplo, eu trabalhava primeiro transformações lineares e depois operadores. No grupo discutimos como trabalhar transformações e operadores (rotação, cisalhamento, dilatação/contração, reflexão...) tudo junto. Fiz isso também neste semestre, mas agora vejo que posso fazer melhor. Posso, por exemplo, ao explicar um cisalhamento, utilizar um trabalho dos alunos do GeoGebra deste semestre para verificarem o efeito sobre uma figura, fazer dinâmico ao invés do estático. Dá para explorar núcleo, imagem, inversa de uma transformação que é uma reflexão. Então, há um leque de possibilidades que antes eu não percebia. (EGR1)

Ao abordar a visualização geométrica dos conceitos, Nina inseriu na sua prática a utilização do software GeoGebra, para além de esboços gráficos na lousa. Em sala de aula, o utilizou para introduzir o tópico 'Mudança de Base'. A professora revela ter sentido dificuldades na condução da respetiva aula, planificada em conjunto no grupo, que atribui à sua falta de familiaridade com o software, tal como explica:

> Não me senti confortável quando tive que utilizar o GeoGebra pois não conhecia o software. Então naquela aula de mudança de base, quando após os alunos resolverem as questões no ambiente lápis e papel, eu tive que retomá-las utilizando o GeoGebra, me atrapalhei toda. Eu tentei, mas foi muito difícil. (...) Como não sabia trabalhar com o GeoGebra, isso dificultou um pouco o meu trabalho. Mas no próximo semestre eu não pretendo ter mais essa limitação. (EGR1)

Nina pretende utilizar o GeoGebra novamente no semestre seguinte, bem como evoluir a sua prática com o uso do mesmo e, apesar das dificuldades sentidas com o seu uso, considera que a experiência foi positiva tanto para si, pela "oportunidade de trabalhar com uma metodologia usando um software" (EGR1), bem como para os alunos. Na sua opinião, a abordagem da "visualização geométrica (...) facilita a compreensão dos alunos, pois torna as coisas mais palpáveis e assim a Álgebra Linear fica um pouco menos abstrata" (EGR1).

Em função da abordagem que foi dada ao conteúdo, para o desenvolvimento de alguns tópicos foi necessário um tempo maior dentro do cronograma da disciplina. Sendo assim, Nina precisou restringir o tempo em sala de aula da resolução por si de questões da lista de tarefas que costumava propor para serem resolvidas extra classe, e não conseguiu fazer aulas de revisão do conteúdo que costumava fazer na aula anterior a cada prova. No início do semestre, Nina se sentiu muito constrangida com tal situação, mas aos poucos foi ultrapassando tal constrangimento ao ver que os alunos foram evoluindo na sua aprendizagem, tal como elucida:

> Uma coisa que mudou é que não consegui trabalhar a lista de tarefas em sala de aula, deixei mais para eles fazerem e virem tirar dúvidas. Eles foram tão bem que não sei avaliar se isso foi bom ou ruim. As avaliações foram todas em cima do que foi trabalhado, foi um misto da sala de aula, da lista de exercícios e dos trabalhos. Em outros semestres eu trabalhava mais em sala de aula a lista. No começo eu me sentia um pouco mal. Também antes eu fazia aquela aula de revisão antes da prova, dessa vez eu não fiz nenhuma. Na 1.ª prova me senti mal porque eles foram super mal, daí pensei que esse foi o motivo e também o facto de ter aquele trabalho [sobre aplicações de sistemas lineares], que foi muito bom, mas uma coisa é fazerem o trabalho, outra coisa é resolverem exercícios. Como eram matrizes, determinantes e sistemas, conteúdos do Ensino Médio, eu acho que eles não se preocuparam muito, porque depois eles deslancharam. A minha turma teve um ótimo desempenho. Dos 40 alunos, dois reprovaram por frequência e três apenas reprovaram por nota. (EGR1)

Ao refletir sobre como a interação no grupo influenciou a sua prática, para além das estratégias de ensino definidas em conjunto, Nina refere que por meio das experiências compartilhadas pelos colegas tem visualizado outras possibilidades tanto relacionadas com a interação com os alunos como a outras formas de ensinar os conteúdos.

> A partir das discussões no grupo passei a questionar mais os alunos, mas não sei se dou tempo para eles responderem, eu questiono, mas eles não respondem. Eu chamava alguns aleatoriamente, mas uns ficaram bravos, então parei. Eu acho que ainda não achei o jeitinho certo de fazer essas perguntas. Mas assim, eu já havia ministrado a disciplina várias vezes e toda vez que ia ensinar um conteúdo eu pensava em fazer diferente, mas acabava fazendo sempre do mesmo jeito. Então, no grupo, quando ouvia, por exemplo, a Bruna falando como havia introduzido um conteúdo, os questionamentos que tinha feito aos alunos, eu pensava 'que interessante, nunca tinha pensado dessa forma', ou as questões que o Tito elabora, bem interessantes, coisas que sozinha eu não faria. Tem coisas que a gente quer mudar, mas sozinha não tem ideias. Algumas dessas ideias eu já levei para a sala de aula, outras não deu tempo porque já havia ministrado o referido conteúdo, mas no semestre que vem vou usar. (EGR1)

Em particular, Nina advoga que utilizou os questionamentos como uma estratégia para fazer com que os alunos participassem mais e assim se sentissem mais envolvidos nas aulas. Entretanto, problematiza a sua estratégia, visto que os alunos não se sentiram tão envolvidos e alguns se sentiram constrangidos. A forma como Tito introduzia alguns conceitos, primeiro propondo algumas questões específicas para os alunos resolverem e a partir de aí ir construindo o conceito, foi outra estratégia que despertou o interesse de Nina. A docente exalta a importância de se estar trabalhando em grupo para pôr em prática novas ideias, seja as construídas em conjunto, seja aquelas que surgem da reflexão das experiências partilhadas pelos colegas.

Ao refletir sobre o que poderia melhorar na sua prática e que não conseguiu concretizar, Nina "gostaria de ter trabalhado mais o erro dos alunos" (EGR1). Justifica que lhe faltou tempo no cronograma na disciplina para dar mais atenção a este elemento que emerge na sua prática. A professora indica que costumava dar *feedback* individual aos alunos, principalmente das provas, mas não teve por hábito a promoção de estratégias para o aluno evoluir a partir do erro, como, por exemplo, a elaboração de uma nova tarefa avaliativa diante de uma avaliação mal sucedida pelos alunos. Indica um único momento que promoveu essa estratégia: "O único momento que trabalhei o erro deles foi no trabalho sobre transformações lineares. Eles tiveram que refazer o trabalho no GeoGebra, pois não tinham feito de forma dinâmica como havíamos pedido e alguns tinham errado a lei da transformação" (EGR1).

Após um ano de trabalho no grupo, ao olhar retrospetivamente para a sua prática de ensino de Álgebra Linear na procura de identificar diferenças com a sua prática anterior, indica que "a forma de abordar o conteúdo mudou bastante, sempre relacionando a parte teórica com a sua interpretação geométrica" (EGR2). Em particular, do 1.º para o 2.º semestre de trabalho conjunto, Nina ampliou o número de tópicos para os quais propôs tarefas, planificadas no grupo, envolvendo a interpretação geométrica (passou de dois para cinco tópicos). Refere que anteriormente apresentava os conteúdos de forma independente e que a partir do trabalho conjunto passou a se preocupar com a conexão entre os tópicos ou entre uma tarefa precedente e um tópico que está sendo estudado, a conexão entre as estruturas concretas e as abstratas e a se preocupar em deixar claro a finalidades das tarefas propostas, como exemplifica:

> Uma coisa que eu mudei é a retomada do conteúdo. Por exemplo, quando eu vou resolver um exercício num espaço vetorial mais abstrato, eu vou para o canto do quadro, daí retomo: 'Ah, vocês lembram como era feito lá na parte geométrica? Vamos ver como funciona no $\mathbb{R}^2$, veja o gráfico. Então agora o raciocínio é o mesmo, só que com matrizes'. Então tento sempre retomar o que foi feito geometricamente, mesmo que agora não dê para visualizar, mas para eles poderem entender e fazer uma ligação do que foi feito lá e do que está sendo feito aqui. Antes do grupo era assim: 'vou dar matéria e matéria dada'. Agora não, tem que fazer esse link. Também tem por exemplo o trabalho da letra, já tinham aparecido as transformações geométricas, falei que a gente ia estudar com mais detalhes mais tarde. Daí quando entrei nessa parte em transformações, retomei: 'isso aqui tem a ver com a transformação da letra, como seria a lei quando nós fizemos lá no trabalho a ampliação em duas vezes, e em k vezes? '. Então passei a fazer esses links para eles ver que em Álgebra Linear tudo está interligado. (EGC28, 02/06/2019)

Tais preocupações em sua abordagem emergem do aprofundamento do seu conhecimento de Álgebra Linear em virtude da experiência vivenciada no grupo, como afirma:

> Eu comecei a enxergar coisas que antes eu não conseguia enxergar, aprendi bastante. Acho que tinha algumas definições que eu entendia de forma errada, e com o grupo eu comecei a enxergar como funcionava, principalmente na parte de transformações lineares. Eu tinha muita dificuldade na interpretação geométrica. Talvez por isso que quando começamos a elaborar aquele trabalho [de transformações lineares] eu senti: 'nossa que trabalho difícil!'. Talvez porque eu não tinha essa visão geométrica que a transformação linear dá. Então isso para mim foi bem enriquecedor, trabalhar no grupo e fazer essa alteração na minha metodologia. Eu acho que eu consigo passar com mais segurança para os alunos o que realmente é uma transformação linear. Eu achei muito bacana de ver 'aqui está um quadrado, quando faz o cisalhamento vira um paralelogramo'. 'Aplica a transformação num vetor, o que acontece com o vetor resultante?'. Achei muito enriquecedor essa parte do trabalho colaborativo. (EGR2)

Nina apercebe-se que tinha uma compreensão equivocada de alguns conceitos e, em particular, indica que conseguiu ultrapassar a dificuldade que tinha com a interpretação geométrica das transformações lineares. Tal dificuldade havia sido sinalizada por Nina na entrevista inicial quando mencionou que não via sentido nas transformações lineares especiais, tais como a rotação, o cisalhamento, a reflexão e a dilatação/contração, restringindo-se a ensiná-las de forma mecânica, sem explorar devidamente a respetiva interpretação geométrica. A docente reconhece que em razão da dificuldade destacada, agiu inicialmente com alguma resistência, no 1.º semestre de trabalho no grupo, à elaboração da tarefa sobre transformação lineares, que justamente envolvia a interpretação geométrica das transformações lineares.

Para além das transformações lineares, Nina refere que o trabalho em grupo contribuiu para aprofundar a sua compreensão dos conceitos de espaço e subespaço vetorial, como explica:

> Eu partia do pressuposto que o conjunto era fechado para as operações de soma e multiplicação e aí mostrava as oito propriedades para provar que um conjunto é um espaço vetorial. A partir das discussões no grupo que percebi a complexidade da definição de espaço vetorial. Passei a entender que primeiro tinha que analisar o fechamento, e daí se for válido, analisar as oito propriedades. É por isso que no planejamento da tarefa de espaços vetoriais, para mim fazia sentido começar com a análise do fechamento dos conjuntos. Ao meu ver, acho que temos que melhorar aquela tarefa para que o aluno consiga fazer a conexão entre o fechamento e as oito propriedades da definição. Acho que está faltando um link entre a tarefa do fechamento e a definição. (EGR2)

Nina reconhece que tinha uma compreensão equivocada destes conceitos, confundindo-os. Indicia que a partir das discussões no grupo, incluídas no processo desde a planificação até a reflexão sobre as aulas referentes à introdução de espaços vetoriais, conseguiu ampliar a sua visão sobre tais conceitos e ultrapassar a limitação que tinha. Inclusive, ao fazer uma nova reflexão sobre a abordagem definida para tais aulas, percebe que a tarefa que foi proposta para introduzir o conceito de espaço vetorial precisa de ser aprimorada, para melhor evidenciar a relação entre o fechamento de um conjunto em relação às operações de adição e multiplicação por escalar e a definição de espaço vetorial.

O trabalho que vivenciou no grupo também impactou na reflexão sobre a sua prática de ensino na disciplina de Geometria Analítica. Tal reflexão emergiu das dificuldades dos alunos com o conceito de vetor e com a relação entre a representação analítica e geométrica de um vetor, na 1.ª tarefa elaborada pelo grupo para introduzir o conceito de espaço vetorial, tal como explana:

> Sabe que eu sinto também hoje, é que estou dando mais atenção lá em GAN (Geometria Analítica) para os conceitos de combinação linear e de base. Claro que eu não aprofundo tanto, mas estou focando mais, explorando mais estes conceitos. Depois das dificuldades em trabalhar com vetores na tarefa sobre o fechamento eu percebi que em GAN eu não dava a ênfase necessária. Um exemplo é a questão de um vetor dado por dois pontos, eu senti que os alunos tiveram dificuldade, eles não pegavam o vetor saindo da origem. Aí eu pensei assim: 'poxa eu acho que, como professora, falava, mas não mostrava que eram equipolentes', daí esse semestre eu foquei nisso. Eu falava: 'Esse vetor dado pelos dois pontos A e B. Vamos fazer $B - A$, que vetor vai dar? Vai dar o mesmo? Não, vai dar um equipolente a esse saindo pela origem'. Entende? É uma coisa que eu não dava essa ênfase. Na verdade, eu acho que eu não me dava por conta de que quando você representa em uma tripla ordenada um vetor, ele sempre tem origem na origem. (...) Então, uma discussão em Álgebra Linear me levou a repensar a minha forma de ensinar noutra disciplina.

Ao perceber que algumas dificuldades dos alunos podem ser oriundas da Geometria Analítica, Nina passa a dar uma maior ênfase nessa disciplina, particularmente em tópicos que são pré-requisitos para a Álgebra Linear.

Um outro aspeto da prática que Nina considera que desenvolveu e que teve maior ênfase no 2.º semestre de trabalho, foi o envolvimento dos alunos nas suas aulas. A docente procurou interagir com os alunos por meio de questionamentos e da realização de tarefas em sala de aula: "Passei a explorar mais a participação em aula, fico perguntando, questionando. Isso melhorou do 1.º para o 2.º semestre. Acho que o número de atividades que fizemos foi maior no 2.º semestre e isso contribuiu para essa interação" (EGR2). Aos poucos tem procurado envolver mais os alunos por meio de questionamentos, o que também procura fazer noutras disciplinas que leciona: "É engraçado que não é só em Álgebra Linear, isso acaba alterando a tua prática noutras disciplinas. Também em GAN estou bem mais questionadora" (EGR2).

Ao comparar a sua prática com a anterior à participação no grupo, refere que essa maior interação com os alunos contribui para perceber o nível de compreensão dos alunos e quais são as suas dificuldades sobre o conteúdo em questão.

> Sinto que eles estão mais participativos, antes eles ficavam copiando o que estava no quadro e eu não sabia se eles entendiam. Iam para casa, vinham e eu não sabia se voltavam com dúvida. Só apareciam com dúvidas na véspera da prova. Agora, a gente sempre pede para fazer em sala de aula ou em casa alguma coisa, eles têm que entregar valendo alguma nota, então eles se esforçam e estão sempre em contato com a disciplina. (EGR2)

O facto de procurar atribuir uma classificação ao trabalho dos alunos pode fazer com que estes se sintam valorizados e mais comprometidos. Para além dos questionamentos, Nina tem procurado envolvê-los por meio da resolução de tarefas em grupo, ao contrário da sua prática anterior, onde se sobressaía o trabalho individual dos alunos.

> Agora eles trabalham mais em grupo do que antes. Antes era bem mais individual. Agora, praticamente para cada conteúdo tem um trabalho, e é ao menos em dupla. Tem alguns alunos que não querem, eu forço para trabalharem em grupo. Eu falo: 'Isso é importante, tem que trabalhar em grupo, discutam para depois me fazerem as perguntas'. (...) Uma coisa que fui pegando com nossas discussões é não responder diretamente. Não dou respostas prontas, eu faço eles pensarem, eu tento pelo menos...vou fazendo perguntas para ver se eles enxergam o caminho. (.... Se estiver errado, vamos ver porque está errado. (...) Se a gente em sala de aula faz o aluno pensar, ele vai criando o hábito. No início é difícil porque nossos alunos têm muita preguiça de pensar, eles querem tudo pronto. (EGR2)

No trabalho em grupo dos alunos, Nina procura não dar respostas prontas às questões que os alunos lhe fazem, e por meio de questionamentos procura que eles visualizem o caminho para chegar à solução. A docente considera que tal modo de trabalho lhe foi suscitado pelas discussões do grupo. Como uma estratégia para fomentar a discussão de tarefas realizadas pelos alunos, em alguns casos específicos, no 2.º semestre de trabalho, Nina solicitou que alguns alunos fizessem as resoluções no quadro, ao invés dela mesma resolver.

> Exercício em sala de aula eu sempre propus, sempre gostei de ver se eles estão entendendo. Eu sempre ia para o quadro e discutia com eles. O que eu fiz neste último semestre, foi começar a pedir para eles irem para o quadro, mas foram poucas vezes. Por exemplo, eles tinham feito aquela questão de espaço vetorial com operações não usuais em casa, então ao invés de eu corrigir no quadro, eu pedi para eles fazerem no quadro. Deu para detectar a dificuldade que eles têm de demonstrar, foi muito bom, porque uns faziam de um jeito, outros faziam de outro. Então deu para ver porque deu

errado, deu para trabalhar o erro deles. Isso eu nunca tinha feito. Tu sempre dizias: 'vamos levar para o quadro', e realmente os alunos vão para o quadro, não se sentem constrangidos. (EGR2)

Ao apontar o caso específico de uma tarefa que os alunos resolveram em casa, Nina percebe o contributo de solicitar que os alunos fossem ao quadro, ao invés dela mesma fazer a correção, tendo em vista a discussão gerada sobre as resoluções, a identificação das dificuldades e a oportunidade de trabalhar os erros dos alunos. A professora observou ainda que quando os alunos vão ao quadro eles têm um maior comprometimento com a resolução da tarefa, como explica: "quando eles iam para o quadro, eles ficavam pensando um pouco mais, acabavam refletindo mais sobre o que estavam fazendo. Eles não vão fazer qualquer coisa porque eles têm medo de passar vergonha" (EGR2). Nina teve o mesmo sentimento em relação ao comprometimento dos alunos quando compara a resolução de duas tarefas, uma com apresentação pelos alunos e outra sem apresentação: "Não pedi para apresentar o trabalho da letra. O de transformações que eu pedi, ficou mais bem feito. Quando era só para eu ver, eles entregaram qualquer coisa, quando é para a turma ver eles se sentem um pouco constrangidos" (EGR2).

