Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Raquel Fonseca Faria

As múltiplas representações na aprendizagem de Sequências e Regularidades por alunos do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico

janeiro de 2021

Ana Raquel Fonseca Faria **As múltiplas representações na aprendizagem de Sequências e Regularidades por alunos do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico**

UMinho | 2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Raquel Fonseca Faria

As múltiplas representações na aprendizagem de Sequências e Regularidades por alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Relatório de estágio
Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e
de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

janeiro de 2021

AGRADECIMENTOS

A elaboração deste relatório tornou-se possível com a colaboração, dedicação e carinho de diversas pessoas. Gostaria de expressar a minha gratidão, respeito e afeição por cada um daqueles que contribuiu para a superação de mais uma etapa da minha vida.

Ao Doutor Floriano Viseu pela sua disponibilidade, competência, paciência e conselhos. Obrigada por cada palavra de incentivo e conforto em momentos de ansiedade. Sou extremamente grata por todas as horas que dedicou a ajudar-me, por me ter incentivado a superar barreiras e por ter acreditado sempre nas minhas potencialidades. Sem si, este projeto seria impossível.

À Professora Tita Pinto e à Professora Fernanda Gonçalves por me terem recebido de braços abertos, me terem integrado e envolvido em diferentes projetos. Obrigada pelos conselhos, pelo carinho e por todas as aprendizagens. Serão modelos que seguirei e, como tal, a Professora que eu serei irá, sempre, dever-se a vocês também.

A todos os alunos que já se cruzaram por mim, por me permitirem aprender tanto com eles, por todo o carinho, abraços e sorrisos.

À minha querida mãe pelo amor, dedicação e parceria. Por ouvir vezes sem conta as minhas preocupações, pela paciência e por me ensinar valores como humildade, esforço e empatia. Será sempre uma referência de Professora, Mãe e Mulher.

Ao meu pai por acreditar nos meus sonhos, por todas as horas de conversa, pela paciência e companheirismo. Há 11 anos escrevi-lhe: "Quando um dia eu tiver uma ótima vida só te posso agradecer a ti (...)", hoje agradeço-lhe, não só por ter festejado comigo cada conquista, mas, por fazer parte de cada uma delas.

Ao meu irmão, o meu amor incondicional, por me ensinar tanto sobre força e resiliência.

Ao Diogo, pelo carinho, por me ouvir em todas as horas, pelo sorriso contagiante, por caminhar comigo e ficar orgulhoso de cada passo que dou.

À Beatriz, pelos conselhos, o incentivo e a ajuda ao longo desta caminhada.

À Bruna, à Daniela, à Diana, ao Shev e ao Libelinha, pela amizade, pelos conselhos e brincadeiras.

A todos, o meu mais sincero, Muito Obrigada.

Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós. - Antoine de Saint-Exupery

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

AS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES NA APRENDIZAGEM DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES DE ALUNOS DO 1.° E 2.° CICLOS

RESUMO

A Matemática é uma disciplina caracterizada pela natureza abstrata dos objetos que a formam, o que, em certa medida, serve de justificação das dificuldades que alguns alunos têm na sua aprendizagem. De modo a minimizar tais dificuldades, as múltiplas representações dos objetos matemáticos podem contribuir para o aluno dar forma e visibilidade aos seus pensamentos e comunicar, assim, as suas ideias. Exemplo disso verifica-se no conteúdo 'Sequências e Regularidades', que se torna propício à exploração de diferentes registos de representação na instituição dos seus tópicos específicos, tais como termo, ordem, lei de formação e expressão geradora. Tendo em conta tais pressupostos, este estudo tem como objetivo averiguar o contributo das múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' por alunos dos 1.° e 2.° Ciclos. De modo a concretizar este objetivo, pretende-se responder às seguintes questões de investigação: (i) Que representações recorrem os alunos dos 1.° e 2.° Ciclos na aprendizagem de Sequências e Regularidades? Que conexões estabelecem entre as múltiplas representações de Sequências e Regularidades?; (ii) Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de Sequências e Regularidades?; e (iii) Que perceções têm os alunos sobre a utilização das múltiplas representações na aprendizagem de Sequências e Regularidades? Com o intuito de responder a estas questões, procedeu-se à recolha de informação através dos seguintes métodos de recolha de dados: questionários; gravações de vídeo e áudio de aulas; produções dos alunos; e análise documental.

Da análise de dados conclui-se que os alunos inicialmente apresentavam uma menor variedade de representações, que foi aumentando no decorrer da intervenção pedagógica. No 1.° Ciclo do Ensino Básico, os alunos revelaram maior preferência pelas representações pictóricas. Já os alunos do 2.° Ciclo do Ensino Básico a representação mais utilizada foi a linguagem natural. Os alunos de ambos os ciclos de ensino explicitaram ao longo das suas resoluções conexões entre diferentes representações. No 1.° Ciclo as representações pictóricas e as tabelas permitiram estabelecer generalizações próximas e distantes, determinar a lei de formação e a expressão geradora. Na turma do 2.° Ciclo verificou-se que as conexões entre a escrita simbólica e os esquemas foram facilitadoras na determinação da lei de formação, expressão geradora, termo e ordem. Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos verificou-se que em ambos os ciclos de ensino os alunos manifestaram dúvidas na interpretação de problemas. A linguagem natural, embora tenha surgido como a representação mais utilizada no 2.° Ciclo, foi também a representação que revelou um maior número de respostas incorretas às tarefas propostas, tanto no 1.° como no 2.° Ciclo do Ensino Básico. Tal resultado tende a revelar que alguns alunos ainda têm dificuldades em justificar os seus raciocínios, quer por escrito, quer oralmente, não conseguindo muitas vezes formular justificações válidas. Alguns alunos revelam várias vantagens na utilização de diversas representações, como o desenvolvimento do seu raciocínio e a melhor compreensão do conteúdo de 'Sequências e Regularidades', enquanto outros consideram este processo um pouco confuso.

Palavras-Chave: Alunos do 1.° e 2.° Ciclos; Dificuldades; Ensino e aprendizagem de Sequências e Regularidades; Representações.

THE MULTIPLE REPRESENTATIONS IN THE LEARNING OF SEQUENCES AND REGULARITIES FOR 1ST AND 2ND CYCLES OF BASIC EDUCATION STUDENTS

ABSTRACT

Mathematics is a subject characterized by the abstract nature of the objects that form it, which to a certain extent, explains the learning challenges felt by some students. To reduce such challenges, the multiple representations of the mathematical objects may contribute for the student to give shape and visibility to thoughts and communicate ideas more easily. An example of that is found in ‘Sequences and Regularities’, which allows to the exploration of different representations according to specific topics, such as term, order, formation law and generating expression. Considering these assumptions, it is the aim of this study to investigate how multiple representations contribute to the learning process of ‘Sequences and Regularities’ by 1st and 2nd cycles students. To attain this goal, we intend to answer the following research questions: (i) Which representations do 1st and 2nd cycles students use to learn Sequences and Regularities? What connections do they establish between the multiple representations of Sequences and Regularities?; (ii) What difficulties do students have in learning Sequences and Regularities?; and (iii) Which perceptions do students have about the use of multiple representations in learning Sequences and Regularities? In order to answer these questions, different sources and methods of information collection were used: questionnaires; video and audio recordings of classes; student productions; and document analysis.

Following the data analysis, it was concluded that students presented a smaller variety of representations prior to the pedagogic intervention, having increased afterwards. In the 1st Cycle of Basic Education, students showed a greater preference for pictorial representations. While students of the 2nd Cycle of Basic Education tended to use natural language. The students of both teaching cycles made connections between different representations throughout their resolutions. In the 1st Cycle, the pictorial representations and tables allowed to establish close and distant generalizations, to determine the law of formation and the generating expression. In the 2nd Cycle class, connecting symbolic writing and schemes helped determining the law of formation, generating expression, term and order. In regards difficulties experienced by the students, it was found that in both teaching cycles the students found it difficult to interpret mathematical problems. Although natural language has emerged as the most used representation in the 2nd Cycle, it has revealed itself as the representation that leads to a greater number of incorrect answers to the proposed tasks, both in the 1st and 2nd Cycles of Basic Education. This result seems to indicate that some students still experience difficulties in justifying their reasoning, either in writing or orally, oftentimes failing to formulate valid justifications. Some students reveal many advantages in using different representations, such as the development of their reasoning and a better understanding of “Sequences and Regularities” content, while others find this process a little confusing.

Keywords: 1st and 2nd Cycle students; Difficulties; Teaching and learning of sequences and regularities; Representations.

ÍNDICE

INDÍCE DE TABELAS

INDÍCE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente Relatório de Estágio debruça-se sobre as múltiplas representações na aprendizagem do conteúdo de 'Sequências e Regularidades', que é transversal aos diferentes ciclos de escolaridade na promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico e das capacidades de generalizar e de resolver problemas. Com esse propósito, este capítulo apresenta o objetivo e as questões de investigação que orientaram as atividades da minha prática pedagógica, a pertinência do estudo e a organização deste relatório.

1.1. Objetivo e questões de investigação

A escolha do tema deste trabalho, as múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' por alunos do 1.° e 2.° Ciclos, surgiu na constatação da dificuldade que os alunos apresentam em compreender e dar visibilidade a certos conceitos matemáticos que lhes são abstratos (Canavarro & Pinto, 2012). Esta dificuldade leva a uma rejeição de alguns alunos à disciplina de Matemática e a uma falta de compreensão dos conteúdos presentes no currículo. Uma forma de atenuar tais dificuldades, emerge a exploração das diferentes representações dos conceitos matemáticos, sobretudo os algébricos. As representações são uma configuração que traduz algo, como um objeto, uma ideia ou um conteúdo matemático (Goldin, 2008). Duval (2012) defende que a falta de compreensão das representações desencadeia, necessariamente, uma incompreensão do conteúdo matemático. Por exemplo, na observação de contextos no 1.° Ciclo apercebi-me de que na aprendizagem da tabuada da multiplicação os alunos tendiam a memorizá-la, sem que alguns deles identificassem regularidades. Tal constatação despertou o meu interesse em explorar as múltiplas representações na aprendizagem do conteúdo de 'Sequências e Regularidades', mais concretamente na determinação de termos próximos e distantes, da lei de formação e da expressão geradora. Estas atividades de observação de sequências, análise, descrição, representação e generalização de uma regularidade devem ser estimuladas para que as crianças abordem conceitos relacionados com a álgebra (Alvarenga & Vale, 2007). Estes autores consideram ainda que o conteúdo de 'Sequências e

Regularidades' é "um importante percursor da Álgebra" (p. 31) e do pensamento algébrico. O desenvolvimento do pensamento algébrico acontece com o uso de símbolos, melhorando as "formas de pensamento através de atividades nas quais o simbolismo algébrico pode ser usado como ferramenta" (Kieran, 2004, p. 149). No entanto, é importante salientar que o pensamento algébrico será ainda desenvolvido em momentos onde não se utilizam símbolos, mas onde se trabalham outras capacidades como a análise de relações entre variáveis e verificação de disposições, desenvolvendo a capacidade de generalização, resolução de problemas e justificação (Kieran, 2004). Carraher e Schliemann (2007) entendem, também, que as representações têm um papel importante na promoção da álgebra.

Considerando os pressupostos anteriormente referidos, este projeto pedagógico tem como objetivo averiguar o contributo das múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' por alunos do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico. Com o intuito de concretizar este objetivo, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

Q1: Que representações recorrem os alunos do 1.° e 2.° Ciclos na aprendizagem de Sequências e Regularidades? Que conexões estabelecem entre as múltiplas representações de Sequências e Regularidades?

Q2: Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de Sequências e Regularidades?

Q3: Que perceções têm os alunos sobre a utilização das múltiplas representações na aprendizagem de Sequências e Regularidades?

1.2. Pertinência do estudo

A relevância que a disciplina de Matemática tem no currículo escolar é justificada por diferentes finalidades que tem na formação dos alunos, tais como, a formativa, a social, a cultural e a sua utilidade em situações do quotidiano e de outras áreas do conhecimento (Ponte et al., 1997). Subjacente a tais finalidades, é comumente aceite o contributo da Matemática no desenvolvimento de conhecimentos, atitudes e capacidades. Entre as capacidades, ganham destaque nos programas de Matemática a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática (MEC, 2013, 2018), onde as múltiplas representações em muito contribuem para que o aluno possa dar forma aos seus pensamentos e comunicar as suas ideias.

A exploração das representações dos conceitos matemáticos promove a compreensão da sua construção (NCTM, 2007), quer ao nível do tratamento, quer da conversão entre registos de representação (Duval, 2012). Após a análise do trabalho de alguns autores, percebe-se a acuidade em desenvolver nos alunos a capacidade de usar as múltiplas representações de objetos matemáticos para justificar e refutar conjeturas (NCTM, 2007), com o fim de desenvolver o raciocínio e a compreensão de tópicos matemáticos.

A pertinência deste estudo começou a ganhar mais visibilidade com a *Reforma Educativa-Programa do 1.° Ciclo Ensino Básico* realizada em 1990 (ME, 1990), com o destaque da necessidade de um suporte "em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstrações matemáticas" (p. 126). Na promoção desta capacidade evidenciava-se a tradução entre a linguagem comum e a linguagem matemática, para o qual "a criação de sinais, desenhos e esquemas individuais constitui um suporte importante para a construção e descoberta pessoal de linguagens convencionais" (ME, 1990, p. 131). De igual modo, as recomendações dos programas atuais de Matemática do Ensino Básico destacam a importância dos alunos desenvolverem a capacidade de converter informações em diferentes registos de modo a obterem perspetivas distintas da mesma situação (ME, 2016; MEC, 2013).

Na observação contextual constatei a dificuldade que é para os alunos em compreender certos conceitos matemáticos, como, por exemplo, a noção de número, visto que nesta faixa etária é complexo assimilar certas noções abstratas. Porém, o recurso às múltiplas representações pode minimizar tal dificuldade. Canavarro e Pinto (2012) defendem que as representações matemáticas, para além de facilitarem a compreensão de conceitos matemáticos, promovem o desenvolvimento de capacidades transversais, tais como resolver problemas e raciocinar matematicamente. Como advogam Boavida et al. (2008), as representações são "ferramentas fundamentais para pensar matematicamente" (p. 71), o que eleva a pertinência em abordar este tema neste contexto escolar.

Optei por abordar o conteúdo de 'Sequências e Regularidades' porque, tal como consideram Ponte, Branco e Matos (2009), "percorre todo o Ensino Básico, tendo como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos" (p. 40). 'Sequências e Regularidades' é, ainda, um dos conteúdos matemáticos que potencia a exploração de múltiplas representações (Barbosa et al., 2011; Castro, 2005; Warren, 2009). Este conteúdo surge quer no *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (MEC, 2013), quer nas *Aprendizagens Essenciais* do 1.° ao 6.° ano (MEC, 2018), nos temas de *Números e Operações* e *Álgebra.* Com a exploração de regularidades numéricas em sequências e em tabelas de números, os alunos identificam uma lei de formação, atividade que contribui para "o desenvolvimento do sentido de número nos alunos e constitui uma base para o desenvolvimento da sua capacidade de generalização" (idem, p. 40).

1.3. Organização do relatório

Do ponto de vista organizacional e estrutural, este Relatório de Estágio encontra-se dividido em quatro capítulos: (i) Introdução; (ii) Enquadramento Contextual e Teórico; (iii) Intervenção Pedagógica; e (iv) Conclusões, Recomendações e Limitações.

O capítulo de Introdução apresenta o tema deste estudo, bem como os objetivos e questões de investigação, a pertinência do estudo e ainda a organização do Relatório de Estágio.

O capítulo do Enquadramento Contextual e Teórico está dividido em três secções. Numa primeira secção é apresentado o enquadramento contextual, onde se caracteriza o agrupamento de escolas onde decorreu a prática pedagógica, bem como as respetivas turmas onde realizei a minha prática pedagógica. Na segunda secção é feito um enquadramento teórico do tema em estudo, mediante cinco subsecções: (i) 'Sequências e Regularidades' nos programas de matemática do 1.° e 2.° Ciclos; (ii) A importância da aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'; (iii) Representações matemáticas; (iv) Dificuldades na exploração de 'Sequências e Regularidades'; e (v) Análise de estudos empíricos sobre as múltiplas representações e as 'Sequências e Regularidades' no 1.° e 2.° Ciclos. A última secção deste capítulo debruça-se sobre as estratégias de intervenção e divide-se em duas subsecções: (i) Metodologia de ensino e aprendizagem; e (ii) Estratégias de avaliação da ação.

O capítulo da Intervenção Pedagógica resulta da análise da minha intervenção nas turmas onde decorreu o estágio, estando dividido em três secções essenciais: (i) Intervenção Pedagógica no 1.° Ciclo; (ii) Intervenção Pedagógica no 2.° Ciclo; e (iii) Avaliação do ensino ministrado. As duas primeiras secções encontram-se subdivididas em três subsecções: (i) Identificação de regularidades numéricas; (ii) Determinação da expressão geradora de uma sequência; e (iii) Transformação de representações. A última secção divide-se em duas subsecções distintas: (i) Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 1.° Ciclo; e (ii) Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 2.° Ciclo.

O capítulo das Conclusões, Recomendações e Limitações debruça-se sobre as principiais conclusões do estudo, considerando as questões de investigação delineadas, as limitações e recomendações para futuras investigações.

Finalmente, apresentam-se ainda neste Relatório de Estágio as referências bibliográficas mencionadas e consultadas ao longo do mesmo e os anexos com documentos que complementam o conteúdo do relatório.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo tem como finalidade contextualizar os ambientes escolares, particularmente o agrupamento e as escolas referentes ao 1.° e 2.° Ciclos, onde decorreu a minha intervenção pedagógica supervisionada, que serviu de base à constituição deste relatório. Apresenta, ainda, o contexto teórico que fundamenta o tema deste trabalho e as estratégias de intervenção e de avaliação do ensino ministrado.

2.1. Enquadramento Contextual

Neste subcapítulo apresenta-se uma caracterização do Agrupamento de Escolas, do 1.° Ciclo e do 2.° Ciclo do Ensino Básico, especificando as turmas onde realizei a minha intervenção pedagógica.

2.1.1 O Agrupamento de escolas

O Agrupamento onde decorreu a minha prática pedagógica contempla os dois ciclos de estudo onde realizei a minha intervenção. Trata-se de uma unidade educativa que abrange alunos desde a educação pré-escolar até ao 12. ° ano. O Agrupamento é constituído por seis escolas: uma com o 1.° Ciclo do Ensino Básico; quatro com Jardim-de-Infância e 1.° Ciclo do Ensino Básico; uma escola com 2.° Ciclo e 3.° Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, sendo esta última a sede do Agrupamento. Estas escolas situam-se na cidade de Guimarães e cobrem diferentes freguesias. O número de alunos pertencentes ao Agrupamento no ano letivo de 2018/2019 era de 1492. Relativamente ao número de professores, contemplava neste ano letivo 147 professores, dos quais 15 eram professores contratados.

No que concerne às estruturas físicas das escolas, de modo geral, todos os edifícios se encontram em bom estado de conservação. Todavia, algumas escolas sofrem da ausência de coberturas exteriores o que contribui para algumas complicações no interior dos edifícios, essencialmente, em dias chuvosos.

Quanto à população estudantil, as escolas abarcam alunos oriundos de várias zonas e pertencentes a estratos sociais distintos. A maioria dos alunos reside nas freguesias onde estão sediadas as escolas do Agrupamento, porém, tem aumentando constantemente o número de alunos provenientes de outras freguesias próximas e, ainda, de outros países. Nesta diversidade de alunos encontramos uma proveniência socioeconómica bastante heterogénea. De modo a auxiliar estas famílias, a instituição reagiu-se pelos critérios da atribuição do abono de família, contribuindo com material escolar, transportes e comparticipação no custo das refeições.

O Agrupamento tem como objetivos centrais manter o compromisso de um estabelecimento inclusivo, que é um desígnio nacional e um desafio para todos. O Agrupamento promove a equidade e o sucesso escolar através de diferentes ofertas de educação e formação e no acesso a uma cultura científica e artística de base humanista, como define o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017). Os recursos do Agrupamento de apoio à aprendizagem e à inclusão estão nas Equipas 'Multidisciplinares de Apoio à Educação Inclusiva', no 'Centro de Apoio à Aprendizagem', no 'Gabinete de Informação e Apoio ao Aluno', no 'Serviço de Psicologia e Orientação Social' e no 'Serviço Social e na Equipa de Acompanhamento Permanente aos Alunos'. O abandono escolar tem sido reduzido nos diferentes níveis de ensino. As taxas de abandono escolar são residuais e tratam-se maioritariamente de famílias que emigram daquela área geográfica.

Os estabelecimentos de ensino têm uma oferta formativa diversificada e ajustada aos seus alunos e à comunidade envolvente. No Ensino Secundário existem três ofertas formativas: cursos científico-humanísticos, cursos profissionais e cursos artísticos da música. Esta instituição complementa a oferta educativa com projetos transversais ao longo de todo o ano, tais como: (i) o Quadro de Mérito e o Dia do Diploma, que visa premiar o trabalho dos alunos, implementando o reforço positivo e estimulando para a obtenção de resultados de excelência; (ii) Escola em Movimento, que engloba exposições, Saraus e Arraiais onde os alunos expõem as diferentes atividades desenvolvidas ao longo do ano letivo; (iii) Bibliotecas Escolares, equipadas devidamente e com diversos recursos, que assumem um papel central no processo educativo e no desenvolvimento da literacia, cultura cívica, científica, tecnológica e artística; (iv) Atividades de Enriquecimento Curricular e Componente de Apoio à Família, com técnicos contratados pela autarquia que dinamizam atividades de modo a reforçar o processo de socialização infantil e juvenil; (v) Educação para a Sustentabilidade, que é um programa transversal e dedicado à educação ambiental desenvolvido em todas as Escolas do Agrupamento. O Agrupamento está envolvido em angariação de tampinhas, rolhas, óleos usados, tinteiros, entre outros, e participa em projetos como o PEGADAS, o

Eco- Escolas, onde já foram galardoadas três escolas com Bandeira Verde; (vi) Projeto Educação para a Saúde, o principal foco deste projeto prende-se na promoção de estilos de vida saudáveis, tendo em conta as linhas orientadoras do 'Referencial de Educação para a saúde: Saúde Mental e Prevenção da Violência, Educação Alimentar, Atividade Física, Comportamentos Aditivos e Dependências e Afetos' e 'Educação para a Sexualidade'; (vii) Clube do Desporto Escolar, que visa melhorar as condições para a prática desportiva regular no meio escolar e dinamiza diferentes atividades como o Corta Mato escolar, Torneios de Captação, entre outros; (viii) Projeto 4.° no 5.°, de modo a minimizar a ansiedade causada aos alunos do 4.° ano de escolaridade devido à transição para o 5.° ano de escolaridade, os alunos do 4.° são convidados a passar um dia na nova escola e conhecer novas rotinas; e (ix) Projeto Gatil Simãozinho, que é um projeto único em Portugal, onde os alunos recolhem bens alimentares, de conforto e higiene para os gatos que são acolhidos na escola.

2.1.2. A escola e a turma do 1.° Ciclo do Ensino Básico

A escola onde realizei a intervenção da prática pedagógica no 1.° Ciclo do Ensino Básico pertence a uma freguesia dos arredores de Guimarães, com ofertas educativas que incluem desde a educação pré-escolar ao 1.° Ciclo do Ensino Básico. A escola contém ainda um ATL (Atividades de Tempos Livres) e é uma das três maiores escolas do Agrupamento, onde se encontra um maior número de turmas devido à sua localização 'mais' urbana. A proximidade a uma vasta zona verde envolvente permite o aproveitamento desse espaço para diversas atividades ao ar livre. O edifício escolar foi construído em 1991 e no ano letivo de 2002/2003 sofreu obras de recuperação e ampliação. Em 2008 foram feitas obras de adaptação para crianças com limitações motoras. O edifício agrega sete salas de aula, um polivalente, uma cozinha, uma cantina gerida pela associação de pais, uma sala de professores e uma biblioteca administrada por uma docente que presta apoio aos alunos e a outros docentes da escola. No espaço envolvente existe ainda um campo de jogos e um parque infantil.

O Agrupamento e a escola estão em constante sintonia uma vez que os projetos do Agrupamento se alargam para as diferentes instituições que o constitui. Assim sendo, a escola não tem um projeto curricular exclusivo à mesma, mas integra o projeto curricular do Agrupamento.

Caracterização da turma do 1.° Ciclo. A turma onde decorreu a intervenção pedagógica supervisionada era do 3.° ano de escolaridade e composta por 26 alunos (nove rapazes e dezassete raparigas), com idade maioritariamente de oito anos. A docente que lecionava na turma acompanhava-os desde os primeiros anos de escolaridade. Os alunos também se mantiveram ao longo dos três anos, percebendo-se, assim, uma grande cumplicidade e integração de todos os elementos. Um dos alunos era um aluno de inclusão e embora ainda não tivesse algum diagnóstico formado, o seu desenvolvimento cognitivo equiparava-se a um aluno do 2.° ano de escolaridade.

O horário da turma era bastante preenchido e completo. As atividades escolares iniciavam às 9 horas e terminavam às 16 horas ou às 16 horas e 30 minutos. O horário semanal integrava as disciplinas de Matemática (7 horas), Português (6,5 horas), Estudo do Meio (3,5 horas), Inglês (2 horas), Expressões Artísticas e Físico-Motoras (3 horas) e Atividade Física e Desportiva (2,5 horas). Destas disciplinas, 33,4% dos alunos elegeu a Expressão Plástica como a sua área disciplinar favorita. Seguiu-se Estudo do Meio com 25% da preferência, enquanto Português e Matemática tiveram a mesma preferência, 20,8%. A disciplina eleita como sendo a que apresentam maior dificuldade foi Matemática (58,3%), seguindo-se a disciplina de Português (37,5%) e a de Expressão Plástica (4,2%). Mesmo que mais de metade da turma afirme que Matemática é onde apresentam maiores dificuldades, 66,7% da turma revelou que gosta da disciplina, contrastando-se com a minoria que não gosta desta disciplina (33,3%).

A turma, no geral, apresentou um bom aproveitamento, comportamento e assiduidade. Tratam-se de alunos participativos, embora alguns sejam mais reservados e introvertidos. Relativamente ao desempenho na disciplina de Matemática, nenhum aluno obteve o nível 'Insuficiente' na sua avaliação no final de cada um dos períodos do ano escolar, obtendo a maior parte dos alunos níveis de Bom e de Muito Bom (Tabela 1).

Tabela 1. Frequência dos níveis de avaliação a Matemática da turma em cada um dos períodos do ano escolar.

Nível de Avaliação	1.° Período	2.° Período	3.° Período
Muito Bom	6	11	11
Bom	14	11	12
Suficiente	6	4	3
Insuficiente	0	0	0

O nível de desempenho dos alunos indicia refletir o grau de participação dos encarregados de educação na vida escolar dos seus educandos, que foi bastante ativa durante o ano letivo. Além de compareceram às reuniões de avaliação dos seus educandos, envolveram-se ativamente nas atividades desenvolvidas no contexto escolar, como nos trabalhos de outono, no Halloween e nos trabalhos de Natal.

2.1.3. A escola e a turma do 2.° Ciclo do Ensino Básico

A escola onde decorreu a minha intervenção pedagógica no 2.° Ciclo é a escola sede do Agrupamento, sendo constituída por um bloco e um pavilhão gimnodesportivo num espaço amplo circundante. A escola dispõe de 27 salas de aula, onde 10 das mesmas são destinadas a disciplinas específicas, como Laboratórios de Química, Física e Biologia, salas de Informática, Desenho e Educação Tecnológica. Este estabelecimento possui uma biblioteca com recursos áudio, vídeo, informáticos e ligação à Internet. A biblioteca oferece um Centro de aprendizagem, uma grande variedade de manuais, um Anfiteatro e Serviço de Psicologia e Orientação.

Caracterização da turma do 2.° Ciclo. A turma do 2.° Ciclo onde lecionei no âmbito da minha prática pedagógica era do 6.° ano de escolaridade. A turma era composta por 26 alunos (quinze raparigas e onze rapazes). Todos os alunos frequentaram o pré-escolar e nenhum aluno teve alguma retenção nos anos letivos anteriores. A turma incluía um aluno que beneficiava de medidas seletivas de suporte à aprendizagem e à inclusão, com adaptações no currículo e no processo de avaliação não significativas. Outros dois alunos também beneficiavam de algumas adaptações no âmbito das medidas universais de suporte à aprendizagem e inclusão. Seis alunos foram propostos para Apoio ao Estudo, no entanto, apenas cinco frequentaram esta modalidade de apoio educativo.

Quanto às preferências disciplinares dos alunos, 42,3% elegeu Educação Física como a sua disciplina favorita. Matemática foi eleita como a disciplina favorita de apenas 7,7% dos alunos. Mais de metade dos alunos (57,7%) afirmou gostar de matemática, por se tratar de uma disciplina desafiante. Ainda assim, também 57,7% dos alunos revelou que matemática é a área curricular onde têm maiores dificuldades.

No geral, a turma apresentou um bom aproveitamento, comportamento e assiduidade. O ano letivo terminou em regime de ensino à distância, todavia percebeu-se nos alunos um maior amadurecimento e uma grande melhoria no seu comportamento e aproveitamento escolar. De modo geral, revelou tratar-se de uma turma participativa. Relativamente ao desempenho na disciplina de Matemática, nenhum aluno obteve o nível 1 ao longo dos diferentes períodos. A frequência do nível 5 foi aumentando ao longos dos três períodos do ano, enquanto que a do nível 2 foi diminuindo, revelando uma evolução na turma. O nível 4, embora mais comum, manteve-se mais ou menos constante (Tabela 2).

Tabela 2. Frequência dos níveis de avaliação a Matemática da turma em cada um dos períodos do ano escolar.

Nível de Avaliação	1.° Período	2.° Período	3.° Período
Nível 1	0	0	0
Nível 2	2	1	0
Nível 3	9	10	7
Nível 4	11	10	10
Nível 5	4	5	9

A participação dos encarregados de educação na vida escolar dos seus educandos foi positiva durante todo o ano letivo. No período de ensino à distância os encarregados de educação revelaram interesse e preocupação acrescida no acompanhamento dos seus educandos, o que se refletiu na evolução dos alunos relativamente à sua participação e responsabilidade.

2.2. Enquadramento teórico

Este subcapítulo debruça-se sobre o enquadramento teórico que sustenta o objetivo e as questões deste estudo. Com essa finalidade, é organizado em cinco secções: (i) 'Sequências e Regularidades' nos programas de matemática do 1.° e 2.° Ciclos; (ii) a importância da aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'; (iii) representações matemáticas; (iv) dificuldades na exploração de 'Sequências e Regularidades' e das múltiplas representações inerentes; e (v) análise de estudos empíricos sobre as múltiplas representações e as 'Sequências e Regularidades' no 1.° e 2.° Ciclos.

2.2.1. 'Sequências e Regularidades' nos programas de matemática do 1.° e 2.° Ciclos

A exploração de 'Sequências e Regularidades' é transversal aos diferentes anos letivos, tal como sugerem as *Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*: "[o conteúdo 'Sequências e Regularidades'] deve ser trabalhado em todos os anos de escolaridade de modo a permitir um desenvolvimento progressivo do pensamento algébrico nos alunos, em particular da capacidade de generalizar" (ME, 2016, p. 6). No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagem, podemos observar que quer no *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino*

Básico (MEC, 2013), quer nas *Aprendizagens Essenciais* do 1.° ao 6.° ano (MEC, 2018), o conteúdo 'Sequências e Regularidades' surge no tema *Números e Operações* e *Álgebra* (Tabela 3).

Tabela 3. Temas curriculares que integram o conteúdo de sequências e regularidades.

Ciclo de estudos	Ano de escolaridade	Metas curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) e Aprendizagens Essenciais (MEC, 2018)
1.° Ciclo	1.° e 2.° anos	Números e Operações
	3.° e 4.° anos	Números e Operações
2.° Ciclo	5.° e 6.° anos	Álgebra

O tema *Números e Operações* propõe que os alunos desenvolvam o sentido de número e aprimorem a capacidade de cálculo mental e algorítmico. Neste tema, inserem-se as sequências e as regularidades, pelo que no 1.° ano de escolaridade os objetivos essenciais de aprendizagem recomendam que os alunos sejam capazes de realizar contagens progressivas e regressivas e identificar a sequência numérica obtida. Daqui surge um objetivo comum ao restante ciclo de ensino: "reconhecer e descrever regularidades em sequências e em tabelas numéricas, formular conjeturas e explicar como são geradas essas regularidades" (MEC, 2018, p. 8).

