



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Tiago Fernando Morais Fernandes

Análise Viscoelástica em Projeto com Polímeros Termoplásticos

Tese de Mestrado
Ciclo de Estudos Integrados Conducentes ao Grau de
Mestre em Engenharia de Polímeros

Trabalho realizado sob a orientação de
Professor Doutor Gustavo A. O. Rodrigues Dias
Engenheiro Carlos Ribeiro

Outubro de 2015

DECLARAÇÃO

Nome: Tiago Fernando Morais Fernandes

Cartão do Cidadão: 13785384 OZY3

Tel: 917916853

Endereço eletrónico: tiagofernandomoraisfernandes@gmail.com

Curso Mestrado Integrado em Engenharia de Polímeros

Ano da Conclusão: 2015

Escola de Engenharia, Departamento/ Centro: Engenharia de Polímeros

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

Título em PT: **Análise Viscoelástica em Projecto com Polímeros Termoplásticos**

Título em EN: **Viscoelastic Analysis Project with Thermoplastic Polymers**

DE ACORDO COM A LEGISLAÇÃO EM VIGOR, NÃO É PERMITIDA A REPRODUÇÃO DE QUALQUER PARTE DESTA TESE/TRABALHO.

Universidade do Minho, ____/____/____

Assinatura:



Agradecimentos

Dirijo o meu sincero agradecimento a todos aqueles que, pelas mais diversas formas, me acompanharam ao longo da elaboração da presente dissertação. O apoio que recebi a nível pessoal, científico e profissional foi determinante para a sua concretização.

A minha primeira palavra de apreço vai para o meu orientador, Prof. Doutor. Gustavo Dias, que me incentivou na escolha do tema, acreditando no meu trabalho e tornando-o possível.

De seguida gostaria de agradecer ao meu coorientador Eng. Carlos Ribeiro pela dedicação e disponibilidade cedida para me esclarecer as dúvidas que foram surgindo ao longo da elaboração do presente documento.

Gostaria ainda de deixar uma palavra de apreço à Eng. Diana Meireles por toda a dedicação, disponibilidade e conselhos.

Não posso deixar de agradecer a todas as pessoas com quem estive em contacto no PIEP, sobretudo aos meus colegas Bruno Alexandre Gonçalves de Sousa e Lourenço Manuel Ferreira Bastos, pelo companheirismo e aconselhamento.

A minha namorada Rita Castiço da Silva, por todo o apoio que me deu nesta etapa bastante importante da minha vida.

Por último, mas não menos importante, agradeço esta tese aos meus pais e ao meu irmão, reconhecendo-lhes todo o apoio e incentivo, que me levaram a ultrapassar todos os obstáculos encontrados.

Um muito, e sincero, obrigado a todos.



Resumo

O presente trabalho efetuado, procurou abordar o problema estrutural de um componente industrial no domínio da viscoelasticidade, recorrendo para tal ao *software* de simulação dos elementos finitos, *Abaqus CAE*.

Neste âmbito, é realizada uma comparação com a análise estática do modelo numérico de modo a prever as tensões e deformações a longo prazo que não estavam previstas na fase de projeto.

Inicialmente, a abordagem do problema da viscoelasticidade, procedeu-se com o estudo de modelos de aproximação ao comportamento viscoelástico desde os modelos mais elementares aos mais complexos, mencionando os principais atributos e limitações.

Posteriormente, foram expostos métodos e técnicas de aproximação que visam ajustar dados experimentais provenientes de ensaios dinâmicos e estáticos, caracterizando o material no regime viscoelástico. Esta aproximação dos dados experimentais procurou obter parâmetros de uma função específica designada como função exponencial em série de *Prony* que descreve o comportamento do material em função do tempo ou frequência.

Numa vertente mais prática do estudo da viscoelasticidade, foi analisado um caso de estudo industrial convencional denominado como ensaio de relaxação de tensões, que valida a caracterização do material no domínio da viscoelasticidade. A reprodução deste ensaio no *Abaqus* permitiu atestar a existência de relaxações de tensões no corpo de prova, bem como os períodos de recuperação do material e as componentes da deformação existentes (elástica e viscosa).

Nos resultados obtidos na simulação do domínio da viscoelasticidade para o caso industrial, verificou-se que existem deformações em determinadas zonas que não estavam inicialmente contabilizadas no domínio estático e que estas só se verificam para períodos de tempo longos. Confirma-se ainda que após o tempo de aplicação da carga, o material recupera instantaneamente uma grande parte da deformação fruto da sua componente elástica e e uma parte da deformação viscoelástica do



sistema onde esta depende do tempo. São também observados períodos de relaxação de tensões do material.



Abstract

The present work looked to approach the structural problem of an industrial component in the viscoelasticity domain, using the simulation software for finite elements, *Abaqus CAE*.

In this context, is made a comparison with the static analyses of the numerical model in a way to predict the tensions and deformations in the long term that were not foreseen at the project stage.

Initially, the approach to the viscoelasticity problem was made with the study of the approximation models to the viscoelastic behavior, from the more basic models to the more complex ones, mentioning the major attributes and limitations.

Afterwards were explored methods and techniques of approximation that look to adjust experimental data from dynamic and static trials, characterizing the material in the viscoelastic domain. This approximation to the experimental data was pursued to obtain the parameters of a specific function designated as exponential function in *Prony's* series which describes the material behavior in function of time or frequency.

In a more practical side of the study of viscoelasticity, an industrial conventional case study known as tension relaxation trial was analyzed, validating the characterization of the material in the viscoelasticity domain. The reproduction of this trial in the *Abaqus* software allowed to attest the existence of tension relaxation on the body of proof, as well as the periods of material recuperation and the components of the existing deformation (elastic and viscous).

Within the results obtained through the simulation of the viscoelasticity domain for the industrial case, it was verified that deformations in certain zones that were not originally accounted for in the static domain do exist and that these were only verified to long periods of time. Furthermore it was confirmed that after the charge application time the material instantaneously recovers a big part of the deformation, due to its elastic component and a part of the viscoelastic system deformation where this one depends of time. Periods of relaxation of tensions are also observed.



Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Abreviaturas e Acrónimos	xix
Capítulo I. Introdução	1
1.1 Enquadramento	3
1.2 Objetivos e Planeamento	4
1.3 Organização da Dissertação	4
Capítulo II. – Estado de Arte	5
2.1 Viscoelasticidade	7
2.1.1 Ensaio estáticos	8
2.1.2 Ensaio mecânicos dinâmicos	14
2.2 Modelos Reológicos Fundamentais	18
2.2.1 Modelo Elástico linear.....	19
2.2.2 Modelo Viscoso	20
2.3 Modelos de comportamento viscoelástico	22
2.3.1 Modelo de Maxwell	23
2.3.2 Modelo de Kelvin-Voigt.....	26
2.4 Modelos de aproximação ao comportamento viscoelástico	28
2.5 Modelos de aproximação generalizados	33
2.5.1 Modelo de aproximação generalizado de Maxwell- Wiechert e Kelvin-Voigt..	33
2.5.2 Enquadramento das séries de Prony na representação	38
2.5.3 Método dos Mínimos quadrados.....	42
2.6 Técnicas de aproximação para a obtenção curva	45
2.6.1 Multidata Method.....	45
2.6.2 Método do Controlo do Sinal.....	46
2.6.3 Método da colocação.....	47
2.6.4 Procedimento-X	48
2.6.5 Técnicas baseadas em funções espectrais	50



2.6.6	Window-method	52
2.7	Outras metodologias e estudos implementados.....	54
2.8	Abaqus FEA.....	56
Capítulo III.	Caso de estudo simplificado.....	59
3.1	Metodologia	62
3.1.1	Definições das propriedades do material viscoelástico	62
3.1.2	Método abordado no caso de estudo simplificado	62
3.1.3	Escala de tempo dos dados experimentais/resultados da simulação	64
3.1.4	Validação do método de aproximação	65
3.1.5	Extração de dados experimentais no caso de estudo.....	66
3.1.6	Definições das condições fronteiras	67
3.2	Caso de estudo simplificado: Teste de relaxação sob tração	67
3.2.1	Descrição modelo numérico	68
3.2.2	Configuração do material no Abaqus.....	69
3.2.3	Resultados	74
3.2.4	Validação	78
3.2.5	Deformações	78
3.2.6	Recuperação.....	80
Capítulo IV.	Caso industrial.....	83
4.1	Modelo Numérico industrial.....	85
4.1.1	Ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação.....	87
4.1.2	Ensaio de resistência da estrutura durante a aplicação de uma força frontal .	89
4.2	Definições das propriedades do material no Abaqus	91
4.2.1	Definição das propriedades viscoelásticas.....	91
4.2.2	Definição das propriedades elásticas/plásticas	93
4.3	Condições dos ensaios de resistência nos modelos numéricos no domínio da viscoelasticidade	94
4.4	Apresentação e discussão dos resultados modelo numérico industrial	95
4.4.1	Avaliação estrutural estática do modelo numérico industrial	96
4.4.2	Avaliação estrutural viscoelástica do modelo numérico industrial	103



Capítulo V. Conclusões	121
Capítulo VI. Trabalhos Futuro	125
Referências bibliográficas	129
Anexos	135



Índice de Figuras

Figura 1: Ensaio de Relaxação de tensões e recuperação (a tracejado) [7].	9
Figura 2: Teste de Relaxação de tensões Realístico [11].	10
Figura 3: Ensaio de fluência e recuperação (a tracejado) [7].	11
Figura 4: Ensaio de fluência realístico (adaptado [11]).	12
Figura 5: Tensão e deformação na forma sinusoidal e o respetivo ângulo de desfasamento [12].	16
Figura 6: Modelo de Hooke na forma de uma mola [8].	20
Figura 7: Resposta de um elástico a) deformação constante; b) tensão constante [8].	20
Figura 8: Modelo Viscoso ou Newtoniano [8].	22
Figura 9: Resposta de um amortecedor : a) deformação constante; b) tensão constante [8].	22
Figura 10: Modelo de <i>Maxwell</i> representado por uma mola e um amortecedor em série [12].	24
Figura 11: Modelo de <i>Kelvin-Voigt</i> representado por uma mola e um amortecedor em série [12].	27
Figura 12: Modelo Sólido linear padrão [6].	29
Figura 13: Modelo de <i>Burgers</i> ou modelo de quatro parâmetros [12].	31
Figura 14: Modelo generalizado de <i>Maxwell-wiechert</i> [2].	34
Figura 15: Representação e comparação do Módulo de Relaxação com diferente número de elementos de <i>Maxwell</i> [11].	36
Figura 16: Modelo generalizado de <i>Kelvin-Voigt</i> [6].	37
Figura 17: Módulo de fluência em função do tempo contendo a contribuição de cada elemento [6].	38
Figura 18: Ajustamento dos dados experimentais por uma função exponencial em série de <i>Prony</i> [30].	41
Figura 19: Método geral para a obtenção dos parâmetros que definem a função e caracterizam o comportamento viscoelástico de um material.	43
Figura 20: Gráfico representativo de uma distribuição espectral que define a viscoelasticidade de um material [52].	50
Figura 21: Ajustamento de um conjunto de dados experimentais com o método implementado no simulador [67].	64



Figura 22:Ajustamento típico por dois pontos com o método implementado no simulador [67].	66
Figura 23:Imagem representativa das condições do modelo	68
Figura 24:Aproximação dos dados experimentais normalizados por uma função	71
Figura 25:Aproximação por dois pontos normalizados por uma função	72
Figura 26:Comparação entre a aproximação por dois pontos e a aproximação pelos dados experimentais	73
Figura 27:Tensões de Von Mises pelos dados experimentais normalizados (t=1800 s)/ Zona de análise 1	74
Figura 28:Tensões de Von Mises 2 pontos normalizados (t=1800 s).	75
Figura 29:Tensões no eixo zz (S33) pelos dados experimentais normalizados- Esquerda: t=12 s; Centro: t=620 s; Direita: t=1800 s.	75
Figura 30:Tensões no eixo zz (S33), com dois pontos normalizados- Esquerda: t=12 s; Centro: t=620 s; Direita: t=1800 s	76
Figura 31: Gráfico da deformação imposta ao provete	76
Figura 32:Módulos de relaxação obtidos nas simulações e do caso de estudo	77
Figura 33:Deformações envolvidas no caso de estudo	79
Figura 34:Deformação e recuperação da deformação- Esquerda: t=700 s; Centro: t=2800 s; Direita:t=6800 s	81
Figura 35: Curvas para os diferentes tempos de recuperação	81
Figura 36: Modelo Industrial na forma geral (PIEP)	86
Figura 37:Ensaio de resistência do encosto com as duas forças representadas (esquerda- Pressão, simulando as costas do manequim; direita- Binário aplicado nos apoios do encosto.)	88
Figura 38:Imagem representativa ensaio normativo de resistência de encosto do banco e dos respectivos sistemas de regulação, revelando o Ponto H (quadrado a vermelho) [68]	88
Figura 39:- Imagem representativa dos carregamentos do modelo numérico do teste de aplicação de uma força frontal	90
Figura 40: Aproximação dos pontos normalizados	92
Figura 41: Amplitude da carga relativa ao modelo numérico da tabela 15	95



Figura 42: Distribuição das tensões de <i>Von Mises</i> da estrutura constituída por PA 6 com 30%FV, T1. .	97
Figura 43: Distribuição das tensões máximas de Von Mises na Nervura, T1.....	97
Figura 44: Distribuição das tensões de Von Mises nos apoios do encosto, T2.	98
Figura 45: Distribuição das tensões de Von Mises no apoio do encosto, T2	98
Figura 46: Distribuição da deformação na nervura, T1.	99
Figura 47: Gráfico da Deformação vs. Tempo em T1	99
Figura 48: Distribuição da deformação nos apoios do encosto.....	100
Figura 49: Gráfico da Deformação vs. Tempo em T2.....	100
Figura 50: Distribuição das tensões nas nervuras e no ponto de aplicação da força T3.	101
Figura 51: Distribuição das tensões na nervura T4.	102
Figura 52: Distribuição da deformação no ponto de aplicação da força, T3.	102
Figura 53: Distribuição das deformações na nervura, T4.	103
Figura 54: Distribuição das tensões em T1 para um tempo de carga de 10000 horas	104
Figura 55: Curva Tensão vs. Tempo no elemento da zona T1, 10000 horas	104
Figura 56: Distribuição das deformações em T1 para um tempo de carga 1000 horas.	105
Figura 57: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T1.....	106
Figura 58: Curvas Deformação vs. Tempo no elemento de T1	106
Figura 59: Curvas Deformação vs. Tempo no elemento de T1 e a respetiva recuperação	107
Figura 60: Deformações em T1 provenientes da amplitude da carga	108
Figura 61: Distribuição das tensões em T2 para um tempo de carga de 10000 horas	109
Figura 62: Gráfico da Tensão vs. Tempo no elemento de T2.....	110
Figura 63: Distribuição das deformações em T2 para um tempo de carga 1000 horas	110
Figura 64: Gráfico da Deformação vs. Tempo no elemento de T2.	111
Figura 65: Curvas Deformação vs. Tempo no elemento de T2.	112
Figura 66: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T2 e a respetiva recuperação.....	112
Figura 67: Deformações em T2 provenientes da amplitude da carga	113
Figura 68: Distribuição das tensões em T3, para um tempo de carga de 10000 horas	114
Figura 69: Curva Tensão vs. Tempo no elemento de T3.	115



Figura 70: Distribuição das deformações no ponto de aplicação da força para um tempo 1000 horas, T3	115
Figura 71: Gráfico da Deformação vs. Tempo no elemento de T3	116
Figura 72: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T3 e a respetiva recuperação.....	117
Figura 73: Distribuição das tensões em T4, para um tempo de carga de 10000 horas	118
Figura 74: Curva Tensão vs. Tempo no elemento de T3.	118
Figura 75: Distribuição das deformações na nervura para um tempo 1000 horas, T4.....	119
Figura 76: Gráfico da Deformação vs. Tempo no elemento de T4	119
Figura 77: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T4 e a respetiva recuperação.....	120



Índice de Tabelas

Tabela 1: Descrição do modelo numérico.....	68
Tabela 2: Propriedades elásticas caso de estudo.....	69
Tabela 3: Normalização dos dados obtidos do artigo [8].....	69
Tabela 4: Propriedades viscoelásticas caso de estudo.....	71
Tabela 5: Normalização por dois pontos no artigo [8].....	72
Tabela 6: Propriedades viscoelásticas caso de estudo.....	73
Tabela 7: Resultados dos módulos para $t=50$ s e $t=1800$ s.....	78
Tabela 8: Propriedades dos materiais utilizados no cálculo estrutural.....	86
Tabela 9: Características do modelo numérico do ensaio de resistência de encosto do banco e dos respectivos sistemas de regulação.....	89
Tabela 10: Características do modelo numérico correspondente à aplicação de uma força frontal.....	90
Tabela 11: Dados referentes à ficha técnica Ultramid B3EG6-GF30.....	91
Tabela 12: Normalização dos valores provenientes da ficha técnica.....	92
Tabela 13: Propriedades viscoelásticas do caso industrial.....	93
Tabela 14: Propriedades elásticas e plásticas do caso industrial.....	93
Tabela 15: Condições do modelo numérico no domínio da viscoelasticidade: Ensaio de resistência de encosto do banco e dos respectivos sistemas de regulação.....	94
Tabela 16: Condições do modelo numérico no domínio da viscoelasticidade: Ensaio de resistência da estrutura durante a aplicação de uma força frontal.....	95
Tabela 17: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T1.	108
Tabela 18: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T2.	113
Tabela 19: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T3.	117
Tabela 20: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T4.	120



Lista de Abreviaturas e Acrónimos

δ - Ângulo de desfasamento

ν - Coeficiente de *Poisson*

η_n - Constante Viscosidade n

ε - Deformação

ε_A - Deformação Amortecedor

ε^* - Deformação Complexa

ε_M - Deformação da Mola

ε_0 - Deformação Normal Constante

ε_T - Deformação Total

γ_0 - Deformação de Corte Constante

τ - Tempo de Relaxação

τ_{ret} - Tempo de Retardação

σ_A - Tensão Amortecedor

σ^* - Tensão Complexa

σ_M - Tensão da Mola

$\sigma_{sh}(t)$ - Tensão de Corte

$\sigma_{sh,0}$ - Tensão de Corte Constante

σ - Tensão Normal

$\sigma(t)$ - Tensão Normal

σ_0 - Tensão Normal Constante

σ_T - Tensão Total

$D(t)$ - Módulo de Fluência

$D_R(t)$ - Módulo de Recuperação a Fluência

E' - Módulo de Armazenamento

E^* - Módulo de Elasticidade Complexo

$E(t)$ - Módulo de Elasticidade Normal



E_0 - Módulo de Elasticidade Normal instantâneo

$E_r(t)$ - Módulo de Relaxação Normal

E'' - Módulo Dissipativo

$G_l(w)$ - Módulo de Armazenamento

$G(t)$ - Módulo de Elasticidade Corte

G_0 - Módulo de Elasticidade Corte Instantâneo

$G_r(t)$ - Módulo de relaxação ao Corte

$G_s(w)$ - Módulo Dissipativo

$G_r(t_i)$ - Valores das funções calculadas

$G(t_i)$ - Valores experimentais

$g_r(t)$ - Módulo Normalizado

\bar{g}_i^P - Parâmetro da Série

$H(\tau)$ - Função espectral de Relaxação

$J(t)$ - Módulo de Fluência ao Corte

$K(t)$ - Módulo de Compressibilidade

$K_r(t)$ - Módulo de Relaxação Compressibilidade

$L(\tau)$ - Função espectral de Fluência

χ^2 - Erro Quadrático

w - Frequência Angular

$\Gamma(n)$ - Função Gama

h- Horas

mm- Milímetros

N - Número de termos de uma série

PA- Poliamida

s- Segundos

t - Tempo

i - Unidade Imaginária

MPa- Unidade Pascal em MegaPascal



N- Unidades Newton

Pa- Unidades Pascal

Capítulo I. **Introdução**



Na tentativa de obter propriedades que caracterizam os materiais viscoelásticos no domínio da simulação computacional pelo método dos elementos finitos, foram definidas diversas metodologias que visam obter os parâmetros que definem o comportamento viscoelástico. Partindo de uma formulação matemática melhorada que tem como base os modelos constitutivos dos materiais viscoelásticos é possível determinar os parâmetros de interesse dessa formulação de modo a que quando implementados no simulador, permitam descrever de um modo específico o comportamento da peça termoplástica quando solicitado por exemplo a uma carga multiaxial a longo prazo ou mesmo um carregamento cíclico com uma determinada frequência.

Ter em consideração a viscoelasticidade de um polímero na simulação de uma peça termoplástica, é extremamente importante pois, na fase de projeto o fator tempo muitas vezes não é contabilizado isto por culpa de se assumir apenas as propriedades elásticas e plásticas do material, levando a peça assumir um comportamento exclusivamente elástico no estado presente, o que não é verdade principalmente para períodos de serviço muito longos e bastante exigentes.

1.1 Enquadramento

A generalidade dos polímeros termoplásticos ou termoplásticos reforçados, estes evidenciam um comportamento viscoelástico significativo que origina comportamentos em serviço que normalmente não são validados e verificados na fase de projeto. De facto, na maioria dos casos são ainda utilizadas aproximações elástico-plásticas ao projeto com termoplásticos, não sendo a forma mais eficiente de analisar o comportamento em serviço das aplicações mais exigentes. De facto, é possível com uma abordagem baseada no domínio da viscoelasticidade prever com maior fiabilidade o comportamento a longo prazo de peças termoplásticas e avaliar com maior profundidade casos de carregamento cíclicos mesmo multi-axiais. Na generalidade dos códigos de elementos finitos entre outras ferramentas de análise avançada estão implementados modelos constitutivos viscoelásticos, no entanto por dificuldade de obtenção de propriedades viscoelásticas ou por aproximação ao problema, não é habitual vermos análise com essa característica. Neste contexto, as análises no domínio da viscoelasticidade podem ser divididas em duas tipologias:



i. Modelos no domínio do tempo: descrevendo um comportamento dependente da taxa de deformação que implica que o material tem comportamento dissipativo. Normalmente é combinado com efeitos de grandes deformações e os seus parâmetros podem ser obtidos por ensaios de relaxação ou fluência.

ii. Modelos no domínio da frequência: descrevendo um comportamento dependente da frequência em oscilações harmónica em regime estacionário de pequena amplitude, da mesma forma que o modelo anterior o material tem comportamento dissipativo, mas a introdução desse efeito tem que ser realizada no domínio da frequência. Pode ser combinado com efeitos de grandes deformações, no entanto a sua aplicação é normalmente focada em casos de análise em regime estacionário. Os seus parâmetros podem ser obtidos por ensaios de relaxação ou fluência.

1.2 Objetivos e Planeamento

1. Caracterização e validação no domínio da viscoelasticidade de um polímero termoplástico no *Abaqus CAE*, fruto do desenvolvimento de casos simplificados;
2. Análise viscoelástica de um modelo numérico industrial disponibilizado pelo Pólo de Inovação em Engenharia de Polímeros;
3. Análise comparativa entre o modelo numérico industrial analisado no domínio da viscoelasticidade e o modelo numérico no domínio estático.

1.3 Organização da Dissertação

A dissertação encontra-se dividida em três fases: estado da arte, análise e validação do caso de estudo simplificado e análise do caso industrial. Após a análise do caso industrial são retiradas as devidas conclusões e mencionados trabalhos futuros.

Capítulo II. – Estado de Arte



2.1 Viscoelasticidade

O fenómeno da viscoelasticidade de um material procura encontrar uma combinação de propriedades que influenciam diretamente o comportamento de uma peça quando submetida a uma determinada carga.

As condições para aplicar a carga são cruciais de modo a obter o respetivo *feedback* do material, demonstrando assim as características viscoelásticas que predominam nele, sendo o tempo uma das condições fulcrais, daí que tenha sido usado na maioria dos ensaios propostos [1]. Do mesmo modo, a temperatura imposta ao material é também uma condição importante e que influencia o tempo de resposta deste. Estas duas variáveis, são facilmente relacionadas e ilustradas pelo Princípio de Sobreposição Temperatura-Tempo, permitindo definir as diferentes regiões do comportamento viscoelástico [2].

A dependência do tempo e da temperatura faz com que, por exemplo para períodos de deformação extremamente lentos a tensão de um sólido viscoelástico varie para um determinado valor finito, e no caso de um fluido viscoelástico este tenderá para zero [3]. Tal fenómeno acontece por culpa dos rearranjos moleculares das cadeias poliméricas, ou seja, quando uma carga é imposta num sistema já por si estável, as cadeias vão deslizar umas sobre as outras durante o período de tempo de aplicação da carga de modo a ocuparem estados de menor energia, procurando desta forma tornar o sistema novamente estável. Este é o motivo pelo qual o módulo em função do tempo tende a estabilizar para um determinado valor. Contrariamente, quando se efetuam deformações rápidas, as cadeias que constituem o polímero não têm tempo de se reorganizar, levando a que os fenómenos de viscoelasticidade não se verifiquem, acabando por apenas determinar a zona elástica e a zona plástica, dando-se conseqüentemente a fratura do material [4].



O historial de cargas de um polímero também tem que ser considerado, uma vez que os materiais viscoelásticos possuem uma espécie de memória, que faz com que todas as contribuições de carregamentos passados sejam arrastadas para o presente por forma a serem contabilizados. Esta formulação foi proposta por *Boltzman* em 1876 e designa-se por princípio de Superposição de *Boltzman* [5].

No decorrer do estudo do fenómeno da viscoelasticidade, é necessário atender à variação no comportamento do material numa determinada escala de tempo, para tal foram implementados determinados ensaios, ensaios estes que estão divididos em dois estilos: ensaios de carácter dinâmico e ensaios de carácter estático (transientes) [6]. Convém salientar que os ensaios de carácter transiente possuem certas lacunas para determinadas escalas de tempo, no entanto tais lacunas podem ser preenchidas pelos ensaios dinâmicos [2].

Quanto aos ensaios estáticos, estes subdividem-se em: ensaios de relaxação de tensões e os ensaios de fluência, onde em cada um são implementadas determinadas condições por forma a obter variações referentes ao módulo de elasticidade e à deformação do material.

Relativamente aos ensaios dinâmicos são normalmente efetuados através de ensaios de *DMA* (*Dynamic mechanical analysis*), onde o material é sujeito a uma determinada gama de frequências podendo ainda quantificar e avaliar outros comportamentos que não são perceptíveis nos ensaios estáticos [2].

2.1.1 Ensaios estáticos

Ensaio de Relaxação de Tensões



O ensaio de relaxação de tensões consiste no decaimento gradual da tensão quando o material está sujeito a uma deformação e temperatura constantes, conforme é visível na figura 1 [3].

$$E_r(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$G_r(t) = \frac{\sigma_{sh}(t)}{\gamma_0} \quad (2)$$

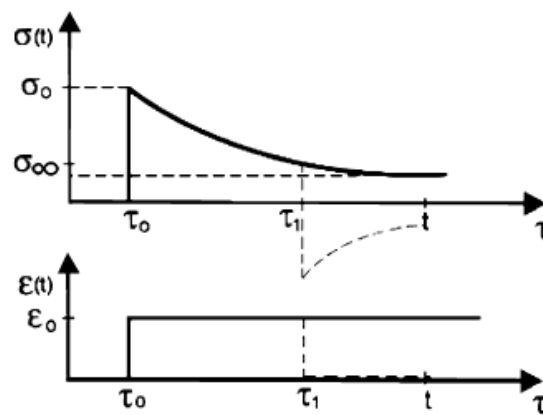


Figura 1: Ensaio de Relaxação de tensões e recuperação (a tracejado) [7].

A deformação constante é a condição para ocorrer relaxação de tensões no material viscoelástico, daí que a razão entre a tensão e a deformação, (1 e 2), num ensaio uniaxial designa-se pelo módulo de relaxação. O comportamento designado por relaxação de tensões de um polímero é extremamente dependente da temperatura especialmente na região vítrea [8]. Na região de transição da curva mestra (curva que é designada em toda a literatura como gráfico superposição temperatura-tempo) [1] a tensão em função do logaritmo do tempo é quase uma linha reta com um declive negativo, este comportamento é descrito pelas fórmulas referidas acima [1].



Na figura 1, o primeiro gráfico mostra que a tensão σ_0 é máxima para o instante τ_0 , sendo que diminuiu progressivamente à medida que o tempo avança e estabiliza para uma tensão σ_∞ .

Para um sólido viscoelástico linear submetido a uma deformação constante ε_0 , a tensão inicial irá ser proporcional à deformação aplicada e decresce com o tempo a uma taxa caracterizada por tempo de relaxação [6]. No tracejado da figura 1 é visível que quando a deformação constante é retirada, existe uma recuperação da tensão que vai tender para um determinado valor.

Os testes de relaxação também podem ocorrer em ensaios de corte [9] e em ensaios de compressão [10], sendo que a denotação dos módulos de relaxação de cada um é designada por módulo de corte $G_r(t)$ e módulo de compressibilidade, $K_r(t)$ ambos nas unidade de Pa (N/m^2).

A descrição dos ensaios de relaxação na grande maioria dos livros é descrita como um teste de relaxação ideal [6], ou seja é aplicada uma deformação instantânea num tempo inicial. Na verdade, não é possível impor uma deformação constante sem ocorrer efeitos dinâmicos provenientes do estiramento instantâneo [11]. Em termos mais realísticos é assumida uma pequena rampa no tempo inicial (figura 2) até estabilizar na deformação pretendida. Este pequeno erro no entanto é desprezável na maioria dos casos [11].

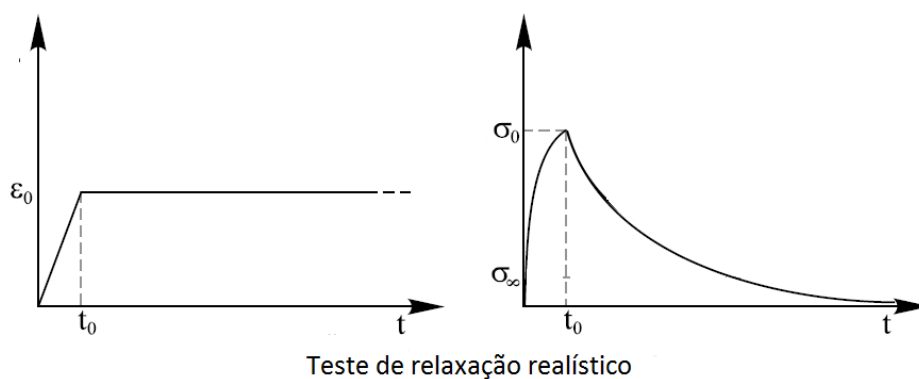


Figura 2: Teste de Relaxação de tensões Realístico [11].



Ensaio de Fluência

O teste de fluência consiste na medição progressiva da deformação do material a partir de uma tensão constante [3].

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma_{sh,0}} \quad (3)$$

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (4)$$

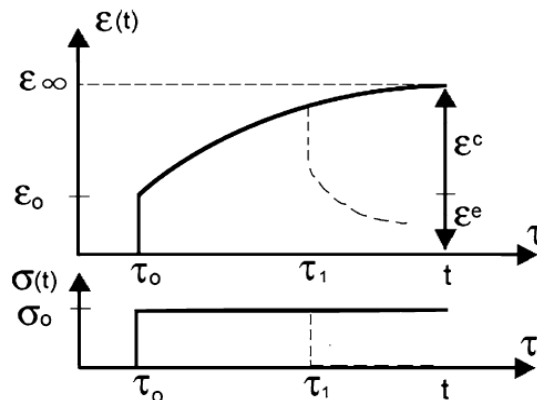


Figura 3: Ensaio de fluência e recuperação (a tracejado) [7].

A fluência é uma função da tensão e do tempo. Para pequenas tensões a deformação é linear, isto significa que a deformação aumenta linearmente com a tensão aplicada. Já para tensões elevadas e prolongadas o comportamento à fluência torna-se não linear [12].

A razão entre a deformação $\varepsilon(t)$ e a tensão σ_0 designa-se por módulo de fluência (3 e 4).



Os ensaios de fluência também podem ser executados em ensaios de corte $J(t)$ e ensaios de compressão $K(t)$. O gráfico de fluência típico de um material viscoelástico é descrito inicialmente por duas fases distintas. Primeiramente quando é aplicada uma tensão instantânea no material, este responde do mesmo modo com uma deformação (figura 3). No entanto o termo σ_0 é descrito por diversos autores [11] como sendo instantâneo, de modo a clarificar o comportamento viscoelástico do material para uma tensão inicialmente imposta, mas fisicamente não é possível aplicar carregamentos de um modo instantâneo nos testes de fluência [3]. Ou seja, é necessário um período de tempo curto (figura 4), para a tensão estabilizar no valor pretendido σ_0 [11]. O tempo que demora até atingir σ_0 tem que ser curto o suficiente de modo a que este tempo seja desprezável, no entanto, se for demasiado curto o ensaio sofrerá efeitos dinâmicos no material (cargas súbitas) [6].

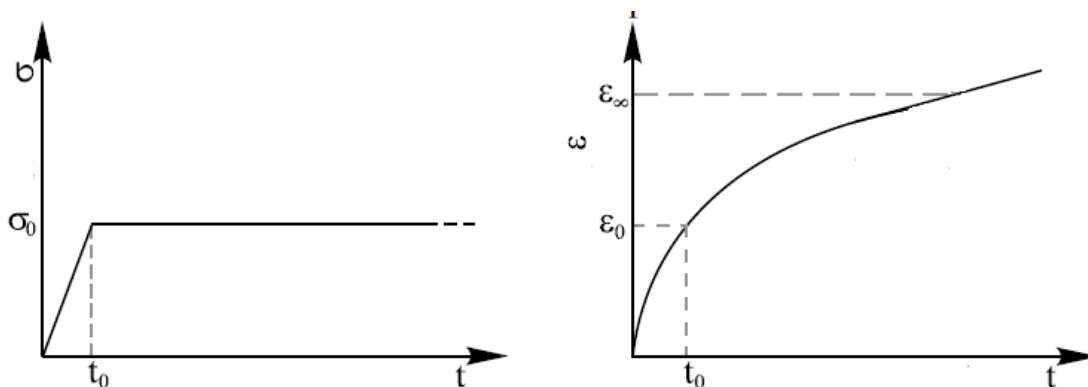


Figura 4: Ensaio de fluência realístico (adaptado [11]).

Este tempo será definido posteriormente como sendo uma “rampa” (figura 4 – lado esquerdo) que vai ser essencial nas condições iniciais de simulação [11]. Após o instante inicial τ_0 , a deformação do material aumenta de uma forma não linear à medida que o tempo avança acabando



depois por obter uma linearidade evidenciada (figura 4 – lado direito). A forma não linear designa-se por fluência primária, e é um dos três estados evidenciados nos testes de fluência [13].

No caso de haver uma recuperação (τ_1 a tracejado no gráfico da figura 3) no aliviar da carga, o material responde instantaneamente recuperando uma parte da deformação, sendo que depois ocorre uma recuperação lenta com o avançar do tempo podendo mesmo recupera-la na totalidade. O valor da deformação recuperada é influenciado pelo valor de aplicação da carga, tempo de duração da carga e tempo de recuperação que o material dispõe [13]. Convém salientar ainda que as propriedades viscoelásticas do material para ensaios de fluência são extremamente dependentes da temperatura, ou seja, para temperaturas na região vítrea a fluência ocorre em longos períodos de tempo. Com o aumento da temperatura, a taxa de fluência aumenta [12].

Relação entre $E(t)$, $G(t)$ e $K(t)$

As propriedades mecânicas dos polímeros geralmente, são definidas por quatro parâmetros elásticos que constituem o material, sendo que, três desses parâmetros são os módulos já abordados anteriormente para os diferentes tipos de cargas e um parâmetro designado por coeficiente de *Poisson* do material. Estes quatro parâmetros estão teoricamente inter-relacionados, ou seja, se dois deles são conhecidos através de determinados ensaios os restantes também podem ser calculados [12].

A abordagem para este tipo de relações, (5),(6),(7), entre o módulo de elasticidade $E(t)$, módulo de corte $G(t)$ e módulo de compressibilidade $K(t)$, merece especial atenção principalmente na definição do coeficiente de *Poisson*.

$$E(t) = 2[1 + \nu]G(t) \quad (5)$$



$$K(t) = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (6)$$

$$G(t) = \frac{E(t)}{2(1 + \nu)} \quad (7)$$

Para os materiais viscoelásticos o coeficiente de *Poisson* pode ser definido de diversas formas, entre as quais, e em via a simplificar o processo de análise, o coeficiente assume-se como uma constante [3]. Isto implica que o sólido viscoelástico seja considerado como um material isotrópico, ou seja, as propriedades mecânicas do elemento são independentes da direção da carga imposta e o comportamento é predominantemente elástico. Na literatura, de um modo mais problemático, o coeficiente de *Poisson* admite uma dependência em ordem ao tempo para materiais viscoelásticos, o que, todavia não será tido em linha de conta na presente dissertação [3]. Contudo, e apesar das limitações que acarreta, é importante saber em que condições é possível assumir o coeficiente de *Poisson* como uma constante ao longo do tempo num material viscoelástico [14].

Segundo as conclusões obtidas por Hilton (2001), uma forma de assumir o coeficiente de *Poisson* como um parâmetro independente do tempo é assumir uma análise “*quasi-static*”, onde o material é homogêneo e incompressível num ambiente isotérmico, todavia este procedimento encontra-se ainda limitado a materiais com coeficientes de *Poisson* de 0,5 [14].

2.1.2 Ensaios mecânicos dinâmicos

Os ensaios mecânicos dinâmicos são bastante utilizados na caracterização da viscoelasticidade que predomina num polímero.



A determinação da variação do módulo de elasticidade em ordem ao tempo-temperatura (curva mestra [1]), é um processo que requer bastante tempo, no entanto, quando ocorre na região de transição vítrea é praticamente impossível determinar as suas variações, uma vez que o tempo necessário para detetar esta transição é muito curto. Daí que se recorra com regularidade a ensaios dinâmicos em função da frequência [12]. Uma das grandes vantagens destes ensaios prende-se com a resposta viscoelástica, que é sondada diretamente para diferentes escalas de tempo ($t = \frac{1}{w}$) de interesse, variando simplesmente a frequência angular (w) [15], o que torna os ensaios muito menos morosos para a obtenção da curva mestra. Outra vantagem destes ensaios assenta na decomposição do material que é constituído pelo termo elástico e pelo termo viscoso, podendo cada um ser determinado [12].

