

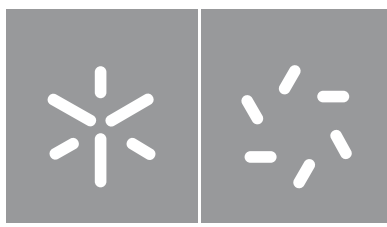
Universidade do Minho
Escola de Ciências

Catarina Justino Faustino

Homologia dirigida

Catarina Faustino **Homologia dirigida**

UMinho | 2021



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Catarina Justino Faustino

Homologia dirigida

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Thomas Walter Kahl

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



Atribuição-NãoComercial-SemDerivações
CC BY-NC-ND

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Agradecimentos

A realização desta dissertação não seria possível sem o contributo, apoio e incentivo de diversas pessoas. Assim, gostaria de expressar a minha gratidão.

Ao Professor Doutor Thomas Walter Kahl, orientador deste trabalho, expresso o meu agradecimento pelo apoio incondicional, pelos conselhos, por ter acompanhado com dedicação todos os momentos do mesmo, pela aprendizagem que me proporcionou e pela compreensão. A quem não há agradecimentos que cheguem pelo contributo fundamental para a realização desta dissertação.

Aos meus pais, por todo o incentivo e apoio dados.

A todos os docentes do Departamento de Matemática da Universidade do Minho que contribuíram para o meu percurso académico.

Este trabalho foi financiado pelo Centro de Matemática da Universidade do Minho e a Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) através da Bolsa de Investigação CMAT - UIDB/00013/2020 - 02/2021.

Declaração de Integridade

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho acadêmico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Homologia dirigida

Resumo

No âmbito da sua investigação em topologia algébrica dirigida, Marco Grandis desenvolveu uma teoria de homologia dirigida para conjuntos cúbicos. Neste trabalho adaptamos a teoria de Grandis para conjuntos pré-cúbicos, que são mais adequados para aplicações em teoria de concorrência.

Introduzimos os principais conceitos fundamentais sobre conjuntos pré-cúbicos, definindo, em particular, a homologia de um conjunto pré-cúbico. Estudamos grupos abelianos pré-ordenados e a homologia de complexos de cadeias dirigidos. Por fim, estudamos a homologia dirigida de conjuntos pré-cúbicos, onde relacionamos a homologia dirigida em grau 0 com a conexidade, estabelecemos uma variante do Teorema da Invariância e provamos teoremas sobre a homologia dirigida de pushouts e de produtos tensoriais de conjuntos pré-cúbicos.

Palavras-chave: conjunto pré-cúbico, homologia dirigida, invariância dihomotópica, produto tensorial, pushout.

Directed homology

Abstract

In the framework of his research on directed algebraic topology, Marco Grandis developed a theory of directed homology for cubical sets. In this work, we adapt Grandis' theory to precubical sets, which are more suitable than cubical sets for applications in concurrency theory.

We introduce the main fundamental concepts about precubical sets defining, in particular, the homology of a precubical set. We study preordered abelian groups and the homology of directed chain complexes. Finally, we study the directed homology of precubical sets, where we relate the directed homology in degree 0 with connectedness, establish a variant of the Invariance Theorem, and prove theorems about the directed homology of pushouts and tensor products of precubical sets.

Keywords: precubical set, directed homology, dihomotopy invariance, tensor product, pushout.

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Conjuntos pré-cúbicos	3
1.1 Conceitos básicos	3
1.2 Homologia cúbica	14
2 Álgebra homológica dirigida	24
2.1 Grupos abelianos pré-ordenados	24
2.2 Complexos de cadeias dirigidos	34
3 Homologia dirigida	38
3.1 Homologia dirigida de conjuntos pré-cúbicos	38
3.2 Componentes conexas	42
3.3 Homologia dirigida de um produto tensorial	46
3.4 Invariância dihomotópica	52
3.5 Homologia dirigida de um pushout	61
Bibliografia	67

Lista de Figuras

1.1	2-cubo	4
1.2	Intervalo standard	4
1.3	Circunferência dirigida	5
1.4	Circunferência ordenada	5
1.5	Fita de Möbius	6

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo do tema Homologia Dirigida no sentido de Marco Grandis [4, 3]. Trata-se de um tema da topologia algébrica dirigida, uma subárea recente da topologia que surgiu motivada por aplicações em teoria da concorrência. Nesta área - a topologia algébrica dirigida - são estudados espaços topológicos ou outros objetos topológicos munidos de uma estrutura direcional que representa o fluxo no tempo ou um sentido de travessia.

Em [3], Grandis introduziu a homologia dirigida para conjuntos cúbicos. Um conjunto cúbico é uma estrutura combinatória que representa um espaço dirigido constituído por cubos de diversas dimensões. A direção é dada pelos cubos de dimensão um, que constituem as arestas de um grafo dirigido. A homologia dirigida de um conjunto cúbico é a homologia cúbica habitual munida de uma relação de pré-ordem aditiva em cada grau, isto é, uma pré-ordem compatível com a estrutura aditiva do respetivo grupo de homologia. Esta pré-ordem é induzida pela estrutura dirigida do conjunto cúbico. No seu trabalho, Grandis estabeleceu versões dirigidas dos resultados clássicos da teoria de homologia singular [5, 6, 10].

Para qualquer um dos cubos, um conjunto cúbico contém versões degeneradas em dimensões superiores e, por isso, qualquer conjunto cúbico não vazio é necessariamente infinito, o que se torna problemático computacionalmente. Deste modo, usam-se nas aplicações conjuntos pré-cúbicos, que são conjuntos cúbicos sem as estruturas de degeneração - estruturas estas que causam o problema da infinitude [2].

O objetivo da dissertação é adaptar os principais ingredientes da teoria de Grandis aos conjuntos pré-cúbicos. Assim, paralelamente ao trabalho desenvolvido por Grandis, iremos estudar como e em que medida os resultados clássicos sobre homologia habitual são

transportados para a homologia dirigida, tendo como base os conjuntos pré-cúbicos.

A dissertação está organizada em três capítulos. No primeiro capítulo iremos introduzir conceitos básicos sobre conjuntos pré-cúbicos que serão explorados através de exemplos ilustrativos. Definimos também o complexo de cadeias de um conjunto pré-cúbico e calculamos a sua homologia, tendo-se a homologia cúbica. No capítulo seguinte estudamos os grupos abelianos pré-ordenados e a homologia de complexos de cadeias dirigidos. Por fim, estudamos a homologia dirigida de conjuntos pré-cúbicos. Iremos relacionar a homologia dirigida em grau 0 e a conexidade, estabelecer uma variante do Teorema da Invariância e provar teoremas sobre a homologia dirigida de pushouts e de produtos tensoriais de conjuntos pré-cúbicos.

Capítulo 1

Conjuntos pré-cúbicos

Neste capítulo apresentamos a matéria básica relacionada com conjuntos pré-cúbicos. Esta matéria pode, por exemplo, ser encontrada em [2] ou [7]. Referências gerais sobre os conceitos de topologia e teoria de categorias usados são [5, 6, 10] e [1, 9], respetivamente.

1.1 Conceitos básicos

Um *conjunto pré-cúbico* é um conjunto graduado $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com *operadores face* ou *bordo*

$$d_i^k : X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad n > 0, \quad k \in \{0, 1\}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

que satisfazem as relações de compatibilidade

$$d_i^k d_j^l = d_{j-1}^l d_i^k, \quad i < j.$$

Se $x \in X_n$ dizemos que x tem grau n e escrevemos $\deg(x) = n$. Os elementos de grau n designam-se por n -cubos. Aos 0-cubos chamamos também *vértices* e aos 1-cubos chamamos *arestas*. Observemos que um n -cubo tem $2n$ faces e para cada face existe uma face oposta. Assim, os operadores bordo têm dois índices $i \in \{1, \dots, n\}$ e $k \in \{0, 1\}$. Para $x \in X_n$ dizemos que $d_i^0 x$ é a i -ésima face da frente e $d_i^1 x$ é a i -ésima face de trás. Notemos que uma aresta x é considerada dirigida de $d_1^0 x$ a $d_1^1 x$. Assim, os vértices e as arestas de

um conjunto pré-cúbico formam um grafo dirigido. Neste sentido, um conjunto pré-cúbico poderá ser interpretado como um objeto topológico dirigido.

Como ilustra a seguinte figura, as relações de compatibilidade garantem que as faces de um cubo se intersejam corretamente:

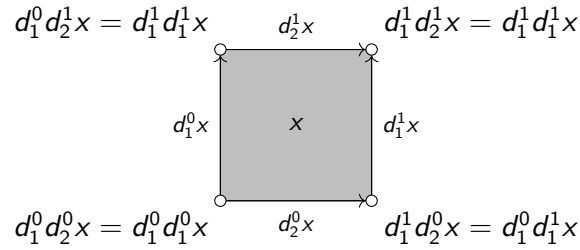


Figura 1.1: 2-cubo

Exemplos 1.1.1. (i) O *intervalo standard* $\llbracket 0, 1 \rrbracket$

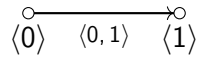


Figura 1.2: Intervalo standard

é o conjunto pré-cúbico definido por

$$\llbracket 0, 1 \rrbracket_0 = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}, \quad \llbracket 0, 1 \rrbracket_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\} \quad \text{e} \quad \llbracket 0, 1 \rrbracket_n = \emptyset, \quad \forall n \geq 2$$

e por dois operadores bordo em grau 1, dados por

$$\begin{aligned}
 d_1^0: \llbracket 0, 1 \rrbracket_1 &\rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket_0 & d_1^1: \llbracket 0, 1 \rrbracket_1 &\rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket_0 \\
 \langle 0, 1 \rangle &\mapsto \langle 0 \rangle & \langle 0, 1 \rangle &\mapsto \langle 1 \rangle.
 \end{aligned}$$

(ii) *Circunferência dirigida* \mathbb{S}^1

A circunferência dirigida é gerada por um 1-cubo cujos vértices coincidem.

1.1. CONCEITOS BÁSICOS

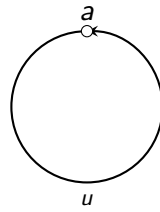


Figura 1.3: Circunferência dirigida

O conjunto pré-cúbico é dado por

$$\mathbb{S}_0^1 = \{a\}, \quad \mathbb{S}_1^1 = \{u\} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}_n^1 = \emptyset, \quad \forall n \geq 2$$

onde a representa o único vértice e u representa a única aresta. Os operadores face são

$$d_1^0, d_1^1: \mathbb{S}_1^1 \rightarrow \mathbb{S}_0^1$$

$$u \mapsto a.$$

(iii) Circunferência ordenada \mathbb{O}^1

A circunferência ordenada é gerada por dois 1-cubos cujos vértices coincidem.

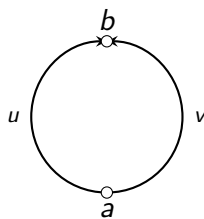


Figura 1.4: Circunferência ordenada

Temos o conjunto pré-cúbico

$$\mathbb{O}_0^1 = \{a, b\}, \quad \mathbb{O}_1^1 = \{u, v\} \quad \text{e} \quad \mathbb{O}_n^1 = \emptyset, \quad \forall n \geq 2$$

CAPÍTULO 1. CONJUNTOS PRÉ-CÚBICOS

onde a e b representam os vértices e u e v representam as arestas.

Os operadores face são dados por

$$d_1^0: \mathbb{O}_1^1 \rightarrow \mathbb{O}_0^1$$

$$u \mapsto a$$

$$v \mapsto a$$

$$d_2^0: \mathbb{O}_1^1 \rightarrow \mathbb{O}_0^1$$

$$u \mapsto b$$

$$v \mapsto b.$$

(iv) *Fita de Möbius* \mathbb{M}

A fita de Möbius pode ser vista como um conjunto pré-cúbico \mathbb{M} do seguinte modo:

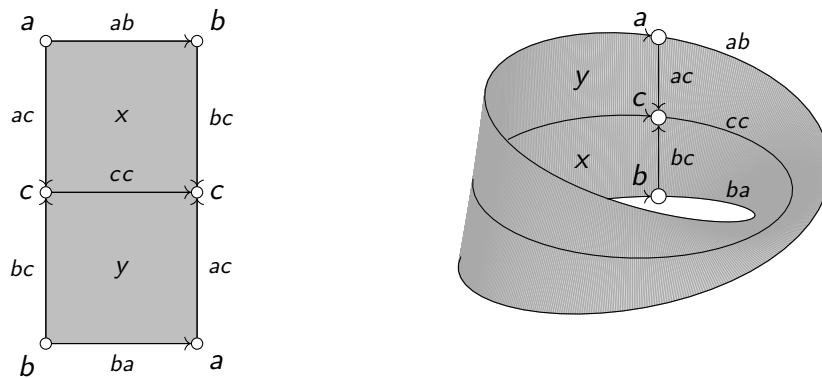


Figura 1.5: Fita de Möbius

Considera-se \mathbb{M} o conjunto graduado

$$\mathbb{M}_0 = \{a, b, c\}, \quad \mathbb{M}_1 = \{ab, bc, ac, cc, ba\}, \quad \mathbb{M}_2 = \{x, y\} \text{ e } \mathbb{M}_n = \emptyset, \quad n \geq 3$$

que é munido dos operadores face

$$d_1^0, d_1^1: \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_0, \quad d_1^0, d_1^1, d_2^0, d_2^1: \mathbb{M}_2 \rightarrow \mathbb{M}_1$$

1.1. CONCEITOS BÁSICOS

dados por

$$d_1^0(ab) = a, \quad d_1^0(ac) = a, \quad d_1^0(cc) = c, \quad d_1^0(ba) = b \quad d_1^0(bc) = b;$$

$$d_1^1(ab) = b, \quad d_1^1(ac) = c, \quad d_1^1(cc) = c, \quad d_1^1(ba) = a \quad d_1^1(bc) = c;$$

$$d_1^0(x) = ac = d_1^1(y);$$

$$d_1^1(x) = bc = d_1^0(y);$$

$$d_2^0(x) = ab, \quad d_2^1(y) = cc;$$

$$d_2^1(x) = cc, \quad d_2^0(y) = ba.$$

Morfismos

Sejam P e Q conjuntos pré-cúbicos. Um *morfismo de conjuntos pré-cúbicos* é um morfismo $f: P \rightarrow Q$ de conjuntos graduados que é compatível com os operadores bordo, i.e.,

$$f \circ d_i^k(x) = d_i^k \circ f(x),$$

onde $x \in P_n$ ($n > 0$), $i = 1, \dots, n$ e $k \in \{0, 1\}$.