No 2.° Ciclo surge discriminado um novo tema de aprendizagem: a *Álgebra*. Embora o tema de *Números e Operações* se mantenha com a finalidade de aperfeiçoar a noção de número, neste novo tema os alunos desenvolvem o pensamento algébrico e aprofundam "o estudo das propriedades das operações e a sua generalização, bem como o uso da linguagem simbólica para descrever e representar relações matemáticas" (MEC, 2018, p. 4). O conteúdo de 'Sequências e Regularidades' insere-se neste tema uma vez que a partir dele os alunos podem determinar leis de formação e expressões algébricas. O objetivo essencial a ser atingido no final deste ciclo de estudos é que os alunos sejam capazes de "conceber e aplicar estratégias de resolução de problemas envolvendo regularidades ou sequências em contextos matemáticos e não matemáticos" (MEC, 2018, p. 12).

Em ambos os ciclos de ensino é destacada a recomendação de incentivar os alunos a elaborarem sequências e a determinarem as leis de formação das mesmas, o que é corroborado pelo National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2007) sobre o envolvimento dos alunos em atividades que os desafiem a reconhecer, descrever e ampliar padrões, desde o pré-escolar, e que sejam sujeitos a situações que lhes permitam observar, "agrupar, classificar e ordenar objetos" (p. 104).

Segundo Ponte et al. (2009), o conteúdo de 'Sequências e Regularidades' "percorre todo o Ensino Básico, tendo como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos" (p. 40). Compreender padrões, relações e funções é referido pelo NCTM (2007) como essencial desde o pré-escolar ao 12.° ano de escolaridade. No 1.° Ciclo, as 'Sequências e Regularidades' pertencem ao tema de *Números de Operações* uma vez que os alunos ao identificarem a lei de formação de uma sequência estarão a desenvolver o seu sentido de número, o que contribui para a capacidade de generalização. No 2.° Ciclo, introduzem-se os conceitos 'termo' e 'ordem'.

Relativamente às sequências, Ponte et al. (2009) distinguem dois tipos: pictóricas (envolvem figuras) e numéricas (envolvem números). Nas sequências pictóricas, os alunos descrevem e analisam as regularidades que observam nas figuras que compõem a sequência e relacionam a sequência numérica que lhe está dependente. As sequências numéricas podem ser finitas ou infinitas (sucessões). A procura de generalizações na sequência leva o aluno a construir um discurso que exige uma grande abstração (Idem, 2009).

As sequências podem ainda separar-se em dois grandes grupos: sequências repetitivas e sequências crescentes (Ponte et al., 2009; Zazkis & Liljedahl, 2002). Estas sequências podem ser exploradas através de formas, cores, movimento, tato e som (Warren, 2005). A sequência repetitiva é composta por diversos elementos (ou termos) e existe uma unidade que se repete indeterminadamente. Para determinar os termos seguintes da sequência pode verificar-se uma igualdade entre os primeiros termos e os seguintes, ou uma igualdade de elementos em determinadas ordens definidas. Isto permite aos alunos darem uso a diversas representações para que consigam determinar a regularidade e, consequentemente, os termos seguintes, recorrendo a generalizações (Carraher & Schliemann, 2007; Ponte et al., 2009). Este processo é essencial para as crianças visualizarem a sequência como uma sucessão de termos que se repetem, levando-os, assim, à generalização (Vale et al., 2011). Ponte et al. (2009) afirmam que as sequências repetitivas "são as mais simples e que podem ser usadas para um trabalho inicial" (p. 47) no conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. As sequências crescentes são constituídas com termos diferentes, em que cada termo depende da ordem (posição) que lhe corresponde ou do termo anterior. Barbosa et al. (2011) explicam que estas sequências podem proporcionar ao aluno uma enorme variedade de situações, levando a explorações muito ricas e desafiantes. Por fim, Rivera e Becker (2008) declaram ainda a existência das sequências decrescentes. Ponte et al. (2009) enumeram diversas estratégias adotadas pelos alunos que lhes permite obter os termos seguintes das sequências. A primeira estratégia foi denominada de 'estratégia de representação e contagem', onde os alunos representam todos os termos da sequência até determinarem o termo que lhes foi pedido. A segunda é a 'estratégia aditiva', onde o aluno percebe qual a alteração que ocorre de termo para termo e a partir daí obtém o termo seguinte. Na 'estratégia do objeto inteiro', o aluno através de um termo determina outro termo múltiplo desse. Por fim, os autores explicam a 'estratégia de decomposição de termos', onde o aluno decompõe o termo percebendo dessa forma como foi construído. Portanto, será estabelecida uma relação entre termo e ordem e o aluno será capaz de determinar uma expressão algébrica que demonstre essa relação.

Uma vez que uma sequência, quer seja repetitiva, quer seja crescente, pode ser continuada de diferentes formas (Ponte et al*.,* 2009), e que muitas sequências dependem da interpretação dos alunos, é imprescindível o professor promover momentos de partilha de raciocínios. O professor também pode propor aos alunos que continuem a sequência no sentido contrário, exigindo um pensamento reversível (Barbosa et al*.,* 2011).

2.2.2. A importância da aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'

Ao longo dos anos, diversos autores, como, por exemplo, Devlin (2002), Orton (1999), Sawyer (1995) e Steen (1998), definiram a Matemática como a 'ciência dos padrões', visto que se identificando um padrão, haverá, inevitavelmente, a possibilidade de fazer matemática. O ser humano, consciente ou inconscientemente, procura forçosamente novos padrões constantemente (Baratta-Lorton, 2003). Vale e Pimentel (2010) explicam que qualquer interação que a nossa mente faça com padrões, estabelece relações, mesmo nas nossas atividades do quotidiano, como ler e fazer compras. Estabelecer relações é essencial no percurso de um estudante, de modo a contrariar a tendência de ficarem "limitados a recordar um conjunto de factos, conceitos e procedimentos de forma isolada" (Vale & Pimentel*,* 2010, p. 33). Assim, o estabelecimento de conexões irá permitir-lhes construir conhecimentos de forma integrada e, consequentemente, significativos (Idem, 2010). Segundo estes autores, o primeiro passo para aprender a pensar matematicamente é aprender a descobrir padrões e regularidades.

A natureza multifacetada que contempla o termo 'padrão' é reforçada pela identificação que Vale (2009) faz à diversidade de termos relacionados com padrão, tais como: “estrutura, regra, variável, repetição, ordem, generalização, sequência, regularidade” (p. 11). Neste trabalho, os vocábulos empregados são ‘sequências’ e ‘regularidades’. Luís, Bártolo e Serrazina (1996) consideram o conteúdo de ‘Sequências e Regularidades’ “muito rico e ao mesmo tempo interessante” (p. 44). Este tópico, segundo os autores, permite trabalhar diversos conteúdos de forma lúdica e trata-se de um tema transversal a todo o programa de Matemática. Denota-se essa preocupação no documento *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico* do Ministério da Educação (ME, 2016), que orienta os professores no sentido de trabalharem este tema em todos os anos de escolaridade, de modo a progressivamente desenvolverem nos alunos o pensamento algébrico e a capacidade de generalização. Desta forma, as ‘Sequências e Regularidades’ devem aplicar-se noutros “conteúdos quando não houver claramente um descritor que o enquadre” (ME, 2016, p. 6).

O termo ‘sequência’ pode ser aplicado quando nos referimos a uma ordem ou combinação de números, formas, sons, figuras ou cores (Castro, 2005). A expressão ‘regularidade’ refere-se à relação entre os diferentes objetos da sequência, ou seja, a relação entre o que lhes é comum e os conecta (Ponte, 2009). Se um aluno é capaz de continuar uma sequência, pode ser entendido que este fez uma compreensão da sua regularidade. Assim sendo, ser capaz de descrever um elemento geral pode ser a solução de uma sequência (Zazkis & Lijedahl, 2002).

Luís et al. (1996) defendem que o estudo deste conteúdo pode estimular alunos com dificuldades na Matemática, uma vez que os ajuda a entender como os conteúdos desta disciplina se aplicam no quotidiano. O trabalho com ‘Sequências e Regularidades’ irá permitir-lhes aprender a estabelecer conexões entre os diversos conteúdos do programa e, assim, classificar e ordenar a informação com mais facilidade (Idem, 1996). Isto proporcionar-lhes-á a capacidade de resolver problemas matemáticos e de superarem as suas dificuldades gradualmente (Idem, 1996). Vale (2009) revigora esta conceção, acrescentando que as ‘Sequências e Regularidades’ potenciam a capacidade de abstração e de comunicação recorrendo a múltiplas representações. Momentos em que os alunos são encorajados a comunicar e partilhar as suas ideias permitem que desenvolvam o seu raciocínio (NCTM, 2007). Para Russel (1999), a exploração, manipulação e descrição de objetos que envolvam sequências permitem ao aluno raciocinar. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), “raciocinar em matemática é um processo evolutivo que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (p. 10). Borralho et al. (2007) acreditam que o raciocínio pode ser desenvolvido a partir do trabalho com sequências desde o pré-escolar, visto que esta capacidade lhes irá permitir, além de resolver problemas (Castro, 2005), desenvolver e compreender o pensamento algébrico (Castro, 2005; Russel, 1999). Vários autores, como, por exemplo, Branco (2008), Pimentel et al. (2010) e Rivera e Becker (2009), consideram que o trabalho com ‘Sequências e Regularidades’ potencia a capacidade de raciocínio algébrico, que se trata de um aspeto importante para o ensino da Álgebra. A Álgebra “é bastante útil para o estudante na sua vida de todos os dias e para prosseguimento de estudos” (Borralho et al*.*, 2007, p. 193). Assim sendo, todos os alunos deveriam aprender Álgebra (NCTM, 2007). O desenvolvimento do pensamento algébrico torna-se relevante uma vez que os alunos desenvolvem capacidades de comunicação de forma autêntica e individual, ou seja, com recursos a múltiplas representações, de modo a desenvolverem a capacidade de criar conjeturas, estabelecer conexões e generalizar (Borralho et al., 2007). Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) é mencionado que os inícios do pensamento algébrico e o trabalho com padrões incentiva os alunos a identificar relações e a fazer generalizações. As generalizações podem surgir a partir do raciocínio. Os estudantes servir-se-ão do raciocínio para pensar sobre as propriedades de um objeto matemático e depois generalizar sobre uma classe de objetos (Russel, 1999). Pimentel et al. (2010) e Ponte (2005) consideram que é necessário formular generalizações partindo de sequências e regularidades, desde os primeiros anos de escolaridade, uma vez que ao generalizar sequências os alunos são introduzidos na Álgebra (Radford, 2010). A generalização de sequências contribui para o desenvolvimento do sentido de número (Pimentel et al., 2010), que é um dos objetivos presentes no tema de *Números e Operações* evidenciados nas Aprendizagens Essenciais (MEC, 2018).

A exploração de ‘Sequências e Regularidades’ proporciona aos alunos a utilização de múltiplas representações, como gestos, tabelas de valores, letras e a linguagem natural (Warren, 2009). A linguagem natural é o principal meio a que os alunos recorrem nos primeiros anos de escolaridade (Alvarenga & Vale, 2007; Pimentel et al., 2010). Todo este processo desencadeia uma melhoria na capacidade de argumentação do raciocínio dos alunos, uma vez que lhes permite discutir ideias matemáticas importantes (Lannin, 2003).

Em síntese, o estudo de 'Sequências e Regularidades' contribui para uma aprendizagem mais significativa, em virtude de os alunos se envolverem através de uma conexão com elementos do quotidiano, tais como, por exemplo, "arranjos de cores, formas, números" (Borralho, 2007, p. 194). O conteúdo ainda colabora no desenvolvimento do pensamento algébrico, no raciocínio matemático, na capacidade de generalização, de resolução de problemas e de argumentação (Lannin, 2003; Luís et al., 1996; NCTM, 2007; Ponte, 2005; Radford, 2010; Russel, 1999; Vale, 2009).

2.2.3. Representações matemáticas

Atendendo à natureza abstrata dos entes matemáticos surgiu a necessidade de criar representações que os signifiquem, produzam e assemelham de modo a que seja possível raciocinar sobre eles "e dar visibilidade ao que pensamos" (Canavarro & Pinto, 2012, p.53). Uma representação "é uma configuração que pode representar qualquer coisa de alguma forma" (Goldin, 2008, p. 178). Nesse sentido, as representações matemáticas traduzem objetos matemáticos, uma vez que estes "não estão diretamente acessíveis à perceção ou à experiência intuitiva imediata" (Duval, 2012, p. 268), ao contrário dos objetos palpáveis do nosso quotidiano. Como tal, é necessário atribuir representantes a esses objetos. Para Duval (2012), são vários os modos de representar objetos matemáticos: um número, uma função, um vetor, traçados, figuras, entre outros. No entanto, uma representação matemática só faz sentido quando observada num contexto determinado, com regras e significados definidos (Ponte & Velez, 2011). A título de exemplo, pensando no numeral 3, este poderá referir-se aos 'Três Porquinhos', ou representar algo imaterial como o cardinal de um conjunto de três elementos.

Goldin (2008) entende que compreender um conceito matemático implica que o sujeito seja capaz de distinguir o objeto matemático da representação que o torna acessível. Podemos considerar uma representação como "uma configuração que representa algo, de alguma forma, uma palavra pode representar um objeto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição numa reta numérica" (Goldin, 2008, p. 180). Se os alunos confundirem os objetos matemáticos com a representação que é feita desses mesmos objetos, isto levará a "uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo do seu contexto de aprendizagem" (Duval, 2012, p. 268).

A valorização das representações surge desde os primeiros anos de escolaridade, sendo consideradas fundamentais no desenvolvimento de capacidades matemáticas, tais como: raciocinar, resolver problemas, comunicar (NCTM, 2007). O documento *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2016) menciona que "é importante que desde o 1.° Ciclo do Ensino Básico os alunos (...) adquiram experiência na utilização de diversos tipos de representações" (p. 15).

Goldin (2008) distingue dois tipos de representações: externas e internas. As representações externas são palpáveis e observáveis, podendo ser encontradas em papel, ecrãs ou em qualquer outro suporte. As representações externas englobam: símbolos matemáticos (escrita simbólica); escrita algébrica; representações pictóricas (figuras, imagens e ícones); objetos e a linguagem verbal (escrita). Bishop e Goffree (1986), tal como Goldin (2008), diferenciam algumas representações externas que podem ser observadas num contexto de sala de aula: símbolos matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos. Goldin e Kaput (1996) defendem que, por outro lado, as representações internas são construções cognitivas que se formam na mente dos alunos. Tratam-se de "imagens mentais construídas sobre a realidade, referindo-se a modelos cognitivos, conceitos ou objetos mentais, não sendo, portanto, observáveis" (Almeida & Viseu, 2002, p. 195). Duval (2012) apresenta uma tese semelhante, distinguindo dois tipos de representações: as representações mentais, onde o sujeito recorre a um conjunto de imagens pessoais que o ajudam a dar significado ao objeto matemático em causa; e as representações semióticas que são produções constituídas pelo uso de símbolos pertencentes a um sistema de representações. Pode-se, assim, concluir que as representações semióticas resultam de uma exteriorização de representações mentais. Para Vygotsky (2008) e Piaget (1990) as representações mentais são uma interiorização do que o sujeito assimila e que dependem da interiorização de representações semióticas. Ponte e Velez (2011) advogam que um professor pode fazer inferência das representações internas (ou mentais) de um aluno, a partir das representações externas que este utiliza na interação com os colegas e na execução das atividades propostas. Ponte e Velez (2011) denotam que durante muito tempo só se trabalhavam nas escolas as representações simbólicas e, tal como apontam Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger (1987), as representações externas são impostas na escola, "parecendo haver poucas oportunidades para os alunos explorarem as suas próprias representações numéricas" (p. 119). Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*

(NCTM, 2007) afirmam que as crianças devem aprender formas convencionais de representações, mas também devem ser orientadas a desenvolver e criar as suas próprias representações que servirão de apoio para a sua aprendizagem. O 'Modelo Iceberg' desenvolvido por investigadores do Instituto Freudethal para a Educação de Ciências e Matemática na Universidade de Utrecht, propõe aos professores uma nova forma de pensar, desenvolver e aprender estratégias utilizadas pelos alunos (Webb, Boswinkel & Dekker, 2008). Este modelo, segundo os autores, é uma metáfora que ilustra a experiência dos alunos à vasta gama de representações. No topo do iceberg aparece uma representação formal e na parte submersa e mais larga do mesmo, surgem as representações pré-formais e formais, que serão diferenciadas de seguida. Webb et al. (2008) consideram três fases da aprendizagem: a fase informal, a fase pré-formal e a fase formal. Na fase informal, os conceitos são abordados em contexto familiar de forma concreta (com representações informais, como figuras, desenhos, moedas, etc). Na fase pré-formal aumenta-se a complexidade e as representações começam a surgir de modo mais abstrato (por exemplo, retas numéricas). Por fim, a fase formal implica que os alunos recorram a representações formais, como frações. Quando o aluno atinge a fase formal não significa que ele nunca irá recorrer a representações informais ou pré-formais. Goldin (2000) e Webb et al. (2008) consideram que os alunos podem recorrer novamente a essas representações em momentos de insegurança ou confusão.

As representações são um tópico de grande interesse para diversos autores, existindo diversas perspetivas e caracterizações que podem ser exploradas, como a de Bruner (1999), que distinguiu três tipos de representações: i) *representações ativas*, conjunto de ações apropriadas para atingir um resultado correto; ii) *representações icónicas,* conjunto de desenhos ou gráficos que se referem a um processo; iii) *representações simbólicas,* proposições simbólicas ou lógicas originadas a partir de um sistema simbólico com regras definidas. Wong (2004) acredita que a conexão entre estas múltiplas representações seja a chave para os alunos desenvolverem um leque de estratégias e um conhecimento mais significativo da Matemática. Duval (2003) formulou uma terminologia própria para as diversas representações semióticas em *Registo de Representação Semiótica*, distinguindo dois grupos: a representação discursiva e a representação não discursiva (Tabela 4).

Tabela 4. Registo de Representação Semiótica (Duval, 2003, p.14).

	Representação discursiva	Representação- não discursiva
Registos multifuncionais	- Linguagem Natural; - Associações Verbais; - Argumentação/Dedução.	- Figuras geométricas; - Apreensão operatória; - Construção geométrica.
Registos monofuncionais	Sistemas de escrita: - Numérico; - Algébrico; - Simbólico.	Gráficos Cartesianos: - Mudança de coordenadas; - Interpolação/ extrapolação.

Os registos discursivos permitem o desenvolvimento direto e sequenciado do pensamento, como, por exemplo, a linguagem natural ou a escrita de expressões numéricas. Já os registos não discursivos provocam uma apreensão simultânea da sua organização dimensional (Duval, 2011).

Quanto à distinção entre 'registos monofuncionais' e 'registos multifuncionais', constata-se que os primeiros são de uso específico da Matemática, enquanto que os segundos surgem noutras áreas do conhecimento, com a função de comunicar e definir, por exemplo.

Para Duval (2012) "o recurso a muitos registos parece ser uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com as suas representações" (p. 270). O objetivo primordial das representações é dar acesso ao objeto representado. Com isto, Duval (2012) reúne um conjunto de condições necessárias que favoreçam a apreensão conceitual implicando a coordenação de múltiplas representações. Primeiramente, o aluno deverá formar uma representação identificável através da composição de um texto, de um desenho, de um esquema, figuras geométricas, expressão de fórmulas, etc. De seguida, terá que ser capaz de proceder ao tratamento, ou seja, à transformação desta representação no mesmo registo em que foi elaborada inicialmente. Isto pode ser concebido através do cálculo, uma forma de tratamento das expressões simbólicas. Por fim, o aluno pode realizar uma conversão, isto significa, transformar esta representação numa nova, conservando a totalidade ou parte do conteúdo da representação inicial. É importante salientar que a atividade cognitiva entre a conversão e o tratamento são distintas e independentes, tratando-se de dois tipos de transformação de representação semiótica radicalmente diferentes (Duval, 2012). Um aluno do 2.° ano de escolaridade, por exemplo, pode observar um desenho com quatro círculos e adicionar esses quatro círculos a outros três de um novo desenho. Será capaz de obter a soma de quatro com três sem converter o desenho para outra representação, como para os numerais 4 e 3 ou até para a escrita simbólica "4+3". No entanto, um aluno capaz de fazer a conversão das representações mencionadas, irá demonstrar que domina o conteúdo matemático, uma vez que o consegue aplicar através de múltiplas representações. A hipótese que fundamenta a teoria de Duval (2012) é que a compreensão completa de um conceito se dá na coordenação de, pelo menos, dois registos de representação, e esta manifestação é rápida e espontânea por meio da atividade cognitiva de conversão (Figura 1).

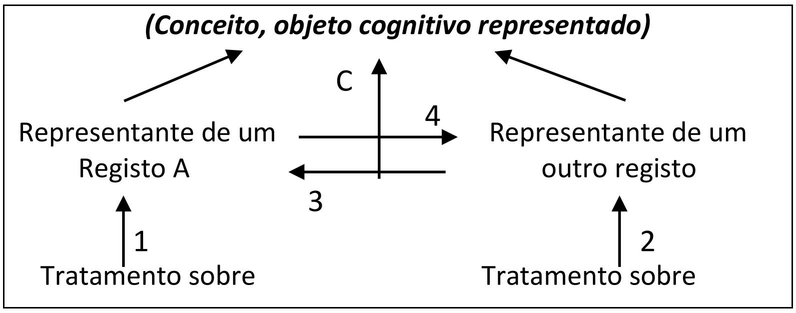


Figura 1. Hipótese fundamental da aprendizagem (Duval, 2012, p. 282).

Na formação de conceitos matemáticos, Duval (2012) destaca como objetivo primordial a compreensão do objeto matemático (*noésis*) através da apreensão ou produção de diversas representações semióticas (*semiósis*).

As recomendações curriculares do documento *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico* (ME, 2016) corroboram com Duval, sugerindo que o professor deve permitir que os alunos usem de forma apropriada, consistente e gradual a “representação simbólica de dados, ideias, conceitos e situações matemáticas sob diversas formas” (p. 16) e salienta a importância dos alunos serem capazes de “passar informação de uma representação para a outra, de modo a obterem diferentes perspetivas de uma mesma situação” (p. 16).

Tendo em conta a terminologia proposta pelos autores aqui mencionados, representei num esquema-síntese as múltiplas representações matemáticas discutidas anteriormente (Figura 2).

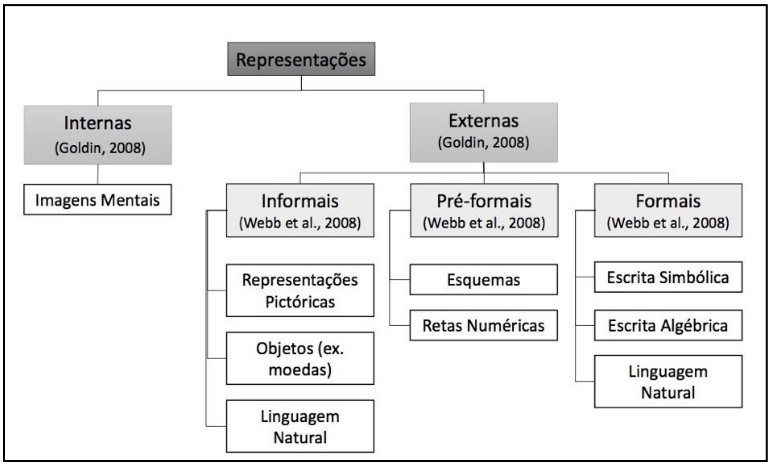


Figura 2. Esquema síntese sobre as representações matemáticas.

Representar implica exteriorizar ideias mentais de modo a torná-las observáveis aos outros, como tal as representações têm um papel primordial no estudo de 'Sequências e Regularidades'. Segundo Barbosa et al. (2011), recorrendo às representações já mencionadas é possível os alunos generalizarem situações no trabalho com 'Sequências e Regularidades'. Warren (2009) admite que a exploração de 'Sequências e Regularidades' permite aos alunos recorrerem a múltiplas representações, como gestos, tabelas e linguagem natural. Carraher e Schliemann (2007) destacam que o trabalho com sequências e regularidades permite explorar representações geométricas e numéricas, onde se relacionam as posições ordinais (ordem) com o número de elementos nessa posição (termo). Deste modo, os estudantes irão com maior facilidade associar a compreensão visual à numérica (Idem, 2007). Alvarenga e Vale (2007) reforçam a ideia de que "os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, podem e devem ser encorajados a observar padrões e a representar tanto geométrica como numericamente, iniciando o estudo da álgebra de um modo fortemente intuitivo e informal" (p. 2).

A exploração de sequências pode ocorrer com recurso a múltiplas representações, pelo que Castro (2005) sugeriu três sistemas de representação: "o sistema numérico usual e o desenvolvimento aritmético" (p. 15), que podemos também chamar-lhe de escrita simbólica, e as "representações pontuais" (Idem, p. 15), ou representações pictóricas. Na Tabela 5 estão exemplificadas estas representações através de uma sequência de números pares.

Tabela 5. Sequência de números pares representada por três tipos de representações (Castro, 2005).

Numeral usual	2	4	6	8
Desenvolvimento aritmético	1+1	2+2	3+3	4+4
Representações pontuais	●●	●● ●●	●● ●● ●●	●● ●● ●● ●●

Aprimorar a utilização de múltiplas representações é indispensável uma vez que as representações matemáticas são "ferramentas essenciais para a comunicação e raciocínio sobre os conceitos matemáticos" (Greeno & Hall, 1997, p. 362), inclusive conteúdos de 'Sequências e Regularidades'.

2.2.4. Dificuldades na exploração de 'Sequências e Regularidades' e das múltiplas representações inerentes

Na exploração de tarefas matemáticas pode recorrer-se a representações e às suas respetivas transformações. Entenda-se por transformações os processos de conversão e tratamento anteriormente debatidos. Para Duval (2012), "as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática" (p. 266). Porém, a complexidade dessas transformações nem sempre torna fácil a sua compreensão para alguns alunos. O autor constatou que a "conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática" (Duval, 2012, p. 276) e acredita que as maiores dificuldades no pensamento matemático se devem ao facto de em variados momentos a apreensão e produção de representações semióticas (*semiósis*) ser desvalorizada em relação à compreensão do objeto matemático (*noésis*), e não existindo *semiósis* os alunos não atingem a *noésis* (Duval, 2012). De modo a tentar perceber de que modo as representações permitiam colmatar as dificuldades dos alunos na compreensão da Matemática, Duval (2012) formulou duas hipóteses: a primeira propõe que se um registo de representação for bem escolhido, então o seu uso em diferentes situações será suficiente para que exista *noésis*; a segunda hipótese defende que a compreensão integral de um conceito matemático acontece quando o aluno é capaz de coordenar pelo menos dois registos de representação diferentes com agilidade e destreza. O autor constatou que a primeira hipótese é mais viável para indivíduos com bom domínio na Matemática, como professores, não a considerando suficiente para crianças em aprendizagem. Por sua vez, é importante o professor dominar as representações que apresenta aos seus alunos, visto que, tal como defende Stylianou (2010), se um professor tem dificuldade na compreensão e aplicação de uma representação, as suas inseguranças e dúvidas serão 'transmitidas' aos alunos.

É importante que os alunos estejam conscientes de que existem múltiplas representações da mesma situação e devem "ser capazes de passar de uma [representação] para a outra compreendendo que as regras são equivalentes" (Vale & Pimentel, 2005, p.15). No trabalho com 'Sequências e Regularidades' isto permite-lhes 'ver', ou seja, compreender, o padrão ou a relação existente (Orton, 1999) independentemente da forma como lhes é apresentado.

No estudo de sequências, os alunos podem deparar-se com diferentes dificuldades. Ponte et al. (2009) apontam que um dos maiores obstáculos dos alunos no estudo de sequências pictóricas repetitivas parte da falta de compreensão, uma vez que apenas após a assimilação da sequência é que serão capazes de generalizar. A dificuldade de generalização neste tipo de sequências deve-se à relação entre o termo e a ordem e se, por um lado, crianças em níveis escolares mais iniciais não compreendem que as sequências podem ser prolongadas em ambos os sentidos (Warren, 2005), por outro lado, crianças num nível mais evoluído de escolaridade têm dificuldade na escrita simbólica de uma generalização e em atribuírem um significado às letras numa expressão numérica enquadrada num contexto funcional (Saraiva & Pereira, 2010).

Na exploração de sequências pictóricas crescentes, Lannin (2003) identificou que muitas crianças apenas recorrem à estratégia aditiva na descrição de generalizações, demonstrando dificuldade na utilização de outras estratégias. Isto pode justificar-se pelo facto de os alunos se focarem apenas no conjunto de dados apresentados e não perceberem a relação que existe entre conjuntos (Warren, 2005). Aliado a isto, Rivera e Becker (2008) perceberam que a dificuldade de generalizar também surge da má compreensão de conceitos matemáticos relevantes.

Relativamente a uma globalidade de sequências (numéricas, pictóricas, crescentes ou de repetição), Silva e Mamede (2015) destacam a dificuldade de alunos do 6.° ano de escolaridade averiguarem termos de ordem elevada. Os alunos apresentaram ainda dificuldade de comunicação uma vez que não foram capazes de explicar com detalhe a sua interpretação e resolução de problemas. Esta dificuldade é também mencionada por Rivera e Becker (2008) e por Ponte e Velez (2011), que referem que os alunos revelam dificuldades em justificar os seus raciocínios, quer por escrito, quer oralmente, não conseguindo formular uma justificação válida para a generalização.

2.2.5. Análise de estudos empíricos sobre as múltiplas representações e 'Sequências e Regularidades' no 1.° e 2.° Ciclos

Este subcapítulo destina-se à análise de estudos empíricos sobre o contributo das representações nos dois primeiros ciclos do Ensino Básico, bem como o papel das representações no ensino e aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'. O primeiro estudo em análise é de Sokolowski (2018). O autor realizou uma meta-análise intitulada *de The Effects of Using Representations in Elementary Mathematics: Meta-Analysis of Research.* Uma meta-análise consiste numa técnica estatística desenvolvida para agregar os resultados de dois ou mais estudos independentes, sobre uma mesma questão de pesquisa, resultando num resumo dos mesmos estudos. Este estudo englobou 12 anos sobre o uso das múltiplas representações desde o pré-escolar ao 2.° Ciclo do Ensino Básico, com grupos de alunos de 3 a 12 anos. Estes alunos são de escolas públicas e privadas, com uma amostra de 15 participantes por grupo. Para identificar estudos relevantes o autor recorreu a plataformas como ERIC (Ebsco), Science Direct e Google Scholar. As palavras chave da pesquisa foram: representações, educação matemática, Ensino Básico, alunos e pesquisa experimental. Dos 131 artigos disponíveis foram selecionados 13 que satisfizeram as condições propostas para a meta-análise. Estudos qualitativos não foram analisados. Os resultados obtidos neste estudo apoiam a tese de que as representações ajudam os alunos do Ensino Básico a aprender e aplicar conceitos matemáticos abstratos, especialmente quando as representações são aplicadas para auxiliar na compreensão de novos conceitos matemáticos e nas habilidades de resolução de problemas. Sokolowski (2018) percebeu dos diversos estudos analisados que os alunos podem conseguir chegar a uma resolução válida de uma situação problemática com recurso a uma única representação, mas isto não implica o seu total entendimento. Para confirmar a compreensão das crianças, é preciso que estas sejam capazes de colocar essa representação à prova, explicando e prevendo novos casos. Deste modo, ter compreensão de uma representação é ter a representação como ponto de partida no processo de solução, não como fórmula inquestionável de resolução de problemas.

Um outro estudo em análise foi realizado por Valério (2005) com o objetivo de estudar a evolução das representações dos alunos do 1.° Ciclo na resolução de problemas. Esta investigação decorreu numa turma de 2.° e 3.° anos de escolaridade. O autor escolheu um grupo de 4 alunos com base nos seguintes critérios: que se encontrassem no 3.° ano de escolaridade; fossem assíduos; pouco conflituosos; e com facilidade de comunicação. Valério (2005) optou por uma metodologia qualitativa, onde agrupou tarefas de adição e divisão num conjunto de situações problemáticas. De modo geral, verificou que os alunos num primeiro momento atenderam maioritariamente a representações informais, como esquemas e desenhos. Posteriormente, após uma melhor compreensão, foram capazes de converter essas representações noutras, essencialmente formais, como a escrita simbólica. Os alunos mostraram compreender o enunciado do problema quando o traduziam para um esquema ou desenhos. A partir desse mesmo esquema, os alunos chegaram ao resultado da situação problemática. O autor acredita que o facto de os alunos apresentarem um raciocínio válido e conseguirem explicá-lo através das suas representações ao restante grupo é um indicador de compreensão. Deste modo, Valério (2005) distinguiu quatro fatores de compreensão: (i) apesar das dúvidas que os alunos possam ter tido inicialmente, após uma explicação foram capazes de criar uma representação adequada ao problema, que facilitasse a resolução do mesmo; (ii) os alunos identificaram o tipo de problema; (iii) os alunos justificaram com argumentação válida o procedimento escolhido na resolução do problema; e (iv) os alunos recapitularam o problema tendo como suporte a representação que eles construíram. Valério (2005) percebeu que os alunos quando encontravam uma representação que respondesse de forma eficaz às suas necessidades a adotavam nas tarefas seguintes semelhantes, ou seja, mecanizavam o processo. O autor superou este problema sugerindo que resolvessem as situações problemáticas recorrendo a outra representação.