O ensaio consiste na aplicação de uma solicitação sobre uma amostra com uma determinada frequência que é mantida a uma temperatura [8]. A solicitação imposta é vista como uma tensão σ (10) e a resposta da amostra é vista como uma deformação ε (8) (figura 5). Ambas são representadas sinusoidalmente ou em notação complexa σ^* (11) e ε^* (9) [12].

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (8)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 \exp(i\omega t - \delta) \quad (9)$$

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (10)$$



$$\sigma^* = \sigma_0 \exp(i\omega t) \quad (11)$$

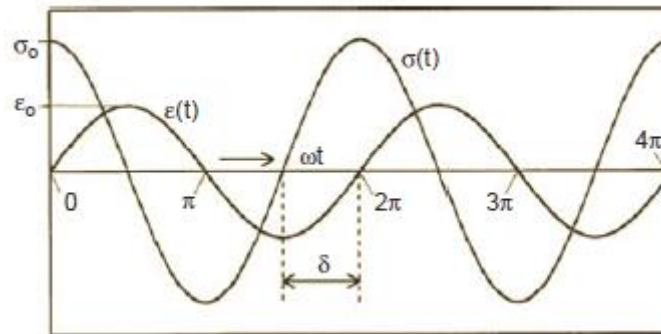


Figura 5: Tensão e deformação na forma sinusoidal e o respetivo ângulo de desfasamento [12].

Uma das principais características dos materiais viscoelásticos assenta no facto do material fornecer, quando é submetido a uma solitação dinâmica, o desfasamento entre a tensão e a deformação. Este desfasamento é definido por um ângulo δ , designado por ângulo de perda ou ângulo de desfasamento [12], e depende de material para material, pois para determinados modelos reológicos como o sólido puramente elástico, a tensão encontra-se em fase com a deformação sendo esse desfasamento nulo. O contrário acontece com um líquido newtoniano, onde existe um desfasamento $\delta = \frac{\pi}{2}$ rad [8].

Estes dois modelos serão expostos de um modo explícito mais à frente, sendo que no caso da viscoelasticidade, e uma vez que os dois modelos predominam o desfasamento encontra-se $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ [8].



Para obter o termo viscoso e o termo elástico do material desenvolve-se a seguinte equação, (12):

$$\begin{aligned} \sigma & \\ = \sigma_0 [\sin(\omega t) \cos \delta + \cos(\omega t) \sin \delta] &= \varepsilon_0 [E' \sin(\omega t) + E'' \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (12)$$

Onde,

$$E'(\omega) \equiv \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta \quad (13)$$

$$E''(\omega) \equiv \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta \quad (14)$$

O termo $E'(\omega)$ (13) é o módulo de armazenamento ou componente elástica do material, e $E''(\omega)$ (14) corresponde ao módulo dissipativo do material ou componente viscosa nas unidades N/m.

No desenvolvimento do termo tensão, assumiu-se que a tensão está adiantada relativamente à deformação (15):

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (15)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (16)$$



De um modo mais simplificado, a notação complexa dos termos é adotada no geral por todos os físicos [12] e sabendo que o módulo de elasticidade complexo é a razão entre a tensão complexa e a deformação complexa tem-se a equação, (17):

$$E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp(i\delta) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) = E' + iE'' \quad (17)$$

A razão entre o módulo dissipativo e o módulo de armazenamento designa-se por fator dissipativo ou amortecimento, (18). [6]

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (18)$$

A formulação imposta para os ensaios dinâmicos normais ao plano, também pode ser aplicada para ensaios dinâmicos de corte [12] sendo que os termos a adotar são ligeiramente diferentes mas com significados semelhantes (G' , G'' , $\sigma_{sh,0}$, γ_0).

2.2 Modelos Reológicos Fundamentais

Partindo da teoria fenomenológica da viscoelasticidade linear, é possível justificar o comportamento de um polímero na altura do relaxamento, quando sujeito a uma determinada carga. Para tal, é desejada uma representação simples de determinados modelos mecânicos análogos, que se aproximam relativamente ao comportamento evidenciado [2]. Esta representação foca-se na combinação de dois modelos reológicos fundamentais no ramo da viscoelasticidade linear. Modelos esses que são designados de uma forma grosseira em toda a literatura científica, como molas e



amortecedores [2, 11, 16]. Sendo que em cada uma destas designações estão associadas determinadas características mecânicas, como por exemplo o armazenamento de energia potencial (molas) e o tempo de resposta a determinadas solicitações mecânicas (amortecedores) [17], ou seja em termos gerais, as molas são representadas pela sua elasticidade e os amortecedores pela sua viscosidade [17].

2.2.1 Modelo Elástico linear

O modelo elástico linear é definido pela lei de Hooke's na medida em que a tensão é diretamente proporcional à deformação [8]. Esta componente quando sujeita a uma tensão, responde imediatamente com uma deformação [12] (Figura 6), sendo que quando é retirada a tensão do material a deformação é recuperada na totalidade (Figura 7 b)). O mesmo sucede no caso de um ensaio dinâmico (domínio da frequência) em que a tensão está em fase com a deformação [12]. Assim pode-se concluir que a resposta mecânica de um componente puramente elástico, quando submetido a uma tensão ou solicitação, é independente do tempo [17]. Definindo o módulo de elasticidade “ E ” como uma constante de proporcionalidade obtém-se a seguinte relação, (19):

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = E \quad (19)$$

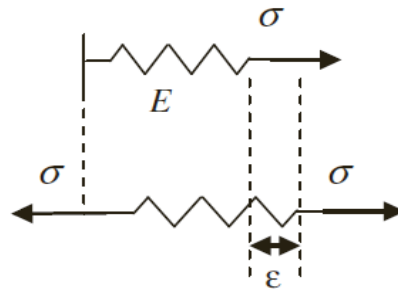


Figura 6: Modelo de Hooke na forma de uma mola [8].

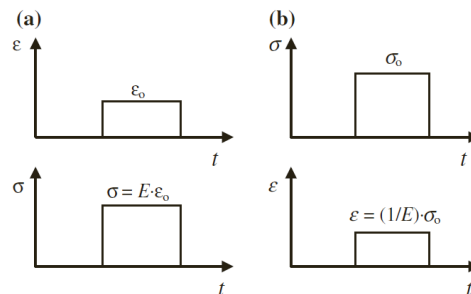


Figura 7: Resposta de um elástico a) deformação constante; b) tensão constante [8].

2.2.2 Modelo Viscoso

O modelo puramente viscoso é representado como um amortecedor (figura 8), e quando sujeito a uma tensão responde com uma deformação que aumenta linearmente com o tempo em que a tensão é aplicada (Figura 9 b)), sendo que esta deformação nunca mais é recuperada [18]. Deste modo, a tensão é diretamente proporcional à taxa de deformação [18]. O fenómeno aqui expresso também se pode designar por fluido com comportamento *Newtoniano*.

Numa breve comparação, a fórmula que descreve este fenómeno (20) é em tudo semelhante ao modelo puramente elástico (19) no entanto são necessárias modificações como: substituição do



módulo de elasticidade pela constante da viscosidade do material e introdução de uma variação na deformação em ordem ao tempo [7]. Ou seja, a resposta deste modelo tem dependência do tempo.

Convém ainda enunciar que nos ensaios mecânicos dinâmicos (domínio da frequência) a tensão aplicada na amostra está exatamente a 90° graus fora de fase relativamente à deformação, isto significa que quando é atingido o máximo de tensão ocorre o início da deformação do material [12].

A formulação matemática que descreve o modelo viscoso é a seguinte (20):

$$\sigma(t) = \eta \cdot \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \quad (20)$$

Integrando a equação (20) em ordem a t , num intervalo entre t_0 e t_1 obtém-se o comportamento viscoso de um fluido, quando aplicada uma tensão σ (21), gerando uma deformação num intervalo de tempo $\Delta t = t_1 - t_0$ (Figura-9 a))

$$\sigma = \eta \cdot \int_{t_0}^t \varepsilon(t) dt \Leftrightarrow \sigma = \eta \cdot \varepsilon_0 (t_1 - t_0) \quad (21)$$

Claro que na Figura-9 a) é necessária uma tensão de igual intensidade, mas de sentido oposto ($-\sigma$) de modo a recuperar a deformação inicial, pois caso contrário a deformação continuaria até um período t_∞ .

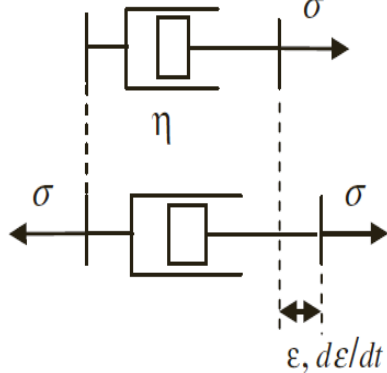


Figura 8: Modelo Viscoso ou Newtoniano [8].

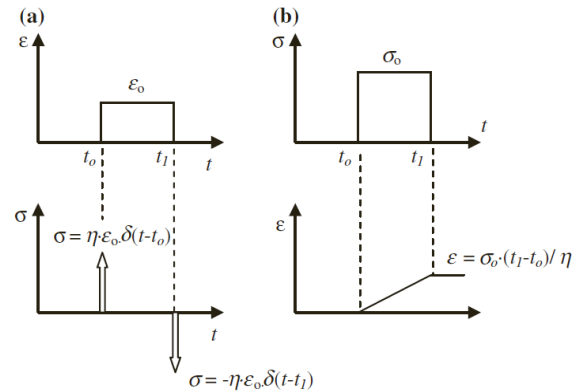


Figura 9: Resposta de um amortecedor : a) deformação constante; b) tensão constante [8].

2.3 Modelos de comportamento viscoelástico

Os modelos de comportamento viscoelástico mais simples regem-se na combinação dos modelos reológicos elementares, designados anteriormente por molas e amortecedores, onde estes são colocados em série ou em paralelo [8].

O primeiro modelo de arranjo é conhecido como **modelo de Maxwell** sendo depois desenvolvido o **modelo de Kelvin-Voigt** [19]. Ambos os modelos têm o objetivo de descrever e “imitar” o comportamento viscoelástico do material [12], sendo amplamente utilizados em estudos teóricos devido à sua simplicidade [8]. Estes modelos proporcionam representações razoáveis do comportamento viscoelástico real para análises quantitativas e conceptuais. Contudo, para um estudo aprofundado, acabam por ser pobres em termos quantitativos, na medida em que são adicionados mais termos de modo a aumentar o número de parâmetros a fim de obter um modelo o mais próximo possível do modelo real [7]. Esta questão será suscitada mais à frente, quando forem referidas as limitações de cada modelos.



Para além destes modelos existem também modelos mais complexos, que visam a combinação dos modelos de *Maxwell* e *Kelvin-Voigt*, procurando descrever o comportamento viscoelástico sob as condições de fluência e relaxação [11]. Desses modelos tem-se como exemplo o **modelo “sólido linear padrão”** [19] e o **modelo de *Burgers*** [12].

A implementação e desenvolvimento dos modelos que se seguem só é válida apenas para polímeros amorfos, na medida em que para polímeros semi-cristalinos os modelos seriam mais complexos, sendo necessário uma reformulação das equações, de modo a estabelecer condições para componente amorfa e para a componente cristalina [1].

Convém ainda ressaltar, que a abordagem no âmbito da relaxação e fluência aplicada nos modelos citados acima, pode ser implementada nas condições para ensaios dinâmicos, adotando as equações na forma complexa ou sinusoidal e realizando uma pequena manipulação matemática [2] é possível obter o módulo dissipativo e o módulo de armazenamento para cada um dos modelos [20].

2.3.1 Modelo de Maxwell

O modelo de *Maxwell* é representado por uma mola e um amortecedor em série (figura 10), com esta representação, ao aplicar-se uma tensão neste modelo a mola sofrerá uma deformação instantânea, enquanto que o amortecedor sofre uma deformação com uma taxa proporcional à tensão aplicada [13]. O modelo em questão permite ainda concluir que a tensão é a mesma em ambos os elementos, e que a deformação do modelo será o somatório da deformação de cada elemento [12].

$$\varepsilon_T = \varepsilon_M + \varepsilon_A \quad (22)$$



$$\sigma_T = \sigma_M = \sigma_A \quad (23)$$

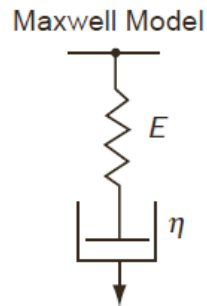


Figura 10: Modelo de *Maxwell* representado por uma mola e um amortecedor em série [12].

Aplicando o diferencial da equação (22), em ordem ao tempo, tem-se a equação constitutiva para o modelo viscoelástico de *Maxwell*:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_M}{dt} + \frac{d\varepsilon_A}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (24)$$

Com essa equação é possível adotar as condições que são impostas nos ensaios de relaxação e fluência (1 e 4) de modo a demonstrar o comportamento viscoelástico. A deformação instantânea será suportada apenas pelo elemento mola, enquanto que o amortecedor irá relaxar gradualmente prevendo um decréscimo da tensão em função do tempo [2].

Sob um ensaio de relaxação a variação da deformação em ordem ao tempo é constante, ou seja:



$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\varepsilon_M}{dt} + \frac{d\varepsilon_A}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \quad (25)$$

Pelo método de separação de variáveis, e integrando a equação (25), dos dois lados têm-se:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (26)$$

onde depois é definido o módulo de elasticidade dependente do tempo utilizando a equação (19).

$$E(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (27)$$

O parâmetro τ da equação (27) designa-se por tempo de relaxação e é a razão da viscosidade pelo módulo de elasticidade ($\frac{\eta}{E}$). Este é o tempo em que a tensão decresce desde a tensão inicial σ_0 até σ_0/e . É de notar que a tensão de relaxação tem um comportamento na forma de uma função exponencial, que decai em função do tempo sendo este resultado característico de fluidos viscoelásticos quando sujeitos a um ensaio de relaxação [2].

Numa abordagem ao modelo de *Maxwell* sob um ensaio de fluência, a equação constitutiva torna-se:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (28)$$

Integrando a equação (28) em ordem ao tempo $[0, t]$ e dividindo por σ tem-se:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sigma} + \frac{t}{\eta} \Leftrightarrow D(t) = \frac{\varepsilon}{\sigma} + \frac{t}{\eta} \Leftrightarrow D(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (29)$$



A forma demonstrada (29) para o comportamento do modelo sob um ensaio de fluência é irrealista [3] na descrição da fluência primária. Segundo a fórmula, a resposta a fluência vs. tempo é uma linha reta em contraste com a curva que é observada normalmente nos ensaios experimentais [7]. Segundo a equação a deformação (29) aumenta indefinidamente para um tempo infinito, levando a que na fluência, o modelo de *Maxwell* assumia-se como sendo um fluido Newtoniano (20), o que não é verdade nos materiais viscoelásticos, sendo a grande limitação deste modelo [21].

2.3.2 Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de *Kelvin-Voigt* baseia-se nos mesmos fundamentos que o modelo de *Maxwell*, exceto na configuração da mola e do amortecedor, que neste caso encontram-se em paralelo (figura 11). Ou seja, a resposta elástica do material não é instantânea mas sim retardada através da resistência da componente viscosa [13].

No caso concreto do Modelo *Kelvin-Voigt*, a configuração da mola e do amortecedor traduz-se na maneira mais simples de representar um sólido viscoelástico [2], na medida em que, aplicando uma carga, os elementos vão sofrer a mesma deformação (31), e a tensão total será o somatório das tensões de cada elemento, (30).

$$\sigma_T = \sigma_M + \sigma_A \quad (30)$$

$$\varepsilon_T = \varepsilon_M = \varepsilon_A \quad (31)$$

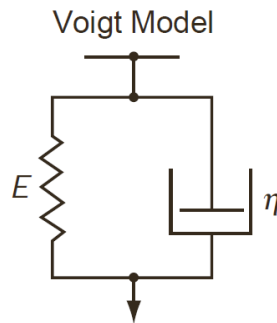


Figura 11: Modelo de *Kelvin-Voigt* representado por uma mola e um amortecedor em série [12].

A equação constitutiva para o modelo de *Kelvin-Voigt* é:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E + \frac{d\varepsilon(t)}{dt}\eta \quad (32)$$

Com a equação implementada (32), do mesmo modo que o modelo de *Maxwell*, é possível impor as mesmas condições para ensaios de relaxação e ensaios de fluência.

No que concerne ao ensaio de relaxação de tensões, o modelo de *Kelvin-Voigt* não descreve o comportamento viscoelástico [7], uma vez que a deformação constante do amortecedor não consegue relaxar, pois em termos matemáticos $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = 0$ na equação constitutiva (32) dando origem apenas $\sigma(t) = \varepsilon(t)E$ [6]. Esta apresenta-se como uma das grandes limitações deste modelo, atendendo a que, ao contrário do que acontece no modelo de *Maxwell*, não descreve a relaxação do material quando é submetido a um teste de relaxação [21].

Relativamente ao teste de fluência, desenvolvendo a equação constitutiva do modelo mecânico [12] obtém-se equação de fluência dependente do tempo de um elemento de *Kelvin-Voigt*.



$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ret}}\right) \right] = D \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ret}}\right) \right] \quad (33)$$

O parâmetro τ_{ret} designa-se por tempo de retardação, consistindo no tempo necessário para que a deformação aumente de 0 a $\varepsilon_0 \approx 0.63\varepsilon$, e é definido como o produto do módulo de fluência pela viscosidade, $\tau_{ret} = \eta D$. O valor limite de fluência é igual a $\varepsilon_\infty = \sigma_0 D$ [12].

O elemento de *Kelvin-Voigt* é válido apenas para descrever qualitativamente o comportamento de fluência de materiais, como por exemplo borrachas, ainda que com fluência limitada [12].

2.4 Modelos de aproximação ao comportamento viscoelástico

Dos modelos expostos anteriormente, verificou-se que eram credíveis apenas sob condições específicas e ao mesmo tempo limitados na simulação não satisfazendo a resposta viscoelástica de um material [22].

Daí que se possa concluir que seriam necessários modelos mais completos, cujo objetivo era obter um comportamento viscoelástico tanto para condições de relaxação, como para condições de fluência. Assim sendo, começou-se por adicionar molas e amortecedores aos modelos já existentes por forma a aumentar o número de parâmetros, conseguindo assim uma melhor aproximação ao comportamento viscoelástico.

Nestes termos, e numa primeira fase, adicionou-se uma mola (19) em paralelo com um elemento de *Maxwell* (24), tal modelo designou-se por “**sólido linear padrão**” ou modelo de três parâmetros (figura 12). O modelo em questão fornece uma aproximação mais realista do comportamento observado em polímeros [6].



$$\sigma_T = \sigma_M + \sigma_{Maxwell} \quad (34)$$

$$\varepsilon_T = \varepsilon_M = \varepsilon_{Maxwell} \quad (35)$$

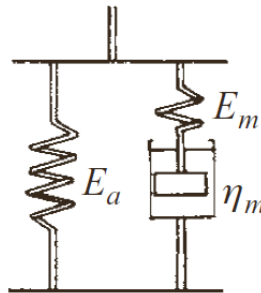


Figura 12: Modelo Sólido linear padrão [6].

A equação constitutiva do modelo rege-se da seguinte forma:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(E_1 + E_2) + \frac{\varepsilon E_2}{\tau} = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{d\sigma}{dt} \quad (36)$$

A formulação (36) do modelo é idêntica ao modelo de *Kelvin-Voigt* (32), no entanto, a obtenção do módulo de relaxação e do módulo de fluência é mais complexa em termos matemáticos.

De acordo com a formulação indicada no livro [23], após a obtenção da equação constitutiva (36), é realizada uma abordagem nas condições de relaxação e de fluência, onde é efetuada uma manipulação matemática que engloba a resolução da equação diferencial, de modo a obter o módulo de relaxação $E(t)$ (37), e o módulo de fluência $D(t)$, (38):



$$E(t) = E_2 + E_1 e^{-t/\tau_r} \quad (37)$$

$$D(t) = \frac{1}{E_2} - \frac{E_1}{E_2(E_1 + E_2)} e^{-t/\tau_{ret}} \quad (38)$$

$$\tau_{ret} = \tau_r \frac{(E_1 + E_2)}{E_2} \quad (39)$$

Este modelo descreve ambos os fenómenos de fluência e relaxação de tensões, bem como a passagem do estado vítreo do material para o patamar de borracha, quando submetido a uma carga sob períodos de tempo curtos onde a viscosidade é infinita [6].

Acresce que o modelo em questão pode ser ainda implementado num determinado grupo de polímeros, tendo como principal restrição o tempo envolvido no estudo do material, uma vez que necessita de ser pequeno o suficiente, pois para períodos relativamente longos não se verifica comportamento viscoelástico linear [24].

Convém ressaltar, todavia, que o modelo “sólido linear padrão” tem ainda outra configuração relativa a este modelo onde a mola é adicionada em série num elemento de *Kelvin-Voigt*, sendo que a abordagem é diferente, na medida em que a deformação global do sistema será a soma de cada elemento individual [22].

Uma das limitações que acarreta este modelo, deve-se ao facto deste procurar assumir apenas uma única viscosidade “ η ”, ao passo que a viscosidade real de um polímero é bastante heterogênea [25].



Na relaxação de tensões, o modelo em estudo possui apenas uma constante de tempo, oferecendo uma aproximação fraca relativamente ao comportamento real de um polímero principalmente para períodos longos de tempo [26].

Outro modelo de aproximação desenvolvido com base em respostas de funções exponenciais simples designa-se por **modelo de Burgers** ou modelo de fluido com quatro parâmetros (figura 13) [11]. Este modelo é constituído por um elemento de *Maxwell* e um elemento de *Kelvin-Voigt* em série, sendo que a equação constitutiva é formulada através do mesmo raciocínio utilizado no modelo de *Maxwell*, só que com a particularidade de a deformação global do sistema ser definida pela adição da deformação de cada modelo individual. A equação (40) é obtida a partir da equação constitutiva [13] do modelo:

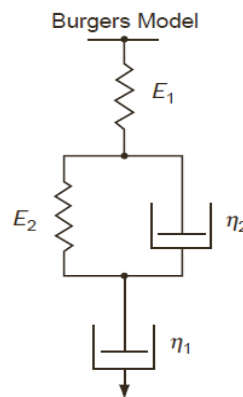


Figura 13: Modelo de *Burgers* ou modelo de quatro parâmetros [12].

$$D(t) = \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/\tau_{ret}}) + \frac{t}{\eta_1} \quad (40)$$

onde $\tau_{ret} = \frac{\eta_2}{E_2}$. Retirando a tensão, a recuperação à fluência é:



$$D_R(t) = D(t) - \frac{t}{\eta_1} \quad (41)$$

O modelo de *Burgers* é capaz então de descrever qualitativamente a resposta de um material sob um ensaio de fluência (40), para pequenas deformações com uma recuperação *a posteriori* [12] ou seja, este modelo consegue capturar os seguintes aspetos sob a aplicação de uma tensão constante [20]:

1. Elasticidade instantânea ou recuperação elástica fruto do elemento E_1 ;
2. Deslizamento molecular devido ao elemento viscoso η_1 ;
3. Elemento entrópico ou borracha com elasticidade E_2 ;
4. Retardação elástica fruto do elemento η_2 que impede o elemento E_2 de avançar ou retrair em caso de recuperação.

Comparativamente com o modelo sólido linear padrão, o modelo de *Burgers* possui mais um amortecedor, fruto da adição do elemento de *Maxwell*, elevando assim o número de parâmetros envolvidos na equação constitutiva deste modelo. Além disso, pode descrever a relaxação do material, ou outro tipo de carga, resolvendo a equação diferencial para cada caso [11].

No que toca às limitações deste modelo, estas assentam, precisamente nos testes de relaxação e fluência para períodos longos, ou seja a tensão irá tender para zero e a deformação aumentará indefinidamente [26].



2.5 Modelos de aproximação generalizados

No caso concreto dos polímeros, uma formulação real que se traduz numa exponencial simples para fluência ou relaxação de tensões não é adequada, sobretudo pela dependência que tem em ordem ao tempo. Digamos que a aproximação ao comportamento real não é correta, pois é expectável, por exemplo que uma única função de relaxação transmita uma grande parte do relaxamento do material numa escala de tempo que experimentalmente não se verifica, evidenciando apenas na maior parte dos casos, relaxamentos com uma década (fator de dez) em termos de escala de tempo. No que concerne aos materiais reais, os fenómenos de relaxamento e fluência são detetados ao longo de muitas décadas na escala de tempo [23].

Na aproximação à realidade de um material viscoelástico, tendo em conta a possibilidade de haver muitas combinações [2], adotaram-se os modelos generalizados de *Maxwell* e *Kelvin-Voigt*, a diferença destes modelos é que são adicionados N elementos de *Maxwell* em paralelo e N elementos de *Kelvin-Voigt* em série.

2.5.1 Modelo de aproximação generalizado de Maxwell-Wiechert e Kelvin-Voigt

Considerando um modelo generalizado de *Maxwell-Wiechert* (*Johann Emil Wiechert, 1861-1928*) com n elementos em paralelo a um teste de relaxamento (figura 14), a deformação em cada elemento irá ser caracterizada dos mesmos modos que o modelo de *Maxwell*.

A diferença deste modelo assenta no número de elementos necessários para que haja um módulo de elasticidade para cada elemento E_i e uma componente viscosa η_i , de modo a que cada tempo de relaxação seja determinado τ_i [2].

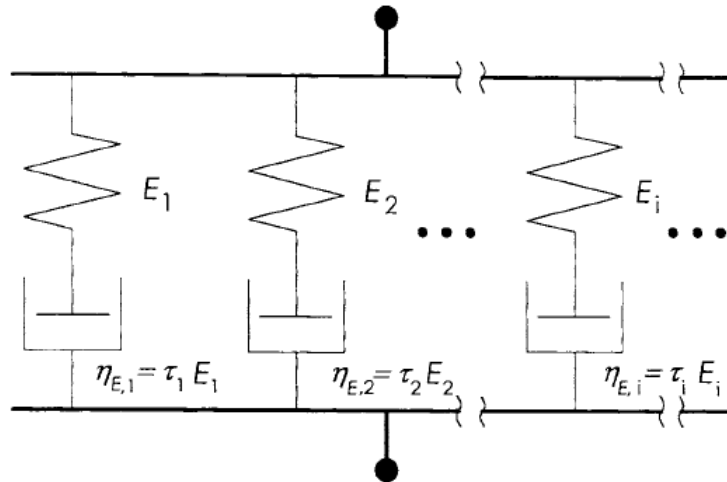


Figura 14: Modelo generalizado de *Maxwell-wiechert* [2].

Segundo a disposição dos elementos da figura 14 a deformação é a mesma em todos eles, e a tensão total é o somatório de todas as tensões de cada elemento. Utilizando o procedimento acima (30), é possível obter a equação generalizada para o modelo de *Maxwell*, atendendo à condição de relaxação desse modelo.

$$\sigma_T = \sigma_{E,1} + \sigma_{E,2} + \sigma_{E,3} + \sigma_{E,4} + \sigma_{E,5} \dots \dots \dots + \sigma_{E,i} \quad (42)$$

Sabendo que o módulo de relaxação para o modelo de *Maxwell* é definido por (43) têm-se:

$$E(t) = \frac{\sigma_E(t)}{\epsilon_0} \quad (43)$$

$$= \frac{\sigma_{E,1}(0)}{\epsilon_0} e^{-t/\tau_1} + \frac{\sigma_{E,2}(0)}{\epsilon_0} e^{-t/\tau_2} + \dots \frac{\sigma_{E,i}(0)}{\epsilon_0} e^{-t/\tau_i}$$



$$E(t) = \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i} \quad (44)$$

onde $\sigma_{E,i}(0)$ é a tensão no i -ésimo elemento no tempo zero.

O módulo de relaxação $E(t)$ na literatura [7], ainda pode ser definido como:

$$E(t) = E(\infty) + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i} \quad (45)$$

onde $E(\infty)$ é o módulo de elasticidade para um t_∞ . Este módulo é comumente adicionado ao somatório, sendo representado como uma mola que se encontram em paralelo, de modo a representar a resposta de um material para períodos de tempo suficientemente longos até atingir um sólido viscoelástico [27, 11].

A figura 15 demonstra que quando é adicionado o elemento mola E_∞ o material comporta-se como um sólido elástico para períodos longos de tempo. Em termos matemáticos, quando τ_i tende para infinito o termo série da equação (45), torna-se nulo dando origem a uma constante [11].

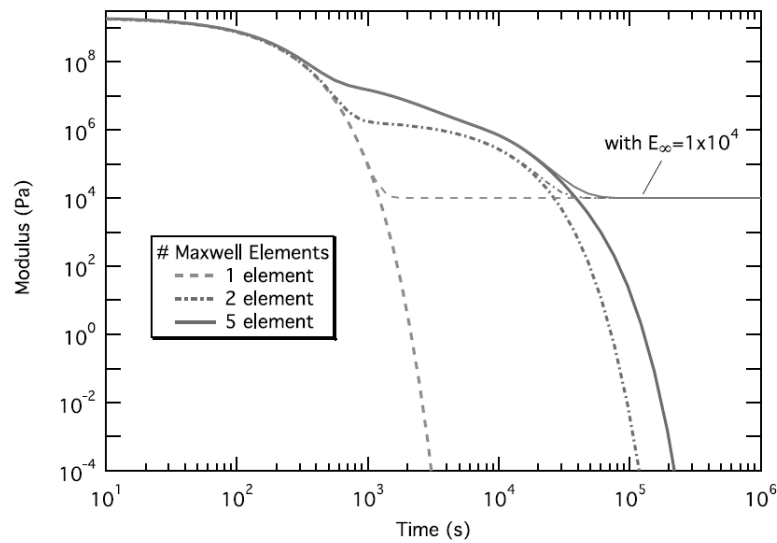


Figura 15: Representação e comparação do Módulo de Relaxação com diferente número de elementos de *Maxwell* [11].

O modelo generalizado de *Maxwell* fornece uma tensão que varia exponencialmente com a adição de contribuições com diferentes tempos de relaxação, um para cada elemento da cadeia. Com isto também é possível ajustar as curvas de fluência experimentais para qualquer grau de aproximação, o que implica que seja necessário obter termos em número suficiente para haver uma boa aproximação [7].

O módulo de relaxação em função do tempo é o somatório de todas as respostas dos elementos individuais, com esta formulação é possível determinar a relaxação para longos períodos de tempo, onde a tensão irá tender para um valor finito diferente de zero, aproximando-se do comportamento real de um polímero [2]. O somatório acima descrito (45) também pode ser definido através de um integral, onde se gera uma função de ponderação que define a concentração de elementos de *Maxwell* com tempos de relaxação definidos [6].



O modelo generalizado de *Kelvin-Voigt* possibilita a determinação do módulo de fluência em ordem ao tempo de forma mais simples, no entanto não é aplicável a um teste de relaxação de tensões. Esta configuração permite concluir que todos os elementos terão a mesma tensão quando sujeitos a uma carga (figura 16). A aproximação deste modelo deve-se à combinação em série de n elementos de *Kelvin-Voigt*, obtendo assim a curva de fluência em função do tempo através de um ajuste dos resultados de cada elemento no gráfico ao longo do tempo [6]. Cada termo da série representa uma determinada porção de tempo, ou seja, entre duas a três décadas de tempo (figura 17).

$$D(t) = \sum_{i=1}^n D_i(1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (46)$$

$$D(t) = \frac{1}{E(\infty)} + \sum_{i=1}^n D_i(1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (47)$$

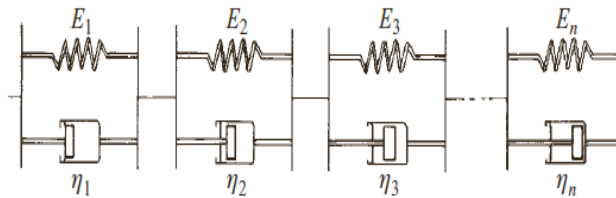


Figura 16: Modelo generalizado de *Kelvin-Voigt* [6].

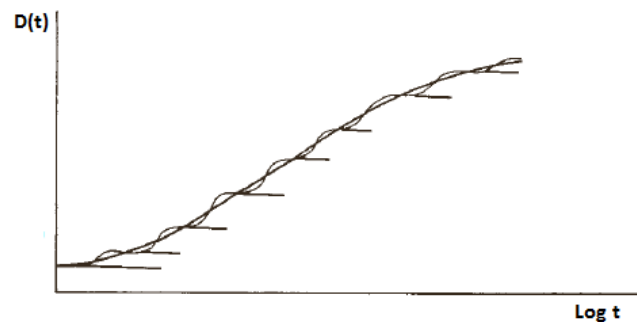


Figura 17: Módulo de fluência em função do tempo contendo a contribuição de cada elemento [6].

A equação (47) também pode ser definida num integral, onde se descreve as contribuições da fluência de cada elemento (figura 17) num intervalo de tempo designado por tempo de retardação [6]. As equações que definem os modelos generalizados permitem um ajuste das curvas com uma precisão considerável, de modo a descrever o comportamento viscoelástico por meio de dados experimentais de fluência, relaxação ou mesmo ensaios dinâmicos. É importante salientar, contudo, que o problema do ajuste de dados, atualmente é mais fácil do que no passado devido à evolução da computação e do *software* comercial existente [20].

2.5.2 Enquadramento das séries de Prony na representação

Com as abordagens de aproximação citadas anteriormente, é possível visualizar os modelos generalizados como determinadas funções matemáticas (49), o que revela as vantagens no uso destas em ferramentas computacionais de simulação.

Uma possibilidade na literatura, incide-se no integral formulado pelo princípio de sobreposição de *Boltzman*, mais propriamente na função de resposta que contabiliza a história dos estímulos passados no instante presente, onde esta é aproximada por meio de um somatório de exponenciais



em série [7]. Daí que se possa concluir que através de um número suficiente de elementos é possível representar o comportamento real de um material viscoelástico para períodos de tempo extremamente longos [11]. Isto significa que apenas são requeridos os termos passados da série como forma de representação da história do material [11]. Esta série é designada por todos os matemáticos como uma série de *Prony-Dirichlet* (*Gaspart Prony, 1755-1839; Gustaf Dirichet, 1805-1859*) [28].

O uso de exponenciais em série, e tal como entende a grande maioria dos cientistas e físicos de polímeros, tem como intuito representar os dados obtidos nos ensaios de relaxação, fluência e na vertente dinâmica [11]. Evidencia-se também que o modelo generalizado de *Maxwell* e o modelo generalizado de *Kelvin-Voigt* são conhecidos matematicamente como **séries de Prony**.

$$E_r(t) = E_\infty - \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (48)$$

$$G_r(t) = G_0 \left(1 - \sum_{i=1}^2 \bar{g}_i^P e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (49)$$

$$G_s(w) = G_0 \left[1 - \sum_{i=1}^N \bar{g}_i^P \right] + G_0 \sum_{i=1}^N \frac{\bar{g}_i^P \tau_i w^2}{1 + \tau_i w^2} \quad (50)$$

$$G_l(w) = G_0 \sum_{i=1}^N \frac{\bar{g}_i^P \tau_i w}{1 + \tau_i^2 w^2} \quad (51)$$



A equação geral das séries de *Prony* (48) pode ser rearranjada (ou convertida) em diferentes formas, de modo a direcionar o processo de cálculo do ajustamento para cada conjunto de dados de cada ensaio distinto. Esta conversão é efetuada através de métodos exatos e de aproximação implementados por diversos autores, que não vão ser abordados aqui mas que é importante realçar [29, 30, 31]. A razão pela qual é necessário este tipo de conversão assenta na dificuldade em correr determinados ensaios, nomeadamente os ensaios de relaxação para materiais muito rígidos, onde com incorporação das conversões existentes é possível obter o módulo de relaxação partindo inicialmente dos ensaios de fluência [30].

A verdade é que a conversão pode, igualmente partir dos ensaios dinâmicos, onde com equações e aproximações apropriadas, se obtém os módulos de relaxação ou fluência [30].

É possível obter o módulo normalizado através da equação geral (49) por forma a suprimir o termo longo (E_{∞}) da equação de modo a simplificar o processo de ajustamento.

Estas séries são muito utilizadas na análise dos elementos finitos no ramo da simulação, pois permitem ajustar as curvas provenientes dos resultados experimentais em parâmetros (\bar{g}_i^P, τ_i) provenientes da série, através de um algoritmo computacional de otimização, e com isto garantir uma melhor abordagem na aproximação real do comportamento mecânico do material [27]. Quando se inicia a abordagem com este tipo de funções, um dos problemas mais comuns no ajustamento da curva consiste na quantidade de variáveis desconhecidas existentes em comparação com o número de equações disponíveis, de modo a não conseguir-se obter uma resolução trivial do problema [32].

A não linearidade que predomina na função, também é um problema que afeta diretamente o modo como a solução final é obtida, ou seja, não possuem solução analítica possível, sendo necessário o recurso a métodos numéricos de aproximação [33]. Face ao exposto são então adotadas técnicas que assumem determinados valores de modo a obter uma expressão inicial, conseguindo posteriormente uma otimização que seja credível com os dados experimentais [34].



Um dos procedimentos propostos no uso das séries de *Prony* define-se pela implementação de uma estimativa inicial dos parâmetros desconhecidos ($E_r(t)$, $G_r(t)$ ou $K_r(t)$), onde depois decorre um processo de ajustamento de modo a obter uma função que descreve o espaço ocupado pelos pontos experimentais (figura 18), ou seja, o que se pretende aqui é descobrir o erro mínimo de ajuste entre eles por meio de uma curva que é representada por uma função onde contêm os melhores parâmetros (esta abordagem será dissecada mais abaixo) [35].

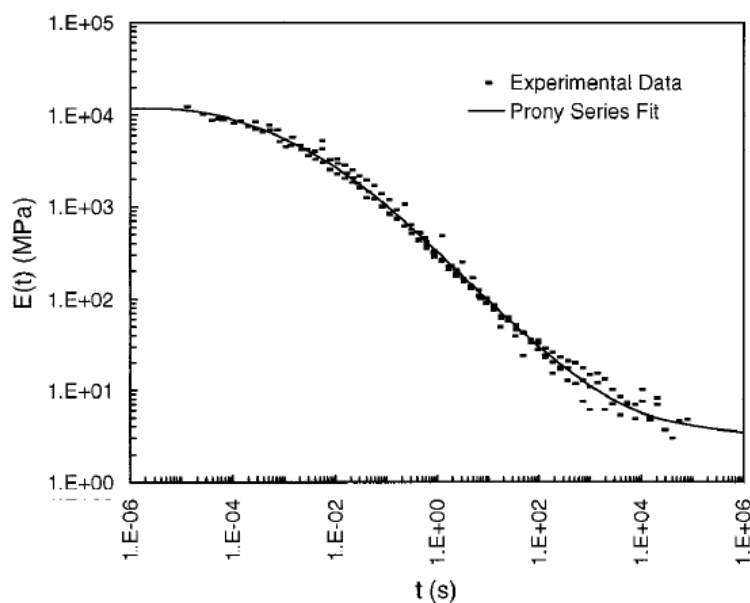


Figura 18: Ajustamento dos dados experimentais por uma função exponencial em série de *Prony* [30].