Iremos denotar por **preCub** a categoria dos conjuntos pré-cúbicos.

Subconjuntos pré-cúbicos

Seja P um conjunto pré-cúbico. Um conjunto pré-cúbico Q é um *subconjunto pré-cúbico* de P se

$$Q_n \subseteq P_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e se os operadores face de P e Q coincidem em Q . Notemos que a interseção e a reunião de dois subconjuntos pré-cúbicos é ainda um subconjunto pré-cúbico. O *n-esqueleto* de P é o subconjunto pré-cúbico $P_{\leq n}$ definido por

$$(P_{\leq n})_i = \begin{cases} P_i, & i \leq n, \\ \emptyset, & i > n. \end{cases}$$

Produto tensorial

Sejam P, Q conjuntos pré-cúbicos. O *produto tensorial* de P e Q , $P \otimes Q$, é dado, em cada dimensão, por

$$(P \otimes Q)_n = \coprod_{p+q=n} P_p \times Q_q$$

e é munido dos seguintes operadores bordo:

$$d_i^k(x, y) = \begin{cases} (d_i^k x, y), & 1 \leq i \leq \deg(x), \\ (x, d_{i-\deg(x)}^k y), & \deg(x) + 1 \leq i \leq \deg(x) + \deg(y). \end{cases}$$

Proposição 1.1.2. *Sejam P, Q conjuntos pré-cúbicos. Então o produto tensorial $P \otimes Q$ é um conjunto pré-cúbico.*

Demonstração. Vejamos que, para $1 \leq i < j \leq \deg(x) + \deg(y)$, se tem

$$d_i^k d_j^l(x, y) = d_{j-1}^l d_i^k(x, y).$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} d_i^k d_j^l(x, y) &= \begin{cases} d_i^k(d_j^l x, y), & 1 \leq j \leq \deg(x) \\ d_i^k(x, d_{j-\deg(x)}^l y), & \deg(x) + 1 \leq j \leq \deg(x) + \deg(y) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (d_i^k d_j^l x, y), & 1 \leq i < j \leq \deg(x), \\ (d_i^k x, d_{j-\deg(x)}^l y), & 1 \leq i \leq \deg(x) < j \leq \deg(x) + \deg(y), \\ (x, d_{i-\deg(x)}^k d_{j-\deg(x)}^l y), & \deg(x) + 1 \leq i < j \leq \deg(x) + \deg(y). \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

1.1. CONCEITOS BÁSICOS

$$\begin{aligned}
 d_{j-1}^l d_i^k(x, y) &= \begin{cases} d_{j-1}^l(d_i^k x, y), & 1 \leq i \leq \deg(x) \\ d_{j-1}^l(x, d_{i-\deg(x)}^k y), & \deg(x) + 1 \leq i \leq \deg(x) + \deg(y) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (d_{j-1}^l d_i^k x, y), & 1 \leq i < j \leq \deg(x), \\ (d_i^k x, d_{j-\deg(x)}^l y), & 1 \leq i \leq \deg(x) < j \leq \deg(x) + \deg(y), \\ (x, d_{j-1-\deg(x)}^l d_{i-\deg(x)}^k y), & \deg(x) + 1 \leq i < j \leq \deg(x) + \deg(y). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo, $d_i^k d_j^l(x, y) = d_{j-1}^l d_i^k(x, y)$. □

Exemplos 1.1.3. (i) O *toro dirigido* \mathbb{T} é o produto tensorial de duas circunferências dirigidas, isto é,

$$\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \otimes \mathbb{S}^1.$$

Mais explicitamente, considerando a circunferência dirigida como sendo o conjunto pré-cúbico definido em 1.1.1 (ii), temos

$$\mathbb{T}_0 = \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{S}_0^1 = \{(a, a)\};$$

$$\mathbb{T}_1 = \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{S}_1^1 \sqcup \mathbb{S}_1^1 \times \mathbb{S}_0^1 = \{(a, u), (u, a)\};$$

$$\mathbb{T}_2 = \mathbb{S}_1^1 \times \mathbb{S}_1^1 = \{(u, u)\};$$

$$\mathbb{T}_l = \emptyset, \quad l \geq 3.$$

Os operadores bordo são dados por

$$d_1^k(a, u) = (a, d_1^k u) = (a, a);$$

$$d_1^k(u, a) = (d_1^k u, a) = (a, a);$$

$$d_1^k(u, u) = (d_1^k u, u) = (a, u);$$

CAPÍTULO 1. CONJUNTOS PRÉ-CÚBICOS

$$d_2^k(u, u) = (u, d_{2-1}^k u) = (u, d_1^k u) = (u, a),$$

onde $k \in \{0, 1\}$.

(ii) Seja P um conjunto pré-cúbico. O *cilindro pré-cúbico sobre P* é o produto tensorial

$$P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket.$$

Assim, temos em dimensão n

$$(P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket)_n = \coprod_{i+j=n} P_i \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_j.$$

Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} (P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket)_0 &= P_0 \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_0 = P_0 \times \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}; \\ (P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket)_n &= P_n \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_0 \sqcup P_{n-1} \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_1 \sqcup P_{n-2} \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_2 \dots \\ &\quad \dots \sqcup P_0 \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_n \\ &= P_n \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_0 \sqcup P_{n-1} \times \llbracket 0, 1 \rrbracket_1, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por:

Se $x \in P_n$, então

$$d_i^k(x, \langle 0 \rangle) = (d_i^k x, \langle 0 \rangle)$$

e

$$d_i^k(x, \langle 1 \rangle) = (d_i^k x, \langle 1 \rangle).$$

Se $x \in P_{n-1}$, então

1.1. CONCEITOS BÁSICOS

$$d_i^k(x, \langle 0, 1 \rangle) = \begin{cases} (d_i^k x, \langle 0, 1 \rangle), & i = 1, \dots, n-1, \\ (x, d_1^k \langle 0, 1 \rangle) = (x, \langle k \rangle), & i = n. \end{cases}$$

Cubos e esferas pré-cúbicos

O produto tensorial é associativo (a menos de isomorfismo canónico) e, portanto, pode ser iterado. Dado $n > 0$, o n -cubo pré-cúbico é definido pelo produto tensorial $\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n}$. Iremos denotar por ι_n o único elemento de grau n , tendo-se

$$\iota_n = \underbrace{(\langle 0, 1 \rangle, \dots, \langle 0, 1 \rangle)}_{n \text{ vezes}}.$$

A n -esfera pré-cúbica, Σ^n , é o n -esqueleto do $n+1$ -cubo.

Pushouts

Recordemos que, numa categoria, um pushout é um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

tal que para qualquer objeto Q e para quaisquer morfismos $\varphi: B \rightarrow Q$ e $\psi: C \rightarrow Q$ com $\varphi \circ f = \psi \circ i$, existe um único morfismo $h: P \rightarrow Q$ tal que $h \circ j = \varphi$ e $h \circ g = \psi$.

Proposição 1.1.4. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

um diagrama de conjuntos pré-cúbicos que é um pushout de conjuntos graduados, ou seja, um pushout de conjuntos em cada dimensão. Então o diagrama é um pushout na categoria

preCub.

Demonstração. Consideremos $\alpha: B \rightarrow P$ e $\beta: C \rightarrow P$ morfismos de conjuntos pré-cúbicos tais que $\alpha \circ f = \beta \circ i$. Pela propriedade universal do pushout de conjuntos graduados, existe um único morfismo de conjuntos graduados $h: D \rightarrow P$ tal que $h \circ j = \alpha$ e $h \circ g = \beta$. Iremos provar que h é um morfismo de conjuntos pré-cúbicos.

Vejamos, primeiramente, que $D = j(B) \cup g(C)$. Consideremos então o diagrama comutativo de conjuntos graduados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j' \\ C & \xrightarrow{g'} & j(B) \cup g(C) \end{array}$$

em que j' e g' são as restrições de j e g , respetivamente. Este diagrama é um pushout. De facto, dados $\eta: B \rightarrow S$ e $\chi: C \rightarrow S$ morfismos de conjuntos graduados tais que $\eta \circ f = \chi \circ i$, existe um único morfismo de conjuntos graduados $\theta: D \rightarrow S$ tal que $\theta \circ j = \eta$ e $\theta \circ g = \chi$. Seja σ a restrição de θ a $j(B) \cup g(C)$. Então $\sigma \circ j' = \eta$ e $\sigma \circ g' = \chi$. Seja $\sigma': j(B) \cup g(C) \rightarrow S$ um morfismo de conjuntos graduados tal que $\sigma' \circ j' = \eta$ e $\sigma' \circ g' = \chi$. Consideremos a aplicação $\theta': D \rightarrow S$ definida por

$$\theta'(x) = \begin{cases} \sigma'(x), & x \in j(B) \cup g(C) \\ \theta(x), & x \notin j(B) \cup g(C). \end{cases}$$

Então,

$$\theta' \circ g(c) = \theta'(g(c)) = \sigma'(g'(c)) = \chi(c), \quad c \in C$$

e

$$\theta' \circ j(b) = \theta'(j(b)) = \sigma'(j'(b)) = \eta(b), \quad b \in B.$$

Logo, $\theta' = \theta$ e, portanto $\sigma' = \sigma$. Segue-se que a inclusão $j(B) \cup g(C) \rightarrow D$ é um isomorfismo de conjuntos graduados e, portanto $D = j(B) \cup g(C)$.

1.1. CONCEITOS BÁSICOS

Veamos agora que h é um morfismo de conjuntos pré-cúbicos. Seja $x \in D$. Suponhamos primeiramente que $x = j(b)$, para algum $b \in B$. Então

$$h(d_i^k x) = h(d_i^k j(b)) = h(j(d_i^k b)) = \alpha(d_i^k b) = d_i^k \alpha(b) = d_i^k h(j(b)) = d_i^k h(x).$$

Suponhamos agora que $x = g(c)$, para algum $c \in C$. Então

$$h(d_i^k x) = h(d_i^k g(c)) = h(g(d_i^k c)) = \beta(d_i^k c) = d_i^k \beta(c) = d_i^k h(g(c)) = d_i^k h(x).$$

Logo, o diagrama é um pushout de conjuntos pré-cúbicos. □

Exemplo 1.1.5. Consideremos a circunferência dirigida \mathbb{S}^1 definida em 1.1.1 (ii) e consideremos o morfismo de conjuntos pré-cúbicos $f: \llbracket 0, 1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $f(\langle 0 \rangle) = f(\langle 1 \rangle) = a$ e $f(\langle 0, 1 \rangle) = u$. Então temos o seguinte diagrama comutativo de conjuntos pré-cúbicos em que i e j são as inclusões e g é a restrição de f aos 0-esqueletos:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^0 = \llbracket 0, 1 \rrbracket_{\leq 0} = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}_{\leq 0}^1 = \{a\} \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ \llbracket 0, 1 \rrbracket & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Este diagrama é um pushout de conjuntos pré-cúbicos. Com efeito, em grau 0 temos o pushout de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} & \longrightarrow & \{a\} \\ id_{\{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}} \downarrow & & \downarrow id_{\{a\}} \\ \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} & \longrightarrow & \{a\} \end{array}$$

e em grau 1 temos o pushout de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\langle 0, 1 \rangle\} & \longrightarrow & \{u\}. \end{array}$$

1.2 Homologia cúbica

Seja P um conjunto pré-cúbico. O *complexo de cadeias cúbico* de P , $C_*(P)$, é definido do seguinte modo:

1. Para $n \geq 0$, $C_n(P)$ é o grupo abeliano livre gerado por P_n , $C_n(P) = \mathbb{Z}P_n$, e para $n < 0$ definimos $C_n(P) = 0$.
2. Para cada $n > 0$, o operador bordo $d : C_n(P) \rightarrow C_{n-1}(P)$ é definido por

$$d(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0 x - d_i^1 x), \quad x \in P_n$$

e $d = 0$ para $n \leq 0$.

Mostramos na Proposição 1.2.1 que $C_*(P)$ é, de facto, um complexo de cadeias. O morfismo $f : P \rightarrow Q$ de conjuntos pré-cúbicos induz uma aplicação de cadeias

$$\begin{aligned} f_* : C_*(P) &\rightarrow C_*(Q) \\ z &\mapsto f(z), \end{aligned}$$

onde $z \in P$. Denotando por **Ch** a categoria dos complexos de cadeias, temos o funtor $C_* : \text{preCub} \rightarrow \text{Ch}$.

Proposição 1.2.1. $d \circ d = 0$.

Demonstração. Sejam $n \geq 2$ e $x \in P_n$. Temos

$$\begin{aligned} d \circ d(x) &= d \left(\sum_{j=1}^n (-1)^j (d_j^0 x - d_j^1 x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j (d d_j^0 x - d d_j^1 x) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j d d_j^0 x - \sum_{j=1}^n (-1)^j d d_j^1 x \end{aligned}$$

1.2. HOMOLOGIA CÚBICA

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (d_i^0 d_j^0 x - d_i^1 d_j^0 x) \right) \\
&- \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (d_i^0 d_j^1 x - d_i^1 d_j^1 x) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x \\
&= \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x \\
&+ \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x \\
&+ \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x \\
&+ \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x \\
&= \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_{j-1}^0 d_i^0 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} d_{j-1}^0 d_i^1 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} d_{j-1}^1 d_i^0 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_{j-1}^1 d_i^1 x \\
& = \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{1 \leq s < r+1 \leq n} (-1)^{s+r+1} d_r^0 d_s^0 x \quad (r = j-1, \quad s = i) \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{1 \leq s < r+1 \leq n} (-1)^{s+r} d_r^0 d_s^1 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{1 \leq s < r+1 \leq n} (-1)^{s+r} d_r^1 d_s^0 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x + \sum_{1 \leq s < r+1 \leq n} (-1)^{s+r+1} d_r^1 d_s^1 x \\
& = \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^0 d_j^0 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r+1} d_r^0 d_s^0 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r} d_r^0 d_s^1 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r} d_r^1 d_s^0 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j} d_i^1 d_j^1 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r+1} d_r^1 d_s^1 x \\
& = \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r} d_r^0 d_s^1 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r} d_r^1 d_s^0 x \\
& = \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^1 d_j^0 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r} d_r^1 d_s^0 x \\
& + \sum_{1 \leq j \leq i < n} (-1)^{i+j+1} d_i^0 d_j^1 x + \sum_{1 \leq s \leq r < n} (-1)^{s+r} d_r^0 d_s^1 x \\
& = 0.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.2.2. Seja P um conjunto pré-cúbico. A homologia cúbica de P , $H_*(P)$, é a

1.2. HOMOLOGIA CÚBICA

homologia habitual de $C_*(P)$, isto é, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n(P) = H_n(C_*(P)).$$

Iremos denotar por $Z_n(P)$ os ciclos e por $B_n(P)$ os bordos de $C_n(P)$.