De modo a estudarem o papel das representações elaboradas por alunos do 1.° ano de escolaridade na resolução de problemas matemáticos diversos, Canavarro e Pinto (2012) tentaram perceber quais as funções que as representações desempenham no raciocínio dos alunos. Foram entregues problemas diversificados aos alunos, sendo que cada um recorreu à resolução e representação mais conveniente para si. A representação destacada pelos autores é o diagrama. Perceberam, ainda, que as representações informais (ou icónicas, de acordo com a terminologia de Bruner) são as representações mais utilizadas pelos alunos numa primeira fase de abordagem. Os autores defendem que o professor incentive os alunos a recorrer a representações formais (ou simbólicas, segundo a terminologia de

Bruner) de modo a introduzir os símbolos matemáticos convenientes. Após uma análise cuidada, os investigadores enumeraram seis funções das representações que se destacaram: (i) dar sentido ao problema; (ii) estabelecer relações matemáticas; (iii) "descultar a estrutura matemática do problema" (p. 75); (iv) obter o resultado da situação problemática; e (v) auxiliar o processo de revisão; (vi) auxiliar na exposição e argumentação do raciocínio.

De modo a analisar as representações que alunos do 2.° ano de escolaridade utilizam em tarefas que envolvam sequências repetitivas e sequências crescentes Morais (2012) investigou quais as maiores dificuldades e quais as estratégias a que os alunos recorrem em tarefas que envolvam a representação e generalização. Morais (2012) procedeu a esta investigação qualitativa recorrendo ao método do ensino-aprendizagem de cunho exploratório. Foram apresentadas sete tarefas à turma, envolvendo as sequências em estudo. Morais (2012) apurou que os alunos apresentam maior facilidade na continuação das sequências repetitivas e de generalização nas sequências crescentes. As representações mais utilizadas pelos alunos foram as representações informais e a linguagem natural. A investigadora conclui que as capacidades de representação e generalização são potencialmente desenvolvidas através do ensino exploratório e que os alunos desenvolvem a compreensão do conceito de sequência ao trabalharem as múltiplas representações. As principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram na interpretação, compreensão das sequências, generalização e comunicação matemática.

Um outro estudo, analisou momentos de uma sala de aula do 1.° Ciclo do Ensino Básico, onde foi feita a resolução de tarefas desafiantes envolvendo padrões. Este estudo realizado por Vale (2009) teve como objetivo desenvolver a capacidade de generalização e do pensamento algébrico dos alunos. De modo a serem analisadas diferentes abordagens, onde os alunos cumpram os objetivos de analisar, conjeturar, generalizar, justificar e representar foram desenvolvidas tarefas com padrões em contexto figurativo, ou seja, em contextos visuais ou simbólicos. A autora concluiu que esta abordagem é bem-sucedida, uma vez que os alunos conseguiram cumprir os objetivos propostos. Vale (2009) percebeu que a generalização sendo explorada através de diferentes representações e servindo de suporte visual, tornou-se fundamental na compreensão de padrões. Os alunos recorreram de forma natural a representações simbólicas, o que a autora considera "impensável para estes níveis noutro contexto" (Vale, 2009, p. 27). As tabelas serviram de base para a análise de figuras e as expressões surgiram de seguida devido a contagens visuais.

Após a análise destes diferentes estudos é possível salientar algumas conclusões: por norma, os alunos têm uma maior preferência para em momentos iniciais recorrerem às representações informais, porque, tal como Goldin (2000) e Webb et al. (2008) apontam, os alunos recorrem a representações informais em momentos de insegurança ou confusão. Após conseguirem atingir um resultado válido para a situação problemática, onde recorreram a representações como esquemas ou desenhos, os estudantes têm tendência a mecanizar o processo para outros problemas semelhantes, de modo a serem bem-sucedidos novamente. Esta constante destaca a necessidade de o professor incentivar e preparar os alunos a recorrem a diversas representações, de modo a compreenderem efetivamente os diversos conceitos matemáticos e evitarem, assim, que sejam memorizados procedimentos vazios de real conhecimento e domínio do objeto matemático. É de salientar que diversos autores consideraram que a exploração de múltiplas representações contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico, nomeadamente a generalização.

2.3. Estratégias de Intervenção

Este subcapítulo tem como propósito apresentar a metodologia de ensino e aprendizagem adotada na minha intervenção pedagógica, bem como a estratégia de avaliação da mesma.

2.3.1. Metodologia de ensino e aprendizagem

A metodologia de ensino que adotei nas aulas que lecionei foi pautada por características do ensino exploratório, consubstanciada pelos seguintes conteúdos didáticos: o papel do professor e do aluno; a tipologia das tarefas; e o raciocínio matemático.

O papel do professor e do aluno. O formato de ensino que adotei na minha prática conduziu à construção de três momentos fundamentais no trabalho das diferentes tarefas propostas: introdução e exploração de uma dada tarefa e discussão sobre a sua resolução. No primeiro momento, as propostas de trabalho foram apresentadas aos alunos de forma inteligível. Aqui, o meu papel como professora foi assegurar que as crianças compreendessem o enunciado e os termos matemáticos implicados e, ainda, envolvê-los na atividade sem diminuir o grau de desafio. Durante a exploração das tarefas acompanhei os alunos na sua realização, dando as indicações necessárias, que não conduzissem necessariamente a uma solução ou reduzissem a instigação das crianças. Na exploração da tarefa foi, pontualmente, necessário formular ou sugerir estratégias a alunos com maior dificuldade, ou propor novas questões e desafios a alunos mais rápidos na sua resolução. Por fim, no momento da discussão, assumi um papel de mediadora, onde regulei as intervenções e orientei, quando necessário, a sistematização dos conteúdos, sempre incentivando a partilha de ideias e a explicação do 'porquê'. Na discussão, os alunos apresentaram as suas resoluções e questionaram-se mutuamente, pelo que foi o momento ideal para clarificar conceitos e procedimentos. Através da discussão da resolução das tarefas proporcionou-se a base da fundamentação teórica do conteúdo de 'Sequências e Regularidades', a partir da reflexão e confrontação do que fizeram e do que foi feito pelos colegas (Ponte, 2005). O papel do aluno centra-se, então, na sua partilha de estratégias e representações e no questionamento das propostas dos seus pares. Esta abordagem permitiu-me distanciar de características próprias do ensino expositivo onde o professor fornece a informação de forma explícita e sintetizada e posteriormente a turma mobiliza os conceitos em exercícios, aplicando técnicas explicadas e exemplificadas pelo professor previamente (Ponte, 2005). No ensino expositivo as crianças partem da 'teoria' para a 'prática', enquanto que no ensino exploratório os alunos começam na 'prática' seguida da 'teoria' (Ponte, 2005). De modo a que o docente seja capaz de mediar as discussões de forma a torná-las momentos de aprendizagens significativas e de verdadeira comunicação matemática, Canavarro (2011) define cinco pontos essenciais: (i) antecipar; (ii) monitorizar; (iii) selecionar; (iv) sequenciar; e (v) estabelecer conexões. Estes foram os pontos que orientaram a minha intervenção pedagógica. No momento da planificação da minha ação educativa, após a seleção das tarefas que iria propor à turma, resolvi-as de diferentes formas, recorrendo a distintas estratégias e representações. Assim, consegui antecipar dúvidas e relacionar conteúdos, o que me deu maior confiança e preparação para diversas situações que pudessem surgir na aula. Já em sala de aula decorre, em simultâneo com o momento da exploração da tarefa, a fase de monitorização. Nesta fase observei e identifiquei diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. Esta análise permitiu-me preparar para a fase seguinte: seleção. Embora abrisse sempre espaço para que os alunos se voluntariassem a expor e explicar a sua resolução e raciocínio, também surgiram momentos em que selecionei algumas resoluções e solicitei aos seus autores a partilha com o resto da turma. O meu critério de seleção procurou responder ao meu objetivo, que seria apresentar à turma: múltiplas representações; estratégias distintas; erros recorrentes; e resoluções que se distingam por ajudarem compreender com maior facilidade o objeto matemático da minha intervenção. Paralelamente a este processo, tive em atenção a sequencialização das resoluções apresentadas, de modo a surgirem numa sequência que desse sentido ao problema e que ajudasse a compreender o conteúdo matemático em causa. Por norma, terminei este processo com um compilado de representações e diferentes estratégias no quadro, que serviram de suporte para estabelecer conexões entre elas, permitindo ao aluno compreender efetivamente o 'objeto' matemático em estudo.

As tarefas. De modo a desenvolver o ensino exploratório de tópicos matemáticos é importante que exista uma seleção criteriosa das tarefas a serem apresentadas à turma. Ponte (2005) identifica como tarefas abertas, aquelas que comportam um certo grau de indeterminação no que é fornecido aos alunos e do que lhes é pedido, e como tarefas fechadas aquelas onde é dito explicitamente o que é pretendido. Junto a isto, as tarefas podem apresentar um grau de desafio reduzido ou elevado. Uma das minhas preocupações ao longo da minha prática foi apresentar uma pluralidade de tipologia de tarefas, o que se revela ser essencial, uma vez que cada uma abrange diferentes potencialidades (Ponte, 2005). Procurei, ainda, enquadrar as minhas propostas em contextos de realidade através de tarefas de modelação (Ponte, 2005), ou semi-realidade, que Skovsmose (2000) define como um contexto intermédio, não se tratando de matemática pura, mas também não estando totalmente enquadrado na realidade. É importante e vantajoso o trabalho com tarefas de modelação ou num contexto de semi-realidade, uma vez que o aluno irá conseguir mais facilmente atribuir significados, não se tornando totalmente abstrato como a matemática pura. Atentei também que as tarefas apresentadas não permitissem aos alunos obter um método de resolução imediato, de forma a serem incitados a desenvolver estratégias próprias, recorrendo aos seus conhecimentos prévios e, ainda, a múltiplas representações. Na análise dos dados desta investigação vão ser consideradas as representações apresentadas no esquema síntese da Figura 2 e duas transformações semióticas: tratamentos e conversões (Duval, 2004, 2006), uma vez que "representações distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações e conceitos complexos" e que "os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (NCTM, 2007, p. 77).

Raciocínio matemático. As tarefas propostas à turma procuraram desenvolver capacidades como: conjeturar, generalizar, avaliar e defender argumentos. Estas capacidades são características de um processo dinâmico que é raciocinar matematicamente (Lannin et al., 2011). O *Modelo do Raciocínio Matemático* de Mata-Pereira e Ponte (2012) explica que o raciocínio matemático parte da produção de questões seguida de uma formulação de conjeturas e, consequentemente, generalizações, tendo por base a observação, construção e transformações do conhecimento prévio (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). Os alunos podem aqui aplicar diferentes estratégias e testá-las, reconhecendo um padrão e alargando a validade de uma propriedade a um conjunto vasto de objetos (Idem, 2020). Por fim, os alunos terão que justificar as suas estratégias através de definições, propriedades e representações. O *Modelo do Raciocínio Matemático* de Mata-Pereira e Ponte (2012) determina, ainda, que de modo a o aluno ser capaz de dar significado a um conceito matemático este precisa de estabelecer conexões com outros conceitos, representações e procedimentos, o que corrobora a ideia de Canavarro (2011) de que no momento da discussão das tarefas sejam estabelecidas conexões entre as diferentes representações e estratégias que surgirem.

2.3.2. Estratégia de avaliação da ação

Durante a minha intervenção pedagógica recorri a diversos instrumentos de recolha de dados para uma posterior análise e avaliação das estratégias de ensino delineadas (Tabela 6). Estes instrumentos foram aplicados, com as devidas adaptações à respetiva faixa etária, às turmas de 1.° e 2.° Ciclos. A recolha de dados a partir dos instrumentos mencionados foi efetuada em momentos prévios à intervenção, durante a intervenção e posteriores à intervenção pedagógica supervisionada.

Tabela 6. Instrumentos de recolha de dados.

Instrumentos de recolha de dados	Descrição
Questionários inicial e final	O questionário inicial recolheu informações sobre os alunos de ambas as turmas. O questionário final permitiu recolher a perceção dos alunos quanto às estratégias de ensino desenvolvidas.
Gravações áudio e vídeo das aulas	Uma máquina fotográfica registava em vídeo o decorrer da aula de modo a captar o quadro e a turma.
Reflexões inicial e final de aula	As reflexões iniciais permitiram antecipar situações e as reflexões finais possibilitaram uma ponderação sobre os momentos mais positivos e negativos da minha intervenção.
Produções dos alunos	Resoluções dos alunos às tarefas propostas.
Análise documental	Documentos que serviram de complemento à informação recolhida.

Questionários inicial e final. Inicialmente, de modo a recolher informações sobre a turma onde eu iria intervir optei por distribuir questionários (Anexo 3). No 1.° Ciclo os questionários foram entregues e respondidos presencialmente, enquanto no 2.° Ciclo, devido à pandemia do surto Covid-19, as aulas realizaram-se num regime a distância, desse modo os questionários foram respondidos no *Google Formulários*. O questionário do 1.° Ciclo continha perguntas de resposta aberta e fechada, enquanto o do 2.° Ciclo era composto maioritariamente por questões de resposta aberta. Estas informações permitiram-me criar um enquadramento contextual das turmas e adaptar a minha prática às mesmas. O questionário final foi respondido após a minha intervenção pedagógica e teve como finalidade analisar a perceção dos alunos relativamente às estratégias de ensino aplicadas (Anexo 4). O questionário final do 2.° Ciclo continha uma grelha de escolha múltipla com opções de acordo com a escala tipo Likert: DT – Discordo totalmente, D – Discordo, I – Indiferente, C – Concordo, e CT – Concordo Totalmente.

Gravações áudio e vídeo das aulas. Quivy e Campenhoudt (2008) afirmam que um observador/investigador não pode confiar apenas nas suas recordações dos acontecimentos decorridos, dada a seletividade da memória do ser humano. Desta forma, optei por gravar em vídeo, fotogravar e gravar o áudio das aulas de modo a evitar perder informações essenciais que se dissipassem com o tempo. Estas informações foram recolhidas com a autorização do diretor do agrupamento (Anexo 1) e dos encarregados de educação das respetivas turmas onde intervim (Anexo 2). A análise dos vídeos permitiu-me perceber a interação que ocorreu durante a aula, uma vez que os vídeos são "uma fonte rica de informação e contribuem, em muito, para a compreensão de diversos fenómenos da dinâmica de sala de aula" (Branco, 2008, p. 63). As gravações em áudio permitiram-me transcrever com maior facilidade os momentos que considerei de destaque das aulas e que sustentam a minha análise de dados.

Reflexões inicial e final de aula. Após a construção e discussão do meu plano de intervenção realizei uma reflexão onde discuti os seguintes tópicos: (i) justificação das tarefas, recursos e estratégias que apresento; e (ii) dificuldades que poderei sentir e como penso superá-las. No momento seguinte à minha intervenção refleti criticamente seguindo os pontos orientadores: (i) descrição da aula; (ii) cumprimento do plano previamente estabelecido; (iii) dificuldades encontradas e sua superação; (iv) aspetos a reconsiderar numa próxima abordagem; e (v) material obtido para análise proveniente das intervenções e resoluções dos alunos. As reflexões que realizei após cada intervenção permitiram-me refletir sobre o que aconteceu na sala de aula, tirar ilações dos melhores e piores momentos. Com isto consegui definir o que eu gostaria que voltasse a acontecer, alterar estratégias e preparar-me de modo a evoluir e melhorar a minha prática nas aulas seguintes. A síntese dos resultados obtidos pelos alunos (as suas resoluções, intervenções, entre outros) contribuiu na planificação das aulas seguintes, uma vez que pude acompanhar de forma consciente a evolução da turma e deste modo obter material que respondesse às minhas questões de investigação.

Produções dos alunos. A recolha das produções dos alunos permitiu-me estudar as representações que os alunos recorrem e de que modo as conectam, ou não, com outras representações. Consegui analisar as maiores dificuldades dos alunos na utilização das múltiplas representações possíveis e dificuldades em criar conexões entre elas. Com isto, permitiu-me avançar na minha investigação e obter algumas das principais conclusões do meu projeto.

Análise documental. Para além da análise das produções dos alunos e das reflexões iniciais e finais de aulas, ao longo deste percurso recorri a planos de aula, projetos educativos, diversos documentos oficiais como *Aprendizagens Essenciais, Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico,* documentos do NCTM, e ainda diversos estudos, artigos e documentos de variados autores de modo a estruturar e realizar o projeto de acordo com o objetivo e as questões de investigação delineados.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Na concretização da minha intervenção pedagógica procurei averiguar o contributo das múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' de alunos do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico. Com esse intuito, nas aulas que lecionei desenvolvi este conteúdo através da concretização dos objetivos explanados na Tabela 7.

Tabela 7. Objetivos da intervenção pedagógica nos 1.° e 2.° ciclos do Ensino Básico.

Ciclo	Dimensões de análise	Aulas	Objetivos
1.°	Identificação de regularidades numéricas	1	Explorar regularidades e determinar a lei de formação de uma sequência Evidenciar a terminologia de uma sequência Investigar regularidades numéricas
		2	Explorar regularidades e determinar a lei de formação de uma sequência Determinar a expressão geradora
	Determinação da expressão geradora de uma sequência	3	Explorar padrões numa regularidade Transformar representações
	Transformação de representações	4	Determinar a lei de formação e a expressão geradora de uma sequência Mobilizar conhecimentos anteriormente adquiridos
2.°	Identificação de regularidades numéricas	1	Terminologia relacionada com sequências e regularidades Identificar regularidades numéricas
		2	Explorar sequências em figuras geométricas tridimensionais Explorar o perímetro de polígonos regulares na criação de sequências
	Determinação da expressão geradora de uma sequência	3	Determinar a expressão geradora de uma sequência definida por uma lei de formação Explorar padrões numa regularidade
	Transformação de representações	4	Converter uma sequência traduzida em linguagem natural para uma outra representação

De modo a explicitar momentos da minha intervenção pedagógica, o presente capítulo reúne uma descrição e interpretação de momentos dinamizados nas aulas 1 e 3, na turma do 3.° ano de escolaridade, e nas aulas 2, 3 e 4 numa turma do 6.° ano de escolaridade.

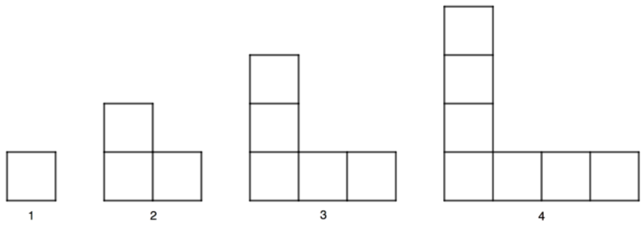
3.1. Intervenção Pedagógica no 1.° Ciclo

Na dinamização de atividades de aprendizagem do conteúdo de 'Sequências e Regularidades' na turma do 1.° Ciclo, em contexto de sala de aula, organizei os alunos em 12 pares de trabalho. A análise que resulta de tais atividades incide sobre as seguintes dimensões, que resultam dos objetivos definidos para cada uma das aulas lecionadas: (i) identificação de regularidades numéricas (ii) determinação da expressão geradora de uma sequência; e (iii) transformação de representações.

3.1.1 Identificação de regularidades numéricas

Na determinação da lei de formação de uma sequência, os alunos começaram por resolver a seguinte tarefa que os interpelava a identificar a regularidade que caracteriza a obtenção de um dado termo a partir do seu antecessor e a estabelecer generalizações próximas.

Tarefa 1. Observa a seguinte sequência de figuras. Em cada figura, cada quadrado é formado por 4 palitos iguais.



1. O que acontece ao número de palitos de um termo para o seguinte?
2. Qual é a lei de formação relativo ao número de palitos da sequência?
3. Quantos palitos tem a figura de ordem 6? E a de ordem 8?

A sequência define uma sucessão de figuras, que representam cada uma delas um número ímpar de quadrados que são formados por palitos. O foco dessa formação incide sobre o número de palitos que contém cada termo. Trata-se de uma sequência crescente e pictórica dada a sua representação com figuras. A primeira questão da tarefa remete para a compreensão dos alunos sobre o que acontece ao número de palitos de um termo para o seguinte. A segunda questão permite revelar se os alunos relacionam as alterações constantes que acontecem de um termo para o seguinte como sendo a lei de formação. Com estas questões consolidam-se conceitos inerentes ao estudo de 'Sequências e Regularidades', tais como lei de formação, termo e ordem. A última questão desta tarefa procura entender que estratégias os alunos utilizam para obterem termos próximos da sequência.

Durante a resolução da tarefa alguns pares de alunos apresentaram dificuldades de interpretação do enunciado da mesma. Relativamente à primeira questão, alguns alunos em vez de analisarem o número de palitos das figuras debruçaram a sua atenção no número de quadrados, o que procurei clarificar com o seguinte diálogo:

Professora: Quantos quadrados tem a figura 1?
Aluno A13: Um quadrado.
Professora: E quantos palitos?
Alunos: Quatro.
Professora: E a figura 2, quantos quadrados tem?
Alunos: Três.
Professora: E é isso que é pedido na tarefa?
Aluno A8: Não, é o número de palitos.
Professora: Então quantos palitos tem?
Alunos: Dez.
Professora: Muito bem, agora pensem nas diferenças de uma figura para a seguinte.

Após a superação da dificuldade de interpretação da tarefa, seguiu-se a sua resolução pelos pares. Da análise das suas respostas a cada uma das questões da tarefa, antes da sua discussão no grupo turma, constata-se que nas duas primeiras questões a maioria dos alunos respondeu corretamente o que já não se verifica na última questão (Tabela 8).

Tabela 8: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às questões da Tarefa 1 (*n*=12).

	Tipos de resposta			
Questão	C	PC	I	NR
1.	9	0	3	0
2.	9	2	1	0
3.	3	4	4	1

Nota: C: correta; PC: parcialmente correta; I: incorreta; NR: não responde.

Relativamente à primeira questão, 9 pares indicam corretamente a lei de formação da sequência, como exemplifica a resposta dada pelo par P10, que representou cada termo e compreendeu que seriam necessários mais 6 palitos para construir cada figura seguinte (Figura 3).

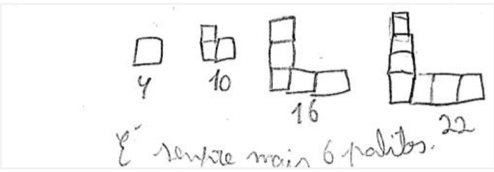


Figura 3. Resposta correta do par P10 à Questão 1 da Tarefa 1.

Embora tivesse sido discutido anteriormente a interpretação da questão e o que era pretendido analisar na sequência, três pares de alunos responderam incorretamente. Nas suas resoluções percebe-se que existiram pares que efetuaram a contagem errada do número de palitos a acrescentar e ainda um par que considerou o número de quadrados que aumenta de uma figura para a seguinte (Figura 4).

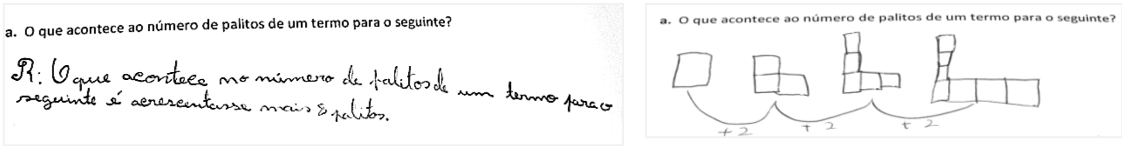


Figura 4. Resposta incorreta do par P11 e do par P6 à Questão 1 da Tarefa 1.

Na segunda questão da tarefa, 9 dos 12 pares de alunos respondem corretamente e revelam ter relacionado a lei de formação de uma sequência ao fenómeno que ocorre de um termo para o seguinte, sucessivamente, como ilustra a resposta do par P10 (Figura 5).

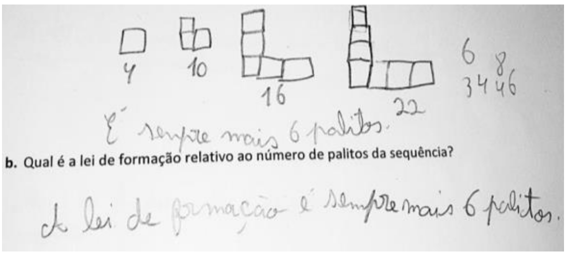


Figura 5. Resposta correta do par P10 à Questão 2 da Tarefa 1.

Dois pares respondem de forma parcialmente correta à questão, uma vez que fazem a associação correta da lei de formação ao fenómeno que acontece na sequência, porém, como respondem incorretamente à questão anterior, a lei de formação apresentada não corresponde à sequência em estudo, tal como sugere a resposta do par P11 (Figura 6).

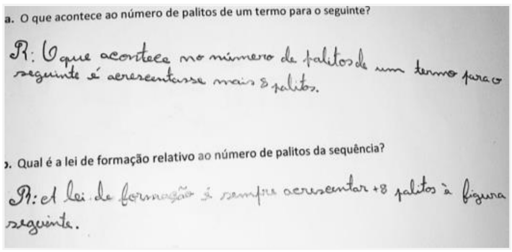


Figura 6. Resposta parcialmente correta do par P11 à Questão 2 da Tarefa 1.

Um dos pares da turma apresenta uma resposta incorreta. Na primeira questão da tarefa, o par compreendeu o que acontece de um termo para o seguinte na sequência, porém, não consegue relacionar esse acontecimento como sendo a lei de formação da sequência, pelo que apresenta uma resposta distinta na segunda questão, traduzindo-se assim numa resposta incorreta (Figura 7).

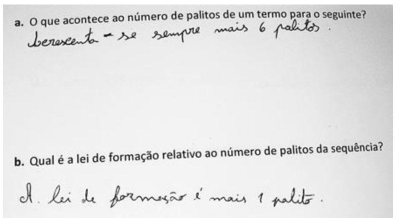

a. O que acontece ao número de palitos de um termo para o seguinte?
Acrescenta-se sempre mais 6 palitos.
b. Qual é a lei de formação relativo ao número de palitos da sequência?
A lei de formação é mais 1 palito.

Figura 7. Resposta incorreta do par P2 à Questão 2 da Tarefa 1.

Por fim, a terceira questão do problema solicita que os alunos determinem os termos de duas ordens distintas, não consecutivas. Destacam-se três estratégias apresentadas por Ponte et al. (2009), utilizadas pelos alunos na resolução do problema: a 'estratégia de decomposição de termos', a 'estratégia de representação e contagem' e a 'estratégia aditiva'.

A 'estratégia aditiva' foi apresentada por dois pares, que entenderam que para obter os termos seguintes teriam que adicionar sucessivamente a lei de formação da sequência (+6). O par P2 conseguiu chegar a conclusões válidas (Figura 8).

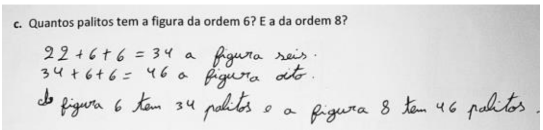

c. Quantos palitos tem a figura da ordem 6? E a da ordem 8?
22 + 6 + 6 = 34 a figura seis.
34 + 6 + 6 = 46 a figura oito.
A figura 6 tem 34 palitos e a figura 8 tem 46 palitos.

Figura 8. Resposta correta do par P2 à Questão 3 da Tarefa 1.

O par P3 foi o segundo par a utilizar esta estratégia e obteve uma resposta parcialmente correta. Tratando-se de termos de ordens não consecutivas, esta resolução exige um nível de abstração não facilmente atingível pelos alunos. Este par recorreu à escrita simbólica, mas não conseguiu visualizar a sequência e perceber que as ordens pedidas não eram consecutivas, nem imediatamente as seguintes às apresentadas, como se verifica na Figura 9.

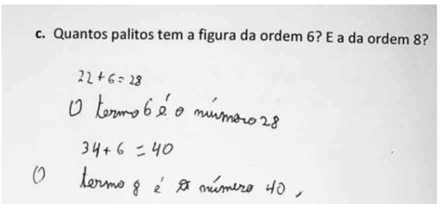

c. Quantos palitos tem a figura da ordem 6? E a da ordem 8?
22+6=28
O termo 6 é o número 28
34+6 = 40
O termo 8 é o número 40,

Figura 9. Resposta parcialmente correta do par P3 à Questão 3 da Tarefa 1.

Como é possível verificar nesta figura, o par P3 adicionou ao número de palitos da quarta ordem (22) 6 unidades e assumiu que o número de palitos de ordem 6 seria 28. Isto revela que a representação utilizada não permitiu aos alunos visualizar a sequência e entender que determinaram apenas o termo seguinte (termo de ordem 5). Pode-se entender que na segunda parte da tarefa, na determinação da ordem 8, os alunos partiram do número de palitos que consideram ser da figura 6 (28) e adicionaram 6 unidades, obtendo o termo de ordem 7. A esse resultado (34) acrescentaram outras 6 unidades, chegando ao termo de ordem 8. Embora o resultado seja incorreto, os já alunos revelam certa compreensão na lei de formação da sequência. Provavelmente, a escolha da escrita simbólica dificultou a resolução da tarefa uma vez que não lhes permitiu visualizar a continuidade da sequência, pois o grau de abstração dos alunos nesta faixa etária ainda é reduzido.

No momento de discussão da tarefa solicitei ao par P3 que explicasse ao grupo turma o seu raciocínio, o que os levou a transcrever a sua resolução no quadro e a originar a seguinte discussão:

Professora: O que é esse 22?
Aluno A5: São os palitos da figura 4.
Professora: E porque adicionaram 6?
Aluno A6: Porque aumentam 6 palitos.
Professora: Quando aumentam 6 palitos?
Aluno A5: De uma figura para a outra.
Professora: Então que figura tem 28 palitos? Estávamos em que figura?
Aluno A5: Na 4.
Professora: Adicionamos 6, para qual fomos?
Aluno A6: Para a 5.
Professora: Qual é que é pedida?
Aluno A5: A 6, então temos que juntar mais 6.

Este diálogo evidencia que uma vez que os termos pedidos não são consecutivos se torna necessário determinar os termos intermédios.

No que respeita às estratégias de resolução, verificou-se que a 'estratégia de decomposição de termos' foi utilizada por três pares, sendo que esta estratégia implica a decomposição dos termos de modo a perceber como foi construído (Ponte et al., 2009). Os alunos representaram, através de representações pictóricas, apenas os termos que pretendiam determinar, levando a inferir que tenham compreendido como foi construída a figura. Isto verificou-se no diálogo com o par P4 (composto pelos alunos A7 e A8), no momento da discussão da tarefa, onde o par desenhou no quadro a sequência e procedeu à sua contagem. Os alunos, através da representação pictórica, conseguiram generalizar uma situação, percebendo que o número da figura é igual ao número de quadrados na horizontal e ao número de quadrados na vertical:

Aluno A7: Professora, eu não preciso de desenhar todas as figuras para fazer a figura 6.
Professora: Porquê?
Aluno A7: Porque o número de quadrados daqui (aponta para a linha horizontal) é igual ao número de quadrados daqui (aponta para a linha vertical).
Professora: Mas é o número de quadrados que queres saber?
Aluno A7: Não, mas assim desenho e depois conto os palitos.

No entanto, embora os pares fossem capazes de representar corretamente a sequência, não foram capazes de obter conclusões válidas, provavelmente pela pouca experiência com a manipulação de representações pictóricas, o que levou à falta de compreensão da mesma. Os alunos representaram corretamente os termos, mas não foram capazes de fazer a contagem correta do número de palitos da figura. A Figura 10 é referente à resolução do par P9, que apresenta um erro de contagem de uma unidade por figura, como tal, a resposta foi considerada parcialmente correta.

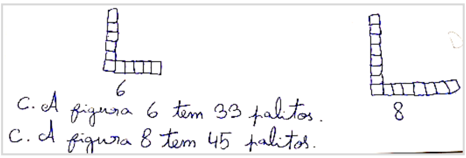


Figura 10. Resposta parcialmente correta do par P9 à Questão 3 da Tarefa 1.

Observou-se também a utilização da 'estratégia de representação e contagem', que implica que os alunos representem todos os termos da sequência até obterem o termo pretendido (Ponte et al., 2009). Esta estratégia foi utilizada por um par que obteve a resposta incorreta à questão, podendo, mais uma vez, tratar-se de falta de interpretação da representação pictórica (Figura 11).

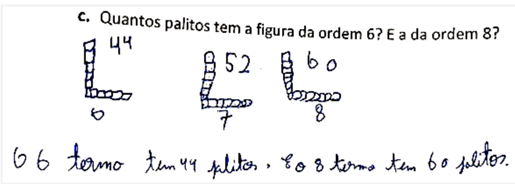


Figura 11. Resposta incorreta do par P4 à Questão 3 da Tarefa 1.

Pode verificar-se que o par P4 representou corretamente os termos, porém, a contagem dos palitos é bastante díspar da realidade, sendo que no termo de ordem 6 excede em 10 unidades e no termo de ordem 8 excede em 14 unidades.