O número de parâmetros obtidos, irá depender fortemente do número de pontos experimentais escolhidos, tornando o problema por vezes bastante moroso com o aumento significativo de parâmetros. O ideal seria obter uma representação gráfica com o mínimo de parâmetros possíveis, sendo que, com um número demasiado pequeno de termos a função pode não caracterizar todas as variações verificadas nos ensaios experimentais induzindo determinados erros [36]. A solução obtida pelo ajustamento dos dados através de uma série exponencial, é flexível na medida em que, permite



alcançar comportamentos do material para períodos extremamente longos. Ou seja, permite uma representação na ordem das décadas na escala de tempo, possibilitando um maior domínio comparativamente com as funções exponenciais simples [37].

Relativamente à simulação numérica pelo algoritmo dos elementos finitos são utilizadas técnicas de solução recursiva, de modo a obter os parâmetros [38]. Os coeficientes da série podem ser relacionados com molas e amortecedores simples, usando como referência um modelo mecânico de modo a facilitar a interpretação do problema [11], havendo ainda a possibilidade de não seguir qualquer um dos modelos existentes.

Abordando as séries de *Maxwell* como séries de *Prony*, apesar de se revelar extremamente vantajoso na vertente de manipular, ajustar e armazenar numericamente os dados experimentais num conjunto de parâmetros, revela-se ao mesmo tempo, uma dificuldade acrescida em obter o melhor ajuste dos dados, fruto da instabilidade numérica existente [39]. Isto significa que um problema necessita de uma boa formulação para que não haja propagação de erros de arredondamento de operação para operação, de modo a que a solução final não seja afetada [32]. Este problema foi questionado inicialmente por *Gaspard de Prony* [39], sendo que depois foram desenvolvidas diversas técnicas de modo a melhorar o comportamento numérico, apesar de nenhuma possuir uma abordagem mais relevante apenas se diferenciam no modo obtêm a solução final.

2.5.3 Método dos Mínimos quadrados

O procedimento utilizado para o ajuste dos dados experimentais, através das séries de *Prony*, é unânime em todos os métodos de aproximação na medida em que, inicialmente são recolhidos e organizados os dados experimentais de forma a obter um gráfico do módulo de elasticidade $E(t)$ em função do tempo ou frequência [11, 40, 41]. Este gráfico serve muitas vezes como comparativo, de



modo a verificar se os parâmetros obtidos provenientes do ajustamento da função se aproximam dos valores experimentais.

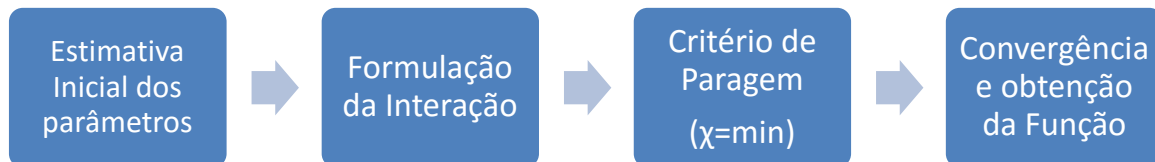


Figura 19: Método geral para a obtenção dos parâmetros que definem a função e caracterizam o comportamento viscoelástico de um material

Posteriormente podem ser assumidos valores estimados dos parâmetros (\bar{g}_i^P, τ_i) que inicialmente são desconhecidos na função. Estes parâmetros pré-definidos podem ser por exemplo valores aleatórios, valores que se enquadram com a escala de tempo dos dados experimentais ou através da experiência prévia com outro problema semelhante ou ainda da solução de um modelo mais simplificado [33]. Os valores pré-definidos como aproximação inicial vão ditar o número de cálculos que se irá realizar, sendo que a perceção do utilizador é essencial, levando mesmo a alterar os parâmetros várias vezes por forma a simplificar o processo. Com isto, relaciona-se os valores obtidos em cada função (G_s e G_l para o caso dos testes de DMA) com os dados experimentais ($G_s(w)$ e $G_l(w)$), pelo método dos mínimos quadrados. Significa isto que os valores vão ser aproximados de modo a minimizar o erro entre os cálculos obtidos da previsão e os dados experimentais, por forma a obter o conjunto de parâmetros que melhor se enquadram, conseguindo assim aproximar os pontos na forma de uma curva.

Convém salientar que este tipo de ajustamento necessita de um determinado número de interações, ou seja, as soluções são obtidas através da implementação de um conjunto de cálculos que visam no final satisfazer a condição (critério de parageme), onde o erro é de facto minimizado [34], levando a solução a convergir (figura 19). Este é o procedimento mais comum na resolução de



equações não lineares, pelo que em alguns artigos o método dos mínimos quadrados é designado também por método não linear dos mínimos quadrados [42].

No concerne à frequência, os dados experimentais normalmente são obtidos através de ensaios *DMA* (*Dynamic mechanical analysis*), sendo adotados diversos métodos de modo a resolver o problema dos mínimos quadrados, obtendo desta forma resultados bastante satisfatórios. Como foi frisado anteriormente, existem diversos algoritmos que permitem resolver o problema dos mínimos quadrados e que podem ser abordados em duas vertentes: vertente direta do algoritmo, e via interativa ou método iterativo [33]. A diferença assenta no modo como é obtida a solução, ou seja, para o caso do algoritmo direto, este fixa um número de operações aritméticas formando um conjunto de equações simples com a consequência de obter matrizes extremamente densas e bastante morosas em resolver (ideal antes da era computacional).

No caso do algoritmo iterativo a solução é obtida inicialmente através de uma aproximação inicial, que vai sendo melhorada gradualmente com o cálculo das interações efetuadas, até que os critérios implementados sejam cumpridos, convergindo assim para o conjunto de soluções finais. Esta abordagem normalmente é ideal para equações do tipo não linear. A convergência nem sempre é cumprida, sendo necessárias determinadas condições por forma a acelerar o processo [33].

Das técnicas implementadas que abordam os dados experimentais no domínio da frequência destacam-se: método de regularização de *Tikhonov*, método mínimos quadrados com restrição quadrática, regularização de entropia máxima, entre outros [43]. Convém ainda salientar, que é possível modificar estas aproximações de modo a serem aplicadas a dados no domínio do tempo [44].

O procedimento para a minimização do erro da soma dos quadrados, permite então aproximar a função por meio de parâmetros apropriados que inicialmente eram desconhecidos e que representam a série [11]. Convém ressaltar que a maioria dos procedimentos existentes só são exequíveis com o recurso de *software* computacional, de modo a diminuir o tempo de cálculo das



iterações criando uma otimização bastante credível no ajustamento [36], sendo que, o objetivo geral nos anos 60 era criar novas metodologias de modo a simplificar os procedimentos numéricos [45].

2.6 Técnicas de aproximação para a obtenção curva

2.6.1 *Multidata Method*

Partindo da metodologia descrita anteriormente, foi desenvolvido um método designado por “*Multidata method*” (Cost e Becker, 1970), que se baseia no método dos mínimos quadrados [46], sendo o erro minimizado entre os valores experimentais e os valores das funções calculadas (52). Para tal são adotadas determinadas condições (53), de modo a garantir que o erro é de facto minimizado [41].

$$\chi^2 = \sum_m [G(t_i) - G_r(t_i)]^2 = \min \quad (52)$$

$$\frac{dG_r(t_i)}{d\bar{g}_i^P} = e^{-\frac{t}{\tau_i}}; \quad \frac{d\chi^2}{d\bar{g}_i^P} = 0 \quad (53)$$

Após a definição das condições que minimizam o erro é adotado um procedimento, com o intuito de colocar a formulação na forma matricial, permitindo assim determinar os restantes parâmetros desconhecidos da função de *Prony*, \bar{g}_i^P . O procedimento que visa determinar a forma matricial do problema, não será aqui enunciado encontrando-se devidamente documentado [41].

A escolha de um número suficiente de tempos de relaxação permite obter uma aproximação razoável, que minimiza o erro entre os dados experimentais do módulo e da função calculada [11]. O



contratempo na determinação dos parâmetros rege-se nas oscilações existentes, o que implica uma discrepância elevada no ajustamento da função, havendo ainda a possibilidade de os parâmetros serem positivos ou negativos criando uma certa instabilidade no método.

O método de aproximação desenvolvido por *Coste Becker*, foi ainda retificado por *Bradshaw* e *Brinson* [44] e será exemplificado mais abaixo, revelando também as suas limitações. De igual modo serão ainda expostos um número significativo de métodos propostos na literatura, onde evidenciam determinadas modificações na metodologia com o objetivo de complementar o ajustamento caracterizando o modelo viscoelástico.

2.6.2 Método do Controlo do Sinal

O método do controlo do sinal, parte do método revelado anteriormente, típico no ajustamento das séries, sendo que foi desenvolvida uma abordagem complementar por *Bradshaw e Brinson (1997)*, que se designa-se por **método de controlo** e que tem como base uma modificação no uso do algoritmo dos mínimos quadrados.

Atendendo à aproximação é necessário que, em primeiro lugar, sejam selecionados os tempos de relaxação de uma forma coerente e matemática baseada na escala de tempo dos dados, podendo mesmo serem definidos tempos que não se encontram nos dados de modo a facilitar o seu ajustamento [44]. O grupo de tempos de relaxação é escolhido de acordo com a suavidade da curva do gráfico, a fim de proporcionar uma função matemática que se enquadre com os dados do material. Após a escolha dos tempos de relaxação, o problema centra-se na aproximação dos coeficientes \bar{g}_i^P , uma vez que o procedimento utilizado com a condição de minimizar o erro entre os dados experimentais e os obtidos na função $G(t)$ pela aproximação dos mínimos quadrados. Tipicamente este procedimento fornece valores de \bar{g}_i^P negativos e positivos, o que pela relação física entre \bar{g}_i^P e as



molhas no modelo mecânico é prioritário que estes se mantenham positivos (de modo a satisfazer todos os princípios físicos e termodinâmicos) [11]. É então necessária uma modificação no algoritmo dos mínimos quadrados por meio de um procedimento iterativo de otimização, baseado nas primeiras derivadas relativas a cada coeficiente desconhecido (*Levenberg-Marquadt*). Assim, inicialmente todos os coeficientes são definidos como sendo positivos e utilizados para prever um novo conjunto de valores, de forma a calcular o erro [11, 44]. Caso esse conjunto de valores minimize o erro torna-se na nova interação, caso o contrário, o avanço iterativo imposto terá que ser menor, através deste procedimento é possível prever a curva mestra de um polímero bem como as curvas de fluência e relaxação [11].

2.6.3 Método da colocação

O **método da colocação** é um método de ajustamento desenvolvido no ano de 1961 por *Schaperly* onde se aborda os modelos viscoelásticos, tanto para ensaios estáticos como para ensaios dinâmicos. Neste método são assumidos pontos de colocação de tempo e de valores τ_i , devidamente intervalados (na ordem das décadas), o que leva a que um conjunto de n equações algébricas que contêm os coeficientes posteriormente determinados através da resolução de uma matriz [47].

Um dos procedimentos iniciais para implementar o método desenvolvido por *Schaperly*, foca-se na formulação da equação (54) onde esta pode ser rearranjada em colunas vetor e matrizes (55) de modo a determinar os parâmetros desconhecidos [47].

$$E_r(t) - E_\infty = \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}, i = 1, \dots, N \quad (54)$$



$$\{\mathbf{A}\} = E_r(t) - E_\infty; \{\mathbf{B}\} = \sum_{i=1}^N e^{-\frac{t}{\tau_i}}; \{\mathbf{C}\} = E_i \quad (55)$$

Um dos típicos problemas possíveis centra-se no cálculo dos valores dos parâmetros, em que alguns podem ser negativos em virtude da matriz inversa obtida. Além de mais é possível ocorrerem pequenas variações que recaem para um dos lados da matriz, o que conseqüentemente provoca grandes alterações nos cálculos [41].

Finalmente, é ainda possível executar uma função linear através do uso da programação (*MATLAB*) recorrendo a função na forma rearranjada (54) implementando restrições de modo a garantir que os coeficientes sejam positivos e satisfação a equação [48].

Artigos recentes [9] permitiram comprovar a veracidade e precisão que este método de obtenção acarreta para implementar uma via alternativa, evitando assim, sistemas de equações não lineares bastante complexos [49]. No caso do artigo de Sousa & Soares (2007), onde é implementado o método de colocação, os termos independentes da equação, são facilmente deduzidos partindo do valor mínimo, utilizando um gráfico de dispersão simples dos dados experimentais. No seguimento deste trabalho foi ainda realizado um trabalho comparativo entre o método de colocação e o método geral dos mínimos quadrados, utilizando um *software* designado como *ViscoTool*, onde são aplicados métodos de conversão no software entre as funções de fluência e as funções de relaxação [50].

2.6.4 Procedimento-X

Um dos primeiros métodos de aproximação foi designado como *Procedimento X*, proposto por *Tobolski* e *Murakami* em 1959 [51]. Esse método consiste numa aproximação baseada nas



determinações sucessivas do módulo parcial e dos tempos de relaxação, partindo inicialmente do tempo de relaxação mais longo da série, isto significa que se decompõe a função exponencial na forma de um logaritmo, adicionando o termo mais longo da série (56), referente ao tempo de relaxação (E_p, τ_p) .

$$\log[E_r(t) - \{E_\infty\}] = \log \left[\sum_i E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + E_p e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right] \quad (56)$$

Assim, efetua-se um gráfico dos termos em função do tempo, e se o tempo de relaxação mais longo ficar suficientemente longe dos termos anteriores, consegue-se obter uma assíntota onde depois é determinado o seu declive e interceção, e conseqüentemente fixa-se os restantes parâmetros de interesse. Este processo normalmente é repetido mais do que uma vez. Os tempos de relaxação obtidos têm que ter um espaçamento intermediário uniforme e os gráficos obtidos devem ser linhas retas para uma região suficientemente longa, por forma a conseguir uma boa extrapolação e uma determinação adequada do declive da assíntota [41]. Convém ainda referir que os resultados obtidos através deste ajustamento, têm que ser comparados com os dados experimentais de modo a verificar a validade do método. A fiabilidade desta aproximação é por vezes pouca precisa devido à falta de espaçamento entre os tempos de relaxação e retardação [41].

O procedimento aqui em causa não é válido para ensaios de carácter dinâmico ou seja, apenas funciona com funções exponenciais no domínio do tempo onde são englobados os ensaios de relaxação e os ensaios de fluência. Existem ainda incertezas computacionais a quando da sua implementação [41].



2.6.5 Técnicas baseadas em funções espectrais

Para eliminar as dificuldades relativas a oscilação e variação abrupta dos parâmetros obtidos, bem como englobar o comportamento de materiais mais específicos para períodos de tempo extremamente longos, a representação através de uma soma de exponenciais em série torna-se por vezes inadequada. Nesse sentido foram desenvolvidos, em décadas distintas, dois métodos baseados em linhas espectrais (figura 20) com o intuito de obter a função que descreva o módulo de relaxação ou fluência [3, 28].

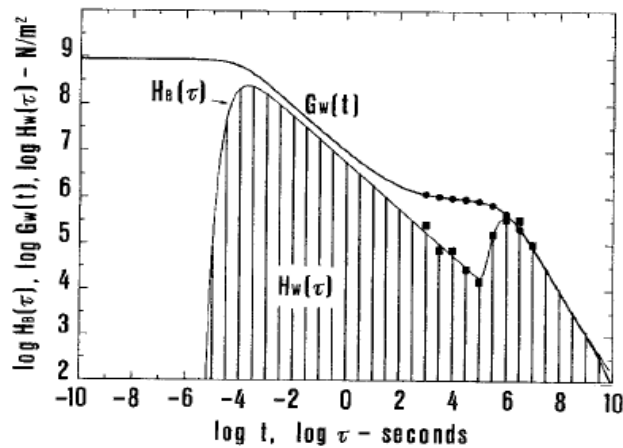


Figura 20:Gráfico representativo de uma distribuição espectral que define a viscoelasticidade de um material [52].

A formulação de *Prony*(49) pode ser alterada de modo a introduzir um novo termo designado por espectro de relaxação (ou retardação) discreto, onde é normalmente denotado por, $H(\tau)$, e é designada como uma espécie de distribuição espectral. Utilizando a equação (48), é possível colocá-la na forma de um espectro contínuo de relaxação, fluência ou mesmo no domínio da frequência:

$$E_r(t) = E_\infty + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) e^{(-\frac{t}{\tau})} d \ln(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{H(\tau)}{\tau} e^{(-\frac{t}{\tau})} d\tau \quad (57)$$



podendo adotar ainda uma forma equivalente,

$$E_r(t) = E_g + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] d\ln(\tau) \quad (58)$$

onde E_g , é o módulo no estado vítreo que é obtido quando $t = 0$ na equação (58),

$$E_g = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i \quad (59)$$

sendo que a relação entre E_g e E_{∞} , é dada por

$$E_g - E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) d\ln(\tau) \quad (60)$$

As equações discretizadas no domínio da relaxação na forma espectral, também podem ser definidas no domínio da fluência, pelo que a denotação do termo espectral na fluência é definido como sendo $L(\tau)$ [3]. Na forma dinâmica são ainda definidos na forma espectral, o módulo dissipativo e o módulo de armazenamento pelo que não serão aqui enunciados detalhadamente, estando estes devidamente documentados [53, 54, 55].

Clauser e Knauss (1968) propuseram um método de determinação baseado no domínio do tempo, e que consiste na regularização da solução final através de funções espectrais que irão definir a curvatura do módulo de relaxação em função do tempo. Para obter a função espectral $H(\tau)$ parte-se inicialmente da série de *Prony* onde depois é possível adotar uma representação alternativa na forma



de um integral contendo a função de interesse, sendo que a resolução desta equação permite determinar a função espectral (61) que vêm numa forma modificada da lei de potência [56].

$$H(\tau) = \frac{E_g - E_\infty}{\Gamma(n)} \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^n e^{-\frac{\tau_0}{\tau}} \quad (61)$$

Esta aproximação teve como principal objetivo em diminuir a divergência entre os pontos do gráfico, de modo a torna-lo mais suave possível sob determinadas restrições impostas (fator de suavidade e minimização do erro relativo), permitindo diminuir o efeito das oscilações, dando origem a soluções aceitáveis para um espectro de relaxação. Esta aproximação não é aplicável no espectro de fluência devido a problemas de instabilidade numérica [56].

São ainda inicialmente impostos procedimentos matemáticos de modo a resolver o integral (), obtendo uma solução formal do problema [56].

2.6.6 Window-method

O Window-method é da autoria de *Emri Tschegl* (1993) e deriva do método desenvolvido por *Clauser e Knauss* (1968), sendo que assenta no facto de um algoritmo computacional interativo tornar-se disponível para o cálculo da distribuição espectral partindo inicialmente dos dados experimentais [57].

Um das principais vantagens reside na sua natureza interativa e na sua abordagem matemática mais simples, evitando matrizes que poderiam gerar resultados negativos [52]. Os autores acreditam que o problema é basicamente um procedimento de ajuste da curva.



Este método foca-se no cálculo da intensidade das linhas espectrais que correspondem a determinados tempos t_k , num domínio definido (*Window*) sendo que, a distribuição destas linhas permite determinar as curvas de relaxação ou fluência garantindo parâmetros positivos da série. O *Window method* baseia-se no facto de apenas um único termo da série de *Prony* ser significativamente dependente do tempo numa determinada faixa (normalmente numa faixa de duas décadas de tempo) [40]. Esta dependência pode ser demonstrada matematicamente, normalizando a equação que descreve o comportamento viscoelástico e dividi-la de modo a retirar as devidas conclusões [52]. A faixa mencionada acima, é abordada como *Window-1* e é definida como um intervalo onde são calculadas as linhas espectrais, partindo de suposições apropriadas e influenciadas por linhas vizinhas provenientes de outro intervalo, onde depois ocorre um conjunto de interações para melhorar as linhas espectrais inicialmente calculadas [52]. A literatura recentemente têm dado especial atenção aos métodos de ajuntamento por via da distribuição de funções espectrais, sobretudo devido ao desenvolvimento e disponibilidade de computadores suficientemente potentes [57].

Baumgaertel e Winter propuseram um método onde é representada a relaxação por meio de uma função espectral com o mínimo de elementos (ou modos) de *Maxwell* possíveis. Partiram inicialmente dos dados experimentais referentes aos ensaios dinâmicos onde é efetuada uma conversão do domínio da frequência para o domínio do tempo [58]. Este modo de representação da função designa-se por "*PM-spectrum*" e baseia-se na ideia de que os tempos de relaxação discretos devem ser livremente ajustados de modo a que o algoritmo convirja para valores que são característicos do material. Uma das grandes vantagens assenta na rápida convergência da regressão do algoritmo mesmo para espectros mais complicados [59].



2.7 Outras metodologias e estudos implementados

Foram ainda realizadas diversas metodologias e estudos que procuram na generalidade, complementar e corrigir os métodos de aproximação citados anteriormente, de forma a diminuir o desvio entre os dados obtidos e os parâmetros que caracterizam a função, bem como garantir a sua positividade.

Ramkumar (1997) usou um método que se designa por método de regularização em que é utilizada uma programação quadrática (RQP) de modo a minimizar as oscilações existentes nos dados experimentais e os parâmetros obtidos, conseguido assim derivar o espectro de relaxação com os dados de entrada de frequência [60]. Ainda efetuou uma combinação dos dados de entrada (G' , G''), de forma a garantir resultados precisos para tempos de relaxação curtos e longos [60]

O problema relativo aos coeficientes negativos da série de *Prony* e oscilação dos resultados experimentais ainda foi abordado por *Park e Kim* (2001). Estes optaram pelas séries da lei de potência como alternativa, com uma pré suavização apropriada, seguido de uma representação do modelo das séries de *Prony* na fluência [61]. Relativamente ao ajustamento dos valores pelas séries da lei de potência, verificou-se que essa representação apesar de ser anterior às séries de *Prony*, não era válida para uma grande parte dos materiais [61].

Sousou (1966) estudou os diversos métodos de otimização anteriormente descritos e implementou depois o seu método de otimização que se baseia na aproximação ao método dos mínimos quadrados. No entanto eram colocadas determinadas restrições aos coeficientes, apresentando depois exemplos de ajustamento [62]. Revelou ainda, a importância de os parâmetros serem positivos no ajustamento [62].

Rodriguez apresentou um método, que se encontra documentado [63], onde as séries de *Prony* são ajustadas de forma a utilizar apenas dois termos da série para os materiais em questão,



implementando um ajustamento por interpolação. A utilização de dois termos da série na interpolação permite obter uma exatidão impressionante, isto é, coincidentemente a utilização de apenas dois termos deve-se muito por culpa da impossibilidade de interpolar para três ou mais termos exponenciais de onde resultam raízes complexas ou valores negativos que não permitem a sua resolução. Ainda para o cálculo dos parâmetros, é efetuada uma matriz onde depois é introduzido o método dos mínimos quadrados. Um dos grandes objetivos deste trabalho era também demonstrar que com um *software* iterativo seria possível reproduzir o método conseguindo assim ajustar a função. Neste artigo, encontra-se de forma detalhada, o procedimento matemático [64] para a obtenção dos parâmetros pelo método de *Prony* e a discretização do algoritmo implementado no programa “*FORTAN PRONY*” bem como os resultados obtidos provenientes do ajustamento [34].

Hills, apresentou uma técnica onde as séries de *Prony* podem ser ajustadas sem a necessidade de assumir valores dos parâmetros ou seja, esta técnica permite determinar a funções que melhor se ajustam baseando-se nos dados de entrada e na minimização da diferença entre a variável atual e a variável dependente calculada. É realizada uma abordagem não restritiva na otimização da função, mas na verdade, as variáveis que a definem, são implementadas determinadas restrições de modo a não causar uma discrepância nos valores obtidos conseguindo assim assegurar que o significado físico seja cumprido para materiais viscoelásticos (este tópico já foi abordado nos modelos viscoelásticos). Foi utilizado um código de otimização com os critérios especificados acima onde é usado para determinar as constantes da função que minimizam o erro residual da soma dos quadrados de modo a obter uma curva o mais próxima possível dos resultados experimentais [65].

Bower (1994), desenvolveu um método (*DOI- The domain of influence method*) onde é utilizado para descrever as curvas de relaxação de modo a minimizar e maximizar algumas características do problema. O ajustamento dos parâmetros da série de *Prony* também é adotado na medida em que o erro é minimizado entre a função calculada pelos parâmetros estimados e os dados obtidos no ensaio viscoelástico. Este método não inclui qualquer correção de erros. Esta metodologia



foi implementada num programa de codificação, produzindo uma ferramenta de apoio à determinação e otimização dos coeficientes que caracterizam o comportamento viscoelástico [66].

2.8 *Abaqus FEA*

As metodologias descritas anteriormente requerem procedimentos computacionais em determinadas fases, ou seja, ferramentas com *software* apropriado de modo a implementar o algoritmo que minimiza o erro residual entre os dados experimentais e os dados calculados. O que conseqüentemente leva à otimização e posteriormente à determinação dos melhores parâmetros possíveis para definirem a função, descrevendo o material termoplástico para tempos longos.

O *Abaqus* é um *software* comercial que analisa componentes ou estruturas pelo método dos elementos finitos. Este *software* possui uma interface bastante eficaz, permitindo analisar e resolver problemas de simulação, como: definição dos carregamentos, condições barreira do problema, seleção do número de etapas pretendidas, geração da malha e possibilidade de definir o modo específico das propriedades do material [67].

A definição das propriedades viscoelásticas de um polímero no *Abaqus* podem ser seguidas por diversas vias, isto significa que, a interface nas definições do material permitem introduzir, por exemplo os dados experimentais referentes aos testes de relaxação ou fluência no domínio do tempo, de modo a ajusta-los em parâmetros provenientes da série de *Prony* [67]. Estes parâmetros obtidos a partir de dados no domínio do tempo podem igualmente ser usados para as definições do material no domínio da frequência, ocorrendo automaticamente a conversão [67].

O ajustamento adotado pelo *Abaqus*, atende aos mesmos modos que o método não linear dos mínimos quadrados, sendo utilizado nos módulos normalizados de compressibilidade e de corte. No que toca aos testes cíclicos é igualmente implementado o método dos mínimos quadrados nos



módulos de armazenamento e dissipativo, onde o objetivo é minimizar o erro (χ^2), (62), sendo \bar{G}_s e \bar{G}_l dados experimentais.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{G_{\infty}^2} [(G_s - \bar{G}_s) + (G_l - \bar{G}_l)] \quad (62)$$

É importante referir que apenas os parâmetros de *Prony* se podem introduzir nas definições do material recorrendo ao método de ajustamento indicado acima.

Relativamente às definições do material no domínio da frequência podem ainda ser determinados os parâmetros pela lei da potência e por uma formulação que tem como base nas séries de *Prony*, onde se permite definir o módulo de armazenamento e o módulo dissipativo respetivamente [67].

Com o *software Abaqus* é ainda possível definir duas especificações na calibração dos parâmetros das séries de *Prony*: definir a tolerância do erro da raiz quadrada média admissível e definir o número máximo de termos da série de *Prony*, N_{max} . Assim, a convergência será obtida através do número mínimo de termos respeitando a tolerância do erro definida, sendo que o número de termos necessários não devem ser mais do que o número de escalas logarítmicas geradas pelos dados experimentais normalizados [67].

Capítulo III. Caso de estudo simplificado



O caso de estudo simplificado enunciado neste capítulo visa implementar um conjunto de condições num corpo de prova, com o intuito de analisar e verificar o comportamento viscoelástico do material, bem como confirmar que a metodologia implementada no simulador é credível e viável o suficiente de modo a extrair resultados bastante próximos.

A metodologia implementada baseia-se nas condições na *interface* do simulador *Abaqus*, onde são necessários determinados procedimentos que visam essencialmente definir o sistema e assentam essencialmente em dois pontos fundamentais:

- Definição das propriedades do material viscoelástico;
- Definição das condições barreira/carregamentos.

Neste caso simplificado, de uma forma geral, é um ensaio mecânico experimental convencional no ramo da engenharia, onde estão inseridos essencialmente os ensaios de tração, ensaios de compressão e os ensaios dinâmicos (DMA).

Partindo inicialmente de uma pesquisa bibliográfica intensiva, foi possível encontrar no ramo da literatura, artigos científicos que realizassem uma análise e discussão de resultados experimentais referentes ao comportamento viscoelástico do material no domínio do tempo. Nesse sentido, são analisados e selecionados os artigos que, minuciosamente, contenham a informação relativa aos ensaios experimentais realizados, de modo a implementar as condições descritas em cada artigo. Ou seja, o que se pretende é que através do artigo científico analisado, seja executado no *Abaqus* ensaios de interesse por forma a validar a metodologia adotada e definir as propriedades viscoelásticas do material, bem como as condições de ensaios utilizadas por forma a implementar no caso industrial.

Posteriormente, será também possível iniciar períodos de recuperação do material de modo a verificar a credibilidade do material viscoelástico bem como identificar o tipo de deformações que é possível obter através do simulador.



De um ponto de vista pedagógico, a abordagem a determinados casos de estudo permite obter uma certa familiarização com o simulador *Abaqus*, levando a que não exista qualquer problema na abordagem ao modelo industrial proposto.

3.1 Metodologia

3.1.1 Definições das propriedades do material viscoelástico

No recurso ao *software* de simulação no domínio da viscoelasticidade é indispensável definir o material, para tal é necessário obedecer a um conjunto de critérios que estão intrinsecamente implementados.

Dentro das definições do material é obrigatório, além da definição das propriedades viscoelásticas, definir as propriedades elásticas onde se engloba o módulo de elasticidade e o coeficiente de *Poisson*, bem como a densidade do material, onde quer uma quer outra, podem ser obtidas trivialmente através da informação fornecida pelo artigo em questão, ou pela ficha técnica de um material equivalente. A questão centra-se então na definição da viscoelasticidade.

No Estado de Arte foram enunciados diversos procedimentos de aproximação ao comportamento viscoelástico, com objetivo comum de determinar parâmetros aproximados que definem a função exponencial em série (49), este é um dos caminhos possíveis a seguir no *Abaqus*.

3.1.2 Método abordado no caso de estudo simplificado

Um dos caminhos alternativos possíveis para definir o material no simulador assenta na abordagem dos resultados experimentais no domínio do tempo, assim os resultados serão introduzidos na plataforma das definições do material. Estes dados são introduzidos sob uma normalização, $[0,1]$, (49) na série por forma a simplificar o ajustamento dos dados.



Na equação 49 do Estado de Arte, o módulo de elasticidade instantâneo, G_0 , desloca-se sob a forma de denominador para o lado onde está o módulo de relaxação em ordem ao tempo, $G_r(t)$, dando origem a uma razão, $\frac{G_r(t)}{G_0}$, designada por módulo normalizado, $g_r(t)$. Este tratamento permite englobar os módulos, $G_r(t)$ e G_0 , num intervalo entre [0,1].

$$g_r(t) = \frac{G_r(t)}{G_0} = 1 - \sum_{i=1}^2 \bar{g}_i^P e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (63)$$

Numa grande parte dos artigos científicos, os resultados referentes ao módulo vs. tempo, provêm da componente módulo normal, $E(t)$, relativamente ao plano. Nesse sentido, só é possível introduzir os módulos normalizados de corte, $g_r(t)$, e de compressibilidade, $k_r(t)$ nas definições do material no *Abaqus*, para tal são utilizadas as relações (5) (6) e (7), cuja a função principal é obter os módulos de interesse. No entanto, convém reforçar que estas relações só são possíveis no campo da viscoelasticidade, devido à simplificação do problema pela via de assumir o coeficiente de *Poisson* como uma constante ao longo do tempo, porque na verdade existem variações no coeficiente ao longo do tempo (não lineares) já enunciadas no Estado de Arte.

Com a normalização dos dados experimentais é efetuado o ajustamento disponível no *Abaqus*, que se baseia no método não linear dos mínimos quadrados onde se obtêm os parâmetros, \bar{g}_i^P e τ_i da série de *Prony*. Com estes parâmetros é definida a função de aproximação resultante dos dados experimentais normalizados (figura 21).

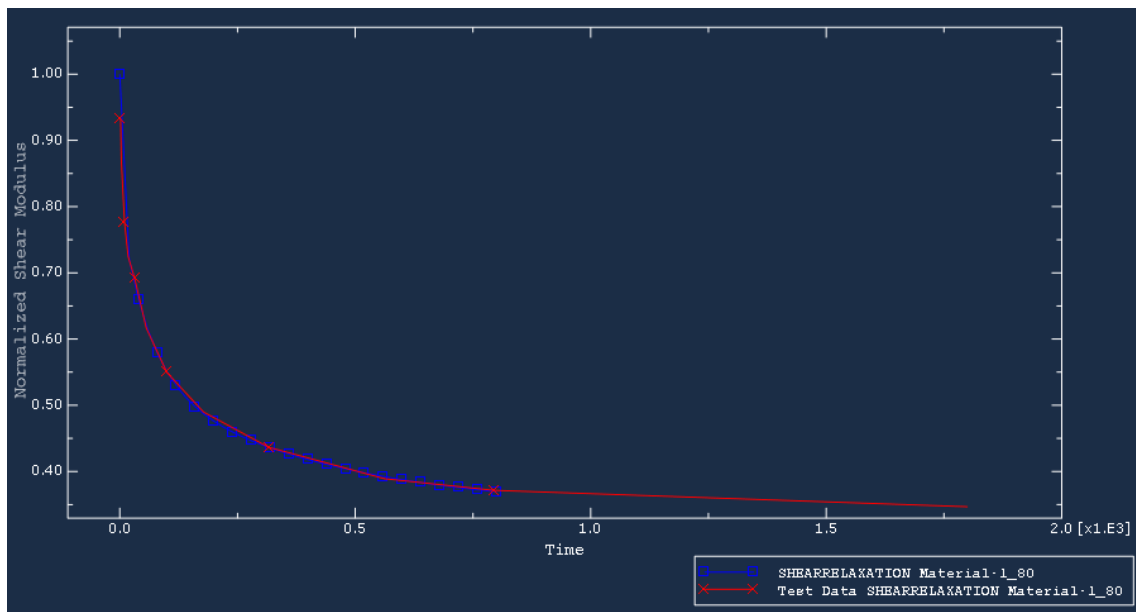


Figura 21: Ajustamento de um conjunto de dados experimentais com o método implementado no simulador [67].

3.1.3 Escala de tempo dos dados experimentais/resultados da simulação

A variável tempo é extremamente importante na simulação, sobretudo quando é efectuada a recolha de dados experimentais referentes ao decaimento do módulo em função do tempo.

Recolhendo, por exemplo um conjunto de dados referentes ao módulo de relaxação de um material onde o tempo é definido em horas, automaticamente os resultados provenientes dessa simulação (tensões, deformações, deslocamentos) serão apresentados também em horas. Portanto nas definições da componente viscoelástica no *Abaqus*, a escala de tempo recolhida será a escala de tempo dos resultados provenientes do modelo numérico.



3.1.4 Validação do método de aproximação

Para validar o método implementado nos casos de estudo de forma a avançar para o modelo industrial, é necessário atender cuidadosamente aos dados fornecidos pelas fichas técnicas, podendo mesmo antever, o que nem sempre é possível, a obtenção de curvas que traduzem o decaimento do módulo, $E(t)$, em função do tempo. Como tal serão abordados dois procedimentos na recolha dos dados, que definem o comportamento viscoelástico, sendo que um dos procedimentos já foi mencionado e foca-se na figura 21.

O outro procedimento em questão centra-se nos mesmos passos que o anterior, diferenciando-se apenas no número de pontos experimentais obtidos que serão apenas dois, isto porque na ficha técnica de um polímero é possível por vezes obter dois módulos para instantes de tempo diferentes (em anexo ficha técnica Ultramid). Um é precisamente o módulo de elasticidade para o instante, $t = 0$, comumente designado por módulo de *Young*, $E(t = 0) = E_0$. O outro é designado por módulo de elasticidade a fluência (*tensile creep modulus*), onde é pormenorizado o módulo do material quando sujeito a uma deformação para um instante de tempo na escala das horas (normalmente 1 hora ou 1000 horas), $G_r(t = 1000 h)$. Na ficha técnica, esta propriedade pode ainda ser especificada em termos de tensão, enunciando a deformação obtida (em percentagem) para esse período de tempo, podendo obter-se assim trivialmente o módulo.

Estes dois módulos quando normalizados formam no final uma reta, onde são introduzidos nas definições do material no *Abaqus* por forma a aproximar a reta numa curva de decaimento (figura 22).

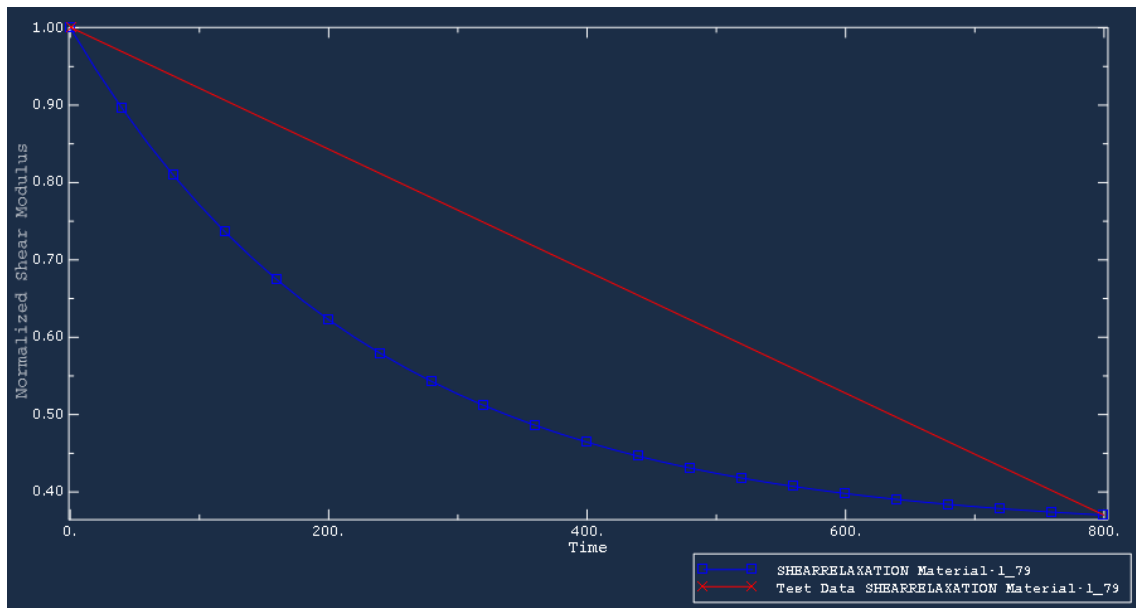


Figura 22: Ajustamento típico por dois pontos com o método implementado no simulador [67].