Exemplos 1.2.3. (i) *Intervalo standard*

Começemos por recordar o conjunto pré-cúbico $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ definido em 1.1.1 (i) que descreve o intervalo standard.

A homologia cúbica de $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ é dada, em grau n , por

$$H_n(\llbracket 0, 1 \rrbracket) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ \{0\}, & n \neq 0. \end{cases}$$

De facto, consideremos $(\mathbb{Z}, 0)$ o grupo abeliano graduado que é \mathbb{Z} em grau 0 e $\{0\}$ nos restantes graus. Então $(\mathbb{Z}, 0)$ munido do operador bordo nulo é um complexo de cadeias.

Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{ll} \eta: (\mathbb{Z}, 0) \rightarrow C_*(\llbracket 0, 1 \rrbracket) & \varepsilon: C_*(\llbracket 0, 1 \rrbracket) \rightarrow (\mathbb{Z}, 0) \\ 1 \mapsto \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \mapsto 1 \\ & \langle 1 \rangle \mapsto 1 \\ & \langle 0, 1 \rangle \mapsto 0. \end{array}$$

Então η e ε são aplicações de cadeias. Com efeito, em grau $n = 0$, uma vez que $d = 0$, é claro que η e ε são compatíveis com o operador bordo.

Em grau $n = 1$ temos

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \circ d(\langle 0, 1 \rangle) &= \varepsilon(d(\langle 0, 1 \rangle)) \\
 &= \varepsilon(d_1^1 \langle 0, 1 \rangle - d_1^0 \langle 0, 1 \rangle) \\
 &= \varepsilon(\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle) \\
 &= \varepsilon(\langle 1 \rangle) - \varepsilon(\langle 0 \rangle) \\
 &= 1 - 1 \\
 &= 0 \\
 &= d(0) \\
 &= d(\varepsilon(\langle 0, 1 \rangle)) \\
 &= d \circ \varepsilon(\langle 0, 1 \rangle).
 \end{aligned}$$

Tem-se $\varepsilon \circ \eta = id_{(\mathbb{Z}, 0)}$. Mais, uma homotopia de cadeias $h: C_*(\mathbb{I}[0, 1]) \rightarrow C_*(\mathbb{I}[0, 1])$ tal que $dh + hd = id_{C_*(\mathbb{I}[0, 1])} - \eta \circ \varepsilon$ é definida por $h(\langle 0 \rangle) = 0$, $h(\langle 1 \rangle) = \langle 0, 1 \rangle$, $h(\langle 0, 1 \rangle) = 0$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 dh + hd(\langle 0 \rangle) &= dh(\langle 0 \rangle) + hd(\langle 0 \rangle) \\
 &= d(0) + h(0) \\
 &= 0 \\
 &= \langle 0 \rangle - \langle 0 \rangle \\
 &= id_{C_*(\mathbb{I}[0, 1])}(\langle 0 \rangle) - \eta(1) \\
 &= id_{C_*(\mathbb{I}[0, 1])}(\langle 0 \rangle) - \eta \circ \varepsilon(\langle 0 \rangle);
 \end{aligned}$$

1.2. HOMOLOGIA CÚBICA

$$\begin{aligned}
 dh + hd(\langle 1 \rangle) &= dh(\langle 1 \rangle) + hd(\langle 1 \rangle) \\
 &= d(\langle 0, 1 \rangle) + h(0) \\
 &= \langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle + 0 \\
 &= \langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle \\
 &= id_{C_*([0,1])}(\langle 1 \rangle) - \eta(1) \\
 &= id_{C_*([0,1])}(\langle 1 \rangle) - \eta \circ \varepsilon(\langle 1 \rangle);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dh + hd(\langle 0, 1 \rangle) &= dh(\langle 0, 1 \rangle) + hd(\langle 0, 1 \rangle) \\
 &= d(0) + h(d_1^1 \langle 0, 1 \rangle - d_1^0 \langle 0, 1 \rangle) \\
 &= 0 + h(\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle) \\
 &= h(\langle 1 \rangle) - h(\langle 0 \rangle) \\
 &= \langle 0, 1 \rangle - 0 \\
 &= id_{C_*([0,1])}(\langle 0, 1 \rangle) - \eta(0) \\
 &= id_{C_*([0,1])}(\langle 0, 1 \rangle) - \eta(\varepsilon(\langle 0, 1 \rangle)) \\
 &= id_{C_*([0,1])}(\langle 0, 1 \rangle) - \eta \circ \varepsilon(\langle 0, 1 \rangle).
 \end{aligned}$$

Logo, η é uma equivalência de homotopia de cadeias e, portanto, induz o isomorfismo em homologia $\eta_*: H_*((\mathbb{Z}, 0)) \rightarrow H_*([0, 1])$, $1 \mapsto [\langle 0 \rangle]$.

(ii) Circunferência dirigida

Recordemos agora o conjunto pré-cúbico \mathbb{S}^1 definido em 1.1.1 (ii).

O complexo de cadeias cúbico de \mathbb{S}^1 é dado pelos conjuntos

$$C_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \cdot \{a\};$$

$$C_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \cdot \{u\};$$

$$C_n(\mathbb{S}^1) = 0, \quad n \neq 0, 1,$$

onde os operadores bordo são todos nulos. Assim, todas as cadeias são ciclos e 0 é o único bordo em cada grau. Logo,

$$H_n(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1, \\ \{0\}, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

(iii) *Circunferência ordenada*

Consideremos a circunferência ordenada \mathbb{O}^1 descrita em 1.1.1 (iii).

O complexo de cadeias cúbico de \mathbb{O}^1 é dado por

$$C_0(\mathbb{O}^1) = \mathbb{Z} \cdot \{a, b\};$$

$$C_1(\mathbb{O}^1) = \mathbb{Z} \cdot \{u, v\};$$

$$C_n(\mathbb{O}^1) = 0,$$

onde os operadores bordo são dados por

$$d: C_1(\mathbb{O}^1) \rightarrow C_0(\mathbb{O}^1)$$

$$u \mapsto b - a$$

$$v \mapsto b - a$$

1.2. HOMOLOGIA CÚBICA

e pela função nula para $n \neq 1$.

Vejamos primeiramente qual é a homologia cúbica da circunferência ordenada em grau 0. Consideremos a aplicação $\varepsilon: C_0(\mathbb{O}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$. Notemos que ε envia $B_0(\mathbb{O}^1)$ para $\{0\}$. O morfismo induzido por ε , $\varepsilon_*: H_0(\mathbb{O}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$, é um isomorfismo. De facto, considerando $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(\mathbb{O}^1)$, $1 \mapsto [a] = [b]$, temos

$$\varepsilon_* \circ \phi(1) = \varepsilon_*([a]) = \varepsilon(a) = 1$$

e

$$\begin{aligned} \phi \circ \varepsilon_*([\alpha a + \beta b]) &= \phi \circ \varepsilon_*(\alpha[a] + \beta[b]) \\ &= \phi(\alpha\varepsilon_*([a]) + \beta\varepsilon_*([b])) \\ &= \phi(\alpha\varepsilon(a) + \beta\varepsilon(b)) \\ &= \phi(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)[a] \\ &= \alpha[a] + \beta[a] \\ &= \alpha[a] + \beta[b] \\ &= [\alpha a + \beta b]. \end{aligned}$$

Logo, $H_0(\mathbb{O}^1) \cong \mathbb{Z}$.

De modo a calcular a homologia cúbica de \mathbb{O}^1 em grau 1, vejamos em que constam os ciclos de $C_1(\mathbb{O}^1)$. Ora, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} d(\lambda u + \mu v) = 0 &\Leftrightarrow \lambda du + \mu dv = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(b - a) + \mu(b - a) = 0 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 1. CONJUNTOS PRÉ-CÚBICOS

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)b - (\lambda + \mu)a = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \mu = 0$$

$$\Rightarrow \mu = -\lambda.$$

Logo, $Z_1(\mathbb{O}^1) = \langle u - v \rangle$. Temos então o isomorfismo $\varepsilon_1: \mathbb{Z} \rightarrow Z_1(\mathbb{O}^1)$ definido por $\varepsilon_1(1) = u - v$.

Como $B_1(\mathbb{O}^1) = \{0\}$, obtemos o isomorfismo $\phi_1: \mathbb{Z} \rightarrow H_1(\mathbb{O}^1)$, $1 \mapsto [u - v]$.

Assim, temos que a homologia cúbica de \mathbb{O}^1 é

$$H_n(\mathbb{O}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1, \\ \{0\}, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

(iv) *Toro*

Recordemos o toro descrito pelo conjunto pré-cúbico definido em 1.1.3 (i).

O complexo de cadeias cúbico de \mathbb{T} é dado por

$$C_0(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \cdot \{(a, a)\};$$

$$C_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \cdot \{(a, u), (u, a)\};$$

$$C_2(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \cdot \{(u, u)\};$$

$$C_n(\mathbb{T}) = \{0\}, \quad n \geq 3,$$

onde os operadores bordo são todos nulos. Então, analogamente ao exemplo anterior da circunferência dirigida, temos os seguintes isomorfismos

1.2. HOMOLOGIA CÚBICA

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(\mathbb{T}), \quad m \mapsto [m(a, a)];$$

$$\psi: \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_1(\mathbb{T}), \quad (m, n) \mapsto [m(a, u) + n(u, a)];$$

$$\theta: \mathbb{Z} \rightarrow H_2(\mathbb{T}), \quad m \mapsto [m(u, u)].$$

Logo,

$$H_n(\mathbb{T}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2, & n = 1, \\ \{0\}, & n \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

Capítulo 2

Álgebra homológica dirigida

O objetivo deste capítulo passa por desenvolver a parte puramente algébrica da teoria de homologia dirigida de Grandis, que é descrita no 2.^o capítulo de [4].

2.1 Grupos abelianos pré-ordenados

Definição 2.1.1. Seja G um grupo abeliano e seja \leq uma relação de pré-ordem em G , isto é, uma relação binária reflexiva e transitiva. A relação \leq diz-se uma *relação de pré-ordem aditiva* se

$$a \leq a', b \leq b' \implies a + b \leq a' + b'.$$

Um *grupo abeliano pré-ordenado* é um grupo abeliano equipado com uma pré-ordem aditiva.

Exemplos 2.1.2. (i) Seja G um grupo abeliano. Então a relação de pré-ordem

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b, \quad \forall a, b \in G$$

é uma relação de pré-ordem aditiva em G . De facto, dados $a, a', b, b' \in G$ tais que $a \leq a'$ e $b \leq b'$, temos $a = a'$ e $b = b'$. Logo,

$$a + b = a' + b',$$

2.1. GRUPOS ABELIANOS PRÉ-ORDENADOS

pelo que $a + b \leq a' + b'$.

A esta relação chamamos *relação discreta*.

(ii) Dado um grupo abeliano G , a relação de pré-ordem definida, para $a, b \in G$, por

$$a \leq b \Leftrightarrow a, b \in G$$

é uma relação de pré-ordem aditiva. De facto, sejam $a, a', b, b' \in G$ tais que $a \leq a'$ e $b \leq b'$. Então $a, a' \in G$ e $b, b' \in G$. Assim, $a + b, a' + b' \in G$. Logo, $a + b \leq a' + b'$.

Esta relação designa-se por *relação caótica*.

(iii) Consideremos o grupo abeliano \mathbb{Z} . Então a relação

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}, \quad \forall a, n \in \mathbb{Z}$$

é uma pré-ordem aditiva em \mathbb{Z} . De facto, dados $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ tais que $a \leq a'$ e $b \leq b'$, temos $a' - a, b' - b \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(a' + b') - (a + b) = (b' - b) + (a' - a) \in \mathbb{N}.$$

Logo, $a + b \leq a' + b'$.

A esta relação chamamos *relação natural*. Iremos denotar por $\vec{\mathbb{Z}}$ o grupo abeliano \mathbb{Z} munido da relação natural.

Cone positivo

Seja $G = (G, \leq)$ um grupo abeliano pré-ordenado. O *cone positivo* é o subconjunto de G definido por

$$G^+ = (G, \leq)^+ = \{\lambda \in G : \lambda \geq 0\}.$$

Exemplos 2.1.3. (i) Se considerarmos a relação discreta num grupo abeliano G , temos

o seguinte cone positivo

$$G^+ = \{\lambda \in G \mid \lambda \geq 0\} = \{\lambda \in G \mid \lambda = 0\} = \{0\}.$$

(ii) Considerando agora G um grupo abeliano pré-ordenado com a pré-ordem caótica, o cone positivo associado a G é dado por

$$G^+ = \{\lambda \in G \mid \lambda \geq 0\} = \{\lambda \in G \mid \lambda, 0 \in G\} = G.$$

(iii) Por fim, considerando o grupo abeliano pré-ordenado $\vec{\mathbb{Z}}$, i.e., o grupo abeliano \mathbb{Z} com a pré-ordem natural, temos o cone positivo

$$\vec{\mathbb{Z}}^+ = \{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda \geq 0\} = \{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda - 0 \in \mathbb{N}\} = \{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

Proposição 2.1.4. *O cone positivo G^+ é um submonóide de G .*

Demonstração. Uma vez que \leq é reflexiva, $0 \leq 0$, pelo que $0 \in G^+$. Sejam agora $a, b \in G^+$. Então $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Logo, $a + b \geq 0 + 0 = 0$, pelo que $a + b \in G^+$. \square

Proposição e Definição 2.1.5. *Seja M um submonóide de um grupo abeliano G . Então uma pré-ordem aditiva \leq_M é definida por*

$$a \leq_M b \Leftrightarrow b - a \in M.$$

Demonstração. Seja $a \in G$. Como M é um submonóide de G , temos que $a - a = 0 \in M$. Portanto $a \leq_M a$, pelo que \leq_M é reflexiva.

Sejam agora $a, b, c \in G$ tais que $a \leq_M b$ e $b \leq_M c$. Então

$$b - a, c - b \in M.$$

Ora,

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in M.$$

2.1. GRUPOS ABELIANOS PRÉ-ORDENADOS

Logo, $a \leq_M c$, pelo que \leq_M é transitiva.