Ao refletir sobre os aspetos menos atingidos na sua prática, Nina destaca o trabalho sobre o erro do aluno. No 2.º semestre de trabalho afirma que conseguiu "trabalhar o erro dos alunos em algumas atividades específicas, como na resolução de questões em sala de aula e naquele trabalho de transformações, em que eles tiveram que refazer. Mas ainda foi pouco. Temos que focar mais nisso" (EGR2). Ao referir-se sobre a etapa mediada pelo GeoGebra da tarefa sobre as transformações lineares, Nina destaca a importância da discussão no grupo sobre as resoluções dos alunos, tanto para o reconhecimento de alguns erros que não tinha percebido, como para definir um padrão de correção, como esclarece:

> Eu achei muito legal a gente ter parado para analisar todos os trabalhos em grupo, porque no 1.º semestre não teve isso, então eu senti um pouco de dificuldade: 'Será que é normal esse tipo de transformação ou não é? Teve um erro, mas onde está esse erro?'. Teve um caso que eu não conseguia identificar que tinha um erro na matriz. E outra coisa que achei legal. Tu dizias: 'não está certo tem que arrumar, se é para um tem que ser para todos'. E é verdade. Nessa discussão eu vi que os meus estavam ruins, mas os dos outros também. No 1.º semestre ficamos com dúvida se teve cópias entre os alunos e entre as turmas, parecia que sim, mas no fundo não teve, teve algumas coisas diferentes. Quando se olha no geral parece que ficou tudo igual, e quando você discute em grupo aí tu vês que cada um pensou de uma forma diferente. A tua exigência na correção era diferente da exigência do Téo, que era diferente da Bruna, da Lisa, da minha, então vamos exigir de forma que todo mundo cobre a mesma coisa, porque senão um é muito flexível, outro mais rígido. Então eu achei muito bom a gente ter parado para determinar um padrão de correção. E o facto de levar um trabalho bom que

> era do semestre anterior e falar: 'esse trabalho para mim é bom, é isso que eu quero que vocês façam, olhem o que vocês fizeram, estava errado onde? Trabalhar o erro dos alunos. Eles conseguiram enxergar, melhorar e arrumar o erro, todos trabalhos ficaram muito bons neste último semestre. Se eu tivesse feito isso no semestre anterior teria ficado muito legal. (EGR2)

Nina compara a sua conduta diante da tarefa, que foi aplicada nos dois semestres, e indicia ter-se sentido mais segura para a respetiva avaliação, para trabalhar com os alunos os seus erros e para perceber que havia uma suspeita equivocada em relação às 'cópias' entre os alunos, após o suporte do grupo na correção, na 2.ª vez que a aplicou.

Ao refletir sobre a evolução da sua prática para com o uso da tecnologia, considera que no 2.º semestre de trabalho no grupo se sentiu mais segura em levar o GeoGebra para a sala de aula. Nina utilizou o GeoGebra para mediar a discussão sobre a resolução de tarefas pelos alunos, bem como para explorar de forma dinâmica a visualização geométrica dos conceitos envolvidos. Entretanto, refere que usou aplicativos prontos para tal exploração, indicando ainda não se sentir segura para fazer construções sozinha no software:

> Pegar algo pronto no GeoGebra e levar na sala de aula fica mais confortável para mim, agora mostrar como se monta uma matriz, ainda não. Eu já fiz essa [tarefa] da letra, parei para fazer sozinha. Talvez no próximo semestre eu faça, mas neste semestre ainda não me senti confortável para estar fazendo em sala a construção. No 1.º semestre eu me senti muito desconfortável em mexer até no que estava pronto, eu senti que eu perdi o meu objetivo naquela aula de mudança de base, não sabia direito o que eu queria com aquilo. A segunda vez já achei melhor. Foi engraçado que o pessoal que tinha experiência achou melhor a 1.ª do que a 2.ª, porque a 1.ª vez foi feita em sala de aula e a 2.ª foi feita em casa. Eu já achei o contrário, para mim foi melhor a 2.ª vez do que a 1.ª, mesmo eles trabalhando em casa e eu só corrigindo com eles o resultado que eles tinham trazido. A Bruna falou que talvez eu estivesse mais confortável em trabalhar com o GeoGebra. (EGR2)

Em particular, no 2.º semestre, os alunos de Nina trabalharam com o GeoGebra apenas fora da sala de aula na realização de duas tarefas, que tinham por objetivo, respetivamente: (i) explorar a relação entre o produto de matrizes e a computação gráfica; (ii) explorar de forma dinâmica as diferentes representações de alguns Operadores Lineares especiais. Ao refletir sobre o contributo do uso da tecnologia na aprendizagem dos alunos, considera que com o uso do GeoGebra, em particular, os alunos podem ter uma melhor compreensão do conteúdo tendo em vista que podem explorar dinamicamente os conceitos e suas propriedades. Sendo assim, ao lançarem hipóteses podem validá-las ou refutá-las.

> Eu acho que reflete na aprendizagem do aluno, sim. Eu acho que ele acaba tendo uma maior compreensão do conteúdo porque consegue visualizar coisas que usando apenas quadro e giz a gente não consegue trazer para eles, como por exemplo a rotação de um cubo, a reflexão. O que é em $\mathbb{R}^2$ a gente até consegue dar uma ideia, agora quando parte para o $\mathbb{R}^3$..., eu acho muito complicado! Mesmo no $\mathbb{R}^2$, que é mais fácil de visualizar, no quadro a gente faz o estático, com o GeoGebra eles conseguem movimentar a figura. Eles conseguem ver como a matriz [de uma transformação linear] está mudando, por exemplo, na hora de rotacionar em [torno de] z, o que muda se for em x e em y. Não ajuda só na parte geométrica, mas também na algébrica. No caso da mudança de base, tu podes testar diferentes bases e ver o que acontece na matriz mudança de base. Se tu fores fazer isso no papel demora muito tempo. (EGR2)

Ao refletir sobre aspetos da sua prática com o uso da tecnologia que podem ser melhorados, Nina aponta que deveria propor mais tarefas aos alunos mediadas por software: "Poderíamos explorar outros conteúdos para o aluno utilizar o GeoGebra. Em mudança de base nós é que manuseamos. Isso ajudou a entenderem melhor, principalmente a parte de coordenadas. Se eles pudessem manusear eu acho que iam aprender mais ainda" (EGR2). No seu entendimento, os alunos aprendem mais quando manuseiam o software do que quando veem o professor a utilizá-lo. Também sugere que ao propor tarefas mediadas pelo software deve apresentar modelos para servirem de referência aos alunos: "Uma coisa que quero fazer, é mostrar um exemplo de um trabalho no GeoGebra, (...) para eles terem um referencial do que a gente quer. Eu fiz isso no trabalho de transformações, mas no da letra eu não fiz" (EGR2).

Ao fazer uma retrospetiva sobre as dificuldades que emergiram no decorrer da prática docente durante o trabalho conjunto, Nina salienta os que se relacionavam tanto com a construção das ideias como a preocupação sobre como implementar o tipo de aula que fora planificado.

> Tudo que a gente fez era para melhorar a disciplina e era novo. Eu acho que ninguém tinha colocado nada em prática do que a gente fez. Foi tudo vindo assim: 'Os alunos têm dificuldade aqui, vamos trabalhar em cima disso?'. Então tivemos dificuldades em tudo, principalmente na construção das ideias. (...) Toda vez que ia levar para sala de aula algo desenvolvido no grupo, eu sentia aquela ansiedade. Isso vai dar certo? Não vai dar certo? Como vou trabalhar isso em sala? Eu criava aquela expectativa. Não era constrangimento, dificuldade mesmo de pôr em prática algo novo. (...) Como eu superei essa dificuldade? Trazendo para o grupo a minha experiência [sobre a concretização em classe] e sabendo que o grupo também teve dificuldades [risos], não era só eu. Por exemplo: 'Eu fiz assim e não funcionou. Ah, mas o Téo fez de tal forma e ficou melhor, a Lisa fez assim'. Vamos trocando ideias e tentando melhorar. (EGR2)

Nina considera que a partilha de experiências e troca de ideias com os colegas do grupo foi fundamental para superar as dificuldades que surgiram. Inclusive destaca que só conseguiu propor tarefas mediadas pelo GeoGebra aos alunos, porque sabia que teria o apoio dos colegas para auxiliar com as dificuldades dos alunos que surgiriam, tendo em vista a sua falta de familiaridade com o software.

> Pedir para um aluno fazer um trabalho usando o GeoGebra, eu nunca ia fazer isso sozinha. Por quê? Como que eu, que não tenho domínio da ferramenta, vou cobrar isso de um aluno? Agora, como sei que estou num grupo e sei que tem professores que têm domínio, se o aluno vem perguntar para mim, eu falo: 'Ah, tais professores conseguem te ajudar nisso'. Teve um monte de aluno meu que procurou a Bruna e o Téo. A Bruna fez um tutorial para fazer a questão da letra no GeoGebra, que ajudou bastante. Me permitiu fazer exatamente porque eu sabia que alguém do grupo ia apoiar, senão eu não ia propor uma coisa desse tipo. (EGR2)

Ao fazer uma avaliação geral sobre o contributo do trabalho entre pares para a sua prática docente, afirma que "o trabalho em grupo te ajuda a colocar em prática algumas coisas que tu não colocarias nunca sozinha" (EGR2). Nina tinha o sentimento de que ao trabalhar em grupo o professor se sente apoiado para fazer alterações na sua prática, mesmo correndo riscos, como, por exemplo, da fragilidade da ideia, de acontecerem imprevistos, da falta de domínio de algum material utilizado, de não conseguir cumprir o cronograma da disciplina, dentre outras possibilidades. Em particular, Nina cita que se sentiu segura no grupo quando foi necessário priorizar o ensino de alguns tópicos importantes para a formação de seus alunos, em função do tempo demandado para a concretização de aulas/tarefas planificadas em conjunto.

> Uma coisa que é importante sobre as ações que desenvolvemos. Tu fazer isso em grupo, tu não sentes um risco tão alto. Se tu colocar em prática sozinha, será que vai funcionar? E se não funcionar quem vai me ajudar a arrumar isso aí? Agora, se não funcionar com o grupo, vamos tentar resolver no grupo isso daí? Outra coisa, não deu para cumprir o programa todo, mas não fui só eu, foi o grupo todo. Agora se é só eu que vou colocar alguma coisa em prática sozinha, vou enfrentar esse risco de não conseguir cumprir o programa sozinha? É mais difícil. (EGR2)

Por fim, Nina afirma que não pretende abandonar as ideias que emergiram no grupo, que as pretende dar continuidade ou aprimorá-las. Na entrevista final, que ocorreu quando um novo semestre já havia se iniciado e o grupo se mantinha ativo, Nina declarou que já havia concretizado uma das tarefas construída no grupo no semestre anterior e que pretendia aprimorar a estratégia, também construída no grupo, para introduzir o conceito de espaço vetorial.

> Não vou abandonar, já estou continuando. Pretendo aprimorar as ideias. Já fiz o trabalho da letra com eles, não fiz o da criptografia. (...) Eu sinto que estou fazendo as coisas de forma mais organizada, acho que nossa prática está começando a amadurecer. Me sinto

> mais confortável em colocar em prática o que a gente tinha elaborado, então acho que fica mais fácil de aprimorar. (...) Agora, vou começar com espaço vetorial e quero aprimorar o que a gente fez, não quero abandonar porque foi uma ideia muito boa. As atividades que fizemos me ajudaram a ter outra visão da disciplina. Eu não sei em relação aos alunos, se eles estão enxergando como estou. Eu sinto que até as provas foram mudadas, porque antes era uma coisa mais mecânica mesmo, pois a aula era mecânica, era uma aula com quadro e giz. Agora pedimos também que o aluno trabalhasse. 'Será que ele está enxergando o que a gente está falando?'. Então, a gente começou a exigir do aluno o que a gente também trabalhou em sala de aula. Então eu pretendo continuar, aprimorar, acho que dá certo, daqui para frente quanto mais a gente aprimorar essa ideia melhor vai ficar a disciplina de Álgebra Linear, porque aquela coisa abstrata não tem como tirar nunca, isso faz parte da teoria. Mas tu levar do $\mathbb{R}^2$ para espaços vetoriais mais amplos, eu acho que facilita. Mesmo sabendo que tem autores que não são a favor, no meu ponto de vista facilita a compreensão do conteúdo. (EGR2)

Ao justificar a continuidade das ideias que emergiram no grupo, indicia ter alterado a sua visão da Álgebra Linear, tendo maior clareza da relação entre os conteúdos, da interpretação dos conceitos e do papel da disciplina na formação dos seus alunos. Indicia que desenvolver uma estratégia de ensino mais focada no trabalho do aluno, aliando a teoria com as situações concretas, possa facilitar o processo de abstração em Álgebra Linear. Na visão de Nina, o primeiro ano de trabalho conjunto foi um período para a construção de uma identidade para a prática de ensino do grupo, sendo que no terceiro semestre de trabalho se considera segura para pôr em prática as ideias construídas de forma organizada dentro do cronograma da disciplina, tendo agora condições para trabalhar em cima do amadurecimento e evolução dessa prática.

Síntese

Nina inicia o trabalho conjunto insegura em relação à metodologia de ensino que seria adotada pelo grupo. O objetivo inicial do grupo era priorizar por uma abordagem não-tradicional, que aliasse teoria e aplicações, com uso da tecnologia. Nina preocupava-se em como seria implementada tal metodologia, pois algumas atividades poderiam demandar bastante tempo, e com o decorrer do semestre poderia haver a necessidade de voltar para uma metodologia tradicional, tendo em vista o cumprimento do cronograma da disciplina. Com o decorrer do trabalho conjunto, buscou-se refletir e promover ações em cima de tais preocupações. Aos poucos, Nina foi-se sentindo segura com o trabalho desenvolvido. No final do 1.º semestre reconhece algumas alterações positivas na sua prática, comparadas com a sua prática letiva anterior que era focada no conteúdo e no cumprimento do cronograma, e alguns aspetos a serem evoluídos.

Como aspetos positivos que desenvolveu em prol da sua prática docente em Álgebra Linear, Nina refere a integração da exploração de aplicações contextualizadas e da interpretação geométrica de alguns conceitos. Para além de resolver alguns problemas concretos em sala de aula, propôs duas tarefas avaliativas, uma envolvendo aplicações de sistemas lineares e outra envolvendo as transformações lineares geométricas, diversificando assim a sua forma de avaliar os alunos, que antes era apenas focada nas provas. A exploração da interpretação geométrica dos conceitos foi realizada tanto com quadro e giz quanto utilizando o software GeoGebra. Em particular, Nina utilizou o GeoGebra em sala de aula como estratégia para mediar a discussão de uma tarefa realizada pelos alunos referente à introdução dos tópicos de coordenadas e mudança de base. Já os alunos manipularam o software na concretização da tarefa sobre transformações lineares geométricas. Por não ter familiaridade com o GeoGebra, Nina enfrentou dificuldades na mediação da aula apoiada pelo software, para dar suporte aos alunos para a realização da tarefa em que manusearam o software, bem como na avaliação desta última tarefa.

Apesar das dificuldades enfrentadas, Nina acredita que a abordagem utilizada corroborou para os alunos perceberem a finalidade da disciplina de Álgebra Linear. Inclusive, a própria professora reconhece que para si ficou mais clara essa finalidade, bem como a conexão entre alguns conceitos. Cita o caso particular da dificuldade que tinha em ensinar as transformações lineares especiais (rotação, reflexão, cisalhamento, contração/dilatação), e que começou a superar, inclusive trabalhando tal conteúdo concomitantemente com a teoria geral das transformações lineares, ao contrário do que fazia antes, em dois capítulos independentes.

Nina manifestava uma conceção de ensino em que valorizava mais a atividade do professor do que a dos alunos. Paulatinamente, passou a focar um pouco mais a atividade dos alunos, procurando envolvê-los na resolução de tarefas dentro e fora de sala de aula, na apresentação de trabalhos e por meio de questionamentos. Considera que a interação por meio de questionamentos ainda precisa evoluir, pois não tem conseguido que todos os alunos realmente se envolvam nas questões que faz.

Ao refletir sobre os pontos que a sua prática precisa evoluir, para além da interação por meio de perguntas e respostas, Nina considera que precisa explorar mais a interpretação geométrica dos conceitos em sala de aula, visto que tal exploração se restringiu a alguns tópicos e a tarefas específicas. Considera que pouco trabalhou em cima dos erros dos alunos e que precisa evoluir na utilização do GeoGebra, pois acredita que o software auxilia a exploração dos conceitos em diferentes perspetivas.

Ao fazer um balanço ao final de um ano de trabalho conjunto, Nina considera que o trabalho realizado lhe foi enriquecedor tanto em relação ao conhecimento do conteúdo como em relação às estratégias de ensino. Nina considera que ampliou o entendimento de alguns conceitos e da relação que existe entre diferentes tópicos da disciplina. Como reflexo dessa melhor compreensão, a docente revela que conseguiu trabalhar o conteúdo com maior segurança, especialmente os tópicos de espaços vetoriais e transformações lineares. Da realização de algumas tarefas conseguiu reconhecer algumas dificuldades dos alunos que poderiam ser advindas da Geometria Analítica. A reflexão sobre essas dificuldades lhe permitiu repensar a sua forma de ensinar alguns conceitos na referida disciplina e que são importantes para Álgebra Linear.

Ao comparar a sua prática do 1.º para o 2.º semestre de trabalho, considera que conseguiu envolver mais os alunos na disciplina, principalmente em decorrência do leque maior de atividades desenvolvidas. Em sala de aula Nina envolveu-os tanto por meio de questionamentos, como por meio da resolução de tarefas em grupo (tanto em sala de aula como extra classe), por meio da resolução de tarefas no quadro e da apresentação de um trabalho. Duas das tarefas extra classe foram mediadas pela tecnologia. Nina percebeu uma maior interação com os alunos e um maior comprometimento deles, principalmente quando era necessário expor as suas resoluções para a turma. Os diferentes momentos de interação com os alunos foram importantes para Nina perceber as suas dificuldades e trabalhar em 'cima' dos seus erros, embora considere esse o aspeto menos explorado na sua prática.