Será realizado no caso de estudo, como forma de complementar a validação, uma comparação entre o método de aproximação por dois pontos e o método de aproximação pelo conjunto de pontos experimentais. Esta comparação visa analisar a discrepância de valores existente entre eles.

3.1.5 Extração de dados experimentais no caso de estudo

Na extração dos resultados de cada artigo, existe um problema na medida em que não são fornecidos dados específicos na forma de tabela, revelando apenas os gráficos de relaxação em função do tempo na sua forma geral.

O procedimento adotado para todos os artigos deste tipo centrou-se na captação de valores aproximados nos gráficos que traduzem os resultados experimentais, assim, e de forma a acompanhar a curva de decaimento são assumidos valores de maneira a acompanhar o perfil seu perfil.



A grande desvantagem é que existe uma possibilidade de obter resultados desfasados relativamente aos resultados dos artigos em questão, contudo os dados estimados têm como objetivo “desenhar” por assim dizer a curva de relaxação.

3.1.6 Definições das condições fronteiras

Consoante o caso em questão são necessárias determinadas condições, mencionadas anteriormente (1) e (4), de modo a evidenciar o comportamento viscoelástico de um material. Sendo que, para apresentar resultados no domínio do tempo no *Abaqus*, é fundamental adotar uma análise Visco (*STEP* → *Visco*) durante a configuração da simulação [67].

As condições fronteira do *Abaqus* (*Boundary Conditions-BC*) definem as condições do modelo numérico podendo definir um encastre, uma deformação ou mesmo uma força num determinado período de tempo. É possível ainda manipular as suas amplitudes por forma a definir por exemplo carregamentos cíclicos.

Relativamente aos carregamentos é possível simular uma carga constante durante um período de tempo onde é ideal no domínio da fluência.

3.2 *Caso de estudo simplificado: Teste de relaxação sob tração*

O caso de estudo aqui descrito assenta num ensaio de tração convencional, onde são estudadas as propriedades viscoelásticas de um composto de moldagem de uma resina epóxi.

O material utilizado é processado na forma de embalagem para circuitos elétricos integrados (*IC Packages*) sendo este um dos temas centrais do artigo em análise [9]. Um dos factores determinantes na alteração do material é a temperatura, uma vez que os fenómenos de viscoelasticidade do material são mais evidentes a temperaturas mais elevadas. Este tópico não será



aqui enunciado, visto que o objetivo presente visa implementar e validar a metodologia descrita anteriormente.

Os ensaios de tração realizados no artigo, submetem o provete a uma deformação constante para várias temperaturas, onde será escolhida uma curva que traduza o decaimento do módulo, $E(t)$, em função do tempo.

3.2.1 Descrição modelo numérico

Tabela 1: Descrição do modelo numérico

Provete (milímetros)	125x12,5x1,5
Distância entre amarras (milímetros)	100
Deformação (%)	0,25% na direção negativa do eixo z
Tempo de ensaio (segundos)	1800
Temperatura (°C)	110
Tipo de elemento da malha	<i>C3D10: A 10-node quadratic tetrahedron.</i>

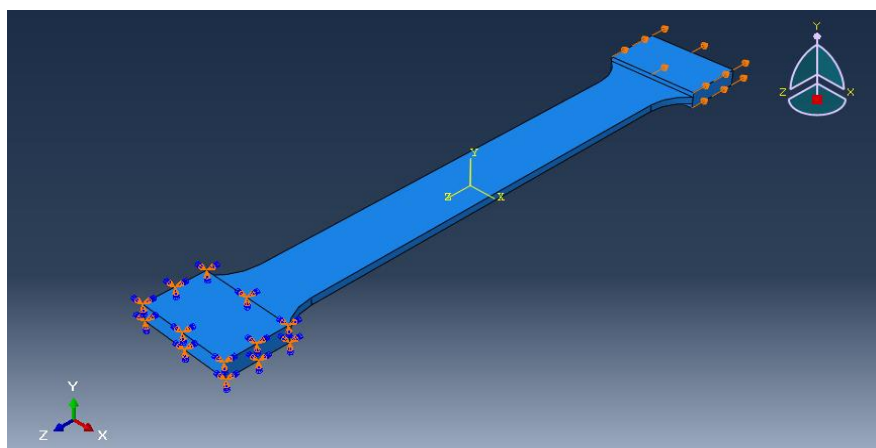


Figura 23: Imagem representativa das condições do modelo



3.2.2 Configuração do material no Abaqus

Em primeiro lugar, para que se defina o composto de epóxi, é necessário definir o módulo de elasticidade e o coeficiente de *Poisson* desse composto. Atendendo à figura 5 do artigo, poderemos retirar o módulo de elasticidade aproximado para o instante de tempo $t = 0$ [9]. Já o coeficiente de *Poisson* foi retirado da ficha em anexo, sendo os valores reproduzidos na seguinte tabela.

Tabela 2: Propriedades elásticas caso de estudo

Propriedades Elásticas	
Módulo de elasticidade, E (MPa)	Coefficiente de <i>Poisson</i>
13000	0,32

Atendendo aos dados de interesse recolhidos, referentes ao módulo de elasticidade em função do tempo a uma temperatura de 110 °C, é possível definir no *Abaqus* a temperatura de trabalho do ensaio. Assim, os dados que vão configurar o material no domínio da viscoelasticidade no simulador são precisamente os que o definem o seu comportamento a uma temperatura de 110°C.

A normalização do módulo de relaxação, $g_r(t)$, em função do tempo (tabela 3), é efetuada através da metodologia descrita em cima, referente à recolha de um determinado conjunto de dados provenientes da figura 5 do artigo em análise [9]. Os dados recolhidos no artigo encontram-se no módulo de elasticidade normal ($E(t)$) pelo que utiliza-se a fórmula 7 enunciada no estado da arte de modo a determinar o módulo de elasticidade ao corte, $G(t)$.

Tabela 3: Normalização dos dados obtidos do artigo [8]

Normalização			
Tempo (s)	$E(t)$ (MPa)	$G(t)$ (MPa)	$\frac{G_r(t)}{G_0} = g_r(t)$
0	13000	4779,4	1



$10^{0,25}$	$10^{4,08}$	4420,1	0,92
$10^{0,5}$	$10^{4,05}$	4125,1	0,86
10	10^4	3676,5	0,77
$10^{1,25}$	$10^{3,97}$	3431,1	0,72
$10^{1,5}$	$10^{3,95}$	3276,6	0,68
$10^{1,75}$	10^9	2920,3	0,61
10^2	$10^{3,85}$	2602,7	0,54
$10^{2,25}$	$10^{3,8}$	2319,7	0,48
$10^{2,5}$	$10^{3,75}$	2067,4	0,43
$10^{2,75}$	$10^{3,70}$	1842,6	0,38
$10^{2,9}$	$10^{3,68}$	1759,6	0,37
$10^{3,25}$	$10^{3,65}$	1642,2	0,34
∞	-	-	0,34

Quando se recorre ao *Abaqus* é necessário definir o módulo de relaxação normalizado, quando este tende para um tempo infinito, $t = \infty$, (*Long-term normalized shear compliance or modulus*) por forma a definir a estabilização do resultado de relaxação do material (tabela 3). Este valor normalmente é indicado conforme a relaxação do material.

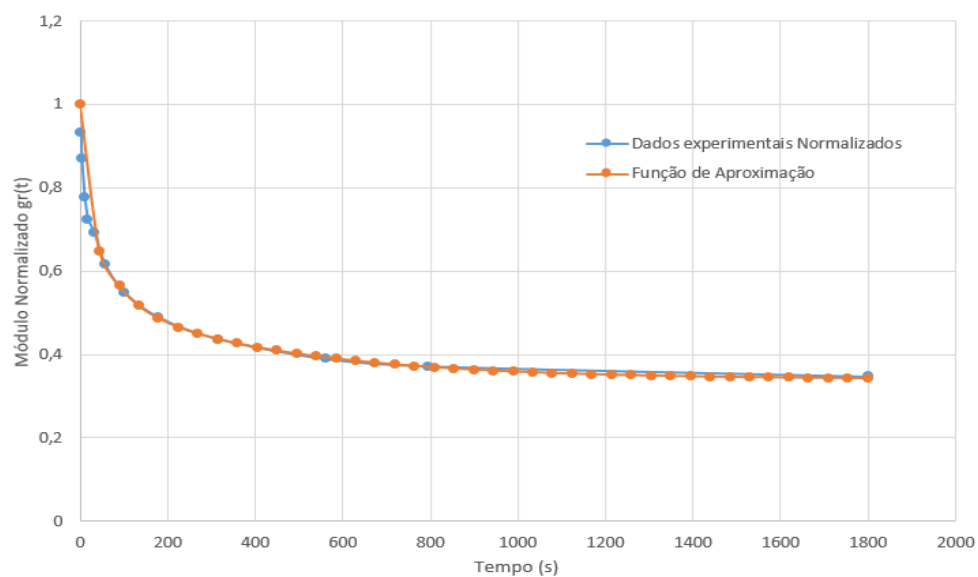




Figura 24: Aproximação dos dados experimentais normalizados por uma função

Tabela 4: Propriedades viscoelásticas caso de estudo

Definição das Propriedades Viscoelásticas		
	Parâmetros de aproximação	
i	τ_i (s)	\bar{g}_i^P
1	4,1793	0,20021
2	61,038	0,25213
3	404,58	0,20766
Tolerância erro	0.01	
Função de aproximação $g_r(t) = \left(1 - \sum_{i=1}^2 \bar{g}_i^P e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)$	$g_r(t) = 1 + 0.20021 \left(1 - e^{-\frac{t}{4.1793}}\right) + 0.25213 \left(1 - e^{-\frac{t}{61.038}}\right) + 0.20766 \left(1 - e^{-\frac{t}{404.58}}\right)$	

A tolerância do erro admissível da raiz quadrada (*Allowable average root-mean-square error*) é uma das condições possíveis de alterar no método não linear dos mínimos quadrados implementado no *Abaqus*. Este erro pode ser definido para um valor superior a 0,01, por exemplo para os dados experimentais mais dispersos por forma a encontrar a melhor curva de aproximação []. Com o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, obteve-se uma aproximação da função exponencial em série de *Prony* com três parâmetros (tabela 4).

Relativamente ao método de aproximação por apenas dois pontos, foram escolhidos os pontos da normalização efetuada na figura 24. O primeiro ponto para, $t = 1$ s, é o módulo de elasticidade comum (módulo de *Young*), sendo o tempo definido em virtude da não-aceitação do valor nulo no *Abaqus*. Para o segundo ponto, $t = 800$ s, justifica-se devido ao início da estabilização da



curva, levando a que a aproximação sob a forma de uma exponencial de série de *Prony* só ocorra a partir desse período de tempo.

Tabela 5: Normalização por dois pontos no artigo [8]

Normalização			
Tempo (s)	$E(t)$ (MPa)	$G(t)$ (MPa)	$\frac{G_r(t)}{G_0} = g_r(t)$
1	13000	4779,4	1
800	4800	1760	0,37
∞	-	-	0,34

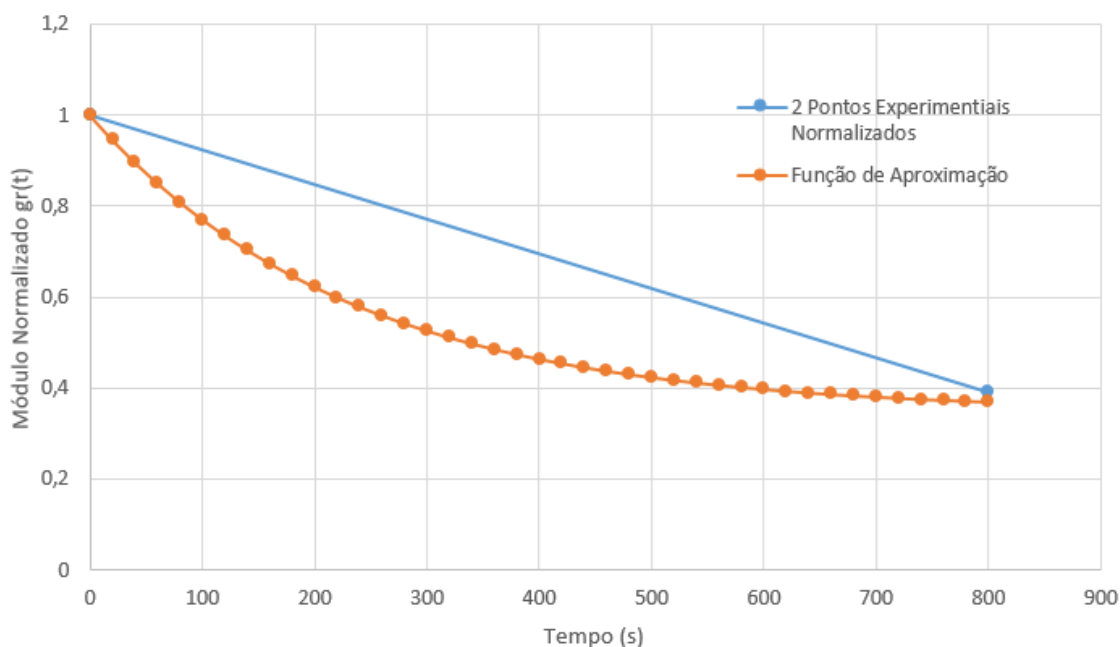


Figura 25:Aproximação por dois pontos normalizados por uma função



Tabela 6: Propriedades viscoelásticas caso de estudo

Definição das Propriedades Viscoelásticas		
i	τ_i (s)	\bar{g}_i^P
1	239,18	0,65
Tolerância erro	0,01	
Função de aproximação	$g_r(t) = \left(1 - \sum_{i=1}^2 \bar{g}_i^P e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)$	
	$g_r(t) = 1 + 0,65 \left(1 - e^{-\frac{t}{239,18}}\right)$	

Comparativamente, existe uma pequena discrepância na determinação da função que aproxima os dados experimentais referentes à primeira situação e os dois pontos selecionados. Na figura 26, a curva exponencial de relaxação ajustada proveniente dos dados experimentais normalizados (vermelho) é mais acentuada do que a curva ajustado por dois pontos (cinzento). Mas pelo contrário, à medida que se avança no tempo, a curva de aproximação por dois pontos mostra indícios de estabilizar da mesma forma que a função proveniente dos dados experimentais normalizados, o que é bastante satisfatório.

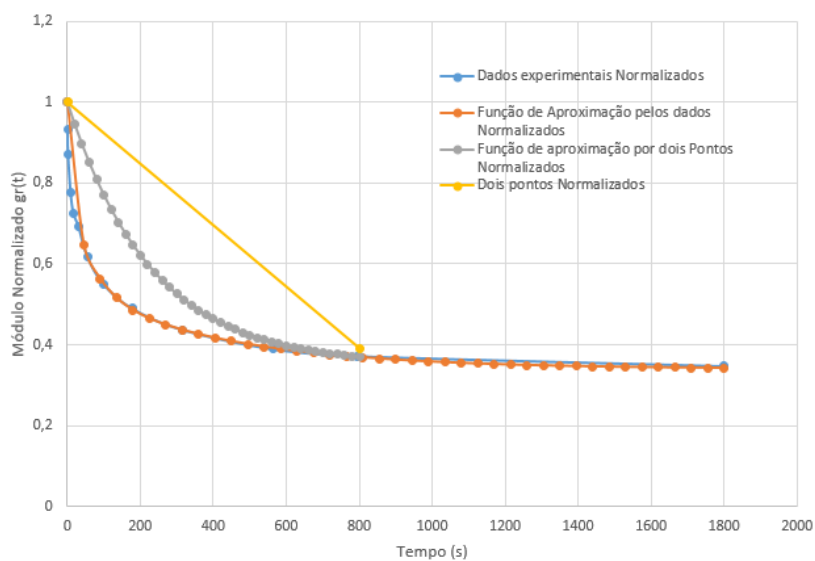


Figura 26: Comparação entre a aproximação por dois pontos e a aproximação pelos dados experimentais



3.2.3 Resultados

De seguida serão apresentados os resultados referentes a tensões em apenas uma zona do provete designada por zona de análise 1, (figura 27) de forma a comparar os resultados fruto da simulação e os resultados da figura 5 do artigo em análise [9]. Será igualmente exposta uma comparação dos resultados referentes à aproximação dos dois pontos relativamente à aproximação através dos dados experimentais.

Os resultados serão apresentados atendendo a três instantes de tempos, sendo apresentados de forma cronológica da esquerda para a direita.

Tensões resultantes

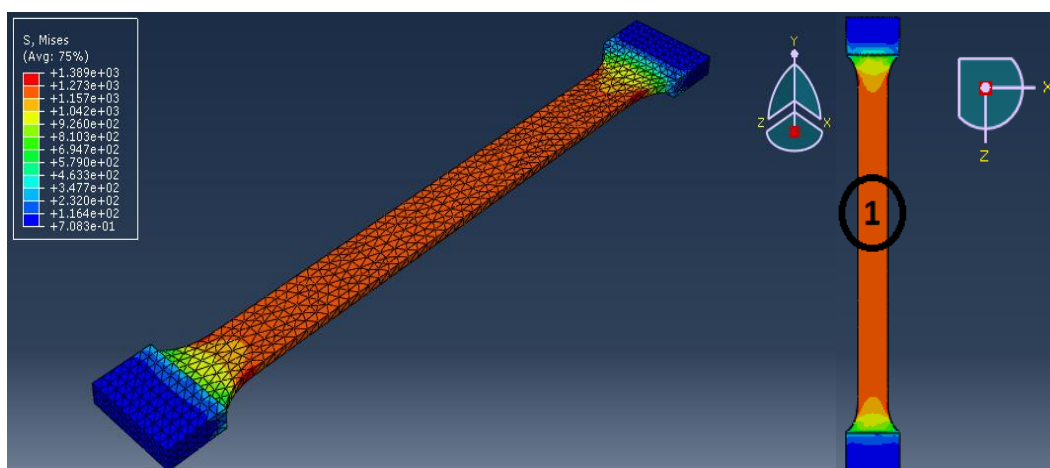


Figura 27:Tensões de Von Mises pelos dados experimentais normalizados (t=1800 s)/ Zona de análise 1.

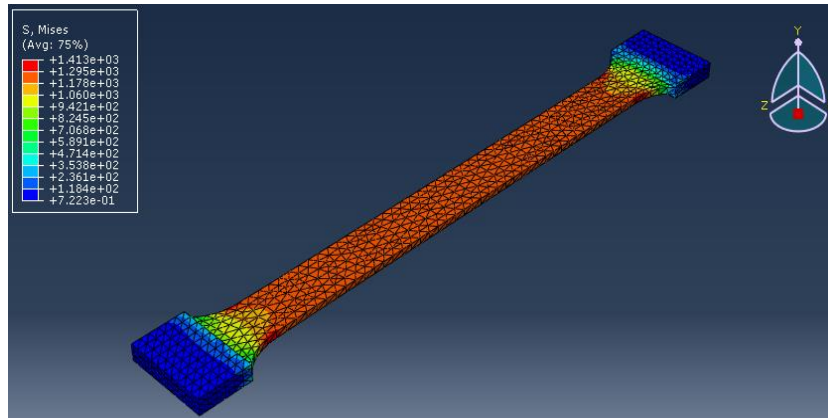


Figura 28:Tensões de Von Mises 2 pontos normalizados (t=1800 s).

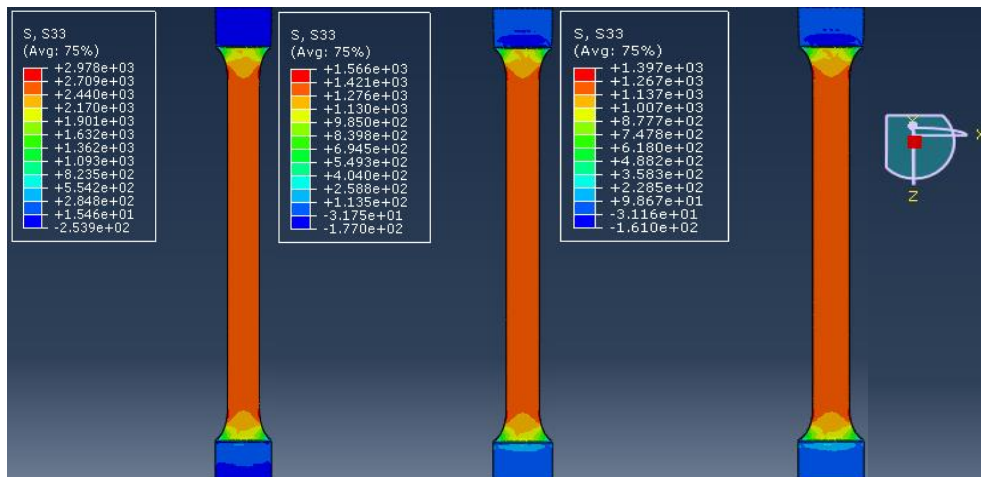


Figura 29:Tensões no eixo zz (S33) pelos dados experimentais normalizados- Esquerda: t=12 s; Centro: t=620 s; Direita: t=1800 s.

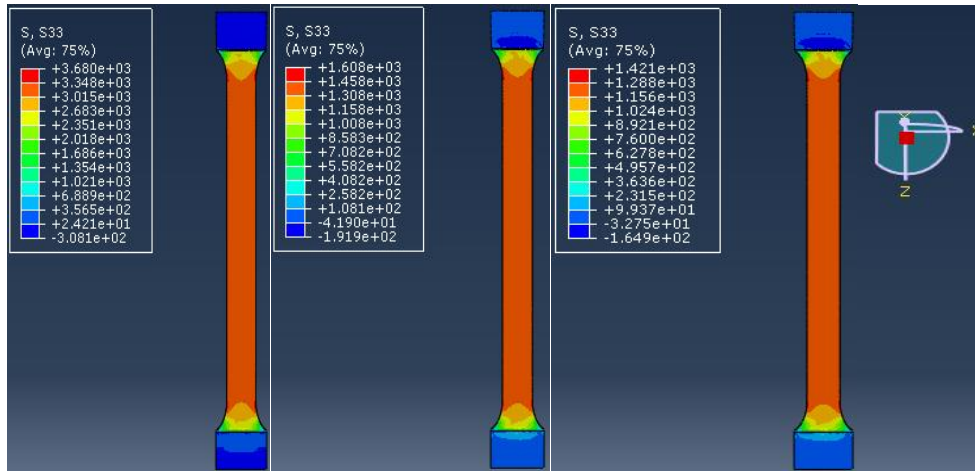


Figura 30: Tensões no eixo zz (S33), com dois pontos normalizados- Esquerda: t=12 s; Centro: t=620 s; Direita: t=1800 s

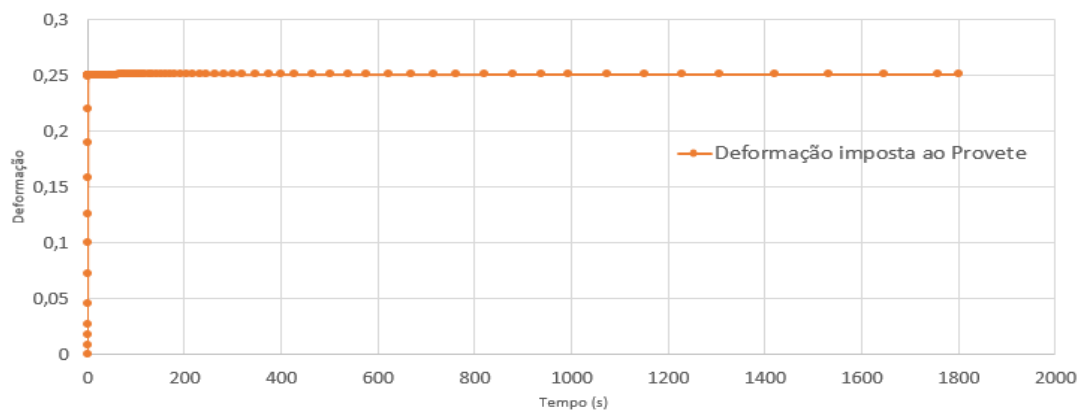


Figura 31: Gráfico da deformação imposta ao provete

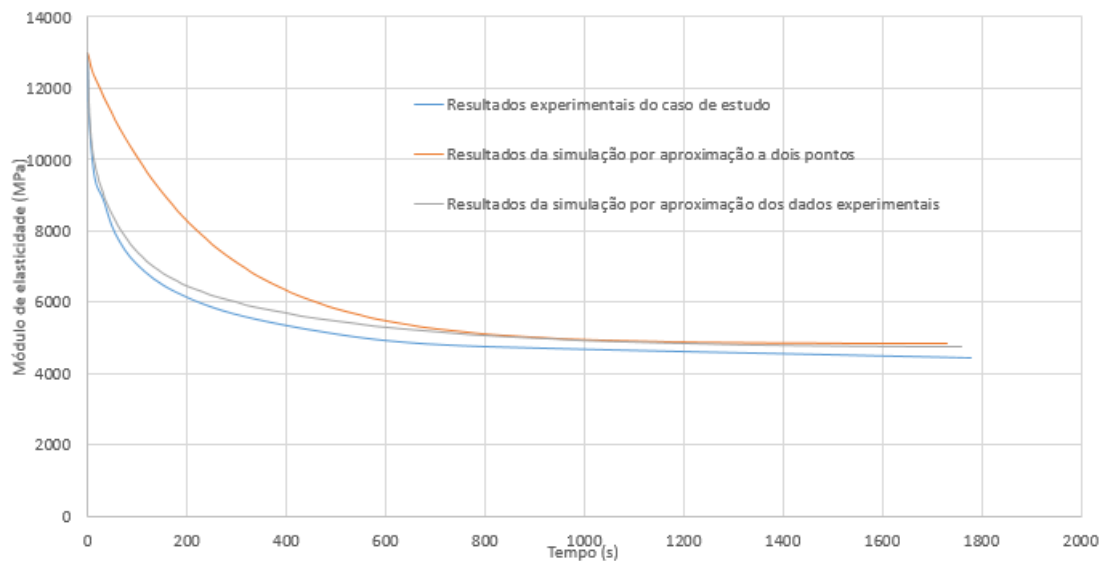


Figura 32: Módulos de relaxação obtidos nas simulações e do caso de estudo

Na figura 32, estão indicados os resultados referentes aos módulos de relaxação na zona de análise 1 (figura 27), sendo que estes são resultado da tensão obtida na direção Z do modelo numérico bem como da deformação total de um elemento selecionado na zona de análise 1 (figura 31).

Um dos objetivos principais do estudo visa analisar o comportamento viscoelástico de um material quando sujeito a um carregamento contínuo para períodos de tempo longos. Nestes termos verifica-se por comparação, que as curvas de relaxação das duas simulações para períodos de tempo longos (Curvas a Cinzento e Vermelho, figura 32), tendem a estabilizar perto do valor obtido experimentalmente no artigo (curva a azul) havendo apenas um pequeno erro residual.

Nos instantes de tempo iniciais, o decaimento do módulo é mais acentuado na simulação obtida a partir da aproximação pelos dados experimentais normalizados relativamente à simulação obtida partindo apenas pela aproximação por dois pontos.

Tabela 7: Resultados dos módulos para $t=50$ s e $t=1800$ s

Recolha de tempos	Aproximação dois pontos (MPa)	Aproximação dados experimentais (MPa)	Resultados experimentais (MPa)
$t = 50$ s	11333,4	8406,9	7700
$t = 1800$ s	4847,91	4747,72	4450

3.2.4 Validação

Com as duas simulações obtidas parte-se do princípio que a metodologia aplicada é válida, pois apesar de haver uma certa discrepância nos valores dos módulos de relaxação para os tempos iniciais (tabela 7), o mesmo não acontece para períodos longos, uma vez que os valores obtidos no ensaio experimental do artigo tendem a estabilizar. A relaxação do material é cumprida ao longo do tempo.

3.2.5 Deformações

Nesta secção serão analisadas as deformações obtidas no provete teste na zona de análise 1 (figura 27).

Assim com a validação dos resultados das simulações anteriores, efetua-se uma análise apenas na simulação referente à aproximação dos dados experimentais recolhidos no artigo em questão, não abordando a simulação por aproximação a dois pontos.

No domínio da viscoelasticidade de um material, a deformação global de um sistema é pronunciada sob diversos fatores: carregamentos instantâneos ou deformações extremamente rápidas. Nestes factores o sistema viscoelástico responde principalmente com a componente elástica não existindo tempo suficiente para que as cadeias do sistema fluissem e consequentemente relaxassem [7].



No presente caso de estudo é dado um tempo suficiente para estabilizar o sistema, havendo relaxação do material, portanto existem duas componentes dentro da deformação global deste sistema, ε_G :

- Deformação elástica, ε_e ;
- Deformação viscosa, ε_v .

O *Abaqus (Field Output Request)* permite obter cada uma destas componentes, apesar de por vezes não ser fornecida sob a forma de resultado a deformação elástica do sistema, pelo que é possível através da relação abaixo.

$$\varepsilon_G = \varepsilon_v + \varepsilon_e$$

Os resultados da deformação global do sistema encontra-se na figura 33 bem como as deformações relativas à componente elástica e à componente viscosa.

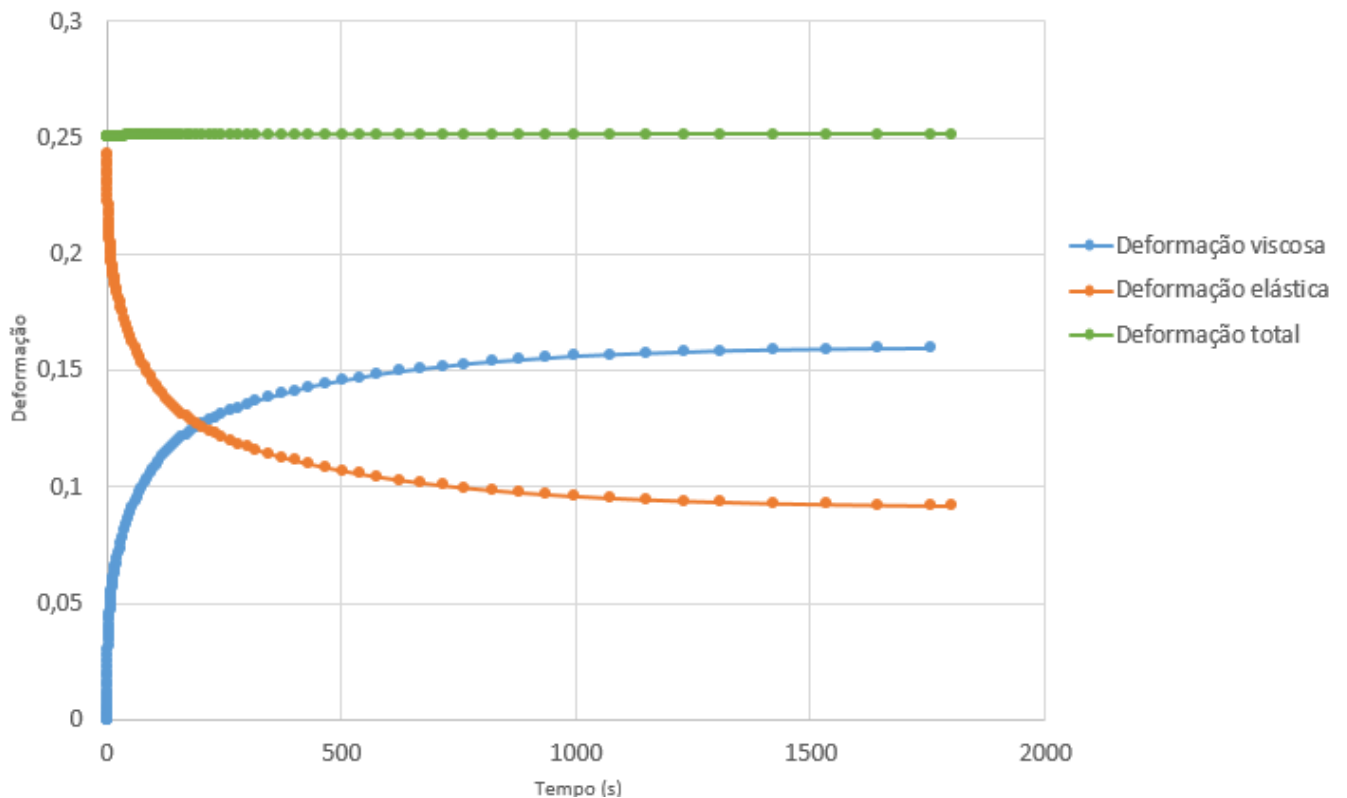


Figura 33: Deformações envolvidas no caso de estudo



A deformação viscosa indicada na figura 33, designa-se por deformação à fluência (no *Abaqus* é comumente designada por *Creep Strain, CE*), sendo que atendendo ao gráfico da figura 33, verifica-se que para os instantes de tempo iniciais a deformação a fluência ou viscosa é praticamente nula, evidenciando-se apenas deformação elástica do material. Avançando no tempo verifica-se uma inversão nos valores de ambas as deformações, ocorrendo uma transição, onde predomina a deformação viscosa sobre a deformação elástica evidenciando sinais de que ambas as deformações tenderão a estabilizar para um tempo, $t = \infty$. A soma das duas deformações resulta na deformação total do sistema que é constante, sendo uma das condições inicialmente impostas no modelo numérico (tabela 1).

3.2.6 Recuperação

Nesta secção é efetuado um período de recuperação de 5000 segundos por forma a complementar o estudo efetuado no artigo em análise [9] e verificar se de facto os fenómenos mencionados no Estado de Arte se verificam no modelo numérico implementado no *Abaqus*.

A deformação constante imposta para um período de tempo de 1800 segundos com um deformação de 0,25% é interrompida no $t = 1800 s$, retirando o carregamento por completo e iniciando o período de recuperação (figura 34). De realçar que a deformação tratada é referente a deformação total do provete (LE) que contabiliza ambas as componentes elástica e viscosa.

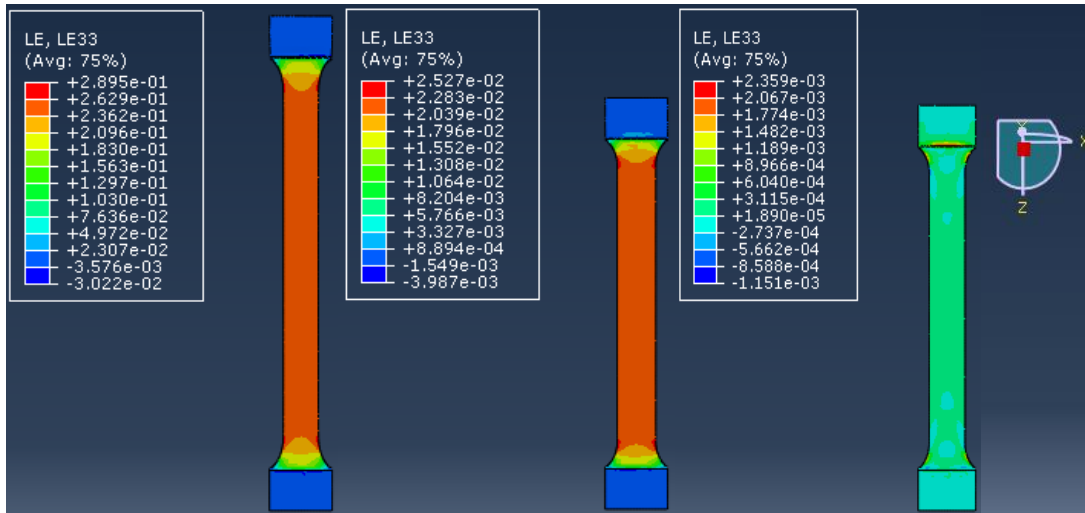


Figura 34: Deformação e recuperação da deformação- Esquerda: $t=700$ s; Centro: $t=2800$ s; Direita: $t=6800$ s

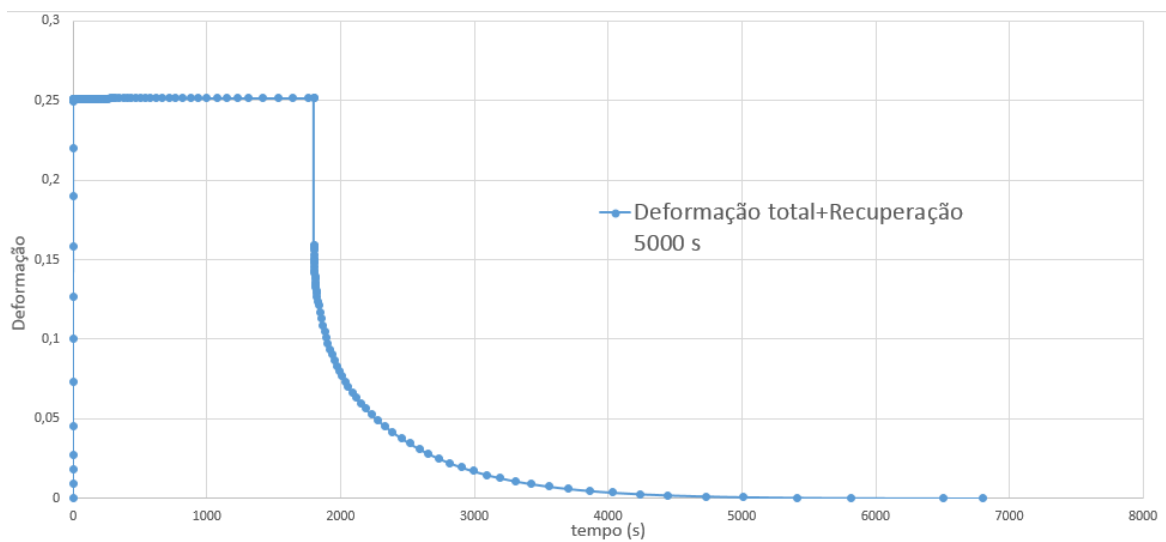


Figura 35: Curvas para os diferentes tempos de recuperação

O gráfico da figura 35, evidencia a recuperação da deformação inicialmente imposta ao material, ou seja, quando o carregamento é interrompido, $t = 1800$ s, o material recupera instantaneamente parte da sua deformação, em virtude da componente elástica, que não depende do



tempo como se verifica na figura 35. Posteriormente ocorre uma recuperação no intervalo definido sob a forma de uma exponencial em decaimento em função do tempo, fruto da viscoelasticidade proveniente do composto de epóxi, onde a componente viscosa do sistema oferece resistência à componente elástica, recuperando apenas uma parte da deformação. Esta recuperação é inteiramente influenciada pelo tempo.