Vejam agora que a pré-ordem \leq_M é aditiva. Sejam $a, a', b, b' \in G$ tais que $a \leq_M a'$ e $b \leq_M b'$. Então

$$a' - a, b' - b \in M.$$

Ora,

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) \in M.$$

Logo, $a + b \leq_M a' + b'$. □

Exemplos 2.1.6. (i) Se considerarmos $M = \{0\}$ o submonóide de um grupo abeliano G , temos que a relação de pré-ordem associada a M é a relação discreta. De facto, dados $a, b \in G$,

$$\begin{aligned} a \leq_{\{0\}} b &\Leftrightarrow b - a \in M = \{0\} \\ &\Leftrightarrow b - a = 0 \\ &\Leftrightarrow b = a. \end{aligned}$$

(ii) A relação caótica é a relação associada ao submonóide G do próprio grupo abeliano G . Com efeito, dados $a, b \in G$,

$$\begin{aligned} a \leq_G b &\Leftrightarrow b - a \in G \\ &\Leftrightarrow a, b \in G. \end{aligned}$$

(iii) Consideremos o grupo abeliano \mathbb{Z} . Então a relação

$$a \leq_{\mathbb{N}} b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

é a relação natural.

Proposição 2.1.7. *Seja G um grupo abeliano. As aplicações $\leq \mapsto (G, \leq)^+$ e $M \mapsto \leq_M$ são*

bijeções inversas entre o conjunto das pré-ordens aditivas de G e o conjunto dos submonóides de G .

Demonstração. Sejam $a, b \in G$. Temos

$$a \leq_{(G, \leq)^+} b \Leftrightarrow b - a \in (G, \leq)^+ \Leftrightarrow b - a \geq 0 \Leftrightarrow a + 0 \leq a + b - a \Leftrightarrow a \leq b.$$

Logo, $\leq_{(G, \leq)^+} = \leq$.

Além disso, dado $g \in G$,

$$g \in (G, \leq_M)^+ \Leftrightarrow 0 \leq_M g \Leftrightarrow g - 0 \in M \Leftrightarrow g \in M.$$

Logo, $(G, \leq_M)^+ = M$. □

Observação 2.1.8. Dados G um grupo abeliano, \leq uma relação de pré-ordem aditiva em G e M um submonóide de G , tem-se

$$(G, \leq_M)^+ = M \text{ e } \leq_{(G, \leq)^+} = \leq.$$

Homomorfismos

Sejam G, G' grupos abelianos pré-ordenados e $f: G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupos abelianos. O homomorfismo f diz-se um *homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados* se

$$\forall a, b \in G, \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

A categoria dos grupos abelianos pré-ordenados será denotada por **pAb**.

Proposição 2.1.9. Sejam G e G' grupos abelianos pré-ordenados. O homomorfismo $f: G \rightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados se e só se

$$f(G^+) \subseteq G'^+.$$

2.1. GRUPOS ABELIANOS PRÉ-ORDENADOS

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f é um morfismo de grupos abelianos pré-ordenados. Seja $x \in G^+$. Então $x \geq 0$ e, por hipótese,

$$x \geq 0 \implies f(x) \geq f(0) = 0.$$

Logo, $f(x) \in G'^+$.

Suponhamos agora que $f(G^+) \subseteq G'^+$. Sejam $a, b \in G$ tais que $a \leq b$. Então

$$0 = a - a \leq b - a,$$

donde $b - a \in G^+$. Assim,

$$f(b) - f(a) = f(b - a) \in f(G^+) \subseteq G'^+.$$

Logo, $f(b) - f(a) \geq 0$, isto é, $f(a) \leq f(b)$. □

Corolário 2.1.10. *Sejam G e G' grupos abelianos pré-ordenados. Um isomorfismo de grupos abelianos $f: G \rightarrow G'$ é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados se e só se*

$$f(G^+) = G'^+.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados. Pela Proposição 2.1.9, $f(G^+) \subseteq G'^+$ e $f^{-1}(G'^+) \subseteq G^+$. Logo,

$$f(G^+) \subseteq G'^+ = f(f^{-1}(G'^+)) \subseteq f(G^+)$$

e portanto $f(G^+) = G'^+$.

Reciprocamente, suponhamos que $f(G^+) = G'^+$. Então, uma vez que f é um isomorfismo de grupos abelianos, temos também $f^{-1}(G'^+) = G^+$. Pela Proposição 2.1.9, f e f^{-1} são homomorfismos de grupos abelianos pré-ordenados. Logo, f é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados. □

Soma direta

Seja $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de grupos abelianos pré-ordenados. A soma direta $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ é um grupo abeliano pré-ordenado, onde a pré-ordem aditiva é definida componente por componente.

Subgrupos

Um subgrupo H de um grupo abeliano pré-ordenado G é um grupo abeliano pré-ordenado munido da restrição da pré-ordem aditiva de G e a inclusão $H \hookrightarrow G$ é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados. Temos

$$H^+ = \{x \in H \mid x \geq 0\} = H \cap \{x \in G \mid x \geq 0\} = H \cap G^+.$$

Quociente

Sejam G um grupo abeliano pré-ordenado e H um subgrupo de G . Consideremos a seguinte relação binária definida em G/H :

$$\forall [a], [b] \in G/H, \quad [a] \leq [b] \Leftrightarrow \forall x \in [a] \quad \exists y \in [b]: x \leq y. \quad (2.1)$$

Munido desta relação, G/H é um grupo abeliano pré-ordenado:

Proposição 2.1.11. *A relação binária definida em 2.1 é uma pré-ordem aditiva em G/H .*

Demonstração. Seja $[\alpha] \in G/H$. É claro que

$$\forall x \in [\alpha] \quad x \leq x.$$

Logo, $[\alpha] \leq [\alpha]$.

Sejam agora $[\alpha], [\beta], [\theta] \in G/H$ tais que $[\alpha] \leq [\beta]$ e $[\beta] \leq [\theta]$. Então

2.1. GRUPOS ABELIANOS PRÉ-ORDENADOS

$$\forall x \in [\alpha] \quad \exists y \in [\beta]: x \leq y \quad (2.2)$$

e

$$\forall z \in [\beta] \quad \exists w \in [\theta]: z \leq w. \quad (2.3)$$

Vejamos que $[\alpha] \leq [\theta]$. Seja então $k \in [\alpha]$. Por 2.2 existe $y \in [\beta]$ tal que

$$k \leq y.$$

Por outro lado, tomando em 2.3 $z = y \in [\beta]$ temos que existe $l \in [\theta]$ tal que

$$y \leq l.$$

Logo, $k \leq l$ e portanto $[\alpha] \leq [\theta]$.

Vejamos agora que a pré-ordem é aditiva. Com efeito, sejam $[\alpha], [\alpha'], [\beta], [\beta'] \in G/H$ tais que $[\alpha] \leq [\beta]$ e $[\alpha'] \leq [\beta']$. Então

$$\forall x \in [\alpha] \quad \exists y \in [\beta]: x \leq y \quad (2.4)$$

e

$$\forall x' \in [\alpha'] \quad \exists y' \in [\beta']: x' \leq y'. \quad (2.5)$$

Sejam $u \in [\alpha] + [\alpha']$, $a \in [\alpha]$ e $a' \in [\alpha']$. Então, por definição de grupo quociente, existe $h \in H$ tal que

$$u = a + a' + h.$$

Por hipótese, 2.4 e 2.5, existem $b \in [\beta]$ e $b' \in [\beta']$ tais que $a \leq b$ e $a' \leq b'$. Assim, $u - h = a + a' \leq b + b'$, donde

$$u \leq b + b' + h.$$

Uma vez que $b + b' + h \in [\beta] + [\beta']$, segue que

$$[\alpha] + [\alpha'] \leq [\beta] + [\beta']. \quad \square$$

Proposição 2.1.12. *A projeção canónica $G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados.*

Demonstração. Uma vez que a projeção canónica é um homomorfismo de grupos abelianos, falta apenas ver que é compatível com as pré-ordens. Com efeito, sejam $a, b \in G$ tais que $a \leq b$. Seja $x \in [a]$. Então $x - a \in H$. Consideremos $y = b + x - a$. Então

$$y - b = x - a \in H,$$

pelo que $y \in [b]$. Ora,

$$x = a + x - a = a + y - b \leq b + y - b = y.$$

Logo, $[a] \leq [b]$. □

Observação 2.1.13. Por definição de pré-ordem do grupo G/H e pela Proposição anterior, tem-se

$$[\alpha] \geq 0 = [0] \Leftrightarrow \exists z \in [\alpha]: z \geq 0.$$

Donde

$$(G/H)^+ = \{[\alpha] \in G/H \mid [\alpha] \geq 0\} = \{[z] \mid z \in G, z \geq 0\} = \{[z] \mid z \in G^+\}.$$

O grupo abeliano pré-ordenado G/H tem a seguinte propriedade universal:

Proposição 2.1.14. *Seja $f : G \rightarrow A$ um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados tal que $H \subseteq \ker f$. Então existe um único homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados $\bar{f} : G/H \rightarrow A$ tal que $\bar{f}([x]) = f(x)$, $\forall x \in G$.*

2.1. GRUPOS ABELIANOS PRÉ-ORDENADOS

Demonstração. Pela propriedade universal do grupo abeliano quociente G/H , existe um e um só homomorfismo $\bar{f}: G/H \rightarrow A$ tal que $\bar{f}([x]) = f(x)$, $\forall x \in G$. Vejamos que \bar{f} é compatível com as pré-ordens. Sejam $[a], [b] \in G/H$ tais que $[a] \leq [b]$ e seja $x \in [a]$. Então, por definição da pré-ordem no quociente, existe $y \in [b]$ tal que $x \leq y$. Uma vez que f é compatível com as pré-ordens, temos

$$\bar{f}([a]) = \bar{f}([x]) = f(x) \leq f(y) = \bar{f}([y]) = \bar{f}([b]). \quad \square$$

Produto tensorial

O produto tensorial de dois grupos abelianos pré-ordenados G e H é um grupo abeliano pré-ordenado relativamente à pré-ordem aditiva associada ao submonóide de $G \otimes H$ gerado pelos elementos $g \otimes h$, com $g \in G^+$ e $h \in H^+$.

Grupos abelianos pré-ordenados livres

Seja X um conjunto. Iremos denotar por $\mathbb{N}X$ o submonóide do grupo abeliano livre $\mathbb{Z}X$ que é constituído pelas combinações lineares positivas. O grupo abeliano pré-ordenado livre gerado por X é o grupo abeliano livre $\mathbb{Z}X$ munido da pré-ordem aditiva $\leq_{\mathbb{N}X}$. Iremos denotar este grupo por $\vec{\mathbb{Z}}X$.

O grupo abeliano pré-ordenado livre tem a seguinte propriedade universal:

Proposição 2.1.15. *Sejam G um grupo abeliano pré-ordenado e $f: X \rightarrow G$ uma aplicação tal que $f(X) \subseteq G^+$. Então existe um único homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados $\hat{f}: \vec{\mathbb{Z}}X \rightarrow G$ tal que $\hat{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.*

Demonstração. Pela propriedade universal do grupo abeliano livre, existe um e um só homomorfismo de grupos abelianos $\hat{f}: \vec{\mathbb{Z}}X \rightarrow G$ tal que $\hat{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in X$. Vejamos que \hat{f} é um morfismo de grupos abelianos pré-ordenados. Consideremos então

$n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k \in \mathbb{N}X$. Temos

$$\begin{aligned}\hat{f}(n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k) &= n_1\hat{f}(x_1) + n_2\hat{f}(x_2) + \cdots + n_k\hat{f}(x_k) \\ &= n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + \cdots + n_kf(x_k) \in G^+.\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.1.9, segue que \hat{f} é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados. \square

2.2 Complexos de cadeias dirigidos

Um *grupo abeliano pré-ordenado graduado* é uma família $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de grupos abelianos pré-ordenados. Um *homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados* é uma família $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}: (G_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (G'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos de grupos abelianos pré-ordenados. Um *complexo de cadeias dirigido* é um complexo de cadeias que é um grupo abeliano pré-ordenado graduado. Uma *aplicação de cadeias dirigida* é uma aplicação de cadeias que é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados. A categoria dos complexos de cadeias dirigidos irá denotar-se por **dCh**.

Homologia dirigida

Seja C um complexo de cadeias dirigido. Os subconjuntos dos ciclos e dos bordos do grupo abeliano pré-ordenado C_n são grupos abelianos pré-ordenados que denotaremos por $\vec{Z}_n C$ e $\vec{B}_n C$. O n -ésimo *grupo de homologia dirigida* de C é o grupo abeliano pré-ordenado

$$\vec{H}_n C = \vec{Z}_n C / \vec{B}_n C.$$

Uma aplicação de cadeias dirigida $f: C \rightarrow D$ induz o homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados

$$f_*: \vec{H}_n(C) \rightarrow \vec{H}_n(D)$$

2.2. COMPLEXOS DE CADEIAS DIRIGIDOS

$$[z] \mapsto [f(z)],$$

obtendo-se o funtor $\vec{H}_n: \mathbf{dCh} \rightarrow \mathbf{pAb}$.

Observação 2.2.1. Dado C um complexo de cadeias dirigido, tem-se

$$\vec{H}_n(C)^+ = \{[z] \mid z \in \vec{Z}_n(C)^+\} = \{[z] \mid z \in Z_n(C) \cap C_n^+\}.$$

O homomorfismo de Künneth dirigido

Sejam C e D complexos de cadeias dirigidos. Recordemos que o complexo de cadeias $C \otimes D$ é definido, em cada grau n , por

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{i+j=n} (C_i \otimes D_j),$$

sendo o operador bordo $d: (C \otimes D)_n \rightarrow (C \otimes D)_{n-1}$ definido por

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^i x \otimes dy,$$

onde $x \in C_i$ e $y \in D_{n-i}$. Como C e D são complexos de cadeias dirigidos, então para cada i e j , C_i e D_j são grupos abelianos pré-ordenados, pelo que $C_i \otimes D_j$ é um grupo abeliano pré-ordenado. Por definição, $\bigoplus_{i+j=n} (C_i \otimes D_j)$ é ainda um grupo abeliano pré-ordenado. Deste modo, o produto tensorial $C \otimes D$ é um complexo de cadeias dirigido.

Proposição e Definição 2.2.2. *Existe um homomorfismo único de grupos abelianos pré-ordenados graduados*

$$\kappa: \vec{H}_*(C) \otimes \vec{H}_*(D) \rightarrow \vec{H}_*(C \otimes D)$$

tal que $\kappa([x] \otimes [y]) = [x \otimes y]$. Este homomorfismo chama-se o homomorfismo de Künneth para C e D .