Nina sugere que se sentiu segura, por estar em grupo, ao ter que priorizar o ensino de alguns tópicos essenciais para a formação dos alunos, ao invés de cumprir com todo o cronograma da disciplina, sem levar em consideração as dificuldades dos alunos. Considera que foi essencial o apoio dos colegas para a integração da tecnologia na sua prática, como, por exemplo, esclarecendo dúvidas suas ou de seus alunos quanto ao GeoGebra, fornecendo tutorial para execução de uma tarefa, fazendo a correção conjunta de uma tarefa mediada pelo referido software. Nina sentiu-se mais segura para desenvolver aulas com a mediação do GeoGebra, embora apenas manipule aplicações já construídas (não se sente segura para construir algo ou ensinar os alunos a utilizar alguma ferramenta do software, por exemplo). Acredita que a sua prática ainda precisa de evoluir muito com o uso da tecnologia, principalmente envolvendo os alunos na manipulação de softwares em sala de aula, ao invés de centrar em si essa atividade, como também de relacionar esse uso com a compreensão conceitual na aprendizagem dos tópicos estudados.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

Este estudo procura contribuir para ampliar o conhecimento sobre o ensino de Álgebra Linear no Ensino Superior, tendo como referência: as perspetivas de docentes sobre esse ensino; o trabalho colaborativo entre pares em torno de estratégias de ensino de tópicos de Álgebra Linear; e as recomendações atuais para o ensino de Álgebra Linear que emergem da literatura. Com esse intuito, este capítulo começa por apresentar uma síntese do estudo realizado, evidenciando o problema que lhe deu origem, os objetivos e as questões de investigação que o orientaram, bem como as opções e procedimentos metodológicos adotados. De seguida, este capítulo patenteia as principais conclusões em torno das questões de investigação formuladas; e, por fim, debruça-se sobre as limitações do estudo e as sugestões para futuras investigações.

9.1. Síntese do estudo

A Álgebra Linear é um ramo da Matemática que integra uma teoria unificadora e generalista que permite a resolução de problemas em diversos contextos (Dorier, 2002). Esse caráter unificador e generalista, que permite estabelecer conexões da Matemática com diversas áreas do conhecimento, integra uma linguagem e um tipo de raciocínio com os quais os alunos que cursam a disciplina de Álgebra Linear não estão acostumados a lidar. O amplo número de conceitos e definições envolvido na disciplina, o elevado nível de abstração necessário para compreender os conceitos e a falta de ligação com os conhecimentos prévios dos alunos, são apontados como as principais fontes de dificuldades dos alunos (Thomas, 2011). O quadro dessas dificuldades parece ser agravado pela abordagem formal e essencialmente algébrica adotada por muitos professores e pela maioria dos autores de livros didáticos de Álgebra Linear (França, 2007). Os professores muitas vezes trabalham sozinhos, desperdiçando as oportunidades de discutir e refletir com seus pares sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem da disciplina, bem como de agregar as diferentes habilidades dos pares para elaborar propostas de ensino que levem em conta as dificuldades apontadas pelas pesquisas e observadas em sala de aula, visando auxiliar a compreensão dos alunos. Sob outra perspetiva, o trabalho colaborativo entre docentes potencia a criação de oportunidades para ultrapassar o isolamento, conferindo apoio e recursos para abordar questões que os desafiam profissionalmente (Fiorentini, 2004; Fullan & Hargreaves, 2001; Robutti et al., 2016).

Mediante essas considerações, este estudo procura caracterizar o ensino de Álgebra Linear de professores de uma universidade pública brasileira e averiguar o contributo do trabalho colaborativo entre professores desta instituição no ensino dessa disciplina, respondendo às seguintes questões de investigação:

- Como os docentes ensinam Álgebra Linear?
- Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear?
- Que perspetivas têm os docentes sobre o trabalho colaborativo?
- Que problemáticas identificam os docentes de um grupo de trabalho colaborativo na sua prática de ensino de Álgebra Linear? Como essas problemáticas são tratadas?
- Quais as potencialidades e os constrangimentos do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

No sentido de responder a estas questões de investigação, através de uma abordagem qualitativa e interpretativa na procura dos significados que os intervenientes no estudo conferem ao fenômeno vivenciando, esta investigação desdobrou-se em duas fases. A primeira fase desenvolveu-se no semestre 2016/01 em que participaram 15 professores, de diferentes Centros de Ensino de uma universidade brasileira, que nesse semestre estavam a ensinar Álgebra Linear ou que já haviam ensinado anteriormente, com a finalidade de caracterizar as suas estratégias de ensino nesta disciplina. A informação, que permitiu realizar essa caracterização, foi recolhida por meio de uma entrevista semiestruturada, que os professores responderam individualmente. Nesta caracterização procura-se identificar as perceções dos professores sobre o ensino da Álgebra Linear. A informação proveniente desta fase do estudo é apresentada mediante as seguintes dimensões: (1) Prática profissional dos professores; e (2) Ensino de Álgebra Linear. Subjacente a estas dimensões, destaca-se a formação inicial e continuada dos docentes e a sua experiência profissional.

Do grupo de professores que participou da primeira fase constituiu-se um grupo de trabalho com características colaborativas, com seis professores, a par da investigadora, com o propósito de planificar e discutir momentos da sua prática de ensino de tópicos de Álgebra Linear. A escolha dos professores que constituíram o grupo de trabalho deveu-se aos seguintes critérios: estar a lecionar Álgebra Linear e disponibilizar-se a discutir momentos da sua prática; estar locado num mesmo departamento, para facilitar a logística da observação das suas aulas e a flexibilidade no agendamento de reuniões, como também o estreitamento de relações, já que o trabalho previsto exigiria um maior esforço na atividade profissional dos participantes. O grupo de trabalho foi constituído pelos professores Lisa, Téo, Nina, Bruna, Tito e a investigadora. Os dois primeiros docentes tinham pouco tempo de prática letiva por serem iniciantes na carreira e os restantes tinham vários anos de prática letiva.

O trabalho desenvolvido neste grupo nos semestres 2016/02 e 2017/01 constituiu a segunda fase da investigação, com a finalidade de averiguar o contributo do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear. Para este fim, adotou-se um design de estudo de caso sobre dois desses professores. De modo a compreender detalhadamente o modo como os professores trabalharam conjuntamente no grupo, como desenvolveram a sua estratégia de ensino e que significados conferem à sua prática no ensino de Álgebra Linear após a sua participação neste grupo, foram estruturados dois estudos de caso, participando de um a professora Nina e do outro o professor Téo. A professora Nina foi escolhida por ser do grupo de professores mais experientes na profissão e por ter evidenciado algumas dificuldades para ensinar alguns tópicos de Álgebra Linear. O professor Téo foi escolhido por ser do grupo de iniciantes na profissão e pelo modo como se envolveu no grupo, participando de todos os momentos de trabalho. Para a constituição dos casos, a informação foi recolhida por: entrevistas; gravação áudio e vídeo das reuniões de trabalho do grupo; observação de aulas dos professores; notas de campo da investigadora; registos escritos dos roteiros das aulas planificados no grupo de trabalho, das tarefas para sala de aula, das tarefas avaliativas, de questões de provas; aplicativos do GeoGebra desenvolvidos no grupo; e diários de classe dos professores. Da análise da informação recolhida, os casos foram estruturados mediante as seguintes dimensões: (1) Caracterização do professor; (2) Perspetivas e prática sobre o trabalho colaborativo; (3) Perspetivas sobre o ensino de Álgebra Linear; (4) A prática do professor Téo/Nina no ensino de Álgebra Linear; e (5) Contributo do trabalho colaborativo na prática do professor Téo/Nina no ensino de Álgebra Linear.

9.2. Conclusões do Estudo

Nesta secção são delineadas as principais conclusões da investigação em função das questões formuladas e da informação recolhida.

9.2.1. Como os docentes ensinam Álgebra Linear?

De modo a caracterizar o ensino de Álgebra Linear na instituição do Ensino Superior onde se realizou o estudo, importa tecer um 'olhar': (i) sobre as perceções da prática de ensino dos docentes que participaram da primeira fase do estudo; e (ii) sobre como se desenvolve essa prática, na segunda fase do estudo, a partir da participação de alguns desses professores num grupo de trabalho colaborativo, consubstanciada pela prática dos professores Téo e Nina.

São diversos os fatores que influenciam a forma como o professor ensina uma disciplina, alguns mais gerais, como a sua formação e a sua experiência de ensino, e outros mais relacionados com a prática de ensino (as estratégias de ensino, os materiais didáticos, as tarefas, a avaliação, dentre outros). No que concerne aos aspetos mais gerais, especificamente à formação, dentre os professores que participaram na primeira fase do estudo, dez tinham o grau de mestre e cinco o de doutor. Apenas um deles realizou toda a sua formação acadêmica numa área de conhecimento indiretamente ligada à Matemática. Os demais tinham ao menos uma das formações (inicial ou continuada) na área de Matemática.

Tomando por referência os ciclos da vida profissional de professores de Huberman (2000), constatou-se que apenas dois professores eram iniciantes na carreira, os demais tinham alguma experiência de ensino. O número de professores que estava situado na fase de estabilização era equivalente ao que estava na fase de diversificação ou questionamento (cinco), e dois estavam na fase de serenidade e distanciamento afetivo. Relativamente ao percurso profissional, a maioria exerceu sua atividade docente pelo menos em três subáreas da Matemática, envolvendo as disciplinas básicas, avançadas e aplicadas.

No que concerne ao tempo de experiência no ensino da Álgebra Linear, três professores tinham até quatro semestres, mas um destes estava no seu primeiro semestre lecionando a disciplina, e todos os demais haviam lecionado mais de cinco vezes. Considerando que a inserção de uma disciplina como componente curricular de um curso deriva da relevância que ela tem na formação dos alunos, os professores reconhecem a Álgebra Linear como uma poderosa ferramenta teórica para a resolução de problemas dentro e fora da Matemática, tal como referem Dorier (2002) e Strang (2014). Os professores aludem que o formalismo da teoria da disciplina promove o desenvolvimento da capacidade de organizar o raciocínio matemático, sendo que para alguns deles essa capacidade é perspetivada como forma de desenvolver a capacidade de abstração matemática. Há professores que associam a importância da disciplina à aquisição do conhecimento do seu conteúdo, de modo a obter as ferramentas teóricas necessárias para compreender outras disciplinas.

No que respeita à prática dos professores no ensino de Álgebra Linear, evidenciam-se as estratégias de ensino direto (Dubinsky, 1997; Ponte, 2005b), também conhecido como ensino tradicional, que se repercute na transposição do conteúdo de forma sistematizada e expositiva, alternada com a resolução de exercícios realizada pelo professor, em que os alunos assumem um papel mais de reprodutores da informação veiculada na sala de aula. Na exposição do conteúdo, os professores recorrem a diferentes abordagens associadas ao ensino tradicional. Alguns seguem a linha ‘definição, teorema, demonstração, propriedades, exemplos, exercícios' (Uhlig, 2002); outros, antes dessa sequência, tentam motivar os alunos para o estudo dos conteúdos falando um pouco das aplicações na resolução de problemas ou aplicações em conteúdos de outras disciplinas. Harel (2000) defende que é ineficaz procurar motivar os alunos para aprender um conceito específico, dizendo-lhes apenas o quão importante é o conceito ou que consequência terá se entenderem certos assuntos. Este autor argumenta que para aprenderem os conteúdos, os alunos devem sentir realmente a necessidade daquilo que estudam, como é a intenção dos professores investigados, porém devem ser envolvidos em situações problemáticas para poderem perceber o benefício intelectual do conhecimento que lhes foi direcionado. Nessa motivação inicial, há outros professores que procuram resgatar os conhecimentos prévios, sejam do Ensino Médio ou da Geometria Analítica, por meio de questionamentos ou por conexão dos conceitos utilizados. Os questionamentos são relativos à importância e à aplicação dos conceitos e as conexões são estabelecidas quando trabalham com exemplos, primeiro em duas e três dimensões para depois generalizar os resultados. Ponte (2005b) advoga que no ensino direto também tem lugar as aulas mais informais, em que o professor expõe o conteúdo de forma dialogada com os alunos, mas não há um envolvimento especial dos alunos, como na resolução de tarefas desafiadoras, no trabalho em grupo. Os alunos apenas respondem a uma conversa guiada pelo professor. Barros (2018) concluiu também, no seu estudo com 60 professores do Ensino Superior Politécnico de Portugal, com experiência no ensino de Álgebra Linear, que a metodologia que eles utilizam nas aulas teóricas remete ao ensino direto, com a exposição do conteúdo e a resolução de tarefas pelo professor. Segundo a autora, nas aulas de caráter mais prático essa tendência é amenizada, visto que a resolução de tarefas pelos alunos é a metodologia mais utilizada.

Para Ponte (2005b), os elementos que definem a estratégia do professor incluem, para além da forma como introduz os tópicos matemáticos, a natureza das tarefas e como a informação é discutida. Quanto à natureza das tarefas (Ponte, 2005b; Stein & Smith, 2009) propostas em Álgebra Linear, prevalecem os exercícios nas práticas letivas dos professores do contexto da investigação. Os professores resolvem muitos exercícios em sala de aula, de modo a atenuar a natureza teórica da disciplina e como uma estratégia de explorar e fazer a conexão entre os tópicos. Essa resolução geralmente acontece de forma direta, do professor para o aluno, dialogada, onde o professor procura fazer questionamentos aos alunos para explorar o seu entendimento e trabalhar os possíveis erros. Poucos destes professores exploram a resolução de exercícios pelo aluno em sala de aula e de entre estes há alguns que oferecem pouco tempo para tal atividade, o que pode ter pouca significância no processo formativo do aluno. Apenas um dos professores propõe, sobre um tópico específico da disciplina (Sistemas Lineares), tarefas mais desafiantes, como a resolução de alguns problemas de modelação no contexto do curso que ensina e tarefas de pesquisa de aplicações contextualizadas. Tais tarefas têm caráter avaliativo, realizadas extra classe pelos alunos organizados em grupo. Ponte (2005b) defende que continua a ser direto o ensino quando o professor propõe, a par dos exercícios de aplicação dos conceitos, algumas tarefas pontuais mais desafiadoras e problemáticas.

Relativamente à exploração das aplicações contextualizadas, como já mencionado, os professores têm consciência da importância da disciplina como ferramenta para a resolução de problemas, sendo que a maioria conhece algumas aplicações, falam sobre elas aos alunos, mas não envolve os alunos na resolução de tarefas contextualizadas (a exceção dos sistemas lineares). Alguns professores atribuem à sua formação a dificuldade de visualizar as aplicações dos conhecimentos adquiridos e como integrá-las na sua prática. Outra explicação é que somente com os conhecimentos da Álgebra Linear não se consegue resolver muitos problemas aplicados, porque os alunos precisariam de outros conteúdos que são estudados em disciplinas subsequentes. A investigação de Barros (2018) também aponta que, no contexto do estudo que realizou, a resolução de problemas da realidade é um dos aspetos menos enfatizado nas tarefas que os professores preparam para os alunos.

Na planificação e na dinamização das aulas o professor pode contar com um amplo conjunto de recursos. Na investigação realizada constatou-se que os professores recorrem sobretudo ao quadro e giz/caneta, aos livros, às apostilas (sebentas) e poucos são os que utilizam materiais tecnológicos. Na planificação de aulas a maioria recorre a diferentes livros para compor as suas anotações para aula e para selecionar as tarefas, pois referem ser difícil encontrar um livro de Álgebra Linear que tenha sequência de conteúdos e abordagem adequadas. Diante dessa dificuldade em relação ao livro didático, alguns professores optam por usar apostilas construídas por eles mesmos ou por outros professores. Nieto e Lopes (2006) também destacam a dificuldade de se ter um livro com uma abordagem adequada:

> Os livros mais antigos apresentam geralmente uma abordagem expositiva tradicional, na qual o desenvolvimento axiomático, apesar de importante, não parece apropriado, dependendo a que curso se destina. Mas, é surpreendente que poucos livros sobre Álgebra Linear acompanharam as necessidades diversificadas das pessoas que utilizam seus conteúdos dependendo de cada campo de atuação. (p. 611).

Na dinamização das aulas, os professores recorrem ao quadro e giz, apoiados das suas anotações ou da apostila. Poucos recorrem ao PowerPoint em alternativa ao quadro para projetar os enunciados e a parte teórica. Uma minoria recorre aos softwares matemáticos com a intenção apenas de explicar alguns conteúdos remetendo os alunos para o papel de observadores. Apenas um professor propõe tarefas com o uso de software envolvendo o tópico específico de matrizes. A investigação de Barros (2018) também aponta que a utilização de recursos tecnológicos pelos professores de Álgebra Linear é incipiente no sentido de promover uma aprendizagem mais ativa.

Na gestão curricular do professor, a avaliação é uma dimensão importante porque é o processo que regula o ensino e a aprendizagem (Ponte, 2005b). É através da avaliação que o professor recolhe a informação que lhe permite diagnosticar os principais erros e as dificuldades dos alunos, compreender o modo como raciocinam em torno dos conceitos envolvidos, para além de avaliar a sua própria prática de ensino, podendo identificar pontos salientes e problemáticos na sua planificação e no seu modo de trabalho. Para Ponte e Serrazina (2004), a avaliação das aprendizagens dos alunos é um indicador da prática letiva do professor, porque aquilo que ele valoriza nas avaliações acaba induzindo o que os seus alunos devem valorizar.

Os professores de Álgebra linear que participaram neste estudo avaliam os seus alunos por meio de provas escritas e individuais e poucos professores a diversificam, propondo o que chamam de trabalhos, que se traduzem em exercícios de verificação da aprendizagem, mas que podem ser resolvidos com consulta a materiais, tais como livros e apostilas. A proposição dos trabalhos por alguns professores acontece na intenção de motivar os alunos para a aprendizagem, de sanar as dúvidas e propiciar o reconhecimento de seus erros em tempo hábil à prova. Noutras disciplinas que lecionam, o método de ensino e de avaliação é o mesmo, predominando as provas. Porém, nas disciplinas com caráter mais aplicado há uma tendência de os professores envolverem mais os alunos na resolução de tarefas um pouco mais diversificadas.

No ensino de Álgebra Linear, a maioria dos professores utiliza o mesmo método de ensino que utiliza noutras disciplinas. Alguns professores sentem-se mais à vontade em lecionar outras disciplinas por reconhecerem a diversidade de representações a que podem recorrer, muitas vezes utilizando software. Referem também a necessidade de um esforço maior do professor na Álgebra Linear do que em relação a outras disciplinas, tanto na planificação como na dinamização da aula, de modo que eles se consigam fazer entender pelos alunos.

Relativamente às estratégias que utilizam diante das dificuldades dos alunos, os professores indiciam recorrer a diferentes estratégias para explicar o conteúdo, tais como: a exploração dos conceitos primeiramente num contexto concreto, o $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, para progressivamente trabalhar com exemplos mais complexos, como sugere Harel (2000); a revisita aos temas de maior dificuldade; e o uso das 'alavancas-meta' no discurso, como sugerem Uhlig (2003) e Dorier et al. (2000). Emergem outras estratégias como a resolução de um número maior de exemplos na sala de aula; a resolução de exercícios pelos alunos na sala de aula; a ênfase à linguagem da Álgebra Linear; e o trabalho sobre os erros do aluno (discutindo-os após as avaliações ou após a resolução de exercícios que o professor recolhe e corrige). Por fim, emerge o professor que procura cobrar na prova questões semelhantes às que propõe aos alunos nas listas de exercícios, valorizando aquele aluno que consegue memorizar a técnica ou o procedimento de resolução ao invés de uma compreensão mais ampla do conteúdo.