Na figura 35, é visível que para uma recuperação com um tempo de 5000 s a deformação aproxima-se de zero.

Capítulo IV. **Caso industrial**



O caso industrial em estudo procurava inicialmente analisar uma simulação de cargas, que não possuíam como variável o tempo. Cargas essas, que dependendo da sua magnitude, podem ou não provocar rotura do material gerando um conjunto de tensões na peça, sobretudo para instantes de tempo curtos.

Os carregamentos impostos são previamente prognosticados na fase de projeto em condições normais de funcionamento e em condições excepcionais, designadas estas como condições extremas. O regime de estudo do comportamento do material designa-se por elástico-plástico, tendo como objectivo fulcral aplicar um carregamento onde as tensões geradas na peça não ultrapassam a tensão admissível do material, não comprometendo assim a funcionalidade do componente industrial.

Com a análise no domínio da viscoelasticidade a tensão gerada pelo carregamento no componente industrial é analisada num tempo extremamente longo, por forma a determinar a tensão pela qual o material relaxa ou a deformação viscosa obtida. Esta tensão de relaxação é importante e será comparada com a tensão admissível do material de modo a verificar se ainda cumpre os requisitos para um tempo infinito, $t = \infty$.

Serão efetuadas comparações relativamente ao modelo simulado no regime elástico-plástico e ao modelo no domínio da viscoelasticidade, comparando deformações e tensões, conseqüentemente serão retiradas as devidas conclusões, de modo a verificar se o componente industrial no domínio do tempo ainda se encontra funcional.

4.1 Modelo Numérico industrial

O Modelo industrial aqui analisado foi disponibilizado pelo PIEP (Pólo De inovação Em Engenharia De Polímeros) e compreende a elaboração de um encosto de um banco, onde serão simulados, através do *Abaqus* dois ensaios de resistência definidos previamente pelo PIEP e que foram executados experimentalmente nas suas instalações.

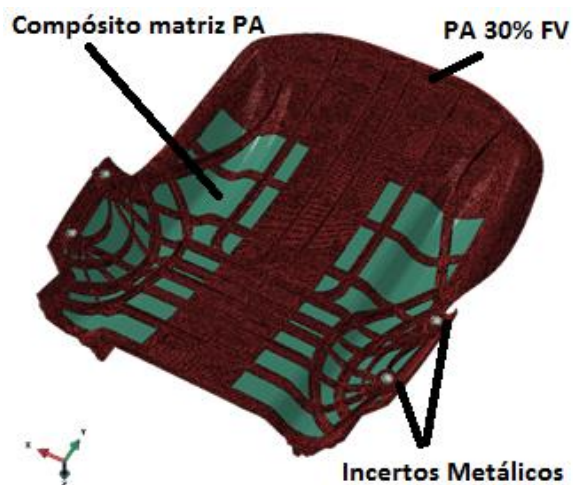


Figura 36: Modelo Industrial na forma geral (PIEP).

A estrutura é formada por três tipos de materiais distintos:

- Poliamida 6 com 30% de fibra de vidro (PA 30%FV -vermelho na figura);
- Compósito de matriz de poliamida 6 com fibra de vidro (verde na figura);
- Quatro incertos metálicos (branco) que são incorporados no molde a quando da injeção poliamida com 30% de fibra de vidro (figura 36).

Tabela 8: Propriedades dos materiais utilizados no cálculo estrutural

Material	Densidade (g/cm ³)	Módulo de elasticidade (MPa)		Tensão de cedência (MPa)		Tensão admissível (MPa)		Módulo de corte (MPa)		Coefficiente de Poisson
Technyl C216 V30 – PA 6 30%FV	1.36	9 173.10		184.63		123.09		-		0.35
	7.90	210 000		490		326.67		-		0.30
Aço genérico	1.80	E ₁	22 400	σ ₁	404	σ ₁	269.33	G ₁₂	8 960	0.17
								G ₁₃	8 600	
TEPEX dynalite 102-RG600(4)/47% Roving Glass		E ₂	21500	σ ₂	390	σ ₂	260	G ₂₃		



Dos materiais discretizados na tabela 8, a PA6 30%FV é o material que irá ser abordado no estudo da viscoelasticidade. Os incertos metálicos também vão ser colocados no domínio do problema, de forma a estudar as interações mecânicas existentes no material polimérico, verificando se existe alguma anormalidade a quando da aplicação dos carregamentos.

Os modelos numéricos desenvolvidos no PIEP tiveram como principal objetivo simular um conjunto de testes normativos mecânicos aplicados a veículos de categoria M1 da regulação E/ECE/324 Ver.1/Add. 16/Ver. 4 [68]. Estes modelos consistem na aplicação de carregamentos nas diferentes zonas do encosto, aos quais se denomina de:

- Ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação;
- Ensaio de resistência das fixações dos bancos e dos sistemas de regulação, bloqueamento e deslocamento.

Dos ensaios normativos mencionados em cima, apenas será simulado e estudado o **ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação**.

Neste âmbito, foi ainda realizado um ensaio que procura submeter o banco a carregamentos extremos de modo a avaliar a resistência deste, o qual se designa de **ensaio de resistência da estrutura durante a aplicação de uma força frontal**.

4.1.1 Ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação

O ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação baseia-se na aplicação de uma pressão na parte superior do encosto, por meio de um componente que simule as costas do manequim (figura 37 lado esquerdo), e de uma força longitudinal e dirigida para a retaguarda que produza um momento de 530N.m em relação ao ponto H (figura 37 lado direito).

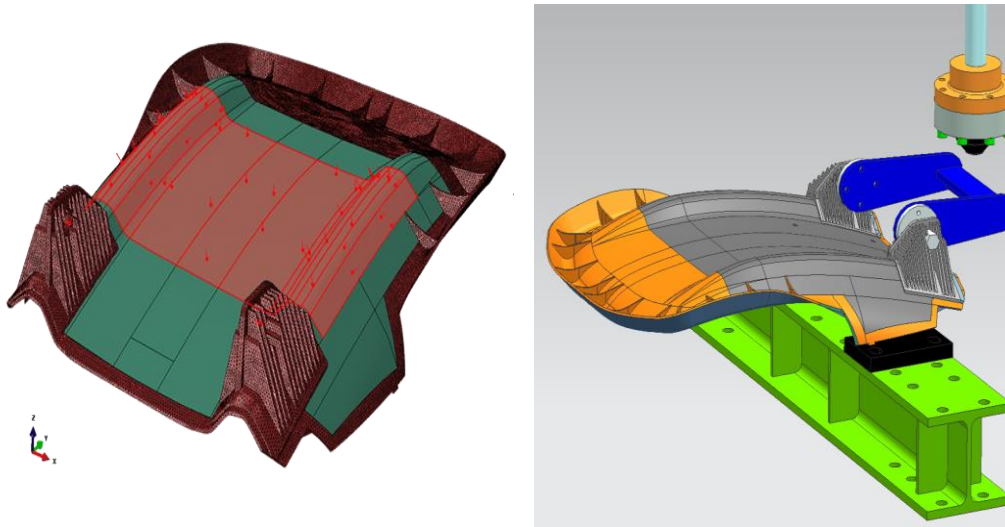


Figura 37:Ensaio de resistência do encosto com as duas forças representadas (esquerda- Pressão, simulando as costas do manequim; direita- Binário aplicado nos apoios do encosto.)

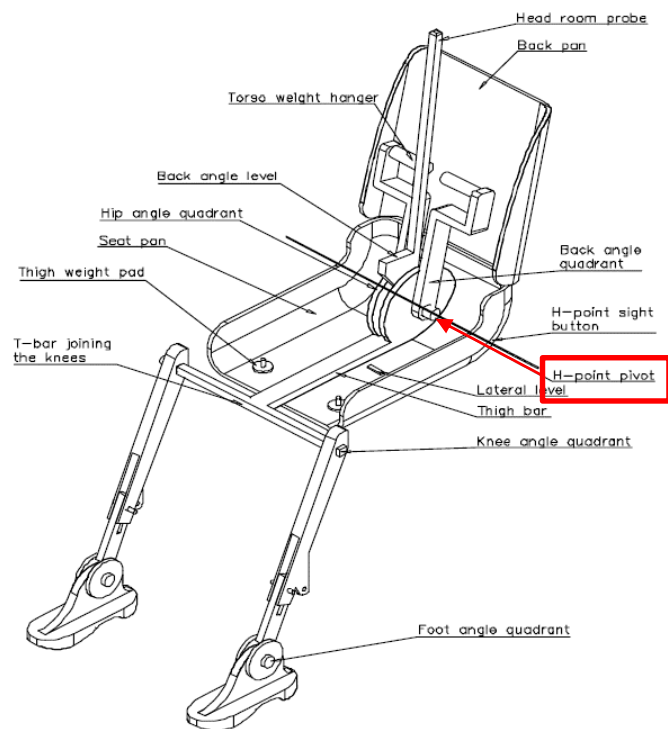


Figura 38:Imagem representativa ensaio normativo de resistência de encosto do banco e dos respectivos sistemas de regulação, revelando o **Ponto H (quadrado a vermelho)** [68]



Modelo numérico geral

Relativamente ao modelo numérico criou-se uma simulação viscoelástica onde se definiu um conjunto de três interações, o tipo de elemento da malha para cada componente, as condições de fronteira e carregamentos que se encontram descritos na tabela 9. Na figura 37 encontram-se ainda representadas as condições fronteiras e os carregamentos incorporados.

Tabela 9: Características do modelo numérico do ensaio de resistência de encosto do banco e dos respectivos sistemas de regulação

Descrição	
Interações	Contacto entre as interfaces do material termoplástico e do inserto metálico
Tipo de elemento da malha (insertos e encosto)	C3D4: A 4-node linear tetrahedron
Condições de fronteira	Encastre dos insertos metálicos
Carregamento	<ul style="list-style-type: none"> * Aplicação de um momento na zona central de cada apoio do banco de 265 000N.mm, em torno ao eixo do X e orientado na direção negativa do eixo do Y * Aplicação de uma pressão, numa parte do encosto, correspondente a uma massa de 75Kg.

4.1.2 Ensaio de resistência da estrutura durante a aplicação de uma força frontal

O ensaio de resistência da estrutura aplica-se aos casos onde são desenvolvidas situações extremas, que neste ensaio serve como exemplo uma força frontal no banco correspondente à massa de uma pessoa de 75 quilos (figura 42). Basicamente descreve-se a situação de maior esforço que a



estrutura pode suportar em condições normais, ou seja quando a pessoa se senta na parte frontal do banco automóvel.

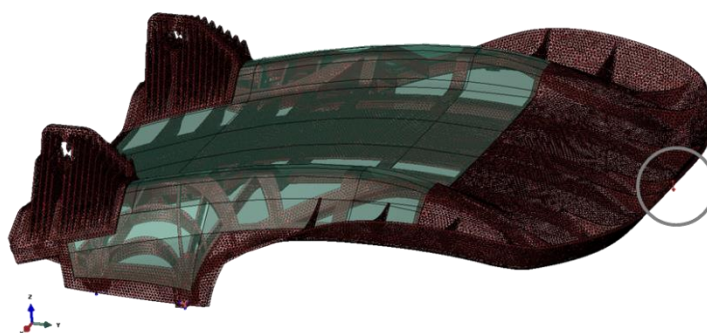


Figura 39:- Imagem representativa dos carregamentos do modelo numérico do teste de aplicação de uma força frontal

Modelo numérico geral

O modelo numérico implementado rege-se dos mesmos modos que o modelo numérico anterior diferenciando-se apenas nos carregamentos impostos.

Tabela 10:Características do modelo numérico correspondente à aplicação de uma força frontal

Descrição	
Interações	Contacto entre as interfaces do material termoplástico e do inserto metálico
Tipo de elemento da malha (insertos e encosto)	C3D4: A 4-node linear tetrahedron
Condições de fronteira	Encastre dos insertos metálicos
Carregamento	Aplicação de uma força na zona frontal do banco correspondente a 735N. Direção da força: direção negativa do eixo do z



4.2 Definições das propriedades do material no *Abaqus*

4.2.1 Definição das propriedades viscoelásticas

Na descrição de cada modelo numérico não foi definido ainda o tempo de carregamento imposto, visto que este é definido apenas quando são obtidas as propriedades viscoelásticas da PA6 30%FV. A escala de caracterização viscoelástica do material em questão da ficha técnica é que irá ditar o tempo da simulação.

Na ficha técnica do material, (em anexo), *Technyl C216 V30- PA 6 30%FV*, não é indicada qualquer informação relativa às propriedades viscoelásticas no domínio do tempo, ou seja, não possui curvas relativas ao decaimento do módulo de relaxação em função do tempo, nem o ponto característico mencionado na introdução dos casos de estudo, módulo de elasticidade à fluência.

Efectuada uma pesquisa intensiva foi possível encontrar uma ficha técnica de um material equivalente, *Ultramid B3EG6-GF30 (em anexo)*, onde esta possui o módulo de elasticidade à fluência a uma determinada temperatura (23°C) na escala das horas.

Posteriormente, foi ainda verificado se os restantes dados do material equivalente, como o módulo de elasticidade, coeficiente de *Poisson*, se aproximavam do material em análise.

Tabela 11: Dados referentes à ficha técnica Ultramid B3EG6-GF30

Módulo de elasticidade, $E(t = 0)$ (MPa)	8600
Coeficiente de <i>Poisson</i>	0,35
Módulo de elasticidade a fluência, 1000 horas, 23°C, $E(t = 1000 h)$, (MPa)	3200

De seguida foi efetuado o mesmo procedimento descrito no caso em estudo, onde foram utilizados os dois pontos enunciados acima na tabela 11 de forma a realizar uma aproximação sob uma série exponencial de *Prony*, figura (40), pelo método não linear dos mínimos quadrados.



Tabela 12: Normalização dos valores provenientes da ficha técnica

Normalização			
Tempo (h)	$E(t)$ (MPa)	$G(t)$ (MPa)	$g_r(t)$
0	8600	3185,2	1
1000	3200	1361,7	0,43

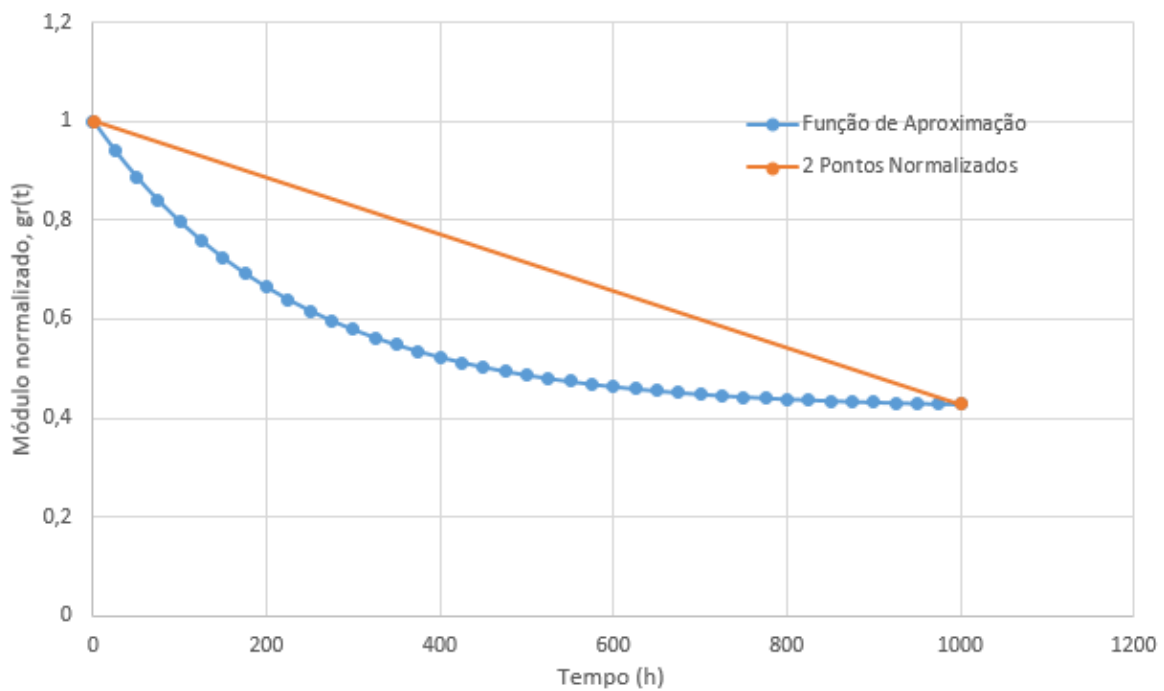


Figura 40: Aproximação dos pontos normalizados



Tabela 13: Propriedades viscoelásticas do caso industrial

Definição das Propriedades Viscoelásticas		
i	τ_i (s)	\bar{g}_i^P
1	231,38	0,58
Tolerância erro		0,01
Função de aproximação $g_r(t) = \left(1 - \sum_{i=1}^2 \bar{g}_i^P e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)$ $g_r(t) = 1 + 0,58 \left(1 - e^{-\frac{t}{231,38}}\right)$		

4.2.2 Definição das propriedades elásticas/plásticas

Na simulação só é efetuado uma análise estática dos carregamentos descritos acima, sendo apenas definidas as propriedades elásticas e plásticas do material (tabela 14). As definições no regime plástico baseiam-se na curva tensão-deformação do material através de ensaios de tração realizados no PIEP. Neste tópico apenas serão preenchidos os valores correspondentes fornecidos não aprofundado o tema na origem da sua obtenção.

Tabela 14: Propriedades elásticas e plásticas do caso industrial

Propriedades Elásticas	
Módulo de elasticidade (MPa)	8600
Coefficiente de <i>Poisson</i>	0,35
Propriedades Plásticas	
Limite de elasticidade	194,63
Deformação plástica	0



4.3 Condições dos ensaios de resistência nos modelos numéricos no domínio da viscoelasticidade

Nas condições estáticas de um modelo numérico são analisadas as tensões e deformações provenientes de um carregamento para um instante de tempo curto, utilizando quase sempre aproximações elásticas ao projeto com termoplásticos. No entanto, no domínio da viscoelasticidade é impossível obter resultados concretos partindo inicialmente das condições estáticas do modelo numérico. Como foi dito anteriormente, o fator tempo é a condição essencial para estudar o fenómeno da viscoelasticidade e serão modelados intervalos de tempo suficientemente longos e períodos de recuperação previamente definidos.

Nas tabelas 15 e 16 são definidas as variáveis tempo para uma análise viscoelástica do problema.

Tabela 15: Condições do modelo numérico no domínio da viscoelasticidade: Ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação

Modelo numérico	Duração do Carregamento (horas)		
	1000	5000	10000
Ensaio de resistência de encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação	1000	5000	10000
Período de recuperação		1000	1000

Relativamente às condições do modelo numérico da tabela 15, será realizado ainda um carregamento de 5000 horas seguido de uma recuperação de 3000 horas. Após a recuperação de 3000 horas será iniciado novamente o mesmo carregamento por um período de mais 2000 horas por forma a analisar as deformações de uma segunda carga depois de uma primeira recuperação do material. O tempo total da simulação situa-se nas 10000 horas. Na figura 41 está representada a amplitude da carga que será imposta no modelo numérico onde 1 é a carga total e 0 o alívio da carga.

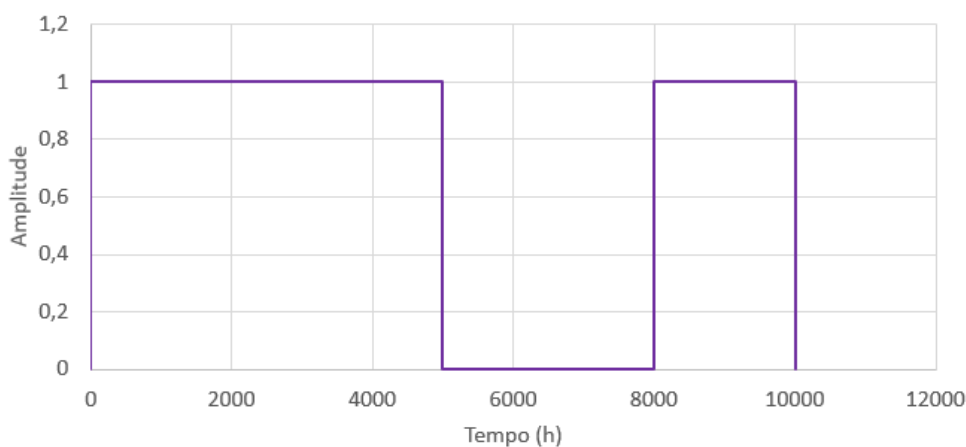


Figura 41: Amplitude da carga relativa ao modelo numérico da tabela 15

Tabela 16: Condições do modelo numérico no domínio da viscoelasticidade: Ensaio de resistência da estrutura durante a aplicação de uma força frontal

Modelo numérico	Duração do Carregamento (horas)		
Ensaio de resistência da estrutura durante a aplicação de uma força frontal	1000	5000	10000
Período de recuperação		1000	1000

4.4 Apresentação e discussão dos resultados modelo numérico industrial

Neste capítulo a apresentação e discussão dos resultados provenientes do modelo numérico será dividida nas duas abordagens enunciadas no capítulo anterior. Uma referente a abordagem estática do problema, outra referente à abordagem viscoelástica do modelo, sendo esta análise fulcral em todo o estudo já realizado. A razão pela qual é efetuada uma análise primeiramente estática prende-se com a ideia pós comparativa da abordagem viscoelástica, de forma a discutir e tirar as devidas conclusões. Os resultados abordados a tensões e deformações de cada modelo numérico.



Vão ser analisadas duas zonas para cada ensaio de resistência que vão ser referidas como zonas de análise TN (T1, T2, T3, T4). Em cada uma será selecionado um elemento de referência onde serão estudadas as deformações relativamente ao plano principal e as tensões *Von Mises*

4.4.1 Avaliação estrutural estática do modelo numérico industrial

Numa primeira fase são apresentados os resultados referentes ao teste normativo de **resistência de um encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação**, sendo obtida a distribuição de tensões ao longo do encosto. Convém frisar que o encosto na realidade é composto por dois tipos de materiais, entre eles o compósito designado *TEPEX dynalite 102-RG600(4)/47% Roving Glass* (tabela 8), que não é analisado nesta simulação simplificando assim o problema do estudo da viscoelasticidade.

É constatado que na zona T1 das figuras 42 e 43, que as tensões máximas da estrutura termoplástica reforçada com fibra de vidro, concentram-se nas nervuras que conferem rigidez à zona de fixação da peça junto aos pontos de localização dos incertos metálicos. Em ambas as zonas, verifica-se que a tensão máxima corresponde a 109,6 MPa. Com o recurso à tabela 8 verifica-se que a tensão nas nervuras é inferior à tensão admissível do material. Portanto, a estrutura desenvolvida satisfaz os requisitos normativos [68], uma vez que não ultrapassa a tensão admissível.

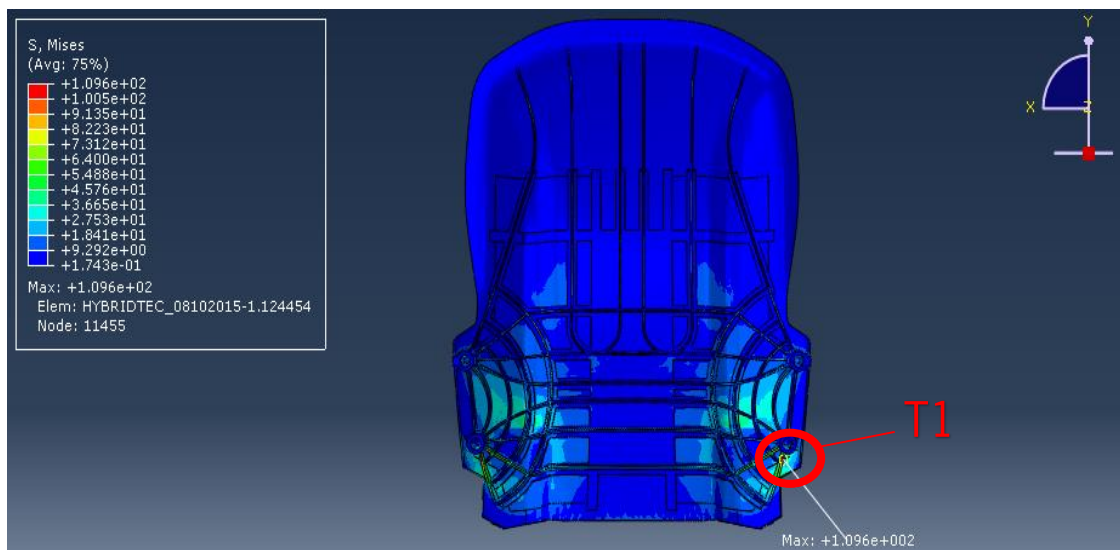


Figura 42: Distribuição das tensões de Von Mises da estrutura constituída por PA 6 com 30%FV, T1.

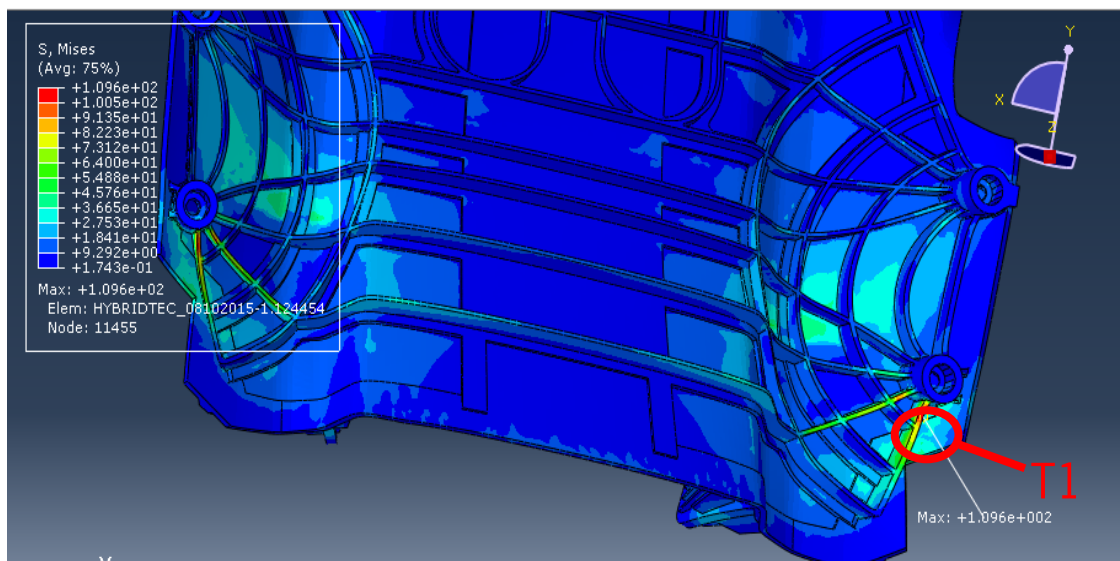


Figura 43: Distribuição das tensões máximas de Von Mises na Nervura, T1.

No que concerne à zona T2 expressa nas figuras 44 e 45, que representam a aplicação do binário aludido na tabela 9, verifica-se que cada apoio de banco a tensão é de 73,1 MPa, sendo esta também inferior à tensão admissível no material

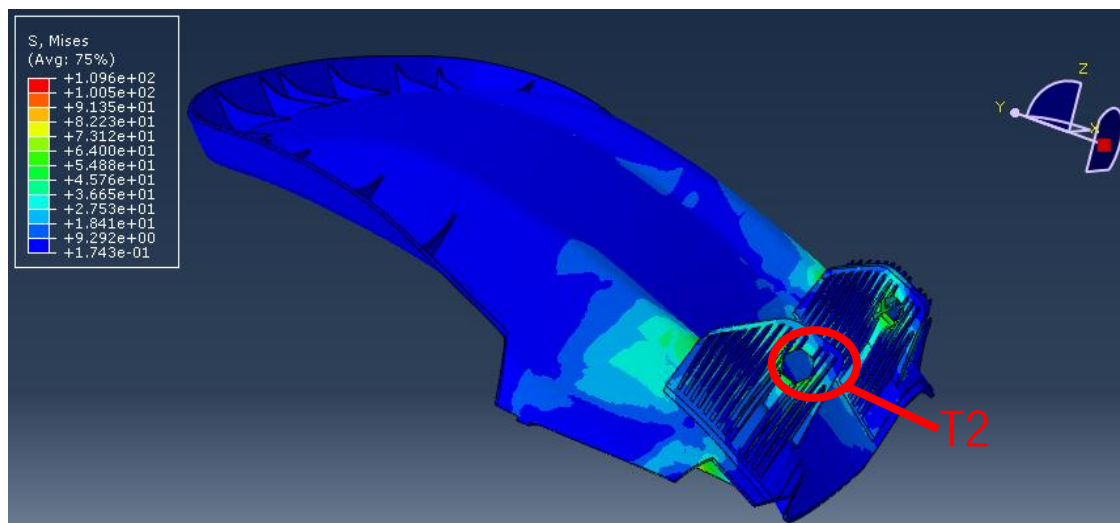


Figura 44: Distribuição das tensões de Von Mises nos apoios do encosto, T2.

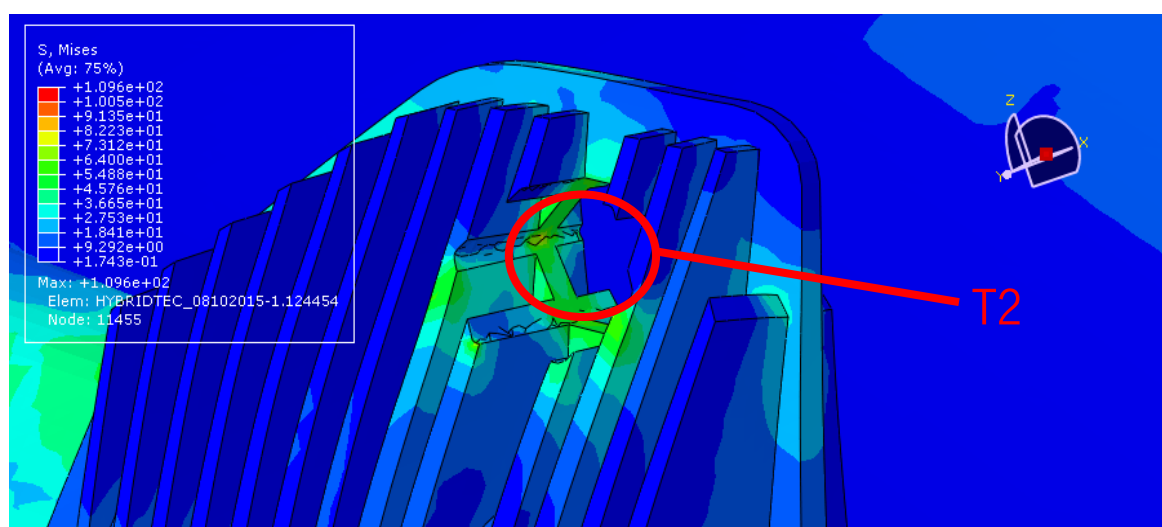


Figura 45: Distribuição das tensões de Von Mises no apoio do encosto, T2

Relativamente às deformações pronunciadas na zona T1, é visível uma deformação máxima no plano principal de 0,0045 (figura 46), sendo que a deformação na zona T1 encontra-se representada na figura 47 sob a forma de um gráfico ao longo do tempo.

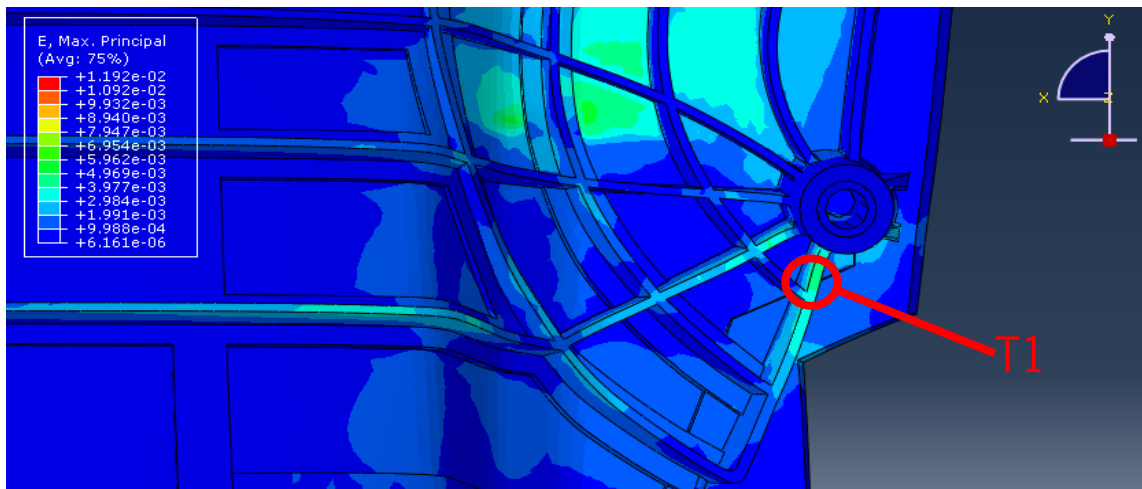


Figura 46: Distribuição da deformação na nervura, T1.

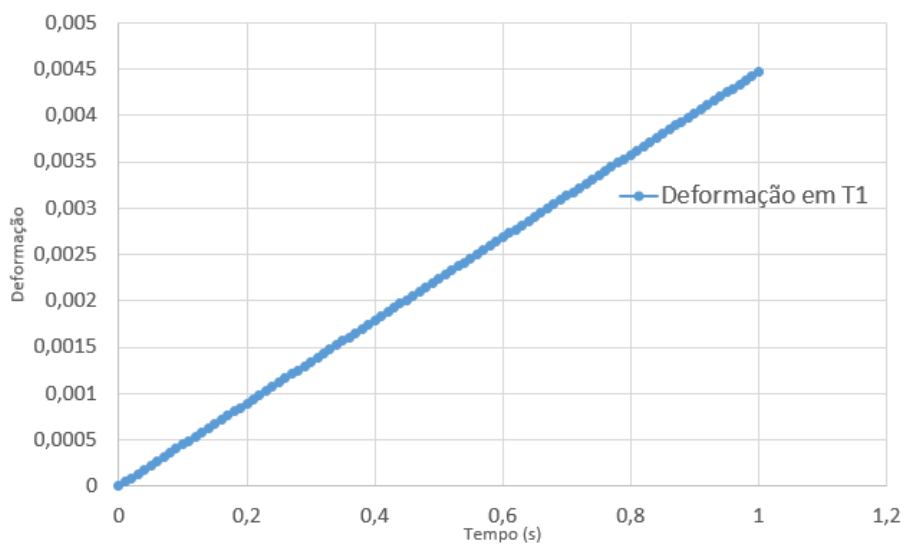


Figura 47: Gráfico da Deformação vs. Tempo em T1

Já no que toca às abordagens das deformações máximas no plano principal na zona T2, verifica-se a existência de uma deformação máxima de 0,012 no interior do apoio como demonstra a figura 48, onde é precisamente aplicado o momento.

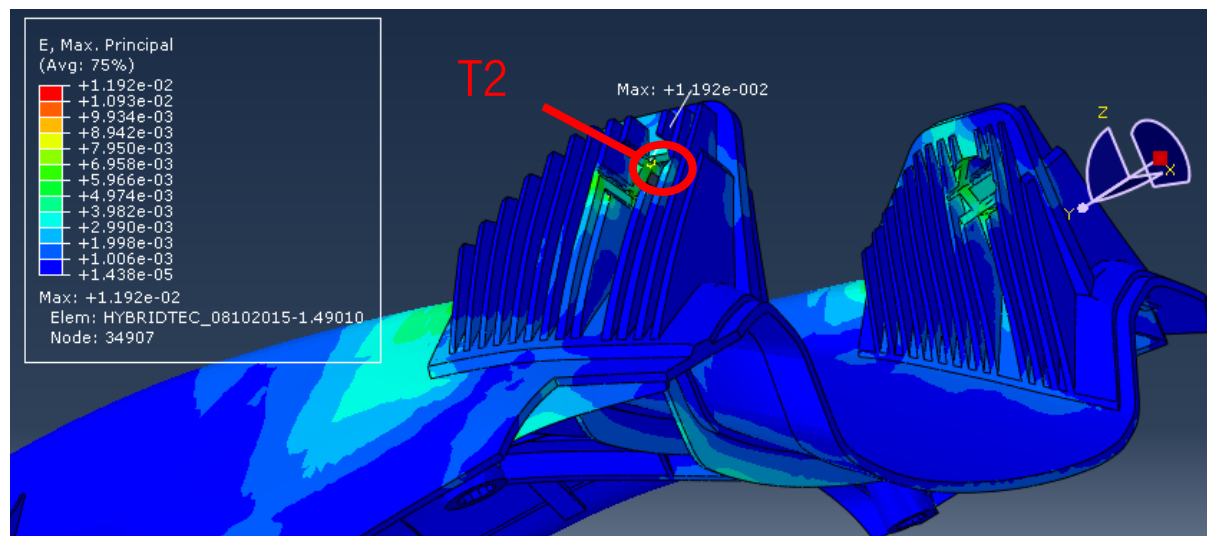


Figura 48: Distribuição da deformação nos apoios do encosto

O gráfico representativo da deformação localizada em T2 (figura 48) é igual ao da figura 46, uma vez que se tratam de deformações elásticas, onde a deformação é diretamente proporcional ao tempo, sendo que tais resultados derivam da abordagem estática da simulação.

