

**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Carolina Fernandes Monte

## **Classificação e Otimização de Portefólios**

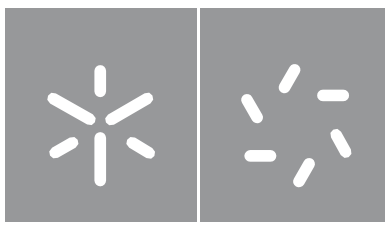
**Classificação e Otimização de Portefólios**

Carolina Monte

UMinho | 2022

dezembro de 2022





**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Carolina Fernandes Monte

## **Classificação e Otimização de Portefólios**

Dissertação de Mestrado  
Estatística para Ciência de  
Dados

Trabalho efetuado sob a orientação da  
**Professora Doutora Irene Vitória Ribeiro de Brito**

---

## **DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS**

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

### ***Licença concedida aos utilizadores deste trabalho***



**Atribuição  
CC BY**

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à Professora Irene Brito pelas suas inúmeras contribuições para esta dissertação: a investigação, as muitas discussões, a sua ajuda inapreciável com o tema abordado na tese, e, em última análise, a sua partilha de conhecimento para comigo.

Devo agradecer à Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) e, por conseguinte, à entidade financiada o Centro de Matemática da Universidade do Minho (CMAT) pela bolsa de investigação UIDB/00013/2020.

Quero ainda expressar a minha gratidão a todos os Professores que se cruzaram e contribuíram para a minha formação e desenvolvimento profissional e pessoal.

Expresso, também, o carinho e o agradecimento a todos os meus amigos pelas alegrias que presenciei e/ou vivi na universidade.

Devo agradecer à minha família, o seu apoio constante durante todo o projeto e pelo facto de serem os meus admiradores mais dedicados.

Por último, com o coração arrebentar de felicidade, desejaria homenagear o meu pai do “coração”. Não há palavras para exprimir o quanto lhe devo e o quanto me inspira e ensina todos os dias com as suas doces palavras.

## **DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE**

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

# Resumo

## Classificação e Otimização de Portefólios

A Teoria de Utilidade Esperada surgiu como alternativa ao princípio do valor esperado, que não descrevia adequadamente a tomada de decisão dos indivíduos. Mais tarde, Von Neumann e Morgenstern mostraram que maximizar a utilidade esperada é equivalente à hipótese de decisão de um indivíduo satisfazendo alguns axiomas. Ora, caso não exista consistência e pragmatismo num dos axiomas prova-se que a teoria de utilidade esperada não modela verdadeiramente a opinião dos indivíduos. Os modelos de risco apresentados associados a medidas de risco permitem avaliar a grandeza da percepção de risco dos objetos e por isso estabelecer uma relação de preferência de risco  $\succsim_R$  entre os mesmos de modo a classificar ações. O modelo de otimização média-variância motivado por Markowitz permite selecionar portefólios eficientes com menor variância e menor valor esperado ou com maior variância e maior valor esperado.

Nesta dissertação são estudados modelos de decisão, medidas de risco clássicas como o valor esperado, a variância, a entropia e a probabilidade de perda, medidas de risco compostas como o valor esperado - variância e a utilidade esperada - entropia e o processo de otimização média - variância. Ao conjunto de dados do *PSI* aplicou-se as medidas de risco mencionadas, que permitem classificar as ações, e o processo de otimização de média-variância e comparou-se os resultados obtidos.

Da implementação das medidas de risco clássicas surgiu a recomendação de utilizar a medida de risco probabilidade de perda como auxiliar nas conclusões que retirar-se-á das restantes medidas de risco clássicas. Quando se aplicou as medidas de risco compostas valor esperado - variância e utilidade esperada - entropia e se comparou os resultados obteve-se uma consistência e algumas flutuações nas classificações das ações. Para o processo de otimização média-variância optou-se por minimizar o risco para um dado retorno esperado. Desta concretização foi determinada a ação que contribui com maior peso para o valor esperado e variância do portefólio de variância mínima global. Da comparação de resultados obteve-se que as ações classificadas como mais preferíveis estão presentes em portefólios eficientes de menor variância e associadas a uma maior ponderação.

**Palavras-Chave:** *PSI*, teoria da utilidade esperada, relação de preferência de risco  $\succsim_R$ , modelos de risco, processo de otimização média-variância de Markowitz.

# Abstract

## Classification and Optimization of Portfolios

The Expected Utility Theory emerged as an alternative to the expected value principle, which did not adequately describe the decision-making process of individuals. Later, von Neumann and Morgenstern showed that maximizing expected utility is equivalent to the decision hypothesis of an individual satisfying some axioms. Now, if there is no consistency and pragmatism in one of the axioms, it is proved that the theory of expected utility does not truly model the opinion of individuals. Risk models presented and associated with risk measures make it possible to assess the magnitude of the risk perception of objects and, consequently, establish a risk preference relation  $\succsim_R$  between them, to classify actions. The mean-variance optimization model motivated by Markowitz allows the selection of efficient portfolios with lower variance and lower expected value or with higher variance and higher expected value.

In this dissertation, decision models, classic risk measures such as expected value, variance, entropy and probability of loss, composite risk measures such as expected value - variance and expected utility - entropy and the mean-variance optimization process, are studied. The risk measures mentioned, which allow classifying the stocks, and the mean-variance optimization process were applied to the PSI dataset, and the results were compared.

The implementation of classic risk measures gave rise to the recommendation to use the risk measure probability of loss as an auxiliary measure for the conclusions that will be drawn from the other classic risk measures. When the composite risk measures expected value - variance and expected utility - entropy were applied and the results compared there was consistency and some fluctuation in the stock ratings. In the mean-variance optimization process, it was chosen to minimize the risk for a given expected return. Thus, the stock was determined, which contributes with a greater weight to the expected value and variance of the portfolio of global minimum variance. The comparison of results showed that the stocks ranked as more preferable are present in the efficient portfolios of lower variance and associated with a higher weighting.

**Keywords:** *PSI*, expected utility theory, risk preference relation  $\succsim_R$ , risk models, Markowitz's mean-variance optimization process.



# Índice

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Glossário</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Acrónimos</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estado da Arte . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	4
1.3 Enquadramento Estrutural . . . . .	4
1.4 <i>Software</i> . . . . .	6
<b>2 Teoria da Utilidade Esperada</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Exórdio do Modelo de Utilidade Esperada . . . . .	10
2.3 Caracterização da Relação de Preferência . . . . .	12
2.4 Representação da Relação de Preferência . . . . .	15
2.5 Noções de Preferência de Risco . . . . .	17
2.6 Paradoxo de Allais . . . . .	24
<b>3 Modelos de Risco</b>	<b>27</b>
3.1 Perceção do Risco . . . . .	27
3.2 Medidas de Risco Simples . . . . .	30
3.3 Medida de Risco Valor Esperado - Variância . . . . .	32
3.4 Medida de Risco de Utilidade Esperada . . . . .	33
3.5 Medida de Risco Utilidade Esperada-Entropia . . . . .	33

---

<b>4</b>	<b>Modelo de Otimização Média-Variância de Portefólios</b>	<b>37</b>
4.1	Motivação . . . . .	37
4.2	Problema de Portefólio de Markowitz . . . . .	39
4.2.1	Definições e notações . . . . .	39
4.2.2	Otimização . . . . .	41
4.2.3	Fronteiras Viável e Eficiente . . . . .	43
4.2.4	Diversificação . . . . .	45
	Fatores internos à sociedade . . . . .	45
	Dimensão do portefólio e Interdependência dos Retornos . . . . .	45
4.3	Otimização de duas ações . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Aplicação ao Mercado de Ações Português - PSI</b>	<b>53</b>
5.1	Recolha e Descrição de Dados . . . . .	54
5.2	Enquadramento Notacional . . . . .	56
5.3	Abordagem Exploratória dos Dados . . . . .	58
5.4	Abordagem Baseada nas Medidas de Risco Simples . . . . .	62
5.5	Abordagem Baseada na Medida de Risco Valor Esperado - Variância . . . . .	66
5.6	Abordagem Baseada na Medida de Risco Utilidade Esperada - Entropia . . . . .	68
5.6.1	Função de utilidade exponencial do tipo <i>S-shaped</i> . . . . .	69
5.6.2	Função de utilidade linear . . . . .	72
5.7	Processo de Otimização Média-Variância . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusão e Trabalho Futuro</b>	<b>81</b>
	<b>Referências</b>	<b>85</b>
	<b>Anexo A Histogramas das ações do conjunto <math>\mathcal{A}</math></b>	<b>89</b>
	<b>Anexo B Resultados para a ação Altri</b>	<b>91</b>
	<b>Anexo C Teste Kolmogorov - Smirnov</b>	<b>93</b>
	<b>Anexo D Funções de utilidade</b>	<b>95</b>
	<b>Anexo E Portefólios Eficientes do modelo de otimização média-variância</b>	<b>97</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação conjunta das funções de utilidade $u_1(w)$ , $u_2(w)$ e $u_3(w)$ : (a) Função de utilidade linear, nomeadamente, $u_1(w) = w$ ; (b) Função de utilidade convexa, nomeadamente, $u_2(w) = w^2$ e da reta secante à função $u_2(w) = w^2$ nos pontos $(5, 5^2)$ e $(20, 20^2)$ ; e, (c) Função de utilidade côncava, nomeadamente, $u_3(w) = w^{1/2}$ e da reta secante à função $u_3(w) = w^{1/2}$ nos pontos $(5, 5^{1/2})$ e $(20, 20^{1/2})$ . . . . .	18
2.2	Representação gráfica de uma função de utilidade convexa $u(\cdot)$ e da reta tangente $l(\cdot)$ à função $u(\cdot)$ no ponto $(\mu, u(\mu))$ . . . . .	21
4.1	Modelo de otimização média-variância: representação gráfica do risco <i>versus</i> retorno do portefólio. Painel esquerdo: representação da fronteira viável, pontos menos viáveis e ponto de variância mínima global. Painel direito: representação da fronteira eficiente e parte da fronteira viável. . . . .	44
4.2	Problema de minimização de 2 ações restrito à Condição 2.. Representação gráfica do valor esperado $(\mu - \mathbb{E}[P])$ <i>versus</i> da variância do portefólio $(\sigma^2 - \text{Var}[P])$ , que contém as fronteiras viável e eficiente e alguns pontos importantes. . . . .	50
4.3	Taxa instantânea de variação de $\mathbb{E}[P]$ em $\text{Var}[P]$ , restrita a valores de $\mathbb{E}[P] > 4,00$ (gráfico-principal). Valor esperado do portefólio <i>versus</i> variância do portefólio (sub-gráfico). . . . .	51
5.1	Histograma da distribuição dos retornos $r_{m,t}$ , para $m = 1, \dots, 18$ e $t = 1, \dots, 1003$ . . . . .	59
5.2	Comparação dos retornos entre ações do conjunto $\mathcal{A}$ , sob a apresentação de caixa-com-bigodes. . . . .	60
5.3	Valor esperado do portefólio <i>versus</i> variância do portefólio do problema de otimização do PSI: fronteiras viável e eficiente e ponto de variância mínima global. . . . .	75
A.1	Histograma das ações $A_m$ , para $m = 1, \dots, 9$ . . . . .	89
A.2	Histograma das ações $A_m$ , para $m = 10, \dots, 18$ . . . . .	90

---

D.1	Representação gráfica das funções de utilidade exponencial do tipo <i>S-shaped</i> para $\kappa = 2$ , $\kappa = 5$ e $\kappa = 10$ . . . . .	95
D.2	Representação gráfica das funções de utilidade exponencial do tipo <i>S-shaped</i> para $\kappa = 1$ e $\kappa = 2$ (painel superior) e as respectivas comparações com a função de utilidade linear (painel inferior) . . . . .	96

# Lista de Tabelas

1.1	Informação relevante sobre as funções utilizadas do <i>package fPortfolio</i> . . . . .	7
3.1	Algumas conclusões de estudos empíricos que avaliam a percepção de risco. . . . .	29
5.1	Composição do índice <i>Portuguese Stock Index (PSI)</i> para o período compreendido entre 17 de julho de 2017 e 16 de julho de 2021 e a respectiva descrição baseada no setor de atividade. . . . .	55
5.2	Representação tabular que estabelece correspondência entre elementos do conjunto $\mathcal{A}$ e os títulos. . . . .	56
5.3	Valores correspondentes ao retorno esperado $\mathbb{E}[R_m^D]$ , variância $\text{Var}[R_m^D]$ , entropia $H(R_m^D)$ e probabilidade de perda $P[R_m^D \leq 0]$ e as respectivas ordenações das ações, segundo os valores obtidos, para $\forall m \in \{1, \dots, 18\}$ . . . . .	62
5.4	Representação tabular dos resultados das estatísticas de dispersão, entropia e variância para as ações do conjunto $\mathcal{A}$ . . . . .	64
5.5	Valores obtidos da aplicação da medida de risco valor esperado - variância $R_{PT}(A_m)$ , $m \in \{1, \dots, 18\}$ , e a respectiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de $\theta \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ . . . . .	67
5.6	Valores obtidos da aplicação da medida de risco utilidade esperada - entropia $R_{UE-E}(A_m)$ , $m = 1, \dots, 18$ , quando se utiliza $\kappa = 1$ , e a respectiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ . . . . .	69
5.7	Valores obtidos da aplicação da medida de risco utilidade esperada - entropia $R_{UE-E}(A_m)$ , $m = 1, \dots, 18$ , quando se utiliza $\kappa = 2$ , e a respectiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ . . . . .	70
5.8	Valores obtidos da aplicação da medida de risco utilidade esperada - entropia $R_{UE-E}(A_m)$ , $m = 1, \dots, 18$ , quando se implementa como função de utilidade a função linear (5.3), e a respectiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ . . . . .	72

5.9	Informações relevantes obtidas para o portfólio de variância mínima global: valor esperado $\mathbb{E}[P^*]$ , variância $\text{Var}[P^*]$ e vetor de pesos ótimo $\omega^*$ . . .	76
5.10	Representação tabular dos cinco primeiros e últimos portfólios eficientes do modelo de otimização média-variância e os respectivos vetores de pesos $\omega^p$ , valores esperados $\mathbb{E}[P_p]$ , variância $\text{Var}[P_p]$ e taxa instantânea de variação de $\mathbb{E}[P_p]$ em $\text{Var}[P_p]$ . . . . .	77
B.1	Resultados das probabilidades $p_{1,c}$ e médias dos retornos $\bar{r}_{1,c}$ da ação $A_1$ para todas as classes $C_c, c = 1, \dots, 20$ . . . . .	91
C.1	Resultados da aplicação do teste Kolmogorov-Smirnov para os retornos das ações $A_m, m = 1, \dots, 18$ ; representação tabular do valor de prova e da decisão estatística para cada ação $A_m$ . . . . .	93
E.1	Representação tabular dos demais portfólios eficientes do modelo de otimização média-variância e os respectivos vetores de pesos $\omega^p$ , valores esperados, variância e taxa instantânea de variação de $\mathbb{E}[P_p]$ em $\text{Var}[P_p]$ , apresentados na Figura 5.10. . . . .	97

# Glossário

## *Investing.com*

é um site de notícias e um dos três principais financeiros globais do mundo, que oferece cotações de mercado e informações sobre ações, futuros, opções e um calendário económico. Encontra-se disponível em <https://www.investing.com/> para todos os utilizadores.

## Lista de Acrónimos

<b><i>PSI</i></b>	<i>Portuguese Stock Index</i>
<b>A</b>	amplitude da amostra
<b>AIQ</b>	amplitude interquartil
<b>ALTRI</b>	Altri SGPS SA
<b>BCP</b>	Banco Comercial Português
<b>CMAT</b>	Centro de Matemática da Universidade do Minho
<b>CMVM</b>	Comissão do Mercado de Valores Mobiliários
<b>CORA</b>	Corticeira Amorim
<b>CTT</b>	CTT Correios de Portugal, SA
<b>EDP</b>	Energias de Portugal
<b>EDPR</b>	Energias de Portugal Renováveis
<b>FCT</b>	Fundação para a Ciência e Tecnologia
<b>IBS</b>	Ibersol Reg
<b>JMT</b>	Jeronimo Martins
<b>K-S</b>	Kolmogorov-Smirnov
<b>MOTA</b>	Mota-Engil
<b>NBA</b>	Novabase
<b>NVGR</b>	<i>The Navigator Company SA</i>
<b>PHRA</b>	Pharol SGPS SA



**RAMA** Ramada Investimentos e Industria SA

**RENE** Rede Energéticas Nacionais

**SEM** Semapa

**u.m** Unidade de medida

**YSO** Sonae

—“Em resumo, nada é tão doce como triunfar sobre a resistência [...], em relação a isso, tenho a ambição dos conquistadores que iam perpetuamente de vitória em vitória e nunca conseguem pôr limite às suas ambições. [...] tenho coração para [...] a Terra inteira; e como Alexandre, poderia desejar novos mundos até aos quais levasse as minhas conquistas [...].”

MOLIÈRE, *Don Juan*

# 1

## Introdução

Esta dissertação culmina o trabalho das atividades desenvolvidas e resultados obtidos durante o período de 6 meses da bolsa de investigação, intitulada de “Classificação e Otimização de Portefólio”, (BI2021-E), orientada pela Professora Doutora Irene Brito e o trabalho realizado durante o 2º ano de Mestrado em Estatística para Ciência de Dados na Universidade do Minho.

Este trabalho elaborado em ambiente curricular e de investigação tem como principais objetivos: (1) estudar modelos de decisão, medidas de incerteza como a entropia e variância e medidas de risco que dependam (ou não) da utilidade esperada como o valor esperado, a probabilidade de perda, o valor esperado - variância e utilidade esperada - entropia; (2) estudar o processo de otimização média-variância de Markowitz; (3) aplicar as medidas de risco mencionadas, que permitem através da ordenação dos valores de risco estabelecer uma relação de preferência para as ações de modo a classificá-las como mais ou menos preferíveis, e o modelo de otimização média - variância ao conjunto de dados *PSI*; e, (4) analisar a relação entre os resultados obtidos para a otimização de portefólios e classificação de ações.

## 1.1 Estado da Arte

Desde há muito tempo que os maiores pensadores e filósofos da Humanidade tentam explicar o comportamento do ser humano perante situações de incerteza. Quando o matemático Blaise Pascal invocou a famosa Aposta, “A Aposta de Pascal”, para convencer os seus amigos que Deus existe, acabou por estabelecer o primeiro princípio matemático para a tomada de decisões: o **princípio do valor esperado**.