Demonstração. Sejam $x, x' \in C_i$ e $y, y' \in D_j$ ciclos tais que $[x] = [x']$ e $[y] = [y']$. Então existem $a \in C_{i+1}$ e $b \in C_{j+1}$ tais que $x' - x = da$ e $y' - y = db$, isto é, $x' = x + da$ e

$y' = y + db$. Temos

$$\begin{aligned} x' \otimes y' &= x \otimes y + x \otimes db + da \otimes y' \\ &= x \otimes y + (-1)^i d(x \otimes b) + d(a \otimes y'). \end{aligned}$$

ou seja, $x' \otimes y' - x \otimes y = (-1)^i d(x \otimes b) + d(a \otimes y')$. Logo, $[x' \otimes y'] = [x \otimes y]$. Assim, a correspondência

$$\begin{aligned} f: \vec{H}_i(C) \times \vec{H}_j(D) &\rightarrow \vec{H}_{i+j}(C \otimes D) \\ ([x], [y]) &\mapsto [x \otimes y] \end{aligned}$$

está bem definida.

Veamos agora que f é bilinear. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} f([x] + [x'], [y]) &= f([x + x'], [y]) \\ &= [(x + x') \otimes y] \\ &= [x \otimes y + x' \otimes y] \\ &= [x \otimes y] + [x' \otimes y] \\ &= f([x], [y]) + f([x'], [y]). \end{aligned}$$

Analogamente, $f([x], [y] + [y']) = f([x], [y]) + f([x], [y'])$.

Logo, existe um único homomorfismo

$$\kappa_{i,j}: \vec{H}_i(C) \otimes \vec{H}_j(D) \rightarrow \vec{H}_{i+j}(C \otimes D)$$

tal que $\kappa_{i,j}([x] \otimes [y]) = [x \otimes y]$.

2.2. COMPLEXOS DE CADEIAS DIRIGIDOS

Assim, existe um único homomorfismo de grupos abelianos graduados

$$\kappa: \vec{H}_*(C) \otimes \vec{H}_*(D) \rightarrow \vec{H}_*(C \otimes D)$$

tal que $\kappa([x] \otimes [y]) = [x \otimes y]$.

O homomorfismo κ é compatível com as pré-ordens em cada grau. De facto, dados $x \in C$ e $y \in D$ ciclos positivos, temos que $x \otimes y$ é ainda um ciclo positivo. \square

Recordemos que a *torção* de um grupo abeliano G é o subgrupo definido por

$$T(G) = \{m \in G \mid \exists r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}: rm = 0\}.$$

G diz-se *livre de torção* se

$$T(G) = 0.$$

Pelo Teorema de Künneth algébrico [5, Thm. 3B.5] temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.3. *Sejam C e D complexos de cadeias dirigidos. Se C e D são livres enquanto grupos abelianos graduados, então κ é injetivo. Se $H_*(C)$ ou $H_*(D)$ é livre de torção em cada dimensão, então κ é bijetivo.*

Capítulo 3

Homologia dirigida

Neste capítulo definimos a homologia dirigida de conjuntos pré-cúbicos e adaptamos os principais resultados de Grandis sobre a homologia dirigida de conjuntos cúbicos aos conjuntos pré-cúbicos. O Teorema da Invariância de Grandis baseia-se numa teoria de homotopia para conjuntos cúbicos que não se estende aos conjuntos pré-cúbicos. Portanto, apresentamos na secção 3.4 um novo conceito de equivalência para conjuntos pré-cúbicos e provamos o Teorema da Invariância neste caso.

3.1 Homologia dirigida de conjuntos pré-cúbicos

Seja P um conjunto pré-cúbico. O *complexo de cadeias dirigido* de P é o complexo de cadeias cúbico em que consideramos os grupos de cadeias como grupos abelianos pré-ordenados livres. Iremos denotar o complexo de cadeias dirigido de um conjunto pré-cúbico P por $\vec{C}_*(P)$. Um morfismo de conjuntos pré-cúbicos $f: P \rightarrow Q$ induz uma aplicação de cadeias dirigida

$$\begin{aligned} f_* = \vec{C}_*(f): \vec{C}_*(P) &\rightarrow \vec{C}_*(Q) \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

3.1. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE CONJUNTOS PRÉ-CÚBICOS

onde $x \in P$. Assim, obtemos o funtor $\vec{C}_*: \mathbf{preCub} \rightarrow \mathbf{dCh}$.

A homologia dirigida de um conjunto pré-cúbico P é o grupo abeliano pré-ordenado graduado

$$\vec{H}_*(P) = \vec{H}_*(\vec{C}_*(P)).$$

Assim, a homologia dirigida de P é a sua homologia habitual equipada, em cada dimensão n ($n \in \mathbb{Z}$), com a pré-ordem induzida pelo grupo abeliano pré-ordenado $\vec{C}_n(P)$. Iremos usar a notação $\vec{Z}_n(P) = \vec{Z}_n(\vec{C}_*(P))$ e $\vec{B}_n(P) = \vec{B}_n(\vec{C}_*(P))$ para os ciclos e para os bordos, respetivamente.

Exemplos 3.1.1. (i) Consideremos a circunferência ordenada definida em 1.1.1 (iii) e recordemos o isomorfismo $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(\mathbb{O}^1)$ definido em 1.2.3 (iii), por

$$\phi(m) = [ma] = [mb], \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Então

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(\mathbb{O}^1)^+ &= \{[z] \mid z \in \vec{Z}_0(\mathbb{O}^1)^+ = \mathbb{N} \cdot \mathbb{O}_0^1 = \mathbb{N} \cdot \{a, b\}\} \\ &= \{[ma + nb] \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{m[a] + n[b] \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{m[a] + n[a] \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(m + n)[a] \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{[ma] \mid m \in \mathbb{N}\} \\ &= \phi(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Logo, por 2.1.10 segue que ϕ é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados $\vec{\mathbb{Z}} \rightarrow \vec{H}_0(\mathbb{O}^1)$.

Vejamos agora qual é a homologia dirigida de \mathbb{O}^1 para $n = 1$. Recordemos que

$Z_1(\mathbb{O}^1) = \langle u - v \rangle$ e que temos o isomorfismo $\phi_1: \mathbb{Z} \rightarrow H_1(\mathbb{O}^1)$ definido, na base, por $\phi_1(1) = [u - v]$. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(\mathbb{O}^1)^+ &= \{[z] \mid z \in \vec{Z}_1(\mathbb{O}^1)^+\} \\ &= \{[z] \mid z \in Z_1(\mathbb{O}^1) \cap \vec{C}_1(\mathbb{O}^1)^+\} && \text{[por 2.2.1]} \\ &= \{[z] \mid z \in \langle u - v \rangle \cap \mathbb{N} \cdot \mathbb{O}_1^1\} \\ &= \{[z] \mid z \in \{0\}\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Assim, ϕ_1 é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados $(\mathbb{Z}, \leq_0) \rightarrow \vec{H}_1(\mathbb{O}^1)$.

Para $n \neq 0, 1$, uma vez que a homologia cúbica é nula, não existe homologia dirigida de \mathbb{O}^1 .

- (ii) Consideremos a circunferência dirigida \mathbb{S}^1 definida em 1.1.1 (ii) e recordemos o complexo de cadeias cúbico definido em 1.2.3 (ii). Então $C_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \cdot \{a\} = Z_0(\mathbb{S}^1)$ e $H_0(\mathbb{S}^1) = Z_0(\mathbb{S}^1)/\{0\}$. Assim, temos o isomorfismo $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(\mathbb{S}^1)$ definido por $\phi(m) = [ma], \forall m \in \mathbb{Z}$.

Ora,

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(\mathbb{S}^1)^+ &= \{[z] \mid z \in \vec{Z}_0(\mathbb{S}^1)^+ = \mathbb{N} \cdot \mathbb{S}_0^1\} \\ &= \{[ma] \mid m \in \mathbb{N}\} \\ &= \phi(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Assim, ϕ envia bijetivamente elementos do cone positivo de \mathbb{Z} em elementos do cone positivo da homologia dirigida de \mathbb{S}^1 em grau 0. Logo, ϕ é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados $\vec{\mathbb{Z}} \rightarrow \vec{H}_0(\mathbb{S}^1)$.

3.1. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE CONJUNTOS PRÉ-CÚBICOS

Analogamente, para $n = 1$, temos $\vec{H}_1(\mathbb{S}^1) \cong \vec{\mathbb{Z}}$.

Para $n \neq 0, 1$ a homologia dirigida é nula porque a homologia cúbica é nula.

(iii) Recordemos o toro \mathbb{T} definido em 1.1.3 (i), a respetiva homologia cúbica e os isomorfismos

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{Z} &\rightarrow H_0(\mathbb{T}), & m &\mapsto [m(a, a)]; \\ \psi: \mathbb{Z}^2 &\rightarrow H_1(\mathbb{T}), & (m, n) &\mapsto [m(a, u) + n(u, a)]; \\ \theta: \mathbb{Z} &\rightarrow H_2(\mathbb{T}), & m &\mapsto [m(u, u)].\end{aligned}$$

definidos em 1.2.3 (iv).

Analogamente ao exemplo (ii) anterior,

$$\begin{aligned}\vec{H}_0(\mathbb{T})^+ &= \varphi(\mathbb{N}) \\ \vec{H}_2(\mathbb{T})^+ &= \theta(\mathbb{N}),\end{aligned}$$

Portanto, temos os isomorfismos de grupos abelianos pré-ordenados

$$\varphi: \vec{\mathbb{Z}} \rightarrow \vec{H}_0(\mathbb{T})$$

e

$$\theta: \vec{\mathbb{Z}} \rightarrow \vec{H}_2(\mathbb{T}).$$

No caso $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}\vec{H}_1(\mathbb{T})^+ &= \{[z] \mid z \in \vec{Z}_1(\mathbb{T})^+ = \vec{C}_1(\mathbb{T})^+ = \mathbb{N} \cdot \mathbb{T}_1\} \\ &= \{[m(a, u) + n(u, a)] \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \psi(\mathbb{N}^2),\end{aligned}$$

donde segue que temos o isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados

$$\psi: \vec{\mathbb{Z}}^2 \rightarrow \vec{H}_1(\mathbb{T}).$$

3.2 Componentes conexas

Um conjunto pré-cúbico P diz-se *conexo* se quaisquer dois vértices estão ligados por uma sequência de arestas ou, mais formalmente, se quaisquer dois vértices são homólogos. Dado um vértice v de um conjunto pré-cúbico P , a união de todos os subconjuntos pré-cúbicos conexos que contêm v é um subconjunto pré-cúbico conexo de P . A este conjunto chamamos *componente conexa de v* e denotá-lo-emos por P_v .

Proposição 3.2.1. *Seja P um conjunto pré-cúbico. Então $P_v = P_w$ se e só se v e w são vértices homólogos em P .*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $P_v = P_w$. Então $v \in P_v = P_w$. Por definição, P_w é um subconjunto pré-cúbico conexo de P que contém w . Assim, de $v, w \in P_w$ segue que v e w são homólogos.

Reciprocamente, sejam v e w vértices homólogos em P . Vejamos que $w \in P_v$. Se $v = w$, não há nada a provar. Suponhamos então que $v \neq w$. Seja $x \in C_1(P)$ tal que $dx = v - w$. Uma vez que $v \neq w$, segue que $dx \neq 0$ e portanto $x \neq 0$. Assim, existem arestas $a_1, \dots, a_r \in P_1$ ($r \geq 1$) e números $m_1, \dots, m_r \in \{-1, 1\}$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^r m_i a_i.$$

Se $r = 1$, então $a_1, w \in P_1$. Caso contrário, $P_v \cup \{w, a_1\}$ seria um subconjunto pré-cúbico conexo de P que contém v e que é maior do que P_v . Se $r > 1$, então existe um índice i tal que $d(m_i a_i) = u - w$ para algum vértice u . Podemos supor que $i = r$. Seja $y = \sum_{i=1}^{r-1} m_i a_i$. Então

$$dy = d(x - m_r a_r) = dx - dm_r a_r = v - w - (u - w) = v - u.$$

3.2. COMPONENTES CONEXAS

Por indução, $u \in P_v$. Como $P_v \cup \{w, a_r\}$ é um subconjunto pré-cúbico conexo de P que contém v , temos $P_v \cup \{w, a_r\} = P_v$. Logo $w \in P_v$ e, por definição de P_w segue que $P_v \subseteq P_w$. Analogamente $P_w \subseteq P_v$. \square

Corolário 3.2.2. *Duas componentes conexas de um conjunto pré-cúbico P ou são iguais ou disjuntas.*

Demonstração. Sejam C e D duas componentes conexas de um conjunto pré-cúbico P . Então existem v, w vértices de P tais que $C = P_v$ e $D = P_w$. Suponhamos que $C \cap D \neq \emptyset$. Então existe um vértice $x \in C \cap D$, donde

$$[v] = [x] = [w],$$

pelo que

$$[v] = [w].$$

Logo, $P_v = P_w$. \square

A versão do seguinte teorema para conjuntos cúbicos é enunciada em [4, 2.1.4].

Teorema 3.2.3. *Seja P um conjunto pré-cúbico. Então*

$$\vec{H}_0(P) \cong \vec{\mathbb{Z}}\{P_v \mid v \in P_0\}.$$

Demonstração. Seja $X \subseteq P_0$ o conjunto minimal de vértices tal que

$$\{[x] \mid x \in X\} = \{[v] \mid v \in P_0\}.$$

Pela Proposição 3.2.1, segue que $\{P_v \mid v \in P_0\} \cong \{[v] \mid v \in P_0\}$. Como $\{[x] \mid x \in X\}$ está em bijeção com X , basta provar que

$$\vec{H}_0(P) \cong \vec{\mathbb{Z}}X.$$

Seja $y \in P_0 \setminus X$. Então existe um único $x_y \in X$ tal que

$$[y] = [x_y].$$

Seja $c_y \in C_1(P)$ uma cadeia tal que $dc_y = y - x_y$. Vejamos que o conjunto

$$Y = \{y - x_y \mid y \in P_0 \setminus X\}$$

é uma base do conjunto $B_0(P) = \text{im } d: C_1(P) \rightarrow C_0(P)$, ou seja, que Y é um conjunto gerador e é linearmente independente. De facto, seja $a \in P_1$ uma aresta. Então

$$da = d_1^1 a - d_1^0 a \quad \text{e} \quad [d_1^1 a] = [d_1^0 a].$$

Se $d_1^0 a \in X$ e $d_1^1 a \in X$, então $d_1^0 a = d_1^1 a$ e portanto $da = 0 \in \langle Y \rangle$.