Representações. Na análise das resoluções às questões propostas verifica-se que os diferentes pares recorreram a múltiplas representações. De modo a compreender de que forma é que as representações ajudam na compreensão de 'Sequências e Regularidades', a Tabela 9 reúne as frequências absolutas dos tipos de registos utilizados pelos alunos em respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas.

Tabela 9: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 1 (*n*=12).

	Tipos de resposta														
	C					PC					I				
Questão	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T
1	3	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0
2	0	9	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	0	2	1	0	1	0	2	2	0	0	0
Total	4	**16**	0	1	0	2	**3**	0	1	0	2	**5**	1	0	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; T: tabelas.

Constata-se que os alunos recorreram maioritariamente à linguagem natural. O recurso a este tipo de representação permitiu que metade dos pares da turma obtivesse uma resposta correta à primeira questão da tarefa. A predominância desta representação pode dever-se ao facto de a tarefa ser apresentada através de uma sequência pictórica e não ter incutido nos alunos a necessidade de proceder ao tratamento dessa representação. Os alunos poderão ter compreendido a questão apenas pela análise da sequência pictórica, apresentando a sua resposta em linguagem natural, sem explicitarem o raciocínio que resultou nessa mesma resposta.

A representação pictórica, tratando-se de uma representação informal, embora fosse menos utilizada, resultou apenas em respostas corretas. Isto pode querer dizer que por se tratar de uma representação mais visual pode ter sido facilitadora de compreensão, o que é de acordo com a constatação de Vale (2009), que percebeu que a generalização sendo explorada através de diferentes representações e servindo de suporte visual, torna-se fundamental na compreensão.

Um par de alunos optou por apresentar a sua resolução com uma representação pré-formal, o esquema, no entanto, esta maior complexidade na representação poderá ter levado a uma confusão na interpretação da tarefa, pelo que os levou a obter uma resposta incorreta.

No momento da discussão da resolução da tarefa, a representação pictórica contribuiu para a compreensão dos alunos. O par P1 desenhou no quadro as três primeiras figuras da sequência e justificou o seu raciocínio:

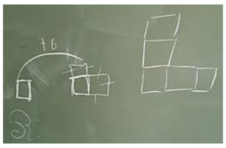


Figura 12. Representação pictórica utilizada pelo par P1 na discussão da primeira questão.

Aluno A1: Começamos por ver os palitos que estavam na primeira [figura].
Professora: Quantos tinha então?
Aluno A2: 4.
Aluno A1: Depois vimos que nesta (aponta para a segunda figura da sequência) tem na mesma 4 palitos (recalca o quadrado em comum com a figura anterior), mas depois tem mais 3 aqui (aponta para o quadrado superior da figura) e mais 3 aqui (aponta para o quadrado do lado direito da base da figura).
Aluno A2: Então 3+3 é 6.
Professora: Muito bem, o que querem dizer com isso então?
Aluno A1: Daqui (aponta para a primeira figura) para aqui (aponta para a segunda figura) são mais 6 palitos.

Enquanto que na segunda questão da tarefa todos os pares recorreram à linguagem natural para apresentar a sua resposta, com nove pares a obterem respostas corretas, na terceira questão verifica-se que não se destacaram, dentro das representações utilizadas, nenhuma representação que possa ter sido mais eficiente, uma vez que apenas três pares conseguiram obter uma resposta correta.

Conexões entre representações. No final da aula introduzi uma representação que não foi utilizada por nenhum aluno. O meu objetivo consistiu em apresentar novas possibilidades e também desenvolver a capacidade dos alunos no tratamento e conversão de representações. Este processo foi realizado em grupo turma. Visto que já estavam registadas no quadro as diferentes representações utilizadas anteriormente pelos alunos (Figura 13), como representações pictóricas e a escrita simbólica, decidi partir dessas mesmas representações e construir uma tabela onde pudesse organizar e esquematizar os dados.

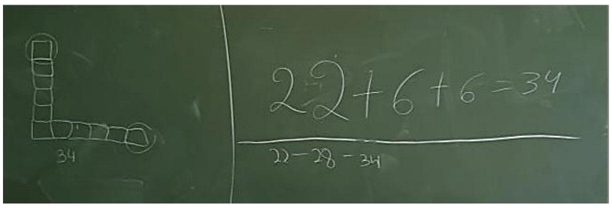


Figura 13. Representações construídas na discussão da resolução da tarefa.

Em discussão com os alunos procurei discutir as ideias necessárias à construção da tabela (Figura 14):

Professora: Quantos palitos tem a figura 1?
Alunos: 4.
Professora: Então qual é o termo?
Alunos: 4.
(desenho o esboço da tabela e escrevo '4' na segunda linha da segunda coluna. Na primeira linha dessa coluna escrevo 'termo')
Aluno A6: E a ordem é 1.
Professora: Porquê?
Aluno A6: Porque é da figura 1.
(Escrevo 'ordem' no topo da primeira coluna e '1' na linha de baixo)
Professora: O que acontece ao termo da ordem seguinte?
Aluno A11: Na ordem 2 acrescentam-se 6 palitos.
Professora: Acrescentamos 6 palitos a quê?
Aluno A5: Aos 4 que já tínhamos. Ficamos com 10.
Professora: Muito bem, então temos algo parecido com isto (aponto para a escrita simbólica que se encontrava no quadro), começamos com 4 e acrescentamos 6 (escrevo '10= 4 + 6' na tabela). E no terceiro?
Aluno A6: São os 4 do início, mais 6, mais 6.

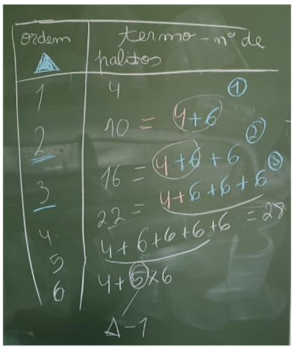


Figura 14. Tabela construída no quadro em grupo-turma.

Este momento proporcionou à turma o desenvolvimento de uma maior desenvoltura nas conexões entre as múltiplas representações, permitindo que os alunos compreendessem o conteúdo matemático, mesmo que representado de diferentes formas. O diálogo prosseguiu e os alunos foram chegando a novas conclusões:

Aluno A12: Professora, primeiro junta-se 6 uma vez. Depois duas. Depois três, depois quatro.
Professora: Precisamente. Na ordem 1 quantas vezes adicionas 6?
Alunos: Nenhuma.
Professora: E na ordem 2?
Aluno A12: Uma [vez].
Professora: E na ordem 3?
Aluno A12: Duas [vezes]. Na [ordem] 4, três [vezes]. Na [ordem] 5 ... quatro?
Professora: Porquê quatro?
Aluno A12: Porque é sempre menos uma.
Professora: Menos uma que quê?
Aluno A12: Menos uma que a ordem.

Professora: Muito bem. Como seria a ordem 6 então?
Aluno A12: 5 vezes o 6.
Professora: Não falta nada?
Alunos: Os 4 do início.

Como é possível verificar na Figura 14, de modo a familiarizar os alunos com as expressões algébricas, atribuí uma figura geométrica (triângulo) à ordem. Na determinação do termo de sexta ordem converti o numeral 5 da expressão simbólica na tabela por 'Δ-1'.

A conversão de representações e o seu respetivo tratamento, no trabalho com 'Sequências e Regularidades', permite aos alunos não só compreender o objeto matemático em estudo, como desenvolver a capacidade de generalização e abstração (Vale, 2009).

3.1.2 Determinação da expressão geradora de uma sequência

Na determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação que permita obter cada termo a partir dos anteriores, conhecidos os primeiros termos, os alunos resolveram a seguinte tarefa:

Tarefa 2. Na cantina de uma escola podem sentar-se a uma mesa quatro alunos. As mesas são todas iguais. Se se juntarem duas mesas, podem sentar-se seis alunos.

1. Quantos alunos se podem sentar em 5 mesas? E em 10? Justifica a tua resposta.
2. Quantas mesas serão necessárias para sentar vinte alunos? Justifica a tua resposta.
3. Poderá existir alguma mesa com 31 alunos e que tenha os lugares todos ocupados?

A particularidade desta tarefa reside no facto da sequência ser apresentada ao aluno através de linguagem natural, permitindo-lhes tratar esta representação ou converter este enunciado noutra representação que lhe seja mais útil. As primeiras questões pedem aos alunos a determinação de termos não consecutivos e na segunda questão, em particular, é expectável que os alunos realizem generalizações distantes, podendo recorrer à expressão geradora. A última questão deste problema apresenta um possível termo da sequência, desafiando os alunos a determinarem a ordem desse mesmo termo.

No momento em que apresentei a tarefa à turma atentei que os alunos compreendessem efetivamente o enunciado. Quando questionados sobre o que acabaram de ler alguns elementos tomaram a iniciativa de mostrar como se sentariam os alunos caso fosse apenas uma mesa e caso fossem duas mesas:

Aluno A20: Se for uma [mesa], fica uma em cada lado (anda ao redor da mesa demonstrando que cada lado da mesa é ocupado por uma pessoa).
Professora: E se fossem duas mesas, como se sentavam?
Aluno A13: Dois de cada lado, e mais dois nas pontas.

Apenas 4 dos 12 pares converteram a representação apresentada para uma nova representação. Dois pares converteram o enunciado para uma representação pictórica, 1 par para esquema e 1 par para uma tabela com escritas simbólicas, o que fez com a maior parte dos pares tenha respondido corretamente às questões da tarefa 2 (Tabela 10).

Tabela 10: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às questões da Tarefa 2 (*n*=12).

	Tipos de resposta			
Questão	C	PC	I	NR
1.	10	2	0	0
2.	9	0	3	0
3	12	0	0	0

Nota: C: correta; PC: parcialmente correta; I: incorreta; NR: não responde.

Na primeira questão da tarefa verifica-se que 10 pares obtiveram uma resposta correta, enquanto os outros 2 pares responderam de forma parcialmente correta. No entanto, surgiram diferentes estratégias (Ponte et al., 2009). Dos 12 pares da turma, 8 deles desenvolveram a 'estratégia de decomposição de termos', que consiste na decomposição de termos de modo a perceber como foi realizada a sua construção, obtendo a respostas correta à questão. Embora não esteja explícito na sua resolução, percebe-se que os alunos decompuseram os termos de modo a entenderem que cada um apresenta o mesmo número de mesas que a ordem a que corresponde. Tal verifica-se quando os alunos apenas desenham os termos das ordens que pretendem determinar com o número de mesas correspondente à ordem pretendida, como ilustra a resposta do par P5 (Figura 15).

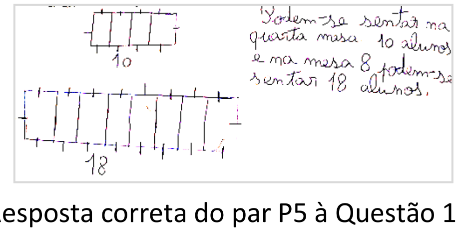


Figura 15. Resposta correta do par P5 à Questão 1 da Tarefa 2.

A 'estratégia aditiva' foi utilizada por 2 pares que obtiveram uma resposta correta, adicionando sucessivamente 2 ao termo anterior, visto ser essa a lei de formação desta sequência, como exemplificam as respostas dos pares P11 e P9 (Figura 16).

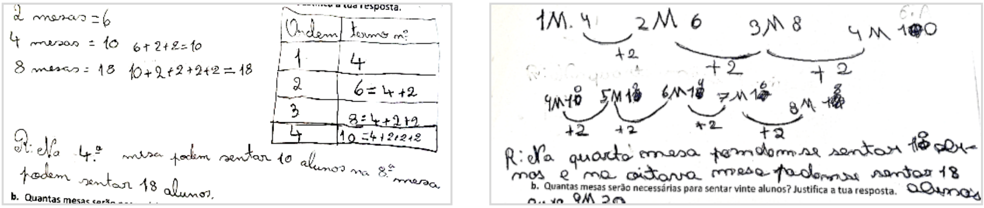


Figura 16. Resposta correta do par P11 e do par P9 à Questão 1 da Tarefa 2.

Por fim, 2 pares optaram por recorrer à ‘estratégia de objeto inteiro’, o que implica a determinação de um termo partindo de um termo múltiplo. No entanto, esta estratégia não é exequível neste caso, uma vez que embora o dobro das mesas suporte o dobro das pessoas nas laterais, teriam que acrescentar mais 2 lugares nas cabeceiras das mesmas. Os alunos, tendo recorrido a representações pictóricas na determinação do quarto termo da sequência, foram capazes de responder corretamente relativamente ao número de pessoas que se podem sentar em quatro mesas. No entanto, tendo recorrido à ‘estratégia do objeto inteiro’ na determinação do oitavo termo da sequência, determinaram o número errado de pessoas que se podem sentar em oito mesas, tal como exemplificam as respostas dos pares P6 e P1 (Figura 17).

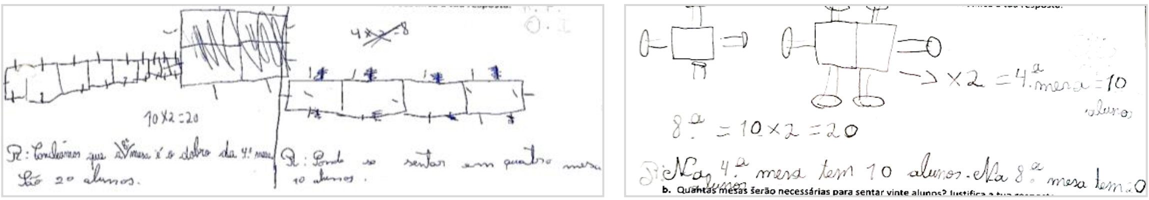


Figura 17. Resposta parcialmente correta do par P6 e do par P1 à Questão 1 da Tarefa 2.

De modo a esclarecer os alunos, e com suporte numa representação pictórica da sequência, surgiu o seguinte diálogo:

Professora: Quantos alunos se podem sentar em quatro mesas?
Aluno A11: 10 alunos.
Professora: Como?
Aluno A12: 4 aqui (aponta para o comprimento da figura, um dos lados da fila de mesas), 4 aqui (aponta para o outro lado da fila de mesas) e mais dois aqui (aponta para as cabeceiras da mesa). Dá 10.
Professora: E se tivermos 8 mesas?
Aluno A11: 20 alunos.
Professora: Porquê?
Aluno A11: Porque é o dobro [de 10]. E 8 é o dobro de 4.
Professora: Será que funciona sempre assim? Quantos alunos se sentam nas pontas?
Alunos: 2...
Professora: E nos lados das filas de mesas?

Aluno A11: 8 aqui (aponta para um dos lados da mesma figura desenhada no quadro) e 8 aqui (aponta para o outro lado).
Professora: Porquê?
Aluno A12: Porque tinha 8 mesas seguidas.
Professora: Muito bem. Então quantos alunos se podem sentar no total?
Aluno A11: 8 de cada lado mais os 2 das pontas.
Aluno A12: 18, professora.

Na segunda questão da tarefa apenas 3 pares obtiveram a resposta incorreta, em contraste com os restantes 9 pares que conseguiram determinar a solução correta. Das respostas corretas, 7 pares apenas desenharam a figura que correspondia à solução do problema, pelo que poderão ter obtido esse resultado por tentativa e erro, como ilustra a Figura 18.

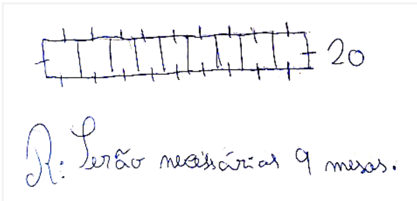


Figura 18. Resposta correta do par P7 à Questão 2 da Tarefa 2.

Outros 2 pares obtiveram a resposta correta através de uma estratégia que Ponte et al. (2009) definem como 'estratégia aditiva', uma vez que a cada termo é adicionada a lei de formação de modo a obter o termo seguinte (Figura 19).

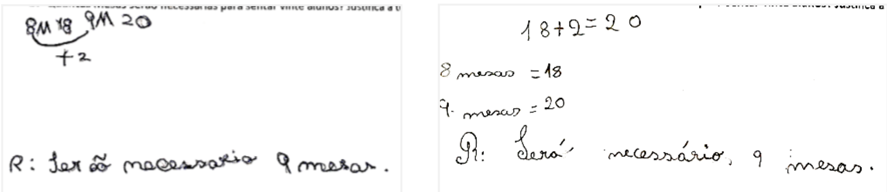


Figura 19. Resposta correta do par P9 e do par P11 à Questão 2 da Tarefa 2.

Por fim, 2 pares obtiveram uma resposta incorreta, determinando termos onde não se verifica a condição de se sentarem apenas 20 alunos, como se verifica na resposta do par P7 (Figura 20).

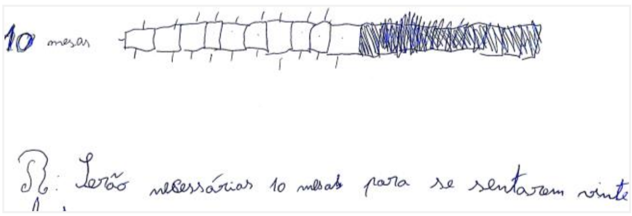


Figura 20. Resposta incorreta do par P7 à Questão 2 da Tarefa 2.

Na terceira questão desta tarefa verifica-se que 10 pares responderam corretamente à questão. Os alunos averiguaram diferentes condições que justificam o facto de não ser possível sentar 31 pessoas e ocupar todos os lugares. O par P6, por exemplo, constatou que não é possível porque os termos são todos pares, logo 31 não pertence à sequência, e o par P12 optou por desenhar as mesas, acabando por verificar a impossibilidade de sentar 31 pessoas e ter todos os lugares ocupados (Figura 21).

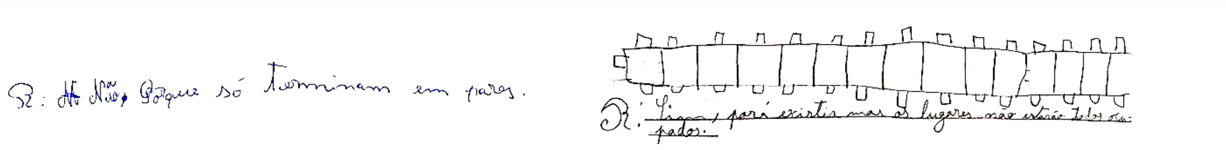


Figura 21. Resposta correta do par P6 e do par P12 à Questão 2 da Tarefa 2.

Representações. Na resolução das diferentes questões da Tarefa 2 verifica-se o recurso a múltiplas representações, o que impele a analisar quais as que mais contribuíram para que os alunos resolvessem de forma eficaz a tarefa apresentada. A Tabela 11 reúne a frequência absoluta dos tipos de registos utilizados pelos alunos.

Tabela 11: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 2 (*n*=12).

	Tipos de resposta														
	C					PC					I				
Questão	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T
1	8	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0
3	5	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	**20**	6	3	2	1	**1**	0	0	**1**	0	**2**	0	0	1	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; T: tabelas.

Da análise dos resultados apresentados na Tabela 11 verifica-se que prevalece o número de respostas corretas à Tarefa 2, que a maior parte delas resulta da representação pictórica.

Conexão entre representações. No momento da discussão das resoluções realizadas pelos alunos da Tarefa 2 questionei-os quanto à relação entre o termo e a ordem da sequência.

Professora: Que relação existe entre o número de mesas e o número de alunos que se podem sentar?
Aluno A5: Quando se acrescenta mais uma mesa cabem mais dois alunos.
Professora: Exatamente. Que mais podemos retirar daqui?
Aluno A13: Em cada mesa cabem dois [alunos], mas depois ainda temos os das pontas.
Professora: Quantos alunos se sentam aqui (aponto para os comprimentos da figura com 2 mesas desenhadas no quadro)?
Alunos: 4.
Professora: 2 mesas, sento 4 alunos, dois de cada lado. E aqui (aponto para o cumprimento da figura com três mesas)?
Alunos: 6.

Professora: 3 mesas, sento 6 alunos. O que é que isto nos diz?

Aluno A2: É o dobro.

Professora: O dobro de quê?

Aluno A2: 6 é o dobro de 3 e 4 é o dobro de 2.

Aluno A13: Já percebi, 2 são as mesas, o 4 são os meninos, então os meninos são o dobro das mesas.

Professora: Exatamente. (Registo no quadro ‘n.° de mesas’) Então os alunos são quantas vezes o número de mesas?

Aluno A2: 2 vezes.

Professora: (Registo ‘2 x n.° de mesas’) Atenção, não falta nada?

Alunos: Os da ponta.

Aluno A12: Temos que juntar a isso mais 2.

Desta interação com os alunos resultou uma nova representação: a escrita algébrica (Figura 22).

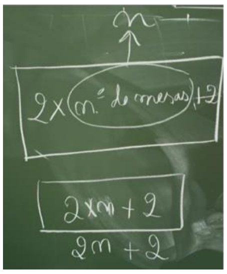


Figura 22. Expressão geradora da sequência que traduz o número de alunos que se podem sentar num conjunto de mesas.

Embora os alunos ainda estejam numa fase embrionária do desenvolvimento do seu pensamento algébrico, atendendo ao interesse e desenvoltura revelado pelos mesmos nas tarefas propostas, achei oportuno explorar as representações que surgiram para obter a expressão algébrica da sequência, substituindo o ‘número de mesas’ por ‘*n*’:

Professora: Sabiam que podemos tornar isto ainda mais simples de escrever? Em vez de estarmos a escrever ‘número de mesas’ podemos escrever o mesmo substituído isto por uma letra ou por uma figura.

Os alunos exploraram de seguida a expressão obtida para responder a questões como: “Quantos alunos se podem sentar em 40 mesas?”; “Quantas mesas são precisas para sentar 62 alunos?”, através da realização de cálculos mentais e das conexões que estabeleceram entre as suas representações internas e as externas exploradas na aula, nomeadamente a expressão algébrica em causa.

3.1.3 Transformação de representações

Com o intuito de determinar uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida e formulá-la em linguagem simbólica, os alunos exploraram a seguinte tarefa:

Tarefa 3. Observa a seguinte sequência de figuras.

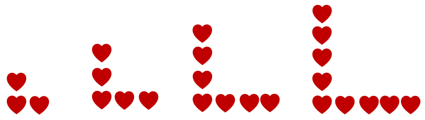


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Quantos corações são necessários para a Figura 6? E para a Figura 8? Justifica a tua resposta recorrendo a dois métodos diferentes de resolução.
2. Existe alguma figura com 100 corações? Justifica a tua resposta.
3. Estabelece a expressão geradora dos termos da sequência.

A tarefa exprime uma sequência de números ímpares crescente e pictórica, dada a sua representação. A primeira questão tem como objetivo que os alunos realizem generalizações próximas, uma vez que solicita a determinação dos termos seguintes, mas não consecutivos. A particularidade desta tarefa é o facto de os alunos terem que justificar o seu raciocínio através de dois métodos distintos, o que permite que estabeleçam conexões entre múltiplas representações, realizando conversões e transformações. A segunda questão pretende que os alunos relacionem a lei de formação com o termo apresentado, necessitando de recorrer aos seus conhecimentos prévios de *Números e Operações*, para constatar que a adição de um número ímpar com um número par é sempre ímpar. Por fim, a terceira questão da tarefa implica que o aluno tenha conseguido generalizar a sequência de modo a criar uma expressão algébrica que lhe permita determinar qualquer termo da sequência.

Após a leitura e interpretação da tarefa os alunos começaram a sua exploração. A tabela seguinte apresenta a frequência absoluta dos tipos de resposta dos alunos às diferentes questões apresentadas (Tabela 12).

Tabela 12: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às questões da Tarefa 3 (*n*= 12).

	Tipos de resposta			
Questão	C	PC	I	NR
1.	11	1	0	0
2.	9	1	2	0
3	6	1	1	4

Nota: C: correta; PC: parcialmente correta; I: incorreta; NR: não responde.

Na primeira questão da tarefa apenas um par de alunos respondeu de forma parcialmente correta, enquanto os restantes responderam corretamente. Destas respostas, três pares recorreram à ‘estratégia de representação e contagem’ para obter os termos pretendidos, tal como sugere a resolução do par P12 (Figura 23).

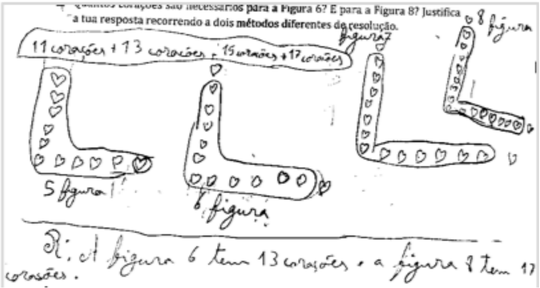


Figura 23. Resposta correta do par P12 à Questão 1 da Tarefa 3.

A ‘estratégia aditiva’ foi aplicada por 7 pares, adicionando a cada termo a lei de formação de modo a obter o termo seguinte. Destes pares, seis pares obtiveram a resposta correta, como ilustra a resposta do par P9 (Figura 24).

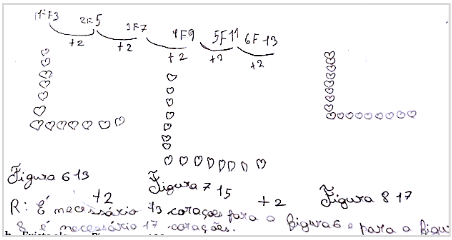


Figura 24. Resposta correta do par P9 à Questão 1 da Tarefa 3.

No entanto, um par de alunos que optou por tal estratégia, o par P6, obteve uma resposta parcialmente correta, uma vez que, embora a representação pictórica e a escrita simbólica estejam corretas, traduziu essas representações numa resposta incorreta. (Figura 25).

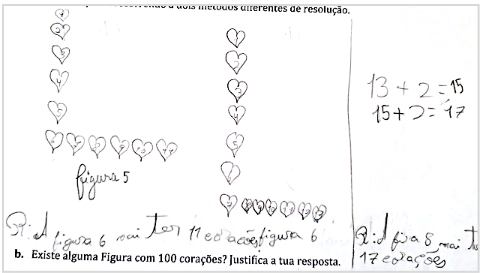


Figura 25. Resposta parcialmente correta do par P6 à Questão 1 da Tarefa 3.

Por fim, nas respostas corretas verifica-se ainda a ‘estratégia de decomposição de termos’, utilizada por 3 pares. Serve de exemplo a resolução correta do par P3 que decompondo a figura em três partes percebeu que o número de corações é duas vezes o número da figura mais um (Figura 26).

Figura 26. Resposta correta do par P3 à Questão 1 da Tarefa 3.

Na segunda questão da tarefa, 9 dos 12 pares obtiveram uma resposta correta, tal como sugere a resolução do par P5 (Figura 27).

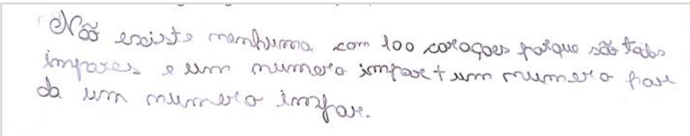


Figura 27. Resposta correta do par P5 à Questão 2 da Tarefa 3.

Dois pares de alunos responderam incorretamente à questão, provavelmente por não distinguirem as características da sequência, tal como exemplifica a resolução do par P12 (Figura 28).

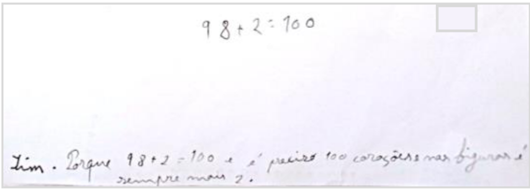


Figura 28. Resposta incorreta do par P12 à Questão 2 da Tarefa 3.

Na última questão da Tarefa 3, metade dos pares determinou a expressão geradora obtendo uma resposta correta, como sugere a resolução do par P11 (Figura 29).

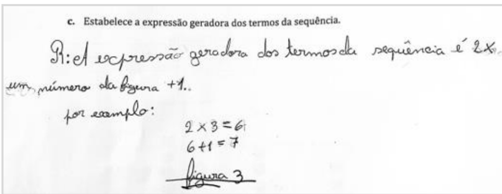


Figura 29. Resposta correta do par P11 à Questão 3 da Tarefa 3.

Dos restantes 6 pares da turma, 4 pares não apresentaram nenhuma resposta. Verifica-se ainda que 2 pares responderam incorretamente, uma vez que apresentaram a lei de formação da sequência em lugar da expressão geradora da mesma, que era pedida, como se observa na resolução do par P8 (Figura 30).

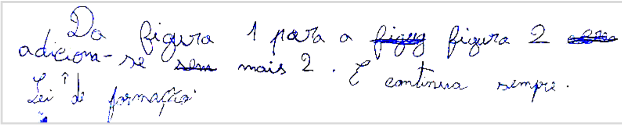


Figura 30. Resposta incorreta do par P8 à Questão 3 da Tarefa 3.

Ainda na questão 3, um par de alunos apresentou uma resposta parcialmente correta. Embora tenha apresentado um exemplo em que aplicou a expressão geradora, não foi capaz de a identificar na totalidade, como comprova a Figura 31.

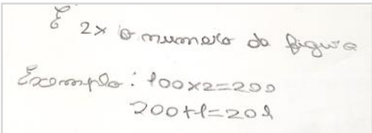


Figura 31. Resposta parcialmente correta do par P9 à Questão 3 da Tarefa 3.

Representações. Na análise das respostas dos alunos à Tarefa 3 identificaram-se quais as representações mais utilizadas e quais as que foram mais utilizadas em respostas corretas. A tabela seguinte reúne a frequência absoluta dos tipos de registos utilizados pelos alunos às questões da Tarefa 3.

Tabela 13: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 3 (*n*=12).

	Tipos de resposta														
	C					PC					I				
Questão	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T
1	11	0	3	3	10	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
3	0	2	0	4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
Total	**11**	**11**	3	7	10	1	1	0	**2**	0	0	**2**	0	**2**	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; T: tabelas.

A primeira questão solicitava aos alunos que apresentassem dois métodos de resolução distintos, o que os impulsionou a recorrer a diversas representações numa mesma questão. Dos pares que obtiveram a resposta correta, 1 par só apresentou uma representação, 6 pares apresentaram duas representações e 4 pares apresentaram 3 representações. Como se verifica na Tabela 13, na resolução da primeira questão os alunos recorreram essencialmente a representações pictóricas e a tabelas. Nas conversões entre as múltiplas representações efetuadas pelos alunos verifica-se que todos os pares mantiveram a veracidade da sua solução, demonstrando uma possível compreensão no objeto matemático, tendo em conta a teoria de Duval (2012) de que um aluno capaz de coordenar duas representações distintas terá atingido a compreensão integral do conteúdo em estudo.

Na segunda questão, 11 pares apresentaram a sua resposta em linguagem natural, das quais 9 responderam corretamente. Quanto à última questão da tarefa, obtiveram-se 4 respostas corretas apresentadas em escrita simbólica.

Conexão entre representações. Na primeira questão desta tarefa, todos os pares de alunos foram capazes de converter representações sem perder o ‘objeto matemático’ em causa, o que revela domínio dos conteúdos matemáticos.

De modo a compreender as conexões que os alunos estabeleceram entre representações, criei um momento de discussão que favorecesse o debate das mesmas. Como a maioria dos alunos utilizou representações pictóricas, num primeiro momento, parti dessa representação para solicitar o par P8 a apresentar no quadro a sua resolução que convertia a representação pictórica numa tabela (Figura 32).

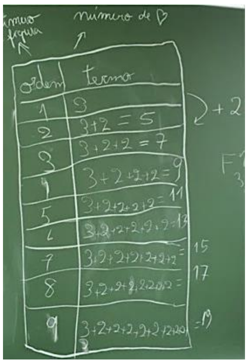


Figura 32. Exploração de representações: tabela, pelo par P8.

Professora: Expliquem à turma como contruíram a tabela.

Aluno A15: Começamos por escrever a ordem até ao 9 (apontam para a primeira coluna).

Professora: E o que é a ordem?

Aluno A16: É o número da figura (regista na tabela).

Professora: E depois?

Aluno A15: Vimos que na primeira [figura] temos 3 corações (aponta para a representação pictórica desenhada no quadro), então o termo é 3 (aponta para a segunda linha da segunda coluna da tabela).

Professora: O que é o termo, então?

Aluno A15: O número de corações.

(O aluno A16 regista no quadro ‘número de ♡’).

Aluno A15: A seguir [no segundo termo], reparamos que eram os 3 de antes, mais 2. Depois [no terceiro termo] é 3 mais 2 mais 2.

Professora: De onde vem esse mais 2?

Aluno A15: Vem das pontas, nós vimos aqui que (aponta para a representação pictórica), daqui (aponta para a primeira figura) para aqui (aponta para a segunda figura) acrescenta mais um coração em cada ponta. Nas outas [figuras] igual.

Professora: Então o que acontece de um termo para o seguinte?
Aluno A16: Temos a figura anterior, mais 2.

De seguida, explorei um raciocínio diferente recorrendo à resolução do par P1. Este par recorreu às representações pictóricas para explicar o seu raciocínio (Figura 33).