Mais tarde, Bernoulli, no ensaio (Bernoulli, 1954), defendeu que o princípio do valor esperado não descrevia a verdadeira tomada de decisão do ser humano em situações de incerteza. Propondo como alternativa a **Teoria de Utilidade Esperada**. Bernoulli defendia que o valor de um objeto não é determinado pelo seu preço, mas pela utilidade que tem para o indivíduo. Em meados do século XX, Von Neumann e Morgenstern com a publicação do artigo “*Theory of Games and Economic Behavior*” (Von Neumann and Morgenstern, 2007) apresentou a primeira estrutura axiomática para teoria de utilidade esperada, identificando as condições necessárias e suficientes (ou axiomas) para a existência de uma função, na forma de utilidade esperada, que descreve a atitude do decisor. A partir dessa função e do conceito *certainty equivalent* ou da desigualdade de *Jensen* tornou-se ainda possível caracterizar os indivíduos quanto ao risco: aversos, neutros ou propensos ao risco. Mais tarde, Maurice Allais, a partir do Paradoxo de Allais, provou que a teoria de utilidade esperada nem sempre modela adequadamente os desejos dos indivíduos por contradizer uma das estruturas axiomáticas definidas por Neumann and Morgenstern (ver, como exemplo, Kaas et al., 2008). Apesar deste facto, a teoria de utilidade esperada ainda é considerada a teoria de decisão mais influente do mundo por se tratar de uma área multidisciplinar encontrando-se presente na teoria de jogos, nas áreas das finanças, seguradoras, estatística, psicologia, ciências políticas, administração e economia.

Até ao momento, pretender-se-ia explicar como o ser humano se comporta em situações de incerteza. Agora, pretende-se nomear quais as variáveis que influenciam e/ou definem a perceção de risco. Estudos mostraram que apenas as “variáveis da teoria de decisão” (as realizações e probabilidades de uma variável aleatória associada a uma ação, que o indivíduo execute, ou lotaria) influenciavam a perceção de risco. Posteriormente, à medida que estudos iam sendo publicados, investigadores como (MacGregor et al., 1999; Sachse et al., 2012 e Weber, 2004 como citado em Nguyen et al., 2019), encontraram evidências “comportamentais” na tomada de decisões. Porém, estudos recentes mostraram à comunidade científica que a combinação de “variáveis comportamentais” e “variáveis da teoria de decisão” explica sensivelmente melhor a perceção de risco dos indivíduos.

À medida que surgiam definições para a percepção de risco, surgiam também modelos de risco que permitiam avaliar a grandeza dessa percepção de risco. Como a designação indica, primitivamente surgiram as seguintes **medidas de risco clássicas**: o valor esperado, a variância, a entropia e a probabilidade de perda (Brachinger and Weber, 1997). Estas medidas de risco que incorporam somente as “variáveis da teoria de decisão” (realizações e probabilidades) quantificam apenas a percepção de risco de forma objetiva. Nomes que subjetivam o indivíduo, tais como, o conhecimento, a confiança e o controle, não têm influência na quantificação da percepção de risco quando se implementa as medidas apresentadas a montante. Já em 1970, Pollatsek and Tversky (Pollatsek and Tversky, 1970) propuseram a **medida de risco valor esperado - variância**, composta, como a denominação sugere, pelas medidas de risco valor esperado e variância e por um parâmetro  $\theta$  indicado pelo indivíduo. Recentemente, em 2005, Yang and Qiu (Yang and Qiu, 2005) desenvolveram uma **medida de risco** baseada na **utilidade esperada e entropia**, considerada pelos autores como uma versão mais realista. Estudos empíricos mostraram para alguns problemas de decisão, por exemplo, para o Paradoxo de Allais, resultados e interpretações razoáveis. As duas medidas de risco compostas apresentam e quantificam a percepção de risco de uma forma objetiva e subjetiva. Para a primeira, a objetividade é representada pelo valor esperado e variância e a subjetividade apenas pelo parâmetro  $\theta$ . Para a segunda, a objetividade é tida em consideração na entropia, nas realizações e nas probabilidades e a subjetividade na função de utilidade adotada e no parâmetro  $\lambda$  igualmente fornecido pelo indivíduo.

Na Teoria Moderna do Portefólio existe uma estrutura de seleção e construção de portfólios de investimento proposta por Markowitz, que maximiza o valor esperado para um dado risco ou minimiza o risco para um dado valor esperado, designada por **Modelo de Otimização Média - Variância** e usada extensivamente no campo financeiro (Würtz et al., 2009). O modelo de otimização média - variância pode ser motivado por pelo menos uma das premissas: “**para distribuições arbitrárias**, o modelo média-variância pode ser motivado assumindo uma função de utilidade quadrática” ou “**para funções de utilidade arbitrárias (com exceções)**, o modelo de otimização média - variância pode ser motivado assumindo uma distribuição normal para a variável aleatória associada à ação do portfólio”; o vocábulo “exceções” para funções de utilidade arbitrárias refere-se ao conjunto de funções de utilidade monótonas crescente e côncavas. Este processo de otimização média - variância permite selecionar portfólios (ou, sub-conjuntos de ações) viáveis, de variância mínima global e eficientes. O portfólio de variância mínima global é encontrado quando se minimiza o risco para um dado valor esperado (ou retorno esperado).

A título de curiosidade para o leitor recomenda-se o seguinte estudo realizado aos jovens entre os 18 e 25 anos. De acordo com a informação disponibilizada pela Comissão do Mercado de Valores Mobiliários (CMVM) ao Expresso (ver Rita (2021)), os resultados do inquérito realizado aos jovens entre os 18 anos e 25 anos, pela CMVM, mostraram que a literacia financeira dos jovens portugueses está num nível ligeiramente abaixo da restante população.

## 1.2 Objetivos

Uma vez apresentado o estado da arte, pretende-se definir, com algum detalhe, os objetivos que levaram à elaboração desta dissertação:

- estudo introdutório à Teoria de Utilidade Esperada e à Teoria de Risco;
- estudo do modelo de utilidade esperada, de medidas de risco (valor esperado, variância, entropia, probabilidade de perda e valor esperado - variância) e de outras medidas de decisão baseadas na utilidade esperada (medida de utilidade esperada e medida da utilidade esperada - entropia);
- estudo ao modelo de otimização média-variância de Markowitz;
- implementação das medidas de risco imediatamente às referidas no ponto anterior e classificação das ações do *PSI* como mais ou menos preferíveis;
  - *Portuguese Stock Index (PSI)* refere-se a uma lista composta por 18 ações. Cada conjunto de dados extraído a partir do *Investing.com* foi restrito a todos os dias úteis consecutivos entre 17 de julho de 2017 e 16 de julho de 2021.
- aplicação do modelo de otimização média - variância para seleção e construção de portefólios eficientes ao conjunto de dados do *PSI*;
- comparação dos resultados obtidos da classificação de ações com os resultados do modelo média-variância de Markowitz, como forma de antever (ou não) o subconjunto de ações que constituem portefólios eficientes.

## 1.3 Enquadramento Estrutural

O presente documento encontra-se dividido em 6 capítulos, e por sua vez, por secções e subsecções de modo a que o conteúdo presente fique organizado e permita uma leitura agradável da informação apresentada.

Resumidamente, do conjunto de 6 capítulos, a informação contida nos quatro primeiros capítulos é teórica; no quinto capítulo, apresenta-se os resultados obtidos quando se implementam as medidas de risco e decisão e processo de otimização média - variância à base de dados *PSI*; e, no sexto capítulo o conteúdo apresentado é relativo às conclusões, retiradas ao longo do documento, e à apresentação de trabalhos futuros.

Detalhamente:

- Capítulo 1:** O primeiro capítulo introduz o tema e conteúdo da dissertação, no qual se destaca os principais objetivos; o estado da arte e os objetivos definidos; a secção que descreve a estrutura do documento; e, por fim, o *software* e os *packages* utilizados.
- Capítulo 2:** Na primeira secção do segundo capítulo, apresentar-se-á uma introdução ao capítulo. Em seguida, descrever-se-á pormenorizadamente, a partir de um exemplo apresentado no ensaio de Bernoulli, a génese da teoria de utilidade esperada, sendo, também, apresentadas algumas considerações sobre o paradoxo de *St. Petersburg*. Na terceira secção apresenta-se o desenvolvimento formal da teoria de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, enquanto, *a posteriori*, representa-se a relação de preferência, formalizada anteriormente através de um conjunto de regras (ou, axiomas), a partir de uma função. Mostrar-se-á, ainda, ao leitor alguns conceitos de preferência de risco acompanhados de alguns exemplos. E, para terminar este capítulo, apresentar-se-á o famoso paradoxo de Allais.
- Capítulo 3:** O terceiro capítulo foca-se na apresentação de modelos de risco. Inicialmente, define-se o conceito de perceção de risco e de que forma ele é influenciado teórica e praticamente. Em seguida, apresentar-se-á as medidas de risco simples - valor esperado, variância, entropia e probabilidade de perda. Para terminar, e, após a definição das medidas de risco clássicas, apresentar-se-á as ditas medidas de risco “compostas” como: valor esperado - variância, utilidade esperada e utilidade esperada - entropia.
- Capítulo 4:** No quarto capítulo dar-se-á a conhecer a motivação que levou Markowitz a formular o modelo média - variância. Logo depois, apresentar-se-á algumas definições essenciais ao modelo de otimização média-variância. Posteriormente, definir-se-á os conceitos de fronteira viável e eficiente e de diversificação. Para terminar, aplicar-se-á as definições e conceitos, apresentados a montante, a um determinado problema de otimização de duas ações.
- Capítulo 5:** O quinto capítulo é direcionado à apresentação de resultados e conclusões, considerando o enquadramento teórico apresentado nos capítulos a montante e o conjunto de dados do *Portuguese Stock Index (PSI)* constituído por 18 ações.

**Capítulo 6:** Por fim, no sexto capítulo refletir-se-á sobre as principais conclusões retiradas da dissertação e trabalhos futuros.

## 1.4 *Software*

A jusante, os resultados teóricos e práticos serão apoiados na utilização do sistema R. R é um conjunto de recursos de *software* para manipulação de dados, cálculo e representação de gráficos, criado em 1995 por Ross Ihaka e Robert Gentleman. A escolha deste sistema fica a dever-se à sua conhecida versatilidade e capacidades gráficas, à linguagem conceituada e acessível (todas as mentes estatísticas podem fazer alterações no programa - caracteriza-se pelo conceito de linguagem de código aberto), à compatibilidade com outros ambientes, por exemplo, com o L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (sistema que apoia a escrita desta dissertação), e ainda ao facto de ser distribuído livremente na Internet possuindo assim o regime *open source*.

Neste sistema foram instalados os *packages* `pracma`, `dplyr`, `plyr` e `fPortfolio`. Os três primeiros *packages* foram implementados para tratamento e manipulação de dados e o último para apresentar os resultados do processo de otimização média-variância. Por se tratar de um *package* importante na dissertação descreve-se-á o *package* `fPortfolio`.

O *package* `fPortfolio` contém à disposição uma coleção de funções poderosas para otimizar portefólios e analisar diferentes pontos de vista. Em particular, foram utilizadas as funções descritas na Tabela 1.1.

Para aprofundamento do *package* remete-se para as referências bibliográficas o documento da autoria Wuertz et al..

Tabela 1.1: Informação relevante sobre as funções utilizadas do *package fPortfolio*.

Funções	Descrição
as.timeSeries	Converte os retornos num objeto de classe <i>timeSeries</i>
minvariancePortfolio	Fornece informações sobre o portfólio de variância mínima global, por exemplo: o retorno esperado, variância e as ações contidas no portfólio.
minvariancePoints	Fornece, exclusivamente, o retorno esperado e variância do portfólio de variância mínima global.
portfolioFrontier	Fornece informações sobre os portfólios viáveis e eficientes.
getWeights	Fornece, exclusivamente, os pesos (ou, ponderações) para as ações do PSI contidas nos portfólios viáveis e/ou eficientes.
getTargetReturn	Fornece, apenas, o retorno esperado dos portfólios.
getTargetRisk	Fornece, apenas, a variância (ou, o risco) dos portfólios.
frontierPoints	Representa os portfólios viáveis e/ou eficientes no gráfico.





# 2

## Teoria da Utilidade Esperada

Já os maiores filósofos e pensadores da Humanidade reconheceram que o comportamento humano está limitado ao conhecimento do mundo e à incerteza sobre uma matéria. Portanto, foram, são e serão muitos os investigadores que tentam procurar explicar o comportamento humano sob a métrica da incerteza (Cusinato, 2003).

Como este capítulo está intitulado de “Teoria da Utilidade Esperada”, a questão que se deixa ao leitor é a seguinte: será que a teoria de utilidade esperada explica o comportamento humano sob situações de incerteza, dado o conhecimento do mundo naquela época?

### 2.1 Introdução

O desejo de encontrar respostas para explicar o comportamento do ser humano em situações de incerteza levou ao desenvolvimento da Teoria de Decisão. A teoria de decisão, curiosamente, não foi desenvolvida por um sociólogo, mas um matemático, Blaise Pascal, que embora, no momento, não tivesse o objetivo de compreender a dinâmica do ser humano através da teoria da decisão, mas convencer os seus amigos a tornarem-se devotos de Deus, acabara por estabelecer o primeiro princípio matemático para a tomada de decisões em situações de incerteza: o **princípio do valor esperado**. Além do mais, esta teoria chamou a atenção de outros matemáticos, tendo sido utilizada como método de análise

de decisão em muitas situações na última década do século XVII.

Mais tarde, quando o princípio do valor esperado mostrou que não descrevia, aproximadamente, a verdadeira tomada de decisão do ser humano em episódios de incerteza, o matemático *Bernoulli* propôs a hipótese da utilidade esperada, desenvolvendo a teoria de decisão mais influente no mundo: a **Teoria da Utilidade Esperada (UE)**. Em 1947, a teoria de utilidade esperada recebeu a sua primeira caracterização axiomática com a publicação de *Von Neumann - Morgenstern* no artigo *Theory of Games and Economic Behavior*. Na publicação (*Von*) *Neumann - Morgenstern* identificaram as condições necessárias e suficientes para a existência de uma função de utilidade que descreve a atitude do decisor perante uma determinada ação (Von Neumann and Morgenstern, 2007). E, passadas duas centúrias, a teoria da utilidade esperada é uma área multidisciplinar que se encontra em diversas áreas como: a economia, a teoria dos jogos, finanças, seguradoras, administração, psicologia, ciências políticas, estatística, e economia - o seu “habitat natural”.

Após situar o leitor sobre a origem da teoria de decisão e evolução até ao surgimento da teoria de utilidade esperada, e a respetiva aplicabilidade nas áreas da sociedade, ir-se-á na próxima secção abordar com mais detalhe a teoria da utilidade esperada.

## 2.2 Exórdio do Modelo de Utilidade Esperada

Conforme mencionado na Secção 2.1, em 1738, *Bernoulli* levantou a hipótese que o princípio do valor esperado apresentava algumas limitações, isto é, diferentes indivíduos tomaram diferentes decisões baseando-se no mesmo jogo e critério, em particular, no princípio do valor esperado. De acordo com o ensaio publicado em 1954, na língua universal, *Bernoulli*, defendeu que o valor de um objeto não é determinado pelo seu preço, mas pela utilidade que tem para esse indivíduo, reforçando que, o preço do objeto, apenas, depende de si mesmo e é igual para todos; e, por outro lado, que a utilidade depende das circunstâncias particulares do homem e do jogo.

A partir do seguinte exemplo, *Bernoulli* mostrou que a teoria do valor esperado não modela adequadamente as decisões do ser humano sob métrica de incerteza:

(...) *“Somehow a very poor fellow obtains a lottery ticket that will yield with equal probability either nothing or twenty thousand ducats. Will this man evaluate his chance of winning at ten thousand ducats? Would he not be illadvised*

*to sell this lottery ticket for nine thousand ducats? To me, it seems that the answer is the negative. On the other hand I am inclined to believe that a rich man would be illadvised to refuse to buy the lottery ticket for nine thousand ducats. If I am not wrong then it seems clear that all men cannot use the same rule to evaluate the gamble. (...)* (Bernoulli, 1954)

Através do excerto apresentado, Bernoulli considerou que mil *ducats* é mais “significativo” para um homem pobre do que para um homem rico, embora ambos tenham a possibilidade de ganhar, em média, na lotaria a mesma quantidade (10 mil *ducats*). Em termos de utilidade, mil *ducats* têm mais utilidade para o homem pobre do que para o homem rico. Foi a partir deste exemplo que Bernoulli introduziu e explicou o conceito de **utilidade esperada**.

### ***Paradoxo de St. Petersburg***

No mesmo artigo, Bernoulli citou o “*Paradoxo de St. Petersburg*” - publicado originalmente pelo seu primo Nicholas Bernoulli, em 1713. O paradoxo pode ser apresentado do seguinte modo:

“Supondo que pagando uma quantidade  $P$  é possível entrar no seguinte jogo. É lançada uma moeda equilibrada ao ar até que apareça “cara”. Se forem necessários  $n$  lançamentos até que ocorra “cara”, o ganho  $X$  é  $2^n$ .”

Logo, o valor esperado deste jogo é:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{8} \times 8 + \dots = \infty$$

A partir do resultado anterior, qualquer pessoa poderia pagar uma qualquer quantia para entrar neste jogo, pois não é exigida uma quantia mínima de entrada,  $\mathbb{E}[X]$  não depende de  $P$  e o ganho esperado é agradável a qualquer indivíduo. Este jogo representa um paradoxo porque a percepção do ganho esperado do jogo diminui à medida que se paga uma quantia  $P$  para realizar um novo lançamento. É por isso, que os indivíduos estão dispostos a pagar pequenas quantias para entrar no jogo, segundo literatura Kaas et al..

Se, se revelasse características sobre o jogo como o número de lançamentos, em média, que um indivíduo teria de realizar até obter o sucesso, a partir de um estudo empírico, o indivíduo conseguiria decidir que utilidade tem na realidade o jogo para si, uma vez que, o número de lançamentos efetuados até ao momento está associado a um gasto que tem uma determinada utilidade para determinado indivíduo. À partida este jogo refletiu no

indivíduo uma percepção de ganho esperado elevado (infinito), quando na realidade este diminui à medida que se efetua lançamentos.

Para tentar resolver o *Paradoxo de St. Petersburg*, Bernoulli considerou, no seu artigo, duas funções de utilidade tais como: raiz quadrada e a função logarítmica e o conceito de *certainty equivalent* (noções que apresentar-se-á na secção 2.5). Todavia, a solução apresentada por Bernoulli não satisfaz Nicholas Bernoulli. Contudo, a resolução de Bernoulli continua a ser citada em muitos dos livros da Teoria de Utilidade Esperada (Lorenzo Martínez, 2013).

Aos olhares dos economistas da época, as escolhas realizadas sob incerteza pareciam, às vezes, algo enigmático. Entre meados de 1920 e 1960, (John) Von Neumann e (Oskar) Morgenstern desenvolveram a axiomatização para caracterizar a relação de preferência do decisor, usando a teoria de utilidade esperada. No tópico seguinte apresentar-se-á o seu desenvolvimento formal.

## 2.3 Caracterização da Relação de Preferência

Von Neumann e Morgenstern, na sua obra publicada em 1944 - *Theory of Games and Economic Behavior*, mostraram que maximização da utilidade esperada é equivalente à hipótese de decisão de um indivíduo satisfazendo algumas restrições sob forma de axiomas.

Denote  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$  o conjunto de todas as possíveis realizações.