Se $d_1^0 a \in X$ e $d_1^1 a \notin X$, então $d_1^0 a = x_{d_1^1 a}$ e portanto $da = d_1^1 a - d_1^0 a = d_1^1 a - x_{d_1^1 a} \in Y \subseteq \langle Y \rangle$.

Se $d_1^0 a \notin X$ e $d_1^1 a \in X$, então $d_1^1 a = x_{d_1^0 a}$ e portanto

$$-da = -d_1^1 a + d_1^0 a = d_1^0 a - x_{d_1^0 a} \in Y \subseteq \langle Y \rangle.$$

Se $d_1^0 a \notin X$ e $d_1^1 a \notin X$, então $x_{d_1^0 a} = x_{d_1^1 a}$ e portanto

$$da = d_1^1 a - d_1^0 a = (d_1^1 a - x_{d_1^1 a}) - (d_1^0 a - x_{d_1^0 a}) \in \langle Y \rangle.$$

Logo, uma vez que $B_0(P)$ é gerado por dP_1 , segue que Y é um conjunto gerador de $B_0(P)$.

Para mostrar que Y é um conjunto linearmente independente, suponhamos que

$$\sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y (y - x_y) = 0.$$

3.2. COMPONENTES CONEXAS

Então

$$\sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y y - \sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y x_y = 0 \implies \sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y y = \sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y x_y \in \langle X \rangle.$$

Logo, $\sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y y = 0$ e, portanto, para cada $y \in P_0 \setminus X$, $\lambda_y = 0$. Assim, Y é de facto uma base de $B_0(P)$.

Provemos agora que $Y \cup X$ é uma base de $C_0(P)$. Seja $y \in P_0$. Se $y \in X$ então $y \in Y \cup X$, pelo que $y \in \langle Y \cup X \rangle$. Se $y \notin X$, temos $y = y - x_y + x_y \in \langle Y \cup X \rangle$. Logo, $P_0 \subseteq \langle Y \cup X \rangle$. Portanto, como $C_0(P) = \langle P_0 \rangle$, então $Y \cup X$ é também gerador de $C_0(P)$.

Para provar que $Y \cup X$ é linearmente independente, suponhamos que

$$\sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y (y - x_y) + \sum_{x \in X} \mu_x x = 0.$$

Então

$$\sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y y = \sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y x_y - \sum_{x \in X} \mu_x x \in \langle X \rangle \implies \sum_{y \in P_0 \setminus X} \lambda_y y = 0$$

Logo, para cada $y \in P_0 \setminus X$, $\lambda_y = 0$. E, para cada $x \in X$, $\mu_x = 0$.

Portanto, temos a sequência exata curta

$$0 \rightarrow B_0(P) \rightarrow C_0(P) \rightarrow \mathbb{Z}X \rightarrow 0.$$

Donde segue que a aplicação $\phi: \mathbb{Z}X \rightarrow H_0(P)$ definida, para $x \in X$, por $\phi(x) = [x]$ é um isomorfismo de grupos abelianos.

Por fim, vejamos que ϕ é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados $\vec{\mathbb{Z}}X \rightarrow \vec{H}_0(P)$. Como qualquer vértice v é positivo, segue que $[v] \in \vec{H}_0(P)^+$. Logo,

$$\phi(\mathbb{N}X) \subseteq \vec{H}_0(P)^+.$$

Seja agora $\alpha \in \vec{H}_0(P)^+$. Então $\alpha = [z]$, para algum $z \in \vec{Z}_0(P)^+ = \vec{C}_0(P)^+ = \mathbb{N}P_0$. Assim,

$$\alpha \in \left\{ \left[\sum n_i v_i \right] \mid n_i \in \mathbb{N}, \quad v_i \in P_0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \sum n_i [v_i] \mid n_i \in \mathbb{N}, \quad v_i \in P_0 \right\} \\
 &= \left\{ \sum n_i [x_i] \mid n_i \in \mathbb{N}, \quad x_i \in X \right\} \\
 &= \phi(\mathbb{N}X).
 \end{aligned}$$

Logo, $\vec{H}_0(P)^+ = \phi(\mathbb{N}X)$. □

3.3 Homologia dirigida de um produto tensorial

Sejam P e Q conjuntos pré-cúbicos. Definimos a aplicação de grupos abelianos graduados

$$\zeta: \vec{C}_*(P) \otimes \vec{C}_*(Q) \rightarrow \vec{C}_*(P \otimes Q)$$

por $\zeta(x \otimes y) = (x, y)$, onde $x \in P$ e $y \in Q$.

Proposição 3.3.1. *A aplicação ζ é um isomorfismo de complexos de cadeias dirigidos.*

Demonstração. Notemos que os elementos $x \otimes y$, com $x \in P$ e $y \in Q$, formam uma base de $\vec{C}_*(P) \otimes \vec{C}_*(Q)$. Por outro lado, os elementos da forma (x, y) , com $x \in P$ e $y \in Q$, formam uma base de $\vec{C}_*(P \otimes Q)$. Assim, ζ é um isomorfismo de grupos abelianos graduados.

Como os elementos positivos de $\vec{C}_*(P) \otimes \vec{C}_*(Q)$ são as combinações lineares positivas de elementos da forma $x \otimes y$, com $x \in P$ e $y \in Q$ e os elementos positivos de $\vec{C}_*(P \otimes Q)$ são as combinações lineares positivas de elementos da forma (x, y) , com $x \in P$ e $y \in Q$, então ζ e ζ^{-1} preservam os cones positivos.

Logo, ζ é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados. Falta apenas ver que ζ comuta com o operador bordo. Sejam então $m, n \in \mathbb{Z}$, $x \in P_n$ e $y \in Q_m$. Temos

$$\begin{aligned}
 d\zeta(x \otimes y) &= d(x, y) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+m} (-1)^i (d_i^0(x, y) - d_i^1(x, y)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0(x, y) - d_i^1(x, y)) + \sum_{i=n+1}^{n+m} (-1)^i (d_i^0(x, y) - d_i^1(x, y))
 \end{aligned}$$

3.3. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE UM PRODUTO TENSORIAL

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (-1)^i ((d_i^0 x, y) - (d_i^1 x, y)) + \sum_{i=n+1}^{n+m} (-1)^i (x, d_{i-n}^0 y) - (x, d_{i-n}^1 y) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^i ((d_i^0 x, y) - (d_i^1 x, y)) + (-1)^n \sum_{i=n+1}^{n+m} (-1)^{i-n} (x, d_{i-n}^0 y) - (x, d_{i-n}^1 y) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^i ((d_i^0 x, y) - (d_i^1 x, y)) + (-1)^n \sum_{i=1}^m (-1)^i (x, d_i^0 y) - (x, d_i^1 y) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^i (\zeta(d_i^0 x \otimes y) - \zeta(d_i^1 x \otimes y)) \\
&\quad + (-1)^n \sum_{i=1}^m (-1)^i (\zeta(x \otimes d_i^0 y) - \zeta(x \otimes d_i^1 y)) \\
&= \zeta \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0 x \otimes y - d_i^1 x \otimes y) + (-1)^n \sum_{i=1}^m (-1)^i (x \otimes d_i^0 y - x \otimes d_i^1 y) \right) \\
&= \zeta \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0 x - d_i^1 x) \otimes y + (-1)^n \sum_{i=1}^m (-1)^i x \otimes (d_i^0 y - d_i^1 y) \right) \\
&= \zeta \left(\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0 x - d_i^1 x) \right) \otimes y + (-1)^n x \otimes \sum_{i=1}^m (-1)^i (d_i^0 y - d_i^1 y) \right) \\
&= \zeta(dx \otimes y + (-1)^n x \otimes dy) \\
&= \zeta d(x \otimes y). \quad \square
\end{aligned}$$

Cross-product dirigido

O *cross-producto dirigido* de dois conjuntos pré-cúbicos P e Q é o morfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados

$$\times = \zeta_* \circ \kappa: \vec{H}_*(P) \otimes \vec{H}_*(Q) \rightarrow \vec{H}_*(P \otimes Q).$$

Iremos escrever $[a] \times [b]$ para denotar $\times([a] \otimes [b])$, onde $[a] \in \vec{H}_*(P)$ e $[b] \in \vec{H}_*(Q)$.

Pelas Proposições 2.2.3 e 3.3.1 temos o seguinte resultado que corresponde ao Teorema [4, 2.2.4].

Teorema 3.3.2. *O cross-producto dirigido de dois conjuntos pré-cúbicos P e Q é injetivo em cada grau e se $H_*(P)$ ou $H_*(Q)$ for livre de torção, então é bijetivo.*

Exemplos 3.3.3. (i) Recordemos o conjunto pré-cúbico que descreve o toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \otimes \mathbb{S}^1$, definido em 1.1.3 (i). Recordemos as homologias cúbica e dirigida calculadas em 1.2.3 (iv) e 3.1.1 (iii), respetivamente. Consideremos o cross-produto

$$\vec{H}_*(\mathbb{S}^1) \otimes \vec{H}_*(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\times} \vec{H}_*(\mathbb{T})$$

definido por $[a] \times [a] = [(a, a)]$, $[a] \times [u] = [(a, u)]$, $[u] \times [a] = [(u, a)]$, $[u] \times [u] = [(u, u)]$, que, por definição, é um morfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados.

Uma vez que \times é uma bijeção em cada grau, temos um isomorfismo de grupos abelianos graduados.

Vejamos que \times é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados. Ora, para $(a, a) \in \mathbb{T}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$n[(a, a)] = n([a] \times [a]) = n\zeta_*\kappa([a] \otimes [a]) = \zeta_*\kappa(n[a] \otimes [a]) = \zeta_*\kappa([na] \otimes [a]) = [na] \times [a],$$

logo

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(\mathbb{T})^+ &= \{n[(a, a)] \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\subseteq \times((\vec{H}_0(\mathbb{S}^1) \otimes \vec{H}_0(\mathbb{S}^1))^+) \\ &= \times((\vec{H}_*(\mathbb{S}^1) \otimes \vec{H}_*(\mathbb{S}^1))_0^+). \end{aligned}$$

Analogamente, para $i \in \{1, 2\}$,

$$\vec{H}_i(\mathbb{T})^+ \subseteq \times((\vec{H}_*(\mathbb{S}^1) \otimes \vec{H}_*(\mathbb{S}^1))_i^+).$$

Logo, no caso do toro, o cross-produto dirigido é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados.

3.3. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE UM PRODUTO TENSORIAL

(ii) Consideremos o conjunto pré-cúbico P definido por

$$P_0 = \{v, w\}$$

$$P_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

onde os operadores bordo são dados por

$$d_1^0 x_i = d_1^1 y_i = v$$

e

$$d_1^1 x_i = d_1^0 y_i = w,$$

onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Uma vez que $C_1(P) \cong \mathbb{Z} \cdot P_1$ é um grupo abeliano livre, segue que o subgrupo $Z_1(P)$ de $C_1(P)$ é ainda um grupo abeliano livre [8, p.880]. Por outro lado, como $B_1(P) = 0$, $Z_1(P) \cong H_1(P)$. Logo, $H_1(P)$ é um grupo abeliano livre e, portanto, é livre de torção.

Mostramos no entanto que o cross-produto dirigido

$$\vec{H}_*(P) \otimes \vec{H}_*(P) \rightarrow \vec{H}_*(P \otimes P)$$

não é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados. Por definição, o complexo de cadeias cúbico de P é dado por

$$C_0(P) = \mathbb{Z} \cdot \{v, w\};$$

$$C_1(P) = \mathbb{Z} \cdot \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\};$$

$$C_n(P) = 0, \quad n \neq 0, 1,$$

e os operadores bordo são dados por

$$dx_i = w - v \quad \text{e} \quad dy_i = v - w, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Assim, para todos $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x_i - x_j$, $y_i - y_j$ e $x_i + y_j$ são ciclos. Consideremos o 2-ciclo z definido em $\vec{C}_*(P) \otimes \vec{C}_*(P)$ por

$$\begin{aligned} z = & (x_1 - x_2) \otimes (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \otimes (x_1 + y_1) \\ & + (x_1 - x_4) \otimes (x_2 + y_2) + (x_3 + y_1) \otimes (x_3 + y_1) \\ & + (x_3 + y_2) \otimes (x_1 + y_3) + (x_4 + y_3) \otimes (x_4 + y_2) + (x_4 + y_4) \otimes (x_2 + y_4). \end{aligned}$$

O ciclo z é positivo. De facto,

$$\begin{aligned} z = & x_1 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2 \\ & + x_2 \otimes x_1 + x_2 \otimes y_1 - x_3 \otimes x_1 - x_3 \otimes y_1 \\ & + x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes y_2 - x_4 \otimes x_2 - x_4 \otimes y_2 \\ & + x_3 \otimes x_3 + x_3 \otimes y_1 + y_1 \otimes x_3 + y_1 \otimes y_1 \\ & + x_3 \otimes x_1 + x_3 \otimes y_3 + y_2 \otimes x_1 + y_2 \otimes y_3 \\ & + x_4 \otimes x_4 + x_4 \otimes y_2 + y_3 \otimes x_4 + y_3 \otimes y_2 \\ & + x_4 \otimes x_2 + x_4 \otimes y_4 + y_4 \otimes x_2 + y_4 \otimes y_4 \\ = & x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2 \\ & + x_2 \otimes y_1 \\ & + x_1 \otimes y_2 \\ & + x_3 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_3 + y_1 \otimes y_1 \\ & + x_3 \otimes y_3 + y_2 \otimes x_1 + y_2 \otimes y_3 \end{aligned}$$

3.3. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE UM PRODUTO TENSORIAL

$$\begin{aligned}
 &+ x_4 \otimes x_4 + y_3 \otimes x_4 + y_3 \otimes y_2 \\
 &+ x_4 \otimes y_4 + y_4 \otimes x_2 + y_4 \otimes y_4.
 \end{aligned}$$

Logo, $[z] \in \vec{H}_2(\vec{C}_*(P) \otimes \vec{C}_*(P))^+$. Seja α um elemento positivo de grau 2 de $\vec{H}_*(P) \otimes \vec{H}_*(P)$. Vejamos que $\kappa(\alpha) \neq [z]$. Sejam $z_1, \dots, z_r, z'_1, \dots, z'_r$ ciclos positivos em $\vec{C}_1(P)$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^r [z_i] \otimes [z'_i]$. Para todos $i \in \{1, \dots, r\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, sejam $n_{ij}, m_{ij}, n'_{ij}, m'_{ij} \in \mathbb{N}$ tais que

$$z_i = n_{i1}x_1 + n_{i2}x_2 + n_{i3}x_3 + n_{i4}x_4 + m_{i1}y_1 + m_{i2}y_2 + m_{i3}y_3 + m_{i4}y_4$$

e

$$z'_i = n'_{i1}x_1 + n'_{i2}x_2 + n'_{i3}x_3 + n'_{i4}x_4 + m'_{i1}y_1 + m'_{i2}y_2 + m'_{i3}y_3 + m'_{i4}y_4.$$

É claro que $\kappa(\alpha) = [\sum_{i=1}^r z_i \otimes z'_i]$. Suponhamos, por contradição, que

$$[z] = [\sum_{i=1}^r z_i \otimes z'_i].$$

Uma vez que $(\vec{C}_*(P) \otimes \vec{C}_*(P))_3 = 0$, segue que $z = \sum_{i=1}^r z_i \otimes z'_i$. Como z contém o termo $x_1 \otimes x_1$ com coeficiente 1, então existe um índice k tal que $n_{k1} = n'_{k1} = 1$. Uma vez que z_k é um ciclo, então pelo menos um dos coeficientes m_{kj} é não nulo. Como $z_k \otimes z'_k$ contém o termo $y_j \otimes x_1$ com coeficiente não nulo, o mesmo é válido para $\sum_{i=1}^r z_i \otimes z'_i$ e, portanto, para z . A única possibilidade é quando $j = 2$.