Tais resultados levam a considerar que se tratam de práticas de ensino mais de carácter de transmissão, contrariando o que é recomendado atualmente para o ensino de Álgebra Linear, tal como a utilização de instrumentos de avaliação que testem a verdadeira compreensão e não apenas a manipulação mecânica dos conceitos (Artigue et al., 2000); a valorização da atividade do aluno nas aulas (Diković, 2007; Strang, 2014); a utilização de softwares para criar ambientes interativos em que os alunos a partir das múltiplas representações dos objetos matemáticos possam conjeturar, simular e visualizar suas diferentes características sem as limitações do uso do lápis e papel (Carlson, 1993; Day & Kalman, 1999; Diković, 2007; SBEM, 2013, Gonçalves, 2018).

Considerando que ao refletir sobre as experiências de sala de aula o professor fica atento ao modo como ensina e à evolução dos alunos no ambiente de aprendizagem que lhes foi proporcionado (Stein & Smith, 2009), os professores foram convidados a falar sobre as suas práticas de reflexão no ensino da Álgebra Linear. A reflexão sobre a sua prática letiva indicia fazer parte das atividades profissionais da maioria dos professores. A reflexão, em geral, acontece em diferentes momentos, após uma tarefa proposta, após as aulas e de um semestre para o outro. O resultado dessa reflexão se concretiza em explicações sobre os conteúdos que causaram mais dificuldade ou sobre alguma situação que causou dúvidas aos alunos, na utilização de diferentes estratégias para explicar aspetos críticos do conteúdo, na inversão da sequência de alguns conteúdos de modo a favorecer a aprendizagem. Particularmente, para um dos professores o resultado dessa reflexão foi a integração do computador para abordar alguns dos tópicos da disciplina; e para outro professor, a integração de tarefas direcionadas ao contexto do curso em que leciona. Os professores mais em final de carreira referem que refletem muito pouco sobre a suas aulas. Há indícios de que o processo de reflexão entre os professores é individual e incipiente, pois as mudanças que referem em sua prática e que derivam dessa reflexão se refletem mais sobre a transmissão do conteúdo do que sobre as estratégias que mobilizem o aluno no processo de aprendizagem. Há indícios também de que com a cumulação da experiência o professor se acomoda em relação à sua prática de ensino. O trabalho colaborativo entre pares pode ser o ambiente propício para elevar o poder de reflexão sobre suas práticas, se apoiarem uns aos outros, independente da fase que estão na carreira profissional, de modo a construírem estratégias que possam melhorar os processos de ensino e de aprendizagem.

Na trajetória da primeira para a segunda fase do estudo, atenta-se para as práticas de Nina e Téo que se circunscreviam nas perspetivas já apresentadas. Ao integrarem o grupo de trabalho de natureza colaborativa, o seu ensino e algumas de suas conceções se alteraram em relação ao contexto apresentado. Téo, que tinha a tendência em explorar os conceitos em demasiada profundidade, passou a explorar menos os aspetos abstratos e a dar mais ênfase à construção dos conceitos de forma mais intuitiva para depois os formalizar, a valorizar a interpretação geométrica e as aplicações contextualizadas dos conceitos. Nina refere que com a abordagem da visualização geométrica dos conceitos que passou a utilizar na sua estratégia, alguns conceitos adquiriram mais significado para si, o que se traduziu em os conseguir desenvolver com mais segurança, explorando as diferentes representações dos conceitos. Ambos os professores destacam que passaram a ter uma conceção de ensino mais focada no aluno, permitindo a sua participação na construção dos conceitos, ao invés de os 'receber' de forma passiva.

Resultante das atividades realizadas no grupo de trabalho, na dinamização de sua prática de ensino os professores utilizaram, para além do quadro e giz, o PowerPoint, vídeos, o GeoGebra e construíram um conjunto de documentos que inclui roteiros de aula e tarefas. O PowerPoint foi utilizado pelos professores mais no sentido de projetar os enunciados de tarefas que eram propostas, de modo a facilitar os momentos de discussão sobre as resoluções com os alunos. Nina recorreu ao uso de vídeos em sala de aula para ilustrar de forma expositiva algumas aplicações contextualizadas dos tópicos de matrizes e sistemas lineares. Enquanto que Téo os utilizou extra classe de modo a complementar a formação dos alunos em alguns tópicos específicos. Entretanto, como não envolvia os alunos em alguma tarefa em torno dos vídeos, apenas os indicava aos alunos, no momento de promover uma discussão acerca dos mesmos, esta esvaziava-se pelo facto de poucos alunos os assistirem.

O GeoGebra foi utilizado em sala de aula pelos professores para a exploração de diferentes representações dos conceitos e pelos alunos na resolução de tarefas extra classe. Na primeira vez em que utilizaram o software em sala de aula, na discussão e sistematização das conclusões sobre uma tarefa exploratória sobre mudança de base, os professores aperceberam-se da necessidade de envolver os alunos na sua manipulação e não de apenas o ver ser manipulado pelo professor. Na reflexão em grupo consciencializaram-se que a exploração do software pelos alunos poderia aumentar o seu interesse pela resolução de tarefas bem como potencializar a sua aprendizagem, tal como sugerem Day e Kalman (1999), Diković (2007), Gonçalves (2018) e Siple et al. (2017). Com esse objetivo os professores envolveram os alunos na resolução de tarefas avaliativas mediadas pelo GeoGebra, resolvidas em grupo e extra classe.

Enquanto que Nina se limitou à manipulação de aplicativos do GeoGebra construídos pelo grupo, Téo participou diretamente da construção dos mesmos, pela sua familiaridade e interesse para com a tecnologia. Algumas discussões no grupo acerca de como ensinar alguns tópicos específicos, que não resultaram na planificação de um roteiro de ensino ou de uma tarefa, o estimularam a espontaneamente construir aplicativos e a partilhar com o grupo. A atitude de Téo implicou que o grupo discutisse como tais aplicativos poderiam ser explorados em aula.

No seio do grupo de trabalho foram desenvolvidos um conjunto de documentos constituídos pelos roteiros das aulas planificadas em conjunto e por tarefas. Para além dos exercícios de fixação de conteúdo – que envolviam a aplicação imediata de conceitos ou alguma demonstração, os professores integraram em suas práticas a exploração de tarefas de outra natureza, tais como: (i) tarefas avaliativas com o intuito de explorar aplicações contextualizadas e as diferentes representações de alguns conceitos; (ii) tarefas exploratórias com a finalidade de envolver os alunos na construção de alguns conceitos; e (ii) uma tarefa diagnóstica com o intuito verificar os conhecimentos prévios dos alunos.

Logo no início do trabalho conjunto, foi elaborada conjuntamente uma tarefa avaliativa e contextualizada sobre sistemas lineares. Tal tarefa fora concretizada por Nina, mas não por Téo. Inicialmente, Téo tinha certa resistência em avaliar os alunos por outro meio que não fosse por provas. De forma geral, as tarefas que os professores propunham eram os exercícios e não tinham muita referência de que outro tipo de tarefa poderia ser proposto. Com a planificação da primeira aula conjunta, foi proposta uma tarefa exploratória para introduzir o conceito de Mudança de base, mediada pelo uso da tecnologia pelo professor. A partir das reflexões geradas no grupo com estas duas primeiras tarefas, Téo encorajou-se a dinamizar uma segunda tarefa avaliativa planificada em conjunto, que envolvia uma parte teórica e o uso de software para a exploração de diferentes representações de operadores lineares no plano e no espaço.

A partir da experiência vivenciada no primeiro semestre, os professores, particularmente Téo, mostraram abertura para a elaboração e concretização de uma série de tarefas de diferente natureza, tanto como parte integrante das suas aulas como tarefas avaliativas. Aos poucos, com as discussões no grupo sobre como dinamizar as tarefas e sobre como fazer a discussão com os alunos, os professores foram dando tempo suficiente para estes as resolverem (quando eram propostas em classe), minimizando a tendência de dizer aos alunos como resolver e incentivando o questionamento de modo a orientá-los a chegar à solução. A resolução de tarefas em sala de aula possibilitou aos professores que se apercebessem de uma série de dificuldades dos alunos o que permitiu que ficassem mais atentos ao modo como ensinam e a aspetos do conteúdo que deveriam focar mais. Para além disso, proporcionaram que os professores trabalhassem em cima dos erros dos alunos. O conhecimento que os professores adquiriram no processo da aprendizagem dos seus alunos, pela identificação de dificuldades e erros, na resolução de tarefas em classe, permitiu que eles desenvolvessem o seu conhecimento do conteúdo e dos alunos (Ball et al., 2008) e o seu conhecimento das características da aprendizagem matemática (Carrilllo et al., 2013). Tais conhecimentos potenciam, segundo os autores referidos, a ação pedagógica do professor na consideração e na clarificação dos erros que os alunos cometem nas suas atividades de aprendizagem, o que, consequentemente, favorece a compreensão do que os alunos estudam.

Pode-se concluir que a diversidade de materiais explorados pelos professores desenvolveu a sua capacidade de saber utilizar e integrar esses materiais em suas práticas. Para o desenvolvimento dessa capacidade contribuíram a partilha de experiências e as reflexões conjuntas no grupo e individualmente promovidas em torno dos mesmos. No grupo, cada professor partilhava as dificuldades que sentia na utilização de cada material, as dificuldades dos alunos, retirando, assim, ilações sobre os cuidados no seu uso e o que poderia ser melhorado se a experiência fosse repetida, como, por exemplo, como preparar os alunos em particular para o uso de software.

Relativamente ao sistema de avaliação, com a participação no grupo de trabalho, os professores Téo e Nina integraram para além das provas, as tarefas avaliativas, que em número e tipologia aumentou do primeiro para o segundo semestre de trabalho conjunto. O aspeto menos atingido na prática dos professores foi a questão do *feedback* aos alunos tanto das tarefas avaliativas como das provas. Ambos os professores nem sempre conseguiram corrigir as tarefas avaliativas de modo a dar um retorno aos alunos sobre os seus erros e esclarecer suas dúvidas a tempo da realização das provas, que tinham um peso maior que as tarefas. Os professores também não tinham por hábito discutir a resolução das provas com os alunos, embora os incentivassem a procurá-los extra classe para verificarem seus erros e acertos. Percebe-se que na prática de Téo e Nina não havia um trabalho sobre os erros dos alunos especificamente nas provas. No seio do grupo, foram analisados os erros cometidos pelos alunos em algumas questões específicas, elaboradas entre os pares. Porém, esta análise não aconteceu de seguida à concretização, sendo que as ilações retiradas permitiram o amadurecimento das tarefas e questões para quando fossem replicadas em outros semestres. Importa na prática de ensino que o professor considere estratégias que propiciem a identificação, a discussão e a superação dos erros dos alunos (Barros et al., 2016; Ramos & Curi, 2014).

O trabalho entre pares propiciou aos professores a oportunidade de repensarem a sua prática e colocarem em ação estratégias de ensino que procuravam valorizar o papel do aluno nos processos de ensino e aprendizagem por meio de tarefas diversificadas, impactando a forma como ensinam Álgebra Linear.

9.2.2. Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear?

O reconhecimento pelo professor das dificuldades que tem sobre o ensino de uma disciplina pode ser um fator que o impulsiona a encontrar formas de as ultrapassar. A maioria dos professores que participou da primeira fase da investigação reconhece que tem dificuldades no ensino de Álgebra Linear. A principal dificuldade é lidar com as dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos e procedimentos envolvidos na teoria da disciplina, que tem uma natureza abstrata (Dorier, 2002). Ou seja, os professores têm consciência das dificuldades de ensinar os tópicos abstratos de modo que os alunos possam compreendê-los. Dentre os tópicos mais difíceis de ensinar, os professores destacam os Espaços Vetoriais, pela dificuldade dos alunos em abstrair a teoria axiomática envolvida e pela dificuldade em explorar tarefas enquadradas em contexto de realidade (Ponte, 2005b) sobre este tema, de modo que os alunos se apercebam da natureza e da importância da teoria, motivando-os para a aprendizagem da disciplina. Alguns professores já experimentaram diferentes estratégias para ensinar este tópico, mas reconhecem que não se torna fácil encontrar aquela que faça a diferença na aprendizagem dos alunos. Essa dificuldade em relação ao ensino dos espaços vetoriais também é compartilhada por Carlson (1993), que chega a questionar a sua profissão quando se depara com as dificuldades dos alunos em relação a este tópico.

> Meus alunos aprendem primeiro como resolver sistemas de equações lineares e como calcular produtos de matrizes. Isso é fácil para eles. Mas quando chegamos aos subespaços, dependência e independência linear, meus alunos ficam confusos e desorientados. É como se um nevoeiro denso os envolvesse e eles não pudessem ver onde estão ou para onde estão indo. E eu, como seu professor, fico desanimado e questiono minha escolha de profissão. (Carlson, 1993, p. 29).

Na perspetiva dos professores, para além do problema com a abstração e com a compreensão dos conceitos, os alunos têm dificuldades: (i) com as demonstrações, o que é corroborado por Hillel (2000), Uhlig (2002) e Alvarado e González (2010); (ii) em lidar com as diferentes linguagens da Álgebra Linear; (iii) em entender a representação de cada objeto matemático dentro de cada uma dessas linguagens (Hillel, 2000); (iv) relacionadas com a matemática básica quando operam com a teoria de matrizes e sistemas lineares.

Outras dificuldades no ensino são relatadas por alguns dos professores. Um deles refere ser difícil ensinar os operadores lineares específicos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (rotação, cisalhamento, reflexão) porque tem dificuldade em compreender as diferentes representações destes operadores e as conexões com outros tópicos da Álgebra Linear, limitando o seu ensino à exploração dos procedimentos envolvidos nessa teoria. Um outro professor, por ter uma formação superficial em Álgebra Linear, revela ter algumas lacunas no seu conhecimento do conteúdo desta disciplina.

Os professores, de forma geral, também revelam ter dificuldades de explorar aplicações contextualizadas dos tópicos de Álgebra Linear e de utilizar materiais tecnológicos na disciplina com a finalidade de envolver o aluno nas suas atividades de aprendizagem. Alguns referem o uso de softwares para, por exemplo, ilustrar o escalonamento de matrizes, ou aplicações contextualizadas envolvendo matrizes, mas manifestam dificuldades em elaborar tarefas que envolvam tais materiais e aplicações.

Na perspetiva dos professores, algumas de suas dificuldades no ensino da Álgebra Linear podem estar relacionadas com a sua formação inicial e continuada. Há professores que têm uma formação mais teórica em Matemática, porém sentem dificuldades em lecionar a Álgebra Linear para cursos de Engenharia, em que se valoriza mais as aplicações do que as demonstrações. Neste grupo de professores há quem sinta dificuldade em utilizar diferentes estratégias de ensino por considerar que a sua formação foi mais técnica do que voltada aos aspetos didáticos. Há indícios de que a formação destes professores envolveu mais o conhecimento do conteúdo do que o conhecimento didático sobre as estratégias de como ensinar conteúdos matemáticos, de como envolver os alunos nas suas atividades de aprendizagem, de como usar materiais didáticos, como, por exemplo, os tecnológicos.

Por outro lado, há professores que consideram que a sua formação não foi suficientemente adequada para lecionar essa disciplina, e quem tem desempenhado esse papel é o seu estudo do conteúdo para a planificação das aulas e a maturidade que adquirem no exercício da profissão docente (Elbaz, 1983; Ponte & Chapman, 2006; Schön, 2000).

O conhecimento do conteúdo das disciplinas que leciona e o conhecimento sobre as estratégias de ensino que podem facilitar a aprendizagem dos alunos integram um conjunto de conhecimentos que são necessários para o professor no exercício da sua prática docente (Ball et al., 2008; Shulman, 1986; Ponte, 2012). Esse conjunto de conhecimentos é uma combinação de conhecimento teórico e conhecimento prático (que inclui a sua experiência e as suas reflexões), que começa a ser adquirido na formação inicial e que se acumula com a prática docente (Viseu, 2009). De modo a orientar a sua ação em prol da aprendizagem dos alunos, importa os professores desenvolverem os domínios do conhecimento para ensinar que sobressaem na análise realizada sobre as perspetivas dos professores participantes na primeira fase da investigação em relação ao seu ensino: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento das estratégias de ensino e o conhecimento dos alunos — os seus processos de aprendizagem, os seus interesses e as suas dificuldades.

Centrando o foco nos professores do grupo de trabalho colaborativo, Nina e Téo, antes de integrarem o grupo, ambos revelaram sentir dificuldades no ensino da Álgebra Linear. As dificuldades de Téo não se relacionavam ao conhecimento do conteúdo da Álgebra Linear, mas sobre as estratégias de ensino que poderiam motivar os alunos para a aprendizagem dos tópicos abstratos da disciplina e sobre aquelas que poderiam minimizar erros relacionados com os pré-requisitos da disciplina. Téo reconhece que apenas o conhecimento específico não é suficiente para ensinar, indo ao encontro dos elementos chave do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Ball et al., 2008; Shulman, 1986) do professor, que, além do conhecimento do conteúdo específico, envolve o conhecimento das estratégias de ensino e o entendimento das dificuldades de aprendizagem dos estudantes de um conteúdo para outro.

Como Téo é profissional muito interessado, conhece uma série de aplicações do conteúdo que poderiam motivar os alunos para perceber a aplicabilidade dos tópicos abstratos da disciplina. Entretanto, ele não vislumbrava como as integrar de forma concreta na sua prática, apenas falava sobre elas. Harel (2000) defende que os alunos devem ser envolvidos na resolução de problemas de modo a perceberem a importância de determinado assunto. De forma geral, em suas aulas Téo costumava assumir um perfil mais teórico. Relativamente às dificuldades formativas dos alunos, costumava fazer uma revisão do conteúdo relacionado, mas elas pareciam ser persistentes.

Assim como Téo, Nina também sentia dificuldades em evidenciar aos alunos a aplicabilidade da disciplina e em motivar os alunos para aprender os tópicos que a integram. Em suas aulas, a docente focava-se mais nos procedimentos de resolução, em detrimento de explorar a conexão com outras disciplinas do currículo dos cursos que lecionava e de explorar aplicações contextualizadas dos tópicos. A docente destacou que sentia dificuldades, de forma geral, em ensinar a disciplina pela sua natureza abstrata, mas em particular os operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, por não ter uma compreensão ampla do conteúdo, limitando a sua prática a procedimentos algébricos envolvidos nessa teoria. Tal prática não levava em consideração a importância das diferentes representações do objeto matemático como condição essencial para que ocorra a compreensão matemática (Duval, 2012).

De modo a evidenciar aos alunos a aplicabilidade da disciplina e motivá-los para sua aprendizagem, no desenvolvimento do trabalho conjunto no grupo colaborativo, priorizou-se por desenvolver propostas de ensino que explorassem a representação geométrica dos conceitos. Como advoga Harel (1989), tal exploração contribui significativamente para a compreensão conceitual dos alunos de Álgebra Linear. Para além disso, priorizou-se pela inserção de aplicações contextualizadas para alguns dos tópicos de Álgebra linear, numa perspetiva de abstração progressiva (Harel, 2000). Os momentos criados no grupo para o estudo conjunto de algumas aplicações se revelaram para a própria aprendizagem dos professores acerca das aplicações.