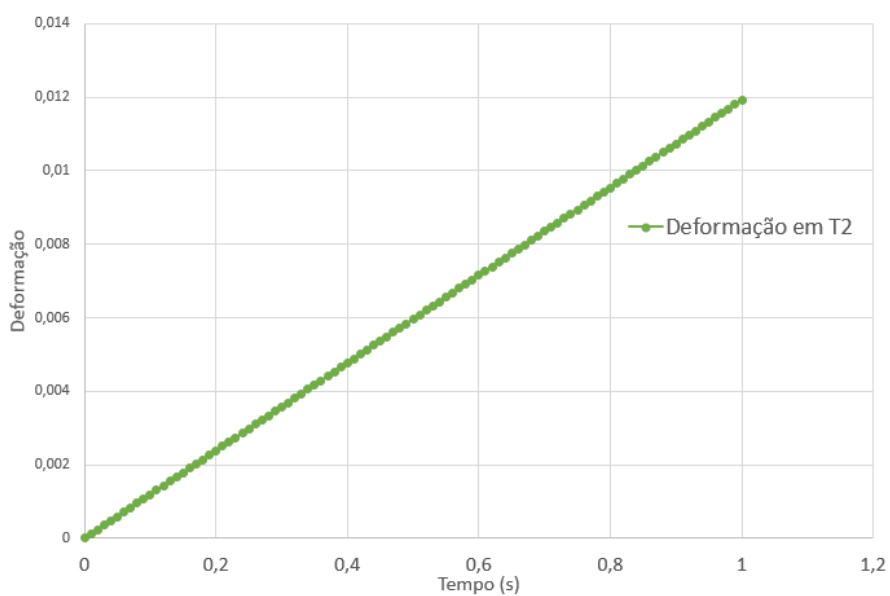


Figura 49: Gráfico da Deformação vs. Tempo em T2.



Na aplicação de uma força frontal no encosto, as tensões máximas resultantes situam-se no ponto de aplicação da força, zona T3 da figura 50, $\sigma_{mises} = 65,8 \text{ MPa}$, sendo que a tensão do elemento em análise na zona T3, é de 47 MPa.

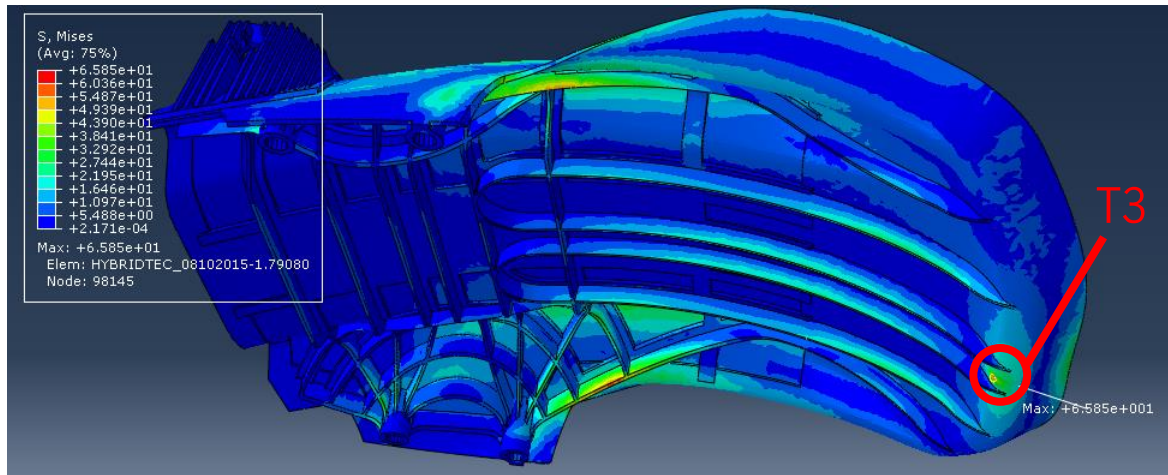


Figura 50: Distribuição das tensões nas nervuras e no ponto de aplicação da força T3.

Nas nervuras mais afastadas do centro da peça ligada ao ponto de colocação do inserto (zona T4 da figura 51) possui uma tensão de 60,36 MPa no elemento em análise. Ambas as tensões são inferiores a tensão admissível indicada pelo material na tabela 8.

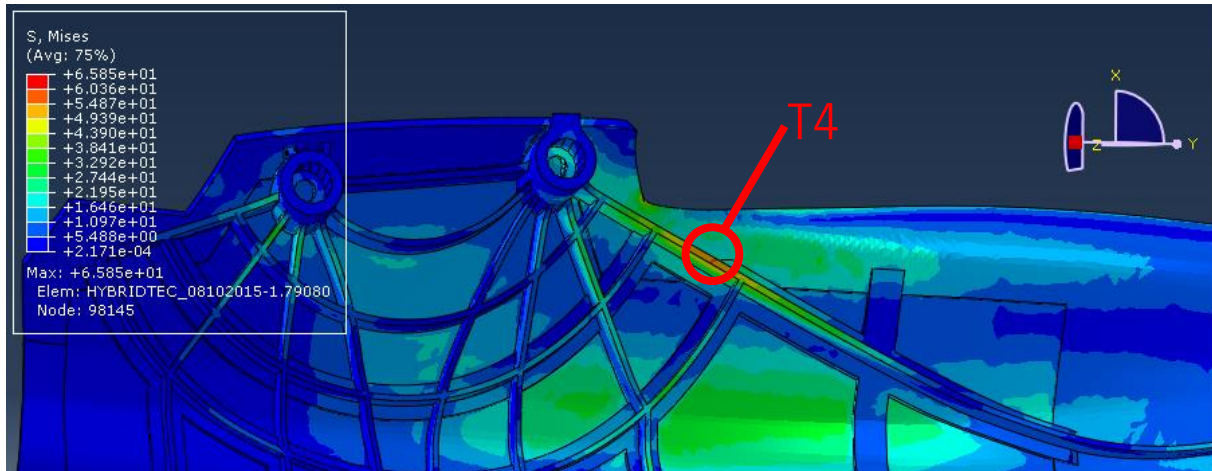


Figura 51: Distribuição das tensões na nervura T4.

Relativamente às deformações do sistema no plano principal, quando é aplicada uma força de 735 N, verifica-se uma deformação máxima 0,00562 (figura 52) na zona T3 sendo que o elemento em estudo indica uma deformação de 0,0055.

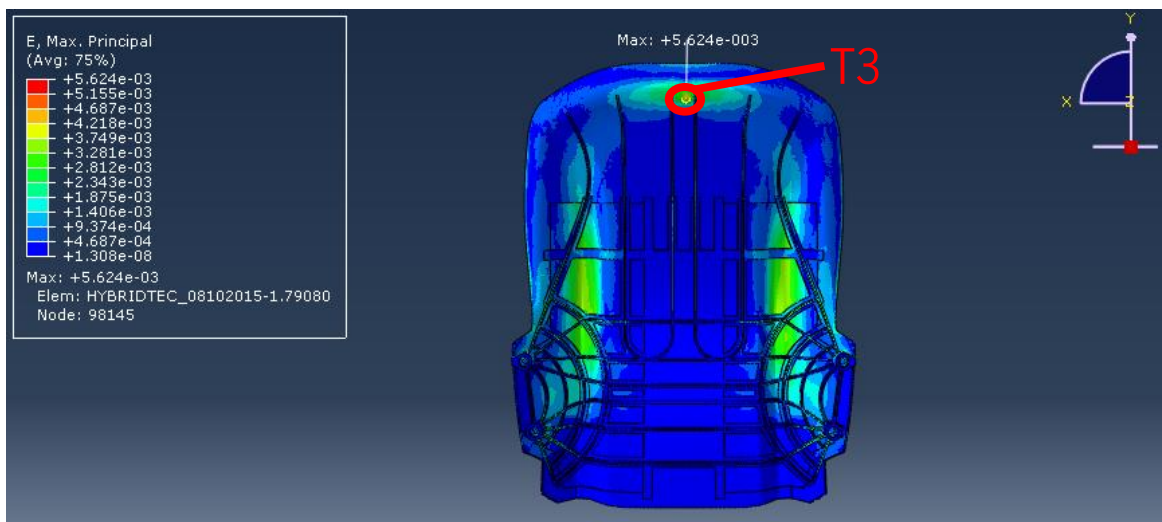


Figura 52: Distribuição da deformação no ponto de aplicação da força, T3.

Na zona T4 da figura verifica-se uma distribuição de deformações em relação ao plano principal com uma deformação máxima no elemento de 0,0026 (figura 53).

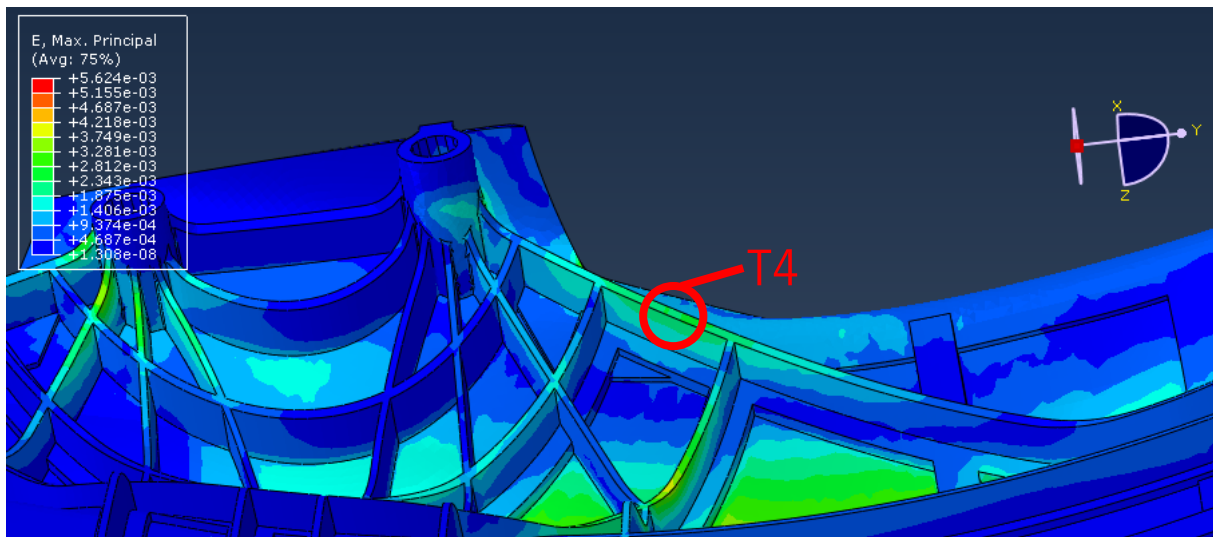


Figura 53: Distribuição das deformações na nervura, T4.

Relativamente aos gráficos, de deformação vs. tempo para as zonas T3 e T4, não são aqui apresentados visto que são do mesmo caráter que os gráficos das figuras 47 e 49 isto porque encontram-se no domínio estático do problema.

4.4.2 Avaliação estrutural viscoelástica do modelo numérico industrial

Na avaliação estrutural viscoelástica do modelo numérico, vão ser abordados os mesmos locais da análise estática realizada anteriormente.

Comparativamente com a análise estática do problema, e atendendo à figura 54, é evidente que as tensões de *Von Mises* geradas na nervura da peça são superiores (114,1 MPa) para um tempo de carregamento de 10000 horas (figura 54), não ultrapassando a tensão admissível indicada no material (tabela 8).

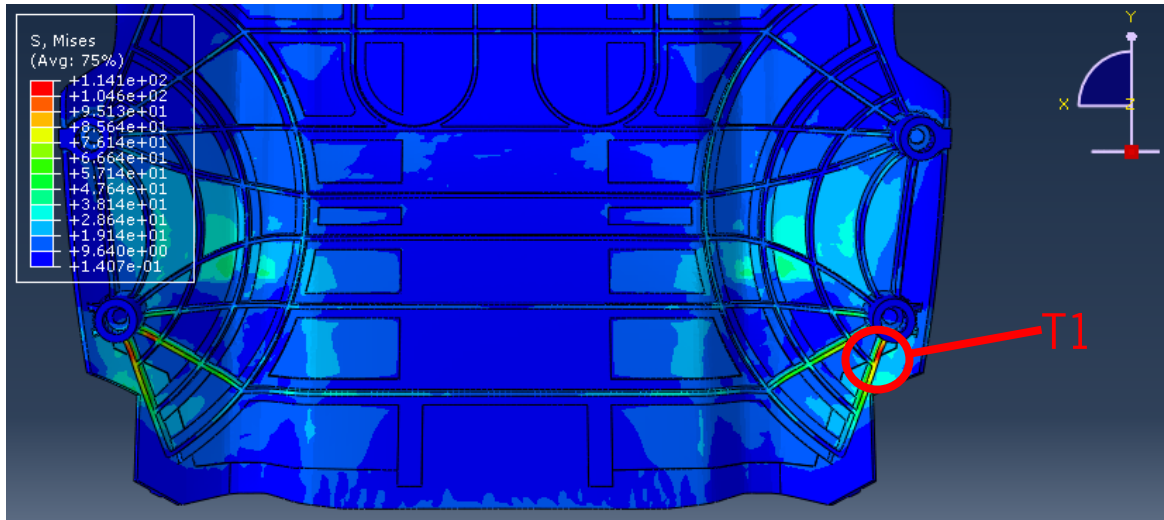


Figura 54: Distribuição das tensões em T1 para um tempo de carga de 10000 horas

Selecionando o elemento T1, verifica-se que a tensão máxima gerada na nervura, é afinal superior à escala de tensões apresentada na figura 54 no Abaqus situando-se nos 123,5 MPa. Depois verifica-se um pequeno decaimento exponencial da tensão em função do tempo (figura 55) na ordem os 3 MPa ($\sim 120,4MPa$) fruto do relaxamento da poliamida 6 30%FV.

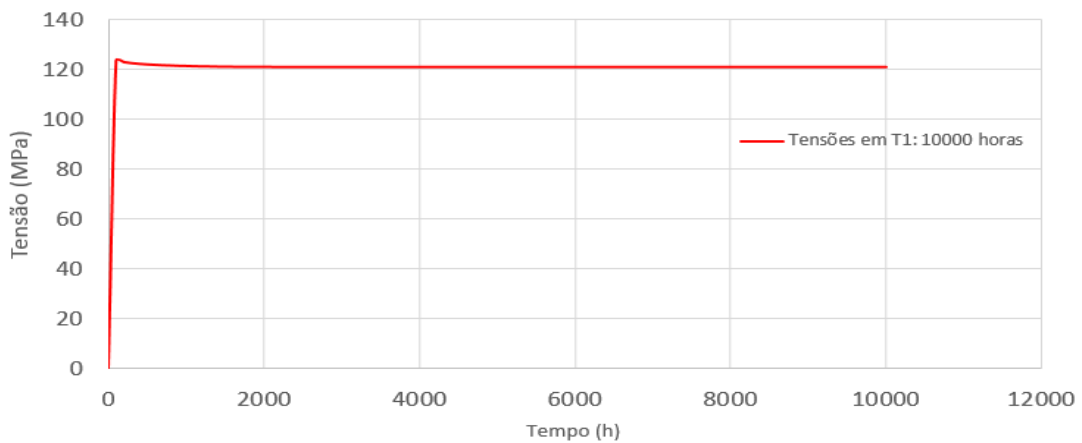


Figura 55: Curva Tensão vs. Tempo no elemento da zona T1, 10000 horas



Relativamente às deformações geradas na nervura da zona T1, verifica-se que para um tempo de carregamento de 1000 horas, a deformação, atinge um máximo perto de 0,012 o que é substancial comparativamente com a análise estática do problema ($\epsilon_{Max,principal} = 0,0045$).

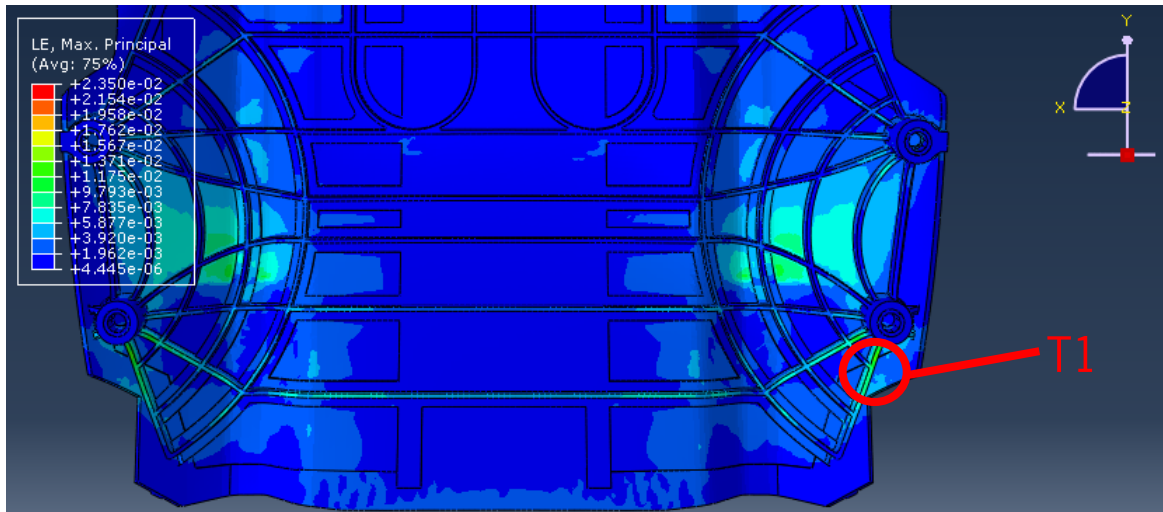


Figura 56: Distribuição das deformações em T1 para um tempo de carga 1000 horas.

É curioso verificar que nas primeiras horas de carregamento o material sofre uma deformação elástica de 0,0047 como demonstra o gráfico da figura 57 e que este valor quase coincide com o valor da deformação total obtida no gráfico da figura 47, na abordagem estática, $\epsilon_{Max,Principal} = 0,0045$.

Com o avançar do tempo, a deformação transita para uma fase não linear, dando indícios de querer estabilizar para um valor de deformação superior a 0,012.

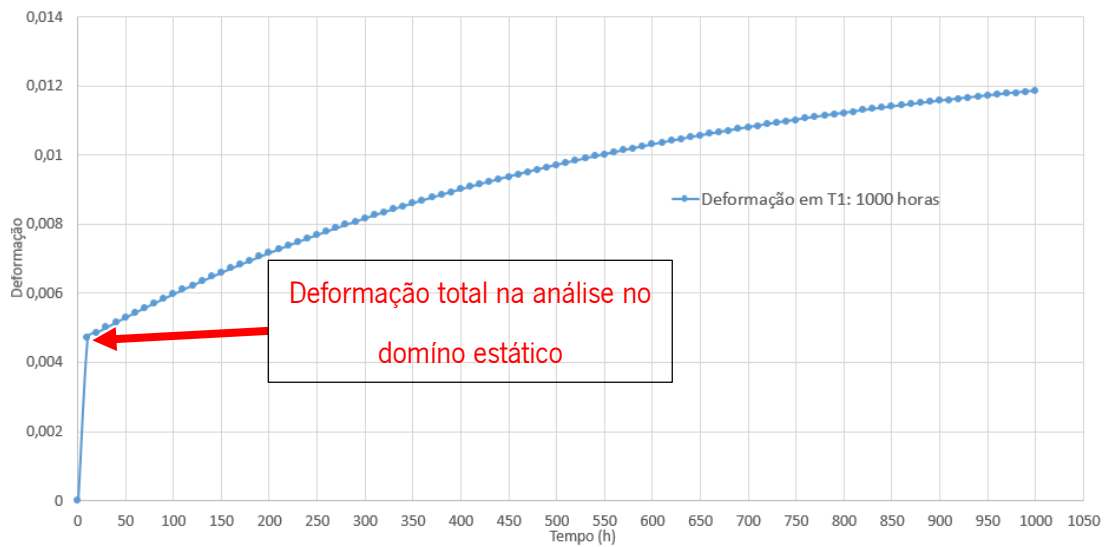


Figura 57: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T1.

Para os restantes tempos de carregamento, $t = 5000 h$ e $t = 10000 h$, são apresentados curvas da figura 58, por forma a verificar quando é que ocorre a estabilização da deformação no sistema. É evidenciado na figura 58 para ambas as situações, uma estabilização próxima das 3000 horas de carregamento com uma deformação de 0,013.

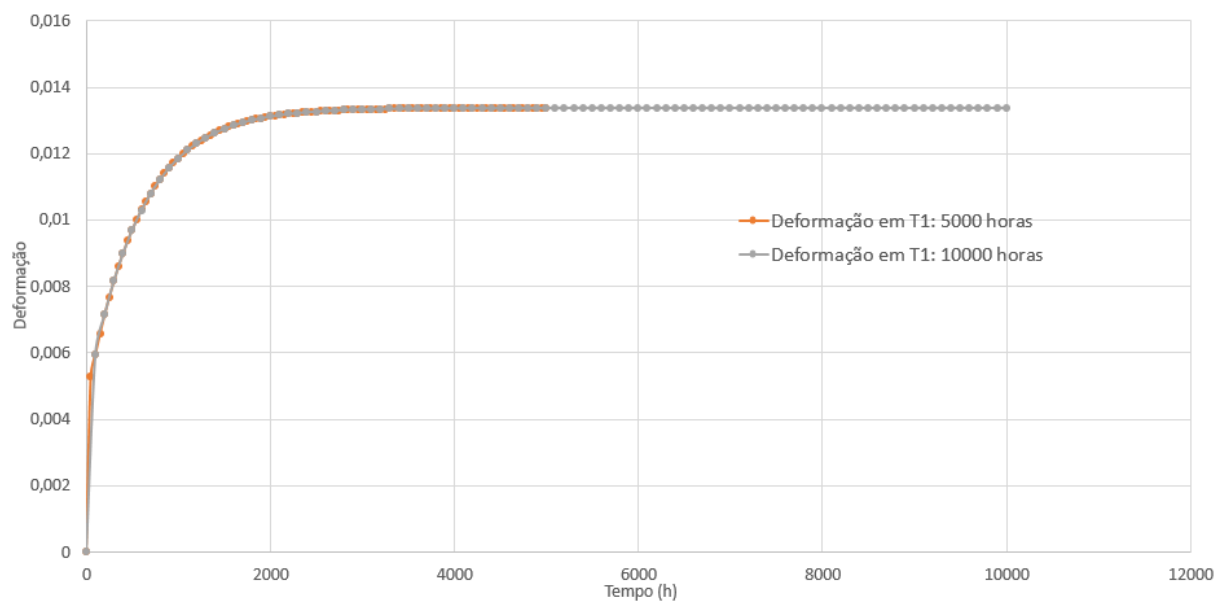


Figura 58: Curvas Deformação vs. Tempo no elemento de T1



Ainda na abordagem na zona T1, é apresentado um gráfico de recuperação de 1000 horas, referente ao período de carregamento mais longo (10000 horas), onde verifica-se uma recuperação instantânea do material situando-se nos 0,013 (figura 59). Depois com o avanço do tempo visualiza-se uma recuperação não linear fruto da componente viscosa do material que não permite a sua recuperação na totalidade.

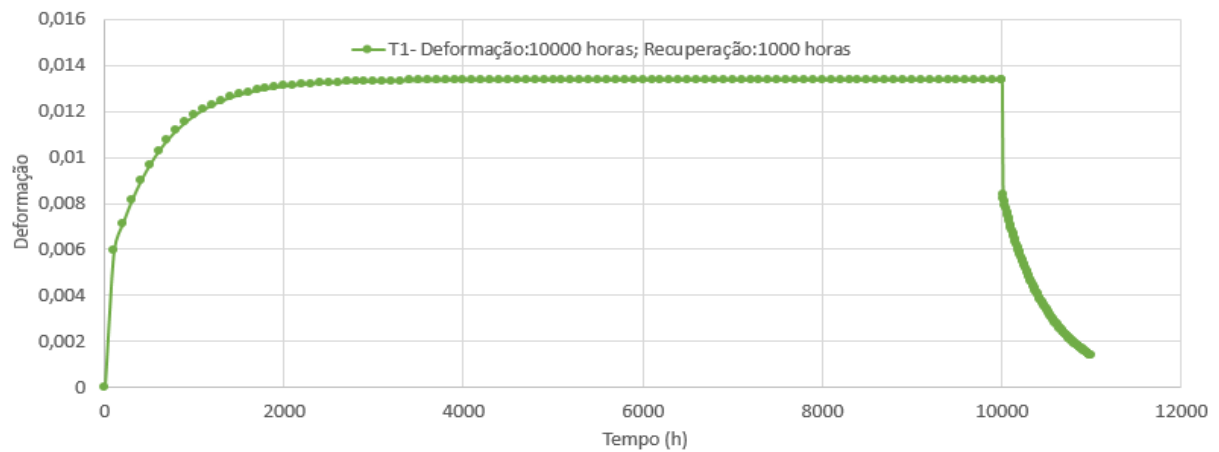


Figura 59: Curvas Deformação vs. Tempo no elemento de T1 e a respetiva recuperação

De modo a concluir a abordagem na zona T1, relativamente à carga com a gama de amplitudes definida na figura 41, encontra-se representado sob a forma de uma curva as deformações em função do tempo (figura 60).

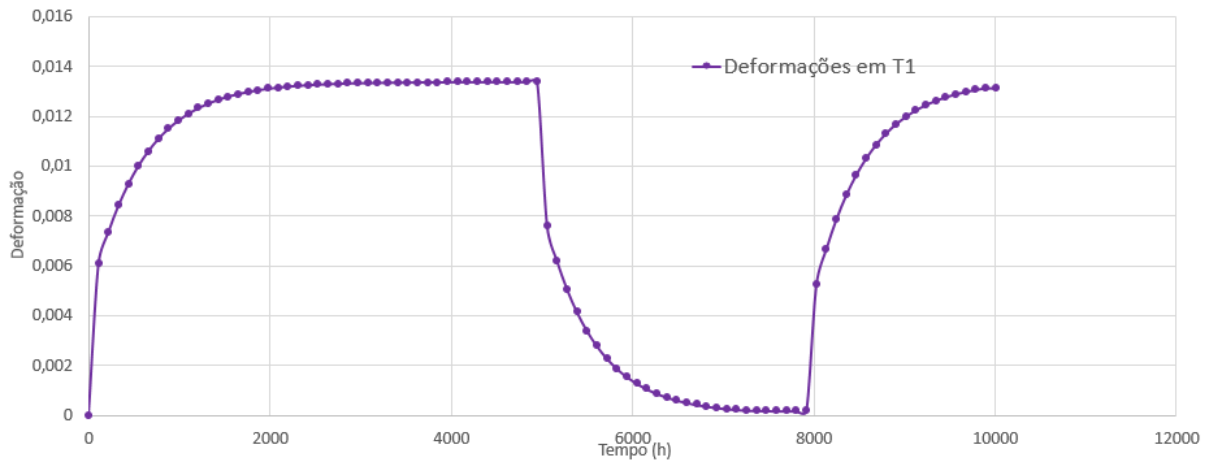


Figura 60: Deformações em T1 provenientes da amplitude da carga

Verifica-se na figura 60 que a deformação aproxima-se de zero para um tempo de 8000 horas. Relativamente ao segundo carregamento, este evidencia uma deformação elástica menor comparativamente com a primeira ($t = 8000 h$). No entanto verifica-se que a deformação para o tempo de 10000 horas encontra-se dentro dos mesmos valores.

Tabela 17: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T1.

Modelo numérico	Deformação Total	Tensão (MPa)
Elemento T1- <u>Domínio Estático</u>	0,0045	109,6
Elemento T1- <u>Domínio Viscoelástico</u>	0,13	120,3 (relaxamento)

São agora apresentadas a distribuição de tensões e deformações referentes à zona T2 onde é aplicado o momento.

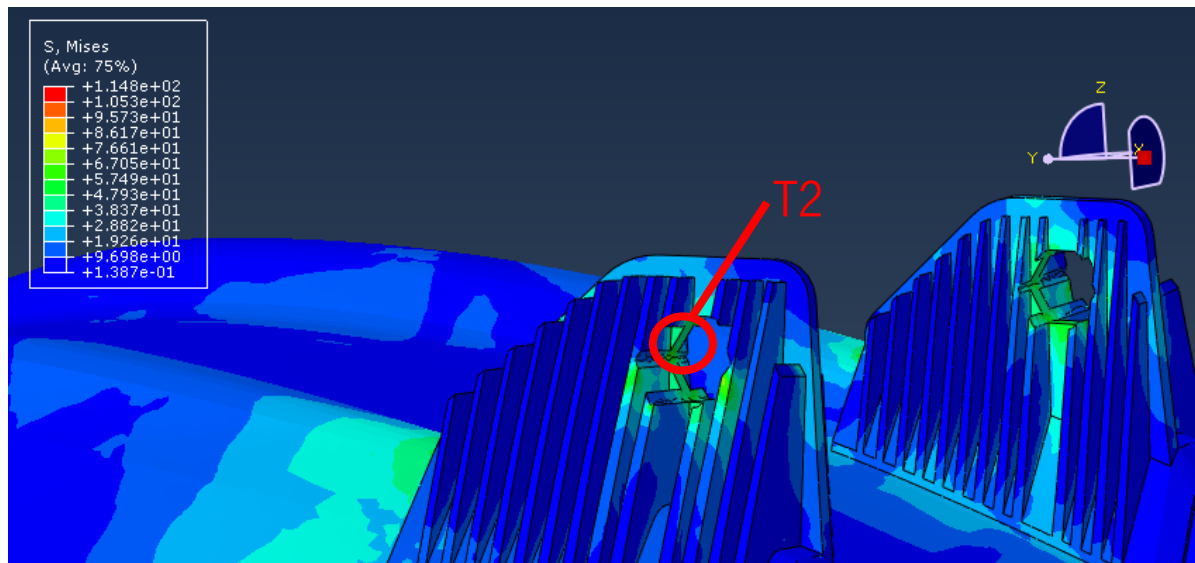


Figura 61: Distribuição das tensões em T2 para um tempo de carga de 10000 horas

No gráfico da figura 62 estão representadas as tensões geradas na zona T2 para um tempo de carregamento de 10000 horas. Verifica-se que o pico máximo de tensão no elemento em estudo situa-se perto dos 90 MPa, ($\sigma_{(Von Mises)} = 88,7 MPa$). Visualiza-se um decaimento da tensão na forma exponencial, estabilizando em definitivo nas 2000 horas ($\sigma_{(Von Mises)} = 81,1 MPa$). Com esta descrição do gráfico, revela-se a existência de relaxação de tensões na zona T2 onde é aplicado o binário.

Comparativamente com a análise estática do problema as tensões geradas no modelo estático, $\sigma_{(Von Mises)} = 73,1 MPa$, são inferiores relativamente à análise no domínio da viscoelasticidade.

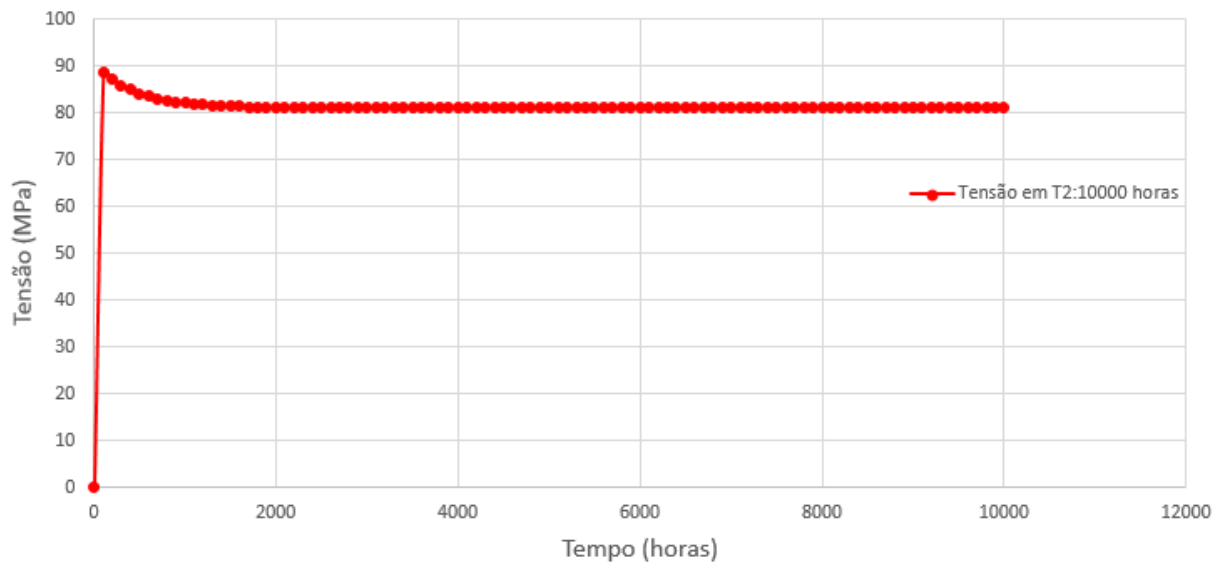


Figura 62: Gráfico da Tensão vs. Tempo no elemento de T2

No que concerne às deformações geradas no elemento em estudo na zona T2, verifica-se que para um carregamento de 1000 horas a deformação é quase o dobro da análise estática examinada inicialmente, $\epsilon_{Max,principal} = 0,0235$ (figura 63).

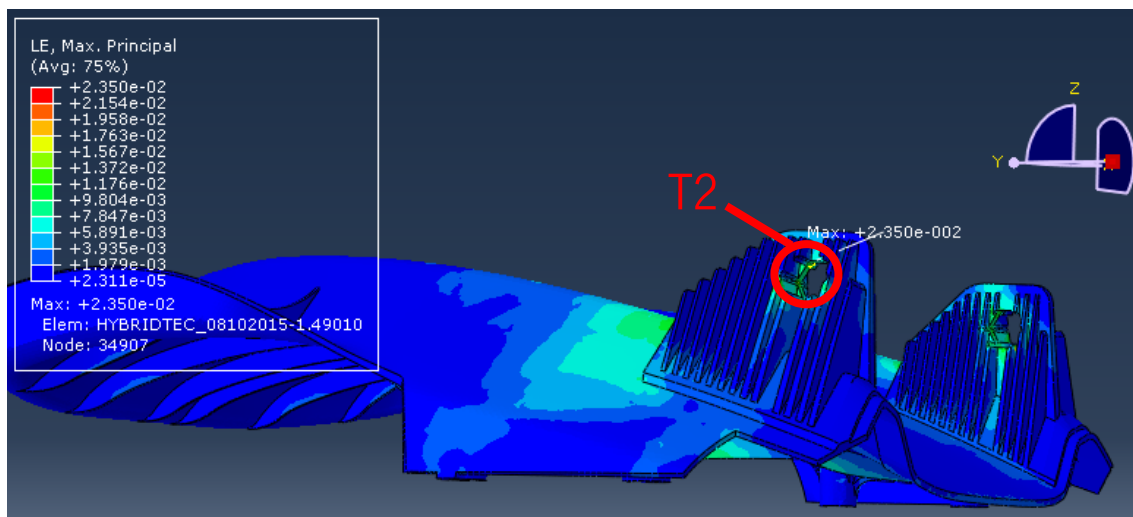


Figura 63: Distribuição das deformações em T2 para um tempo de carga 1000 horas



Ou seja é evidente a existência de um comportamento característico de fluência, que se encontra representado na figura 64 onde nos instantes de tempo iniciais ($t = 10h$), a deformação é predominantemente elástica, $\varepsilon_{Max,principal} = 0,012$, coincidindo com o valor obtido total na abordagem estática do problema da figura 49. Posteriormente, e com o decorrer do tempo, o material começa a fluir evidenciando uma curva característica do comportamento viscoelástico. Esta curva é designada no estado de arte como fluência primária. Referentemente à análise da curva da figura 62, esta salienta uma certa tendência de linearidade (fluência secundária) para períodos de tempo mais longos.

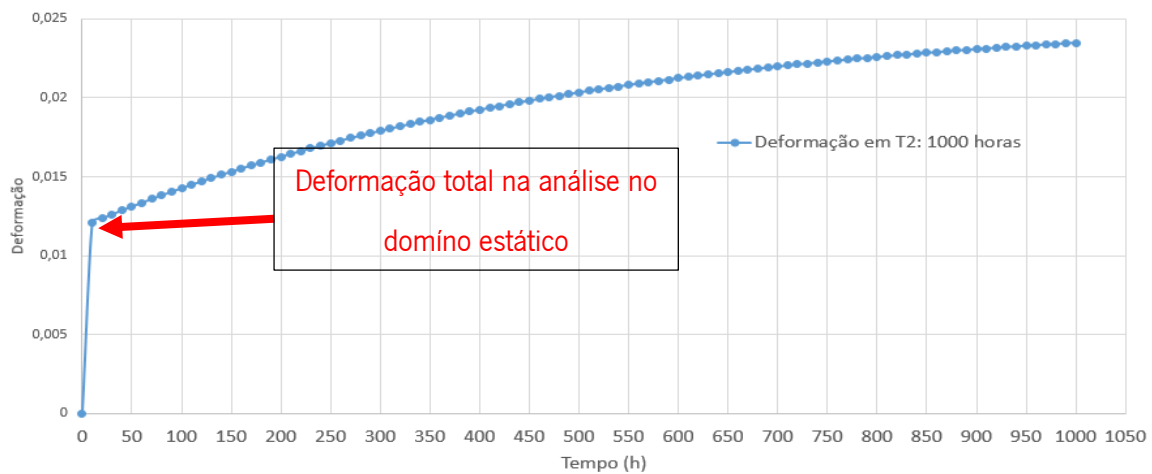


Figura 64: Gráfico da Deformação vs. Tempo no elemento de T2.

O modelo industrial, no que concerne ao elemento de análise da figura 63 foi ainda abordado para um período de 5000 e 10000 horas, com a particularidade de procurar uma recuperação relativamente à simulação de 10000 horas por forma a verificar e analisar a capacidade de recuperação do material no aliviar da carga.

Na figura 65 verifica-se que existe uma estabilização na deformação a partir das 2200 horas após o início do carregamento, $\varepsilon_{t=\infty} = 0,253 \text{ mm}$. Esta estabilização resulta da relaxação que ocorre no material.