Analogamente, como z'_k é um ciclo, pelo menos um dos coeficientes m'_{kj} é não nulo. Como $z_k \otimes z'_k$ contém o termo $x_1 \otimes y_j$ com coeficiente não nulo, o mesmo é válido para a soma $\sum_{i=1}^r z_i \otimes z'_i$ e, portanto para z . Novamente, a única possibilidade é quando $j = 2$. Segue então que $z_k \otimes z'_k$ contém o termo $y_2 \otimes y_2$ com coeficiente não nulo. Consequentemente, o mesmo acontece a z . Como z não contém o termo $y_2 \otimes y_2$,

obtivemos uma contradição. Logo,

$$[z] \neq \left[\sum_{i=1}^r z_i \otimes z'_i \right] = \kappa(\alpha).$$

Portanto, não existe nenhuma classe positiva α em $\vec{H}_*(P) \otimes \vec{H}_*(P)$ tal que o cross-produto satisfaz $\times(\alpha) = \zeta_*([z]) \in \vec{H}_2(P \otimes P)^+$.

Assim, temos que o cross-produto dirigido nem sempre é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados, mesmo que a homologia seja livre de torção.

3.4 Invariância dihomotópica

Um morfismo injetivo de conjuntos pré-cúbicos $f: P \rightarrow Q$ diz-se uma *dicofibração acíclica* se

1. induz um isomorfismo em homologia;
2. a aplicação de cadeias dirigida $\vec{C}_*(f): \vec{C}_*(P) \rightarrow \vec{C}_*(Q)$ admite uma retração, isto é, se existir uma aplicação de cadeias dirigida $r: \vec{C}_*(Q) \rightarrow \vec{C}_*(P)$ tal que

$$r \circ \vec{C}_*(f) = id_{\vec{C}_*(P)}.$$

Exemplos 3.4.1. (i) Cilindro

Seja P um conjunto pré-cúbico. A inclusão

$$\begin{aligned} j_0: P &\rightarrow P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket \\ x &\mapsto (x, \langle 0 \rangle) \end{aligned}$$

é uma dicofibração acíclica.

É claro que j_0 é injetiva. A aplicação $j_{0*}: H_*(P) \rightarrow H_*(P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket)$ é dada pela

3.4. INVARIÂNCIA DIHOMOTÓPICA

composta

$$H_*(P) \xrightarrow{\phi} H_*(P) \otimes (\mathbb{Z}, 0) \xrightarrow{id_{H_*(P)} \otimes \eta_*} H_*(P) \otimes H_*([0, 1]) \xrightarrow{\times} H_*(P \otimes [0, 1]),$$

onde \times é o cross-produto e as aplicações ϕ e η_* são dadas, respetivamente, por $\phi(\varepsilon) = \varepsilon \otimes 1$ e $\eta_*(1) = [\langle 0 \rangle]$. De facto, seja $z = \sum_i \alpha_i x_i$ um ciclo em $C_*(P)$ com $x_i \in P, \forall i$. Temos

$$\begin{aligned} \times \circ (id_{H_*(P)} \otimes \eta_*) \circ \phi([z]) &= \times \circ (id_{H_*(P)} \otimes \eta_*)([z] \otimes 1) \\ &= \times([z] \otimes [\langle 0 \rangle]) \\ &= \zeta_* \circ \kappa([z] \otimes [\langle 0 \rangle]) \\ &= \zeta_*([z \otimes \langle 0 \rangle]) \\ &= \zeta_*([\sum_i \alpha_i x_i \otimes \langle 0 \rangle]) \\ &= \zeta_*([\sum_i \alpha_i x_i \otimes \langle 0 \rangle]) \\ &= [\zeta(\sum_i \alpha_i x_i \otimes \langle 0 \rangle)] \\ &= [\sum_i \alpha_i \zeta(x_i \otimes \langle 0 \rangle)] \\ &= [\sum_i \alpha_i (x_i, \langle 0 \rangle)] \\ &= [\sum_i \alpha_i j_0(x_i)] \\ &= j_{0*}[\sum_i \alpha_i x_i] \\ &= j_{0*}([z]). \end{aligned}$$

Uma vez que $H_*([0, 1])$ é livre de torção, por 3.3.2 segue que o cross-produto é um isomorfismo de grupos abelianos graduados. Sabemos que o produto tensorial é functorial, pelo que $id_{H_*(P)} \otimes \eta_*$ é um isomorfismo. Por fim, temos que ϕ é um isomorfismo. De facto, em grau n , ϕ é o isomorfismo canónico $H_n(P) \rightarrow H_n(P) \otimes \mathbb{Z}$.

Logo, j_{0*} é ainda um isomorfismo.

Consideremos a aplicação $r: C_*(P \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket) \rightarrow C_*(P)$ definida, para cada $x \in P$, por $r(x, \langle 0 \rangle) = x$, $r(x, \langle 1 \rangle) = x$ e $r(x, \langle 0, 1 \rangle) = 0$.

Vejamos que r é uma aplicação de cadeias. Seja então $x \in P_n$ ($n \geq 1$). Temos

$$\begin{aligned}
 rd(x, \langle 0 \rangle) &= r\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0(x, \langle 0 \rangle) - d_i^1(x, \langle 0 \rangle))\right) \\
 &= r\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i ((d_i^0 x, \langle 0 \rangle) - (d_i^1 x, \langle 0 \rangle))\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (r(d_i^0 x, \langle 0 \rangle) - r(d_i^1 x, \langle 0 \rangle)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0 x - d_i^1 x) \\
 &= dx \\
 &= dr(x, \langle 0 \rangle).
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $rd(x, \langle 1 \rangle) = dr(x, \langle 1 \rangle)$.

Seja $x \in P_n$ ($n \geq 0$). Temos

$$\begin{aligned}
 rd(x, \langle 0, 1 \rangle) &= r\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (d_i^0(x, \langle 0, 1 \rangle) - d_i^1(x, \langle 0, 1 \rangle))\right) \\
 &= r\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (d_i^0(x, \langle 0, 1 \rangle) - d_i^1(x, \langle 0, 1 \rangle))\right) \\
 &\quad + (-1)^{n+1} (d_{n+1}^0(x, \langle 0, 1 \rangle) - d_{n+1}^1(x, \langle 0, 1 \rangle)) \\
 &= r\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i ((d_i^0 x, \langle 0, 1 \rangle) - (d_i^1 x, \langle 0, 1 \rangle))\right) \\
 &\quad + (-1)^{n+1} ((x, d_1^0 \langle 0, 1 \rangle) - (x, d_1^1 \langle 0, 1 \rangle))
 \end{aligned}$$

3.4. INVARIÂNCIA DIHOMOTÓPICA

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (-1)^i (r(d_i^0 x, \langle 0, 1 \rangle) - r(d_i^1 x, \langle 0, 1 \rangle)) \\
&+ (-1)^{n+1} (r(x, \langle 0 \rangle) - r(x, \langle 1 \rangle)) \\
&= 0 + (-1)^{n+1} (x - x) \\
&= 0 \\
&= dr(x, \langle 0, 1 \rangle).
\end{aligned}$$

Assim, r é de facto uma aplicação de complexos de cadeias.

Vejamus que r é uma aplicação de cadeias dirigida. De facto, como os elementos da base do complexo de cadeias do cilindro $(x, \langle 0 \rangle)$, $(x, \langle 1 \rangle)$ e $(x, \langle 0, 1 \rangle)$, são enviados, por r , para elementos positivos do complexo de cadeias $C_*(P)$, então r preserva a pré-ordem.

Finalmente, dado $x \in P$,

$$r \circ \vec{C}_*(j_0)(x) = r(x, \langle 0 \rangle) = x = id_{\vec{C}_*(P)}(x).$$

Logo, r é uma retração de $\vec{C}_*(j_0)$.

(ii) Fita de Möbius

Consideremos a Fita de Möbius descrita pelo conjunto pré-cúbico definido em 1.1.1

(iv).

Seja X o conjunto pré-cúbico que representa a circunferência dirigida do meio da Fita de Möbius, ou seja, o conjunto pré-cúbico

$$X_0 = \{c\}, \quad X_1 = \{cc\}, \quad X_n = \emptyset, \quad \forall n \geq 2,$$

onde os operadores bordo são definidos por

$$d_1^0: X_1 \rightarrow X_0$$

$$cc \mapsto c$$

$$d_1^1: X_1 \rightarrow X_0$$

$$cc \mapsto c.$$

Então a inclusão

$$i: X \rightarrow \mathbb{M}$$

é uma dicofibração acíclica. De facto, é imediato que i é injetiva. Consideremos a seguinte aplicação $r: C_*(\mathbb{M}) \rightarrow C_*(X)$ definida, para elementos da base, por

$$r(a) = r(b) = r(c) = c;$$

$$r(ac) = r(bc) = 0;$$

$$r(ab) = r(ba) = r(cc) = cc;$$

$$r(x) = r(y) = 0.$$

Vejamos que r é uma retração de $i_*: \vec{C}_*(X) \rightarrow \vec{C}_*(\mathbb{M})$.

Ora,

$$d \circ r(ac) = d(r(ac)) = d(0) = 0 = c - c = r(c - a) = r(d(ac)) = r \circ d(ac).$$

Analogamente, para os restantes casos, temos $r \circ d = d \circ r$. Logo, r é uma aplicação de cadeias.

Uma vez que r envia cada elemento de \mathbb{M} para um elemento positivo de $\vec{C}_*(X)$, r é uma aplicação de cadeias dirigida

$$r: \vec{C}_*(\mathbb{M}) \rightarrow \vec{C}_*(X).$$

3.4. INVARIÂNCIA DIHOMOTÓPICA

Temos

$$\begin{aligned} r \circ i_*(c) &= c = id_{\vec{C}_*(X)}(c) \\ r \circ i_*(cc) &= cc = id_{\vec{C}_*(X)}(cc), \end{aligned}$$

Logo, r é, de facto, uma retração dirigida de $i_*: \vec{C}_*(X) \rightarrow \vec{C}_*(\mathbb{M})$.

Vejam, por fim, que i induz um isomorfismo em homologia. Consideremos a aplicação $h: \vec{C}_*(\mathbb{M}) \rightarrow \vec{C}_*(\mathbb{M})$ de grau 1 definida por $h(a) = ac$, $h(b) = bc$, $h(c) = 0$, $h(ab) = -x$, $h(ba) = -y$, $h(ac) = h(bc) = h(cc) = 0$, $h(x) = h(y) = 0$. Temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} (dh + hd)(bc) &= dh(bc) + hd(bc) \\ &= d(0) + h(c - b) \\ &= h(c) - h(b) \\ &= 0 - bc \\ &= i_*r(bc) - bc \\ &= i_* \circ r(bc) - id_{\vec{C}_*(\mathbb{M})}(bc). \end{aligned}$$

De modo semelhante, para os restantes casos,

$$dh + hd = i_* \circ r - id_{\vec{C}_*(\mathbb{M})}.$$

Logo, $i_* \circ r \simeq id_{\vec{C}_*(\mathbb{M})}$.

Assim, de $r \circ i_* = id_{\vec{C}_*(X)}$ e $i_* \circ r \simeq id_{\vec{C}_*(\mathbb{M})}$ segue que i induz um isomorfismo em homologia.

Proposição 3.4.2. *Uma dicofibração acíclica induz um isomorfismo em homologia dirigida.*

Demonstração. Seja $i: P \rightarrow Q$ uma dicofibração acíclica. Então, por definição, i induz um isomorfismo em homologia, $H_*(i): H_*(P) \rightarrow H_*(Q)$, mais precisamente, um isomorfismo de grupos abelianos graduados. Mais, temos que i induz a aplicação de cadeias dirigida $\vec{C}_*(i): \vec{C}_*(P) \rightarrow \vec{C}_*(Q)$ que induz o morfismo de grupos abelianos pré-ordenados graduados $\vec{H}_*(i): \vec{H}_*(P) \rightarrow \vec{H}_*(Q)$.

Por definição, existe uma retração r de $\vec{C}_*(i)$, isto é, uma aplicação de cadeias dirigida $r: \vec{C}_*(Q) \rightarrow \vec{C}_*(P)$ tal que $r \circ \vec{C}_*(i) = id_{\vec{C}_*(P)}$. Assim, r induz a aplicação de grupos abelianos pré-ordenados graduados $r_*: \vec{H}_*(Q) \rightarrow \vec{H}_*(P)$ e temos $r_* \circ \vec{H}_*(i) = id_{\vec{H}_*(P)}$. Portanto, r_* é a aplicação inversa do isomorfismo $H_*(i): H_*(P) \rightarrow H_*(Q)$. Logo, $r_*: \vec{H}_*(Q) \rightarrow \vec{H}_*(P)$ e $\vec{H}_*(i): \vec{H}_*(P) \rightarrow \vec{H}_*(Q)$ são isomorfismos inversos de grupos abelianos pré-ordenados graduados. \square

Observação 3.4.3. Pela Proposição anterior, a dicofibração acíclica

$$j_0: \llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes k} \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes k+1}$$

induz um isomorfismo em homologia dirigida. Indutivamente, temos que a sequência de dicofibrações acíclicas

$$\llbracket 0, 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes 2} \dots \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n}$$

induz um isomorfismo em homologia dirigida

$$\vec{H}_*(\llbracket 0, 1 \rrbracket) \rightarrow \vec{H}_*(\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n}).$$

Assim,

$$\vec{H}_i(\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, \\ \{0\}, & i \neq 0. \end{cases}$$

Este facto permite-nos calcular a homologia dirigida da esfera Σ^n , $n \geq 1$.