Durante as discussões no grupo emergiu a ideia de que um dos motivos pelos quais os alunos não se apercebiam da importância da disciplina seria o facto dos próprios professores não explorarem em suas aulas a conexão entre os próprios conceitos da Álgebra linear e desta com outras disciplinas do currículo. Particularmente, Nina foi um dos professores que manifestou ter dificuldade em visualizar essa conexão. Auxiliar o aluno a perceber essas associações é fundamental na prática de ensino. A conexão entre a Geometria e Álgebra Linear, por exemplo, pode propiciar significados para os conceitos teóricos, auxiliando o aluno a reconhecer a relação entre os conteúdos curriculares e sua formação (SBEM, 2013). No grupo de trabalho colaborativo foram discutidas estratégias para evidenciar aos alunos a conexão entre os tópicos, que consistiam no resgate pelo professor dos pré-requisitos da própria disciplina quando introduzia um novo tópico, na exploração de tarefas que promovessem a conexão entre os tópicos e de questões que procuravam relacionar alguns conceitos da Álgebra Linear com disciplinas como por exemplo, a Geometria Analítica, o Cálculo Diferencial e as Equações Diferenciais.

No decorrer das discussões promovidas pelo trabalho em grupo entre pares, Nina foi reconhecendo outras dificuldades que possuía relacionadas ao conhecimento do conteúdo, para além dos operadores lineares, tais como a compreensão dos conceitos de espaço e subespaço vetorial, o significado do que é o núcleo e a imagem de uma transformação linear, e a finalidade de se encontrar uma matriz mudança de base. Para a docente, tais dificuldades foram, aos poucos, sendo minimizadas pelas discussões no grupo sobre qual a finalidade de ensinar os tópicos, sobre como os ensinar, sobre a inversão da sequência dos conteúdos de modo a melhor conectá-los, com a abordagem da interpretação geométrica dos conceitos. Particularmente, em alguns momentos, na fase de planificação de alguma aula ou tarefa, Nina inicialmente apresentava resistência quanto às novas ideias que surgiam. Porém, à medida que a discussão evoluía e a oportunidade que tinha para esclarecer algumas dúvidas relativas ao conteúdo, a docente mostrou abertura às propostas, inclusive lançando questões sobre as quais o grupo não tinha pensado.

Nina também apresentou dificuldades na dinamização de aulas planificadas no grupo mediadas pelo GeoGebra, principalmente no primeiro semestre de trabalho conjunto, em que foi o seu primeiro contacto com o software. No segundo semestre de trabalho conjunto, Nina teve apoio do grupo quanto às potencialidades do software, superando as dificuldades que teve no primeiro semestre de trabalho na dinamização da aula sobre Mudança de Base, que fora mediada pelo software, tal como refere:

> Pedir para um aluno fazer um trabalho usando o GeoGebra, eu nunca ia fazer isso sozinha. (...). A Bruna fez um tutorial para fazer a questão da letra no GeoGebra, que ajudou bastante. Me permitiu fazer exatamente porque eu sabia que alguém do grupo ia apoiar, senão eu não ia propor uma coisa desse tipo. (...). No 1.º semestre eu me senti muito desconfortável em mexer até no que estava pronto, eu senti que eu perdi o meu objetivo naquela aula de mudança de base, não sabia direito o que eu queria com aquilo. A segunda vez já achei melhor. (...). A Bruna falou que talvez eu estivesse mais confortável em trabalhar com o GeoGebra. (EGR2)

Para além disso, no segundo semestre foi dinamizado um número maior de tarefas utilizando o GeoGebra, contribuindo para a familiarização da docente com este software. Tal familiaridade não implicou na docente elaborar as suas próprias tarefas mediadas pelo GeoGebra, apenas em estar mais à vontade em manipular os aplicativos construídos pelo grupo e utilizá-los em sua prática com os alunos.

Corroborando com a literatura, o trabalho colaborativo entre pares se revelou um meio dos professores aprenderem uns com os outros (Fiorentini, 2004; Gumiero & Pasuch, 2019; Hargreaves, 1998; Robutti et al., 2016), pela coexistência de professores com diferentes experiências de ensino, de formação e de habilidades. O trabalho em grupo proporcionou a Nina, para além da tomada de consciência de suas dificuldades (Martinho, 2011), uma abertura para experimentar novas estratégias de ensino, incluindo o uso de tecnologias na sua prática. Téo, por sua habilidade com a tecnologia, ocupou um papel central no grupo, explorando tanto os recursos do GeoGebra quanto as potencialidades para o desenvolvimento das atividades, auxiliando os professores do grupo, em especial Nina. Por sua vez, Nina teve um papel considerável no grupo pelo seu contributo com as questões pedagógicas, especialmente na atitude de refletir sobre o papel do aluno na elaboração dos recursos didáticos. Assim, o trabalho colaborativo potencializou as habilidades, que inicialmente tendiam a ser individuais, que ao longo do trabalho foram sendo compartilhadas, enriquecendo a prática docente dos membros do grupo (Hargreaves, 1998).

9.2.3. Que perspetivas têm os professores sobre o trabalho colaborativo?

Algumas pesquisas têm evidenciado que o trabalho colaborativo é um grande propulsor da aprendizagem e do desenvolvimento profissional do professor (por exemplo, Boavida & Ponte, 2002). O desenvolvimento profissional é um processo que se desenvolve ao longo da carreira, que deriva das aprendizagens pessoais, das oportunidades informais vividas no contexto profissional e das oportunidades de aprendizagem formais, como as disponíveis em atividades de formação contínua (Ferreira & Miorim, 2011; Forte & Flores, 2012).

Da averiguação das práticas de formação contínua dos professores, na primeira fase do estudo, constatou-se que a maioria deles parecia não ter assumido que a formação ao longo da carreira é importante para a sua vida profissional. As suas práticas de formação contínua eram principalmente voltadas para a progressão na carreira docente, ou em ações promovidas pela instituição, mas que pareciam ter pouco poder transformador das suas práticas profissionais (Hargreaves, 1998).

O trabalho em colaboração, na preparação e reflexão sobre as práticas de ensino não parecia fazer parte da prática dos professores. A maioria trabalhava isoladamente e eventualmente trocavam ideias sobre a prática em conversas informais. O compartilhamento de experiências, informações e materiais costumava ocorrer mais quando os professores estavam no início da carreira, quando estavam num ciclo profissional de aprendizagem (Huberman, 2000), ou quando lecionavam uma disciplina pela primeira vez. Para alguns professores, a cultura de trabalhar isoladamente deriva de características da sua personalidade, como a timidez, o que tende a minimizar a interação com os colegas; por acomodação, pois a experiência acumulada nas disciplinas que lecionam indicia que os levam a replicar o que costumam fazer; e a ausência de oportunidade de ter com quem trabalhar, pois são os únicos que lecionam determinadas disciplinas afins (da Matemática) no Centro de Ensino em que atuam.

O estudo de Barros (2018) também evidencia que é pouco habitual, no Ensino Superior Politécnico de Portugal, o trabalho entre pares na preparação das unidades curriculares, visto que apenas alguns dos 60 professores inquiridos em seu estudo, costumam planificar as aulas com outros professores. Treffert-Thomas e Jaworski (2009), num estudo com 31 professores do Departamento de Matemática de uma Universidade do Reino Unido, concluíram também que embora a maioria dos professores referisse já ter discutido estratégias de ensino com colegas e tivessem considerado isso útil, apenas cerca de metade dos professores estaria disponível para participar em reuniões organizadas especificamente para discutir abordagens de ensino.

Considerando todas as disciplinas que lecionam, os professores participantes da primeira fase da presente investigação, planificam as suas aulas recorrendo principalmente a livros didáticos e à Internet e poucos utilizam recursos tecnológicos, como o computador. Tais recursos eram utilizados pelo professor com a finalidade de mostrar aos alunos algumas visualizações geométricas ou por professores e alunos em algumas disciplinas que envolvem programação. Foi possível observar que o facto de os professores pouco aderirem ao uso dos recursos tecnológicos na sua prática de ensino, não se restringia à disciplina de Álgebra Linear, mas se concretizava na sua atividade na sala de aula de forma geral.

Relativamente às conceções e práticas dos professores relativamente ao trabalho colaborativo, oito professores evidenciaram ter alguma experiência de trabalho com seus pares. Destes professores, seis que estão inseridos num mesmo Departamento participaram num Projeto de Ensino que envolvia as disciplinas de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, que consistia na planificação do plano de ensino da disciplina (material didático; listas de tarefas; tipo, quantidade e datas das avaliações) e das avaliações. Porém, a planificação de aulas era realizada isoladamente por cada professor e não havia lugar para a reflexão sobre as estratégias de ensino, problemáticas vivenciadas na sala de aula e os resultados das avaliações. Um outro professor participou de um trabalho interdisciplinar entre pares na planificação de tarefas para os alunos de uma mesma fase da graduação na área de Administração de Empresas. O objetivo com as tarefas era relacionar os conhecimentos das diferentes disciplinas na resolução de problemas retirados de contexto empresarial. Por último, um outro professor considera que desenvolveu um trabalho em colaboração com seus pares que consistia na análise da grade curricular do curso em que atuava, da distribuição das disciplinas para os professores, da abertura de concurso para professores e incluía a partilha de experiências de cada participante. Na perspetiva dos professores, o trabalho colaborativo se concretiza quando um grupo de professores realiza uma atividade em conjunto, o que, para alguns autores, nem todo trabalho conjunto representa uma situação de colaboração (por exemplo, Boavida & Ponte, 2002; Hargreaves, 1998).

Apesar das características do trabalho que foi vivenciado por alguns dos professores e de outros imergirem em Departamentos em que essa prática era ausente, não significa que os professores não tivessem perceções sobre as vantagens, as desvantagens e as limitações do trabalho colaborativo entre pares. Como vantagens, os professores apontaram a partilha de experiências e troca de ideias sobre as suas práticas (Gumiero & Pasuch, 2019); a possibilidade de aprender uns com os outros (Fiorentini (2004); o incentivo ao professor para sair da zona de conforto (Goulet et al., 2003); a possibilidade de inovar a prática de ensino (Robutti et al., 2016); e o sentimento de que não está sozinho na realização de uma ação de ensino (Fullan & Hargreaves, 2001).

Como desvantagens do trabalho colaborativo, os professores apontaram o risco de receber críticas não construtivas; a falta de colaboração de alguns dando a sensação que se está trabalhando para o colega; falta de negociação prevalecendo as ideias de uma pessoa; a concorrência entre os professores quando um quer mostrar que sabe mais que os outros; o risco do julgamento sobre os colegas e suas práticas; e o aumento da carga de trabalho. Pode-se inferir que as circunstâncias destacadas pelos professores tendem a influenciar a noção que têm de colaboração entre pares. Porém, a literatura aponta que a colaboração não tem lugar num grupo onde prevalecem tais circunstâncias (Boavida & Ponte, 2002; Fiorentini, 2004; Fullan & Hargreaves, 2001; Goulet et al. 2003; Martinho, 2011). Isso não quer dizer que, por exemplo, no início de um trabalho conjunto tais situações não possam ocorrer, ou ao longo do desenvolvimento do trabalho (num momento de dispersão do grupo), pois o trabalho colaborativo é um "processo emergente" (Boavida & Ponte, 2002, p. 5), onde as relações precisam ser construídas e mantidas. Importa estabelecer um nível de confiança entre os professores para que estes se sintam confortáveis e apoiados para expor a sua prática e as suas ideias.

Relativamente ao que poderia limitar o trabalho colaborativo, na perspetiva dos professores, ganha destaque a conciliação de horários entre os professores para dinamizarem sessões de trabalho em conjunto, a disponibilidade de tempo para as sessões de trabalho e para cumprir com as tarefas acordadas e a falta de habilidade para o trabalho em equipe. Tais limitações também são destacadas por alguns autores, como Alonso-Sáez et al. (2019) e Silva (2011).

Ao integrarem um grupo de trabalho colaborativo com seus pares, alguns dos professores que participaram da primeira fase do estudo tiveram a oportunidade de discutir a sua prática de ensino e as problemáticas vivenciadas no ensino da Álgebra Linear bem como planificar e replanificar aulas/tarefas em conjunto em função das reflexões realizadas. No que respeita aos professores que constituem os estudos de caso, enquanto Nina expressa a experiência de trabalho com pares no Projeto de Ensino que envolveu as disciplinas de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, já Téo não vivenciou qualquer experiência de trabalho com pares na sua prática letiva, salientando uma colaboração enquanto estudante na elaboração de conteúdo para o Wikipedia.

Um ponto importante na consolidação de um trabalho colaborativo é a existência de objetivos comuns que orientem esse trabalho (Boavida & Ponte, 2002; Fiorentini, 2004), para além dos objetivos individuais assumidos ou não perante o grupo. Téo e Nina iniciaram o trabalho no grupo com a expetativa de conhecer e experimentar novas abordagens para o ensino da Álgebra Linear de modo a favorecer os processos de ensino e aprendizagem nesta disciplina. Tal expetativa era compartilhada pelos demais elementos do grupo. Particularmente Téo desejava desenvolver-se em relação às estratégias pedagógicas que poderiam facilitar a compreensão dos alunos de determinados conteúdos, enquanto que Nina esperava que as abordagens desenvolvidas pelo grupo motivassem os professores a ensinar e os alunos a aprender.

A literatura destaca a relevância da negociação de objetivos como um processo contínuo para a eficácia de uma colaboração (Boavida & Ponte, 2002; Fiorentini, 2004; Goulet et al., 2003). No grupo houve essa preocupação. Por exemplo, no final do primeiro semestre de trabalho, Nina manifestou que o que lhe desagradava na execução do projeto era a falta de um planeamento prévio das atividades a serem realizadas, o que fazia com que algumas planificações ocorressem muito próximas à concretização em sala de aula, o que dificultava a sua preparação para a dinamização dessas atividades. Nesse sentido, no semestre seguinte procurou-se desenvolver as atividades com uma maior organização. Tal organização derivou da experiência que foi sendo adquirida pelo grupo e do reconhecimento de quais conteúdos mereciam uma maior atenção em razão das dificuldades dos alunos. O grupo passou a dar atenção a outro ponto levantado por Nina que se relacionava com a discussão conjunta das resoluções dos alunos diante de algumas questões de prova e tarefas, aspeto que no primeiro semestre foi dado menor ênfase. Tal atitude contribuiu para um melhor reconhecimento das dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo, das dificuldades que podem ter sido geradas em razão da falta de clarificação das questões, e o próprio esclarecimento de dúvidas dos professores em relação ao conteúdo envolvido. Referente ainda à revisão de objetivos, em função das dificuldades dos alunos com a concretização de tarefas mediadas pelo GeoGebra, por sugestão de Téo e Nina, o grupo desenvolveu estratégias de ensino que envolvessem a resolução de tarefas mediadas pelo software de modo que houvesse um contacto progressivo com as suas potencialidades. Tal dificuldade manifestada pelos alunos também foi evidenciada por alguns dos professores do grupo, especialmente por Nina, levando os professores mais experientes a prestar apoio para a familiarização de todos com as potencialidades do software. Os aspetos destacados evidenciam o cuidado que havia no grupo com os objetivos e com as relações de trabalho entre os colegas de modo que todos se sentissem desafiados, mas ao mesmo tempo confortáveis (sem se sentirem constrangidos) com o trabalho no seio do grupo.

Ao fazerem um balanço do trabalho realizado no grupo, ambos os professores destacam o clima de confiança que foi construído, de forma que todos se sentissem à vontade para expor suas ideias sem receio de críticas. Destacam a importância da coexistência no grupo de professores com diferentes experiências e competências, o que proporcionou oportunidades de aprendizagem acerca de diferentes metodologias de ensino, das experiências de ensino já testadas e que haviam dado certo ou não, de aplicações contextualizadas dos conteúdos, do conhecimento do conteúdo e do uso da tecnologia para o ensino da Álgebra Linear. Para os professores, a troca de ideias e o poder de reflexão sobre elas são acrescidos quando num grupo se juntam pessoas com diferentes competências e experiências (Boavida & Ponte, 2002; Hargreaves, 1998).

Relativamente ao envolvimento no trabalho realizado no seio do grupo, Téo procurou contribuir com a partilha de materiais provenientes de diferentes fontes, com ideias para a construção das propostas de ensino do grupo, especialmente com aquelas que envolviam o GeoGebra e com a revisão da escrita final das atividades elaboradas, atentando-se à linguagem matemática e a clareza do texto. Já Nina refere que se envolveu mais na reflexão sobre as ideias apresentadas pelos colegas e sobre a concretização das propostas de ensino do que apresentando ideias ou tomando a iniciativa para a construção das propostas. A docente acredita que o papel que assumiu foi relevante pela preocupação de se colocar na posição do aluno, tanto em relação ao nível de dificuldade e complexidade das ideias que estavam em discussão, como quanto à clareza das mesmas, muitas vezes resultando em novos rumos para as planificações. Ambos os professores consideram que o seu envolvimento foi maior no segundo semestre de trabalho pela periodicidade semanal dos encontros, implicando num número maior de atividades realizadas e um maior contacto entre os professores. Os professores são unânimes em relação ao que retiraram do grupo com a sua participação, que foi o apoio para experimentar novas abordagens de ensino, diversificando a avaliação e procurando envolver os alunos no seu processo de aprendizagem e são enfáticos em afirmar que se estivessem trabalhando sozinhos dificilmente colocariam em prática as mudanças que realizaram em suas práticas de ensino.

Ao final de um ano de trabalho entre pares, Nina e Téo reconhecem pontos que poderiam ser melhorados na dinâmica desse trabalho, tais como:

- a necessidade de um esforço maior para apresentar nas reuniões do grupo as ideias mais lapidadas de modo a rentabilizar o trabalho, visto que na maioria das vezes as ideias eram apresentadas 'cruas' sendo necessário construí-las nas reuniões ou fora delas após longas discussões;
- dar mais atenção à avaliação das propostas de ensino e tarefas, recolhendo dados dos alunos comuns a todos os professores, pois mesmo que fossem elaboradas as aulas e tarefas comuns, cada professor tinha a liberdade sobre a metodologia a ser utilizada nas aulas e sobre a adaptação das tarefas de acordo com as necessidades da turma que lecionava e do foco adotado nas aulas.

Como a literatura aponta (por exemplo, Boavida & Ponte, 2002; Fullan & Hargreaves, 2001; Goulet et al., 2003), o trabalho colaborativo é um processo em evolução, recheado de erros e acertos, importa que cada um se reconheça no trabalho realizado, perceba as potencialidades do trabalho com seus pares, mas também se sinta desafiado e empenhado para evoluir em função das fragilidades reconhecidas.