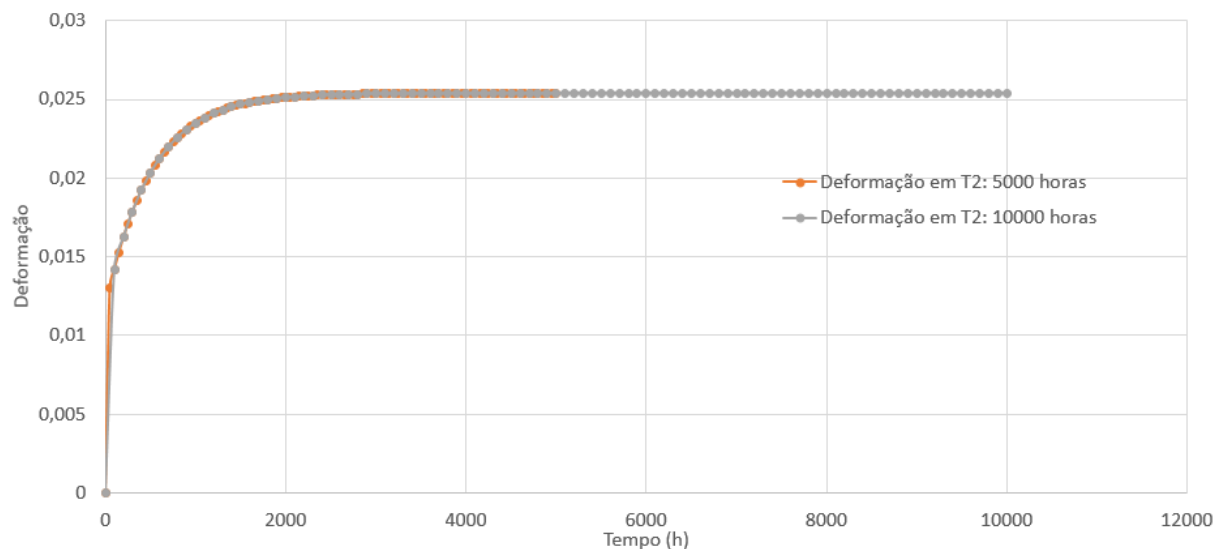


Figura 65: Curvas Deformação vs. Tempo no elemento de T2.

Relativamente à recuperação ($t = 1000\text{ h}$) do material quando o carregamento de 10000 horas é retirado, verifica-se uma recuperação substancial (cerca de 50%) elástica da deformação, havendo posteriormente uma recuperação no domínio viscoelástico do sistema (figura 66). A deformação fixou-se nos 0,0022 para um tempo total de simulação de 11000 horas.

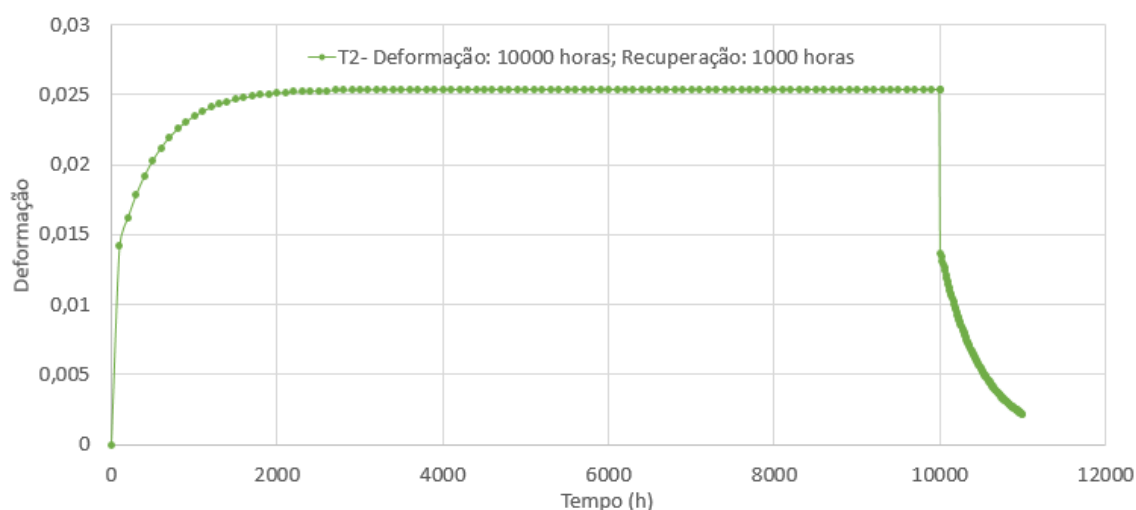


Figura 66: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T2 e a respetiva recuperação.



De modo a concluir a análise referente à resistência de um encosto do banco e dos respetivos sistemas de regulação (T2), é apresentado o gráfico com as amplitudes da carga definidas anteriormente (figura 67).

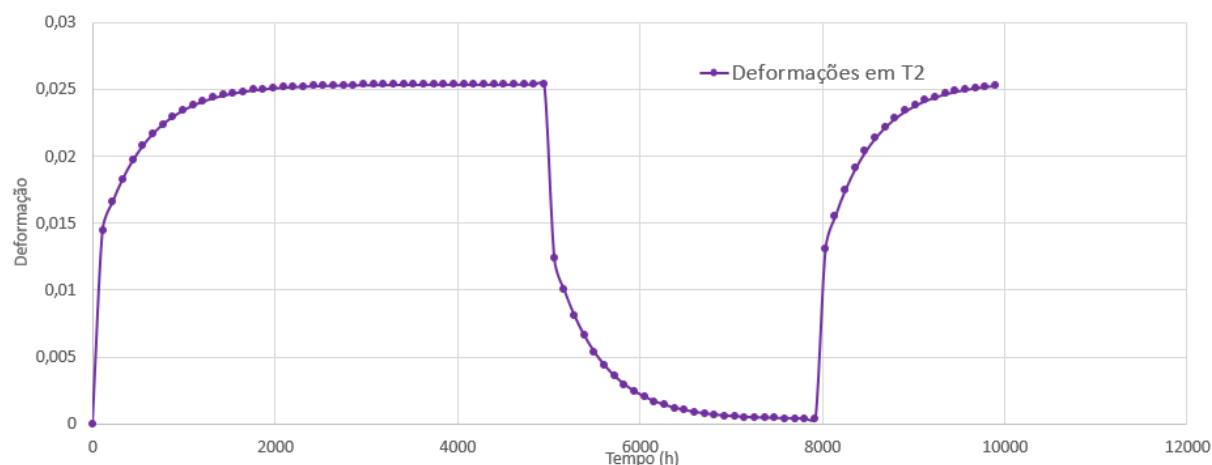


Figura 67: Deformações em T2 provenientes da amplitude da carga

É evidenciado de igual modo, as mesmas características da análise T1 onde é observada uma recuperação da deformação que se situa próxima do zero ($t = 8000 h$) seguido de uma deformação elástica, sendo esta inferior ao do primeiro carregamento. Verifica-se também que a deformação para o tempo de 10000 horas encontra-se dentro dos mesmos valores.

Tabela 18: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T2.

Modelo numérico	Deformação Total	Tensão (MPa)
Elemento T2- <u>Domínio Estático</u>	0,012	73,1
Elemento T2- <u>Domínio Viscoelástico</u>	0,253	81,1 (relaxamento)



Na aplicação de uma força frontal no encosto, as tensões máximas resultantes situam-se no ponto de aplicação da força, zona T3 da figura 68, $\sigma_{mises} = 63,8 \text{ MPa}$, sendo que a tensão máxima do elemento em análise na zona T3 é de 45,42 MPa. O tempo de aplicação da carga é de 10000 horas

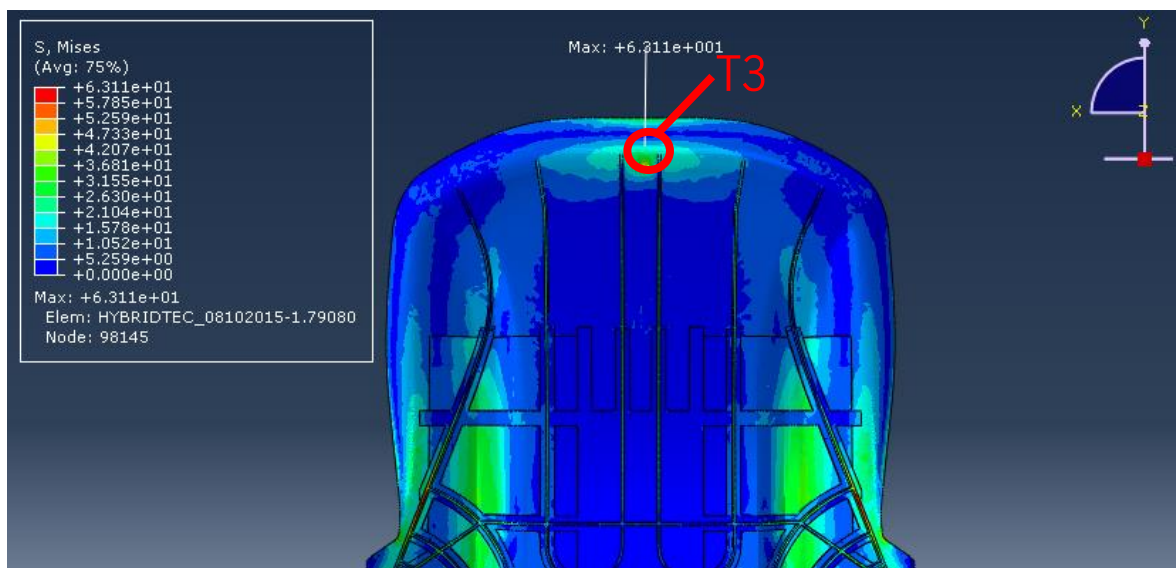


Figura 68: Distribuição das tensões em T3, para um tempo de carga de 10000 horas

Nas tensões do elemento na zona T3, relativamente ao gráfico da figura 69 verifica-se uma ligeira relaxação do material para um período de carregamento de 10000 horas. O pico de tensão situa-se nos 45,42 MPa, havendo depois um relaxamento das tensões até aos 44,84 MPa. Comparativamente com a tensão máxima da análise estática (47 MPa), do mesmo elemento, existe uma pequena diferença no valor na tensão máxima. No entanto convém realçar que a relaxação do material é quase imperceptível.

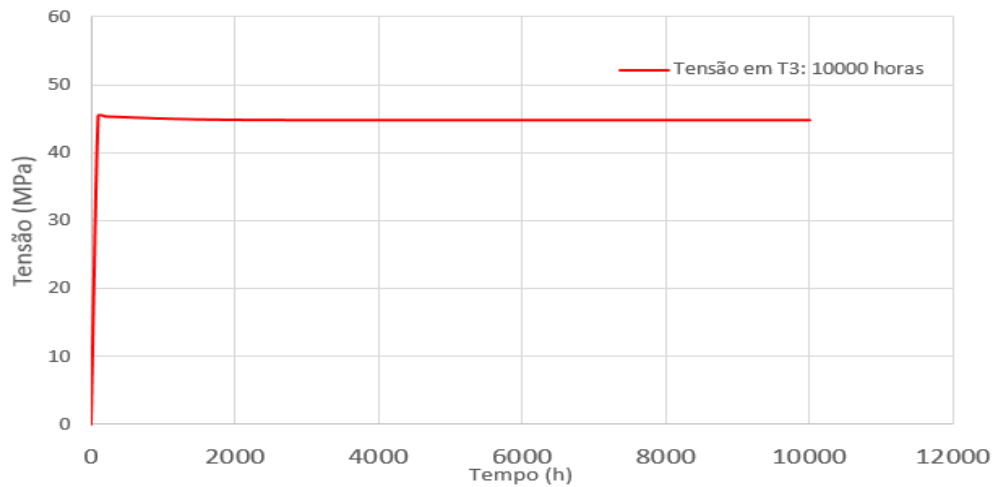


Figura 69: Curva Tensão vs. Tempo no elemento de T3.

Relativamente às deformações no elemento da zona T3, são apresentados os gráficos das deformações para 1000 horas seguidas depois das 5000 horas e 10000 horas onde nestas serão incorporadas as recuperações, ambas para 1000 horas.

A deformação máxima situa-se no ponto de aplicação da força para um período de carga de 1000 horas, T3 (figura 70).

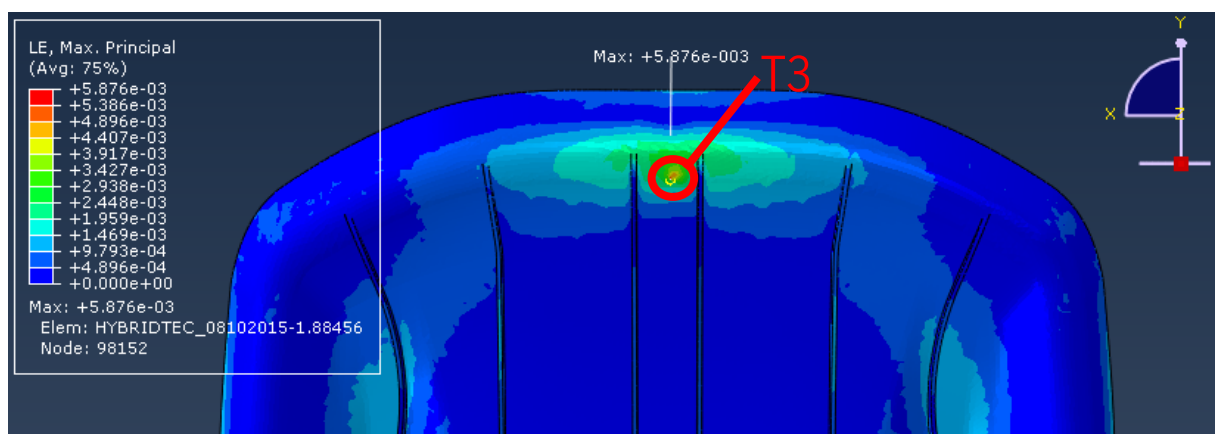


Figura 70: Distribuição das deformações no ponto de aplicação da força para um tempo 1000 horas, T3



Abordando um elemento na zona T3, evidencia-se na figura 68, uma deformação elástica de 0,0027 nas primeiras horas seguido de uma deformação não linear que dá indícios de estabilizar nos 0,005.

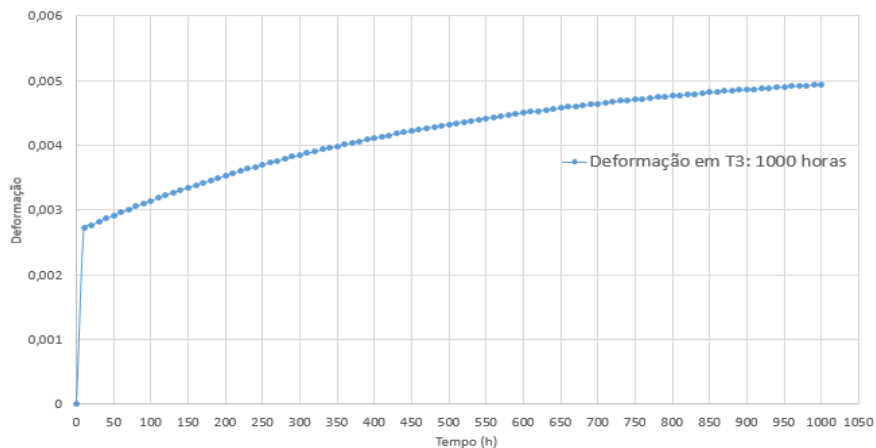


Figura 71: Gráfico da Deformação vs. Tempo no elemento de T3

Contrariamente do que se verificou nas zonas T1 e T2 para uma análise viscoelástica, a deformação elástica evidenciada na figura 71 para as primeiras horas não coincide com a análise estática do modelo. Ou seja a deformação total para uma análise viscoelástica de 1000 horas situa-se precisamente na mesma linha que a deformação estática evidenciada no mesmo elemento da figura 52. Segundo esta simulação no domínio da viscoelasticidade, a deformação elástica do material situar-se-ia próxima dos 0,003.

No prolongamento da carga para um tempo de 5000 horas e 10000 horas é evidenciada uma estabilização na deformação de 0,0054, seguida de uma recuperação elástica quando a carga é retirada (figura 72). Esta recuperação corresponde aproximadamente a metade da deformação global obtida inicialmente a quando do carregamento.

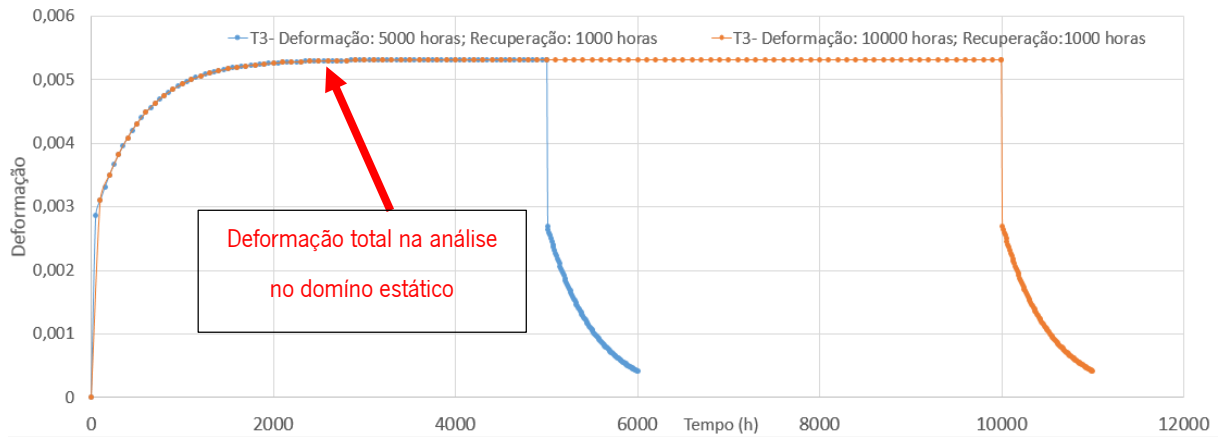


Figura 72: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T3 e a respetiva recuperação.

Tabela 19: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T3.

Modelo numérico	Deformação Total	Tensão (MPa)
Elemento T3- <u>Domínio Estático</u>	0,0055	47
Elemento T3- <u>Domínio Viscoelástico</u>	0,0054	44,84 (relaxamento)

Analisando a zona T4, estão representadas na figura 73 a distribuição de tensões na nervura.

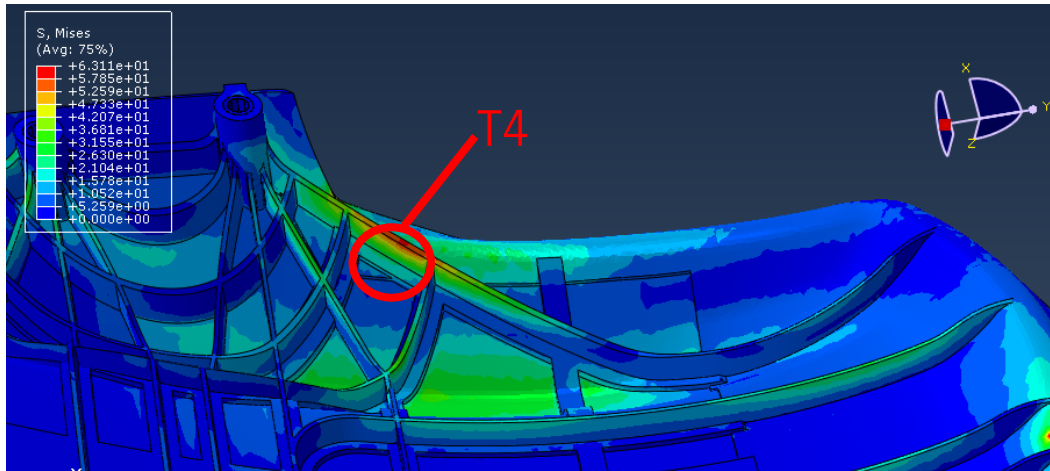


Figura 73: Distribuição das tensões em T4, para um tempo de carga de 10000 horas

Relativamente ao elemento da nervura na zona T4, na figura 74 representa graficamente a tensão gerada para um período de carregamento de 10000 horas não havendo indícios de relaxação do material. A tensão fixa-se perto dos 60 MPa.

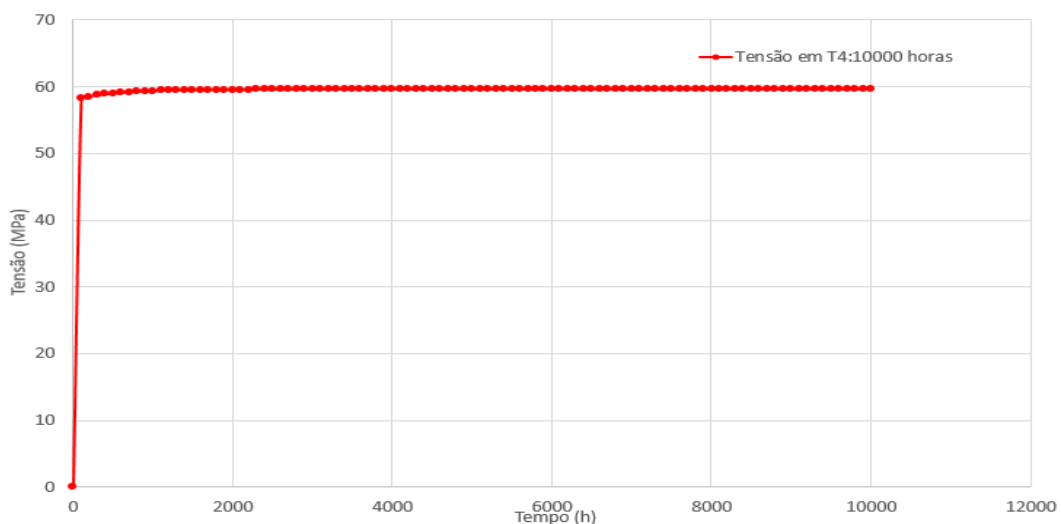


Figura 74: Curva Tensão vs. Tempo no elemento de T3.



Na deformação do elemento na zona T4 (figura 75), verifica-se que é praticamente a mesma comparativamente com a análise estática.

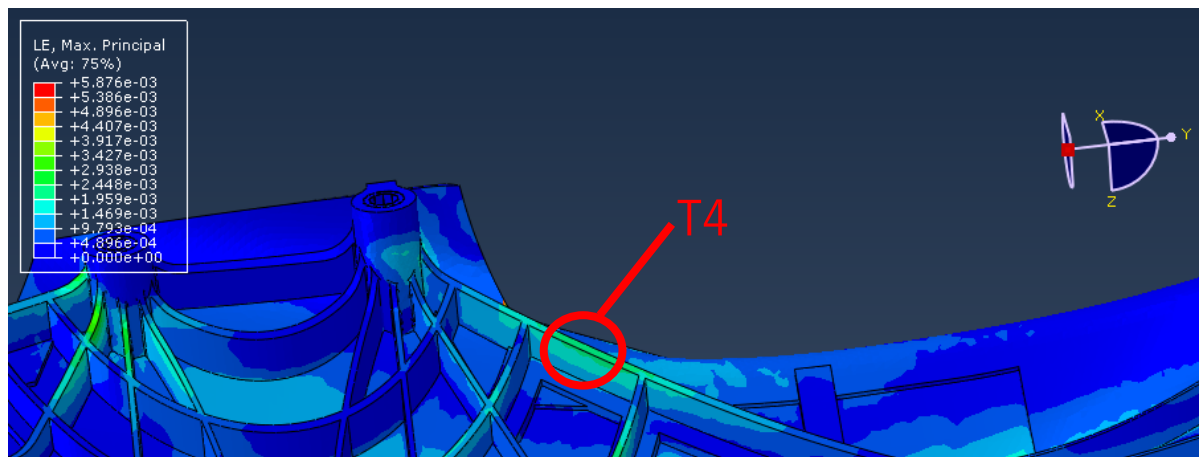


Figura 75: Distribuição das deformações na nervura para um tempo 1000 horas, T4

Ou seja, no momento em que a deformação estabiliza (figura 77), esta é aproximadamente a mesma (0,0026) que a análise estática do modelo. No entanto convém realçar o comportamento característico de fluência na figura 76 para um tempo de 1000 horas.

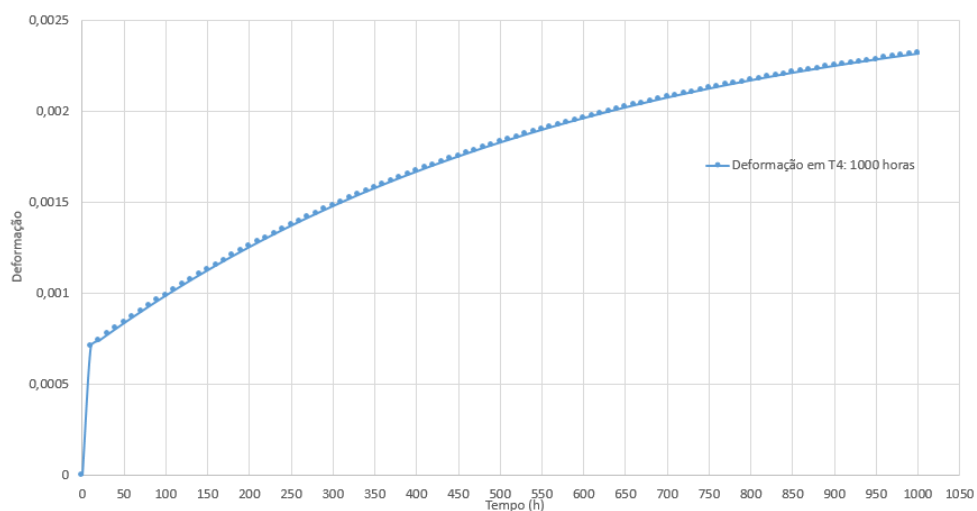


Figura 76: Gráfico da Deformação vs. Tempo no elemento de T4



Do mesmo modo são observadas as mesmas características mencionadas nas análises anteriores relativas aos períodos de recuperação de 1000 horas (figura 77). É evidenciada a estabilização da deformação (0,0026), bem como a componente elástica e a componente viscoelástica do sistema. É de notar que no momento em que ocorre recuperação elástica, esta não é das mesmas proporções comparativamente com as restantes zonas de análise sendo significativamente menor havendo depois uma não linearidade significativa fruto da viscoelasticidade do material. A deformação final fixa-se para ambos os casos nos 0,0004.

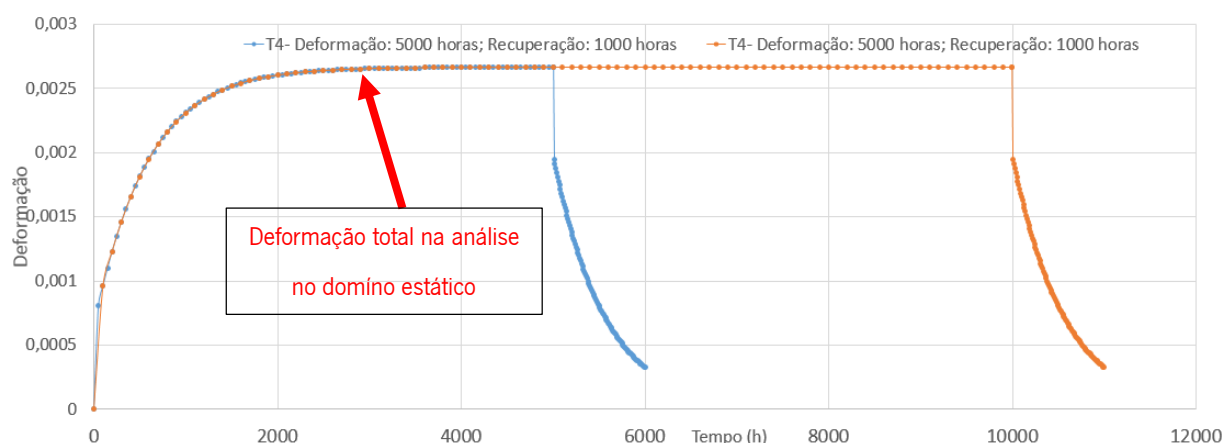


Figura 77: Curva Deformação vs. Tempo no elemento de T4 e a respetiva recuperação

Tabela 20: Deformações e tensões no domínio estático e viscoelástico no elemento em análise, T4.

Modelo numérico	Deformação Total	Tensão (MPa)
Elemento T4- <u>Domínio Estático</u>	0,0026	60,36
Elemento T4- <u>Domínio Viscoelástico</u>	0,0026	60 (relaxamento)

Capítulo V. **Conclusões**



No projeto de uma peça a utilização de ferramentas de análise através do método dos elementos finitos permitiu efectuar uma abordagem do material termoplástico no domínio da viscoelasticidade. Acontece que tal não seria possível sem recorrer aos modelos de aproximação elementares de *Maxwell* e *Kelvin-Voigt*. Com base nestes modelos foi possível realizar uma generalização destes sob a forma de um somatório em série e com isso, iniciar uma abordagem que tem como base as séries exponenciais de *Prony*.

Na literatura existe um determinado número de métodos e técnicas que têm como objetivo determinar os parâmetros da função de *Prony*. Uma das metodologias mais implementadas assenta no método dos mínimos quadrados. No que concerne às técnicas, estas procuram simplificar e otimizar os parâmetros da função de *Prony*, não havendo na generalidade nenhuma que se destaque em termos de aproximação.

Com aproximação da curva de relaxação do material por dois pontos foi possível definir as propriedades viscoelásticas do material para o caso de estudo. Este caso serviu como critério de validação das propriedades viscoelásticas do material, para ser posteriormente implementado no caso industrial. Acresce que com o recurso ao *software* dos elementos finitos Abaqus, foi possível verificar os vários tipos de deformações existentes, entre as quais as deformações elásticas e a deformação viscosas do polímero.

A simulação do modelo numérico industrial no domínio da viscoelasticidade permitiu concluir, através de comparação, que existem deformações no domínio do tempo que não são verificadas na análise estática do projeto. Relativamente aos carregamentos definidos na estrutura, existe uma estabilização da deformação a partir das 2000 horas de carga prolongando-se até $t = \infty$. Quando a carga é retirada evidencia-se uma recuperação substancial da deformação fruto da componente elástica do sistema, tendo de seguida uma recuperação no domínio viscoelástico onde esta depende do tempo. Isto acontece, sobretudo devido à componente viscosa do material não permitir o avanço da componente elástica.

Das zonas de análise discutidas, o apoio do encosto (T2) onde é aplicado o binário é evidenciada uma maior relaxação de tensões do material.

Capítulo VI. **Trabalhos Futuro**



Numa perspetiva futura, deve-se atender às várias vertentes que podem ser estudadas no ramo da análise viscoelástica de uma peça termoplástica, sendo que a definição do material é um elemento importante no comportamento de uma peça. Para isso, como sugestão, seria necessária uma melhor caracterização do material em questão, realizando ensaios no domínio do tempo ou da frequência (DMA) por forma a obter uma exatidão na análise do problema.

Outra abordagem partiria inicialmente da análise dos dados experimentais obtidos, para posteriormente implementar um método numérico de aproximação, enunciado no estado da arte de forma a comparar com a aproximação realizada no *software Abaqus*.

Futuramente poderia ainda proceder-se à análise dos modelos numéricos industriais baseados em solicitações no domínio da frequência, por forma a obter o módulo dissipativo e de armazenamento do sistema. Poderia ainda implementar-se, no que concerne à análise viscoelástica, um processamento no ramo da extrusão, de forma a estudar o relaxamento do material quando este sai da fiação.

Por último, e no âmbito desta temática, seria importante estudar o comportamento viscoelástico de um compósito, bem como de um material semicristalino tendo estas características bastante dispare comparativamente com os polímeros amorfos.



Referências bibliográficas

- [1] G. Strobl, "The Physics of Polymers," em *Concepts for Understanding Their Structures and Behavior 3ª Edição*, Germany, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007, pp. 223-229.
- [2] M. T. Shaw e W. J. MacKnight, "Introduction to Polymer Viscoelasticity," em *Third Edition*, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2005, p. 107.
- [3] R. Lakes, "Viscoelastic Materials," New York, Cambridge University Press, 2009.
- [4] H. F. Mark, "Encyclopedia of Polymer Science and Technology," em *3ª edição-Volume 1*, John Wiley & Sons, 2007.
- [5] L. Boltzman, "Zur theorie der elastischen Nachwirkung," *Pogg. Ann. Phys. Chem.*, 1876.
- [6] I. M. Ward e J. Sweeney, "An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers," em *2ª Edition*, West Sussex, John Wiley & Sons Inc, 2005.
- [7] S. P. Marques e G. J. Creus, "Computacional Viscoelasticity," Dordrecht , Springer Heidelberg , 2012.
- [8] D. G. Lemini, *Engineering Viscoelasticity*, New York: Springer Science+Business Media, 2014.
- [9] G. Hu, A. A. Tay, Y. Zhang, W. Zhu e S. Chew, "Characterization of Viscoelastic Behaviour of a Molding Compound with Application to Delamination Analysis in IC Packages," *Electronics Packaging Technology Conference*, pp. 53-59, 2006.
- [10] C. Briody, B. Duignan, S. Jerrams e J. Tiernan, "The Implementation of a Visco-hyperelastic Numerical Material Model For Simulating the Behaviour of Polymer Foam Materials," *Computacional Materials Science*, 2012.
- [11] H. F. Brinson e L. C. Brinson, "Polymer Engineering," em *Science and Viscoelasticity - An Introduction*, New York, Springer Science+Business Media, 2008.



- [12] D. v. Krevelen e K. t. Nijenhuis, *Properties of Polymers- Their Correlation with Chemical Structure; Their Numerical Estimation and Prediction From Additive Group Contributions*, UK: Elsevier B.V., 2009.
- [13] W. N. Findley, J. S. Lai e K. Onaran, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials- with an introduction to Linear Viscoelasticity*, New York: North-Holland Publishing Company, 1976.
- [14] "Implications and Constraints of Time - Independent *Poisson* Ratios in Linear Isotropic and Anisotropic Viscoelasticity," *JOURNAL OF ELASTICITY*, 2001.
- [15] M. Rubinstein e R. H. Colby, *Polymer Physics*, Oxford: OXFORD - University Press, 2003.
- [16] Y. Nakazato, S. Zhu, A. Usuki e M. Kato, "Analysis and prediction of creep viscoelasticity in nylon 6 clay hybrid nanocomposites," pp. 1-4, 2010.
- [17] N. Özkaya, M. Nordin, G. David e D. Leger, *Fundamentals of Biomechanics- Equilibrium, Motion, and Deformation Third Edition*, New York: Springer Science+Business Media, 2012.
- [18] A. Y. Malkin, "Rheology Fundamentals- Fundamental Topics in Rheology," Canada, ChemTec Publishing, 1994, pp. 61-64.
- [19] D. Roylance, "Engineering Viscoelasticity," Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 2001, pp. 9-19.
- [20] H. F. Mark, "Encyclopedia of Polymer Science and Technology, Third Edition," vol. 4, 2007, pp. 533-550.
- [21] L. L.Gargallo e D. Radic, "Physicochemical Behavior and Supramolecular Organization of Polymers," Springer Science+Business Media, 2009, pp. 56-60.
- [22] A. S. Wineman e K. R. Rajagopal, *Mechanical Response of Polymers- An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [23] R. Lakes, "Viscoelastic Materials," New York, Cambridge University Press, 2009, pp. 42-44.
- [24] S. Jr. e W. N., *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*, S. Jr. e W. N., Edits., New York: Springer Science+Business Media,, 2008.



- [25] J. S. Peraro, "Limitations of Test Methods for Plastics," West Conshohocken, American Society For Testing and Materials, 2000, pp. 12-15.
- [26] T. N. Shepherd, J. Zhang, T. C. Ovaert, R. K. Roeder e G. L. Niebur, "Direct comparison of nanoindentation and macroscopic measurements of bone viscoelasticity," *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 4, nº 8, pp. 2055-2062, 2011.
- [27] N. J. Mills, "Finite Element Models for the Viscoelasticity of Open-cell Polyurethane Foam," *As in celular Polymers*, vol. 25, pp. 293-316, 2006.
- [28] C. Callegos, "Rheology- Encyclopedia of Life Support Systems," vol. Volume I, United Kingdom, Eolss Publishers Co. Ltd., 2010, pp. 251-262.
- [29] D.W.Mead., "Numerical Interconversion of linear viscoelastic material functions," *J.Rheol*, pp. 1769-1795, 1994.
- [30] S. W. Park e Y. R. Kim, "Interconversion Between Relaxation Modulus and Creep Compliance For Viscoelastic Solids," *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 11, pp. 76-82, 1999.
- [31] A. F. d. H. R.S.Anderssen, "On the Sensitivity of Interconversion between relaxation and creep," *Rheologica Acta*, vol. 47, pp. 159-167, 2008.
- [32] S. d. F. C. F. Teixeira, *Equações Não lineares e Sistemas de Equações*, Univerisdade do Minho.
- [33] I. Skoglund, "Algorithms for a Partially Regularized Least Squares Problem," Linköping, Ingegerd Skoglund unless otherwise noted, 2007.
- [34] P. I. Rodriguez, "On the Analytical Determination of Relaxation Modulus of Viscoelastic Materials by *Prony's* Interpolation Method," NASA Technical Memorandum, 1986.
- [35] Statsci.org, *Prony Estimation-Estimation of sinusoid and exponential signals using eigen-analysis of covariance matrices.*, Gordon Smyth.
- [36] S. A. Hill, "The Analytical Representation of Viscoelastic Material Properties using Optimization Techniques," NASA Technical Memorandum, 1993.



- [37] J. C. Gerdeen e R. A. Rorrer, "Engineering Design with Polymers and Composites," New York, Taylor & Francis Group, 2012, p. 63.
- [38] D. J. O'Brien, P. T. Mather e S. R. White, "Viscoelastic Properties of an Epoxy Resin during Cure," *Journal of Composite Materials*, Vol.35, pp. 883-904, 2001.
- [39] G. Beylkin e L. Monzón, "On approximation of functions by exponential sums," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, pp. 17-48, 2005.
- [40] S. Gerlach e A. Matzenmiller, "Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data," *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, pp. 428-454, 2005.
- [41] N. W. Tschoegl, "The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior," em *An Introduction*, New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989, pp. 136-145.
- [42] M. F. P. Costa e C. Ribeiro, "Parameter Estimation of Viscoelastic Materials: A Test Case with Different Optimization Strategies," *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, pp. 771-774, 2011.
- [43] P. C. Hansen, "Regularization Tools," *A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems*, Março 2008.
- [44] R. D. Bradshaw e L. C. Brinson, "A Sign Control Method For Fitting And Interconverting," *Material Functions For Linearly Viscoelastic Solids*, 7 May 1997.
- [45] H. N. Silva, "Caraterização Viscoelástica Linear de Misturas Asfálticas: Operacionalização Computacional e Análise pelo Método dos Elementos Finitos," Fortaleza, Universidade FEderal do Ceará, Centro de Tecnologia. Depto. de Engenharia de transportes, 2009, pp. 45-48.
- [46] T. L. Cost e E. B. Becker, "A multidata method of approximate Laplace transform Inversion," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, pp. 207-219, 1970.
- [47] R. A. Schapery, "A Simple Collocation Method For Fitting Viscoelastic Models to Experimental," November 1961.