**Definição 1.** *Uma lotaria  $L$  é uma variável aleatória real cujo o número de realizações é finito. Denota-se  $L$  por  $(a_1, p_1; \dots; a_N, p_N)$ , em que as realizações  $a_n \in \mathcal{A}$  ocorrem com probabilidade  $p_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , com  $p_n > 0$  e  $\sum_{n=1}^N p_n = 1$ .*

Denote  $\mathcal{L}$  o conjunto de todas as lotarias e  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  o conjunto de lotarias em suporte  $\mathcal{A}$ .

**Nota.** Define-se o suporte de  $\forall L \in \mathcal{L}$  como:  $\text{supp}(L) = \{a_n \in L, \mathcal{A} : p_n \neq 0\}$ .  $\mathcal{A}$  pode ter diferente dimensão para quaisquer lotarias em  $\mathcal{L}$ .

**Definição 2.** *Sejam as lotarias  $L, L' \in \mathcal{L}$  representadas por  $L = (a_1, p_1; \dots; a_N, p_N)$ ,  $L' = (a'_1, p'_1; \dots; a'_M, p'_M)$ , de modo respetivo, e  $\alpha \in (0, 1]$ . Seja  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$  e  $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_M\}$  o suporte de  $L$  e  $L'$ , respetivamente. Seja  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = \{b_1, \dots, b_K\}$ . Define-se a seguinte composição de lotaria  $L_\alpha = \alpha L + (1 - \alpha)L'$  por  $L_\alpha = (b_1, s_1; \dots; b_K, s_K)$ , onde para  $\forall b_k \in \mathcal{B}$  se tem:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } b_k \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}', \exists n, \exists m \text{ tal como: } b_k = a_n = a'_m \text{ e } s_k = \alpha p_n + (1 - \alpha)p'_m \\ \text{se } b_k \in \mathcal{A} \cap \neg \mathcal{A}', \exists n \text{ tal como: } b_k = a_n \text{ e } s_k = \alpha p_n \\ \text{se } b_k \in \mathcal{A}' \cap \neg \mathcal{A}, \exists m \text{ tal como: } b_k = a'_m \text{ e } s_k = (1 - \alpha)p'_m \end{array} \right.$$

Note-se que a partir de um conjunto de lotarias pode-se definir uma relação de preferência entre os objetos do conjunto. A preferência de um indivíduo por dois objetos é formalizada por uma relação binária  $\succsim$  ou relação de preferência (fraca).

O modelo de utilidade esperada é baseado em três fundamentais axiomas: axioma de **ordem fraca**, axioma da **continuidade arquimediana** e axioma da **independência**.

### 1. Ordem Fraca:

#### (a) Completa:

$$\forall L, L' \in \mathcal{L} : L \succsim L' \vee L' \succsim L;$$

Uma relação de preferência completa implica que o indivíduo seja capaz de comparar qualquer par de lotarias pertencentes a  $\mathcal{L}$ .

Se o indivíduo é capaz de comparar qualquer par de lotarias através de uma relação binária o mesmo consegue definir a sua preferência a partir de outras duas relações:

- **Relação de preferência estrita**  $\succ$  definida da seguinte forma:

$$L \succ L' \iff L \succsim L' \wedge \neg(L' \succsim L), \quad (2.1)$$

onde  $\wedge$  significa o operador lógico de conjunção e  $\neg$  o operador lógico de negação; e, que  $L \succ L'$  significa, em linguagem corrente, “ $L$  é estritamente preferível a  $L'$ ”.

- **Relação de indiferença**  $\sim$  definida da seguinte maneira:

$$L \sim L' \iff L \succsim L' \wedge L' \succsim L, \quad (2.2)$$

em que  $L \sim L'$  significa, em linguagem corrente, “ $L$  é indiferente a  $L'$ ”.

**Nota.** (2.1) implica a propriedade de assimetria. Por outro lado, (2.2) implica a propriedade de simetria.

Além disso, se o axioma de completude é satisfeito, então, é possível, implicitamente, estabelecer o seguinte axioma:

- **Reflexividade:**

Se  $L = L' = L^1$ , então  $L^1 \succsim L^1$ . Logo,  $\succsim$  é reflexiva.

Repare-se que, a qualquer relação de preferência, apresentada no documento, pode-se atribuir um valor lógico.

**Exemplo 1.** Considere a seguinte relação de preferência  $\forall L, L' \in \mathcal{L} : L \succsim L'$ . Se a afirmação da proposição anterior for verdadeira implica que “ $L$  é (fracamente) preferível a  $L'$ ”. Caso contrário, a afirmação implica que “ $L'$  é estritamente preferível a  $L$ ”.

(b) **Transitiva:**

$$\forall L, L', L'' \in \mathcal{L} : L \succsim L' \wedge L' \succsim L'' \implies L \succsim L'';$$

A partir de uma **relação de preferência transitiva** exclui-se a possibilidade de preferências “circulares” entre alternativas de pares de escolha. De um outro modo, a verificação deste axioma resulta na ordenação das lotarias tendo em consideração a relação de preferência existente entre as mesmas.

**Exemplo 2.**  $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L} : L \succ L', L' \succ L''$  e  $L'' \succ L'$ .

A partir deste exemplo conclui-se, sem dúvidas, que a relação de preferência estrita existente entre as lotarias não permite estabelecer uma ordenação. Logo, esta relação de preferência existente não é transitiva, tratando-se assim de um contraexemplo.

A título de observação, o axioma de ordem fraca ou de ordenação é um princípio fundamental de racionalidade e é assumido na maioria das teorias de escolha, inclusive na teoria de consumo (Schmidt, 2009). Muitos autores consideram os axiomas de completude e transitividade como um só, enquanto que outros como dois axiomas independentes.

2. **Continuidade Arquimediana:**

$$\forall L, L', L'' \in \mathcal{L} \text{ e } L \succ L' \succ L'' \implies \exists \alpha, \beta \in (0, 1):$$

$$\alpha L + (1 - \alpha)L'' \succ L' \succ \beta L + (1 - \beta)L'';$$

A interpretação realizada a este axioma permite deduzir que pequenas mudanças nas probabilidades,  $\alpha$  e  $\beta$ , não mudam a natureza de ordenação de quaisquer três lotarias. Veja-se, uma possível interpretação deste axioma:

- Se  $L' \succ L''$  e existe um  $L$  ainda mais preferível do que à relação anterior, então, por mais que  $L' \succ L''$  o axioma da continuidade afirma que se pode definir uma probabilidade  $\alpha$ , para  $L$ , mais próxima de 1 para que a combinação  $L$  e  $L''$  seja preferível a  $L'$ ;
- Analogamente, pode-se atribuir a  $\beta$  um valor próximo de zero para que  $L'$  seja preferível à combinação de  $L$  e  $L''$ .

### 3. Independência:

$$\forall L, L', L'' \in \mathcal{L} :$$

- $L \succsim L' \Rightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1 - \alpha)L''$ ;
- $\exists \alpha \in (0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1 - \alpha)L'' \Rightarrow L \succsim L'$ .

Logo, por i) e ii) tem-se:

$$\forall L, L', L'' \text{ e } \forall \alpha \in (0, 1] : L \succsim L' \iff \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1 - \alpha)L''.$$

O axioma da independência impõe que a comparação de quaisquer duas composições de lotarias pertencentes a  $\mathcal{L}$  é baseada nos seus aspetos distintos; isto é, o decisor deve ignorar todos os aspetos que são comuns na comparação de composições de lotarias (Karni, 2014). Considerando a sintaxe apresentada conclui-se que, este axioma afirma que a preferência entre as composições de lotarias  $\alpha L + (1 - \alpha)L''$  e  $\alpha L' + (1 - \alpha)L''$  é a mesma entre as lotarias  $L$  e  $L'$  e vice-versa.

Assim sendo, se os axiomas apresentados anteriormente forem satisfeitos, então é possível construir uma função na “forma de utilidade esperada” que represente a relação de preferência dos indivíduos, possibilitando o apoio à tomada de decisões em situações de incerteza aos indivíduos através do princípio da utilidade esperada.

## 2.4 Representação da Relação de Preferência

**Definição 3.** A função  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  tem a forma da utilidade esperada, se existir uma atribuição de números  $u(a_1), \dots, u(a_N)$  para as  $N$  realizações tal que para todas as lotarias  $L = (a_1, p_1; \dots; a_n, p_n) \in \mathcal{L}$  se tem:



$$U(L) = \mathbb{E}[u(L)] = \sum_{i=1}^N u(a_i)p_i = u(a_1)p_1 + \dots + u(a_N)p_N,$$

onde  $u(\cdot) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de utilidade estritamente crescente e única a menos de uma transformação linear positiva, isto é, qualquer função  $v = au + b$  com  $a > 0, b \in \mathbb{R}$  é também admissível para obter uma função  $U(\cdot)$  (Chateauneuf et al., 2008).

**Nota.** Uma função  $U(\cdot)$  com forma de utilidade esperada é, também, chamada de função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern.

No seguinte teorema formaliza-se o modelo de utilidade esperada.

**Teorema 3.** *Sejam  $L, L' \in \mathcal{L}$  definidas por  $L = (a_1, p_1; \dots; a_N, p_N)$ ,  $L' = (a'_1, p'_1; \dots; a'_M, p'_M)$ , respectivamente. A relação de preferência  $\succsim$  satisfaz os axiomas de ordem fraca, continuidade arquimediana e independência se e só se existir uma função  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  que represente a relação binária, isto é:*

$$L \succsim L' \iff \mathbb{E}[u(L)] \geq \mathbb{E}[u(L')]$$

**Nota.**  $U(L)$  é única a menos de uma transformação linear, isto é, outra função  $U^*(L) : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  representa  $\succsim$  se e só se existir uma constante real  $c > 0$  e  $d \in \mathbb{R}$  tal que:

$$U^*(L) = cU(L) + d, \forall L \in \mathcal{L}.$$

**Corolário 1.** *Comparar duas lotarias  $L, L'$  a partir da função de utilidade  $u(\cdot)$  ou da sua transformação linear  $au(\cdot) + b$ ,  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ , produz o mesmo resultado quando o decisor compara através do valor esperado da função de utilidade  $U(\cdot)$  ou da sua transformação linear  $U^*(\cdot)$ , considerando para ambos os casos as mesmas lotarias,  $L$  e  $L'$ , e os mesmos valores para as constantes reais. Seja  $\forall L, L' \in \mathcal{L} : L' \succsim L$  tem-se:*

$$\mathbb{E}[u(L)] \leq \mathbb{E}[u(L')] \iff \mathbb{E}[au(L) + b] \leq \mathbb{E}[au(L') + b]$$

$$\iff a\mathbb{E}[u(L)] + b \leq a\mathbb{E}[u(L')] + b.$$

Atente-se que o resultado obtido através do Corolário 1 será muito importante para a seguinte secção, na medida em que alterações na origem e/ou escala do eixo vertical do referencial não afetam o “*shape*” da função de utilidade e, conseqüentemente, a relação de preferência entre duas lotarias. Estas transformações lineares são realizadas com fim de normalizar a função de utilidade (Machina, 1987).

Na próxima secção mostrar-se-á como as relações de preferência que satisfazem as propriedades da utilidade esperada podem ser usadas para formalizar as noções de preferência de risco, especificamente, aversão, neutralidade e propensão ao risco.

## 2.5 Noções de Preferência de Risco

Nesta secção procura-se, por um lado, formalizar as noções de preferência de risco e, por outro, caracterizar o comportamento dos decisores que diferem apenas na função de utilidade.

Comece-se por considerar que as três seguintes funções de utilidade -  $u_1(w)$ ,  $u_2(w)$  e  $u_3(w)$  - e as respetivas representações gráficas apresentadas na Figura 2.1 - definem três indivíduos diferentes.

Para as representações gráficas da Figura 2.1 observa-se que quando o valor da realização é 1, utilidade para os diferentes indivíduos é a mesma - um.

**Exemplo 4.** Considere a lotaria  $L = (0, 1/2; 2, 1/2)$ , em que o indivíduo tem igual probabilidade de receber zero e duas u.m. O valor esperado de  $L$  é 1, matematicamente é dado por:  $\mathbb{E}[L] = 0 \times 0,5 + 2 \times 0,5 = 1$ .

Para o Exemplo 4 obtém-se três valores desiguais para a utilidade esperada da lotaria  $L$ , consequência das três funções de utilidade diferentes. Como se pode comprovar:

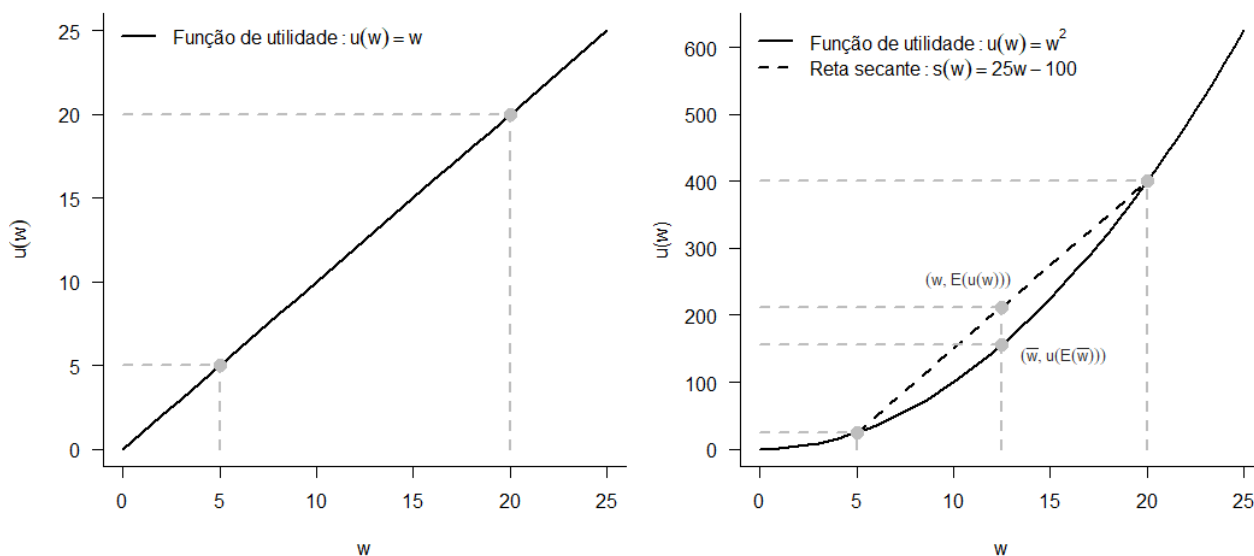
1.  $\mathbb{E}(u_1(L)) = 0,5 \times u_1(0) + 0,5 \times u_1(2) = 0 + 0,5 \times 2 = 1$ ;
2.  $\mathbb{E}(u_2(L)) = 0,5 \times u_2(0) + 0,5 \times u_2(2) = 0 + 0,5 \times 2^2 = 2$ ;
3.  $\mathbb{E}(u_3(L)) = 0,5 \times u_3(0) + 0,5 \times u_3(2) = 0 + 0,5 \times 2^{1/2} = 0,71$ .

Para qualificar o comportamento dos indivíduos quanto ao risco introduz-se o conceito *certainty equivalent*. *Certainty Equivalent* representa a quantia que o decisor está disposto a aceitar com certeza em vez de “enfrentar” a lotaria.

Considerando o Exemplo 4 e as funções de utilidade apresentadas na Figura 2.1, o *certainty equivalent* para os distintos indivíduos é dado por:

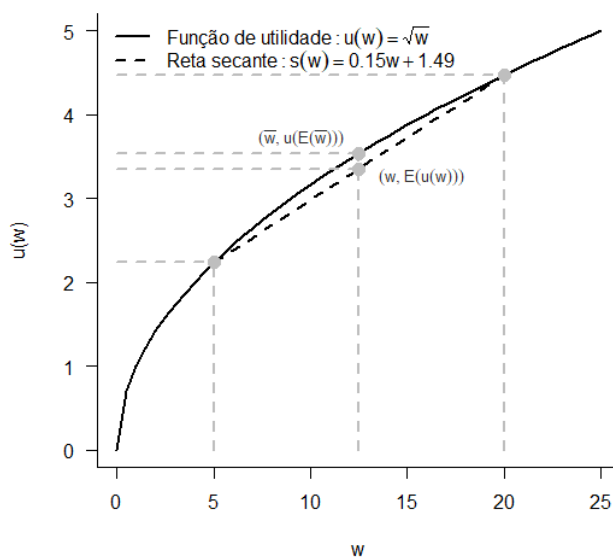
1.  $CE_1 = (u_1(1))^{-1} = 1,00$ ;
2.  $CE_2 = (u_2(2))^{-1} = 2^{1/2} = 1,41$ ;
3.  $CE_3 = (u_3(0,71))^{-1} = 0,71^2 = 0,51$ .

Logo, dependendo da função de utilidade, um indivíduo pagaria 1 u.m; 1,41 u.m; e 0,51 u.m para participar na lotaria. Por conseguinte, os resultados obtidos suscitam as seguintes conclusões:



(a)  $u_1(w) = w$

(b)  $u_2(w) = w^2$



(c)  $u_3(w) = w^{1/2}$

Figura 2.1: Representação conjunta das funções de utilidade  $u_1(w)$ ,  $u_2(w)$  e  $u_3(w)$ : **(a)** Função de utilidade linear, nomeadamente,  $u_1(w) = w$ ; **(b)** Função de utilidade convexa, nomeadamente,  $u_2(w) = w^2$  e da reta secante à função  $u_2(w) = w^2$  nos pontos  $(5, 5^2)$  e  $(20, 20^2)$ ; e, **(c)** Função de utilidade côncava, nomeadamente,  $u_3(w) = w^{1/2}$  e da reta secante à função  $u_3(w) = w^{1/2}$  nos pontos  $(5, 5^{1/2})$  e  $(20, 20^{1/2})$ .

1. O indivíduo com função de utilidade  $u_1(\cdot)$  é neutro ao risco, porque

$$CE = 1 = \mathbb{E}[L] = 1;$$

2. O indivíduo com função de utilidade  $u_2(\cdot)$  é propenso ao risco, porque

$$CE = 1,41 > \mathbb{E}[L] = 1;$$

3. O indivíduo com função de utilidade  $u_3(\cdot)$  é averso ao risco, porque

$$CE = 0,51 < \mathbb{E}[L] = 1.$$

Considerando os decisores aversos aos risco como um grupo importante na teoria de utilidade esperada têm-se, na prática, que: se o valor da *certainty equivalent* é inferior ao valor esperado da lotaria, então, o decisor é caracterizado como averso ao risco. De um outro modo, se a lotaria  $L$  para o indivíduo 3 tem uma utilidade de 0,71 u.m (análoga à utilidade esperada da lotaria  $\mathbb{E}[u(L)]$ ) a quantia que o sujeito terá que pagar para entrar na lotaria é 0,51 u.m ( $CE$ ). Quando o indivíduo 3 compara o valor da utilidade, em média, da lotaria,  $\mathbb{E}[u(L)]$ , com o valor esperado da mesma lotaria,  $\mathbb{E}[L]$ , o indivíduo prefere aceitar o valor da *certainty equivalent* 0,51 do que enfrentar a lotaria, pois “o valor moral” que a lotaria tem para o indivíduo - o contexto de aplicação da lotaria e outras variáveis que influenciam a utilidade da lotaria, em média,  $\mathbb{E}[u(L)]$  - é inferior à quantia  $\mathbb{E}[L]$ . Perante a relação  $\mathbb{E}[u(L)] \leq \mathbb{E}[L]$ , o decisor é caracterizado como averso ao risco.