3.4. INVARIÂNCIA DIHOMOTÓPICA

De facto, comecemos por notar que

$$\Sigma^n = \llbracket 0, 1 \rrbracket_{\leq n}^{\otimes n+1} = \llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1} \setminus \{\iota_{n+1}\} \subseteq \llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1}.$$

Ora, para graus iguais ou inferiores a n , temos que Σ^n e $\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1}$ coincidem, logo

$$\vec{H}_m(\Sigma^n) = \vec{H}_m(\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1}), \quad m < n.$$

Vejamos agora o caso da homologia da esfera em dimensão n . Ora, temos que

$$x := d\iota_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (d_i^0 \iota_{n+1} - d_i^1 \iota_{n+1})$$

é um ciclo em $\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1}$ e, portanto é também um ciclo em Σ^n .

Seja $z \in Z_n(\Sigma^n)$. Então $z \in Z_n(\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1}) = B_n(\llbracket 0, 1 \rrbracket^{\otimes n+1})$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que

$$z = d\lambda\iota_{n+1} = \lambda d\iota_{n+1} = \lambda x.$$

Portanto, $Z_n(\Sigma^n) = \langle x \rangle$. Como $B_n(\Sigma^n) = \{0\}$,

$$H_n(\Sigma^n) \cong \mathbb{Z} \cdot \{[x]\}.$$

Os elementos $d_i^k \iota_{n+1} = (\langle 0, 1 \rangle, \dots, \langle k \rangle, \dots, \langle 0, 1 \rangle)$ formam uma base de $C_n(\Sigma^n)$. Assim,

$$\vec{Z}_n(\Sigma^n)^+ = Z_n(\Sigma^n) \cap \vec{C}(\Sigma^n)^+ = \langle x \rangle \cap \mathbb{N} \cdot \Sigma_n^n = \{0\}.$$

Portanto, $\vec{H}_n(\Sigma^n)^+ = \{[z] \mid z \in \vec{Z}_n(\Sigma^n)^+\} = \{0\}$. Logo,

$$\vec{H}_n(\Sigma^n) = (\mathbb{Z}, \leq_{\{0\}}).$$

Por definição, para $m > n$, $\Sigma_m^n = \emptyset$ e, portanto, $\vec{H}_m(\Sigma^n) = \{0\}$.

Resumindo, temos

$$\vec{H}_i(\Sigma^n) \cong \begin{cases} \vec{\mathbb{Z}}, & i = 0, \\ (\mathbb{Z}, \leq_0), & i = n, \\ \{0\}, & i \neq 0, n. \end{cases}$$

Equivalência de dihomotopia

Dois conjuntos pré-cúbicos P e Q dizem-se *ter o mesmo tipo de dihomotopia* se existir uma sequência finita de dicofibrações acíclicas

$$P \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdots \leftarrow \cdot \rightarrow Q.$$

Temos então o seguinte Teorema da Invariância, que é uma consequência imediata da Proposição 3.4.2:

Teorema 3.4.4. *Se dois conjuntos pré-cúbicos P e Q têm o mesmo tipo de dihomotopia, então*

$$\vec{H}_*(P) \cong \vec{H}_*(Q).$$

Exemplos 3.4.5. (i) Consideremos a dicofibração acíclica $j_0: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket$. Recordemos a dicofibração acíclica da circunferência dirigida do meio na Fita de Möbius

$$i: X \rightarrow \mathbb{M}$$

definido em 3.4.1(ii). Notemos que $X = \mathbb{S}^1$.

Então temos a seguinte sequência finita de dicofibrações acíclicas

$$\mathbb{S}^1 \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket \xleftarrow{j_0} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{i} \mathbb{M}.$$

Pelo Teorema anterior, $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 \otimes \llbracket 0, 1 \rrbracket$ e \mathbb{M} têm o mesmo tipo de dihomotopia, pelo

3.5. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE UM PUSHOUT

que

$$\vec{H}_*(\mathbb{S}^1 \otimes [0, 1]) \cong \vec{H}_*(\mathbb{M}) \cong \vec{H}_*(\mathbb{S}^1).$$

- (ii) Como \mathbb{O}^1 e \mathbb{S}^1 não têm a mesma homologia dirigida, não têm o mesmo tipo de dihomotopia.

3.5 Homologia dirigida de um pushout

Nesta secção estabelecemos um resultado sobre a homologia dirigida de um pushout de conjuntos pré-cúbicos, baseado numa adaptação do Teorema [4, Thm. 2.2.2].

Lema 3.5.1. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

um diagrama comutativo de grupos abelianos. Temos as seguintes propriedades:

- (i) *A composta*

$$A \xrightarrow{(i, -f)} B \oplus C \xrightarrow{g+j} D$$

é nula, isto é, $\text{im}(i, -f) \subseteq \ker(g + j)$.

- (ii) *Se o diagrama for um pushout, então a aplicação induzida*

$$\begin{aligned} B \oplus C / \text{im}(i, -f) &\rightarrow D \\ [(b, c)] &\mapsto g(b) + j(c) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

- (iii) *Se o diagrama for um pushout e i injetiva, então a sequência*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{(i, -f)} B \oplus C \xrightarrow{g+j} D \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. (i) Uma vez que $g \circ i = j \circ f$, dado $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} (g + j) \circ (i, -f)(a) &= (g + j)(i(a), -f(a)) \\ &= g(i(a)) + j(-f(a)) \\ &= g \circ i(a) - j \circ f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\text{im}(i, -f) \subseteq \ker(g + j)$.

(ii) Consideremos os homomorfismos

$$\begin{aligned} p: B &\rightarrow B \oplus C / \text{im}(i, -f) \\ b &\mapsto [(b, 0)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q: C &\rightarrow B \oplus C / \text{im}(i, -f) \\ c &\mapsto [(0, c)]. \end{aligned}$$

Dado $a \in A$,

$$(i(a), 0) - (0, f(a)) = (i(a), -f(a)) \in \text{im}(i, -f).$$

Assim,

$$p(i(a)) = [(i(a), 0)] = [(0, f(a))] = q(f(a)).$$

Portanto, temos o diagrama comutativo de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ i \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{p} & B \oplus C / \text{im}(i, -f) \end{array}$$

3.5. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE UM PUSHOUT

Vejamos que este diagrama é um pushout. Sejam $\phi: B \rightarrow E$ e $\psi: C \rightarrow E$ homomorfismos de grupos abelianos tais que $\phi \circ i = \psi \circ f$. Por (i), temos que $\text{im}(i, -f) \subseteq \ker(\phi + \psi)$. Consideremos o homomorfismo canónico

$$h: B \oplus C / \text{im}(i, -f) \rightarrow E$$

$$[(b, c)] \mapsto \phi(b) + \psi(c).$$

Para $b \in B$,

$$h \circ p(b) = h([(b, 0)]) = \phi(b)$$

e, para $c \in C$,

$$h \circ q(c) = h([(0, c)]) = \psi(c).$$

Por fim, vejamos que o homomorfismo h é único. Seja então $k: B \oplus C / \text{im}(i, -f) \rightarrow E$ um homomorfismo tal que $k \circ p = \phi$ e $k \circ q = \psi$. Para $(b, c) \in B \oplus C$,

$$\begin{aligned} k([(b, c)]) &= k([(b, 0) + (0, c)]) \\ &= k([(b, 0)]) + k([(0, c)]) \\ &= k \circ p(b) + k \circ q(c) \\ &= \phi(b) + \psi(c) \\ &= h([(b, c)]). \end{aligned}$$

Assim, o diagrama acima é, de facto, um pushout.

Uma vez que o diagrama do enunciado é também um pushout, temos que a aplicação canónica

$$B \oplus C / \text{im}(i, -f) \rightarrow D$$

$$[(b, c)] \mapsto g(b) + j(c).$$

é um isomorfismo.

(iii) Uma vez que i é injetiva, $(i, -f)$ é ainda uma aplicação injetiva. Por (i), temos que $\text{im}(i, -f) \subseteq \ker(g + j)$. Por (ii), a aplicação

$$\begin{aligned} B \oplus C / \text{im}(i, -f) &\rightarrow D \\ [(b, c)] &\mapsto g(b) + j(c). \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Assim, $g + j$ é sobrejetiva.

Dado $(b, c) \in B \oplus C$, se

$$(g + j)(b, c) = g(b) + j(c) = 0,$$

i.e., $[(b, c)] = 0$, temos $(b, c) \in \text{im}(i, -f)$. Logo, $\ker(g + j) \subseteq \text{im}(i, -f)$. □

Teorema 3.5.2. *Consideremos um diagrama de conjuntos pré-cúbicos*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & P \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{g} & Q \end{array}$$

que é um pushout de conjuntos em cada dimensão (e então um pushout de conjuntos pré-cúbicos). Suponhamos que i é um morfismo injetivo e seja $m \geq 0$ tal que $A_m = \emptyset$. Então, para todo o $n > m$,

$$\begin{aligned} g_* + j_*: \vec{H}_n(B) \oplus \vec{H}_n(P) &\rightarrow \vec{H}_n(Q) \\ ([x], [y]) &\mapsto g_*([x]) + j_*([y]). \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados.

Demonstração. Uma vez que o funtor de grupos abelianos pré-ordenados livres preserva

3.5. HOMOLOGIA DIRIGIDA DE UM PUSHOUT

pushouts [9, p.87, 119], o diagrama comutativo de complexos de cadeias

$$\begin{array}{ccc} C_*(A) & \xrightarrow{f_*} & C_*(P) \\ i_* \downarrow & & \downarrow j_* \\ C_*(B) & \xrightarrow{g_*} & C_*(Q) \end{array}$$

é um pushout de grupos abelianos em cada grau. De i ser injetiva segue que a aplicação induzida i_* é injetiva. Assim, pelo Lema 3.5.1, temos a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C_*(A) \xrightarrow{(i_*, -f_*)} C_*(B) \oplus C_*(P) \xrightarrow{g_* + j_*} C_*(Q) \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

que induz a longa sequência exata de Mayer-Vietoris em homologia:

$$\dots \xrightarrow{\delta_*} H_n(A) \xrightarrow{(i_*, -f_*)} H_n(B) \oplus H_n(P) \xrightarrow{g_* + j_*} H_n(Q) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots \quad (3.2)$$

Seja agora $n > m$. Uma vez que $A_m = \emptyset$, então $A_{n-1} = A_n = \emptyset$, donde segue que $H_{n-1}(A) = H_n(A) = 0$. Assim, por 3.2 segue que

$$g_* + j_*: H_n(B) \oplus H_n(P) \rightarrow H_n(Q)$$

é um isomorfismo. Uma vez que $g_*: \vec{H}_n(B) \rightarrow \vec{H}_n(Q)$ e $j_*: \vec{H}_n(P) \rightarrow \vec{H}_n(Q)$ são homomorfismos de grupos abelianos pré-ordenados,

$$g_* + j_*: \vec{H}_n(B) \oplus \vec{H}_n(P) \rightarrow \vec{H}_n(Q)$$

é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados. Falta apenas ver que $(g_* + j_*)^{-1}$ é um homomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados. Nesse sentido, vejamos que

$$\vec{H}_n(Q)^+ \subseteq g_* + j_*((\vec{H}_n(B) \oplus \vec{H}_n(P))^+) = g_*(\vec{H}_n(B)^+) + j_*(\vec{H}_n(P)^+).$$

Seja então $\alpha \in \vec{H}_n(Q)^+$. Então existe $z \in \vec{Z}_n(Q)^+ \subseteq \mathbb{N}Q_n$ tal que $\alpha = [z]$. Como $A_n = \emptyset$, Q_n é a reunião disjunta $Q_n = g(B_n) \cup j(P_n)$. Assim,

$$z \in \mathbb{N}Q_n = \mathbb{N}g(B_n) + \mathbb{N}j(P_n) = g_*(\mathbb{N}B_n) + j_*(\mathbb{N}P_n).$$

Portanto, existem $b \in \mathbb{N}B_n$ e $c \in \mathbb{N}P_n$ tais que $z = g_*(b) + j_*(c)$. Temos então

$$0 = dz = dg_*(b) + dj_*(c) = g_*db + j_*dc = g_* + j_*(db, dc).$$

Uma vez que $A_{n-1} = \emptyset$ e o funtor do grupo abeliano livre preserva coprodutos, segue que o homomorfismo

$$g_* + j_*: C_{n-1}(B) \oplus C_{n-1}(P) \rightarrow C_{n-1}(Q)$$

é um isomorfismo. Assim, como $g_* + j_*$ é isomorfismo e $g_* + j_*(db, dc) = 0$, segue que b e c são ciclos, pelo que $b \in \vec{Z}_n(B)^+$ e $c \in \vec{Z}_n(P)^+$. Temos

$$g_*([b]) + j_*([c]) = [g_*(b) + j_*(c)] = [z] = \alpha,$$

pelo que $\alpha \in g_*(\vec{H}_n(B)^+) + j_*(\vec{H}_n(P)^+)$. □

Exemplo 3.5.3. Sejam B e C conjuntos pré-cúbicos e seja $B \sqcup C$ o coproduto entre B e C , isto é, a reunião disjunta em cada grau. Pelos Teoremas 3.2.3 e 3.5.2, temos, para todo o $n \geq 0$, um isomorfismo de grupos abelianos pré-ordenados

$$\vec{H}_n(B \sqcup C) \cong \vec{H}_n(B) \oplus \vec{H}_n(C).$$

Bibliografia

- [1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, 2008.
- [2] L. Fajstrup, E. Goubault, E. Haucourt, S. Mimram, M. Raussen, *Directed Algebraic Topology and Concurrency*, Springer, 2016.
- [3] M. Grandis, *Directed combinatorial homology and noncommutative tori (the breaking of symmetries in algebraic topology)*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 138 (2005), no. 2, 233-262.
- [4] M. Grandis, *Directed Algebraic Topology: Models of Non-Reversible Worlds*, Cambridge University Press, 2009.
- [5] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] P.J. Hilton, S. Wylie, *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1967.
- [7] T. Kahl, *Labeled homology of higher-dimensional automata*, Journal of Applied and Computational Topology 2 (2018), no.3-4, 271–300.
- [8] S. Lang, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
- [9] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, 1998.

BIBLIOGRAFIA

- [10] W.S. Massey, *Singular Homology Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 70, Springer-Verlag, 1980.