Por fim, após a experiência vivenciada pelos professores, Téo e Nina revelam ter interesse em dinamizar o trabalho colaborativo com seus pares em outras disciplinas que lecionam. Téo mantém a perspetiva que tinha sobre o trabalho colaborativo no início das atividades no grupo, de que um grupo de trabalho colaborativo é um espaço para discussão/reflexão sobre diferentes ideias e que juntos podem construir ideias comuns ao grupo como um todo (Martinho, 2011). Indicia que o seu entendimento sobre a colaboração se ampliou, visualizando um leque de possibilidades onde a colaboração pode tomar lugar e como pode se desenvolver. Por sua vez, Nina revela que teve a sua conceção alterada e que a experiência foi totalmente diferente do trabalho anterior com seus pares que havia vivenciado. Para a docente, em função da experiência que vivenciou, no trabalho colaborativo não há a figura de um líder, que dá ordens e os demais as executam (Fiorentini, 2004; Lima, 2002). Considera que num grupo de trabalho colaborativo os participantes: (i) se sentem confiantes para apresentar suas ideias e abertura para as críticas e, na base do diálogo, tomam as decisões sobre essas ideias (Goulet et al., 2003); (ii) se sentem confiantes para se expor e partilhar as suas dúvidas e dificuldades (Boavida & Ponte, 2002); (iii) se ajudam e aprendem juntos (Fiorentini, 2004); e (iv) saem do individualismo e junto com seus pares discutem novas ideias, sentindo-se apoiados para as integrar na sua prática (Richit & Ponte, 2019). A docente pondera que a elaboração de novas ideias é trabalhosa e despende muito tempo do professor, mas que os ganhos para com a evolução da prática de ensino compensam todo o trabalho extra despendido.

9.2.4. Que problemáticas identificam os professores do grupo de trabalho colaborativo na sua prática de ensino de Álgebra Linear? Como essas problemáticas são tratadas?

O ensino de Álgebra Linear é marcado por desafios. No grupo de trabalho foram identificadas algumas problemáticas comuns aos participantes, em torno das quais se desdobrou o trabalho e que incidem sobre: como ensinar alguns tópicos de Álgebra Linear; como explorar as aplicações contextualizadas dos conceitos; como integrar a tecnologia no ensino; e como envolver os alunos na sua aprendizagem. Tais problemáticas convergem com o que aponta a literatura (Celestino, 2000; Dorier, 2002; Nieto & Lopes, 2006; Strang, 2014) e estão entrelaçadas. Ensinar um dado tópico de Álgebra Linear perpassa pelas questões: Como ensinar? Para quem ensinar? Para que ensinar? As respostas para tais questões envolvem o conhecimento didático, que inclui o conhecimento do conteúdo, o conhecimento do currículo, o conhecimento dos seus alunos e dos processos de ensino e de aprendizagem (Ponte, 2012; Viseu, 2009).

Nessa perspetiva, o grupo de trabalho colaborativo debruçou-se sobre a planificação de algumas aulas e tarefas avaliativas. Tais aulas eram pensadas de modo a romper com os antecedentes de uma prática de ensino tradicional, fundamentada apenas no uso do livro didático, no uso do quadro e giz e centrada na atividade do professor. Para tal, as aulas foram planificadas no sentido de valorizar, o mais possível, as atividades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, de tal maneira a mobilizar os seus conhecimentos advindos da Geometria Analítica, possibilitando criar conjeturas, incentivando-os a refutarem ou generalizarem as ideias envolvidas, como defende Harel (2000) com os três princípios pedagógicos sobre o ensino da Álgebra Linear. Ao valorizar a atividade do aluno, os professores conseguiram identificar algumas dificuldades notáveis. No que diz respeito à aprendizagem dos alunos, aperceberam-se daquelas relacionadas com o uso da notação simbólica e das diferentes representações dos objetos matemáticos (Duval, 2012; Hillel, 2000), com as quais os professores em suas aulas transitavam naturalmente, bem como a necessidade de uma preparação dos alunos para trabalhar com as demonstrações (Artigue et al., 2000).

No que se refere ao processo de ensino, o trabalho realizado no grupo possibilitou aos professores refletirem que as suas práticas tradicionais tendem a ofuscar a identificação dessas dificuldades dos alunos, pois o aluno é geralmente passivo numa postura de apenas copiar e ouvir o que o professor diz e faz (Ponte, 2005b), e quando o diálogo ocorre o professor responde diretamente aos alunos, sem promover uma discussão e reflexão, ou em muitas situações o professor pergunta e ele mesmo responde. Importa incentivar o trabalho do aluno dentro e fora da sala de aula e criar espaços de reflexão (Carlson, 1993). Na sequência, sublinha-se alguns aspetos da prática dos professores na dinamização das aulas planificadas no grupo de trabalho.

Na planificação das primeiras seis aulas pelo grupo, sobre Coordenadas e Mudança de Base, a postura que Téo e Nina assumiram foi de uma conceção de ensino que valorizava mais a atividade do professor do que a do aluno, mas mostraram-se abertos às ideias que surgiram e procuraram discuti-las. Na dinamização dessas aulas, Téo teve uma postura focada no conteúdo e no formalismo e na sua atividade, inclusive quando explorou um problema contextualizado. Suas aulas foram bem-organizadas, em que procurou fazer as conexões entre os conteúdos. Já Nina procurou amenizar o formalismo, porém apresentou algumas ideias sem as conectar. A professora procurou envolver os alunos, tanto por questionamentos como na resolução de exercícios no quadro.

Quando os professores trabalharam uma tarefa exploratória para introduzir o conceito de ‘Mudança de base’, a aula assumiu uma dinâmica bem mais envolvente, focada nos alunos, que trabalharam em grupo. Na discussão e reflexão da tarefa, os professores utilizaram o GeoGebra, centrando a atividade em si. Nina sentiu dificuldades nessa exploração, o que resultou em algumas dúvidas nos alunos, tendo que recorrer ao quadro e giz para tentar saná-las e formalizar as conclusões retiradas com a tarefa. Na reflexão sobre as aulas, onde ocorreu a partilha de impressões, os professores conjeturaram sobre os erros dos alunos. Téo reconheceu que poderia envolver mais os alunos em suas aulas e Nina apercebeu-se de que precisava se preparar melhor para a dinamização das tarefas mediadas pelo GeoGebra, visto que as dificuldades que emergiram dos alunos podem ter derivado da forma como explorou o software na sistematização dos resultados da tarefa.

Na planificação das outras seis aulas que dinamizaram, sobre espaços vetoriais, que envolveram tarefas exploratórias para introduzir esse tópico, Téo foi bastante participativo, desenvolvendo inclusive uma das tarefas para explorar a interpretação geométrica dos espaços vetoriais não usuais, que era uma dúvida que surgiu entre os professores sobre tal interpretação. Nina revelou alguma dificuldade na compreensão dos espaços vetoriais, sendo apoiada pelo grupo para ultrapassar a limitação que tinha. Na dinamização das aulas ambos os professores envolveram os alunos na resolução das tarefas em sala de aula, procurando não dar respostas prontas. No entanto, nos momentos de discussão com a turma, Téo continuou centrando essa atividade em si, enquanto Nina procurou valorizar a atividade dos alunos, inclusive incentivando-os a ir ao quadro apresentar suas resoluções. Na reflexão sobre as aulas, os professores reconheceram uma série de dificuldades dos alunos, que lhes foi possível perceber pela dinâmica do trabalho dos alunos em sala de aula.

Ao fim do trabalho no grupo, ao refletir sobre as suas aulas, Téo considerou que precisava desenvolver-se em relação ao envolvimento dos alunos. No que respeita à sua estratégia de ensino, considerou que passou a explorar menos os aspetos abstratos e a dar mais ênfase à construção dos conceitos de forma mais intuitiva para depois os formalizar, a valorizar a interpretação geométrica e as aplicações contextualizadas. Nina reconheceu que o trabalho do aluno na sala de aula proporciona ao professor a oportunidade para identificar as suas dificuldades, bem como trabalhar os seus erros. Considerou ainda que mesmo tendo dificuldades na planificação no grupo e na preparação individual, só conseguiu concretizar suas aulas pelo apoio que recebeu dos seus pares por meio da partilha de experiências, familiarização com a tecnologia e pelo ambiente de confiança construído no grupo.

A dinâmica das tarefas avaliativas foi pensada no sentido de diversificar a avaliação, para além das provas (testes), possibilitando aos alunos se envolverem com seus pares na aprendizagem, terem contacto com as aplicações dos conceitos e o uso da tecnologia na exploração das diferentes representações. A preocupação no grupo era propor tarefas que representassem oportunidades para os alunos articularem os conceitos e desenvolverem o seu pensamento matemático (Stein & Smith, 2009), rompendo com o ensino apenas pautado por exercícios, os quais geralmente envolvem procedimentos repetitivos e memorizados. Como advoga Ponte (2005b), o grupo teve o cuidado de não apenas selecionar tarefas adequadas para suscitar a atividade do aluno, mas também zelar como propô-las e como as conduzir dentro e fora da sala de aula, de modo a atingir o objetivo a que se propunha a sua realização.

9.2.5. Quais as potencialidades e os constrangimentos do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

Conhecer as potencialidades e os constrangimentos do trabalho colaborativo no seio de um grupo de professores que atuam no ensino de Álgebra Linear revela-se uma ferramenta poderosa na reflexão e na evolução das práticas adotadas no grupo. Os constrangimentos não devem ser entendidos como limitações do trabalho colaborativo, mas como uma oportunidade de mudança apoiada pelos pares, visando alcançar melhorias nos processos de ensino e aprendizagem, com base no enriquecimento trazido pela interação dinâmica entre os pares. Antes de participarem do grupo de trabalho, Téo e Nina ensinavam Álgebra Linear por meio de uma abordagem tradicional, com a exposição do conteúdo alternada à resolução de exemplos e exercícios, que na visão de Dubinsky (1997) tem pouca chance de propiciar a aprendizagem dos alunos. Nessa exposição, os professores centravam a atividade em si e o foco do seu ensino era o conteúdo e o cumprimento do cronograma da disciplina. Téo reconhece a didática como uma fragilidade na sua prática, desde a sua formação inicial, e assume que seu ensino tende a explorar os conceitos com tal profundidade para além do que é esperado para alunos de graduação que estão contactando a disciplina pela primeira vez. Nina reconhece a dificuldade de trabalhar com exemplos concretos, bem como um ensino que privilegiava a representação analítica, indo ao encontro da necessidade de exploração das diferentes linguagens e representações (Duval, 2012; Harel, 2000) tão importantes na compreensão de conceitos de Álgebra Linear. Por outro lado, embora Nina tivesse uma prática tradicional, em algumas das suas aulas havia lugar ao trabalho do aluno. Nina costumava propor exercícios para os alunos resolverem na sala de aula.

Ao integrarem o grupo de trabalho colaborativo, paulatinamente os professores começam por alterar a sua prática. Ao fazer um balanço sobre o primeiro semestre de trabalho, os professores reconhecem que passaram a ponderar os aspetos abstratos do conteúdo (principalmente Téo que tem um perfil de professor mais teórico) e a valorizar a representação geométrica (não utilizada por Nina), bem como a aplicação dos conceitos como estratégias potenciais, referenciadas na literatura, para o ensino de Álgebra Linear (Carlson, 1993; Hillel, 2000). Os professores destacam que as experiências vivenciadas com a discussão de diferentes estratégias de ensino bem como as estratégias partilhadas pelos colegas lhes despertaram o interesse em explorar tais abordagens diferenciadas no ensino. Particularmente, foi a primeira vez que Téo envolveu os alunos na resolução de tarefas em sala de aula, ainda que considere insuficiente o envolvimento dos alunos em sua estratégia, visto que acontece mais quando dinamiza as atividades planificadas no grupo do que naquelas aulas que planifica sozinho. Nina destaca que essa abordagem da interpretação geométrica dos conceitos que foi adotada pelo grupo lhe permitiu, por meio das discussões realizadas, compreender melhor alguns conceitos, principalmente os relacionados com as Transformações Lineares. Inclusive, neste tópico, alterou a sequência com que abordava o conteúdo, inspirada nas discussões do grupo.

Na abordagem da visualização geométrica os professores utilizaram para além dos desenhos com quadro e giz, o software GeoGebra. Este software foi utilizado tanto pelos professores em algumas aulas, como pelos alunos para resolver uma tarefa, potencializando a visualização no ensino de Matemática e a exploração entre os diferentes registros de tópicos de espaços vetoriais e transformações lineares (Duval, 2012; Harel, 2000). A tecnologia sempre foi um recurso presente na identidade profissional de Téo, desde a sua formação inicial e como profissional curioso, interessado, encontrou no grupo um aporte de reflexão e trocas de experiências de como potencializar a tecnologia em sua prática docente. Ele já tinha experiência com o GeoGebra noutras disciplinas que lecionava, mas se restringia ao seu uso nas aulas para explorar os conceitos, não os utilizava na disciplina de Álgebra Linear, nem envolvia os alunos com a tecnologia. Nina, ao contrário de Téo, não tinha experiência e mostrou algum constrangimento relativamente a este aspeto, por não se sentir tão confortável na exploração do software em aula, por não conseguir esclarecer algumas dúvidas sobre as ferramentas do software aos alunos e por não conseguir atuar tão ativamente na elaboração das tarefas que seriam mediadas pelo GeoGebra devido a não conhecer as suas potencialidades. Assim, no contexto da integração das tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear o grupo de trabalho colaborativo, frente essas duas características bem diferenciadas dos professores Téo e Nina, possibilitou estratégias para que Nina pudesse se familiarizar com a ferramenta e se sentir mais segura com as aplicações em sala de aula. Para além disso, propiciou momentos de discussão aprofundadas em que levaram Téo, por meio da discussão com os pares, implementar e compartilhar os aplicativos no grupo, visando o envolvimento com o aluno e a exploração dos diferentes registros de representação no ensino de Álgebra Linear.

Outros constrangimentos emergiram na dinamização do trabalho no primeiro semestre do grupo em atividade. Um deles se refere ao tempo que a realização de tarefas pelos alunos exige em sala de aula, que é diferente de quando a atividade é centrada no professor. Esse aspeto gerou um pouco de frustração nos professores pois não foi possível cumprir com todo o cronograma da disciplina; não conseguiram dar o feedback aos alunos de uma tarefa de Transformações Lineares realizada extra classe no tempo adequado. Inicialmente, Nina ficou 'frustrada' com essa restrição de cronograma, deixando de fazer uma aula de revisão antes das avaliações por provas, em que costumava resolver exercícios. Ao longo do semestre foi alterando a sua visão ao perceber a evolução do desempenho dos seus alunos.

Ao final do primeiro semestre de trabalho, os professores reconheceram outras potencialidades do trabalho no grupo. Uma delas é a diversificação das avaliações, que para além das provas envolveram os alunos na resolução de tarefas avaliativas; o envolvimento dos alunos por meio de questionamentos e por meio da resolução de tarefas dentro e fora da sala de aula, ainda que considerem que este é um ponto a melhorar; a base relacional de confiança construída no grupo, de modo que todos se sentissem à vontade para expor as suas ideias, estando abertos às críticas construtivas dos seus pares; maior segurança, por estar num grupo, para experimentar diferentes abordagens; a partilha de experiências sobre abordagens que já haviam dado certo ou errado; a cordialidade e a valorização das ideias independentemente da experiência de cada interveniente; a disponibilidade de todos para ouvir as ideias um do outro e as debater criticamente.

Foram retiradas algumas ilações do primeiro semestre sobre aspetos que o grupo precisava evoluir para o segundo semestre, tais como: a preparação dos alunos para as tarefas, principalmente ao uso do GeoGebra; o apoio dos professores mais experientes com o GeoGebra aos menos experientes; buscar estratégias de ensino que envolvessem mais os alunos na sua aprendizagem; organização do trabalho de forma a cumprir com o cronograma da disciplina, incluindo os feedbacks das tarefas aos alunos em tempo adequado; sessões de trabalho semanais (que antes eram quinzenais) para rentabilizar o trabalho.

Ao fim de um ano de trabalho no grupo, os professores consideram as potencialidades do trabalho realizado com seus pares em prol da sua prática. Ganham destaque o conhecimento do conteúdo, o conhecimento sobre as estratégias de ensino e o conhecimento sobre os alunos (Ponte, 2012).

Nina destaca o contributo tanto ao nível do conhecimento do conteúdo como ao nível das estratégias de ensino. A docente considera que ampliou o entendimento de alguns conceitos e da relação que existe entre diferentes tópicos da disciplina. Como implicação desse entendimento, revela que se sentiu mais segura na dinamização das suas aulas, especialmente sobre os tópicos de espaços vetoriais e transformações lineares. Da realização de algumas tarefas conseguiu reconhecer algumas dificuldades dos alunos que poderiam ser advindas da Geometria Analítica. A reflexão sobre essas dificuldades lhe permitiu repensar a sua forma de ensinar alguns conceitos na referida disciplina e que são pré-requisitos para a Álgebra Linear. Téo considera que a participação no grupo lhe despertou uma maior preocupação com a aprendizagem dos alunos. Neste sentido, admitiu que algumas dificuldades que surgiram na concretização pelos alunos das tarefas planificadas pelo grupo de trabalho no semestre anterior podem ter resultado da falta de familiaridade dos alunos com o uso do GeoGebra e com o tipo de questões propostas. Como implicação dessa reflexão, passou a preocupar-se em preparar os alunos para a resolução das tarefas em especial na conscientização do amadurecimento para a formalização (Harel, 2000). Ambos os professores destacaram que se sentiram apoiados pelo grupo para priorizar o ensino de alguns tópicos que consideram importantes para a formação dos seus alunos e os que eles têm mais dificuldade, ao invés de se preocupar em abordar todo o cronograma da disciplina sem levar em consideração a aprendizagem.

Ao avaliarem a evolução do seu ensino em Álgebra Linear de um semestre para o outro, Téo destacou que desenvolveu mais atividades que considerem o ritmo de aprendizagem dos alunos, porém problematizou a sua ação ao constatar que poderia ainda explorar outros recursos, como envolvê-los na apresentação de trabalhos, na resolução de tarefas no quadro e em tarefas mediadas pelo uso do computador em sala de aula. Nina destacou o envolvimento dos alunos nas aulas como um dos aspetos que mais desenvolveu, em decorrência do leque maior de tarefas que os envolveu em relação ao semestre anterior. Na dinamização dessas tarefas, envolveu os alunos por meio do trabalho de grupo, pela resolução de tarefas no quadro e apresentação de um trabalho por meio de questionamentos. Os diferentes momentos de interação com os alunos foram importantes para Nina perceber as suas dificuldades e trabalhar em 'cima' dos seus erros, embora considere esse o aspeto menos explorado na sua prática.