A partir do ponto anterior é possível tecer uma ilação. Nos indivíduos propensos ao risco, o “valor moral”, a confiança, o conhecimento, o contexto da lotaria e outras variáveis que influenciam a utilidade do indivíduo têm uma ponderação superior na decisão do que uma certa quantia exata para todos os indivíduos, o valor esperado da lotaria; porém, nos indivíduos aversos ao risco verifica-se o reverso.

Outra maneira de caracterizar o comportamento do indivíduo perante uma situação sob incerteza é através da utilidade da lotaria esperada  $u(\mathbb{E}[L])$ , dada pela expressão

$$u(\mathbb{E}[L]) = u\left(\sum_{i=1}^N p_i a_i\right),$$

e da utilidade esperada da lotaria, estabelecendo o seguinte teorema (Brito and Gonçalves, 2015).

**Teorema 5** (Desigualdade de Jensen). *Se  $u(\cdot)$  é uma função convexa e  $L$  é uma variável aleatória, então:*

$$\mathbb{E}[u(L)] \geq u(\mathbb{E}[L]).$$

*e a igualdade é válida se e só se  $u(\cdot)$  é linear no suporte de  $L$  ou no caso em que  $\text{Var}[L] = 0$ . Se  $u(\cdot)$  é uma função côncava e  $L$  é uma variável aleatória, então:*

$$\mathbb{E}[u(L)] \leq u(\mathbb{E}[L]).$$

Na demonstração considerar-se-á retas tangentes invés das retas secantes apresentadas na Figura 2.1. No entanto, as conclusões obtidas serão análogas.

*Demonstração.* *Seja  $u(\cdot)$  uma função convexa, ou seja,  $u'' \geq 0$ . Se  $\mathbb{E}[L] = \mu$  existe, considere a reta tangente à função  $u(\cdot)$  no ponto  $(\mu, u(\mu))$  denotada por  $l$  e cuja a equação é dada por:*

$$l(w) = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu).$$

*A partir da Figura 2.2 e/ou do pressuposto que  $u(\cdot)$  é convexa sabe-se que:*

$$u(w) \geq l(w) = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu), \forall w.$$

*Substituindo  $w$  pela variável aleatória  $L$  e calculando os valores esperados, obtém-se:*

$$\mathbb{E}[u(L)] \geq u(\mu) = u(\mathbb{E}[L]).$$

*No caso de  $u(\cdot)$  ser côncava, basta repetir a demonstração anterior trocando  $u(\cdot)$  por  $-u(\cdot)$ .  $\square$*

Assim, mediante o Teorema 5 é admissível descrever o indivíduo quanto ao risco. Isto é, se

- $\mathbb{E}[u(L)] = u(\mathbb{E}[L])$  o indivíduo é **neutro ao risco** (ver, como exemplo, a Figura 2.1a);
- $\mathbb{E}[u(L)] > u(\mathbb{E}[L])$  o indivíduo é **propenso ao risco** (ver, como exemplo, a Figura 2.1b);
- $\mathbb{E}[u(L)] < u(\mathbb{E}[L])$  o indivíduo é **averso ao risco** (ver, como exemplo, a Figura 2.1c).

Considerando o Exemplo 4 e as funções de utilidade  $u_1(\cdot)$ ,  $u_2(\cdot)$  e  $u_3(\cdot)$ , apresentadas na Figura 2.1, associadas aos indivíduos 1, 2 e 3, respetivamente, averiguar-se-á se os indivíduos são classificados do mesmo modo quando se aplica o conceito de *certainty equivalent* e a desigualdade de *Jensen*.

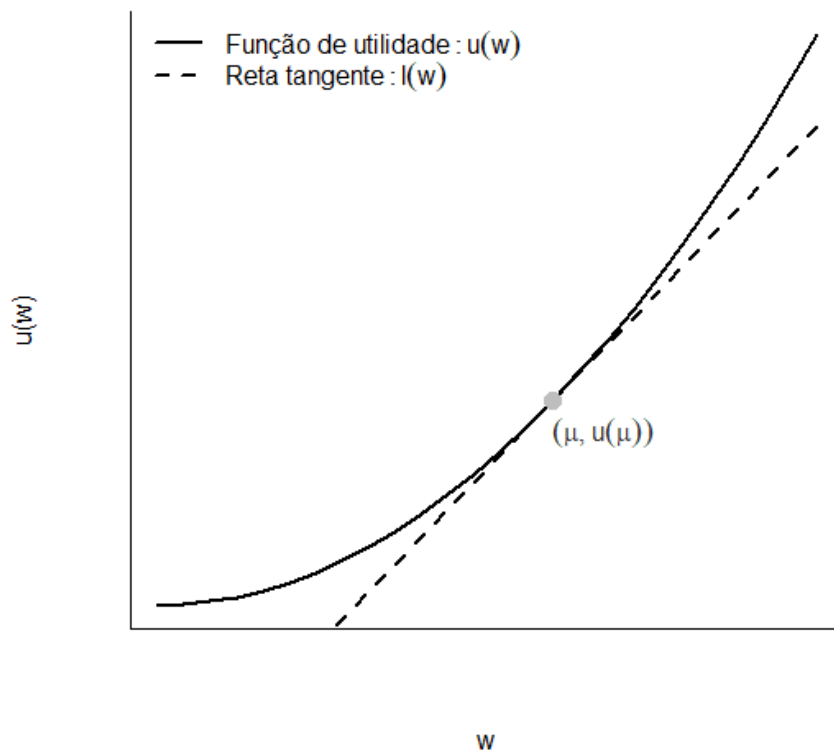


Figura 2.2: Representação gráfica de uma função de utilidade convexa  $u(\cdot)$  e da reta tangente  $l(\cdot)$  à função  $u(\cdot)$  no ponto  $(\mu, u(\mu))$ .

1.  $\mathbb{E}[u_1(L)] = 1 = u(1) = 1 \Rightarrow$  indivíduo 1 neutro ao risco;
2.  $\mathbb{E}[u_2(L)] = 2 \geq u(1) = 1 \Rightarrow$  indivíduo 2 propenso ao risco;
3.  $\mathbb{E}[u_3(L)] = 0,71 \leq u(1) = 1 \Rightarrow$  indivíduo 3 averso ao risco.

Logo, conclui-se quer através da noção de *certainty equivalent*, quer da desigualdade de *Jensen* que se obtém as mesmas conclusões.

É de reparar que, a forma (ou, “*shape*”) da função de utilidade  $u' > 0$  conduz à identificação da preferência de risco do decisor, ou seja, se a função de utilidade é convexa (tem-se como exemplo a Figura 2.1b) o indivíduo é propenso ao risco; por outro lado, quando é côncava (tem-se como exemplo a Figura 2.1c) o decisor é averso ao risco; e, por fim, quando a função de utilidade é linear (tem-se como exemplo a Figura 2.1a) o indivíduo é neutro ao risco.

**Nota.** Quando a função de utilidade é linear, o valor da utilidade esperada da lotaria é equivalente ao valor esperado da mesma ( $\mathbb{E}[u(L)] = \mathbb{E}[L]$ ).

Considere este caso especial apresentado na forma de exemplo.

**Exemplo 6. Problema:** Considere as seguintes lotarias, cujas realizações representam ganhos em u.m,  $L = (0, \frac{3}{10}; 100, \frac{5}{10}; 250, \frac{2}{10})$  e  $L' = (100, 1)$ . O valor esperado de ambas as lotarias é 100 u.m, ou seja,  $\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[L'] = 100$ . Os desvios padrão de  $L$  e  $L'$  são 86,60 e 0, respectivamente.

É admissível considerar que um indivíduo averso ao risco prefere  $L' \succsim L$ ; e, que um indivíduo propenso ao risco prefere uma lotaria com uma variância associada, porque existe em  $L$  a possibilidade de ganhar 250 ou 100 com uma variância associada, ou seja,  $L \succsim L'$ ?

**Resolução:** Suponha as seguintes funções de utilidade:  $u(w) = w^2$  - uma função de utilidade convexa - e  $u(w) = \sqrt{w}$  - uma função de utilidade côncava.

Como já é sabido, a partir de uma função de utilidade convexa identifica-se um indivíduo propenso ao risco. Por outro lado, a partir de uma função de utilidade côncava identifica-se um indivíduo averso ao risco.

Pelo Teorema 3,  $L' \succsim L$  se e só se  $\mathbb{E}[u(L')] \geq \mathbb{E}[u(L)]$ , e  $L \succsim L'$  se e só se  $\mathbb{E}[u(L)] \geq \mathbb{E}[u(L')]$ . Para o indivíduo averso ao risco:  $\mathbb{E}[u(L')] = 10$  e  $\mathbb{E}[u(L)] = 8,162$ . Logo, como  $\mathbb{E}[u(L')] > \mathbb{E}[u(L)] \implies L' \succ L$  - verificando o Teorema 3. Para o indivíduo propenso ao risco:  $\mathbb{E}[u(L)] = 17500$  e  $\mathbb{E}[u(L')] = 10000$ . Logo, como  $\mathbb{E}[u(L)] = 17500 > \mathbb{E}[u(L')] = 10000 \implies L \succ L'$  - verificando o Teorema 3.

O decisor averso ao risco prefere “enfrentar” a lotaria  $L'$  do que a lotaria  $L$ , pois sabe que irá receber 100 u.m com “certeza” do que se “enfrentasse” a lotaria  $L$ , cuja mesma quantia está associada a uma incerteza. Por outro lado, o decisor propenso ao risco opta por “enfrentar” a lotaria  $L$  e receber uma quantia variável do que a mesma quantia “com certeza”.

Estes resultados são válidos para as funções de utilidade apresentadas.

Considere as seguintes famílias de funções de utilidade (Kaas et al., 2008):

- *Utilidade Quadrática:*  $u(w) = -(\alpha - w)^2$  ( $w \leq \alpha$ );
- *Utilidade Logarítmica:*  $u(w) = \log(\alpha + w)$  ( $w > -\alpha$ );
- *Utilidade Exponencial:*  $u(w) = -\alpha \exp^{-\alpha w}$  ( $\alpha > 0$ );
- *Utilidade de Potência:*  $u(w) = w^c$  ( $w > 0, 0 < c \leq 1$ ).

Atente que, para a função de utilidade quadrática estabelece-se  $u(w) = 0$  para  $w > \alpha$ . Estas funções de utilidade e as suas transformações lineares têm utilidade marginal ( $u'(\cdot)$ ) não-negativa e não-crescente, ou seja, contribuem para evidenciar comportamentos aversos ao risco.



## 2.6 Paradoxo de Allais

Para finalizar é apresentado o Paradoxo de Allais divulgado por Maurice Allais. A principal conclusão obtida assinala que a teoria de utilidade esperada possui limitações, isto é, este paradoxo contradiz o axioma da independência considerado pela literatura como o axioma mais importante (Kaas et al., 2008).

Considere as seguintes lotarias em dólares:

$$L = (1000000, 1);$$

$$L' = (5000000, 1/10; 1000000, 89/100; 0, 1/100);$$

$$L'' = (1000000, 11/100; 0, 89/100);$$

$$L''' = (5000000, 1/10; 0, 9/10).$$

**Nota.** Uma lotaria do tipo  $L$  é, considerada na literatura, uma lotaria degenerada.

A economia experimental tem revelado que existindo uma escolha entre  $L$  e  $L'$  a maioria das pessoas escolhe  $L$ , então, se satisfeitos os axiomas de ordem fraca, continuidade arquimediana e independência obtém-se que:

$$L \succ L' \iff \mathbb{E}[u(L)] > \mathbb{E}[u(L')], \quad (2.3)$$

mas ao mesmo tempo as mesmas preferem  $L'''$  a  $L''$ , então, se satisfeitos os axiomas de ordem fraca, continuidade arquimediana e independência obtém-se que:

$$L''' \succ L'' \iff \mathbb{E}[u(L''')] > \mathbb{E}[u(L'')]. \quad (2.4)$$

Desenvolvendo, sabe-se que:

$$\mathbb{E}[u(L)] > \mathbb{E}[u(L')] \iff 0,10 \times u(5000000) + 0,01 \times u(0) > 0,11 \times u(1000000) \quad (2.5)$$

e, por outro lado que:

$$\mathbb{E}[u(L''')] > \mathbb{E}[u(L'')] \iff 0,10 \times u(5000000) + 0,01 \times u(0) < 0,11 \times u(1000000). \quad (2.6)$$

Surpreendentemente, a desigualdade (2.5) é oposta à desigualdade (2.6). Esta discordância nos resultados obtidos evidencia que não existe garantia no interesse teórico e prático da teoria de utilidade esperada para esta situação; isto é, para este caso, a teoria de utilidade esperada não descreveu a opinião dos indivíduos adequadamente. Esta contradição deve-se ao facto do axioma da independência não se verificar. Quando pelo menos um dos axiomas não é consistente e pragmático expõe, em particular, que a teoria de utilidade esperada não representa de uma forma útil fenómenos com que a realidade nos confronta. Recordar-se-á que, uma vez não satisfeitos todos os axiomas (ordem fraca, continuidade arquimediana e independência) não é possível representar a relação de preferência na forma de utilidade esperada (ver o Teorema 2).

A título ilustrativo, apresenta-se o seguinte exemplo como prova que o axioma da independência não é satisfeito.

Sejam quaisquer lotarias  $L^1, L^2, L^3$  e  $L^4 \in \mathcal{L}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  e  $L_\alpha^{1,4}, L_\alpha^{2,4}, L_\alpha^{1,3}$  e  $L_\alpha^{2,3}$  composições de lotarias detalhadas como se segue:

$$L_\alpha^{1,4} = \alpha L^1 + (1 - \alpha)L^4 \text{ vs } L_\alpha^{2,4} = \alpha L^2 + (1 - \alpha)L^4$$

e

$$L_\alpha^{1,3} = \alpha L^1 + (1 - \alpha)L^3 \text{ vs } L_\alpha^{2,3} = \alpha L^2 + (1 - \alpha)L^3.$$

Pelo axioma da independência deduz-se que:

$$L^1 \succsim L^2 \iff L_\alpha^{1,4} \succsim L_\alpha^{2,4} \wedge L_\alpha^{1,3} \succsim L_\alpha^{2,3} \quad (2.7)$$

ou

$$L^2 \succsim L^1 \iff L_\alpha^{2,4} \succsim L_\alpha^{1,4} \wedge L_\alpha^{2,3} \succsim L_\alpha^{1,3}. \quad (2.8)$$

Agora, considere:

$$L^1 = (1000000, 1), L^3 = (0, 1), L^4 = (1000000, 1), L^2 = (5000000, 10/11; 0, 1/11) \text{ e } \alpha = 0, 11$$

Logo, pela Definição 2, tem-se que:

$$L_{0,11}^{1,4} = 0, 11 (1000000, 1) + 0, 89 (1000000, 1) = (1000000, 1),$$

equivalente à lotaria  $L$  do paradoxo de Allais;

$$L_{0,11}^{2,4} = 0, 11 (5000000, 10/11; 0, 1/11) + 0, 89 (1000000, 1) = (5000000, 1/10; 1000000, 89/100; 0, 1/100),$$

equivalente à lotaria  $L'$  do paradoxo de Allais;

$$L_{0,11}^{1,3} = 0,11(1000000, 1) + 0,89(0, 1) = (1000000, 11/100; 0, 89/100),$$

equivalente à lotaria  $L''$  do paradoxo de Allais;

$$L_{0,11}^{2,3} = 0,11(5000000, 10/11; 0, 1/11) + 0,89(0, 1) = (5000000, 1/10; 0, 9/10),$$

equivalente à lotaria  $L'''$  do paradoxo de Allais.

Aplicando a nova notação às expressões (2.7) e (2.8) e supondo que o axioma da independência é satisfeito tem-se:

$$L \succsim L' \wedge L'' \succsim L''' \implies L^1 \succsim L^2; \quad (2.9)$$

ou

$$L' \succsim L \wedge L''' \succsim L'' \implies L^2 \succsim L^1. \quad (2.10)$$

Pela opinião dos inquiridos sabe-se que preferem  $L$  sobre  $L'$  e, ao mesmo tempo,  $L'''$  sobre  $L''$ . Como as expressões do lado esquerdo das implicações (2.9) e (2.10) têm valor lógico Falso, sob a opinião dos inquiridos, conclui-se que o axioma da independência não é verificado. Logo, uma vez não satisfeito, é plausível afirmar que a teoria de utilidade esperada não modela adequadamente os desejos dos inquiridos.

Esta evidencia empírica, o Paradoxo de Allais, tem motivado os investigadores a desenvolver teorias alternativas de escolha debaixo da incerteza, que permitam captar verdadeiramente o comportamento observável dos indivíduos.

Para finalizar o capítulo, vale a pena introduzir o seguinte comentário. No Paradoxo de *St. Petersburg*, dada a conhecer a variância de  $X$  (infinita) aos indivíduos concluir-se-ia de antevisão que para alcançar o sucesso “sair cara” ter-se-ia que efetuar inúmeros lançamentos. Optando assim o indivíduo por investir pequenas quantidades por cada lançamento efetuado. Esta variabilidade associada à variância adverte que a dispersão pode ser fundamental para investigar o verdadeiro comportamento dos decisores.

# 3

## Modelos de Risco

O termo risco tem, obviamente, um papel importante na maioria dos documentos e artigos publicados na literatura económica, política, social e tecnológica tornando-se assim essencial definir o conceito de risco.

O vocábulo “ação”, neste capítulo, significa uma eventual decisão que o indivíduo tomará de um conjunto de ações.

### 3.1 Perceção do Risco

O conceito de risco não é apenas uma característica objetiva; trata-se também de uma construção inerentemente subjetiva. Primitivamente, na teoria de decisão, pesquisas realizadas por (Mellers et al., 1992; Koonce et al., 2005 e Mellers and Chang, 1994 como citado em Nguyen et al., 2019) demonstraram que os principais fatores, mencionados *à posteriori* como “variáveis da teoria de decisão”, que influenciam de forma objetiva a perceção de risco são: as probabilidades e as realizações associadas a uma ação; e, conseqüente a variabilidade dos retornos, particularmente na área das finanças (*volatility of returns*). No entanto, à medida que estudos iam sendo publicados, investigadores como (MacGregor et al., 1999; Sachse et al., 2012 e Weber, 2004 como citado em Nguyen et al., 2019),

encontraram evidências comportamentais, mencionadas *à posteriori* como “variáveis comportamentais”, na tomada de decisões, levando a concluir que as “variáveis da teoria de decisão” não conseguem explicar totalmente a percepção de risco dos indivíduos. Numa tentativa de conseguir dar resposta a esta conjectura, estudos recentes, que utilizaram os dois tipos de “variáveis” para estudar a percepção de risco, mostraram que a combinação destas duas “variáveis”, “variáveis comportamentais” e as “variáveis da teoria de decisão”, explicam, sensivelmente, melhor a percepção de risco dos indivíduos.