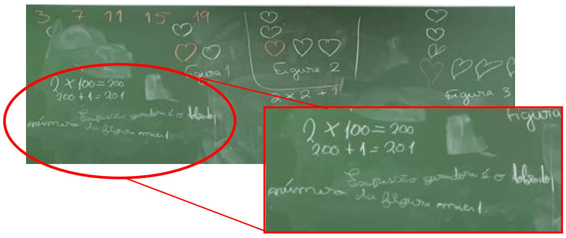


Figura 33. Exploração da alínea 1 pelo par P1.

Aluno A1: Nós pensamos na figura 100. Depois lembramo-nos que naquele das mesas (Tarefa 1) era o dobro mais 2. Então multipliquei o 100 por 2 e dava 200. Mas percebi que não dava para fazer como no das mesas e adicionar 2. Porque olhei para aqui (aponta para a figura 1) e aqui tem dois corações (aponta para os corações desenhados a branco) se juntar 2 dá 4. E aqui só tem 3, então é mais 1 só.
Professora: Calma, então pensaram na figura 100, ou na figura 1?
Aluno A2: Primeiro na 100, mas não dava, então olhamos para as que já tínhamos.
Professora: (Dirigindo-me a toda a turma) Vamos por partes então. O que temos na figura 2, por exemplo?
Aluno A9: A figura anterior mais 2 corações.
Professora: Precisamente, foi assim que o par H pensou. Mas é assim que o par A está a pensar? Vamos esquecer as outras figuras e pensar só nesta (aponto para a figura 2).
Aluno A1: Nós pensamos que aqui tem dois corações (aponta para os corações a branco na horizontal), aqui tem outros 2 (aponta para os corações a branco na vertical).
Professora: E o que isso nos diz?
Aluno A1: Tem duas vezes dois corações.
Professora: Que figura é essa?
Aluno A2: Figura 2.
Professora: E tem 2 corações aqui (aponto para os corações a branco na horizontal) e 2 aqui (aponto para os corações a branco na vertical). E a figura 3, por exemplo?
Aluno A5: Tem 3 em baixo e 3 em cima.
Professora: Tem 2 vezes 3 corações. E a figura 1?
Aluno A1: Tem 1 aqui (aponta para o coração branco na fila vertical) e outro aqui (aponta para o outro coração branco da fila horizontal).
Professora: Será que então podemos dizer que temos 2 vezes o número da figura?
Alunos: Sim.
Professora: (Escreve no quadro '2 x o número da figura') Estão todos os corações, assim?
Aluno A11: Não, falta 1. O que está a vermelho. Esse nunca muda.
Professora: (Acrescenta ao que tinha escrito: '+1').

Aluno A1: Foi isso que fizemos. Então já descobrimos que para a figura 100 tinha 201 corações.

A discussão gerada no grupo turma favoreceu a determinação da expressão geradora (Figura 34).

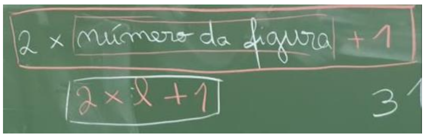


Figura 34. Expressão geradora da sequência.

De modo a continuar com a familiarização das expressões algébricas, substitui o 'número da figura' por 'l':

Professora: Acham que podemos trocar o 'número da figura' por algo mais simples de escrever?
Alunos: Sim!
Professora: Que letra gostavam que eu substituísse?

Depois de várias sugestões, optamos pela letra 'l'. Permiti que os alunos escolhessem a letra que queriam representar o 'número da figura' de modo que entendessem que qualquer letra seria válida. Embora a expressão não fosse formalmente apresentada como uma expressão algébrica, os alunos compreenderam o seu significado, uma vez que participaram ativamente na sua construção.

De modo geral, estes momentos permitiram aos alunos explorar diferentes representações e compreender a sequência em estudo, não se prendendo necessariamente a uma só representação da mesma. Isto tornou-se possível devido ao estudo das relações estabelecidas entre as diferentes representações apresentadas na discussão sobre a resolução da tarefa.

Síntese

A frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na resolução das três tarefas em análise está contemplada na Tabela 14.

Tabela 14: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos nas Tarefas (*n*= 12).

	Tipos de resposta														
	C					PC					I				
Tarefa	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T	RP	LN	E	ES	T
1	4	16	0	1	0	2	3	0	1	0	2	5	1	0	0
2	20	6	3	2	1	1	0	0	1	0	2	0	0	1	0
3	11	11	3	7	10	1	1	0	2	0	0	2	0	2	0
Total	**35**	33	6	10	11	**4**	**4**	0	**4**	0	4	**7**	1	3	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; T: tabelas.

Como é possível verificar na tabela, a variedade de representações apresentada pelos alunos vai aumentado no decorrer da minha intervenção. Nas respostas corretas é possível observar que as representações mais utilizadas foram as representações pictóricas e a linguagem natural. As representações pictóricas pertencem a um conjunto de registos informais (Webb et al., 2008), normalmente mais utilizado em crianças de níveis de escolaridade mais baixos (Goldin, 2000).

Relativamente às respostas parcialmente corretas, nenhuma das representações utilizadas demonstra ter sido mais ou menos vantajosa, uma vez que surgem todas com a mesma frequência.

Por fim, verifica-se que a linguagem natural foi a representação mais presente nas respostas incorretas, visto que muitas vezes os alunos não conseguiram estabelecer generalizações e visualizar regularidades recorrendo a esta representação.

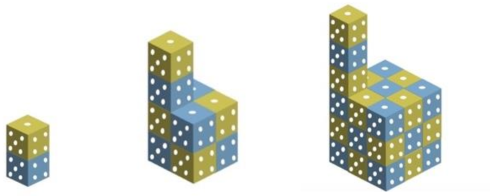
3.2. Intervenção Pedagógica no 2.° Ciclo

A dinamização de atividades de aprendizagem do conteúdo de 'Sequências e Regularidades' na turma do 2.° Ciclo realizou-se de forma atípica devido ao surto de Covid-19. Em consequência a este quadro pandémico, foi implementado o 'Ensino a Distância' em todo o país. Seguindo as indicações da Direção-Geral da Educação, a minha intervenção na turma deste ciclo de escolaridade realizou-se através do *Google Hangouts*, onde reuni com a turma em vídeo chamada. O *Google Classroom* foi outra ferramenta utilizada, tendo como finalidade a monotorização dos trabalhos dos alunos ao longo das aulas. As tarefas que propus à turma foram exploradas de forma individual, ao contrário do que aconteceu no 1.° Ciclo, e a discussão dessa exploração foi sempre realizada em grupo turma. Com o intuito de ilustrar momentos da minha prática pedagógica, a análise das atividades dos alunos, à semelhança da realizada no 1.° Ciclo, incide sobre as seguinte dimensões: (i) identificação de regularidades numéricas; (ii) determinação da expressão geradora de uma sequência; e (iii) transformação de representações.

3.2.1. Identificação de regularidades numéricas

Na determinação de uma expressão geradora de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente, os alunos resolveram a seguinte tarefa de sequências em figuras geométricas tridimensionais:

Tarefa 1. Considera a sequência de conjunto de dados cujos primeiros termos são:



Construção 1 Construção 2 Construção 3

1. Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 5?
2. Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 8?
3. Encontra a expressão geradora que te permita determinar o número de faces com 4 pintas de qualquer conjunto de dados da sequência.
4. Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 20?
5. Haverá alguma ordem cujo termo da sequência seja 75? Justifica a tua resposta.

Esta tarefa, ao traduzir uma sequência de dados, com forma de cubo, permite a promoção do desenvolvimento da capacidade espacial. A primeira questão da tarefa implica que os alunos determinem a lei de formação da sequência, de modo a conseguirem obter o termo de ordem 5. Tanto a primeira como a segunda questão solicitam generalizações próximas. A terceira questão instiga os alunos a determinarem a expressão geradora da sequência, porém, caso os alunos não sejam capazes de o fazer, podem responder às restantes questões da tarefa recorrendo à lei de formação da sequência.

Após a interpretação da tarefa, os alunos procederam à sua resolução que posteriormente colocaram no *Google Classroom*. Dos 26 alunos da turma, apenas 15 (57,7%) resolveram a tarefa e a colocaram na plataforma solicitada. No momento de exploração da resolução da tarefa surgiram algumas dúvidas na sua interpretação, como ilustra o seguinte diálogo:

Aluno A2: Qual é o termo desta sequência? Não estou a perceber...
Professora: Lê a primeira questão com atenção.
Aluno A2: ‘Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 5? ’
Professora: Repara na segunda figura, quantas faces tem com 4 pintas?
Aluno A1: 10?
Professora: Vamos ler o que nos pede: ‘Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 5?’ (realcei a palavra ‘aparecem’). Consegues ver 10 faces com 4 pintas?
Aluno A2: Ahh, consigo ver 6.
Aluno A1: Sim, ver só vejo 6.
Professora: Então qual é o termo da ordem 2?
Aluno A2: 6.

Após o esclarecimento do que seria solicitado na tarefa, os alunos procederam à sua resolução. Da análise das suas respostas a cada uma das questões da tarefa, antes da sua discussão no grupo turma, constata-se que a maioria dos alunos conseguiu obter respostas corretas às diferentes questões da tarefa (Tabela 15).

Tabela 15: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às questões da Tarefa 1 (*n*= 15).

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	10	0	3	2
2.	10	1	3	1
3.	9	2	1	3
4.	10	0	4	1
5.	10	3	0	2

Nota: C: correta; PC: parcialmente correta; I: incorreta; NR: não responde.

Relativamente à primeira questão, 10 alunos responderam corretamente, revelando que identificaram a regularidade numérica da sequência. Destes alunos, 8 recorreram à ‘estratégia aditiva’ (Ponte et al.,2009), tal como mostra a resposta do aluno A1 (Figura 35).

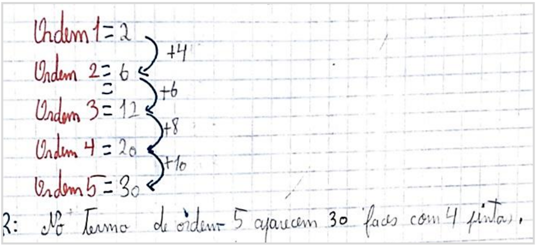


Figura 35. Resposta correta do aluno A1 à Questão 1 da Tarefa 1.

Na determinação do número de faces com 4 pintas no termo de ordem 5, os alunos que recorreram à tal estratégia perceberam de que teriam que adicionar números pares consecutivos a partir do 4, inclusive. Lannin (2003) identificou que os alunos recorrem maioritariamente à ‘estratégia aditiva’, demonstrando dificuldade na utilização de outras estratégias.

Os restantes dois dos alunos que apresentam uma resposta correta optaram pela ‘estratégia de decomposição de termos’ (Ponte et al., 2009), como é possível verificar na resolução do aluno A2 (Figura 36).

1- vai ter 30 faces de 4 pintas porque:
a "torre" vai ter 5 faces e o "cubo" vai ter 25 faces (ou seja o número de faces na torre é o número da figura e no cubo é o número da figura × o número da torre)
Ex. 5×5=25 (n° de faces do cubo) mais 5 da torre no total são 30.
R:. São 30 faces.

Figura 36. Resposta correta do aluno A2 à Questão 1 da Tarefa 1.

De modo a determinarem o número de faces do termo da sequência, o aluno A2 decompôs a figura em duas partes: o cubo a que chamou “base”, e a “torre” que corresponde aos dados sobrepostos sobre o cubo. Desta forma, o aluno A2 verificou que o número de faces com quatro pintas da "torre" é igual ao número da figura. Relativamente ao número de faces com quatro pintas na "base" da figura, o aluno concluiu que a multiplicação do número da figura com o número de faces de quatro pintas da "torre", ou seja, o quadrado da ordem, determinaria o número de faces da "base".

Entre os alunos que responderam à Questão 1 da tarefa, três deles responderam incorretamente, mostrando incompreensão na determinação da lei de formação da sequência, traduzindo-a através da adição dos termos anteriores com 2, como exemplifica a resolução do aluno A3 (Figura 37).

1- 12, porque acrescenta-se sempre mais 2.

Figura 37. Resposta incorreta do aluno A3 à Questão 1 da Tarefa 1.

De modo a esclarecer qual a lei de formação da sequência, desencadeei com a turma o seguinte diálogo:

Professora: O que acontece da figura 1 para a dois?

Aluno A3: Acrescenta-se 2.

Professora: Dois, o quê?

Aluno A3: Duas faces.

Professora: Quantas faces com 4 pintas tem a primeira figura?

Aluno A3: 2.

Professora: E a segunda figura?

Aluno A3: 6.

Professora: Então quantas acrescentou?

Aluno A3: 4.

Professora: E agora a figura 3, quantas faces tem com 4 pintas?

Aluno A12: 12.

Professora: Quantas faces adicionamos da figura 2 para a 3?

Aluno A3: 6.

Professora: Muito bem. Adicionamos 4, depois 6, depois 12. O que são estes números?

Aluno A3: São números pares.

Professora: Então qual é a lei de formação?

Aluno A6: Adicionar números pares seguidos.

Aluno A3: Consecutivos.

Professora: Precisamente, começando no 4.

Na segunda questão da tarefa, 10 alunos responderam corretamente, explorando novamente as estratégias utilizadas anteriormente. Destes alunos, oito recorreram à 'estratégia aditiva', como ilustra a resolução do aluno A4 (Figura 38).

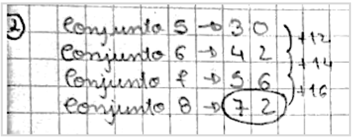


Figura 38. Resposta correta do aluno A4 à Questão 2 da Tarefa 1.

O aluno A4 esquematizou os conjuntos e respetivos números de faces com 4 pintas e, uma vez que a lei de formação da sequência é a adição de números pares consecutivos a partir do 4, continuou o esquema da questão anterior até obter o termo de ordem 8, como solicitado.

Os restantes dois alunos que responderam corretamente à Questão 2 utilizaram novamente a 'estratégia de decomposição de termos', como exemplifica a resolução do aluno A5 (Figura 39).

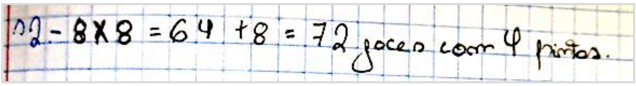


Figura 39. Resposta correta do aluno A5 à Questão 2 da Tarefa 1.

Como é possível verificar na sua resolução, o aluno A5 calculou o número de faces de uma das partes constituintes do termo de ordem 8, calculando o quadrado da ordem. Por fim, adicionou o número da ordem, de modo a obter a totalidade de faces com quatro pintas da figura explorada.

Independentemente da estratégia delineada, importa efetuar corretamente os procedimentos de cálculo, o que não se confirma na resolução do aluno A6, que ao adotar a 'estratégia aditiva' obteve uma resposta parcialmente correta por realizar incorretamente os cálculos de adição, como se verifica na Figura 40.

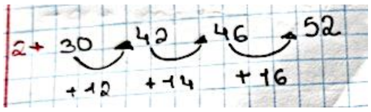


Figura 40. Resposta parcialmente correta do aluno A6 à Questão 2 da Tarefa 1.

Por fim, verificou-se que três alunos responderam incorretamente à questão, uma vez que, tal como na questão anterior, não foram capazes de determinar a regularidade desta sequência, tal como exemplifica a resposta do aluno A7 (Figura 41).

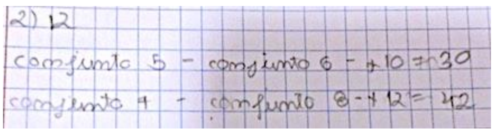


Figura 41. Resposta incorreta do aluno A7 à Questão 2 da Tarefa 1.

No que se refere à terceira questão, nove alunos obtiveram corretamente a expressão geradora da sequência, como expressa a resposta do aluno A8 (Figura 42).

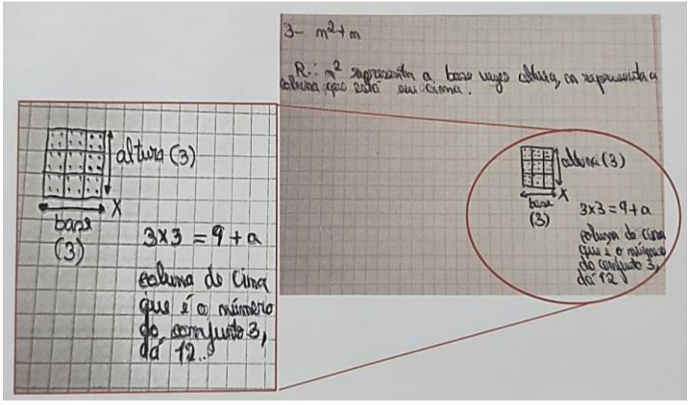


Figura 42. Resposta correta do aluno A8 à Questão 3 da Tarefa 1.

A resolução do aluno A8 traduz o raciocínio apresentado anteriormente pelos alunos A2 e A4. O aluno A8 decompôs a figura em duas partes, compreendendo que a "torre" da figura tem o mesmo número de faces com 4 pintas que a ordem, e na base o número de faces com 4 pintas corresponde à área de uma face do "cubo". Este aluno conseguiu, ainda, traduzir estas conclusões numa expressão geradora onde o '*n*' representa o número da figura.

Dois alunos apresentaram uma expressão geradora parcialmente correta. Como podemos observar na Figura 43, o aluno A7.

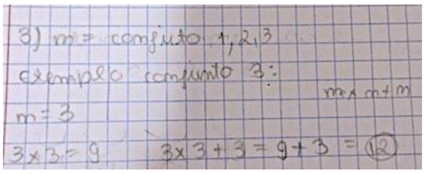


Figura 43. Resposta parcialmente correta do aluno A7 à Questão 3 da Tarefa 1.

O aluno inicialmente determina que *'m'* traduz o número do conjunto. Embora aplique a expressão geradora corretamente, não conseguiu perceber que *'m'* seria a única incógnita. O aluno acrescentou '*n*', que *à posteriori* o substituiu, na prática, pelo significado atribuído a '*m*', ou seja, ao número do conjunto. A dificuldade na escrita simbólica de uma generalização pode dever-se à complexidade em atribuir um significado às letras numa expressão numérica enquadrada num contexto funcional em crianças desta faixa etária (Saraiva et al., 2010).

Na Questão 3, o aluno A9 determinou incorretamente a expressão geradora da sequência, assumindo que o número de faces com 4 pintas seria o triplo do número da figura correspondente, como é possível verificar na Figura 44.

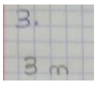


Figura 44. Resposta incorreta do aluno A9 à Questão 3 da Tarefa 1.

Na quarta questão da tarefa, nove alunos responderam corretamente, aplicando a expressão geradora determinada anteriormente. Como se comprova na resolução do aluno A1, ele substituiu na expressão geradora o *‘n’* pelo número da ordem solicitada (Figura 45).

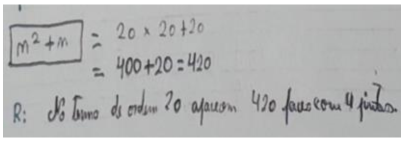


Figura 45. Resposta correta do aluno A1 à Questão 4 da Tarefa 1.

No entanto, o aluno A10 respondeu corretamente à questão, mesmo não tendo sido capaz de determinar a expressão geradora na questão anterior. Desta forma, o aluno ao reconhecer a regularidade da sequência obteve uma resposta correta através da ‘estratégia aditiva’ (Ponte et al.*,* 2009), como se comprova na Figura 46.

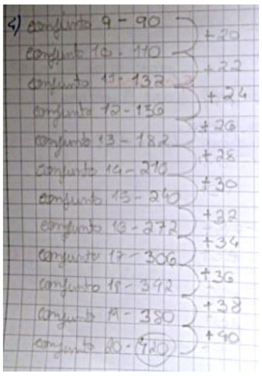


Figura 46. Resposta correta do aluno A10 à Questão 4 da Tarefa 1.

À Questão 4, verificaram-se três respostas incorretas. Estas respostas vêm em sequência das questões anteriores, onde os alunos não foram capazes de entender a regularidade da sequência, nem determinar a expressão geradora da mesma. Assim sendo, o aluno revela ter recorrido à lei de formação incorretamente determinada anteriormente para resolver a quarta questão (Figura 47).

4- No termo de ordem 20 aparecem 42.

Figura 47. Resposta incorreta do aluno A3 à Questão 4 da Tarefa 1.

Na última questão da Tarefa 1, dez alunos obtiveram a resposta correta. Alguns deles testaram a expressão em diferentes termos, como o aluno A9 (Figura 48). Outros alunos verificaram que a sequência é apenas composta por números pares, como se verifica na resposta correta do aluno A11 (Figura 48).

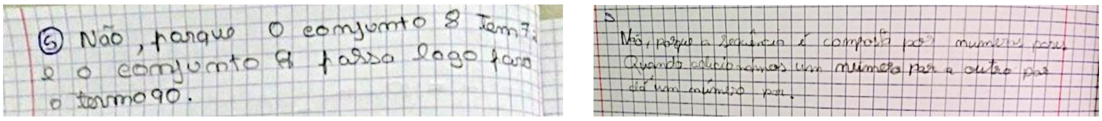


Figura 48. Resposta correta do aluno A9 e do aluno A11 à Questão 5 da Tarefa 1.

Porém, nem todos os alunos atendem aos critérios que determinam a obter uma resposta correta. Por exemplo, o aluno A12 respondeu de forma parcialmente correta. Embora tenha aplicado a expressão em diferentes termos, tal como o aluno A9, o aluno A12 não utiliza a terminologia correta na sua resposta, nem expor devidamente o seu raciocínio (Figura 49). O aluno apresenta dificuldade de comunicação uma vez que não foi capaz de explicar com detalhe a sua interpretação, o que também foi determinado nos estudos de Silva et al. (2015), Rivera e Becker (2008) e de Ponte e Velez (2011) como uma dificuldade frequente. Nas respostas parcialmente corretas, consideram-se, ainda, as resoluções dos alunos que, embora apresentem uma resposta correta, não a justificaram, tal como o aluno A5 (Figura 49).

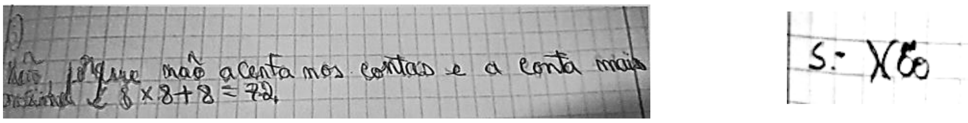


Figura 49. Respostas parcialmente corretas dos alunos A12 e A5 à Questão 5 da Tarefa 1.

Representações. Na análise das resoluções às diferentes questões apresentadas, verifica-se que os alunos recorreram a múltiplas representações. De modo a compreender de que forma é que estas os ajudam na compreensão de 'Sequências e Regularidades', a Tabela 16 reúne as frequências absolutas dos tipos de registos utilizados pelos alunos em respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas.

Tabela 16: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 1 (*n*=15).

	Tipos de resposta																	
	C						PC						I					
Questão	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T
1	1	4	6	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0
2	0	1	4	4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2	0	0
3	2	6	0	1	7	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0
5	0	10	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	2	**21**	12	16	7	2	0	**3**	1	2	2	0	0	4	0	**5**	1	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; EA: escrita algébrica; T: tabelas.

Da análise da Tabela 16, constata-se que o tipo de registo mais utilizado pelos alunos que obtiveram respostas corretas na primeira questão foram os esquemas e a linguagem natural. A escrita simbólica e a linguagem natural foram as únicas representações que traduzem respostas incorretas.

Na segunda questão da tarefa verifica-se que os esquemas e a escrita simbólica foram os registos favoritos dos alunos que obtiveram respostas corretas. Porém, também a escrita simbólica foi a representação que apresentou mais respostas incorretas.

Existem questões em que os alunos utilizaram diferentes tipos de registos nas suas resoluções. Isto verificou-se essencialmente na Questão 3, onde a maioria dos alunos embora apresente a expressão geradora da sequência em escrita algébrica, necessita de recorrer a outras representações de modo a serem capazes de determinar a expressão geradora.

Na quarta questão a escrita simbólica foi o registo que apresentou mais respostas corretas e incorretas.

Na última questão da tarefa, conferiu-se essencialmente o registo em linguagem natural, devido à natureza da questão. Esta questão levou a que, na globalidade, este registo fosse o mais utilizado pelos alunos na determinação de respostas corretas. A escrita simbólica foi a representação que apresentou mais respostas incorretas.

Conexões entre representações. De modo a explorar diferentes representações e estabelecer conexões entre elas, no momento da discussão dos resultados, optei por solicitar aos alunos que explicassem a sua resolução de modo a confrontar diferentes representações.

Na discussão da terceira questão da tarefa, o aluno A8 partiu de uma representação pictórica para determinar a expressão geradora (Figura 42). Solicitei ao aluno que explicasse qual teria sido o seu raciocínio:

Aluno A8: Eu reparei que a base da figura era *'n^2'*, então a expressão geradora é 'n^2 + n', o '+n' é da torre.
Professora: Como percebeste que a base era 'n^2'?
Aluno A8: Porque tem de largura e altura o mesmo número que a figura. E a torre também, a torre tem o mesmo número de cubos que a figura.

De seguida, pedi ao aluno A13 que explicasse como determinou o termo de ordem 20, tal como era pedido na quarta questão da tarefa. Deste modo, o aluno A13 partilhou a sua resolução (Figura 50):

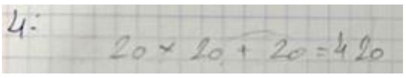


Figura 50. Resposta do aluno A13 à Questão 4 da Tarefa 1.

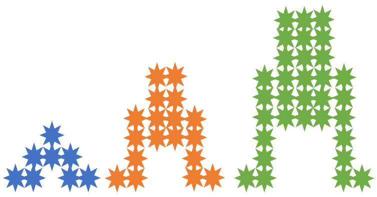
Aluno A13: E vi que na base o cubo tinha de medida de lado o*'n'*. Então como as faces com quatro pintas são uma face do cubo, fiz 'n x n'. Depois adicionei 'n' porque a torre tem tantos cubos quanto o número da figura.
Professora: Então fizeste como o aluno A8?
Aluno A8: Fez igual porque dizer 20 x 20 é igual a dizer 20^2.

Com esta discussão foi possível evidenciar diferentes formas de representar a mesma expressão geradora, criando conexões entre os diferentes registos, permitindo que o aluno compreenda efetivamente o conteúdo em estudo (Duval, 2012).

3.2.2 Determinação da expressão geradora de uma sequência

De modo a os alunos resolverem problemas que envolvem determinação de uma expressão geradora de uma sequência parcialmente conhecida, exploraram a seguinte tarefa:

Tarefa 2. Observa a sequência de robôs da figura:



Robô 1 Robô 2 Robô 3

1. Desenha os dois robôs seguintes da sequência. Explica o teu raciocínio.
2. Regista, da forma que te for mais conveniente, o número de \`sois\` que tem cada robô.
3. Determina a expressão geradora que te permite descobrir o número total de sois de qualquer robô da sequência.

Na resolução da presente tarefa, os alunos exploraram a simetria de reflexão das figuras da sequência. Esta tarefa proporciona ainda aos alunos a decomporem a figura em diferentes partes (p.e., corpo e membros), com o intuito de desenvolver a capacidade de observação na procura de relações e na descoberta de um padrão visual e geométrico.

A tarefa foi resolvida por 20 alunos da turma, que colocaram as fotografias das suas resoluções no *Google Classroom*. Da análise das suas respostas a cada uma das questões, verificou-se uma variedade de tipos de respostas, como se pode verificar na Tabela 17.

Tabela 17: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às questões da Tarefa 2 (*n*=20).

	Tipos de resposta			
Questão	C	PC	I	NR
1.	5	11	3	1
2.	13	2	3	2
3.	7	2	4	6

Nota: C: correta; PC: parcialmente correta; I: incorreta; NR: não responde.

No que diz respeito à primeira questão, obtiveram-se 5 respostas corretas, onde os alunos além de desenharem os termos seguintes, justificam devidamente o seu raciocínio, como se observa na resolução correta do aluno A10 (Figura 51).

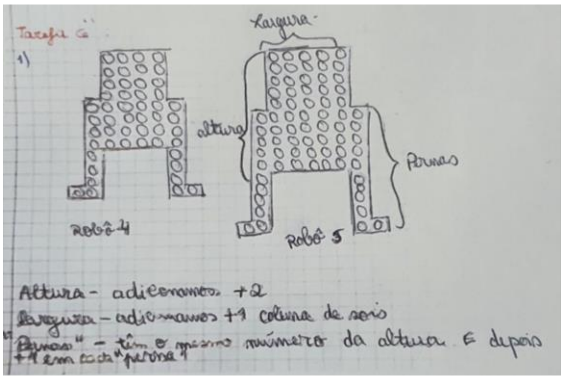


Figura 51. Resposta correta do aluno A10 à Questão 1 da Tarefa 2.

Se o robô for dividido em ‘cabeça’, ‘tronco’, ‘membros’ e ‘pés’, verifica-se que a ‘cabeça’ tem de medida de lado o número da figura correspondente. O ‘tronco’ é um quadrado com o mesmo número de ‘sóis’ que a cabeça, ou seja, a mesma medida de lado. Nos ‘membros’ do robô verifica-se que cada um é o dobro da figura a que o robô pertence, sendo que metade de cada membro se encontra encostado ao tronco. Por fim, os pés são representados por um ‘sol’ cada. O aluno A10 decompôs a figura em apenas duas partes: ‘tronco’ e ‘membros’. No entanto, manteve a regularidade da sequência, entendendo que na largura aumentava-se um ‘sol’ e na altura aumentavam-se 2. Compreendeu ainda que os ‘membros’ têm a mesma altura que o tronco. Na representação pictórica do robô, o aluno

A10 ainda colocou metade dos 'sóis' dos 'membros' encostados ao 'tronco', seguindo o padrão da sequência.

A maioria dos alunos respondeu de forma parcialmente correta, porque, embora desenhem as figuras seguintes corretamente, não explicam o seu raciocínio, como era solicitado, tal como ilustra a resposta do aluno A8 (Figura 52).

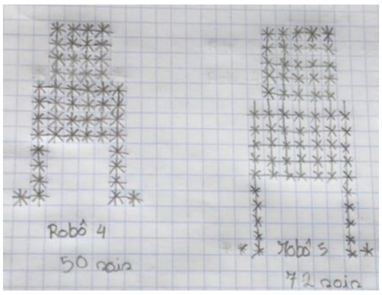


Figura 52. Resposta parcialmente correta do aluno A8 à Questão 1 da Tarefa 2.

Verificaram-se ainda três respostas incorretas, uma vez que embora tivessem os alunos determinassem o número correto de sóis, não seguiram o padrão apresentado na sequência, como se pode verificar na resolução do aluno A1 (Figura 53).

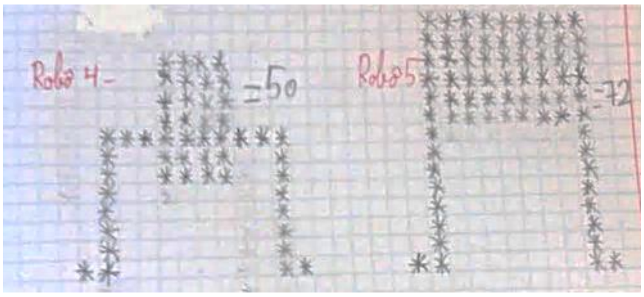


Figura 53. Resposta incorreta do aluno A1 à Questão 1 da Tarefa 2.

O aluno A1 determinou corretamente o número de sóis, no entanto, verifica-se que no robô 4 o aluno dispôs as 'pernas' afastadas do 'tronco', o que não se verifica nesta regularidade. No robô 5 colocou as 'pernas' com 14 sóis de altura, quando deveria ter apenas 10, ou seja, o dobro da ordem. Quanto ao 'tronco' do robô 4, o aluno A1 embora o tenha colocado com a largura correta (4 sóis), na altura colocou 7 em vez de 8. No robô 5, o 'tronco' deveria ter 5 sóis de largura e 10 de altura, e verificamos que o aluno colocou 9 sóis de largura e 6 sóis de altura. Entende-se, assim, que o aluno não compreendeu a regularidade desta sequência.

De modo geral, verifica-se que na Questão 1 da Tarefa 2 os alunos recorreram às estratégias 'aditiva e de decomposição de termos' (Ponte et al., 2009), uma vez que para determinarem apenas o número total de 'sóis' puderam adicionar sucessivamente a lei de formação da sequência. No entanto, para desenhar os termos seguintes da sequência, seguindo o padrão determinado, necessitaram de recorrer à 'estratégia de decomposição de termos'.

Na segunda questão da tarefa, 11 alunos obtiveram a resposta correta, como exemplifica a resposta do aluno A16 (Figura 54).

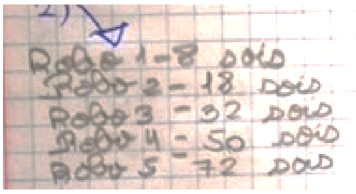


Figura 54. Resposta correta do aluno A16 à Questão 2 da Tarefa 2.