Relativamente ao uso dos recursos tecnológicos, ambos os professores dinamizaram aulas com o GeoGebra. O uso em sala de aula ficou restrito ao professor, porém envolveram os alunos na realização de duas tarefas extra classe mediadas pelo GeoGebra. Nina usou o software apenas nas aulas planificadas pelo grupo para o uso de tal recurso, enquanto Téo o usou mais sistematicamente. Nina sentiu-se mais segura para desenvolver aulas com a mediação do GeoGebra, embora apenas manipule aplicações já construídas pelos colegas. Considera que essa segurança foi adquirida com o apoio do grupo, ao esclarecer suas dúvidas, fornecendo tutoriais para o desenvolvimento de uma tarefa, fazendo a correção em conjunto no grupo de uma tarefa mediada pelo GeoGebra. A docente pondera que precisa de evoluir a sua prática para usar o GeoGebra em sala de aula, principalmente em relação às estratégias em que os alunos utilizem o software ao invés de centrar essa atividade em si.

Relativamente às aprendizagens que retiraram do trabalho com seus pares, para além das estratégias de ensino experimentadas, Nina indicia ter alterado a sua visão da Álgebra Linear, tendo maior clareza da relação entre os conteúdos, da interpretação dos conceitos e do papel da disciplina na formação dos seus alunos. Indicia que desenvolver uma estratégia de ensino mais focada no trabalho do aluno, aliando a teoria com as situações concretas, possa facilitar o processo de abstração em Álgebra Linear, como também evidenciam Harel (2000) e Dorier (2002). Para Téo, as discussões e reflexões geradas no grupo despertaram-lhe o interesse para se aprofundar na interpretação de conceitos, bem como conhecer outras aplicações sobre a Álgebra Linear e refletir sobre como as integrar no ensino da disciplina. Para além disso, lhe despertou o interesse para realizar leituras relacionadas com pesquisas no âmbito da Álgebra Linear e da Educação Matemática, para contribuir na análise da sua prática letiva, dos dados produzidos no grupo de trabalho, na escrita de artigos sobre experiências na sala de aula, bem como para fundamentar e ter novas ideias na continuidade da atividade do grupo de trabalho.

Conclui-se que o trabalho desenvolvido no seio do grupo proporcionou aos professores a oportunidade para que repensassem a sua prática de ensino tanto de Álgebra Linear, como noutras disciplinas que lecionavam. O trabalho entre pares, para além de fornecer novos instrumentos aos professores em torno de estratégias de ensino, materiais didáticos, tipologias de tarefas, contribui, tal como defende Martinho (2011), para a tomada de consciência das dificuldades dos próprios professores e dos seus alunos.

9.3. Limitações do estudo e sugestões para futuras investigações

Este estudo suscita novas propostas de trabalho e oportunidades de investigação em função de algumas limitações identificadas no trabalho realizado e perspetivas que o trabalho proporcionou, quer sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear como sobre a dinâmica do trabalho colaborativo.

No que concerne ao ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear, foram elaboradas algumas propostas de ensino/tarefas para alguns tópicos que foram priorizados pelo grupo de trabalho, sendo que algumas delas foram amadurecidas de um semestre para outro e replicadas. Emergiu no grupo a necessidade de avaliar, discutir e amadurecer mais essas propostas/tarefas e ampliar a reflexão sobre elas, em função das dificuldades dos professores e dos alunos na sua concretização. Por conta das limitações de tempo dos professores e do gerenciamento do currículo, não houve espaço no grupo para a análise das resoluções dos alunos para todas as questões de avaliação e tarefas elaboradas conjuntamente, o que poderia implicar num amadurecimento destas questões e tarefas e na redefinição das estratégias de como abordar os tópicos envolvidos. Para além disso, uma análise mais profunda das resoluções dos alunos poderia dar indicativos sobre o seu raciocínio matemático e sobre os obstáculos da aprendizagem, suscitando a reflexão sobre estratégias que os professores poderiam utilizar em seu ensino para minimizar as dificuldades dos alunos. Nesse sentido, uma perspetiva futura seria avaliar com mais profundidade o impacto do trabalho colaborativo entre professores na aprendizagem da Álgebra Linear. Como referi, nem todos os tópicos de Álgebra Linear foram fruto de discussão no grupo, e houve alguns que foram discutidos, porém não são apresentados nesta investigação porque não houve tempo no grupo para uma discussão conjunta mais ampla sobre o que foi proposto a respeito do respetivo tópico, como por exemplo, uma tarefa exploratória para introduzir a definição de Transformação Linear. Nesse sentido, seria importante alargar o trabalho realizado, contemplando a discussão e reflexão sobre todos os tópicos da Álgebra Linear, focando em alguns pontos que emergiram no grupo que poderiam ser melhor explorados nas estratégias, tais como os erros dos alunos, o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, o feedback do professor aos alunos sobre as atividades realizadas.

Relativamente à dinâmica do trabalho colaborativo, emerge um conjunto de questões que valeria a pena analisar com mais detalhe que diz respeito às condições em que este trabalho ocorreu. A investigação com o grupo durou dois semestres letivos, em que os professores ainda estavam 'aprendendo' a trabalhar colaborativamente, e iniciando a colher os frutos do trabalho com seus pares; como o grupo continuou em atividade, caberia uma análise de como esses professores concretizam a sua prática e como dinamizam a colaboração num tempo mais alargado. Para além disso, com a continuidade do trabalho, houve a saída de dois professores e a entrada de um novo professor no grupo, caberia analisar como um novo interveniente se integra quando um grupo está em andamento, e qual o contributo que traz tanto para a dinâmica do trabalho como na reflexão sobre os roteiros de aula/tarefas/aplicativos planificados anteriormente à sua participação no grupo. E atualmente, no contexto de ensino remoto, se faz salutar investigar as novas formas de desenvolver o trabalho colaborativo, mediadas pelas tecnologias, nos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

Outra questão é que nos momentos de reflexão sobre as aulas, cada professor recorria à sua memória para relatar oralmente ao grupo as suas impressões. Caberia experimentar e avaliar outras dinâmicas para promover a reflexão, como por exemplo, a escrita de textos por cada um dos professores e a partilha com os demais; a escrita conjunta de comunicações científicas, dentre outras. Outra situação é que para a elaboração dos roteiros de aula ou tarefas, era comum os participantes partilharem ideias muito 'cruas', implicando que muitas vezes um outro participante se apropriasse da ideia para a lapidar e apresentar ao grupo. Estas ideias 'cruas' e por vezes a ausência delas, em geral acontecia pela limitação de tempo dos professores devido à ocupação com sua vida profissional, principalmente mais ao final do semestre, quando os professores estavam muito envolvidos com o cumprimento do cronograma da disciplina e com as correções de avaliações. Nesse sentido, importa organizar uma dinâmica de trabalho de forma que todos participem ativamente, conciliando com as demais atividades profissionais, de modo a rentabilizar as sessões de trabalho no grupo. Uma outra perspetiva interessante reside na ideia de estruturar de maneira sistematizada os recursos produzidos no seio do grupo colaborativo, propiciando a divulgação e compartilhamento destes recursos com outros pares que ensinam Álgebra Linear com o intuito de auxiliar suas práticas e inclusive promover a evolução dos próprios recursos decorrentes das experimentações em sala de aula.

For fim, seria importante dinamizar o trabalho colaborativo entre professores e avaliar o seu impacto nos processos de ensino e aprendizagem de outras disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica, que também integram o ciclo básico dos cursos da área de Ciências Exatas, e que os alunos costumam apresentar dificuldades.

Espero que este estudo represente uma inspiração para a prática docente dos professores que ensinam Álgebra Linear, bem como ele possa ser fonte de evolução das práticas dos professores que integraram e integram o grupo de trabalho colaborativo, pois como referi, continuamos em atividade.

Referências Bibliográficas

Alarcão, I., & Canha, B. (2013). *Supervisão e colaboração: Uma relação para o desenvolvimento*. Porto Editora.

Alonso-Sáez, I., Darretxe, L., & Beloki, N. (2019). Hacia una identidad y cultura académica colaborativa: Los equipos docentes como innovación en los grados universitarios. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, *27*(142). https://doi.org/10.14507/epaa.27.4077

Alvarado, A. M., & González, M. A. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 129-158.

Artigue, M., Chartier, G., & Dorier, J. L. (2000). Presentation of other research works. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 247-271). Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2004). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Acedido em 17 de janeiro, 2018, de http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf.

Aydin, S. (2014). Using example generation to explore students' understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(6), 813-826.

Ball, D. L., & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton Alberta.

Ball, D. L; Bass, H.; Sleep, L., & Thames, M. (2005). A theory of mathematical knowledge for teaching. Work-session apresentada no *ICMI Study 15*, Lindoia, Brasil. Acedido em 28 de julho, 2021, de https://www.mathunion.org/icmi/conferences/icmi-study-conferences/icmi-study-15-conference-proceedings.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Barros, P. M. (2018). *O ensino e a aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear no Ensino Superior Politécnico*. Tese de Doutoramento, Instituto de Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Barros, P. M., Fernandes, J. A., & Araújo, C. M. (2016). Perspectivas dos alunos sobre o erro como estratégia de aprendizagem. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 119–131). Associação de Professores de Matemática.

Bednarz, N., Fiorentini, D., & Huang, R. (2011). *International Approaches to Professional Development for Mathematics Teachers*. University of Ottawa Press.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto Editora.

Born, B. B., Prado, A. P. D., & Felippe, J. M. F. G. (2019). Profissionalismo docente e estratégias para o seu fortalecimento: entrevista com Lee Shulman. *Educação e Pesquisa*, *45*.

Britton, S., & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: an attempt to understand students conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 963–974.

Brousseau, G (1997). *Theory of Didactic Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Brown, C., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). Macmillan.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. D. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquia: ERME.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da Álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Çelik, D. (2015). Investigating students' modes of thinking in linear algebra: the case of linear independence. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Acedido em 15 de dezembro, 2017, de http://www.cimt.org.uk/journal/.

Ciríaco, K. T., Morelatti, M. R. M., & Ponte, J. P. (2017). Constituição de um grupo colaborativo em educação Matemática com professoras em início de carreira. *Educação e Fronteiras On-Line*, *7*(21), 97-112.

Climent, N., Montes, M., Escudero-Ávila, Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C., & Sosa, L. (2014). El Conocimiento del Profesor para la Enseñanza de la Matemática. In J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, & M. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 43-70). Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Coelho, M. A. V. M. P. (2017). Grupos colaborativos na formação de professores: uma revisão sistemática de trabalhos brasileiros. *Zetetiké*, *25*(2), 345-361.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Almedina.

Creswell, J. W. (2014). *Investigação qualitativa e projeto de pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens*. Penso Editora.

Damiani, M. F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar em revista*, 31, 213-230. https://doi.org/10.1590/S0104-40602008000100013

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto Editora.

Day, J. M., & Kalman, D. (1999). *Teaching linear algebra: What are the questions*. Department of Mathematics at American University in Washington DC, 1-16.

Diković, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: some examples. *The Teaching of Mathematics*, 10(2), 109–116.

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2141-2159.

Domínguez-García, S., García-Planas, M. I., & Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(7), 1076-1086.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 1-81). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. (2002). Teaching linear algebra at university. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August 20-28, 2002, Beijing* (Vol. 1, pp. 875-884). Higher Education Press.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2000a). The obstacle of formalism in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L., Robert, A., & Sierpinska, A. (2000b). Conclusion. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 273-276). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (Vol. 42, pp. 85-105). Mathematical Association of America.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-33). Papirus.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT*, (7)2, p. 266-297.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A Study of Practical Knowledge*. Croom Helm.

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). Macmillan Publishing Company.

Erickson, F. (2012). Comments on causality in qualitative inquiry. *Qualitative Inquiry*, *18*(8), 686-688.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C., & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Esquincalha, A. C. (2012). Nicolas Bourbaki e o movimento da matemática moderna. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, 2(3).

Ferreira, A. C. (2003). Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: uma experiência de trabalho colaborativo Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Ferreira, A. C., & Miorim, M. A. (2011). Collaborative Work and the Professional Development of Mathematics Teachers: Analysis of a Brazilian Experience. In. N. Bednarz, D. Fiorentini, & R. Huang (Eds.), *International Approaches to Professional Development for Mathematics Teachers* (pp. 137-149). University of Ottawa Press.

Figueiredo, E. B., Siple, I. Z., Azevedo, E. B., & Moro, G. (2014). Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas da matemática nos cursos de engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, 33(1), 13-23.

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In M. C. Borba, & J. L. Araujo (Orgs.), Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática (pp. 47-76). Autêntica.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Flick, U. (2009). *Introdução à Pesquisa Qualitativa* (3ª Edição). Grupo A.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Escudero-Ávila, D., Aguilar, A., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, & M. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 71-93). Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Forte, A. M., & Flores, M. A. (2012). Potenciar o desenvolvimento profissional e a colaboração docente na escola. *Cadernos de Pesquisa*, 42(147), 900-919. https://doi.org/10.1590/S0100-15742012000300014

França, M. (2007). *Conceitos fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Fullan, M., & Hargreaves, A. (2001). *Por que é que vale a pena lutar? O trabalho de equipa na escola*. Porto Editora.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational research: an introduction*. Allyn and Bacon.

Gama, R. P. (2007). *Desenvolvimento profissional com apoio de grupos colaborativos: o caso de professores de Matemática em início de carreira*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Gonçalves, R. J. C. (2018). *A investigação em didática da álgebra linear: uma perspetiva do seu contributo para o ensino por meio da reflexão sobre a prática*. Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal.

Goulet, L., Krentz, C., & Christiansen, H. (2003). Collaboration in education: the phenomenon and process of working together. *The Alberta Journal of Educational Research*, 49(4), 325-340.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear algebra and its applications*, 379, 491-501.

Gumiero, B. S., & Pazuch, V. (2019). Collaborative work in mathematics teacher education. *JIEEM - Journal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *12*(3), 275-283. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n3p275-283.

Hamdan, M (2005). Nonlinear learning of linear algebra: active learning through journal writing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(6), 607-615.

Harel, G (1989). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*(2), 139-148.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *21*(3), 387-392.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 82-94). Ridel.

Harel, G., & Trgalová, J. (1996). Higher mathematics education. *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 675-700). Springer.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempo de mudança*. McGrawHill.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Huberman, M. (2000). O ciclo de vida profissional dos professores. In A. Nóvoa (Org.), *Vidas de professores* (pp.31-61). Porto Editora.

Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra linear e Geometria: Um estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica*. Tese de doutorado, Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Kawulich, B. B. (2005). Participant observation as a data collection method. In Forum qualitative sozialforschung/forum: Qualitative social research (Vol. 6, No. 2). Acedido em 20 de novembro, 2020, de https://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/466/997.

Konyalioglu, A. C., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., & Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15, 4040-4044*.

Larson, C., & Zandieh, M. (2013). Three interpretations of the matrix equation $Ax = b$. *For the Learning of Mathematics*, *33*(2), 11-17.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Lawrence Erlbaum.

Lima, J. A. (2002). *As culturas colaborativas nas escolas: estruturas, processos e conteúdos*. Porto Editora.

Love, B., Hodge, A., Grandgenett, N., & Swift, A. W. (2014). Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(3), 317-324.

Lüdke, M., & André, M. (2013). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. E.P.U.

Marconi, M. A., & Lakatos, E. M. (2017). *Fundamentos de Metodologia Científica* (8ª Edição). Grupo GEN.

Martinho, M. H. (2011). *A comunicação na sala de aula de matemática: um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Centro de Investigação de Educação da Universidade do Minho.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2014). *Research in Education: evidence-based in inquiry*. Seventh Edition. Pearson.

Miles, M., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. Sage Publications.

Minayo, M. C. S. (Org.) (2002). *Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade*. Vozes.

Moro, G., Viseu, F., & Siple, I. (2016). Ensino de álgebra linear: traços de uma pesquisa. *Colóquio Luso-Brasileiro de Educação-COLBEDUCA*, 1, 243-256.

Nieto, S. S., & Lopes, C. M. C. (2006). A importância da disciplina Álgebra Linear nos cursos de Engenharia. *World Congress on Computer Science, Engineering and Technology Education*. São Paulo.

Padredi, Z. L. N. (2003). *As Alavancas-Meta no discurso do professor de Álgebra Linear*. Dissertação de Mestrado, Pontífica Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Passos, C. L., Nacarato, A., Fiorentini, D., Miskulin, R. G., Grando, R. C., Gama, R., Megid, M. A. B. A., Freitas, M. T. M., & de Melo, M. V. (2006). Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. *Quadrante*, *15*(1&2), 193-219.

Pereira, I. C., Silva, P. V., & Gomes, C. R. (2021). Benefits and challenges of collaborative work in the teaching of mathematics in the pedagogical residency program. *Educação Matemática Pesquisa*, *23*(1), 613-631.

Ponte, J. P. (2005a). A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 267-284). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 105-132.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P. (2014). Formação dos professores de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp.343-360). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Brill Sense.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática: o papel da colaboração. *Zetetiké*, 11(20), 9–55.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2), 51-74.

Ponte, J. P., Segurado, I., & Oliveira, H. (2003). A collaborative Project using narratives: what happens when pupils work on mathematical investigations? In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: examples from the context of mathematics education* (pp. 85–97). Kluwer.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140.

Quaresma, M., Ponte, J. P., Baptista, M., & Mata-Pereira, J., (2014). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp.343-360). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ramos, M. L. P. D. & Curi, E. (2014). O uso do erro como estratégia didática: uma nova perspetiva na reconstrução do conhecimento. *Perspectivas da Educação Matemática*, 7(13), 84-102.

Richit, A., & Ponte, J. P. (2019). A colaboração profissional em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(64), 937-962.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM Mathematics Education, 48* (5), 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Roldão, M.C. (2007). Colaborar é preciso – Questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores. *Noesis*, *71*, 24-29.

Rowland, T. (2013). The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *Sisyphus—Journal of Education*, *1*(3), 15-43.

SBEM (2013). A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, *Boletim SBEM*, 21, 1-42.

Schön, D. (2000). *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Editora Artmed.

Serrazina, M. L. M. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*, 6(1), 266-283.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.

Silva, A. M. C., Herdeiro, R., & Cunha, S. (2017). Aprendizagem colaborativa docente: fatores facilitadores e inibidores no contexto escolar. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*. Extra, (6), 412–416. https://doi.org/10.17979/reipe.2017.0.06.2962

Silva, M. L. C. (2011). *A investigação-ação em contexto colaborativo: mudanças nas conceções e práticas dos professores*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.

Siple, I. Z., Moro, G. Lima, H. G., Franco, M. D., Aguiar, R., Loureiro, K., & Viseu, F. (2017). Uma interpretação geométrica da multiplicação de matrizes mediada pelo GeoGebra. *Anais do Simpósio Ibero-Americano de Tecnologias Educacionais*, 1(1), 246-255.

Souza Júnior, A. J. (2000). *Trabalho coletivo na universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Speer, N. M., Smith III, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 99-114.