O conjunto de “variáveis comportamentais” que na teoria de decisão contribuem para a percepção de risco, de acordo com estudos realizados, são, por exemplo:

- Preocupação;
- Risco de “catástrofe”;
- Controlo;
- Confiança;
- Conhecimento / Familiarização;
- Gravidade da consequência.

Na Tabela 3.1 apresenta-se algumas conclusões retiradas por investigadores sobre a percepção de risco.

Numa situação prática é possível obter uma ordenação do risco quando se questiona ao indivíduo qual das alternativas de um par de ações é mais ou menos arriscada. Sendo assim, pode-se considerar que a ordenação do risco depende da percepção de risco que o indivíduo tem das ações. Uma vez que é possível estabelecer uma ordenação debaixo de condições de risco, conclui-se que se pode definir uma relação de preferência de risco  $\succsim_R$  para um par de ações. A relação de preferência de risco  $\succsim_R$  é uma relação binária: completa e transitiva.

De acordo com a literatura, é possível representar a relação de preferência de risco  $\succsim_R$  para as alternativas  $A$  e  $B$  pertencentes ao espaço de alternativas  $\mathcal{L}'$  a partir de uma função  $R : \mathcal{L}' \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, se:

$$A \succsim_R B \iff R(A) \geq R(B), \quad (3.1)$$

onde  $A, B$  representam as alternativas de um par de ações e  $R(\cdot)$  uma medida de risco. De acordo com a relação de preferência de risco  $\succsim_R$  a expressão (3.1) tem o seguinte

Tabela 3.1: Algumas conclusões de estudos empíricos que avaliam a percepção de risco.

---

**Conclusões retiradas, a partir de estudos empíricos, sobre a percepção de risco:**

---

- O risco de uma ação aumenta, se a probabilidade de perda aumentar (Brachinger and Weber, 1997);
  - Realizações que representem possíveis ganhos reduzem a percepção de risco sob a ação - os investigadores até ao momento ainda não conseguiram perceber como é que a percepção do risco depende de possíveis ganhos (Brachinger and Weber, 1997);
  - O risco não é simplesmente igual a uma preferência negativa (Brachinger and Weber, 1997);
  - Segundo Olsen, mais confiança está relacionada com menor percepção de risco;
  - Indivíduos que possuam mais conhecimento ou estejam mais familiarizados com a ação têm uma menor percepção de risco, de acordo com (Olsen, 1997 e MacGregor et al., 1999);
  - Indivíduos aversos ao risco sobrestimam as realizações negativas, conduzindo a uma maior percepção de risco, levando-os aceitar ações menos arriscadas (como citado em Nguyen et al., 2019);
  - Indivíduos propensos ao risco sobrestimam as realizações positivas conduzindo a uma menor percepção de risco, levando-os aceitar ações mais arriscadas (como citado em Nguyen et al., 2019).
-

significado: a alternativa  $A$  é pelo menos tão arriscada como a alternativa  $B$  se e só se, o risco de  $A$  é igual ou maior do que o risco de  $B$ ; no entanto, a versão mais utilizada pelos investigadores, que se baseia na relação de preferência  $\succsim$ , para interpretar a expressão (3.1), é:  $B$  é (fracamente) preferível a  $A$ .

Em suma, o risco pode ter vários significados dependendo do indivíduo e do campo de aplicação. No campo financeiro o risco é entendido como a variação da distribuição dos retornos (a definição de retornos apresentar-se-á na secção 5.2); enquanto, na psicologia o risco é visto como uma perda; e, em todos os campos da ciência a percepção dos indivíduos face ao risco pode ser caracterizada por uma relação de preferência de risco  $\succsim_R$  e, conseqüentemente, representada por uma medida de risco.

Suponha o conjunto de ações  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_M\}$ ; dada uma ação  $A_m \in \mathcal{A}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , considera-se  $X$  a sua variável aleatória com função de distribuição  $F_X(x)$  e função densidade de probabilidade (f.d.p)  $f_X$  ou função massa de probabilidade (f.m.p)  $p_X$ .

## 3.2 Medidas de Risco Simples

As medidas mais usuais e simples, que avaliam a percepção de risco dos indivíduos objetivamente, são (Brachinger and Weber, 1997):

**Definição 4** (*Valor Esperado*). A medida de risco **valor esperado**  $\mathbb{E}[X] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x), \quad (3.2)$$

representada através do integral de Riemann-Stieltjes; e,  $F_X(x)$  representa a função de distribuição - sendo que o diferencial  $dF_X(x)$  no caso discreto é dado por:

$$dF_X(x) = F_X(x) - F_X(x - dx);$$

e, no caso contínuo por:

$$dF_X(x) = f_X(x)dx.$$

**Definição 5** (*Variância*). A medida de risco **variância**  $\text{Var}[X] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é dada por:

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 dF_X(x). \quad (3.3)$$

De acordo com o artigo (Philippatos and Wilson, 1972), vários autores afirmam que existe uma medida de risco mais genérica, dinâmica e com um grau de liberdade para o pressuposto da distribuição *à priori* dos dados do que a variância, denominada por **entropia**. Nos mecanismos estatísticos, a entropia mede o risco da variável aleatória associada a uma ação; então, maior entropia significa maior risco. A medida que se segue foi desenvolvida por Shannon, em 1948, o fundador da Teoria de Informação - a sua área de referência.

**Definição 6 (Entropia).** *Caso  $X$  seja uma variável aleatória discreta que toma as realizações  $x_1, \dots, x_N$  com f.m.p igual a  $p_X(x_n) = P(X = x_n), n = 1, \dots, N$ , onde  $N$  representa o número de realizações; a medida de risco **entropia**  $H(X) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é dada por:*

$$H(X) = - \sum_{n=1}^N p_X(x_n) \ln(p_X(x_n)); \quad (3.4)$$

e, caso  $X$  seja uma variável aleatória contínua com f.d.p  $f_X(x)$ ;  $H(X) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , geralmente chamada de entropia diferencial, é dada por:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln(f_X(x)) dx. \quad (3.5)$$

De acordo com os autores do artigo anterior, quando se conhece a forma da distribuição para os dados o cálculo da entropia pode ser obtido diretamente a partir da fórmula da variância; no entanto, segundo (Garner and McGill, 1956), a entropia tem uma grande generalidade que pode ser útil, mesmo, quando o investigador calcula a variância. A entropia é adimensional e, portanto, pode-se comparar os diferentes valores de entropia, eventualmente ou não, associados a variáveis aleatórias diferentes, ao contrário da variância que é dimensional. Outra grande generalidade da entropia é que pode ser calculada para variáveis do tipo qualitativas (nominais e ordinais) pois, apenas, são exigidas as probabilidades.

Para o caso discreto, a entropia tem valor igual a zero, quando a probabilidade se “concentra” na única realização da variável aleatória; e, assume o valor máximo quando as probabilidades estão distribuídas uniformemente por todas as realizações da variável aleatória.

**Definição 7 (Probabilidade de Perda).** *A medida de risco **probabilidade de perda**,  $P(X \leq r) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , é dada por:*

$$P(X \leq r) = \int_{-\infty}^r dF_X(x) \quad (3.6)$$



onde  $r$  representa o nível (ou, quantil) a partir do qual o indivíduo tem uma perda.

Ao nível da interpretação, quanto mais próxima de zero for a probabilidade de perda para um nível inferior ou igual a  $r$  menos arriscada (ou mais segura) é a ação.

### 3.3 Medida de Risco Valor Esperado - Variância

Um importante marco no estudo da percepção de risco é a axiomatização da Teoria de Risco desenvolvida por Pollatsek e Tversky, em 1970.

Pollatsek and Tversky verificaram que uma vez satisfeitos sete axiomas é possível definir a seguinte medida de risco (Pollatsek and Tversky, 1970).

**Teorema 7.** *Se os sete axiomas forem verificados, então existe um único valor  $\theta$ ,  $0 < \theta \leq 1$ , tal que para  $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ,  $A_1 \succsim_R A_2$  se e só se  $R(A_1) \geq R(A_2)$ , onde*

$$R(A_1) = \theta \text{Var}[X_1] - (1 - \theta) \mathbb{E}[X_1], \quad (3.7)$$

onde  $\theta$  - um valor conhecido e indicado pelo indivíduo - representa a contribuição relativa entre o valor esperado e a variância e  $X_1, X_2$  são variáveis aleatórias associadas às ações  $A_1, A_2$ , respetivamente, com valor esperado e variância finita.

A medida de risco de Pollatsek e Tversky é apresentada, em notação genérica, na Definição 8.

**Definição 8.** *A medida de risco Pollatsek e Tversky,  $R_{PT}(A_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é dada por:*

$$R_{PT}(A_m) = \theta \text{Var}[X] - (1 - \theta) \mathbb{E}[X]. \quad (3.8)$$

Quando o valor de  $\theta \rightarrow 0$ , o indivíduo tende a dar mais importância ao valor esperado do que à dispersão existente na variável  $X$ ; quando o valor de  $\theta = 0,5$ , as duas componentes variância e valor esperado possuem a mesma ponderação na medida de risco; no entanto, quando o valor de  $\theta = 1$  a medida de risco de Pollatsek e Tversky baseia-se, apenas, na variância da variável aleatória  $X$ , ou seja,  $R_{PT}(A_m) = \text{Var}[X]$ .

A relação de preferência de risco  $\succsim_R$  entre duas ações pode ser representada, neste caso, pela combinação linear do valor esperado e variância (ver equação (3.8)). Este modelo de dois “atributos” pode assumir valores negativos e distribuições degeneradas podem originar valores diferentes de zero.

É de notar que Pollatsek e Tversky, no seu artigo, consideraram que a avaliação da adequabilidade da presente medida de risco foi uma tarefa difícil, uma vez que as suas perceções de risco não eram tão claras, no momento, e, porque definir uma medida de risco que fosse capaz de representar a ordenação do risco realizada pelos indivíduos não é fácil. Mais tarde, estudos empíricos, apresentados por Coombs e Bowen (Brachinger and Weber, 1997), mostraram que a medida de risco de Pollatsek e Tversky é insuficiente para determinar o risco, uma vez que existem outros fatores, para além destas duas componentes que afetam a perceção de risco, tal como a assimetria (*skewness*).

### 3.4 Medida de Risco de Utilidade Esperada

Até ao momento no documento, não se utilizou a utilidade esperada para medir a perceção de risco que os indivíduos sob uma ação. No entanto, a abordagem apresentada por Jia e Dyer (Brachinger and Weber, 1997) que se baseia na utilidade esperada assume que a perceção de risco de uma ação associada a uma variável aleatória deve ser avaliada considerando como referência o valor esperado, podendo assim contribuir para identificar perdas ou ganhos relativos e eventuais *outliers*; isto é, as autoras defendem que o valor esperado deve ser utilizado como uma medida de “agregação” ou complementaridade.

**Definição 9** (*Medida de Risco standard*). A medida de risco proposta por Jia e Dyer denominada por **medida de risco standard**,  $R_S(A_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$R_S(A_m) = -\mathbb{E}[u(X')] = -\mathbb{E}[u(X - \mathbb{E}[X])], \quad (3.9)$$

onde  $u(\cdot)$  representa a função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern; e,  $X'$  representa a variável aleatória “normalizada” de  $X$  (subtrai-se a cada realização de  $X$  o seu valor esperado).

Como a equação (3.9) incorpora a medida de risco valor esperado esta pode ser, indiretamente, classificada como um modelo de risco de dois atributos (*two-attribute model*).

### 3.5 Medida de Risco Utilidade Esperada-Entropia

Como a utilidade esperada não descreve adequadamente as decisões dos indivíduos, conforme se concluiu no Capítulo 2, e a entropia por si só não é capaz de descrever o comportamento dos decisores; (Yang and Qiu, 2005) desenvolveram uma medida de risco baseada na utilidade esperada e entropia. Os autores consideram-na, em particular às medidas de risco clássicas e à medida de risco utilidade esperada, como uma versão mais realista,

pois estudos empíricos mostraram para alguns problemas de decisão, por exemplo, para o paradoxo de Allais resultados e/ou interpretações razoáveis. Recorde-se que o paradoxo de Allais, apresentado na Secção 2.6, mostrou que a utilidade esperada nem sempre consegue modelar adequadamente as preferências dos indivíduos. Todavia, a teoria de utilidade esperada tem sido amplamente aceite como modelo de análise de decisão quando esta envolve também uma medida de risco.

**Definição 10** (*Medida de Risco Utilidade Esperada-Entropia (UE-E)*). *Suponha que existam pelo menos duas ações em  $\mathcal{A}$ ; que  $\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\}$  exista; e, que  $u(\cdot)$  denota uma função de utilidade monótona crescente.*

*Quando  $\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\} \in \mathbb{R}^+$ , a **medida de risco utilidade esperada-entropia**,*

$$R_{UE-E}(A_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

é dada por:

$$R_{UE-E}(A_m) = \lambda H(X) - (1 - \lambda) \frac{\mathbb{E}[u(X)]}{\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\}}, \quad (3.10)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  é uma constante especificada pelo indivíduo (*tradeoff coefficient*); e,  $H(X)$  denota a entropia de Shannon para a variável  $X$  associada à ação  $A_m, \forall m \in \{1, \dots, M\}$ . Quando  $\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\} = 0$  significa que para qualquer ação  $A_m \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{E}[u(X)] = 0$ ; então, para este caso, a **medida de risco utilidade esperada-entropia**,  $R_{UE-E}(A_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , é dada por:

$$R_{UE-E}(A_m) = H(X). \quad (3.11)$$

A constante  $\lambda$  representa a ponderação que a componente subjetiva, presente na escolha da função de utilidade e na constante  $\lambda$ , e a componente objetiva, presente na entropia e na utilidade esperada normalizada através das probabilidades e realizações, têm na medida de risco apresentada.

Se o decisor deseja que a medida da equação (3.10) se foque totalmente no quociente  $\frac{\mathbb{E}[u(X)]}{\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\}}$ , então,  $\lambda = 0$ ; quando  $\lambda = 0,5$ , o indivíduo reforça que subjetividade e objetividade têm a mesma relevância para quantificar o risco de uma ação; no entanto, se o indivíduo deseja atribuir uma pequena ponderação à utilidade esperada o valor de  $\lambda \rightarrow 1$ ; caso as  $M$  ações representadas através de  $M$  variáveis aleatórias tenham a mesma utilidade esperada a medida de risco UE - E focar-se-á apenas na medida de risco simples entropia e na constante  $\lambda$ ; e, caso o indivíduo pretenda dar total preferência à entropia obtém-se a medida de risco apresentada na equação (3.11).

**Nota.** Algumas das representações realizadas por (Luce et al., 2008 como citado em Chiew et al., 2019) contribuíram para o avanço da axiomatização da medida de risco UE-E.

(Yang and Qiu, 2005) melhoraram o modelo UE - E apresentado na Definição 10 para um modelo de UE-E normalizado permitindo, assim, a comparação de variáveis aleatórias nas situações em que o conjunto de variáveis aleatórias é amplamente disperso como, por exemplo, no caso em que as variáveis possuem entre si diferente número de realizações.

**Definição 11** (*Medida de Risco Utilidade Esperada-Entropia Normalizada (UE - E)<sub>Nor</sub>*). *Suponha que existam pelo menos duas ações em  $\mathcal{A}$ ; que  $\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\}$  exista; e, que  $u(\cdot)$  é uma função de utilidade monótona crescente.*

*Quando  $\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\} \in \mathbb{R}^+$ , a medida de risco utilidade esperada-entropia normalizada,  $R_{(UE-E)_{Nor}}(A_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é dada por:*

$$R_{(UE-E)_{Nor}}(A_m) = \lambda \frac{H(X)}{\ln(N)} - (1 - \lambda) \frac{\mathbb{E}[u(X)]}{\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\}}, \quad (3.12)$$

onde  $\frac{H(X)}{\ln(N)}$  representa a entropia de Shannon normalizada e  $\frac{\mathbb{E}[u(X)]}{\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(X)]|\}}$  representa a utilidade esperada normalizada.



# 4

## Modelo de Otimização Média-Variância de Portefólios

Harry Markowitz, mais conhecido por “Markowitz”, um notável economista que recebeu o Prémio Nobel da Economia pela sua pioneira contribuição teórica para a economia e sociedade financeira, estabeleceu, na sua dissertação de doutoramento em Estatística fundamentos para a Teoria Moderna do Portefólio (Würtz et al., 2009), uma estrutura de seleção e construção de portefólios de investimento, com base na maximização do valor esperado para um dado risco ou na minimização do risco para um dado valor esperado, denominada por **Modelo de Otimização Média-Variância**.

*À posteriori*, o vocábulo “ação” tomará a seguinte definição:

**Definição 12.** “Ação” representa o título representativo de uma parte do capital de uma sociedade.

### 4.1 Motivação

O modelo média-variância concebido por Markowitz, desde sua apresentação, tem sido usado extensivamente no campo financeiro. Por esse motivo apresentar-se-á as motivações que levaram Markowitz à formulação deste modelo.

Conforme o apresentado nas Secções 2.4 e 2.5 concluiu-se que é possível representar a relação de preferência entre duas alternativas através da maximização da utilidade esperada debaixo de um conjunto de regras (ou axiomas).

O modelo de otimização média-variância foi motivado através da maximização da utilidade esperada da seguinte forma:

- Seja  $W$  uma variável aleatória cuja função de utilidade de  $W$  pode ser obtida através da série de Taylor de ordem  $n$  em torno  $\mathbb{E}[W]$  associada à função de utilidade real  $u(\cdot)$  infinitamente diferenciável neste ponto, quando o valor esperado de  $W$  é finito:

$$u(W) = u(\mathbb{E}[W]) + u'(\mathbb{E}[W])(W - \mathbb{E}[W]) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{E}[W])(W - \mathbb{E}[W])^2 + O(W^3), \quad (4.1)$$

onde

$$O(W^3) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u^n(\mathbb{E}[W])}{n!} (W - \mathbb{E}[W])^n, \quad (4.2)$$

e, onde  $u^n(\mathbb{E}[W])$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $u(\cdot)$  no ponto  $\mathbb{E}[W]$ .

- Assumindo que a série de Taylor converge, então aplicando o valor esperado à expressão (4.1) obtém-se a seguinte expressão para a utilidade esperada de  $W$ :

$$\mathbb{E}[u(W)] = u(\mathbb{E}[W]) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{E}[W])\text{Var}[W] + \mathbb{E}[O(W^3)], \quad (4.3)$$

onde  $\text{Var}[W] = \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2]$  e

$$\mathbb{E}[O(W^3)] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u^n(\mathbb{E}[W])}{n!} \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^n], \quad (4.4)$$

onde  $\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^n]$  denota o  $n$ -ésimo momento central de  $W$ .