Tal como solicitado, os alunos apresentaram uma contagem correta do número de 'sóis' que compunha o robô das Figuras 1 a 5.

Entre as respostas à questão em análise, dois alunos responderam de forma parcialmente correta, uma vez que embora determinassem corretamente o número de 'sóis' dos termos já apresentados, não foram capazes de determinar o número de 'sóis' das duas figuras seguintes, tal como expressa a resposta do aluno A3 (Figura 55).

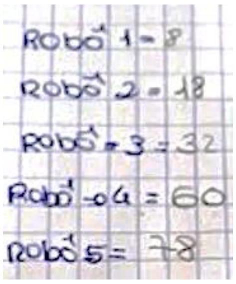


Figura 55. Resposta parcialmente correta do aluno A3 à Questão 2 da Tarefa 2.

Por fim, três alunos responderam incorretamente à questão, não apresentando o número de 'sóis' de cada ordem, conforme solicitado, tal como exemplifica a resolução do aluno A9 (Figura 56), onde é possível observar que em vez de apresentar o número de sóis reuniu outras informações sobre as figuras que não foram solicitadas.

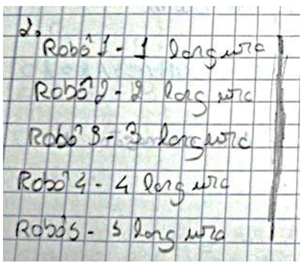


Figura 56. Resposta incorreta do aluno A9 à Questão 2 da Tarefa 2.

A última questão da Tarefa 2 solicitava aos alunos que determinassem a expressão geradora que permitisse saber o número de ‘sóis’ de qualquer termo da sequência. Dos 20 alunos que apresentaram a sua resolução no *Google Classroom*, 6 deles não responderam a esta questão. No entanto, 7 alunos determinaram corretamente a expressão geradora da sequência. Uma vez que nesta faixa etária os alunos ainda não são capazes de simplificar expressões algébricas, surgiram diferentes respostas que resultaram das diferentes decomposições possíveis da figura, como ilustram as respostas dos alunos A17, A4, A11 e A8 (Figura 57).

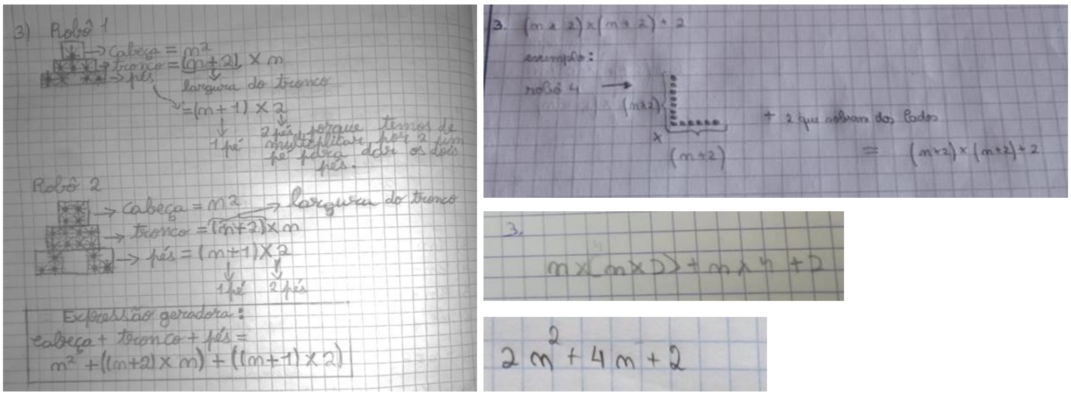


Figura 57. Respostas corretas dos alunos A17, A4, A11 e A8 à Questão 3 da Tarefa 2.

O aluno A17 decompôs a figura em “cabeça”, “tronco” e “pés” determinando a expressão geradora de cada uma das suas partes. O aluno A4 reorganizou os ‘sóis’ da figura de modo a que a ‘cabeça’, o ‘tronco’ e os ‘membros’ resultassem de um retângulo cuja altura seria o dobro do número da figura e a largura o número da figura mais dois. Restavam assim os ‘pés’, motivo pelo qual acrescentou à expressão geradora “+2”. O aluno A11 entendeu que o ‘tronco’ do robô teria de largura o número da figura e de altura o dobro do número da figura. De seguida, decompôs os ‘membros’ em quatro partes iguais, sendo que cada uma delas é igual ao número da figura. Mais uma vez, só foi necessário acrescentar duas unidades referentes aos pés. Por fim, a resolução do aluno A8 sugere que este tenha decomposto a figura em ‘cabeça’, ‘tronco’, ‘membros’ e ‘pés’. Tanto a ‘cabeça’ como o ‘tronco’ são o quadrado do número da figura. Os membros podem dividir-se em quatro partes iguais, tendo tanto número de ‘sóis’ como o número da figura. Finalmente, os ‘pés’ são sempre representados por dois ‘sóis’.

Nesta questão foram consideradas duas respostas parcialmente corretas, uma vez que os seus autores determinaram uma parte da expressão geradora, como exemplifica a resolução do aluno A2 (Figura 58).

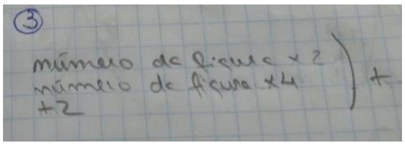


Figura 58. Resposta parcialmente correta do aluno A2 à Questão 3 da Tarefa 2.

O aluno A2 entendeu que a expressão geradora representa a soma de diferentes partes do robô. Foi capaz de identificar que as pernas seria o ‘número da figura x 4’ e os pés seria ‘+2’. No entanto, o ‘número da figura x 2’ representa apenas a altura do tronco do robô, faltando-lhe indicar como calcular o total de ‘sóis’ que constitui o tronco.

Por fim, quatro alunos responderam incorretamente à questão, como exemplifica a resolução incorreta do aluno A9, que considerou que a expressão geradora da sequência seria a adição sucessiva de 26 ‘sóis’ (Figura 59).

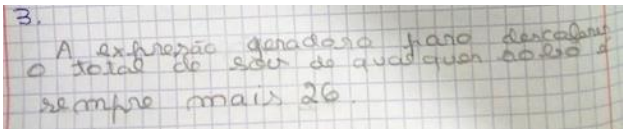


Figura 59. Resposta incorreta do aluno A9 à Questão 3 da Tarefa 2.

Representações. Como já foi possível verificar, nas resoluções às questões apresentadas, os alunos recorreram a diversas representações. A Tabela 18 reúne as frequências absolutas dos tipos de registos utilizados pelos alunos em respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas.

Tabela 18: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 2 (*n*=20).

	Tipos de resposta																	
	C						PC						I					
Questão	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T
1	4	4	1	0	0	0	11	2	0	1	0	0	3	1	0	0	0	0
2	0	1	10	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0
3	2	1	0	1	6	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0
Total	6	6	**11**	1	6	2	**12**	3	2	1	0	0	3	**5**	0	1	2	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; EA: escrita algébrica; T: tabelas.

Na Tarefa 2, os alunos recorreram a diferentes representações na resolução de uma mesma questão. Na primeira questão, todos os alunos utilizaram a representação pictórica, uma vez que a própria questão o pedia, no entanto, nas justificações verificaram-se diferentes representações, como a linguagem natural, os esquemas e a escrita simbólica. Na segunda questão, os alunos recorreram essencialmente a esquemas e a maioria que optou pela linguagem natural obteve resultados incorretos. Por fim, na terceira questão também se verificaram respostas ricas em representações. Uma vez que o solicitado foi a expressão geradora da sequência, atesta-se a predominância da escrita algébrica, porém, alguns alunos apresentaram representações pictóricas e linguagem natural para justificar o seu raciocínio.

Conexões entre representações. No momento de discussão da tarefa ao longo da primeira e da segunda questão solicitei a diferentes alunos, com diferentes resoluções e representações, que apresentassem o seu trabalho à turma e o explicassem. Na última questão, verifiquei que os alunos decompuseram a figura do robô em diferentes formas, o que originou diferentes expressões algébricas. Aproveitei esse facto para solicitar a vários alunos que apresentassem as suas resoluções de modo a refletirmos como uma mesma representação poderia sem interpretada de diferentes formas e originar novas representações, que embora aparentemente diferentes, traduziam o mesmo objeto matemático. O aluno A17 começou por apresentar a sua resolução e justificou o seu raciocínio, destacando em simultâneo no robô disponível na apresentação os pontos essenciais de modo a sustentar o seu diálogo (Figura 60):

Aluno A17: Eu comecei por experimentar com o robô 1 e com o robô 2, para ver se dava certo. Eu dividi em 3 partes: a cabeça, o tronco e os pés. A cabeça é ‘n^2’, ou ‘n x n’.

Professora: Porquê?

Aluno A17: Porque tem sempre a largura igual ao número da figura. E como é um quadrado, é lado x lado. Depois eu percebi que o tronco tem de comprimento ‘n’ mais 2.

Professora: Onde viste isso?

Aluno A17: Em todos os termos o comprimento tem o número da figura mais 2. Então para fazer o tronco multiplico ‘n + 2’ por ‘n’, porque a altura do tronco é igual ao número da figura.

Professora: E os pés?

Aluno A17: Nos pés eu vi que de altura tinha *n* e depois mais um da ponta. Então um pé é ‘n + 1’, mas como são dois pés, fica ‘(n + 1) x 2’.

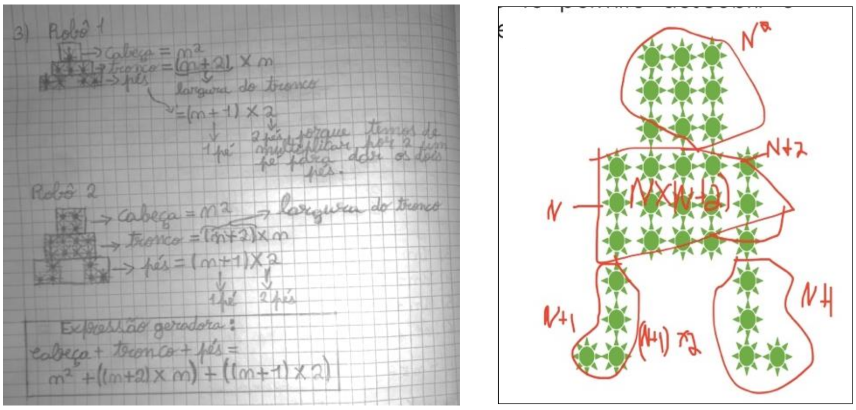


Figura 60. Resposta aluno A17 à Questão 3 da Tarefa 2 e respetivo esboço apresentado na aula.

De seguida, o aluno A4 apresentou igualmente a sua resolução e a devida explicação, desta vez num PowerPoint (Figura 61). Os traços e escritas a vermelho foram desenhados no momento da sua explicação:

Aluno A4: Eu utilizei o robô 4 como exemplo, e percebi que a parte de cima, a cabeça, é a parte que falta em baixo, no meio das pernas do robô.

Professora: Ok, o que pensaste depois?

Aluno A4: Eu pensei que a altura desse retângulo é 8, então é *‘n* x 2’. Depois a largura é 6. Então é *‘n* + 2’. Tive que fazer assim [as expressões] para bater certo com a ordem 4 que é onde eu estou. E depois reparei que dá nas outras [ordens] também. Depois para dar o total de ‘sóis’ multiplico o comprimento pela largura. Por isso é que escrevi ‘(*n* x 2) x (*n* + 2)’.

Professora: E depois?

Aluno A4: Fica a faltar os pés, como são dois ‘sóis’ é só adicionar 2.

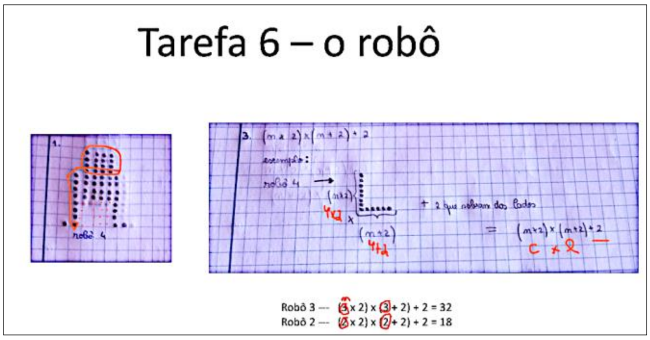


Figura 61. Resposta aluno A4 à Questão 3 da Tarefa 2 e respetivo esboço apresentado na aula.

O aluno A11, à semelhança do aluno A17, apresentou a sua resolução e justificou o seu raciocínio, desenhando no robô disponível na apresentação (Figura 61):

Aluno A11: Eu reparei na parte de dentro como uma só. E vi que era ‘3 x 6’. Como estou na ordem 3, então é ‘n x (n x 2)’.

Professora: O que é o ‘n’ na figura?

Aluno A11: A largura.

Professora: E o ‘n x 2’?

Aluno A11: É o comprimento. Depois reparei que os membros têm o mesmo número que a figura. Então é ‘n’. Como tem 4 membros, é ‘n x 4’. Depois só faltam os dois pés.

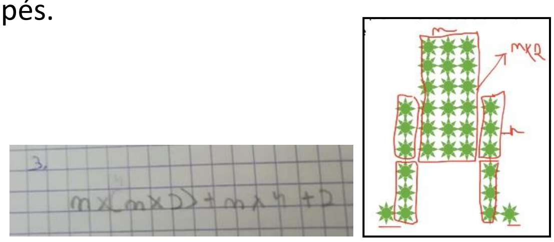


Figura 62. Resposta aluno A11 à Questão 3 da Tarefa 2 e respetivo esboço apresentado na aula.

Por fim, o aluno A8 apresentou a sua resolução e explicou o seu raciocínio com o auxílio das ferramentas de desenho do PowerPoint (Figura 63):

Aluno A8: Eu fiz como o aluno A11, mas dividi a parte do meio em duas partes iguais. Então ficam dois quadrados com a largura igual ao número da figura. Então fica ‘2 x n^2’. O resto é tudo igual ao do aluno A11.

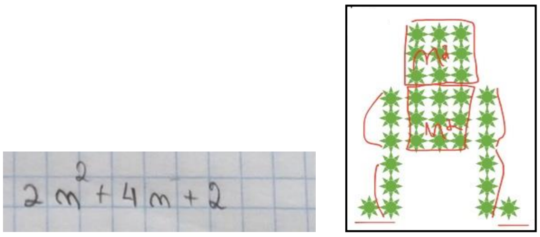


Figura 63. Resposta aluno A8 à Questão 3 da Tarefa 2 e respetivo esboço apresentado na aula.

Esta discussão permitiu que os alunos entendessem a versatilidade das representações e como uma mesma representação pode ser explorada de diferentes formas não perdendo o seu sentido e conteúdo.

3.2.3 Transformação de representações

Para determinar termos próximos de uma sequência de figuras e determinar uma expressão geradora da sequência de figuras, os alunos exploraram a seguinte tarefa:

Tarefa 3. Considera a sequência de construções formada por círculos amarelos e azuis. A primeira construção tem 1 círculo azul e 4 amarelos. A segunda tem 2 círculos azuis e 7 amarelos. A terceira construção tem 3 círculos azuis e 10 amarelos.

1. Quantos círculos azuis tem o termo de ordem 6?
2. Quantos círculos no total tem o termo de ordem 6?
3. Determina a expressão geradora da sequência que traduz o número de círculos azuis.
4. Determina a expressão geradora da sequência que traduz o número de círculos amarelos.
5. Determina a expressão geradora da sequência que traduz o número total de círculos.
6. Considerando os números 90, 203, 501 e 1240, algum deles é termo da sequência que formaste com os círculos amarelos e azuis? Justifica a tua resposta.

A tarefa apresenta um enunciado descritivo que permite ao aluno traduzi-lo em diferentes representações. A primeira e segunda questão implica que o aluno realize generalizações próximas e que determine a lei de formação da sequência. As questões 3 e 4 solicitam ao aluno a determinação das expressões geradoras das diferentes partes da sequência. Na quinta questão os alunos podem combinar as duas expressões geradoras de modo a obter a expressão geradora que traduz o número total de círculos. Por fim, na

Questão 6, os alunos devem aplicar a expressão geradora de modo a provarem qual dos termos apresentados é termo da sequência.

Esta tarefa foi resolvida por 20 alunos da turma, que mais uma vez colocaram as fotografias das suas resoluções no *Google Classroom*. Na análise das resoluções das tarefas identifiquei diferentes tipos de respostas dos alunos às questões da tarefa, que estão contabilizados na Tabela 19.

Tabela 19: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às questões da Tarefa 3 (*n*=20).

	Tipos de resposta			
Questão	C	PC	I	NR
1.	20	0	0	0
2.	17	0	2	1
3.	7	7	5	1
4.	7	5	7	1
5.	8	4	5	3
6.	8	0	11	1

Nota: C: correta; PC: parcialmente correta; I: incorreta; NR: não responde.

Na primeira questão da tarefa todos os alunos responderam corretamente, determinando o número de círculos azuis do sexto termo da sequência. Os alunos recorreram essencialmente à 'estratégia aditiva' (Ponte et al*.,* 2009), como exemplifica a resposta do aluno A18 (Figura 64).

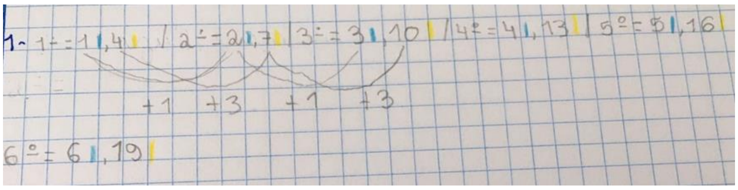


Figura 64. Resposta correta do aluno A18 à Questão 1 da Tarefa 3.

O aluno A18 adicionou sucessivamente uma unidade aos círculos azuis e 3 unidades aos círculos amarelos, obtendo desta forma quantos círculo de cada cor teria no termo de ordem 6.

Na segunda questão, 17 alunos responderam corretamente à questão, recorrendo principalmente à 'estratégia aditiva', como ilustra a resposta do aluno A19 (Figura 65).

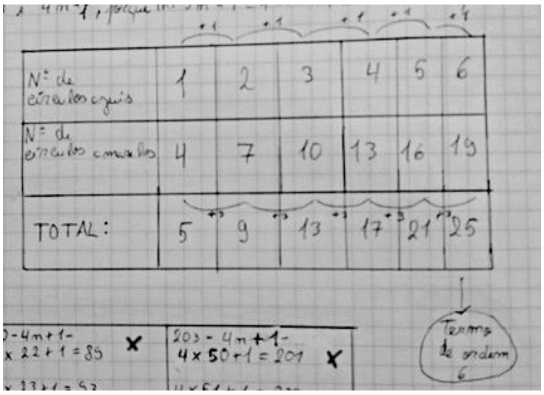


Figura 65. Resposta correta do aluno A19 à Questão 2 da Tarefa 3.

O aluno A19, à semelhança do aluno A18, adicionou a lei de formação de cada círculo aos termos da sequência, de modo a obter o termo seguinte. Desta forma, obteve o número de círculos azuis e amarelos que constitui a figura de ordem 6. A soma que resultou da adição de ambos os círculos representa o número total de círculos do termo desta ordem.

Dois alunos responderam incorretamente, uma vez que não determinaram o número correto de círculos que iria conter o sexto termo da sequência, tal como ilustra a resolução incorreta do aluno A20 (Figura 66).

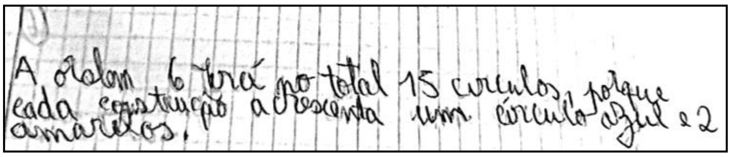


Figura 66. Resposta incorreta do aluno A20 à Questão 2 da Tarefa 3.

O aluno A20 embora tenha entendido que a lei de formação dos círculos azuis é a adição de uma unidade, não determinou corretamente a lei de formação dos círculos amarelos, afirmando que seria a adição de duas unidades em vez de 3. Como tal, o resultado do número total de círculos não foi o correto.

Relativamente à terceira questão da Tarefa 3, verifica-se uma maior variedade de respostas. As respostas corretas e parcialmente corretas obtiveram a mesma frequência absoluta. Na Figura 67 ilustra-se a resolução correta do aluno A16, onde além de definir a expressão geradora que permite determinar o número de círculos azuis, explicou devidamente o seu raciocínio, tal como era solicitado na questão.

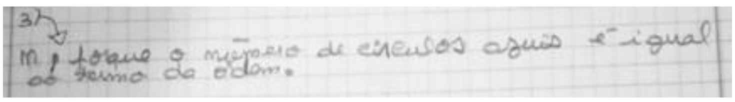


Figura 67. Resposta correta do aluno A16 à Questão 3 da Tarefa 3.

Nas respostas parcialmente corretas pode-se conferir que os alunos determinaram a expressão geradora solicitada, porém não justificaram como o fizeram, sendo esse um requisito da questão, como exemplifica a resposta do aluno A6 (Figura 68).

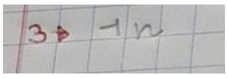


Figura 68. Resposta parcialmente correta do aluno A6 à Questão 3 da Tarefa 3.

Desta questão resultaram ainda 5 respostas incorretas. Alguns alunos confundiram a expressão geradora com a lei de formação, como é exemplo a resposta do aluno A20, e ainda outros alunos determinaram uma expressão geradora incorreta, como ilustra a resposta do aluno A18 (Figura 69).

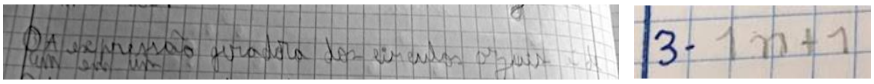


Figura 69. Respostas incorretas dos alunos A20 e A18 à Questão 3 da Tarefa 3.

Na quarta questão desta tarefa, sete alunos obtiveram a resposta correta, apresentando a expressão geradora do número de círculos amarelos e a devida justificação, como traduz a resposta do aluno A13 (Figura 70).

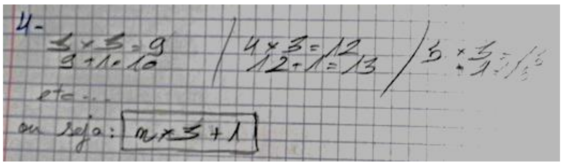


Figura 70. Resposta correta do aluno A13 à Questão 4 da Tarefa 3.

O aluno A13, além de apresentar a expressão geradora da sequência, exemplificou o seu pensamento com diversas expressões simbólicas, que testam a expressão em diversos termos da sequência.

As repostas que, embora apresentem a expressão geradora correta, não expõem a devida justificação foram consideradas parcialmente corretas, como é exemplo a resolução do aluno A19 (Figura 71).

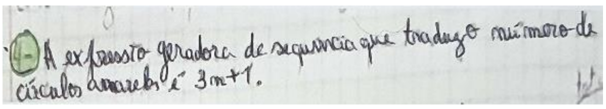


Figura 71. Resposta parcialmente correta do aluno A19 à Questão 4 da Tarefa 3.

À quarta questão responderam incorretamente 5 alunos, mostrando confusão entre a expressão geradora de uma sequência e a sua lei de formação, como exemplifica a resposta do aluno A10 que admite que a expressão geradora que traduzia o número de círculos amarelos seria a adição sucessiva de 3 unidades ao termo anterior (Figura 72).

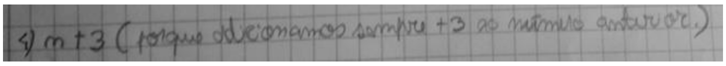


Figura 72. Resposta incorreta do aluno A10 à Questão 4 da Tarefa 3.

Relativamente à quinta questão da Tarefa 3, 8 alunos responderam corretamente, determinando a expressão geradora que permite obter o número total de bolas de qualquer termo da sequência e justificando o seu raciocínio, como traduz a resolução do aluno A8 (Figura 73).

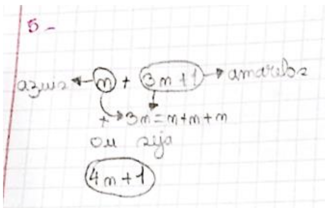


Figura 73. Resposta correta do aluno A8 à Questão 5 da Tarefa 3.

O aluno A8 condensou nesta questão as expressões geradoras do número de círculos amarelos e azuis. Deste modo, mostra que a soma das duas expressões resulta numa expressão geradora que traduz o número total de círculos de qualquer termo da sequência.

Em semelhança às questões anteriores, foram consideradas respostas parcialmente corretas aquelas que apresentam a expressão geradora da sequência, mas sem justificação do raciocínio como solicitado, como exemplifica a resolução do aluno A17 (Figura 74).

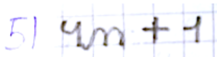


Figura 74. Resposta parcialmente correta do aluno A17 à Questão 5 da Tarefa 3.

Verificaram-se ainda 5 respostas incorretas, das quais algumas estabelecem a expressão geradora incorreta da sequência, tal como a do aluno A18, e outras confundem-na com a lei de formação, como mostra a resolução do aluno A20 (Figura 75).

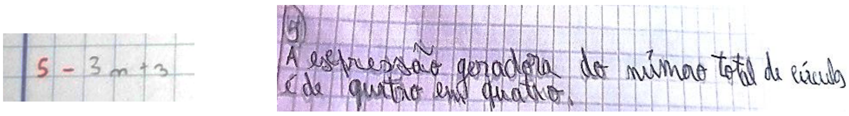


Figura 75. Respostas incorretas dos alunos A18 e A20 à Questão 5 da Tarefa 3.

Finalmente, na última questão da Tarefa 3 verificaram-se 8 respostas corretas, como ilustra a do aluno A1 (Figura 76).

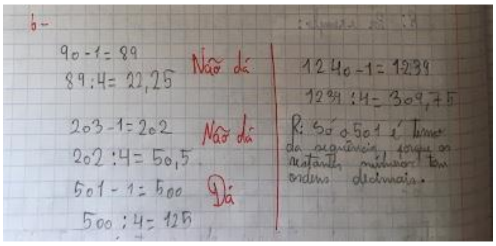


Figura 76. Resposta correta do aluno A1 à Questão 6 da Tarefa 3.

O aluno A1 partiu da expressão geradora que traduz o número total de círculos da sequência. Com os números que lhe foram dados, realizou as operações inversas às da expressão geradora. Como tal, começou por subtrair uma unidade ao número dado e depois dividir o resultado por 4. O aluno ao compreender que não existem ordens decimais, concluiu que o 501 é o único termo da sequência.

Quanto às restantes respostas, constata-se que 11 alunos apresentaram uma resposta errada. Alguns destes alunos verificaram que a soma do número de círculos azuis e amarelos é sempre um número ímpar, deduzindo que todos os números ímpares apresentados na questão seriam termos da sequência, como exemplifica a resolução incorreta do aluno A7 (Figura 77). Outros alunos pensaram na expressão geradora que traduz o número total de círculos da sequência (4n+1), e relacionaram o '4n' com múltiplos de 4. No entanto, desconsideraram o '+1' da expressão geradora, o que levou a conclusões erradas, como pode ser verificado na resolução incorreta do aluno A17 (Figura 77).

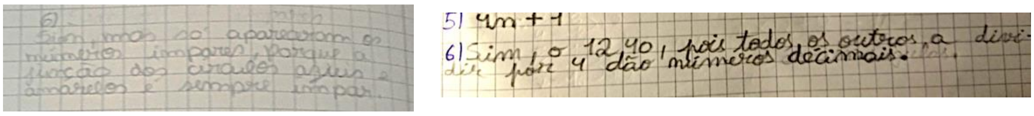


Figura 77. Respostas incorretas dos alunos A7 e A17 à Questão 6 da Tarefa 3.

Representações. A par da análise dos tipos de respostas dos alunos importa analisar a exploração dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 3. Os alunos recorreram a múltiplas representações ao longo das questões que constituem a tarefa, podendo-se ainda verificar a utilização de diferentes representações dentro da resolução de uma mesma questão. A tabela seguinte reúne a frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos (Tabela 20).

Tabela 20: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na Tarefa 3 (*n*=20).

	Tipos de resposta																	
	C						PC						I					
Questão	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T
1	3	8	11	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	4	7	11	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	7	0	0	7	0	0	3	0	0	4	0	0	2	0	2	1	0
4	0	1	0	6	6	0	0	0	0	0	5	0	0	4	0	1	3	0
5	0	6	1	1	7	0	0	0	0	0	4	0	0	2	0	1	2	0
6	0	0	0	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	3	0	0
Total	3	**26**	19	21	25	4	0	3	0	0	**13**	0	0	**17**	0	8	6	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; EA: escrita algébrica; T: tabelas.

Como é possível verificar na Tabela 20, na primeira questão surgiram múltiplas representações, uma vez que os alunos converteram o teor do enunciado da tarefa numa nova representação. As representações mais utilizadas foram a linguagem natural e os esquemas. Já na segunda questão observa-se que o registo mais utilizado foi a escrita simbólica, uma vez que os alunos partiram das representações anteriormente criadas e adicionaram o número de círculos azuis ao número de círculos amarelos, de modo a obterem o número total de círculos do termo da sequência. Na terceira questão a linguagem natural e a escrita algébrica foram as preferidas dos alunos em todos os tipos de resposta. Na quarta questão verificam-se semelhanças à anterior, no entanto diminui a frequência do uso da linguagem natural aumentando o da escrita simbólica. Por fim, verifica-se que na última questão a representação mais utilizada em respostas corretas foi a escrita algébrica e em respostas incorretas a linguagem natural.

De modo geral, o registo mais comum nas respostas corretas foi a linguagem natural, seguindo-se a escrita algébrica. A escrita algébrica também predominou nas respostas parcialmente corretas, enquanto que a linguagem natural foi a que obteve maior frequência nas respostas incorretas.

Conexões entre representações. O tipo de registo utilizado no enunciado da tarefa permitiu que os alunos realizassem conversões e transformações de representações, estabelecendo relações entre elas. No momento da discussão da tarefa confrontei a turma com os diferentes registos utilizados. Apresentei um PowerPoint (Figura 78) onde reuni as suas resoluções e surgiu o seguinte diálogo:

Professora: Aluno A3, podes explicar-me o que fizeste aqui?
Aluno A3: Eu li o enunciado e para ser mais fácil fiz uma lista com as informações.
Professora: E ajudou-te em quê?

Aluno A3: Ajudou-me a perceber o que acontece mais facilmente. Por exemplo, eu vi que as bolas azuis são iguais ao número da figura e que as amarelas aumentam 3 de um [termo] para o outro.
Professora: Aluno A12, e tu o que fizeste?
Aluno A12: Eu desenhei.
Professora: Quantos círculos tem a primeira figura?
Aluno A12: Cinco, 1 azul e 4 amarelos.
Professora: E quantos tem a figura 2?
Aluno A12: Dois azuis e 5 amarelos.
Professora: É isso que o enunciado nos diz?
Aluno A12: Não, enganei-me. Faltam-me duas bolas amarelas em baixo.
Professora: Muito bem. Agora aqui temos a resolução do aluno A18. Como pensaste?
Aluno A18: Como o aluno A3, mas fiz seguido e desenhei as bolas para ajudar a perceber melhor.
Professora: Conseguiste descobrir alguma coisa entretanto?
Aluno A18: Sim, percebi que as bolas azuis aumentam sempre uma, e as amarelas aumentam 3.
Aluno A4: Eu desenhei diferente, mas percebi isso também.
Professora: Muito bem, estão a ver que podemos representar o enunciado de diferentes formas e chegar às mesmas conclusões?

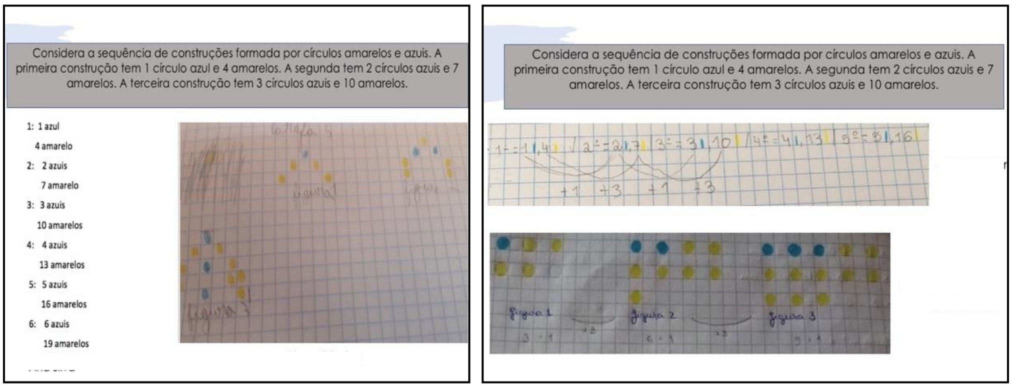


Figura 78. Diapositivos 1 e 2 do PowerPoint apresentado na aula com as resoluções dos alunos A3, A12, A18 e A4.