Stake, R. K. (2005). Qualitative Case Studies. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 443-466). Sage.

Stein, M., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2003). Difficulties in the acquisition of linear algebra concepts. *New Zealand Journal of Mathematics*, 32, 207-215.

Strang, W. G. (2014). A linguagem das máquinas. *Revista CÁLCULO: Matemática para todos*, Edição 45, ano 4, 18-21.

Talbert, R. (2014). Inverting the Linear Algebra Classroom, *PRIMUS*, 24(5),361-374.

Thomas, S. (2011). *An activity theory analysis of linear algebra teaching within university mathematics*. Doctoral Dissertation, Loughborough University, Reino Unido.

Traldi Júnior, A. (2006). *Formação de professores de Matemática: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos*. Tese de Doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Treffert-Thomas, S., & Jaworski, B. (2009). Teaching university mathematics: what mathematicians have said. In D. Green, M. Grove, & J. Nuttall (Eds.), *CETL – MSOR Conference 2008* (pp. 89-93). Lancaster University: Maths, Stats & OR Network.

Treffert-Thomas, S., & Jawroski, B. (2015). Developing mathematics teaching: what can we learn from the literature? In M. Grove, T. Croft, J. Kyle, & D. Lawson (Eds.), *Transitions in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 259-276). University of Birmingham, Higher Education Academy.

Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 335-346.

Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 459-490.

Ulus, A. Y. (2013). Teaching the diagonalization concept in linear algebra with technology: A case study at Galatasaray University. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *TOJET,* 12(1), 119-130.

Valladares, L. (2007). Os dez mandamentos da observação participante. *Revista brasileira de ciências sociais*, *22*, 153-155.

Viseu, F. (2009). *A formação do professor de Matemática, apoiada por um dispositivo de interação virtual no estágio pedagógico*. Centro de Investigação de Educação da Universidade do Minho.

Vygotsky, L. S. (1985). *Vygotsky aujourd'hui*. Delachaux & Niestlé.

Yin, R. K. (2015). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (5ª Edição). Grupo A.

ANEXOS

A. Guião da entrevista geral (EG) aos professores que ensinam/ensinavam Álgebra Linear

Guião de entrevista

Formação

1. Qual é a sua formação acadêmica? Que razões o(a) levaram a escolher essa formação?
2. A atividade docente que exerce atualmente relaciona-se com a sua formação acadêmica? Caso não se relacione, que razões justificam essa mudança?
3. Tem se preocupado com a sua formação continuada? Se sim, de que forma? Que razões o levam a frequentar ações de formação continuada?
4. Que dinâmicas existem na sua instituição para a promoção da sua formação continuada? Essas dinâmicas têm contribuído para sua prática docente? De que forma?

Prática profissional

5. Quanto tempo tem de experiência docente? Em que níveis de ensino já atuou e que disciplinas já lecionou no seu percurso profissional? Há quanto tempo leciona Álgebra Linear?
6. Na preparação das suas aulas, que aspetos destaca mais nas suas planificações? A que fontes recorre quando planifica?
7. Costuma planificar as suas aulas sozinho ou com colegas? Costuma desenvolver/partilhar experiências de sala de aula com os seus colegas? Porquê?
8. Já fez parte de algum grupo de trabalho colaborativo entre professores? Que vantagens e desvantagens tem o trabalho colaborativo entre professores?

Ensino da Álgebra Linear

9. Como costuma ensinar Álgebra Linear? Como introduz um dado tópico de Álgebra Linear? E como os desenvolve?
10. Na sua perspetiva, qual é a importância da Álgebra Linear na formação dos seus alunos?
11. Que papel desempenha o aluno na introdução e no desenvolvimento dos conteúdos de Álgebra Linear que leciona?
12. Que tipo de tarefas propõe aos alunos no estudo de conteúdos de Álgebra Linear? Como os envolve na resolução dessas tarefas e como os organiza na execução dessas tarefas?
13. Que diferenças existem entre seu ensino de Álgebra Linear e de outras disciplinas de Matemática que leciona?
14. Quais os materiais didáticos que utiliza para lecionar Álgebra Linear? Quais as vantagens e as desvantagens da utilização desses materiais no ensino e na aprendizagem desses conteúdos?
15. No ensino de Álgebra Linear costuma explorar aplicações contextualizadas? Essas aplicações relacionam-se com o curso específico em que leciona ou são de caráter geral?
16. Como costuma avaliar as aprendizagens dos seus alunos? Os métodos de avaliação em Álgebra Linear são os mesmos que utiliza para avaliar os seus alunos noutras disciplinas? Porquê?
17. Sente dificuldade em ensinar algum conteúdo de Álgebra Linear? Se sim, qual conteúdo e porquê?
18. Os alunos costumam revelar dificuldades de aprendizagem em Álgebra Linear? Se sim, quais?
19. Perante as dificuldades dos alunos, que estratégias costuma utilizar para as minimizar?
20. Costuma refletir sobre suas aulas de Álgebra Linear? Qual a contribuição dessas reflexões para as suas aulas futuras?
21. Considera a sua formação inicial e continuada adequada para ensinar Álgebra Linear? Explique porquê.

B. Termo de consentimento livre e esclarecido para os professores que participaram da entrevista geral (EG).

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(a) senhor(a) está sendo convidado a participar de uma pesquisa de doutoramento intitulada **"O ensino de Álgebra Linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira: perspetivas e contributos da prática colaborativa"**, tendo como objetivos "caracterizar o ensino de Álgebra Linear de professores de uma universidade brasileira e averiguar o contributo do trabalho colaborativo entre professores dessa instituição nesse ensino". A pesquisa tem a intenção de investigar as seguintes questões: Como os docentes ensinam Álgebra Linear? Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear? Quais as potencialidades e as limitações do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

A sua participação na referida investigação se dará no sentido de responder aos questionamentos de uma entrevista oral sobre os temas: formação acadêmica, prática profissional e ensino de Álgebra Linear.

A participação é espontânea, não sendo oferecida qualquer remuneração ou gratificação. Contudo, sua colaboração contribuirá para caracterizar o ensino de Álgebra Linear na universidade. A entrevista será gravada e transcrita e, caso deseje, poderá receber cópia desta transcrição para aprovar seu conteúdo.

Sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado através de um pseudônimo.

O(a) senhor(a) poderá solicitar novas informações sobre a presente investigação a qualquer momento, bem como retirar-se da investigação, sem qualquer tipo de constrangimento.

A pessoa que estará acompanhando os procedimentos será a aluna do programa de doutoramento em Ciências da Educação da Universidade do Minho, Graciela Moro.

Solicitamos a sua autorização para o uso de seus dados para a produção de artigos técnicos e científicos.

A sua privacidade será mantida através da não identificação do seu nome.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder da pesquisadora e outra com o sujeito participante da pesquisa.

NOME DA PESQUISADORA PARA CONTATO: Graciela Moro
E-MAIL: gracimoro@gmail.com
NÚMERO DO TELEFONE: (47)9170-1450
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil , CEP: 89.219-710 - Fone:(47) 3481-7978
ASSINATURA DA PESQUISADORA: ____

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Sei que em qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participação no estudo se assim eu o desejar.

Declaro, por fim, que recebi cópia deste termo de Consentimento.

Nome por extenso: ____

Assinatura ________________________ Local: __________________ Data: _____/_____/_____ .

C. Guião da primeira entrevista (EGR1) realizada com os professores do grupo de trabalho.

Guião de entrevista

Trabalho desenvolvido no projeto

1. Que balanço faz, neste momento, da sua participação no projeto? Que papel acha que está a desempenhar? Esse papel corresponde às expectativas que tinha formulado inicialmente?
2. Que balanço faz em relação à organização dos trabalhos realizados no projeto, a relação entre os participantes, o papel que cada um exerce no projeto? Que balanço faz da coexistência de professores mais e menos experientes?
3. Tem algum ponto em relação à execução do projeto que não lhe agrada? O que poderia ser feito para melhorar?

Desenvolvimento da colaboração profissional

4. O trabalho colaborativo que tem vivenciado no projeto tem influenciado na sua forma de ser professor(a) de Álgebra Linear? De que forma? Existe algum aspeto no qual gostaria de se desenvolver mais e que não foi alcançado? Se a resposta for positiva, qual(is) aspeto(s)?
5. Em que aspetos o trabalho colaborativo entre professores tem sido mais importante para você? O que é que lhe permitiu fazer que, de outro modo, seria mais difícil de concretizar?
6. Que dificuldades sentiu em dinamizar as atividades no grupo de trabalho? Como as ultrapassou?

Desenvolvimento da prática de ensino

7. A participação no projeto tem lhe proporcionado a reflexão sobre a sua prática de ensino em Álgebra Linear? Se a resposta for positiva, como essa reflexão tem influenciado a sua prática? Ao ouvir as perspetivas de outros professores, que aprendizado retira para a sua prática?
8. Ao olhar, de forma retrospetiva, para a sua prática de Álgebra Linear em sala de aula, estabelece algumas diferenças com a situação precedente ao projeto? Encontra diferenças na forma de abordar os conteúdos? Encontra diferenças em relação à forma como os alunos interagiam? Ao tipo de tarefas propostas? Ao trabalho solicitado aos alunos? Ao modo de organização dos alunos? Ao seu papel na condução da aula e no acompanhamento dos alunos? Ao ambiente de aprendizagem da aula? A forma de trabalhar o erro dos alunos?
9. As atividades propostas no projeto tiveram como ênfase a visualização geométrica dos conceitos de Álgebra Linear com auxílio de tecnologias. Qual a sua visão em relação à influência destas atividades na aprendizagem dos alunos? E na sua prática de ensino?

D. Guião da entrevista final (EGR2) realizada com os professores do grupo de trabalho.

Guião de entrevista III

Trabalho desenvolvido no grupo

1. Após um ano de trabalho no grupo, que balanço faz da sua participação? Em que momentos considera que participou mais? E menos?
2. Como caracteriza a relevância da sua participação no grupo? A sua participação correspondeu às expectativas que tinha formulado inicialmente? Justifique a sua resposta.
3. Que balanço faz em relação à organização do trabalho no grupo, à relação entre os participantes, ao papel que cada um exerceu no grupo?
4. Que aspetos da prática pedagógica considera que desenvolveu com a contribuição dada pelos professores mais e menos experientes do grupo? Qual(is) dessas contribuições são viáveis concretizar na sua prática?
5. Qual foi a sua principal contribuição para o desenvolvimento do trabalho no grupo? Como foi a evolução dessa contribuição? No seu entender, a que se deve essa evolução da forma como colaborou com o grupo?

Desenvolvimento da colaboração profissional

6. Qual foi o impacto do trabalho que vivenciou no grupo na sua forma de ser professor(a) e nas suas conceções sobre o ensino de Álgebra Linear? O trabalho em grupo contribuiu para o aprofundamento dos seus conhecimentos em Álgebra Linear? Indique exemplos que ilustrem sua resposta.
7. Como o trabalho colaborativo entre pares contribuiu para o seu desenvolvimento profissional?
8. Após um ano de trabalho no grupo, o seu conceito inicial de colaboração entre pares mudou? Se sim, relativamente a quê?
9. Durante o trabalho no grupo sentiste-te apoiado(a) pelo grupo e menos isolado(a) para enfrentares as dificuldades que emergiram no decorrer da tua prática docente? Ilustre.
10. Aponte dificuldades ou constrangimentos sentidos no trabalho realizado no grupo. Como as ultrapassou?
11. O que a colaboração lhe permitiu fazer que, de outro modo, seria mais difícil de concretizar? De algum modo o trabalho colaborativo limitou ou expandiu a sua autonomia profissional no ensino de tópicos de Álgebra Linear?

Desenvolvimento da prática de ensino

12. Sentiste dificuldades em te adaptar ao tipo de planificação que que foi desenvolvido em grupo e ao tipo de aulas que implementaste? Como superaste essas dificuldades? Na próxima vez que lecionares Álgebra Linear pretendes continuar ou aprimorar as ideias que emergiram no grupo ou pretendes abandoná-las? Justifique a sua resposta.
13. Que tipo de reflexão sobre a sua prática de ensino de Álgebra Linear foi suscitada pela sua participação no grupo? Como essa reflexão tem influenciado a sua prática?
14. Ao olhar, de forma retrospetiva, para a sua prática de Álgebra Linear em sala de aula, estabeleça as diferenças com as práticas anteriores.
15. (Encontra diferenças na forma de abordar os conteúdos e de envolver os alunos? Os recursos didáticos utilizados em sala de aula? A forma de trabalhar o erro dos alunos? A forma de avaliação dos alunos? Tipo de tarefas? Formas de interação com os alunos?)

16. As atividades elaboradas no grupo tiveram uma ênfase na visualização geométrica dos conceitos de Álgebra Linear com recurso ao GeoGebra. Como tem evoluído a sua prática com o uso da tecnologia em sala de aula? Como/quando/para quê?
17. A integração da tecnologia na sua prática reflete-se na aprendizagem dos alunos? De que forma? O que pode ser melhorado?
18. Caso iniciasse agora o trabalho no grupo, que sugestões apresenta para melhorar o trabalho realizado?
19. Intenciona integrar ou dinamizar no futuro outros grupos de trabalho colaborativo? Em que temas faz sentido este trabalho?

E. Termo de consentimento livre e esclarecido para os professores que participaram do grupo de trabalho.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(a) senhor(a) está sendo convidado a participar de uma pesquisa de doutoramento intitulada **"O ensino de Álgebra Linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira: perspetivas e contributos da prática colaborativa"**, tendo como objetivos "caracterizar o ensino de Álgebra Linear de professores de uma universidade brasileira e averiguar o contributo do trabalho colaborativo entre professores dessa instituição nesse ensino". A pesquisa tem a intenção de investigar as seguintes questões: Como os docentes ensinam Álgebra Linear? Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear? Quais as potencialidades e as limitações do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

A sua colaboração com a referida investigação se dará através da participação de um grupo de professores que ensinam Álgebra Linear, o qual se reunirá periodicamente durante os semestres 2016/02 e 2017/01 para refletir sobre o ensino de Álgebra Linear, elaborar propostas de ensino, testar as propostas elaboradas em sala de aula e por fim avaliar as propostas. Os encontros do grupo de professores serão gravados em áudio e vídeo. Além disso, serão observadas, pela pesquisadora responsável pela pesquisa, algumas aulas de Álgebra Linear ministradas pelos professores do grupo nas quais serão implementadas as propostas de ensino elaboradas pelo grupo. As aulas observadas também serão gravadas em áudio e vídeo. Ao longo da pesquisa serão realizadas entrevistas com o grupo de professores que poderão ser gravadas em áudio. O conteúdo das gravações que a pesquisadora julgar importante para a pesquisa será transcrito e, caso deseje, poderá receber cópia desta transcrição para aprovar seu conteúdo. Sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado através de um pseudônimo.

Sua colaboração será de extrema importância para a pesquisa, pois contribuirá para verificarmos as potencialidades e limitações do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear. Entretanto, sua participação lhe beneficiará com a possibilidade da reflexão sobre sua prática de ensino, lhe permitirá a partilha de experiências, de materiais, sanar dificuldades, desenvolver novas metodologias de ensino, dentre outras possibilidades.

O(a) senhor(a) poderá solicitar novas informações sobre a presente investigação a qualquer momento, bem como retirar-se da investigação, sem qualquer tipo de constrangimento.

A pessoa que estará acompanhando os procedimentos será a aluna do programa de doutoramento em Ciências da Educação da Universidade do Minho, Graciela Moro.

Solicitamos a sua autorização para o uso de seus dados para a produção de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida através da não identificação do seu nome.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder da pesquisadora e outra com os sujeitos participantes da pesquisa.

NOME DA PESQUISADORA PARA CONTATO: Graciela Moro
E-MAIL: gracimoro@gmail.com
NÚMERO DO TELEFONE: (47)99170-1450
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil , CEP: 89.219-710 - Fone:(47) 3481-7978
ASSINATURA DA PESQUISADORA: ____

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Sei que em qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participação no estudo se assim eu o desejar.
Autorizo que obtenha gravação em áudio e vídeo de minha pessoa para fins de pesquisa científica. Autorizo também que os dados obtidos possam ser utilizados em publicações como livros, periódicos ou divulgados em eventos científicos.

Declaro, por fim, que recebi cópia deste termo de Consentimento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
______________________	______________________	__________
______________________	______________________	__________
______________________	______________________	__________
______________________	______________________	__________
______________________	______________________	__________
______________________	______________________	__________
______________________	______________________	__________

F. Termo de consentimento livre e esclarecido para os alunos dos professores do grupo de trabalho, das turmas em que houve observação de aulas.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Meu nome é Graciela Moro. Estou realizando uma pesquisa de doutoramento intitulada **"O ensino de Álgebra Linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira: perspetivas e contributos da prática colaborativa"**, tendo como objetivos "caracterizar o ensino de Álgebra Linear de professores de uma universidade brasileira e averiguar o contributo do trabalho colaborativo entre professores dessa instituição nesse ensino". A pesquisa tem a intenção de investigar as seguintes questões: Como os docentes ensinam Álgebra Linear? Que dificuldades sentem os docentes no ensino de Álgebra Linear? Quais as potencialidades e as limitações do trabalho colaborativo no ensino de Álgebra Linear?

Para sua realização será necessária a observação de algumas aulas de Álgebra Linear. Essas aulas serão filmadas e gravadas em áudio para posterior análise. Na observação nos interessa avaliar a metodologia utilizada pelo(a) professor(a) para abordar os tópicos de Álgebra Linear. Também será necessária a colaboração para responder as questões de uma entrevista sobre a metodologia utilizada pelos professores nas aulas de Álgebra Linear.

Neste sentido, gostaria de contar com sua participação. A participação é espontânea, não sendo oferecida qualquer remuneração ou gratificação. Você poderá solicitar novas informações sobre a presente investigação a qualquer momento, bem como retirar-se da investigação, sem qualquer tipo de constrangimento.

Se você estiver de acordo em participar, posso garantir que as informações fornecidas serão confidenciais, sendo que os nomes dos/as participantes, bem como as imagens e áudios não serão identificados em nenhum momento. As informações coletadas poderão ser utilizadas em publicações como livros, periódicos ou divulgação em eventos científicos.

Sua participação poderá contribuir para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

NOME DA PESQUISADORA PARA CONTATO: Graciela Moro
E-MAIL: gracimoro@gmail.com
NÚMERO DO TELEFONE: (47)9170-1450
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil , CEP: 89.219-710 - Fone:(47) 3481-7978
ASSINATURA DA PESQUISADORA:____________________________

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Sei que em qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participação no estudo se assim eu o desejar.
Autorizo que obtenha filmagem ou gravação de minha pessoa para fins de pesquisa científica. Autorizo também que os dados obtidos possam ser utilizados em publicações como livros, periódicos ou divulgados em eventos científicos.

Nome por extenso	Assinatura	Data