A partir da expressão (4.3) é possível concluir que a utilidade esperada não é, somente, explicada através da variância e do valor esperado; envolve, também, momentos centrais de ordem igual ou superior a 3. Por isto, Markowitz impôs duas suposições alternativas que motivaram a construção do modelo de otimização média-variância (Huang and Litzenberger, 1988):

- **Para distribuições arbitrárias**, o modelo média-variância pode ser motivado assumindo uma função de utilidade quadrática.

- Debaixo de uma função de utilidade quadrática  $\mathbb{E}[O(W^3)]$  é zero, uma vez que para  $n \geq 3$ ,  $u^n(\mathbb{E}[W]) = 0$ . Obtendo, especificamente, que:

$$\mathbb{E}[u(W)] = u(\mathbb{E}[W]) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{E}[W])\text{Var}[W]. \quad (4.5)$$

Logo, uma função de utilidade quadrática é suficiente para que  $\mathbb{E}[u(W)]$  fique completamente descrita através do valor esperado e variância;

- Para um conjunto restrito de funções de utilidade quadráticas com  $u' > 0$  e  $u'' < 0$  (ver, como exemplo, a função de utilidade quadrática apresentada na Secção 2.5) garante-se o objetivo deste modelo de otimização: minimiza o risco (considerando como medida de risco a variância) para um dado valor esperado, a partir de  $\text{Var}[W]$ , ou maximiza o valor esperado para um dado risco, a partir de  $\mathbb{E}[W]$ .
- **Para funções de utilidade arbitrárias (com exceções)**, o modelo média-variância pode ser motivado assumindo uma distribuição normal para a variável aleatória  $W$ .
  - Debaixo da normalidade, o momento central de ordem igual ou superior a 3 -  $\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^n]$  - envolvido na expressão  $\mathbb{E}[O(W^3)]$  escrever-se-á a partir do momento de 1<sup>o</sup> ordem e do momento central de 2<sup>a</sup> ordem;
  - Para esta alternativa, as funções de utilidade arbitrárias referem-se ao conjunto de funções de utilidade com  $u' > 0$  e  $u'' < 0$  (ver, como exemplo, as funções de utilidade apresentadas na Secção 2.5); pois só debaixo destas condições é que se garante um problema de maximização da utilidade esperada de  $W$  e, conseqüentemente, o objetivo do modelo apresentado. Assim sendo, só, são admissíveis funções de utilidade com características semelhantes às apresentadas na Secção 2.5.

**Nota.** Ambas as suposições impõem que este modelo de otimização seja, apenas, aplicável aos indivíduos aversos ao risco.

## 4.2 Problema de Portefólio de Markowitz

### 4.2.1 Definições e notações

Esta secção surge com o intuito de apresentar algumas definições e notações fundamentais para o desenvolvimento da dissertação.



**Definição 13.** A covariância das variáveis aleatórias  $W$  e  $X$  é

$$\text{Cov}(W, X) = \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])(X - \mathbb{E}[X])], \quad (4.6)$$

se este valor esperado existir.

**Definição 14.** Denote por  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_M\}$  o conjunto de ações.

**Definição 15.** Denote por  $\mathbf{R}^T = [R_1, R_2, \dots, R_M]$  o vetor aleatório de retornos de  $M$  ações distintas, onde  $R_m$  representa a variável aleatória associada aos retornos da ação  $A_m$ , para  $m = 1, \dots, M$ .

**Definição 16.** Se  $\mathbf{R}^T$  é um vetor aleatório então o valor esperado de  $\mathbf{R}$  pode ser representado por

$$\mathbb{E}[\mathbf{R}]^T = [\mathbb{E}[R_1], \mathbb{E}[R_2], \dots, \mathbb{E}[R_M]] \quad (4.7)$$

**Definição 17.** Denota-se por  $\Sigma$  a matriz de variância-covariância de  $\mathbf{R}$ :

$$\Sigma = \text{Cov}(R_n, R_m) = (\sigma_{n,m}) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,M} \\ & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,M} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{M,M} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

onde  $\sigma_{n,m} = \sigma_{m,n}$ , para  $n, m = 1, \dots, M$ . Quando  $n = m$ ,  $\sigma_{m,m} = \sigma_m^2 = \text{Var}[R_m]$ .

Do mesmo modo se define a matriz de correlações de  $\mathbf{R}$

$$\rho = (\rho_{n,m}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{1,M}}{\sigma_1\sigma_M} \\ & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2,M}}{\sigma_2\sigma_M} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

onde  $\sigma_m$  representa o desvio padrão de  $R_m$  e  $\rho_{n,m} = \rho_{m,n}$ , para  $n, m = 1, \dots, M$ . Quando  $n = m$ ,  $\rho_{n,m} = \rho_{n,n} = 1$ .

**Definição 18.** Denote por  $\omega^T = [\omega_1, \dots, \omega_M]$  o vetor de pesos para  $M$  ações distintas, onde  $\omega_m, m = 1, \dots, M$ , representa a proporção de determinado capital que o indivíduo quer investir na ação  $m$ , com  $\omega_m \geq 0$  e  $\sum_{m=1}^M \omega_m = 1$ .

**Definição 19.** Se  $\mathbf{R}$  é um vetor aleatório de retornos de  $M$  ações distintas e se  $\boldsymbol{\omega}^T$  é um vetor de pesos então o portfólio de investimento  $P$ , caracterizado por uma combinação pesada de retornos de ações, é dado pela expressão

$$P = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R} \quad (4.10)$$

$$= \sum_{m=1}^M \omega_m R_m \quad (4.11)$$

**Definição 20.** Seja  $P$  um portfólio de investimento. O valor esperado de  $P$  é dado por:

$$\mathbb{E}[P] = \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{E}[\mathbf{R}] \quad (4.12)$$

$$= \sum_{m=1}^M \omega_m \mathbb{E}[R_m] \quad (4.13)$$

Do mesmo modo se define a variância de  $P$ ,

$$\begin{aligned} \text{Var}[P] &= \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} \\ &= \sum_{m=1}^M \omega_m^2 \sigma_{m,m}^2 + \sum_{n=1}^M \sum_{m=1, n \neq m}^M \omega_n \omega_m \sigma_{n,m} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$= \sum_{m=1}^M \omega_m^2 \sigma_{m,m}^2 + \sum_{n=1}^M \sum_{m=1, n \neq m}^M \omega_n \omega_m \rho_{n,m} \sigma_n \sigma_m \quad (4.15)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}$  representa a matriz de variância-covariância apresentada na Definição 17.

## 4.2.2 Otimização

De acordo com o objetivo apresentado no exórdio do Capítulo 4 é de notar que existem duas opções de otimização para se aplicar o modelo de portfólio média-variância; no entanto, neste documento, apenas, se considera o

- problema de Markowitz de risco mínimo

pelo motivo de simplicidade comparativamente ao

- problema de Markowitz de retorno máximo (ver, por exemplo, Würtz et al., 2009).

O problema de otimização de portfólio particularmente o problema de Markowitz de risco mínimo é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^* = \min_{\boldsymbol{\omega}} \quad & \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{E}[\mathbf{R}] = \mu_0, \\ & \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}^*$  representa o vetor de pesos que têm variância mínima,  $\mathbf{1}$  um vetor coluna  $M \times 1$  de 1's e  $\mu_0$  o retorno esperado especificado pelo indivíduo.

**Nota.** Note que multiplicou-se o  $\frac{1}{2}$  à variância de  $P$  por uma questão de simplificação dos cálculos *à posteriori*; acrescenta-se que, este artifício de cálculo não afetará o resultado da solução ótima.

Para resolver este problema de minimização recorrer-se-á aos multiplicadores de Lagrange. Considere a função lagrangiana  $L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2)$ , aplicada ao problema de minimização apresentado na equação (4.16), definida por:

$$L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} + \lambda_1 [\mu_0 - \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{E}[\mathbf{R}]] + \lambda_2 [1 - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1}], \quad (4.17)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  representam os multiplicadores de Lagrange.

Para minimizar a função  $L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2)$  derivar-se-á a função lagrangiana em ordem a  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  igualando-se, em seguida, cada derivada a zero:

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \mathbb{E}[\mathbf{R}] - \lambda_2 \mathbf{1} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \mu_0 - \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{E}[\mathbf{R}] = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 0. \quad (4.20)$$

Resolvendo a equação (4.18) em a ordem a  $\boldsymbol{\omega}$  obtém-se:

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}] + \lambda_2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.21)$$

Pré-multiplicando a equação (4.21) por  $\mathbb{E}[\mathbf{R}]^T$  e usando a expressão (4.19) tem-se:

$$\mathbb{E}[\mathbf{R}]^T \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \mathbb{E}[\mathbf{R}]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}] + \lambda_2 \mathbb{E}[\mathbf{R}]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = \mu_0. \quad (4.22)$$

Pré-multiplicando, também, a equação (4.21) por  $\mathbf{1}^T$  e usando a expressão (4.20) tem-se:

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}] + \lambda_2 \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = 1. \quad (4.23)$$

Resolvendo o sistema de equações (4.22) e (4.23) em ordem a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  obtém-se:

$$\lambda_1 = \frac{C\mu_0 - A}{D} \quad (4.24)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{B - A\mu_0}{D}, \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}] \\ B &= \mathbb{E}[\mathbf{R}]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}] \\ C &= \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ D &= BC - A^2. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.21) as expressões (4.24) e (4.25) no  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respetivamente, e aplicando os passos necessários para a obtenção de  $\boldsymbol{\omega}^*$  analiticamente tem-se:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{1}{D} [B\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} - A\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}]] + \frac{1}{D} [C\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{R}] - A\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}] \mu_0, \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Fronteiras Viável e Eficiente

Os diferentes  $\boldsymbol{\omega}^*$  do problema de otimização de Markowitz são obtidos atribuindo diferentes valores a  $\mu_0$ ; os valores atribuídos a  $\mu_0$  levarão à formação de uma curva cónica - uma hipérbole. A título de exemplo apresenta-se as representações gráficas da Figura 4.1 que relacionam o risco, definido como a variância do portefólio, com o valor esperado do portefólio.

A fronteira viável e eficiente (definições apresentadas no parágrafo seguinte e Definição 21, respetivamente) assim como o ponto que as separa, o ponto de variância mínima global, estão representadas graficamente na Figura 4.1.

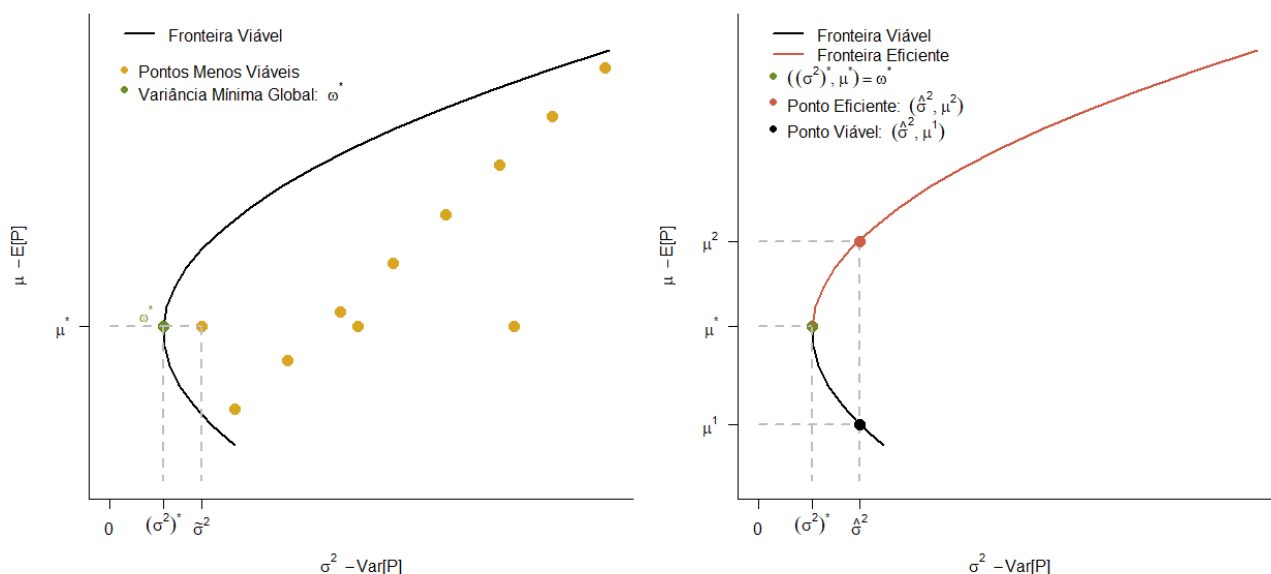


Figura 4.1: Modelo de otimização média-variância: representação gráfica do risco *versus* retorno do portfólio. Painel esquerdo: representação da fronteira viável, pontos menos viáveis e ponto de variância mínima global. Painel direito: representação da fronteira eficiente e parte da fronteira viável.

O painel esquerdo sugere que qualquer ponto sobre a hipérbole garante sempre a variância mínima para um dado valor esperado do portfólio; isto é, para o mesmo valor esperado do portfólio,  $\mu^*$ , o ponto  $((\sigma^2)^*, \mu^*)$ , representado a verde na figura, produz um menor risco do que o ponto  $(\hat{\sigma}^2, \mu^*)$ , representado a amarelo. Logo, o ponto  $((\sigma^2)^*, \mu^*)$  é denominado por **ponto viável**; de uma maneira em geral, todos os pontos de  $\mathbb{R}^2 : (\sigma^2, \mu)$  pertencentes à hipérbole são designados por **pontos viáveis**. O ponto  $((\sigma^2)^*, \mu^*)$  é, também, chamado de **ponto de variância mínima global**, uma vez que  $(\sigma^2)^*$  corresponde à abcissa de menor valor de entre todas as abcissas de pontos que constituem a hipérbole; geralmente, a combinação de ações associada ao ponto de variância mínima global é selecionada por indivíduos aversos ao risco.

**Definição 21.** *Seja  $(\sigma^2, \mu)$  um ponto viável qualquer e  $((\sigma^2)^*, \mu^*)$  o ponto de variância mínima global de um problema de otimização de Markowitz. O ponto viável  $(\sigma^2, \mu)$  é, também, **eficiente** se:  $\mu \geq \mu^*$ . O conjunto de pontos eficientes origina a **fronteira eficiente**.*

O painel direito, da Figura 4.1, indica a existência de duas fronteiras: eficiente (curva a vermelho tijolo) e a viável (curva a preto). Qualquer ponto que pertença à fronteira

eficiente garante sempre o maior valor esperado do portfólio para um dado risco, ou seja, maximiza o valor esperado para uma dada variância do portfólio; como exemplo, tem-se o ponto a vermelho tijolo da Figura 4.1 comparativamente ao ponto observável a preto.

Um portfólio viável ou eficiente, em vias de seleção pelo indivíduo, para investimento cujos retornos possuem independência ou estejam negativamente correlacionados conduzem a resultados de menor risco. Esta característica entre os retornos está relacionada com a diversificação, conceito que apresentar-se-á a seguir.

#### 4.2.4 Diversificação

No quotidiano, a diversificação consiste em tornar algo heterogêneo o que antes era homogêneo, ou seja, gerar diferença.

A diversificação dos portfólios está presente nos fatores internos das sociedades detentoras de um título, no número de títulos existentes no portfólio com ponderações diferentes de zero e na interdependência linear entre os retornos.

Em grande parte dos casos, a diversificação do portfólio conduz à minimização do risco.

##### Fatores internos à sociedade

Como a diversificação influencia os resultados do valor esperado e variância do portfólio alguns resultados apresentados graficamente podem conduzir a interpretações erradas, uma vez que a diversificação pode reduzir ou eliminar determinados fatores de risco, tais como: os fatores exclusivos de uma sociedade, processos judiciais, má reputação, má gestão de contas e outros, levando, assim, à diminuição da variância do portfólio. Por outro lado, segundo Mangram, os fatores externos não são reduzidos ou eliminados pela diversificação afetando todas ou grande parte das sociedades na bolsa de valores ao mesmo tempo.

##### Dimensão do portfólio e Interdependência dos Retornos

- **Dimensão do Portfólio** Os dois casos particulares que se apresentarão permitem mostrar como a dimensão do portfólio influencia o risco do portfólio.

**Caso 1.** Suponha que exista **independência** entre os retornos, isto é,  $\rho_{n,m} = 0$ , para todo  $n, m = 1, \dots, M$ , e que investir-se-á  $\omega_m$  do capital  $k$  nas  $M$  ações da bolsa de valores, ou seja,  $\omega_m = \frac{1}{M}$ , tal que  $\sum_{m=1}^M \omega_m = 1$ , para  $m = 1, \dots, M$ .

Substituindo na fórmula da variância do portfólio  $\text{Var}[P]$ , apresentada na equação (4.15), as suposições admitidas anteriormente tem-se:

$$\text{Var}[P] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_m^2}{M}. \quad (4.27)$$

Quando  $M \rightarrow \infty$ ,  $\text{Var}[P] \rightarrow 0$ .

Logo, quando  $M \rightarrow \infty$  o risco de um portfólio é relativamente menor (tende para zero) comparativamente a um portfólio com um risco igual ou semelhante ao da expressão apresentada na equação (4.27).  $\triangleleft$

**Caso 2.** Suponha que exista **dependência** entre os retornos  $R_m, m = 1, \dots, M$ , e que investirse-á  $\omega_m$  do capital  $k$  nas  $M$  ações da bolsa de valores, ou seja,  $\omega_m = \frac{1}{M}$ , tal que  $\sum_{m=1}^M \omega_m = k = 1$ , para  $m = 1, \dots, M$ .

Substituindo na fórmula (4.14) da variância do portfólio  $\text{Var}[P]$  as suposições admitidas anteriormente tem-se:

$$\text{Var}[P] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_m^2}{M} + \frac{M-1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1, n \neq m}^M \frac{\sigma_{m,n}}{M(M-1)}.$$

Considerando

$$\bar{\sigma}_m^2 = \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_m^2}{M}$$

e

$$\bar{\sigma}_{m,n} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1, n \neq m}^M \frac{\sigma_{m,n}}{M(M-1)},$$

tem-se que:

$$\text{Var}[P] = \frac{1}{M} \bar{\sigma}_m^2 + \frac{M-1}{M} \bar{\sigma}_{m,n}, \quad (4.28)$$

onde  $\frac{1}{M} \bar{\sigma}_m^2$  e  $\frac{M-1}{M} \bar{\sigma}_{m,n}$  representam a média da “variância” e a média da “covariância” do portfólio, respectivamente.

Quando  $M \rightarrow \infty$ ,  $\text{Var}[P] = \bar{\sigma}_{m,n}$ .

Logo, quando  $M \rightarrow \infty$  o risco de um portfólio é relativamente menor comparativamente a um portfólio com um risco igual ou semelhante à expressão apresentada na equação (4.28).  $\triangleleft$

Comparando os Casos 1 e 2 de forma sintetizada, verifica-se, para os casos de independência e dependência entre os retornos, que o risco do portfólio diminui com o aumento do número de ações num portfólio em consequência do aumento da diversificação. Para o primeiro caso, o risco do portfólio aproxima-se de zero e para o segundo caso o risco do portfólio fica apenas a depender da média das covariâncias

entre os retornos do portfólio, respetivamente.