Este diálogo permitiu refletir com os alunos as múltiplas representações e estabelecer relações entre elas de modo a que, através de diversas semiósis, compreendessem efetivamente o conceito matemático em estudo, sendo esta manifestação rápida e espontânea por meio da atividade cognitiva de conversão (Duval, 2012).

Síntese

A frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos na resolução das três tarefas em análise está contemplada na Tabela 21.

Tabela 21: Frequência dos tipos de registos utilizados pelos alunos nas Tarefas (n=23).

	Tipos de resposta																	
	C						PC						I					
Tarefa	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T	RP	LN	E	ES	EA	T
1	2	21	12	16	7	2	0	3	1	2	2	0	0	4	0	5	1	0
2	6	6	11	1	6	2	12	3	2	1	0	0	3	5	0	1	2	0
3	3	26	19	21	25	4	0	3	0	0	13	0	0	17	0	8	6	0
Total	11	**53**	42	38	38	8	12	9	3	3	**15**	0	3	**26**	0	14	9	0

Nota: RP: representação pictórica; LN: linguagem natural; E: esquemas; ES: escrita simbólica; EA: escrita algébrica; T: tabelas.

As representações utilizadas foram bastante diversificadas, no entanto o registo mais frequente nas respostas corretas e incorretas foi a linguagem natural. Nas repostas corretas seguem-se os esquemas, a escrita simbólica e a escrita algébrica. Repara-se que neste ciclo de ensino já se verifica uma maior afluência dos registos pré-formais, como os esquemas, e formais, como a escrita algébrica e simbólica. Relativamente à linguagem natural é de salientar que surgiu muitas vezes como complemento a outras representações.

No que toca às respostas parcialmente corretas, verifica-se que a escrita algébrica foi a mais habitual, no entanto muitas respostas foram consideradas parcialmente corretas devido à falta de justificação do raciocínio que originou a solução das questões apresentadas. Ainda assim, a preponderância desta representação pode dever-se à dificuldade de os alunos atribuírem significado às letras em contextos matemáticos (Saraiva & Pereira, 2010).

Finalmente, a linguagem natural é o registo mais recorrente nas respostas incorretas devido à dificuldade de os alunos justificarem os seus raciocínios e formularem justificações válidas (Rivera & Becker, 2008).

3.3. Avaliação do ensino ministrado

No término da intervenção pedagógica nas turmas do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico os alunos responderam a um questionário final, adaptado a cada ciclo de ensino. Estes formulários tiveram como finalidade avaliar de modo global a aprendizagem de ‘Sequências e Regularidades’ através das múltiplas representações.

3.3.1. Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 1.° Ciclo

Na turma do 1.° Ciclo do Ensino Básico, 24 alunos da turma responderam ao questionário que englobou questões abertas e fechadas. Este formulário teve como finalidade avaliar de modo global a aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' através das múltiplas representações.

Perceção dos alunos sobre o conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. O questionário fornecido à turma contempla diferentes questões abertas que permitiram aos alunos expor a sua opinião em relação à aprendizagem do conteúdo 'Sequências e Regularidades' e ainda relativa à metodologia adotada. A primeira questão pretendia entender o que os alunos mais gostaram neste processo. A Tabela 22 apresenta a frequência relativa, em percentagem, das respostas apresentadas pelos alunos à questão: "O que mais gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?".

Tabela 22: Frequência relativa das respostas dos alunos à questão: "O que mais gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?" (*n*= 24).

Respostas	**%**
O desafio de aprender 'Sequências e Regularidades'.	75
Aprender a trabalhar com tabelas.	9
Aprender sobre termo e ordem.	4
Fazer desenhos.	4
Resolver problemas	4
Realizar diversas operações.	4

Aproximadamente 75% da turma afirmou ter gostado do desafio que a exploração deste conteúdo proporcionou, como exemplifica a resposta de um aluno:

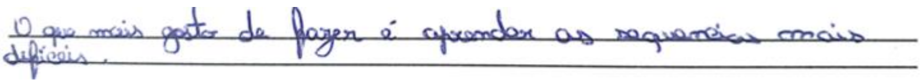

O que mais gosto de fazer é aprender as sequências mais difíceis.

Figura 79. Resposta de um aluno à questão: "O que mais gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste 'Sequências e Regularidades?".

Alguns alunos elegeram a construção de tabelas como a sua atividade favorita (9%). Já os restantes alunos salientaram a determinação de termos e ordens, esboço de desenhos, resolução de problemas e de diversos cálculos matemáticos.

A segunda questão questionava os alunos quanto ao que teriam gostado menos nas aulas de 'Sequências e Regularidades'. A Tabela 23 apresenta a frequência relativa, em percentagem, das respostas apresentadas pelos alunos à questão: "O que menos gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?

Tabela 23: Frequência relativa das respostas dos alunos à questão: “O que menos gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?” (*n*= 24).

Respostas	**%**
Não houve nada que não gostassem.	47
Descobrir a lei de formação.	21
Trabalhar a pares.	12
Fazer desenhos.	8
Fazer tabelas.	8
Escrever textos.	4

Aproximadamente 47% dos alunos afirmou ter gostado de todos os momentos trabalhados na aula, como exemplifica a seguinte resposta:

Figura 80. Resposta de um aluno à questão: “O que menos gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste ‘Sequências e Regularidades?”.

Algumas das respostas apontam que houve alunos que não gostaram de determinar a lei de formação da sequência (21%) nem trabalhar a pares (12%). Alguns alunos ainda afirmam o seu desagrado na construção de desenhos, tabelas e textos.

A terceira pergunta referia-se às maiores dificuldades sentidas pelos alunos. A Tabela 24 apresenta a frequência relativa, em percentagem, das respostas apresentadas pelos alunos à questão: “Que dificuldades sentiste nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?

Tabela 24: Frequência relativa das respostas dos alunos à questão: “Que dificuldades sentiste nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?” (*n*= 24).

Respostas	**%**
Não sentiram dificuldades.	50
Interpretação de enunciados.	25
Determinação da lei de formação.	13
Noção de conceito de termo e ordem.	8
Explicar o raciocínio.	4

A maioria dos alunos (50%) afirmou não ter sentido dificuldades. Ainda um quarto da turma afirmou que a sua maior dificuldade foi a interpretação das tarefas, como ilustra a seguinte resposta de um aluno:

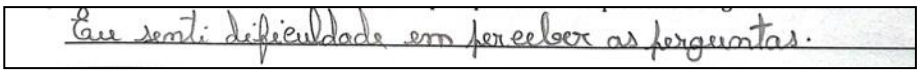


Figura 81. Resposta de um aluno à questão: “Que dificuldades sentiste nas aulas em que aprendeste ‘Sequências e Regularidades?”.

Os restantes alunos afirmaram que sentiram dificuldades na determinação da lei de formação, na compreensão de conceitos como ‘termo’ e ‘ordem’ e ainda de explicar o seu raciocínio.

Por fim, quando questionados se teriam gostado de trabalhar a pares, cerca de 70% dos alunos considerou uma experiência vantajosa, tal como ilustra a seguinte resposta:


Sim. Porque ajudamonos um a outro.

Figura 82. Resposta de um aluno à questão: “Nas aulas de ‘Sequências e Regularidades’ gostaste de trabalhar a pares?”.

Já 30% dos alunos, em contraste com os restantes, não sentiram que tivesse sido uma experiência positiva, como expressa a seguinte resposta:

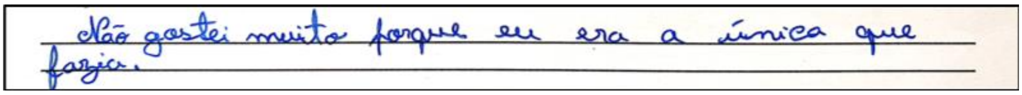

Não gostei muito porque eu era a única que fazia.

Figura 83. Resposta de um aluno à questão: “Nas aulas de ‘Sequências e Regularidades’ gostaste de trabalhar a pares?”.

Perceção dos alunos sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem de ‘Sequências e Regularidades’. O questionário permitiu ainda entender qual a perceção dos alunos em relação aos tipos de representações que facilitaram na compreensão do conteúdo de ‘Sequências e Regularidades’ (Tabela 25).

Tabela 25: Frequência relativa da perceção dos alunos sobre a utilização de diferentes representações (*n*= 24).

Questão	**D**	**T**	**Tx**	**N/O**
Que representações te ajudaram a compreender melhor as ‘Sequências e Regularidades’?	46	38	8	8
Que representações tiveste mais dificuldade a compreender as ‘Sequências e Regularidades’?	12	21	38	29

Nota: D: Desenhos; T: Tabelas; Tx: Textos; N/O: Números/ Operações.

Como é possível verificar na Tabela 25, um número significativo de alunos (46%) elegeu a representação pictórica como a representação que mais contribuiu na sua compreensão do conteúdo de ‘Sequências e Regularidades’, seguindo-se as tabelas com 38% de preferência. Estes dados estão de acordo com os dados recolhidos na análise das resoluções dos alunos, onde se verificou que a representação mais presente em respostas corretas foi, de facto, a representação pictórica. Relativamente às representações que os alunos sentiram maiores dificuldades, constata-se que foi a linguagem natural (38%) e, logo de seguida, a escrita simbólica (29%). Estas opiniões correspondem aos dados recolhidos, onde se verificou que a representação onde se obteve mais respostas incorretas foi a linguagem natural.

3.3.2. Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 2.° Ciclo

Na turma do 2.° Ciclo do Ensino Básico, os alunos responderam a um questionário no *Google Formulários,* que contemplava um conjunto de perguntas de respostas de concordância e de resposta aberta. Este formulário teve como finalidade avaliar de modo global a aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' através das múltiplas representações.

Perceção dos alunos sobre o conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. O questionário que foi fornecido aos alunos engloba diferentes afirmações, com a finalidade de entender a perceção dos alunos quanto à metodologia de ensino adotada e ao conteúdo se 'Sequências e Regularidades'. O questionário foi respondido por 20 alunos da turma. A Tabela 26 apresenta o grau de concordância em percentagem dos alunos às afirmações apresentadas.

Tabela 26: Grau de concordância (%) sobre as estratégias de ensino e aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' (*n*=20).

Afirmações	**DT/D**	**I**	**C/CT**
Gostei de aprender o tópico sequências e regularidades.	0	10	90
Tive dificuldade na interpretação das tarefas propostas.	70	20	10
A fase de introdução das tarefas foi importante para a sua resolução.	0	15	85
A fase de desenvolvimento das tarefas propostas permitiu-me compreender as diferentes estratégias possíveis a realizar na sua resolução.	0	5	95
A fase de discussão sobre as resoluções das tarefas propostas ajudou-me a clarificar as minhas dificuldades.	5	10	85
Na discussão sobre a resolução das tarefas propostas tive a oportunidade de comparar as minhas resoluções com as resoluções dos meus colegas.	5	0	95
A fase de discussão sobre as resoluções das tarefas propostas ajudou-me a compreender e consolidar os conteúdos de sequências e regularidades.	5	5	90
A resolução de tarefas propostas desenvolveu a minha capacidade de raciocínio.	0	10	90
A resolução de tarefas propostas desenvolveu a minha capacidade de generalizar sequências.	0	15	85
A discussão sobre a resolução das tarefas propostas promoveu a minha capacidade de argumentar as minhas ideias.	5	20	75

Nota: DT: Discordo Totalmente; D: Discordo; I: Indiferente; C: Concordo; CT: Concordo Totalmente.

Da análise da Tabela 26 constata-se que a maioria dos alunos (90%) gostou de trabalhar o conteúdo de 'Sequências e Regularidades', enquanto apenas 10% dos alunos teve dificuldades na exploração deste conteúdo. Relativamente à metodologia adotada, a maioria dos alunos (85%) considerou que o momento de introdução da tarefa foi importante para a sua resolução e 95% entendeu que a fase de exploração permitiu a descoberta de diferentes estratégias de resolução. Na fase da discussão, 85% da turma verificou que conseguiu clarificar as suas dificuldades, e ainda 95% afirma ter conseguido comparar as suas resoluções com a dos colegas. Os alunos reconhecem também que a exploração das diferentes tarefas lhes permitiu desenvolver capacidades de raciocínio, de generalização e de argumentação.

Perceção dos alunos sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'. O questionário final incidiu ainda sobre questões que permitissem a análise da perceção dos alunos sobre os tipos de representação que favoreceram a sua aprendizagem do conteúdo de 'Sequências e Regularidades' (Tabela 27).

Tabela 27: Grau de concordância (%) sobre a utilização de diferentes registos de representação na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' (n=20).

Afirmações	**DT/D**	**I**	**C/CT**
Na resolução das tarefas utilizei diversas representações.	5	20	75
Na resolução das tarefas recorri sobretudo à escrita numérica.	0	20	80
Na resolução das tarefas recorri sobretudo a desenhos/esquemas.	25	25	50
Na resolução das tarefas recorri sobretudo a tabelas.	20	40	40
Na fase de discussão sobre a resolução das tarefas propostas identifiquei diferentes representações para a sua resolução.	10	10	80
A apresentação de múltiplas representações na discussão das resoluções das tarefas propostas a compreender melhor os tópicos em estudo.	5	10	85
Os desenhos/esquemas foram a representação que mais contribuiu para a compreensão dos tópicos em estudo.	10	20	70
A escrita numérica foi a representação que mais contribuiu para a compreensão dos tópicos em estudo.	5	40	55
As tabelas foram a representação que mais contribuiu para a compreensão dos tópicos em estudo.	25	30	45

Nota: DT: Discordo Totalmente; D: Discordo; I: Indiferente; C: Concordo; CT: Concordo Totalmente.

Verifica-se que 75% dos alunos reconhece a utilização de diversas representações e ainda 85% dos alunos constata que a exploração das mesmas contribuiu para a compreensão do conteúdo em estudo. As representações que os alunos consideram ter utilizado com maior frequência foram a escrita simbólica e a escrita algébrica. No entanto, 70% dos alunos expressaram que as representações que mais contribuíram para compreensão do conteúdo em estudo foram as representações pictóricas, talvez devido ao facto dos conceitos serem abordados em contexto familiar e de forma concreta (Webb et al., 2008).

Este questionário contemplava algumas perguntas de resposta aberta, onde os alunos puderam expor a sua opinião relativamente ao contributo das representações no estudo de ‘Sequências e Regularidades’. A Tabela 28 contempla a frequência absoluta das respostas dos alunos à questão: “Indica, justificando, três vantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades.”.

Tabela 28: Frequência absoluta das respostas dos alunos à questão: “Indica, justificando, três vantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo sequências e regularidades” (*n*=20).

Respostas	**FA**
Maior número de opções para resolver as tarefas.	14
Maior facilidade na compreensão de conteúdos.	9
Maior facilidade na justificação do raciocínio.	4
Contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de resolver cálculos.	2

Os alunos apontaram como vantagens a maior possibilidade de resolução das tarefas e a maior facilidade na compreensão do conteúdo. Pontualmente, houve alunos que indicaram a justificação de raciocínios e a contribuição para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. De modo geral, pode-se afirmar que os alunos sentiram que a exploração de múltiplas representações contribuiu de forma positiva para a sua compreensão do conteúdo, como exemplificam as respostas de dois alunos da turma (Figura 84).

Ajuda-nos a compreender melhor, pois são diferentes formas, logo temos mais formas para fazer os exercícios. Podemos escolher qual das formas preferimos. Então torna-se mais fácil realizar os exercícios.

Melhora o nosso raciocínio, temos mais opções e podemos utilizar as diferentes formas como base para a resolução de outros problemas.

Figura 84. Resposta de dois alunos da turma à questão: “Indica, justificando, três vantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo sequências e regularidades.”.

Para além das vantagens, os alunos apresentaram algumas desvantagens em relação à utilização de diferentes representações. A Tabela 29 apresenta a frequência absoluta das respostas dos alunos à questão: “Indica, justificando, três desvantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades.”.

Tabela 29: Frequência absoluta das respostas dos alunos à questão: “Indica, justificando, três desvantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades” (*n*=20).

Respostas	**FA**
Não apresenta desvantagens.	11
Gera confusão.	6
Origina maior sobrecarga de conceitos e trabalho.	4
Pode induzir em erro.	2

Embora um muitos de alunos afirmem que a exploração de diferentes representações não apresenta desvantagens, alguns alunos alegam que por momentos poderia tornar-se confuso e tornar-se uma sobrecarga de informação e até induzir em erro, como exemplifica a resposta de um dos alunos:

podemos nos esquecer e baralhar com outras formas

Figura 85. Resposta de um aluno à questão: "Indica, justificando, três desvantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades.".

Relativamente à questão "Que dificuldades sentiste na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades?", a Tabela 30 expressa a frequência absoluta das respostas dos alunos.

Tabela 30: Frequência absoluta das respostas dos alunos à questão: "Indica, justificando, três desvantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades." (*n*=20).

Respostas	**FA**
Não apresenta dificuldades.	7
Compreensão da expressão geradora.	6
Compreensão do enunciado.	5
Compreensão da incógnita.	2
Utilização de novas representações.	2
Utilizar as ferramentas de ensino à distância (*Google Meet*).	1

Como é possível verificar na Tabela 30, 7 alunos não apresentaram dificuldades. No entanto, alguns alunos afirmaram que a determinação da expressão geradora e a compreensão do que significava o *'n'* foram as maiores dificuldades sentidas no conteúdo de 'Sequências e Regularidades', como se comprova na resposta de um dos alunos:

Senti dificuldades em aprender o que era o n e tambem a fazer exercicios com a expressao geradora.

Figura 86. Resposta de um aluno à questão: "Que dificuldades sentiste na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades?".

Existem ainda algumas respostas que mencionam a dificuldade na utilização de novas representações e das ferramentas de ensino a distância.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Este capítulo contempla as conclusões e a reflexão final que resultou da análise e interpretação dos resultados da intervenção pedagógica, tendo em consideração o objetivo e as questões de investigação delineados. Por fim, expõe as limitações do estudo e recomendações para futuras investigações sobre as múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades', mas também noutros conteúdos matemáticos.

4.1. Conclusões

As conclusões deste estudo reassumem as questões de investigação delineadas em torno da utilização de múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' por alunos do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico.

4.1.1. Que representações recorrem os alunos do 1.° e 2.° Ciclos na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'? Que conexões estabelecem entre as múltiplas representações de 'Sequências e Regularidades'?

A análise e interpretação dos dados recolhidos na intervenção pedagógica permitiu averiguar quais as representações que os alunos, das turmas do 1.° e 2.° Ciclos que integraram este estudo, recorrem na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades' e que conexões estabelecem entre elas. Durante a intervenção pedagógica, os alunos resolveram tarefas relacionadas com o conteúdo de 'Sequências e Regularidades', o que lhes permitiu contactar e serem incentivados a explorar múltiplas representações. Este processo favoreceu a compreensão do tópico em estudo, permitindo-lhes distinguir o objeto matemático da representação que o torna acessível (Goldin, 2008). Uma representação dá visibilidade a um pensamento, ideia ou conceito (Canavarro & Pinto, 2012), o que faz com que as representações matemáticas traduzam objetos matemáticos, uma vez que estes não estão acessíveis numa perceção intuitiva e imediata (Duval, 2012).

Os alunos revelaram diferentes preferências nos tipos de registos utilizados, dependendo da sua faixa etária. Na exploração das tarefas foi permitido que as turmas recorressem aos registos que considerassem mais adequados. Os alunos do 1.° Ciclo revelaram preferência pelas representações pictóricas. Segundo Webb et al. (2008), as representações pictóricas enquadram-se nas representações informais e, desta forma, os conceitos são abordados em contexto familiar de forma concreta. Tanto Goldin (2000) como Webb et al. (2008) consideram que os alunos podem recorrer novamente a representações informais em momentos de insegurança e confusão ao longo de todo o percurso escolar, o que se verificou na exploração de 'Sequências e Regularidades' e na imaturidade em estabelecer generalizações. Para Barbosa et al. (2011), o recurso a diferentes representações permite aos alunos generalizarem situações no trabalho com 'Sequências e Regularidades'.

A linguagem natural foi outra das representações mais utilizadas pelos alunos do 1.° Ciclo, sendo que esta foi apontada por Alvarenga e Vale (2007) e por Pimentel et al. (2010) como o registo mais utilizado pelos alunos nos primeiros anos escolares. Foi possível verificar que inicialmente os alunos recorreram essencialmente a esta representação, não existindo uma variedade de registos. Simultaneamente, verificou-se que, num primeiro momento, a maioria dos alunos não foi capaz de determinar generalizações próximas e distantes. No decorrer da intervenção e com a utilização de uma maior variedade de representações verificou-se que os alunos responderam mais assertivamente a questões relativas a generalizações próximas e distantes e a questões que implicassem a determinação da lei de formação e a expressão geradora. Pode-se afirmar que a exploração e as conexões feitas entre as diferentes representações estimulam a melhoria da capacidade de argumentação do raciocínio dos alunos, visto que discutem ideias matemáticas importantes (Lannin, 2003). Embora as representações pictóricas se destaquem como as que poderão ter sido mais facilitadoras da compreensão dos alunos, no decorrer da intervenção pedagógica os alunos foram confrontados com outras representações, como tabelas. Na resolução de tarefas posteriores os alunos recorreram com maior frequência à sua utilização, no entanto, esta representação surgiu, quase sempre, como suporte a outras representações, tendo os mesmos resolvido as tarefas com outro registo e, posteriormente, estabelecido conexões entre as representações anteriormente utilizadas para a tabela.

No que concerne à exploração de múltiplas representações, os diferentes pares foram capazes de estabelecer conexões entre diferentes representações, o que indicia ter ajudado a determinar generalizações. Embora a faixa etária dos alunos incida nos dois primeiros ciclos de escolaridade, os alunos foram capazes de revelar um desenvolvimento no seu pensamento algébrico, nomeadamente na generalização. Neste processo, as representações que mais auxiliaram os alunos na construção de significados do objeto matemático em estudo e que permitiram que de forma mais confiante e clara exteriorizassem o seu raciocínio foram as representações pictóricas, visto que ofereceram um suporte visual que permitiu atenuar a natureza abstrata dos conceitos matemáticos em estudo e dar-lhes sentido.

No 2.° Ciclo, os alunos recorreram pouco às representações pictóricas, mostrando uma evolução das representações informais para as pré-formais e formais. Por conseguinte, as representações mais utilizadas foram a linguagem natural, os esquemas e a escrita algébrica e simbólica. Segundo Webb et al. (2008), os esquemas são representações pré-formais que ditam a transição das representações informais para as formais, aumentando-se de forma gradual a complexidade das representações, onde os conteúdos começam a surgir de modo mais abstrato. Os alunos explicitam ao longo das suas resoluções conexões entre diferentes representações, sendo este processo fundamental para o desenvolvimento de um leque de estratégias e um conhecimento mais significativo da Matemática (Wong, 2004). Foi possível verificar que os esquemas e a escrita simbólica foram as representações que mais contribuíram para a determinação de generalizações próximas. A linguagem natural, a escrita algébrica e simbólica foram as mais utilizadas pelos alunos na determinação de generalizações distantes e de expressões algébricas.

De uma forma geral, nos dois ciclos de ensino verificou-se a utilização de diferentes registos de representação na exploração de dados, ideias, conceitos e situações matemáticas, onde os alunos foram capazes de a partir de uma informação, convertê-la em diferentes representações e obterem, assim, diferentes perspetivas da mesma situação em análise (Duval, 2012; ME, 2016). A discussão das resoluções dos alunos que recorriam a diferentes representações, assim como a sua conversão e tratamento, permitiu a melhor compreensão do tópico em estudo, o que, na perspetiva de Duval (2012), não existindo *semiósis* os alunos não atingem a *noésis.* Este processo traduziu-se numa aprendizagem significativa do conteúdo de 'Sequências e Regularidades'.

4.1.2. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'?

A análise dos dados recolhidos durante a intervenção pedagógica foi útil para a deteção das dificuldades dos alunos na exploração de 'Sequências e Regularidades'.

Relativamente ao 1.° Ciclo, a primeira dificuldade surgiu na interpretação do enunciado das tarefas, que para Ponte et al. (2009) se trata de um dos maiores obstáculos dos alunos no estudo de 'Sequências e Regularidades'.

Em diversos momentos, os alunos recorreram a estratégias, como a 'estratégia de representação e contagem'. A 'estratégia de representação e contagem' implica uma representação de todos os termos da sequência até ao termo pretendido, mas ainda assim obtiveram a solução errada à questão apresentada, estando de acordo com a teoria de Duval (2012), para quem as maiores dificuldades no pensamento matemático se devem ao facto de não existir a devida compreensão de uma representação matemática, originando a incompreensão do objeto matemático.

Relativamente às representações utilizadas pelos alunos, a linguagem natural, embora seja uma das representações mais utilizadas pelos mesmos e das que originou mais respostas corretas, foi, também, a representação com maior frequência nas respostas incorretas. Os alunos que recorreram a esse registo para desenvolver a sua resolução revelaram dificuldades e muitas vezes não conseguiram chegar a uma resposta válida das questões, talvez por ser uma representação que dificulte a capacidade de 'ver', ou seja, compreender o padrão ou a relação existente (Orton, 1999). A estratégia mais adotada pelos alunos na resolução das tarefas e com maior frequência de respostas corretas foi a 'estratégia aditiva', que Lannin (2003) também identificou em crianças que recorrem a esta estratégia. Embora os alunos recorressem a diferentes estratégias, não eram tão eficientes e não mostraram tanta compreensão dos conteúdos como com a 'estratégia aditiva'.

Em relação aos alunos do 2.° Ciclo, surgiram dúvidas na interpretação de problemas, em semelhança à turma do 1.° Ciclo. O registo que originou mais resoluções corretas foi a linguagem natural, no entanto, foi também o registo mais utilizado em respostas incorretas. Segue-se a escrita simbólica e algébrica com maiores frequências nas respostas incorretas. A linguagem natural poderá ter desencadeado o maior número de respostas incorretas porque, tal como Rivera e Becker (2008) e Ponte e Velez (2011) afirmam, muitos alunos revelam dificuldades em justificar os seus raciocínios, quer por escrito, quer oralmente, não conseguindo muitas vezes formular justificações válidas. Relativamente à escrita simbólica, embora ainda se verifique a predominância desta representação nas escolas (Ponte & Velez, 2011), e existindo por vezes poucas oportunidades de os alunos explorarem diferentes representações (Dufour-Janvier et al., 1987), os alunos num nível de escolaridade mais avançado ainda revelam dificuldade na sua exploração (Warren, 2005). Quanto à escrita algébrica, pode ter representado uma maior dificuldade devido ao facto de os alunos ainda terem dificuldade na atribuição de significados às letras (Saraiva & Pereira, 2010).

4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a utilização das múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'?

No final da intervenção pedagógica, os alunos das turmas do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico tiveram a oportunidade de, através de questionários, expor a sua perceção em relação à utilização das múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades'. As questões dos questionários permitiram entender quais as representações que facilitaram a compreensão dos alunos do 1.° e 2.° Ciclos e ainda quais as vantagens e desvantagens da sua utilização apontadas pelos alunos.

Os alunos do 1.° Ciclo destacam que as suas maiores dificuldades foram "perceber as perguntas" e "compreender os textos". A maioria dos alunos elegeu, ainda, a linguagem natural como a representação que teve maiores dificuldades em aprender, afirmando que "não sabia como representar". Por outro lado, as tabelas e os desenhos, foram as representações favoritas da turma uma vez que, segundo os alunos, "as tabelas davam para chegar ao raciocínio mais rápido", sendo "mais fáceis e específicas" e os desenhos "ajudaram a compreender". Quando questionados se gostariam de trabalhar a pares, a maioria dos alunos respondeu positivamente destacando vantagens como a interajuda, a partilha de ideias e conhecimentos e o esclarecimento de dúvidas.

No que diz respeito à turma do 2.° Ciclo do Ensino Básico, dado o quadro pandémico do país e o ensino a distância implementado, os alunos responderam a um questionário no *Google Formulários.* A maioria da turma constatou que a utilização de múltiplas representações favorece a compreensão do conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. A escrita simbólica e a escrita algébrica foram as representações que os alunos consideraram ter utilizado com maior frequência. Porém, os alunos admitem que as representações pictóricas foram as que mais contribuíram para a compreensão dos conteúdos estudados. Quando questionados relativamente às vantagens da utilização de diferentes representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades', os alunos afirmam que a utilização de diferentes representações lhes permitiu compreender melhor as tarefas e desenvolver o seu raciocínio.

Quando interrogados sobre quais foram as suas maiores dificuldades na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades', alguns alunos salientam a determinação da expressão geradora da sequência e ainda a compreensão de qual o significado da variável '*n*', que foi, também, uma das dificuldades que Saraiva e Pereira (2010) apontam como recorrente no seu estudo. A maioria da turma elegeu as representações pictóricas e os esquemas como as representações que mais contribuíram para a compreensão do conteúdo matemático em estudo, talvez por se tratarem de representações informais e pré-formais, que aproximam o aluno de um contexto real (Webb et al., 2008).

4.2. Reflexão final

No momento em que iniciei a intervenção pedagógica confrontei-me com variados objetivos que pretendia concretizar, desenvolver e aprimorar como professora. Vivemos numa sociedade mais desenvolvida tecnologicamente e cada vez mais competitiva, o que eleva o desafio e o rigor na educação. Um professor deve acompanhar esta evolução e ser um alicerce para os seus alunos, ajudando-os a superarem-se, desafiarem-se, desenvolverem o seu espírito crítico e a construírem competências como responsabilidade, empenho e dedicação. Deste modo, desafiei-me a aliar a minha intervenção a esta ambição, promovendo discussões, levantando questões e possibilitando aos alunos um posicionamento sobre os assuntos em debate. A prática da teoria do ensino exploratório permitiu que as crianças recorressem aos seus conhecimentos prévios com o fim de alcançarem novos conhecimentos. Através da discussão, os alunos conseguiram confrontar-se com diferentes raciocínios, argumentar os seus pensamentos e, ainda, ajudar os colegas a compreender e superar dificuldades.

Apresentei às turmas a possibilidade do recurso a diferentes representações e apelei às conexões que existem entre elas de modo a que os alunos compreendessem que na Matemática se utilizam múltiplos registos que traduzem diferentes imagens mentais criadas sobre conceitos abstratos e não observáveis (Almeida & Viseu, 2002). Assim, o aluno pode converter uma representação interna numa representação externa (Goldin, 2008), onde o mesmo objeto matemático pode ser representado de diversas formas. Só quando o aluno distingue a representação do conceito em si, é que estará perto de compreender o conteúdo matemático (Goldin, 2008).

A exploração e investigação em torno deste tema permitiram o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Estou consciente da importância da exploração das múltiplas representações e do papel ativo que, como professora, devo ter no processo de ensino-aprendizagem, permitindo a representação de ideias e de conceitos de diversas formas (ME, 2016).

4.3. Limitações e Recomendações

No decorrer da minha prática pedagógica foram surgindo, inevitavelmente, algumas limitações que condicionaram de alguma forma a investigação. De modo geral, foi percetível a pouca experiência dos alunos em trabalhar segundo as características do ensino exploratório, o que os condicionou inicialmente na sua participação, uma vez que um dos momentos fundamentais deste tipo de ensino é a partilha de ideias e a capacidade argumentativa. No entanto, com o decorrer das sessões de intervenção os alunos foram superando a sua timidez e aprimorando o seu discurso.

Outra limitação deste estudo foi o número escasso de sessões de intervenção. A natureza do ensino exploratório implica que este seja aplicado com maior frequência, de modo a que sejam observados resultados mais significativos. No entanto, dado a calendarização dos professores responsáveis pelas turmas, e ainda o surto de Covid-19 que abalou todo o país, levando a um período de adaptação e transição entre o ensino presencial e a distância, não foi possível dedicar um número maior de aulas à investigação.

O surto de Covid-19, além das limitações já mencionadas, originou outras limitações nesta investigação. A turma do 2.° Ciclo interrompeu o seu período letivo de ensino presencial e foram necessárias algumas semanas até todos os alunos terem as condições necessárias para começarem a ser lecionadas aulas a distância. Aliado a isso, não foi possível que os alunos trabalhassem em pares. O apoio que forneci presencialmente aos alunos do 1.° Ciclo, desta vez aconteceu em troca de emails ou em conversação por videochamada. Também no momento de exploração da tarefa tiveram que ser feitas adaptações na prática pedagógica de modo a ser possível criar momentos de discussão ricos e acessíveis a todos os alunos.

Por fim, aponto como mais uma limitação do meu estudo, relativamente ao 2.° Ciclo, o ensino a distância, em que alguns alunos descuraram o cumprimento das suas obrigações escolares, acabando por não participarem na resolução de tarefas propostas.

Tendo em conta a experiência profissional que resultou desta investigação relativa às múltiplas representações na aprendizagem de 'Sequências e Regularidades', recomendo que em investigações futuras sejam explorados outros conteúdos, de modo a perceber se existe influência na aprendizagem a utilização de diferentes registos.