- [48] S. Mun, G. R. Chehab e Y. R. Kim, "Determination of Time-Domain Viscoelastic Functions Using Optimized Interconversion Techniques," *Road Materials and Pavements Design*, vol. x, pp. 1-n, 2005.
- [49] P. C. Sousa e J. B. Soares, "Método da colocação para obtenção de séries de *Prony* usadas na caracterização viscoelástica de materiais asfálticos," *Anais do XX Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes*, 2007.
- [50] H. N. Silva, P. C. d. Sousa, Á. S. d. Holanda e J. B. Soares, "A Computer Program for Linear Viscoelastic Characterization Using *Prony* Series," Universidade federal do Ceará, Fortaleza, 2008.
- [51] A. V. Tobolsky e K. Murakami, "Existence of a Sharply defined Maximum Relaxation Time for Monodisperse Polystyrene," *Journal of Polymer Science*, pp. 40-443, 1959.
- [52] E. I. e N. W. Tschoegl, "Determination of Mechanical Spectra from Experimental Responses," *Kovine, zlitine, tehnologije*, pp. 506-511, 1994.
- [53] J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers*, New York: John Wiley, 1970.
- [54] R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, Academic, New York, 1982.
- [55] A. S. Nowick e B. S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, New York: Academic, 1972.
- [56] J. F. Clauser e W. G. Knauss, "On the Numerical Determination of Relaxation and Retardation Spectra for Linearly Viscoelastic Materials," *Transactions of the Society of Rheology*, pp. 143-153, 1968.
- [57] N. W. Tschoegl e I. Emri, "Generating line spectra from experimental responses III. Interconversion between relaxation and retardation behaviour," *International Journal of Polymeric Materials*, pp. 117-127, 1992.
- [58] M. Baumgaertel e H. H. Winter, "Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data," *Rheologica Acta*, pp. 511-519, 1989.
- [59] M. Baumgaertel e H. H. Winter, "Interrelation between continuous and discrete relaxation time spectra," *Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics*, pp. 15-36, 1992.



-
- [60] D. H. Ramkumar, J. M. Caruthers, H. Mavridis e R. Shroff, "Computation of the linear viscoelastic relaxation spectrum from experimental data," *Journal of Applied Polymer Science*, pp. 2177-2189, 1997.
- [61] S. W. Park e Y. Kim, "Fitting *Prony*-Series Viscoelastic Models with Power-Law Presmoothing," *Journal of Materials in Civil Engineering*, pp. 26-32, 2001.
- [62] J. E. Soussou, "Classical and Statistical Theories for the Determination of Constitutive Equations," Massachusetts, 1970.
- [63] R. A. Buckingham, *Numerical Methods*, London: Sir Isaac Pitman and Sons, LTD, 1957.
- [64] F. A. Willers e R. T. translated by Beyer, *Practical Analysis.*, New York: Dover Publications, Inc., 1947.
- [65] S. A. Hill, *The Analytical Representation of Viscoelastic Material Properties Using Optimization Techniques*, NASA TM-108394,, 1993.
- [66] M. V. Bower e D. F. Gant, *Stress Relaxation Functions: Method of Approximation*, NASA-CR-195830, 1994.
- [67] *Abaqus Analysis User's Manual 6.13-Documentation*, Materials.
- [68] E. Commission., "Commission Directive 96/37/EC of 17 June 1996 . Council Directive 74/408/EEC relating to the interior fittings of motor vehicles (strength of seats and of their anchorages) .".
- [69] M. J. Minhoto, P. A. Pereira e J. C. Pais, "Evaluation of The Visco-Elastic Properties in Asphalt Rubber and Convencional Mixes," *Proceedings of the Internacional Conference Maintenance and Rehabilitation of Pavements and Technological Control*, pp. 25-30, 2007.



Anexos

Characterization of Viscoelastic Behaviour of a Molding Compound with Application to Delamination Analysis in IC Packages

Gojun Hu^{1,2}, Andrew A. O. Tay², Yongwei Zhang³, Wenhui Zhu⁴ and Spencer Chew¹

¹Cookson Semiconductor Packaging Materials, 12 Joo Koon Road, Singapore, 628975.

²Nano/Microsystems Integration Laboratory, Department of Mechanical Engineering, NUS.

³Department of Material Science and Engineering, National University of Singapore

⁴United Test and Assembly Centre

Email: ghu@cooksonelectronics.com

Abstract

Over the glass transition temperature, molding compounds strongly exhibit viscoelastic behavior which causes their Young's moduli to be not only temperature-dependent but also time-dependent. In the present study, the stress relaxation test is used for the characterization of the viscoelasticity of an epoxy molding compound. The viscoelastic properties of the epoxy molding compound are determined in terms of Prony coefficients, relaxation time and time-temperature shift factors. Furthermore, the effect of viscoelasticity on the delamination in IC packaging is investigated.

1. Introduction

Realistic modeling and analysis of the mechanical performance and reliability of electronic packages requires sophisticated constitutive models for the many complex, non-traditional engineering materials that constitute these intricate devices. Plastic encapsulation is employed for a significant percentage of IC packages due to its cost effectiveness. The proper modeling of the behavior of such plastic materials is becoming important in reliability studies of these IC packages.

In the analysis of plastic-encapsulated IC packages, the viscoelastic property of materials such as epoxy molding compound or underfill has usually been neglected and the epoxy molding compound is often modeled as an elastic material. However, over the glass transition temperature molding compound strongly exhibits viscoelastic behavior which causes its Young's modulus to be not only temperature-dependent but also time-dependent. Bimaterial interfacial delamination between molding compound and copper during solder reflow is expected to be influenced by the viscoelasticity of the molding compound.

The temperature dependence of the modulus, strength and thermal expansion coefficient of epoxy molding compounds has been studied extensively with many investigators reporting the temperature dependence of the dynamic modulus instead of the static modulus. For determining the viscoelastic properties of a polymer, several different experimental methods have been used, including stress-relaxation test, dynamic mechanical analysis test and creep-compliance test. Several studies describing the thermo-viscoelastic response of epoxy molding compounds have appeared in the literature. Julian [1], Kenner [2] and Brian et al. [3] characterized the relaxation modulus in uniaxial tension for the relaxation modulus. Yeung [4], Driel [5] and He [6] investigate the viscoelastic behavior of molding compound and underfill materials using dynamic mechanical analysis (DMA).

In the present study, the stress relaxation test is used for the characterization of the viscoelasticity property of an epoxy molding compound. The viscoelastic properties of epoxy molding compound are obtained in the form of the Prony coefficients, relaxation time and time-temperature shift factors. Energy release rates G based on J integral are used for the calculation of the effect of viscoelasticity on the delamination in a PQFP during lead-free solder reflow with thermal load.

2. Experimental Procedure of Material Characterization of Viscoelastic Molding Compound

In this study, the stress relaxation test is used to determine the relaxation modulus of a material as a function of time t . In its idealized form, the test involves inducing a known strain instantaneously in a specimen and subsequently holding the strain constant. The stress is measured indirectly from the load and decreases over time. For a uniaxial stress-relaxation test, the relaxation modulus can be defined as

$$E(t) = \sigma(t) / \epsilon_0 \quad (1)$$

where $\sigma(t)$ is the stress as a function of time and ϵ_0 is the constant strain applied during the relaxation test (see Fig. 1).

In this study, the specimens are 125mm in overall length and had a rectangular cross-section with nominal dimensions of 12.5mm by 1.5mm in the test section. The stress relaxation experiments are conducted with an Instron Microtester 5848 equipped with a thermal oven and the initial span length between the upper high temperature pneumatic clip and the lower one is 100mm (see Fig. 2). A constant strain 0.25% is applied suddenly (in one second) to a specimen (see Fig. 3) and the resulting load is measured as a function of time (see Fig. 4) over 30 minutes. The time-dependent stress is calculated from the load and the relaxation modulus $E(t)$ is determined as the time-dependent stress divided by the applied strain (see Fig. 5) based on equation (1).

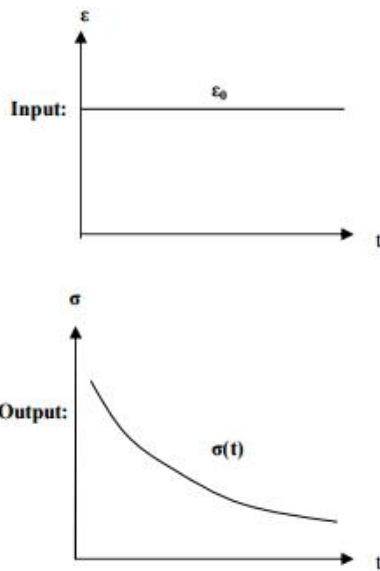


Fig. 1 Strain input and stress output during a stress relaxation test.

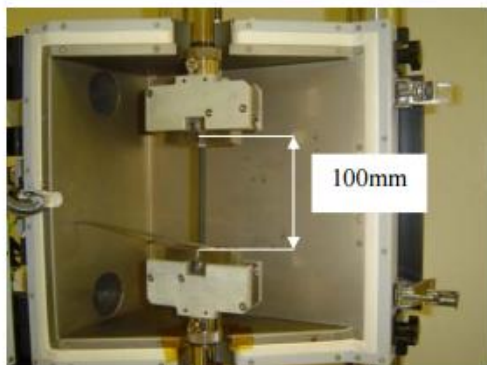


Fig. 2 Stress relaxation test setup.

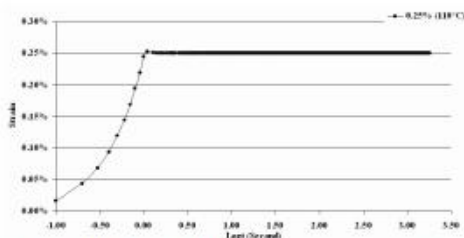


Fig. 3 Constant strain added for stress relaxation testing at 110°C.

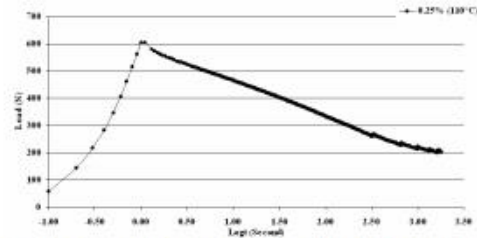


Fig. 4 Load curve obtained at 0.25% strain as a function of time at 110°C.

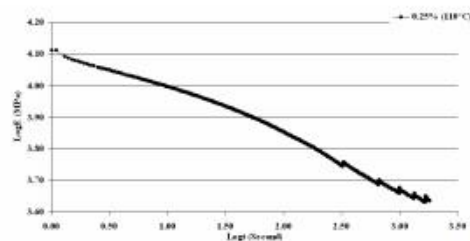


Fig. 5 Uniaxial stress relaxation modulus obtained at 0.25% strain as a function of time at 110°C.

3. Uniaxial Relaxation Tests

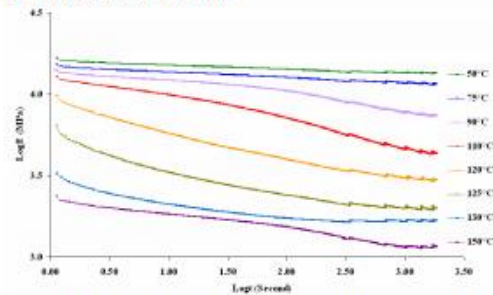


Fig. 6 Uniaxial stress relaxation modulus obtained at 0.25% strain as a function of time for the temperature range 50°C to 150°C.

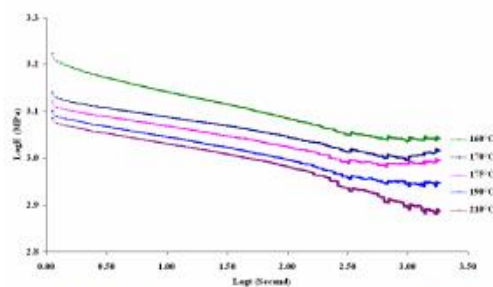


Fig. 7 Uniaxial stress relaxation modulus obtained at 0.25% strain as a function of time for the temperature range 160°C to 210°C.



The uniaxial stress relaxation modulus for an epoxy molding compound has been determined at 0.25% strain for the temperature range 50°C to 220°C. The selection of 0.25% strain is a good choice according to the study done by Julian [1] and Brian [3]. Typical results obtained at 0.25% strain for around 30 minutes are shown in Fig. 6 and Fig. 7.

From Fig. 6, it can be seen that the time-dependent behavior is most pronounced in the vicinity of temperature 110°C due to the reason that 110°C is the glass transition temperature of the epoxy molding compound investigated. In this transition region, the relaxation modulus has its strongest dependence on time and also is very susceptible to slight thermal variations over which the material can undergo drastic changes in its mechanical behavior. Comparing Fig. 6 with Fig. 7, it seems that the temperature effect is pronounced near the glass transition temperature (110°C) and less pronounced at low (from 50°C to 70°C) or high temperatures (from 160°C to 210°C).

The viscoelastic behavior of a molding compound can be analyzed using the time-temperature superposition principle (TTS), which is based on the empirical observation that the viscoelastic behavior of polymer materials at a reference temperature T_0 can be related to the behavior at another temperature T by changing the experimental time or frequency scale [7-9]:

$$E(t, T_0) = E(\alpha_T t, T) \quad (2)$$

where E is the relaxation modulus and t is the time. The physical meaning of equation (2) is clear: the relaxation modulus determined at temperature T and time $\alpha_T t$ is equivalent to the relaxation modulus determined at reference temperature T_0 and time t . Generally speaking, from the polymers with the glass transition temperature T_0 , the shift factor $\log \alpha_T$ was found to approximately follow the Williams-Landel-Ferry (WLF) equation [7]:

$$\log \alpha_T = -\frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \quad (3)$$

where C_1 and C_2 are constants, T_0 is the reference temperature which is often taken as the glass transition temperature T_g . In this equation, $\log \alpha_T$ is positive when $T < T_0$ and negative when $T > T_0$. As well as the WLF equation, the Arrhenius equation is also a popular method for fitting the shift factor:

$$\log \alpha_T = A + \frac{B}{C_2 + T_{ABS}} \quad (4)$$

where A and B are constants, T_{ABS} is the absolute temperature in degrees Kelvin.

At low temperatures, the relaxation process is slow and requires a longer time for experimental observation; at high temperatures, it is fast and a shorter time is required for experimental measurement. Therefore, the time-temperature superposition principle (TTS) assumes that changing the experimental temperature has the same effect as changing the relaxation time. Using the TTS experimental results, it is

possible to construct a master curve at an arbitrary reference temperature which extends the relaxation modulus beyond the range of laboratory scale in either the time or the frequency domain. This is important for accurately modeling the package stress because it allows one to consider the time-dependence of the mechanical response of the polymer.

Based on the stress relaxation data in Fig. 6 and Fig. 7, one master curve can be formed by shifting the curves in Fig. 6 and Fig. 7 referenced to the stress relaxation curve at the reference temperature 110°C (see Fig. 8). The lower temperature relaxation modulus curves are shifted to the left along the time axis and the higher temperature relaxation modulus curves are shifted to the right along the time axis which can extend the time to a longer time range. For the master curve generated, the horizontal shift factors are functions only of temperatures and they can be fitted using the Williams-Landel-Ferry (WLF) equation. Because of this, the shift factors versus temperature are plotted for 110°C reference temperature (see Fig. 9). Some experimental errors are to be expected in obtaining these shift factors.

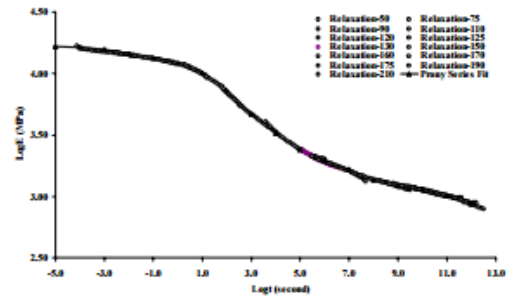


Fig. 8 Stress relaxation master curve obtained at 0.25% strain at $T_0 = 110^\circ\text{C}$.

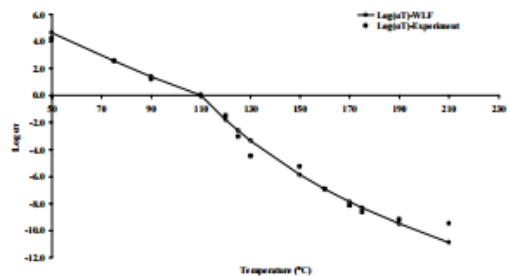


Fig. 9 $\text{Log} \alpha_T$ versus temperature for $T_0 = 110^\circ\text{C}$.

In Fig. 9, $\text{Log} \alpha_T$ is plotted as a function of temperature for a reference temperature of $T_0 = 110^\circ\text{C}$. Within the experimental temperature range, the WLF equation given in equation (3) can be used to fit the shift factor data rather well, as shown in Fig. 9. The fitting parameters are

$$C_1 = 30 \text{ and } C_2 = 500 \text{ when } T < T_0 = 110^\circ\text{C}$$

$$C_1 = 25 \text{ and } C_2 = 130 \text{ when } T > T_0 = 110^\circ\text{C}$$

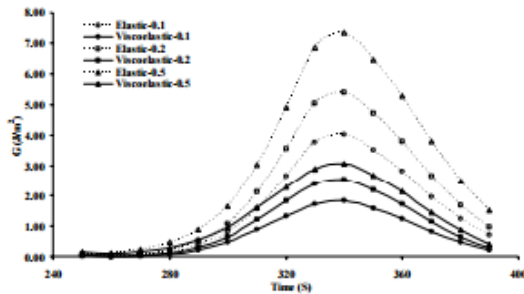


Fig. 14 Comparison of $G(t)$ during lead-free solder reflow process ($a = 0.1, 0.2$ and 0.5mm).

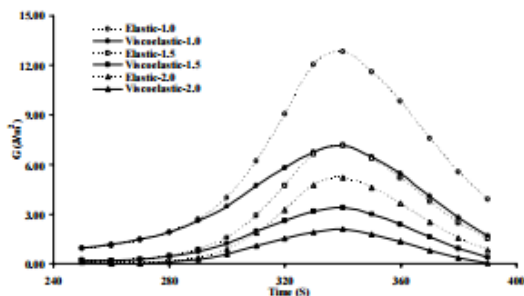


Fig. 15 Comparison of $G(t)$ during lead-free solder reflow process ($a = 1.0, 1.5$ and 2.0mm).

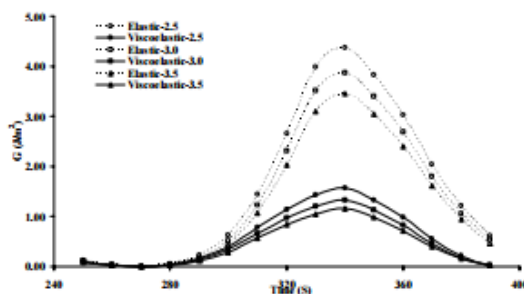


Fig. 16 Comparison of $G(t)$ during lead-free solder reflow process ($a = 2.5, 3.0$ and 3.5mm).

Figs. 14 and 15 compare energy release rate results obtained using the viscoelastic property of molding compound and using linear elastic property of the molding compound. It can be seen that energy release rates using the viscoelastic property of molding compound are very different from the solutions using linear elastic property of molding compound (more than 200%), especially near the maximum point of the solder reflow temperature profile where the temperature effect on molding compound is strong. Fig. 16 shows that the maximum energy release rate is significantly lower (more than 300%) by considering the viscoelastic behavior of the molding

compound than by considering linear elastic behavior of the molding compound. Thus the maximum energy release rate would be quite different during lead-free solder reflow process if the molding compound is considered to be viscoelastic rather than linear elastic. However, this does not imply that predictions of delamination assuming linear elastic behaviour of molding compounds are wrong. This is because the energy release rate G is only half the story. The fracture toughness needs also to be obtained as a function of the viscoelasticity of the mold compound. Only then can prediction of delamination be attempted. Further studies will be conducted on the effect of viscoelasticity on fracture toughness. From Figs. 14 and 16, it can be seen that the $G(t)$ difference between using viscoelastic property and linear elastic property is smaller for interface cracks of medium length.

5. Conclusions

Above the glass transition temperature, molding compounds strongly exhibit viscoelastic behavior which is temperature-dependent and time-dependent. The viscoelastic properties of an epoxy molding compound (the Prony coefficients, relaxation time and time-temperature shift factors) are measured by performing stress relaxation tests using an Instron Microtester. The properties of epoxy molding compound measured compared well with the properties of molding compound obtained by other researchers. Furthermore, it has been shown that the energy release rate at a crack in a package computed for a viscoelastic molding compound is significantly lower than that for a linear elastic molding compound. However, it is difficult to tell how this might affect the prediction of the delamination temperature unless the effect of viscoelasticity on the interface fracture toughness is also known.

Acknowledgments

The author would like to acknowledge the support of the National University of Singapore in providing a research scholarship under which this research has been conducted.

References

1. Julian, M.R., "Material Characterization of Viscoelastic Polymeric Molding Compounds", Masters Thesis, The Ohio State University (Columbus, OH, 1994).
2. Kenner, V.H., Julian, M.R., etc., 1996, "Viscoelastic Characterization of an Epoxy-based Molding Compound", *Materials Reliability in Microelectronics*.
3. Brian D.Harper, Li Lu and Vernal H.Kenner, "Effects of Temperature and Moisture upon the Mechanical Behavior of an Epoxy Molding Compound", *ASME Advances in Electronic Packaging*, Vol. 19-1 (1997), pp. 1207-1212.
4. Yeung, T.S. and Yuen, M.M.F., "Viscoelastic Analysis of IC Packaging Warpage", *ASME Sensing, Modeling and Simulation in Emerging Electronic Packaging*, EEP-Vol. 17 (1996), pp. 101-107.
5. Driel, W.D.Van, etc., "Packaging Induced Die Stresses-Effect of Chip Anisotropy and Time-Dependent Behavior of a Molding Compound", *Journal of Electronic Packaging*, Vol. 125 (2003), pp. 520-526.
6. He Yi, "Thermomechanical and Viscoelastic Behavior of a No-flow Underfill Material for Flip-chip Applications", *Thermochimica Acta*, Vol. 439 (2005), pp. 127-134.



7. Williams, M.L., Landel R. F., Ferry J. D., "The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids", *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 77 (1955), pp. 3701-3707.
8. Ferry, J. D., *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3rd ed., John Wiley and Sons (New York, 1980).
9. Ward, I. M., Hadley, D.M., *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, John Wiley and Sons (New York, 1997).
10. Williams, J.G. and Marshall, G.P., "Environmental crack and craze growth phenomena in polymers", in *Proceedings of the Royal Society, London A342* (1975), 55-77.
11. G.J. Hu and A.A.O Tay, "On the Relative Contribution of Temperature, Moisture and Vapor Pressure to Delamination in a Plastic IC Package during Lead-Free Solder Reflow", *IEEE Electronics Components and Technology Conference*, 2005, pp. 172-178.

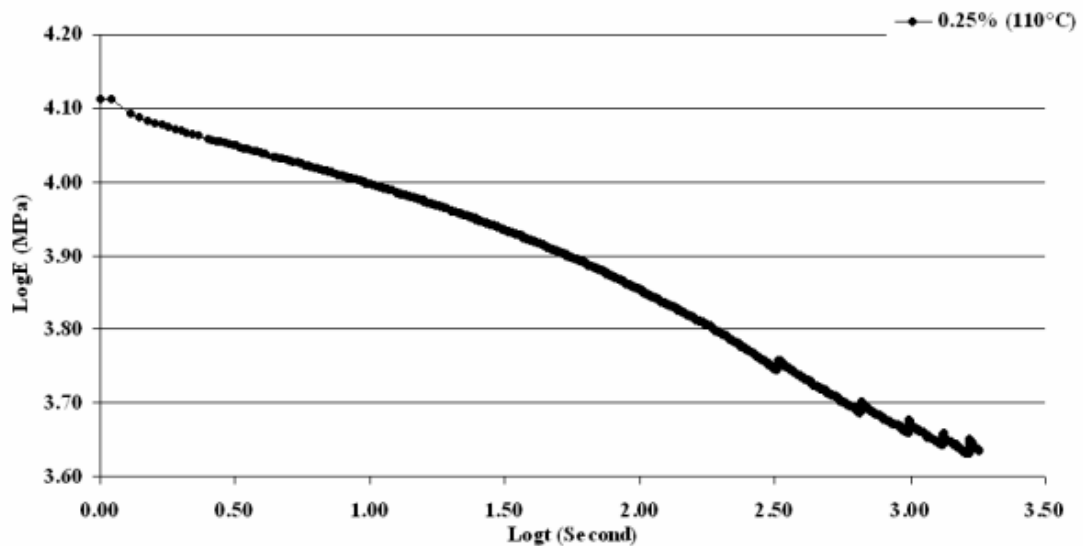


Fig. 5 Uniaxial stress relaxation modulus obtained at 0.25% strain as a function of time at 110°C.



 **HexPly® 8552 Epoxy Matrix** *Product Data*

Mechanical Properties

Property	Temp°F	Condition	AS4	IM7	A193-PW	A280-5H	SGP196-PW	SGP370-8H	S2GL
0° Tensile strength, ksi	-67	Dry	300	373	111	120	142	140	-
0° Tensile modulus, msi	-67	Dry	19.4	23.7	9.5	10.2	12.3	12.5	-
0° Tensile strength, ksi	77	Dry	310	395	120	127	158	147	251
0° Tensile modulus, msi	77	Dry	19.6	23.8	9.8	9.7	12.3	12.4	6.53
0° Tensile elongation, %	77	Dry	1.55	1.62	-	-	-	-	3.87
0° Tensile strength, ksi	195	Dry	293	368*	116	131	-	-	-
0° Tensile modulus, msi	195	Dry	19.1	23.7*	9.6	10	-	-	-
90° Tensile strength, ksi	-67	Dry	9.73	9.60	103	109	125	131	-
90° Tensile modulus, msi	-67	Dry	1.50	1.46	9.6	9.7	11.6	11.7	-
90° Tensile strength, ksi	77	Dry	9.27	9.3	115	116	137	139	-
90° Tensile modulus, msi	77	Dry	1.39	1.70	9.5	9.5	11.6	11.7	-
90° Tensile strength, ksi	200	Dry	-	-	111	112	142*	130*	-
90° Tensile modulus, msi	200	Dry	1.22	1.50	9.8	9.4	11.5*	11.5*	-
Major Poisson's Ratio, tension	77	Dry	0.302	0.316	-	-	-	-	-
± 45 Inplane shear	77	Dry	16.6	17.4	-	15.9	18.3	14.6	-
± 45 Inplane shear	200	Dry	15.2	15.4*	-	-	15.5*	13.1*	-
Major Poisson's Ratio, compression	77	Dry	0.335	0.356	-	-	-	-	-
0° Compression strength, ksi	-67	Dry	253	292	139	-	-	-	-
0° Compression modulus, msi	-67	Dry	18	20.5	8.7	-	-	-	-
0° Compression strength, ksi	77	Dry	222	245	128	134	-	-	217
0° Compression modulus, msi	77	Dry	18.6	21.7	8.7	9.3	-	-	6.6
0° Compression strength, ksi	195	Dry	184	215	110	109	-	-	-
0° Compression modulus, msi	195	Dry	17.7	23.5	8.8	9.7	-	-	-
0° Compression strength, ksi	180	Wet	203	-	102	-	-	-	-
0° Compression modulus, msi	180	Wet	17.0	-	8.6	-	-	-	-
0° Compression strength, ksi	195	Wet	184	173▼	85	74	-	-	-
0° Compression modulus, msi	195	Wet	18.1	20.7▼	-	9.9	-	-	-
Fill compression strength, ksi	-67	Dry	51.4	55.3	127	150	124	132	-
Fill compression modulus, msi	-67	Dry	1.56	1.53	8.7	9.2	-	-	-
Fill compression strength, ksi	77	Dry	38.9	44.2	127	129	116	121	-
Fill compression modulus, msi	77	Dry	1.43	1.82	9	9.1	10.4	10.5	-
Fill compression strength, ksi	195	Dry	-	-	114	-	103*	96*	-
Fill compression modulus, msi	195	Dry	-	-	8.9	-	10.6*	10.5*	-
Fill compression strength, ksi	77	Wet	-	34.2	116	-	95	94	-
Fill compression strength, ksi	180	Wet	-	24.6**	101	-	81**	88**	-
Fill compression strength, ksi	195	Wet	19.7▼	19▼	87	-	87*	-	-
Compression after impact, ksi									
after 500 in-in-lb/in impact	77	Dry	50	-	-	-	-	-	-
after 1,500 in-in-lb/in impact	77	Dry	32	34	-	-	-	-	-
after 2,000 in-in-lb/in impact	77	Dry	28	-	-	-	-	-	-
after 2,500 in-in-lb/in impact	77	Dry	27	-	-	-	-	-	-

Bold - 200° **Bold*** - 220° **Bold**** - 180° **Bold ▼** - 250°





TECHNYL C 216 V30 NATURAL

Product Data Sheet

18.03.2013

Properties

Typical values of properties are for natural grades

	Standards	Unit	Values	
			d.a.m.	Cond.
Physical				
Water absorption(24h at 23°C)	ISO 62	%	1,05	
Density	ISO 1183/A	g/cm3	1,36	
Molding shrinkage Parallel	ISO 294-4	%	0,65	
Molding shrinkage normal or perpendicular	ISO 294-4	%	0,35	
Mechanical				
Tensile Modulus	ISO 527 Type 1A	MPa	9600	6200
Tensile strength at break	ISO 527 Type 1A	MPa	190	110
Elongation at break	ISO 527 Type 1A	%	3,80	4,50
Flexural modulus	ISO 178	MPa	8400	4900
Charpy notched impact strength (23 °C)	ISO 179/1eA	kJ/m2	15	31,5
Charpy unnotched impact strength (23 °C)	ISO 179/1eU	kJ/m2	100	108
Izod notched impact strength (23 °C)	ASTM D256	J/m	120	
	ISO 180/1A	kJ/m2	14	24
Flammability				
Flammability (Thickness: 0,8 mm)	ISO 1210 / UL94		HB	
Flammability (Thickness: 3,2 mm)	ISO 1210 / UL94		HB	
Glow Wire Flammability Index (Thickness: 1,6 mm)	ISO 60695-2-12	°C	650	
Limit Oxygen Index	ISO 4589		23	
Thermal				
Melting Temperature	ISO 11357	°C	222	
Heat deflection temperature (1,82 MPa)	ASTM D-648	°C	210	
Heat deflection temperature (1,8 MPa)	ISO 75/ Af	°C	205	
Coef of Linear thermal expansion parallel (23°C to 85°C)	ISO 11359	E-5/°C	3,2	
Crystallization temperature	ISO 11357	°C	190	
Electrical				
Comparative tracking index (Sol A)	IEC 60112	V	600	600
Comparative tracking index (Sol B)	IEC 60112	V	475	
Dielectric strength	IEC 60243	kV/mm		22
Dissipation factor	IEC 60250		0,020	0,090
Relative permittivity	IEC 60250		3,80	4,50
Surface resistivity	IEC 60093	Ohm	1E 13	1E 11
Volume resistivity	IEC 60093	Ohm/cm	1E 15	1E 11
Specific				
Identification code				PA6-GF30

More info : www.rhodia.com Tel: 00 800 55 400 600
 Contact : engineeringplastics-business@eu.rhodia.com





Ultramid® injection-molding grades without flame retardants

Reinforced Ultramid® B grades

Typical values at 23°C ¹⁾	Unit	Test specification	Condition	B3EG3	B3EG3	B3EG5	B3M/G5	B3EG6	B3M/G6
Features									
Symbol	-	ISO 1043	-	PAG-GF15	PAG-GF15	PAG-GF25	PAG-GF25	PAG-GF30	PAG-GF30
Density	g/cm ³	ISO 1183	-	1.23	1.23	1.32	1.32	1.36	1.36
Viscosity number (solution 0.05g sulfuric acid/ml)	ml/g	ISO 307	-	140	140	140	140	140	140
Water absorption, saturation in water at 23°C	%	ISO 62	-	7.7-8.3	7.7-8.3	6.6-7.4	6.6-7.4	6.3-6.9	6.3-6.9
Moist. absorption, saturation in standard cond. atm. 23°C/50% r.h.	%	ISO 62	-	2.3-2.9	2.3-2.9	2.1-2.5	2.1-2.5	1.9-2.3	1.9-2.3
Processing									
Melting point, DSC	°C	DIN 53 765	-	220	220	220	220	220	220
Melt volume rate MVR 275/5	cm ³ /10min	ISO 1133	-	75	55	55	55	50	50
Mold temperature range, injection-molding/extrusion	°C	-	-	270-290	270-290	270-290	270-290	270-290	270-290
Mold temperature range, injection-molding	°C	-	-	80-90	80-90	80-90	80-90	80-90	80-90
Molding shrinkage, retraction ⁴⁾	%	-	-	0.45	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
Flammability									
Test according to UL-Standard at d = 1.6mm thickness	class	UL 94	-	HB	HB	HB	HB	HB	HB
Motor Vehicle Safety Standard Test, thickness 1mm	-	FMVSS 302 ³⁾	-	+	+	+	+	+	+
Mechanical Properties									
Tensile modulus of elasticity	MPa	ISO 527-1/-2	dy/cond.	5,800/3,500	5,800/3,500	8,000/5,500	8,000/5,000	9,500/6,200	9,500/6,200
Stress at yield (N=50 mm/min), at break (N=5 mm/min) ¹⁾	MPa	ISO 527-1/-2	dy/cond.	130/710 ²⁾	130/710 ²⁾	160/105 ²⁾	160/105 ²⁾	185/115 ²⁾	185/115 ²⁾
Elongation at yield (N=50 mm/min), at break (N=5 mm/min) ¹⁾	%	ISO 527-1/-2	dy/cond.	3.5/715 ²⁾	4/715 ²⁾	3.5/78.5 ²⁾	3.5/78.5 ²⁾	3.5/78 ²⁾	3.5/78 ²⁾
Tensile creep modulus, 1,000h, elongation ≤ 0.5%, +23°C	MPa	ISO 899-1	cond.	2,100	2,100	3,000	3,000	3,000	3,000
Flexural modulus	MPa	ISO 178	dy/cond.	5,200/2,500	7,400/4,200	7,400/4,200	7,400/4,200	8,600/5,000	8,600/5,000
Flexural stress at max. force	MPa	ISO 178	dy/cond.	180/100	180/100	220/150	220/150	270/180	270/180
Charpy impact strength ³⁾	kJ/m ²	ISO 179/18U	dy/cond.	50/105	60/105	80/105	80/105	95/110	95/110
Charpy impact strength ³⁾	kJ/m ²	ISO 179/18U	dy	45	55	75	70	80	80
Charpy notched impact strength ³⁾	kJ/m ²	ISO 179/18U	dy/cond.	8/20	9/25	12/25	12/25	15/30	15/30
Charpy notched impact strength ³⁾	kJ/m ²	ISO 179/18A	dy	7	8	10	10	11	11
Notched impact strength A ³⁾	kJ/m ²	ISO 180/A	dy/cond.	6/-	6.5/16	12/17	12/17	15/20	15/20
Notched impact strength A ³⁾	kJ/m ²	ISO 180/A	dy	-	-	-	-	-	-
Thermal properties									
Heat distortion temperature under 1.8MPa load (HDT A)	°C	ISO 75-1/-2	-	190	190	210	200	210	210
Heat distortion temperature under 0.45MPa load (HDT B)	°C	ISO 75-1/-2	-	215	215	220	220	220	220
Max. service temperature, up to a few hours ⁵⁾	°C	-	-	200	200	200	200	200	200
Temp. index for 50% loss of tensile strength after 20,000h/5,000h	°C	IEC 60216	-	155/165	135/165	145/175	145/175	135/165	145/175
Coefficient of linear expansion, long/transv. (23-80)°C	10 ⁻⁶ /K	ISO 1159-1/-2	-	0.3-0.35/0.7-0.8	0.3-0.35/0.7-0.8	0.2-0.25/0.6-0.7	0.2-0.25/0.6-0.7	0.2-0.25/0.6-0.7	0.2-0.25/0.6-0.7
Thermal conductivity	W/m·K	DIN 52 612-1	-	0.34	0.34	0.35	0.35	0.35	0.35
Specific heat capacity	J/kg·K	-	-	1,600	1,600	1,500	1,500	1,500	1,500
Electrical properties									
Dielectric constant at 1MHz	-	IEC 60250	dy/cond.	3.8/7	3.8/7	3.8/7	3.8/7	3.8/6.8	3.8/6.8
Dissipation factor at 1MHz	10 ⁻⁴	IEC 60250	dy/cond.	250/2,400	250/2,400	250/2,400	250/2,400	230/2,200	230/2,200
Volume resistivity	Ω·m	IEC 60083	dy/cond.	10 ⁹ /10 ⁹	10 ⁹ /10 ⁹	10 ⁹ /10 ⁹	10 ⁹ /10 ⁹	10 ⁹ /10 ⁹	10 ⁹ /10 ⁹
Surface resistivity	Ω	IEC 60083	cond.	10 ¹⁰	10 ¹⁰	10 ¹⁰	10 ¹⁰	10 ¹⁰	10 ¹⁰
Comparative tracking index CTI, test solution A	-	IEC 60112	-	550	550	575	450	575	450
Core Products									
				UN	UN	UN	UN	UN	UN
				BK00564	BK00564	BK00564	BK00564	BK00564	BK00564

Footnotes
¹⁾ For unaged products, unless otherwise indicated in the product designation.
²⁾ Empirical values for parts repeatedly exposed to this temperature for several hours at a time over a period of years, provided that ageing and processing were in accord with the material.
³⁾ NB - Not broken
⁴⁾ Test box with normal gaging base dimensions (607.47 x 151mm, 100.00 x 151mm, 100.00 x 151mm).
⁵⁾ T_{max} = 80°C for unreinforced and T_{max} = 100°C for reinforced grades, test box: T_{max} = 220°C, T_{min} = 80°C
⁶⁾ + = passed