- **Interdependência entre os retornos**

O comportamento de interdependência entre os retornos associados às ações contribui para o objetivo da diversificação, isto é, se existir um aumento do número de retornos num portfólio independentes ou negativamente correlacionados, o risco desse portfólio diminui.

A partir da equação (4.28), apresentada no Caso 2, concluí-se que se existir um elevado número de retornos de ações negativamente correlacionados,  $\bar{\sigma}_{m,n}$  tomará um valor baixo que conduzirá a uma variância do portfólio a tender para zero ( $\text{Var}[P] \rightarrow 0$ ). Além disso, deduz-se que o risco do portfólio quando existe um elevado número de retornos de ações entre si negativamente correlacionados (ver equação (4.28)) é menor comparativamente a portfólios com um elevado número de retornos independentes entre si (ver equação (4.27)), supondo que as proporções de  $\omega_m$  são iguais, para  $m = 1, \dots, M$ .

### 4.3 Otimização de duas ações

Suponha que existam **duas ações** (ou, **investimentos**)  $A_1$  e  $A_2$ ,  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ , associadas ao vetor de retornos  $\mathbf{R}^T = [R_1, R_2]$ , de modo respetivo, e para cada uma das ações investir-se-á  $\omega_m$  do capital  $k$ , onde  $\omega_m \in [0, 1]$ ,  $\sum_{m=1}^2 \omega_m = k = 1$ . Então, o portfólio de investimento  $P$  para as duas ações  $A_1$  e  $A_2$  é dado por

$$\begin{aligned} P &= \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 \\ &= \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### Condição 1.

Suponha que  $-1 \leq \rho_{1,2} < 1$  e  $\text{Var}[R_1] = \text{Var}[R_2] = \sigma_1^2 > 0$ .

Assim sendo e atendendo às expressões (4.15) e (4.29),  $\text{Var}[P]$  toma a seguinte expressão

$$\text{Var}[P] = \sigma_1^2[\omega_1^2 + (1 - \omega_1)^2] + 2\omega_1(1 - \omega_1)\sigma_1^2\rho_{1,2}. \quad (4.30)$$

O valor esperado de  $P$ ,  $\mathbb{E}[P]$ , é dado por

$$\mathbb{E}[P] = \omega_1\mathbb{E}[R_1] + (1 - \omega_1)\mathbb{E}[R_2].$$



A partir das expressões (4.16) e (4.30) é possível encontrar o valor de  $\omega_1^*$  que minimiza a variância

$$\omega_1^* = \min_{\omega_1} \frac{1}{2} \text{Var}[P] \quad (4.31)$$

$$= \min_{\omega_1} \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 \left[ \omega_1^2 + (1 - \omega_1)^2 \right] + 2\omega_1(1 - \omega_1)\sigma_1^2\rho_{1,2} \right] \quad (4.32)$$

Para tal, derivar-se-á a expressão (4.30) em ordem a  $\omega_1$  igualando-a, em seguida, a zero

$$\frac{\partial \text{Var}[P]}{\partial \omega_1} = 2\omega_1 - 2\omega_1\rho_{1,2} - 1 + \rho_{1,2} = 0 \quad (4.33)$$

Resolvendo a equação (4.33) em ordem a  $\omega_1$  obtém-se

$$\omega_1 = \frac{1}{2},$$

e por conseguinte, um  $\omega_2 = (1 - \omega_1) = \frac{1}{2}$ .

Como  $\frac{\partial^2 \text{Var}[P]}{\partial^2 \omega_1} = 2\sigma_1^2(1 - \rho_{1,2}) > 0$  sabe-se que de facto a função (4.30) tem um **mínimo global** em  $\omega_1 = \frac{1}{2}$ .

Logo, quando a variância do portefólio é  $\text{Var}[P] = \frac{1}{2}\sigma_1^2(1 + \rho_{1,2})$  e o valor esperado é  $\mathbb{E}[P] = \frac{\mathbb{E}[R_1] + \mathbb{E}[R_2]}{2}$  o indivíduo deverá investir metade do capital  $k$  nas ações  $A_1$  e  $A_2$  para obter um risco mínimo, onde  $-1 \leq \rho_{1,2} < 1$  e  $\forall \mathbb{E}[R_1], \mathbb{E}[R_2] \in \mathbb{R}$ .

Numa situação de independência entre retornos, a variância do portefólio reduz-se a  $\text{Var}[P] = \frac{1}{2}\sigma_1^2$ .

Sob o ponto de vista investigacional e de interpretação, o exemplo referente à Condição 2. foi construído debaixo de um pressuposto mais realista do que a Condição 1. por considerar-se que  $\text{Var}[R_1] \neq \text{Var}[R_2]$ .

### Condição 2.

Suponha que  $-1 \leq \rho_{1,2} < 1$  e  $\text{Var}[R_1] \neq \text{Var}[R_2] > 0$ .

Assim sendo, suponha os seguintes valores para

$\mathbb{E}[\mathbf{R}]^T = [1 \quad 12]$ ,  $\Sigma = \sigma_{n,m} = \begin{bmatrix} 1 & -0,80 \\ -0,80 & 4 \end{bmatrix}$  e  $\rho = (\rho_{n,m}) = \begin{bmatrix} 1 & -0,40 \\ -0,40 & 1 \end{bmatrix}$  o vetor de valor esperado, a matriz de variância-covariância e a matriz de correlações dos retornos, respetivamente.

Usando as propriedades do valor esperado e variância tem-se que:

$$\mathbb{E}[P] = -11\omega_1 + 12$$

e

$$\text{Var}[P] = 11,4\omega_1^2 - 22,4\omega_1 + 12,$$

para  $\omega_1 \in [0, 1]$ .

O problema de otimização, em particular o problema de Markowitz de risco mínimo, é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \min_{\omega_1} \frac{1}{2} \text{Var}[P] \\ &= \min_{\omega_1} \frac{1}{2} [11,4\omega_1^2 - 22,4\omega_1 + 12] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Tratando de um problema de otimização de 2 ações recorreu-se à derivação para obter o  $\omega_1^*$ ; obtendo-se um  $\omega_1^* = 0,73$  e um  $\omega_2^* = (1 - \omega_1^*) = 0,27$ . Como  $\frac{\partial^2 \text{Var}[P]}{\partial^2 \omega_1} = 6 > 0$ ,  $\omega_1^* = 0,73$  e  $\omega_2^* = 0,27$  representam as proporções do capital  $k$  que o indivíduo investirá nas ações  $A_1$  e  $A_2$ , respetivamente, para obter uma variância mínima global de 0,51 ( $\text{Var} = 0,51$ ) e um retorno esperado de 4,00 ( $\mathbb{E}[P] = 4,00$ ).

Para complementar o resultado anterior apresenta-se, na Figura 4.2, a representação gráfica que relaciona o risco e o valor esperado do portefólio para o problema de minimização da equação (4.34).

Se o indivíduo pretende um portefólio com retorno esperado máximo, o seu investimento apenas se focará na ação  $A_2$  e obterá um risco  $\text{Var}[P] = 4,00$ , ver Figura 4.2. Porém, caso pretenda investir em mais do que uma ação, o risco associado a esse investimento será menor do que no caso anterior, ver Figura 4.2. A partir deste resultado e de acordo com o Caso 1, conclui-se que o incremento de uma ação num portefólio reduz o risco do investimento pelo motivo que existe mais variedade no portefólio.

Vale a pena referir que para valores de  $\text{Var}[P]$  compreendidos entre  $0,51 < \text{Var}[P] \leq 1$  a diversificação maximiza, sempre, o valor esperado do portefólio  $\mathbb{E}[P]$ .

A Figura 4.3 apresenta a taxa instantânea de variação de  $\mathbb{E}[P]$  em  $\text{Var}[P]$ , para valores de  $\mathbb{E}[P]$  superiores a 4,00 ( $\mathbb{E}[P] = 4,00$  representa o valor esperado obtido para o portefólio que garante a variância mínima global) e um sub-gráfico que apresenta a relação entre o valor esperado e o risco do portefólio.

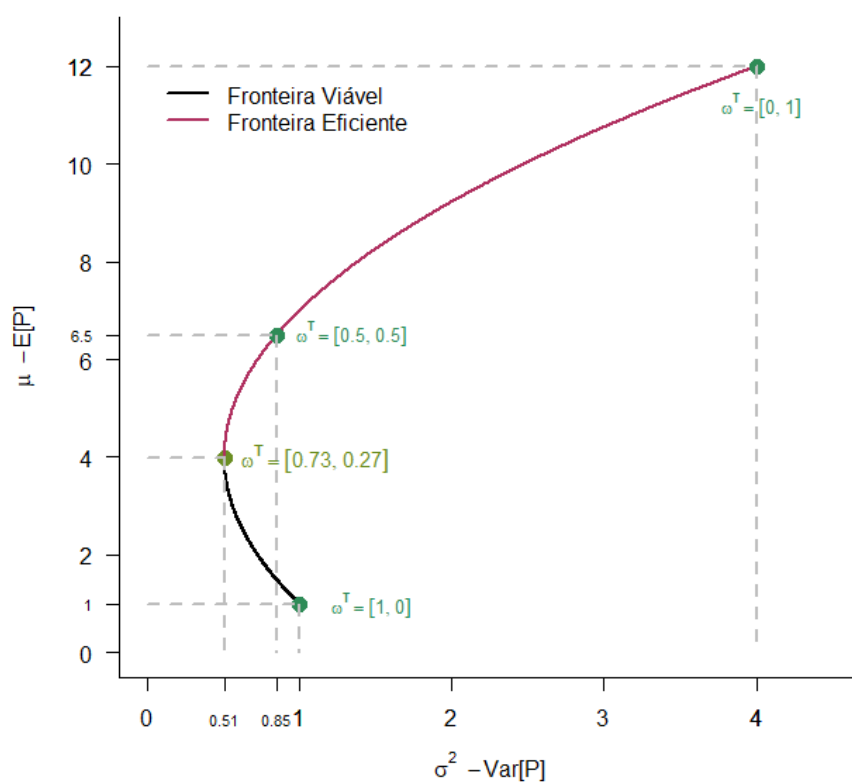


Figura 4.2: Problema de minimização de 2 ações restrito à Condição 2.. Representação gráfica do valor esperado ( $\mu - \mathbb{E}[P]$ ) versus da variância do portfólio ( $\sigma^2 - \text{Var}[P]$ ), que contém as fronteiras viável e eficiente e alguns pontos importantes.

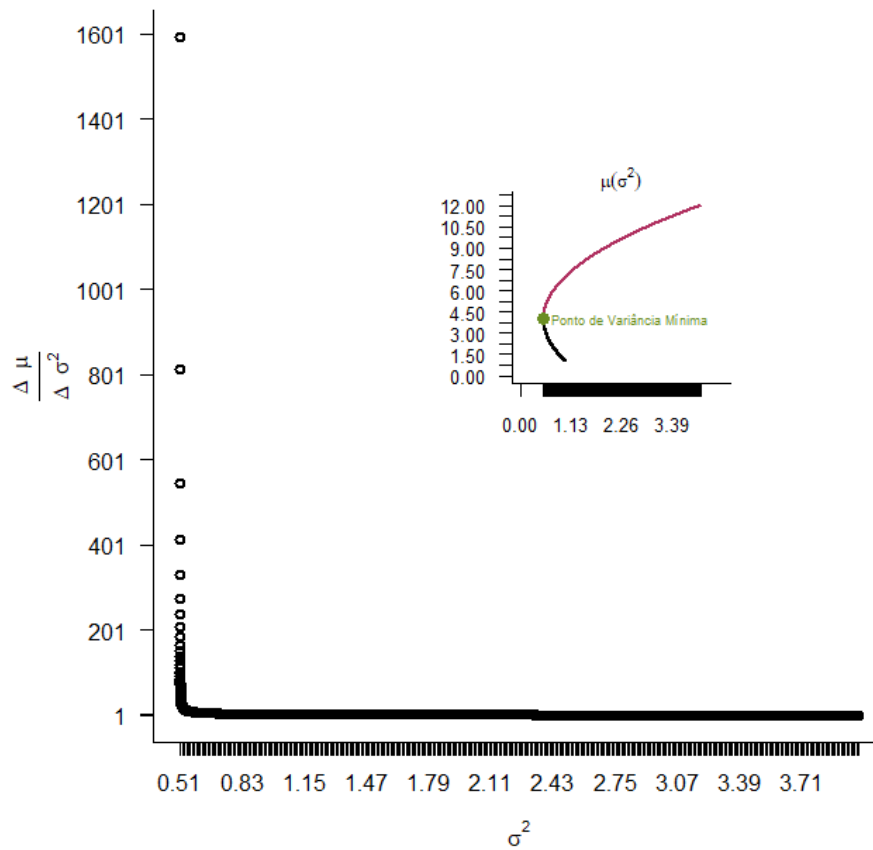


Figura 4.3: Taxa instantânea de variação de  $\mathbb{E}[P]$  em  $\text{Var}[P]$ , restrita a valores de  $\mathbb{E}[P] > 4,00$  (gráfico-principal). Valor esperado do portfólio *versus* variância do portfólio (sub-gráfico).

A Figura 4.3 indica que pequenas variações na variância do portefólio, nomeadamente, próximas do ponto de variância mínima global (na ordem de  $3,45 \times 10^{-6}$  u.m) originam uma elevada variação no  $\mathbb{E}[P]$ ; sugere, também, que à medida que a variância do portefólio  $\text{Var}[P] = \sigma^2$  aumenta, o declive da reta tangente tende para 1. A partir desta representação gráfica o investidor é capaz de concluir se recompensa aumentar o risco do portefólio para obter um maior valor esperado.

# 5

## Aplicação ao Mercado de Ações Português - PSI

Neste capítulo apresenta-se a parte prática do projeto de investigação e/ou dissertação utilizando-se como dados o principal índice de referência do mercado de capitais portugueses - Euronext Lisboa - o *PSI*.

Vale a pena referir os objetivos da génese e um breve historial do *PSI* ao leitor. O principal índice de referência do mercado de capitais portugueses foi lançado no dia 31 de dezembro de 1992, com a designação de *PSI – 20*, com uma dupla finalidade:

- servir de indicador da evolução do mercado acionista português e
- servir de suporte à negociação de contratos futuros e ações.

Em 2022, o índice deixou cair o número mínimo de 20 empresas, daí a designação inicial *PSI – 20*, implementando uma nova regra: agregar as empresas que tenham mais de 1000 milhões de euros de capitalização, designando-se a partir desse momento por *PSI*.

A partir de um conjunto de dados do *PSI*, personalizado no domínio temporal, descrever-se-á a recolha dos dados e base de dados; representar-se-á de uma forma compreensível a

informação contida nos dados a partir de representações tabulares e gráficas; apresentar-se-á a notação utilizada no texto; apresentar-se-á três abordagens de classificação dos títulos do *PSI* baseadas nas medidas de risco simples, na medida de risco valor esperado - variância e na medida de risco utilidade esperada - entropia, apresentadas no Capítulo 3; e, para finalizar, comparar-se-á os resultados obtidos no ponto anterior com os resultados da implementação do modelo de otimização média - variância de portfólios.

## 5.1 Recolha e Descrição de Dados

Os dados do *PSI*, que constituem a matéria-prima da análise estatística e dos resultados que obter-se-á para os objetivos desta dissertação, dizem-se **secundários** pelo motivo que foram compilados e publicados por uma organização, em particular, pela *Investing.com*.

Como estes dados específicos provêm de fontes que se encontram disponíveis para a utilização pública são classificados de processos **observacionais**; isto é, a natureza ética ou financeira das pessoas ou organizações que lidam com a recolha de dados não exercem um controlo nos fatores da base de dados.

Do sistema de informação *Investing.com* extraiu-se 18 conjuntos de dados “crus”, correspondentes a 18 ações (ou, títulos), cada um constituído por 7 variáveis, particularmente:

- *Ultimo* (*pf*) - representa o preço de fecho;
- *Abertura* (*pa*) - representa o preço de abertura;
- *Alta* (*pmax*) - representa preço máximo atingido pelo título;
- *Baixo* (*pmin*)- representa o preço mínimo atingido pelo título;
- *Volume* (*vol*) - representa a quantia obtida através do número de ativos negociados;
- *Variação* (*var*) - representa o conceito de variação percentual aplicado ao mercado de ações, isto é (Kenton, 2022):
  - se a diferença entre o preço de fecho do dia atual for superior ao preço de fecho do dia anterior tem-se um aumento, para o período comparado, resultando numa variação percentual dada pelo quociente entre a diferença e o preço de fecho do dia anterior multiplicado por 100;
  - se a diferença entre o preço de fecho do dia atual for inferior ao preço de fecho do dia anterior tem-se uma diminuição, para o período comparado, resultando

numa variação percentual dada pelo quociente entre o módulo da diferença e o preço de fecho do dia atual multiplicado por 100.

Os objetos do conjunto de ações correspondem a dias. O período de estudo definido para os conjuntos de dados está compreendido para todos os dias úteis consecutivos entre 17 de julho de 2017 e 16 de julho de 2021, existindo, primeiramente, um total de 1023 dias úteis para recolher do *Investing.com*. No tratamento de dados verificou-se que nem todos os conjuntos de dados retirados da fonte continham um total de 1023 dias úteis, existindo a necessidade de retirar os dias em falta em todos os conjuntos de dados; obtendo-se um total de 1004 dias (ou objetos) para cada conjunto de dados. Esta alteração nos dados não colocará em causa toda a análise estatística e resultados subsequentes. Após descrever o conjunto de dados “cru”, tome conhecimento que apenas o atributo *pf* é importante para o desenvolvimento da dissertação.

Para finalizar a discussão de recolha e descrição da base de dados, apresenta-se, na Tabela 5.1, a composição de ações do *PSI* para o período de estudo definido e o sector de operação de cada empresa possuidora de um título nesse período.

Tabela 5.1: Composição do índice *PSI* para o período compreendido entre 17 de julho de 2017 e 16 de julho de 2021 e a respetiva descrição baseada no setor de atividade.

Títulos	Setores de atividade
Altri SGPS SA (ALTRI)	• Papel e energia
Banco Comercial Português (BCP)	• Banca
Corticeira Amorim (CORA)	• Transformação de cortiça
CTT Correios de Portugal, SA (CTT)	• Operador de multisserviços com vocação postal e financeira
Energias de Portugal (EDP)	• Energia
Energias de Portugal Renováveis (EDPR)	• Energia
GALP	• Energia
Jeronimo Martins (JMT)	• Negócio alimentar
Mota-Engil (MOTA)	• Engenharia e construção, ambiente e serviços, concessões de transportes, energia, turismo, e mineração.
NOS	• Telecomunicações
<i>The Navigator Company SA</i> (NVGR)	• Fabrico e comercialização de papel
Rede Energéticas Nacionais (RENE)	• Energia e telecomunicações
Semapa (SEM)	• Papel, cimento e papel
Sonae (YSO)	• Retalho, serviços financeiros, gestão de centros comerciais, software e sistemas de informação, media e telecomunicações
Ibersol Reg (IBS)	• Negócio da restauração
Novabase (NBA)	• Tecnologias de informação
Pharol SGPS SA (PHRA)	• Telecomunicações
Ramada Investimentos e Industria SA (RAMA) <sup>1</sup>	• Indústria

<sup>1</sup> A ação RAMA entrou para o *PSI-20* no dia 19 de março de 2018.