Tendo em conta que o número de alunos reduzidos limitou os meus resultados a um espaço amostral restrito e reduzido, recomendo que em estudos futuros sejam investigadas questões relacionadas com a utilização de múltiplas representações num número mais abrangente de alunos, de modo a generalizar os resultados.

Por fim, destaco que se a investigação decorrer num espaço de tempo maior, será possível observar uma evolução mais significativa dos alunos, tanto na capacidade em trabalhar segundo uma metodologia de ensino exploratório, tanto na capacidade de utilizar diferentes representações e estabelecer conexões entre elas.

BIBLIOGRAFIA

Agrupamento Vertical de escolas... (2012-15). *Projeto Educativo*. Escola no Mundo.

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 193-219.

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 15(1), 27-55.

Baratta-Lorton, B. (2003). *Patterns & Connections in mathematics* (manuscript). Center for Innovation in Education. Retirado em 12 de setembro, 2020, de http://www.center.edu/Patterns_Connections.shtml.

Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Vale, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2011). *Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico.* Lisboa: Texto Editores.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamicas. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel. (Tradução de J. M. Varandas, H. Oliveira e J. P. Ponte).

Boavida, A., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Ed.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D\`Água.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669- 705). Charlotte, NC: Information Age.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante,* Vol. XXI, 2, 51-79.

Castro, E. M. (2005*). Configuraciones puntuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales*. Espanha: Universidade de Granada. Acedido em 27 de agosto, 2020, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Castro(CIBEM).pdf

Devlin, K. (2002). Matemática: a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora.

Dufour-Janvier. B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawerence Erlbaum Associates Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In S. D. A. Machado (Coord.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-34). Campinas: Editora

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Merlín.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. REVEMAT*, 7(2), 266-297.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem Editora.

Goldin. G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problema solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-200). New York: Routledge.

Goldin, G. A. (2000). Representational systems, learning, and problema solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Goldin, G. A., & Kaput,J. J. (1996) A Joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-429). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78(5), 361-367.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 342-348.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in Prekindergarten — Grade 8. Reston*, VA: NCTM

Luís, A., Bártolo, F., & Serrazina, N. (1996). Padrões no 1.° Ciclo... para quê?. *Educação e Matemática*, 40, 44-47.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilho, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação-DGE.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.° Ciclo. *Quadrante*, 21(2), 81-110.

ME (2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

ME (1990). *Reforma Educativa. Programa do 1.° Ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral do Ensino Básico e Secundário.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática do 1.° ano.* Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática do 2.° ano.* Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática do 3.° ano.* Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática do 4.° ano.* Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática do 5.° ano.* Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática do 6.° ano.* Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática, Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral da Educação do Ministério da Educação.

Morais, A. (2012). *A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico,* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Orton, A. (Ed.) (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell.

Piaget, J. (1990). *A formação do símbolo na criança.* Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos

Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D., & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos - Tarefas e desafios para a sala de aula.* Lisboa: Texto Editores.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36–42.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2009). Uma agenda para a investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professoores. In I. Vale, & A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática* (pp. 169-175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo-Projecto Padrões.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME- DGIDC.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 1.° Ciclo. E*ducação e Matemática*, 113, 11-16.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. V. (2008). Manual de investigação em Ciências Sociais. Lisboa: Gradiva.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA - *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 4(2), 37-62.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), 213-221.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40, 65-82.

Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical in grades K -12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Sawyer, W. (1995). *Prelude to mathematics*. Harmondsworth: Penguim Books.

Saraiva, M. J. & Pereira, M. N. (2010). A escrita simbólica de uma generalização. *Educação e Matemática*, 107, 28-35.

Silva, J., & Mamede, E. (2015). Explorando Padrões no 6.° ano do Ensino Básico. *Saber & Educar*, 20, 160-173.

Steen, L. A. (1998). The science of patterns. *Science*, 240, 611-616.

Stylianou, D. A. (2010). Teacher's conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.

Sokolowski, A. (2018). *The effects of using representations in elementary mathematics: Meta-analysis of research. IAFOR Journal of Education*, 6(3), 129-152.

Sokovmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 189-199). Dordrecht: Kluwer.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. In J. Fernandes, H. Martinho, & F. Viseu (Orgs.), *Actas do XX Seminário de Investigação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I. (2009). Mathematics and patterns in elementary schools: perspectives and classroom experiences of students and teachers. In Vale, I & Barbosa, A. (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática (*pp. 7-14). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo - Projecto Padrões.

Vale, I., & Pimentel, T. (2010). Padrões e conexões matemáticas no Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 110, 33-38.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: Um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-22.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Borralho, A., Cabrita, I., & Fonseca, L. (2011). *Padrões em Matemática. Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico.* Lisboa: Texto Editores.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.° ano. *Quadrante*, 14 (1), 37-66.

Vygotsky, L. S. (2008). *Pensamento e Linguagem.* Lisboa: Relógio D'Água.

Warren, E. (2009). Patterns and relationships in the elementary classroom. In Vale, I & Barbosa, A. (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática* (pp. 29-47). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Warren, E. (2005). *Patterns supporting the development of early algebraic thinking*. Acedido em 2 de setembro, 2020, de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.538.4964&rep=rep1&type=pdf.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 8-12.

Wong, K. (2004). Using multimodal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME–10*. Copenhagen: Technical University of Denmark. Acedido em 2 de setembro, 2020, de https://pdfs.semanticscholar.org/df1b/8123623fe40fe834fed61bb1f928554bbb0a.pdf?_ga=2.265526214.87974505.1599576269-2018023748.1599576269.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002*).* Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation*. Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

ANEXOS

ANEXO 1

(Pedido de autorização ao Diretor do Agrupamento)

Exmo. Senhor

Diretor do Agrupamento de …

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1.° Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.° Ciclo do Ensino Básico, da Universidade do Minho, enquanto professora estagiária no Agrupamento de …, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos de uma turma do 3.° ano e de uma turma do 6.° ano no conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados que resultam da atividade dos alunos às tarefas propostas na sala de aula. Para uma melhor compreensão dessas atividades necessito de proceder à recolha de dados através de gravações vídeo e áudio das aulas. Para esse fim, solicito a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula. Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola, nem dos alunos, nem expor qualquer indicador que os envolva. Apenas será utilizada informação que me possa ajudar a aprimorar as minhas estratégias de ensino e a desenvolver o meu projeto de estágio. Assim sendo, esta recolha de dados será apenas usada para efeitos do estudo e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me, ainda, a proceder à destruição de todas as gravações após o término do meu mestrado.

Por fim, informo V. Exa. que, caso autorize a realização das minhas pretensões, solicitarei de seguida a autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a participação dos mesmos no meu projeto de investigação.

Grata pela atenção prestada, com os meus cordiais cumprimentos,

A estagiária,

____

(Ana Raquel Fonseca Faria)

Braga, 15 de novembro de 2019

ANEXO 2

(Pedido de autorização aos Encarregados de Educação do 1.° Ciclo)

Exmo(a) Senhor(a)

Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1.° Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.° Ciclo do Ensino Básico, da Universidade do Minho, enquanto professora estagiária no Agrupamento de …, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos no conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados que resultam da atividade dos alunos às tarefas propostas na sala de aula. Para uma melhor compreensão dessas atividades necessito de proceder à recolha de dados através de gravações vídeo e áudio das aulas. Para esse fim, solicito a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula. Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola, nem dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Apenas será utilizada informação que me possa ajudar a aprimorar as minhas estratégias de ensino e a desenvolver o meu projeto de estágio. Assim sendo, esta recolha de dados será apenas usada para efeitos do estudo e não terá qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me, ainda, a proceder à destruição de todas as gravações após o término do meu mestrado.

Agradeço a sua colaboração,

A professora estagiária,

____

(Ana Raquel Fonseca Faria)

-------------------------------✂----------------------------------✂-------------------------------

Autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando ____.

O (A) Encarregado (a) de Educação

____

(Pedido de autorização aos Encarregados de Educação do 2.° Ciclo)

Exmo (a) Senhor (a)

Encarregado (a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1.° Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.° Ciclo do Ensino Básico, da Universidade do Minho, eu, Ana Raquel Fonseca Faria, professora estagiária no Agrupamento de …, pretendo desenvolver uma experiência de ensino que potencie a aprendizagem dos alunos no conteúdo de 'Sequências e Regularidades'. O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados que resultam da atividade dos alunos às tarefas propostas em aulas síncronas. Para uma melhor compreensão dessas atividades necessito de proceder à recolha de dados através de gravações áudio das aulas. Para esse fim, solicito a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula. Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola, nem dos alunos. Apenas será utilizada informação que me possa ajudar a aprimorar as minhas estratégias de ensino e desenvolver o meu projeto de estágio. Assim sendo, esta recolha de dados será apenas usada para efeitos do estudo e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me, ainda, a proceder à destruição de todas as gravações após o término do meu mestrado.

Agradeço a sua colaboração,

A professora estagiária,
Ana Raquel Fonseca Faria

--------------------------------✂----------------------------------✂-------------------------------

Autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando ____.

O (A) Encarregado (a) de Educação

____

ANEXO 3

(Questionário inicial para os alunos do 1.° Ciclo)

1) Qual a tua área disciplinar favorita? (Assinala com um X a tua resposta)

Matemática ☐ Português ☐ Estudo do Meio ☐ Expressão Plástica ☐

2) Qual é a área disciplinar que tens mais dificuldades? (Assinala com um X a tua resposta)

Matemática ☐ Português ☐ Estudo do Meio ☐ Expressão Plástica ☐

3) Gostas de matemática? Porquê?

4) Qual foi a tua classificação final a matemática no ano passado? (Assinala com um X a tua resposta)

Muito Bom ☐ Bom ☐ Suficiente ☐ Insuficiente ☐

5) Nas aulas de matemática o que utilizas para resolver as tarefas que te são propostas? (Assinala com um X a tua resposta)

Desenhos ☐ Tabelas ☐ Textos ☐ Números/Operações ☐
Outro ☐ Qual?__________________

6) Achas que a partilha das diferentes respostas e resoluções de tarefas com a turma te ajuda a compreender melhor os diferentes conteúdos? Porquê?

7) O que são sequências e regularidades?

Obrigada pela tua colaboração!

(Questionário inicial para os alunos do 2.° Ciclo)

1) Qual é a tua área disciplinar favorita? Porquê?

____

____

2) Qual é a área disciplinar que tens mais dificuldades? Porquê?

____

____

3) Gostas de matemática? Porquê?

____

____

4) Qual foi a tua classificação final a matemática no 1.° Período?

____

____

5) Nas aulas de matemática o que utilizas para resolver as tarefas que te são propostas? (Assinala com um X a tua resposta)

Desenhos ☐ Tabelas ☐ Textos ☐ Números/Operações ☐
Outro ☐ Qual?__________________

6) Achas que a partilha das diferentes respostas e resoluções de tarefas com a turma te ajuda a compreender melhor os diferentes conteúdos? Porquê?

____

____

7) O que são sequências e regularidades?

____

____

Obrigada pela tua colaboração!

ANEXO 4

(Questionário final para os alunos do 1.° Ciclo)

1) O que mais gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?

---

2) O que menos gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?

---

3) Que dificuldades sentiste nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades?

---

4) Nas aulas em que aprendeste sequências e regularidades gostaste de trabalhar a pares? Porquê?

---

5) Que representações te ajudaram a compreender melhor as sequências e regularidades? (Assinala com um **X** a tua resposta)

Desenhos ☐ Tabelas ☐ Textos ☐ Números/Operações ☐

Justifica a tua resposta.

---

6) Que representações tiveste mais dificuldade a compreender as sequências e regularidades? (Assinala com um **X** a tua resposta)?

Desenhos ☐ Tabelas ☐ Textos ☐ Números/Operações ☐

Justifica a tua resposta.

---

7) O que são sequências e regularidades?

Obrigada pela tua colaboração!

(Questionário final para os alunos do 2.° Ciclo)

As tuas opiniões são fundamentais para o estudo que estou a realizar relacionado com as múltiplas representações na aprendizagem de sequências e regularidades. É da extrema importância que respondas de forma consciente e sincera a todas as questões que te são apresentadas. A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

1. Das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz **(X)** a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: **DT**: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	DT	D	I	C	CT
Gostei de aprender o tópico sequências e regularidades através das atividades realizadas segundo o ensino exploratório.					
Não tive dificuldade na interpretação das tarefas propostas.					
Quando senti dificuldades na interpretação das tarefas propostas tive a ajuda dos meus colegas e da professora para as ultrapassar.					
A fase de introdução das tarefas foi importante para a sua resolução.					
A fase de exploração das tarefas propostas foi importante para a compressão das diferentes estratégias possíveis a realizar na sua resolução.					
Na resolução das tarefas utilizei diversas representações.					
Na resolução das tarefas recorri sobretudo à escrita numérica.					
Na resolução das tarefas recorri sobretudo desenhos/esquemas.					
Na resolução das tarefas recorri sobretudo a tabelas.					
Senti dificuldades na resolução das tarefas propostas nas aulas.					
Na fase de discussão sobre a resolução das tarefas propostas tive a oportunidade de comparar as minhas resoluções com as resoluções dos meus colegas.					
Na fase de discussão sobre a resolução das tarefas propostas tive a oportunidade de justificar as minhas estratégias e resultados.					
Na fase de discussão sobre a resolução das tarefas propostas identifiquei diferentes representações para a sua resolução.					
A apresentação de múltiplas representações na discussão das resoluções das tarefas propostas ajudou-me a compreender melhor os tópicos em estudo.					
Os desenhos/esquemas foram a representação que mais contribuíram para a compreensão dos tópicos em estudo.					
A escrita numérica foi a representação que mais contribuiu para a compreensão dos tópicos em estudo.					
As tabelas foram a representação que mais contribuíram para a compreensão dos tópicos em estudo.					
A fase de discussão sobre as resoluções das tarefas propostas ajudou-me a clarificar as minhas dificuldades.					
A fase de discussão sobre as resoluções das tarefas propostas ajudou-me a compreender e consolidar os conteúdos de sequências e regularidades.					
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos através da introdução de tarefas, exploração das tarefas e discussão sobre a resolução das tarefas.					

2. Indica, justificando, três vantagens da utilização de diferentes representações na tua aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades.

3. Indica, justificando, três desvantagens da utilização de diferentes representações na tua aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades.

4. Que dificuldades sentiste na aprendizagem do conteúdo de sequências e regularidades?

Obrigada pela tua colaboração!

ANEXO 5

(Planificação da aula 1 do 1.° Ciclo)

Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivos: Determinar os termos de uma sequência e definir a lei de formação compatível.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1. Explorar regularidades e determinar a lei de formação de uma sequência

Nas sequências que se seguem completa os termos que faltam e indica a lei de formação:

1. ___ ___ 15 20 25 ___ ___ 40 ___ 50 ___ ___ 65 ___

2. 2 ___ 6 ___ ___ 12 14 16 ___ ___ 22 ___ 26 ___ 30

Tarefa 2. Evidenciar a terminologia de uma sequência

O melhor amigo da Maria ofereceu-lhe 50 cromos. Ela apreciou tanto a oferta que decidiu iniciar uma coleção de cromos. Na primeira semana juntou 50 cromos. Na segunda semana já tinha 62 cromos. Na terceira semana tinha 75 e na quarta 87. Na quinta semana a Maria conseguiu colecionar uma centena de cromos.

1. Continuando o padrão, o número de cromos que a Maria terá na sexta semana é par ou ímpar? Porquê?
2. Na sétima semana o número de cromos que terá a Maria é par ou ímpar? E na 20.ª semana? Porquê?
3. Considerando a sequência numérica, se a continuares para a esquerda, em vez dos 50 cromos iniciais quantos terias?

Tarefa 3. Investigar regularidades numéricas

Numa competição automobilística, um carro de corrida tem que estar constantemente em manutenção. Dessa forma, tem que parar para que os mecânicos verifiquem o óleo, a pressão dos pneus, etc. A Maria foi assistir à prova do seu amigo João e decidiu apontar os minutos em que ele parou para que fosse feita revisão pelos mecânicos, tal como ilustra os registos que efetuou no seu caderno de notas:

Por razões pessoais, a Maria teve que ir embora antes da corrida terminar. Quando chegou a casa e analisou as paragens efetuadas pelo carro de corrida do João disse à mãe: "O João efetuou 8 paragens para que o seu carro fosse fazer a revisão ao mecânico e percebi que existe uma relação numérica relativamente ao minuto em que ele parou".

1. Em que minuto o João fez a 3.ª paragem? E a 4.ª? E a 5.ª?
2. Que relação encontrou a Maria ao observar os minutos que registou das paragens do carro do João?
3. A 11.ª paragem ocorreu em que minuto? E a 15.ª? Justifica a tua resposta.

Materiais: caderno diário; ficha de trabalho

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

A tarefa 1 tem por finalidade evidenciar a terminologia de uma sequência (ordem, termo e regularidade), identificar a regularidade em cada uma das sequências propostas e determinar a lei de formação de cada uma delas tendo como referência a tabuada entre números naturais.

A Tarefa 2 e a Tarefa 3 são exploradas da seguinte forma:

1. Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas. De seguida, pedir a alguns alunos que façam o reconto das mesmas.
2. Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3. Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas.

Na resolução das tarefas, os alunos deparam-se com a noção de número par, número ímpar e com a multiplicação e a adição de números naturais.

Com a resolução das tarefas pretende-se enfatizar a noção de generalização próxima e de generalização distante.

ANEXO 6

(Planificação da aula 2 do 1.° Ciclo)

<table>
<tr>
<td>

Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivos: Resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação que permita obter cada termo a partir dos anteriores, conhecidos os primeiros termos.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

</td>
<td>

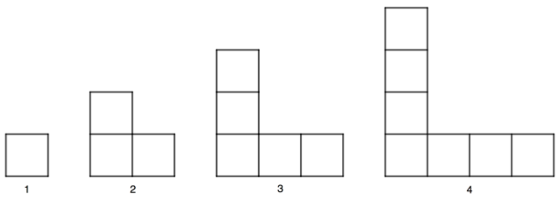
Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Tarefa 1: Explorar regularidades e determinar a lei de formação de uma sequência

Observa a seguinte sequência de figuras. Em cada figura, cada quadrado é formado por 4 fósforos iguais.



1. O que acontece ao número de fósforos de um termo para o seguinte?
2. Qual é a lei de formação relativo ao número de fósforos da sequência?
3. Quantos fósforos tem a figura da ordem 6? E a da ordem 8?

Tarefa 2: Determinar a expressão geradora de uma sequência

Na cantina de uma escola podem sentar-se a uma mesa quatro alunos. As mesas são todas iguais. Se se juntarem duas mesas, podem sentar-se seis alunos.

1. Quantos alunos se podem sentar na quinta mesa? E na 10.ª? Justifica a tua resposta.
2. Quantas mesas serão necessárias para sentar vinte alunos? Justifica a tua resposta.
3. Poderá existir alguma mesa com 31 alunos e que tenha os lugares todos ocupados?

</td>
<td>

As tarefas são exploradas da seguinte forma:

1. Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas.
2. Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3. Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas.

Na discussão da resolução das tarefas pretende-se analisar diferentes propostas de resolução com a finalidade de realçar o recurso a diferentes representações que traduzam o pensamento dos alunos.

Com a resolução das duas tarefas propostas pretende-se consolidar a noção de termo, ordem, lei de formação e expressão geradora de uma sequência.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Tarefa Adicional

Desenhe os dois termos seguintes da sequência de pontos

Quantos pontos serão necessários para desenhar o termo de ordem 15?

Materiais: Caderno diário; ficha de trabalho; fósforos.

</td>
<td>

A tarefa Adicional será explorada caso os alunos consigam resolver as tarefas anteriores antes do final do tempo previsto para a aula.

</td>
</tr>
</table>

ANEXO 7

(Planificação da aula 3 do 1.° Ciclo)

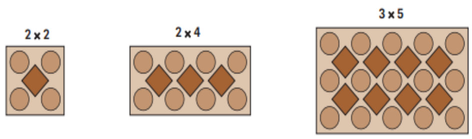
Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivos: Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida e formulá-la em linguagem e simbólica.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 3. Explorar padrões numa regularidade

A empresa "Super Chocolate" vende diferentes caixas com bombons e caramelos, como as da figura. Em cada caixa, os caramelos (◆) estão colocados entre as filas de bombons (●). As dimensões de cada caixa indicam quantas colunas e quantas linhas de bombons tem essa caixa. Por exemplo, na caixa 2 x 2, podes ver duas colunas e duas linhas de bombons. Descobre um método para encontrar o número de caramelos e de bombons em cada uma das caixas sabendo as suas dimensões. Explica a tua resposta.



Tarefa 2. Transformação de representações

Observa a seguinte sequência de figuras.

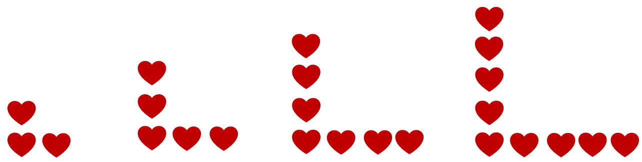
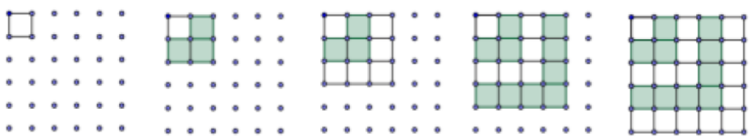


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Quantos corações são necessários para a Figura 6? E para a Figura 8? Justifica a tua resposta recorrendo a dois métodos diferentes de resolução.
2. Existe alguma Figura com 100 corações? Justifica a tua resposta.
3. Estabelece a expressão geradora dos termos da sequência.

Tarefa Adicional

Observa os primeiros cinco termos de uma sequência geométrica:



1. Identifica a lei de formação dos termos da sequência.
2. Quantos quadradinhos brancos tem a figura de ordem 7? E quantos quadradinhos verdes tem essa figura?
3. Utiliza a sequência para concluir que $1+3+5+7+\cdots+15=64$.

Materiais: caderno diário; ficha de trabalho

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

As tarefas são exploradas da seguinte forma:
1. Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas. Na Tarefa 2 pedir o reconto à turma.
2. Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3. Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas.

Na discussão das tarefas faz-se especial realce às diferentes representações que surgiram.

Com a resolução destas tarefas pretende-se ser capaz de utilizar diferentes representações para obter o mesmo resultado.

Ambiciona-se que os alunos consigam determinar uma expressão geradora na tarefa 1 definida por uma lei de formação que na determinação de um dado elemento recorra aos elementos anteriores.

ANEXO 8

(Planificação da aula 4 do 1.° Ciclo)

Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivos: Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1. Determinar a lei de formação e a expressão geradora de uma sequência

A Fátima construiu a seguinte sequência com quadriláteros:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1) De quantos quadriláteros precisa a Fátima para construir a figura 6? Resolve de duas formas diferentes.

2) Identifica a lei de formação que gera a sequência.

3) Estabelece uma expressão geradora da sequência que te permita saber o número de quadriláteros de qualquer figura.

4) Quantos quadriláteros tem a figura 18?

Desafio: Mobilizar conhecimentos anteriormente adquiridos.

1) Cria a tua própria sequência com pelo menos 6 termos.

2) Identifica a lei de formação da sequência que acabaste de criar.

3) Qual é o 10.° termo da tua sequência?

Tarefa adicional

Completa a seguinte figura e explica o teu raciocínio.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

Materiais: ficha de trabalho

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

As tarefas são exploradas da seguinte forma:

1. Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas. Na Tarefa 2 pedir o reconto à turma.
2. Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3. Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas.

Na discussão das tarefas faz-se especial realce às diferentes representações que surgirem.

Com a resolução destas tarefas pretende-se que os alunos sejam capazes de utilizar diferentes representações para obter o mesmo resultado.

Pretende-se consolidar capacidades trabalhadas na aula anterior e mobilizar os conhecimentos dos alunos de modo a que estes consigam criar uma sequência que responda a uma lei de formação. Aqui é expectável que surjam diferentes representações na turma.

ANEXO 9

(Planificação da aula 1 do 2.° Ciclo)

Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivo: Distinguir os conceitos termo, ordem, lei de formação e expressão geradora de uma sequência.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1. Terminologia relacionada com sequências e regularidades

Observa as figuras seguintes formadas por mesas e cadeiras e atenta o número de cadeiras de cada figura.

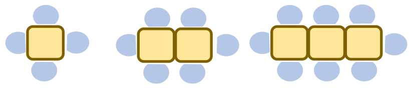


Figura 1 Figura 2 Figura 3

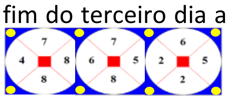
1. Da análise das figuras da sequência, completa a seguinte tabela:

Ordem	1	2	3	4	n
Número de cadeiras do meio	_	_	_	_	_
Número de cadeiras das pontas	_	_	_	_	_
Termo Número total de cadeiras	_	_	_	_	__

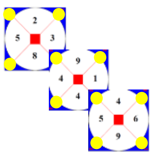
2. Quantas cadeiras terá o termo de ordem **6**? E o de ordem **20**?
3. Qual é a ordem da sequência que tem 72 cadeiras?
4. Averigua se existe algum termo com 123 cadeiras.

Tarefa 2. Identificar regularidades numéricas

A professora Maria está a desenvolver a capacidade de cálculo mental dos seus alunos do 6.° ano recorrendo ao ensino à distância, dado o surto de Covid-19. No mês de abril apresentou um cartão do jogo do 24 todos os dias e afixou-os num painel virtual com pioneses. No fim do terceiro dia a disposição dos cartões era a seguinte:



1. Se a professora continuar a afixar os cartões desta forma, de quantos pioneses vai precisar no 7° dia? E no 25° dia? Encontra a expressão geradora que te permite descobrir o número de pioneses de qualquer termo da sequência. Explica como pensaste.
2. No mês de maio a professora dispôs os cartões de outra forma, como ilustra a figura:



De quantos pioneses vai precisar a professora Maria no 4.° dia do mês de maio? E no 31.° dia? Explica como pensaste.

Materiais: Computador; PowerPoint.

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

As tarefas são exploradas da seguinte forma:
1- Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas.
2- Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3- Solicitar aos alunos o envio de um registo da sua resolução.
4- Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas por videochamada.

Na discussão da resolução das tarefas pretendo explorar as diferentes representações que surjam nessas resoluções.

A Tarefa 1 tem a finalidade de registar num PowerPoint, em grupo turma, a terminologia relacionada com sequências: sequência numérica e não numérica; termo; ordem; lei de formação; e expressão geradora.

A Tarefa 2 apresenta duas sequências distintas onde os alunos devem realizar generalizações próximas e distantes para cada uma das sequências.

ANEXO 10

(Planificação da aula 2 do 2.° Ciclo)

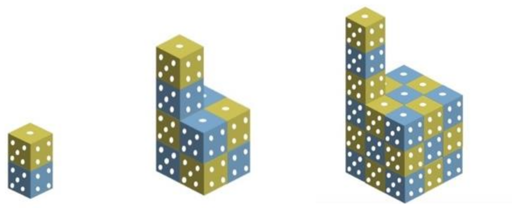
Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivo: Resolver problemas envolvendo a determinação de uma expressão geradora de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1. Explorar sequências em figuras geométricas tridimensionais

Considera a sequência de conjunto de dados cujos primeiros termos são:



Construção 1 Construção 2 Construção 3

1. Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 5?
2. Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 8?
3. Encontra a expressão geradora que te permita determinar o número de faces com 4 pintas de qualquer conjunto de dados da sequência.
4. Quantas faces com 4 pintas aparecem no termo de ordem 20?
5. Haverá alguma ordem cujo termo da sequência seja 75? Justifica a tua resposta.

Tarefa 2. Explorar o perímetro de polígonos regulares na criação de sequências

Considera a sequência de diferentes polígonos regulares. Os três primeiros polígonos regulares com 3, 4 e 5 lados têm de perímetro, respetivamente, 12, 15 e 18 cm.

1. Qual é o perímetro do polígono regular com 6 lados?
2. Qual é o perímetro do polígono regular com 10 lados?
3. Como determinar o perímetro de um polígono regular com n lados?

Materiais: Computador; PowerPoint.

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

As tarefas são exploradas da seguinte forma:
1- Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas.
2- Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3- Solicitar aos alunos o envio de um registo da sua resolução.
4- Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas por videochamada.

Na discussão das tarefas ganha especial realce as diferentes representações que surgirem.

A Tarefa 1 ao traduzir uma sequência de dados, com forma de cubo, promove o desenvolvimento da capacidade espacial.

Com a Tarefa 2 pretende-se explorar um conceito já apreendido pelos alunos, Perímetro de polígonos, na criação de sequências.

ANEXO 11

(Planificação da aula 3 do 2.° Ciclo)

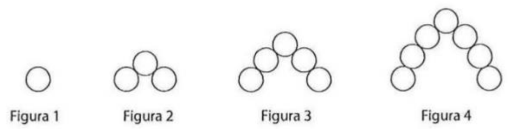
Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivos: Resolver problemas que envolvem determinação de uma expressão geradora de uma sequência parcialmente conhecida.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1. Determinar a expressão geradora de uma sequência definida por uma lei de formação

Considera a seguinte sequência de quatro figuras:



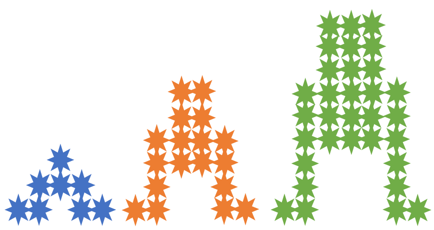
1. Da análise da sequência completa a seguinte tabela:

Figura	Número de círculos
1	
2	
3	
4	

2. Determina o número de círculos da figura 6.
3. Quantos círculos terá a figura 10? Apresenta a tua resposta de duas formas distintas.
4. Encontra a expressão geradora que te permite determinar o número de círculos de qualquer figura da sequência.
5. Determina o termo da figura de ordem 30.
6. Determina a ordem que corresponde ao termo 87.
7. Indica um número de círculos que não faça parte da sequência. Justifica a tua resposta.

Tarefa 2. Explorar padrões numa regularidade

Observa a sequência de robôs da figura:



Robô 1 Robô 2 Robô 3

1. Desenha os dois robôs seguintes da sequência. Explica o teu raciocínio.
2. Regista, da forma que te for mais conveniente, o número de \`sois\` que tem cada robô.
3. Determina a expressão geradora que te permite descobrir o número total de sois de qualquer robô da sequência.

Materiais: Computador; PowerPoint.

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

As tarefas são exploradas da seguinte forma:

1. Solicitar à turma a leitura de cada uma das tarefas.
2. Envolver os alunos na resolução das tarefas.
3. Solicitar aos alunos o envio de um registo da sua resolução.
4. Discutir a resolução dos alunos de cada uma das tarefas por videochamada.

Na discussão das tarefas pretende-se evidenciar as diferentes representações que surgiram para debaterem os tópicos em estudo.

A Tarefa 1 começa por desafiar os alunos a realizarem uma generalização próxima, partindo daí para a generalização distante.

Na resolução da Tarefa 2, os alunos podem explorar a simetria de reflexão das figuras da sequência.

Caso seja oportuno, será sugerida a decomposição das figuras em diferentes partes (p.e.: corpo e membros), com o intuito de desenvolver a capacidade de observação dos alunos na procura de relações e na descoberta de um padrão visual e geométrico.

ANEXO 12

(Planificação da aula 4 do 2.° Ciclo)

<table>
<tr>
<td>

Conteúdo: Sequências e Regularidades

Objetivos: Determinar termos próximos de uma sequência de figuras. Definir uma expressão geradora de uma sequência de figuras.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa. Converter uma sequência traduzida em linguagem natural para uma outra representação

Considera a sequência de construções formada por círculos amarelos e azuis. A primeira construção tem 1 círculo azul e 4 amarelos. A segunda tem 2 círculos azuis e 7 amarelos. A terceira construção tem 3 círculos azuis e 10 amarelos.

1. Quantos círculos azuis tem o termo de ordem 6?

2. Quantos círculos no total tem o termo de ordem 6?

3. Determina a expressão geradora da sequência que traduz o número de círculos azuis.

4. Determina a expressão geradora da sequência que traduz o número de círculos amarelos.

5. Determina a expressão geradora da sequência que traduz o número total de círculos.

6. Considerando os números 90, 203, 501 e 1240, algum deles é termo da sequência que formaste com os círculos amarelos e azuis? Justifica a tua resposta.

Materiais: Computador; PowerPoint.

</td>
<td>

Comentários

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: introdução da tarefa; exploração da tarefa; e discussão.

A tarefa é explorada da seguinte forma:

1. Solicitar à turma a leitura da tarefa
2. Envolver os alunos na resolução da tarefa.
3. Solicitar aos alunos o envio de um registo da sua resolução.
4. Discutir a resolução dos alunos da tarefa por videochamada.

Na discussão sobre a resolução da tarefa faz-se especial realce às diferentes representações que surgirem.

A Tarefa apresenta um enunciado descritivo que permite ao aluno traduzi-lo em diferentes representações.

</td>
</tr>
</table>