## 5.2 Enquadramento Notacional

É óbvia a necessidade de encarar este tópico com o máximo rigor, pois dele dependerá a forma como se desenvolverão todos os passos seguintes e, conseqüentemente, o maior ou menor esforço neles envolvido, a qualidade da escrita, rigor matemático e a compreensão do leitor. Anteriormente, apresentou-se de forma introdutória algumas notações que voltar-se-á a frisar, sem grandes repetições, para que este ponto seja apresentado da forma que foi caracterizado.

Já identificado, anteriormente, considere que  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_M\}$ ,  $m = 1, \dots, 18$ , representa o conjunto de ações, em particular, do *PSI* para o período mencionado. Na Tabela 5.2 apresenta-se a correspondência entre elementos do conjunto  $\mathcal{A}$  e os acrónimos das ações apresentados na Tabela 5.1 na forma de parênteses.

Tabela 5.2: Representação tabular que estabelece correspondência entre elementos do conjunto  $\mathcal{A}$  e os títulos.

Notação: $A_m$	Títulos
$A_1$	ALTRI
$A_2$	BCP
$A_3$	CORA
$A_4$	CTT
$A_5$	EDP
$A_6$	EDPR
$A_7$	GALP
$A_8$	JMT
$A_9$	MOTA
$A_{10}$	NOS
$A_{11}$	NVGR
$A_{12}$	RENE
$A_{13}$	SEM
$A_{14}$	YSO
$A_{15}$	IBS
$A_{16}$	NBA
$A_{17}$	PHRA
$A_{18}$	RAMA

Os passos que se desenvolverão não se centrarão na variável  $pf$ , mas nos retornos de cada ação. Os retornos da ação  $A_m$ ,  $r_{m,t}$ , para  $m = 1, \dots, 18$ , são definidos de acordo com a expressão

$$r_{m,t} = \log \left( \frac{pf_{t'}}{pf_{t'-1}} \right), \quad (5.1)$$

para  $\forall t' \in \{2, \dots, 1004\}$  e  $t = t' - 1$  ( $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ ),  $pf_{t'}$  representa o preço de fecho no dia  $t'$ . Assim sendo,  $\forall m \in \{1, \dots, 18\}$ ,  $S_m = \{r_{m,1}, \dots, r_{m,T}\}$  representa o conjunto de

retornos associado à ação  $A_m$ .

Apresentando-se ao investigador uma coleção numerosa de dados, a análise e a obtenção de resultados, neste caso, não é apresentada com facilidade. Por isso, torna-se necessário recorrer às chamadas **distribuições de frequências**. A distribuição de frequências tem a finalidade de representar a forma como os retornos, neste caso, se distribuem por um conjunto de diferentes classes (ou intervalos de classe).

Para se atingir este objetivo pontual, começa-se por encontrar o mínimo e máximo global de todos os retornos de  $S_m$ , para  $m = 1, \dots, 18$ , ou seja,

$$a = \min_{1 \leq m \leq 18} \{r_{m,1}, \dots, r_{m,T}\} = -0,2600$$

$$b = \max_{1 \leq m \leq 18} \{r_{m,1}, \dots, r_{m,T}\} = 0,2801$$

de tal forma que conseguir-se-á identificar um intervalo global  $[a, b]$  para os retornos. Assim sendo, conjuntamente com a regra de Rice, que consiste em cobrir a gama de valores na qual os retornos se situam por um número de classes próximo de

$$K = \sqrt[3]{T - 1} \times 2 = 20$$

com igual amplitude, é possível determinar a amplitude das classes  $h = \frac{b - a}{K} = 0,0270$ ; tal como se ilustra seguidamente, as classes  $C_c, c = 1, \dots, K$ , são definidas da seguinte forma:

$$C_1 = [L_0, L_1) = [-0,2600; -0,2330)$$

$$C_2 = [L_1, L_2) = [-0,2330; -0,2060)$$

(...)

$$C_{20} = [L_{19}, L_{20}] = [0,2531; 0,2801],$$

a verificar

$$L_0 < L_1 < \dots < L_l < \dots < L_{20}, \quad L_0 = a \text{ e } L_{20} = b.$$

Deste modo, é possível, para cada ação  $A_m, m = 1, \dots, 18$ , e para cada classe  $C_c, c = 1, \dots, K$ , definidas, calcular a frequência relativa (ou, probabilidade),  $p_{m,c}$ , do número de retornos da ação  $A_m$  contidos no intervalo de classe  $C_c$ . A probabilidade  $p_{m,c}, \forall m \in \{1, \dots, 18\}$  e  $\forall c \in \{1, \dots, 20\}$ , é dada pela expressão:

$$p_{m,c} = \frac{|r_{m,j} \in C_c, j = 1, \dots, T|}{T}.$$

Como é provável que cada intervalo de classe tenha uma dimensão de valores superior a 1 torna-se fundamental encontrar um ponto que resuma todos os retornos que pertençam à classe  $C_c$  do conjunto de dados da ação  $A_m$ , para  $m = 1, \dots, 18$ , designado, em particular, por retorno médio da classe  $C_c$ ,  $c = 1, \dots, 20$ . O retorno médio da classe  $C_c$   $\bar{r}_{m,c}$ ,  $\forall m \in \{1, \dots, 18\}$  e  $\forall c \in \{1, \dots, 20\}$ , é dado pela expressão:

$$\bar{r}_{m,c} = \frac{\sum_{r_{m,j} \in C_c} r_{m,j}}{|r_{m,j} \in C_c, j = 1, \dots, T|}.$$

Assim, a partir destas estatísticas a distribuição de frequências encontra-se completamente descrita para cada variável aleatória associada à ação  $A_m$ , para  $m = 1, \dots, 18$ . Portanto, admita-se que  $R_m^D$  é uma variável aleatória associada à ação  $A_m$  cujas realizações pertencem ao conjunto finito  $\{\bar{r}_{m,1}, \dots, \bar{r}_{m,20}\}$  e  $p_{m,c}$  denota a probabilidade de  $R_m^D$  ser igual a  $\bar{r}_{m,c}$ ,  $P[R_m^D = \bar{r}_{m,c}] = p_{m,c}$ .

A título de ilustração para o leitor, no Anexo B apresenta-se em formato de tabela para a ação  $A_1$  (ou, ALTRI) as probabilidades  $p_{1,c}$ , e os representantes  $\bar{r}_{1,c}$ , para  $\forall c \in \{1, \dots, 20\}$ .

**Nota.** Na dissertação também se utilizou uma regra mais simples para determinar o número de classes, que se baseia na raiz quadrada do número de dias. No entanto, o número de retornos nulos por classe é superior face à utilização da regra de Rice. Assim se, se implementasse a regra mais simples tornava-se difícil perceber a forma como se distribuía os retornos de uma ação nas classes predefinidas.

### 5.3 Abordagem Exploratória dos Dados

Neste ponto recorre-se algumas técnicas de estatística descritiva com o propósito de sintetizar a informação contida nos dados.

Na Figura 5.1 apresenta-se o histograma para as classes definidas na Secção 5.2.

A partir da Figura 5.1 é possível retirar várias ilações ou hipóteses. Designadamente, indica uma reduzida variabilidade dos retornos; indica que 95% dos retornos estão compreendidos entre  $-0,0440$  e  $0,0370$ , dos quais 63% pertencem à classe predominante  $[-0,0170; 0,0100]$ ; e, sugere que os retornos das 18 ações seguem uma distribuição normal com uma média em torno de zero. Dado este último comentário, será que há razões para supor que os retornos das 18 ações se distribuem Normalmente? Para responder à

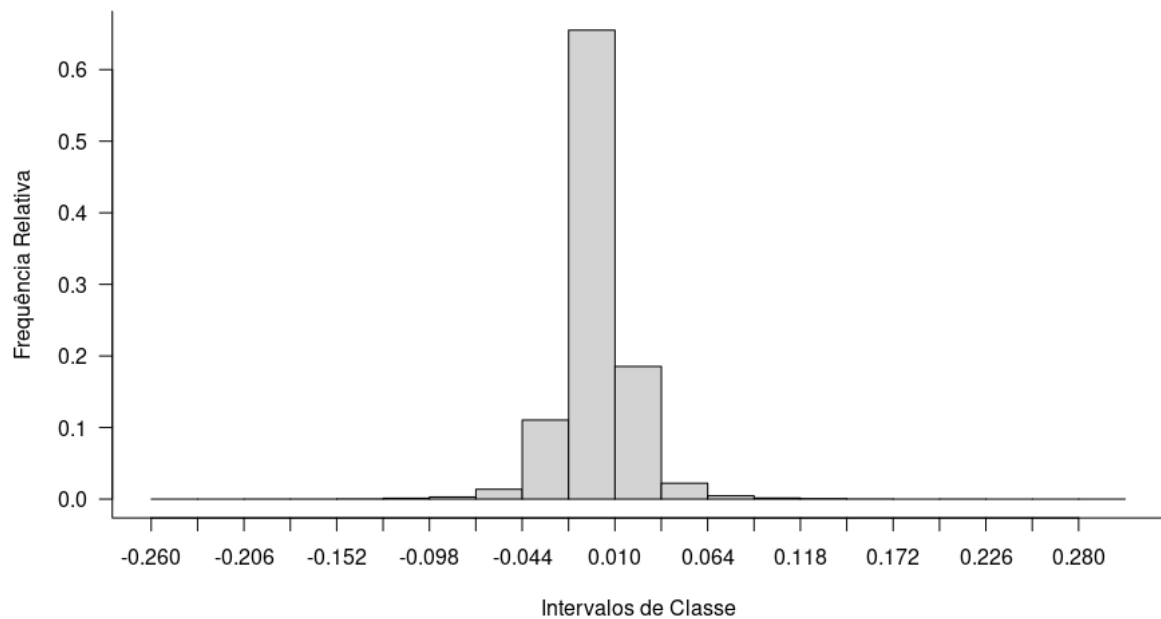


Figura 5.1: Histograma da distribuição dos retornos  $r_{m,t}$ , para  $m = 1, \dots, 18$  e  $t = 1, \dots, 1003$ .

questão recorreu-se ao teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) com a seguinte formulação de hipóteses:

- $H_0$  : Os retornos seguem uma distribuição  $N(0; (0,02)^2)$
- $H_1$  : Os retornos não seguem uma distribuição  $N(0; (0,02)^2)$ .

Em consonância que, os parâmetros da distribuição Normal foram estimados a partir dos dados amostrais é obtido um valor-de-prova inferior a  $2,2 \times 10^{-16}$  que, ao nível de significância de 5%, permite rejeitar a hipótese nula,  $H_0$ ; concluindo-se então que os retornos das 18 ações não seguem uma distribuição normal.

Em seguida, apresenta-se as caixas com bigodes (ou, *boxplots*) para cada ação do conjunto  $\mathcal{A}$ .

Quando se considera a amplitude interquartil, que corresponde na Figura 5.2 aos retângulos (ou, “caixas”) dos *boxplots* das ações, como medida de dispersão é patente figurar que a variabilidade dos retornos em cada ação é reduzida, uma vez que as caixas possuem uma dimensão reduzida, sendo mais notória a presença de “caixas” reduzidas nas ações EDPR, JMT, NOS, RENE e NBA. Porém, quando se considera a medida de dispersão paradigmática da falta de resistência à presença de valores que parecem muito grandes

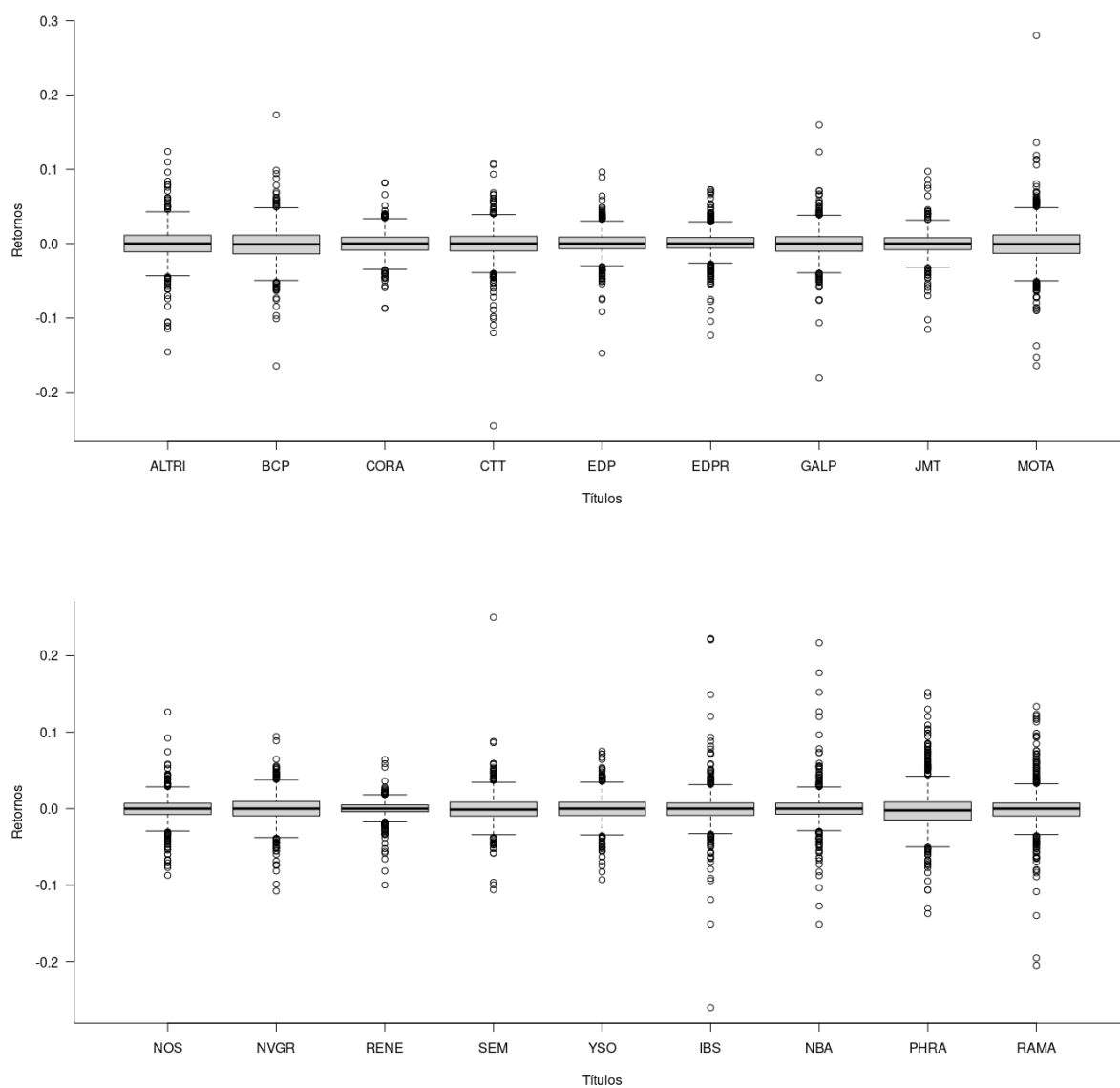


Figura 5.2: Comparação dos retornos entre ações do conjunto  $\mathcal{A}$ , sob a apresentação de caixa-com-bigodes.

ou muito pequenos em relação às outras observações, isto é, a amplitude do intervalo de variação da amostra, verifica-se que as ações CORA, EDPR, RENE e YSO apresentam uma menor variabilidade, ao contrário das ações BCP, CTT, GALP, MOTA, IBS, NBA e RAMA que apresentam uma maior variabilidade.

Como sinais de interpretação, a pequena maioria das caixas-com-bigodes acima denuncia a nível da caixa central uma simetria. A nível dos bigodes, sendo este sublinhado ainda pelo aparecimento de outliers e outliers severos, é identificada uma simetria para as ações ALTRI, BCP, CORA e JMT; uma presença de caudas esquerdas mais alongadas do que caudas direitas para as ações CTT, EDP, EDPR, GALP, NVGR, RENE, YSO, IBS e RAMA; e, em oposição, caudas direitas mais alongadas do que caudas esquerdas nas ações MOTA, NOS, SEM, NBA e PHRA. Uma interpretação análoga pode ser ainda retirada a partir da análise dos histogramas do Anexo A.

Então, assim, pode-se conjecturar que os retornos das ações ALTRI, BCP, CORA e JMT seguem uma distribuição normal em torno de zero; e, os retornos das restantes ações do *PSI* não são provenientes de uma distribuição normal.

Denote-se por  $R_m^C$  uma variável aleatória e admita que tal variável pode tomar valores pertencentes ao conjunto  $S_m$  associado à ação  $A_m$ , para  $m = 1, \dots, 18$ .

Para testar a validade das conjecturas anteriores utilizou-se o teste de normalidade Kolmogorov-Smirnov (K-S). As hipóteses nula e alternativa são formuladas nos seguintes termos:

$$\begin{aligned} H_0 &: R_m^C \text{ segue uma distribuição } N(\hat{\mu}_m; \hat{\sigma}_{m,m}), \forall m \in \{1, \dots, 18\} \\ H_1 &: R_m^C \text{ não segue uma distribuição } N(\hat{\mu}_m; \hat{\sigma}_{m,m}), \forall m \in \{1, \dots, 18\}, \end{aligned}$$

onde  $\hat{\mu}_m$  e  $\hat{\sigma}_{m,m}$ , que representam as estimativas do valor esperado e desvio padrão da variável  $R_m^C$  associada à ação  $A_m$ , de modo respetivo, estão caracterizados na Tabela C.1, do Anexo C.

Como decisão estatística, para  $\forall m \in \{1, \dots, 18\}$ , a hipótese  $H_0$  é rejeitada, ficando estabelecido, ao nível de significância de 5%, que  $R_m^C$  não se encontra distribuída normalmente. Os valores-de-prova do teste K-S encontram-se disponíveis para consulta na Tabela C.1.

## 5.4 Abordagem Baseada nas Medidas de Risco Simples

Tendo em conta as medidas de risco simples apresentadas na Secção 3.2 classificar-se-á, a partir da relação de preferência  $\succsim$ , as ações, que figuram na Tabela 5.2, como mais ou menos preferíveis de acordo com o retorno esperado, variância, entropia e probabilidade de perda.

Os valores obtidos para cada elemento (ou, ação) do conjunto  $\mathcal{A}$  e respetivas medidas de risco encontram-se caracterizados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Valores correspondentes ao retorno esperado  $\mathbb{E}[R_m^D]$ , variância  $\text{Var}[R_m^D]$ , entropia  $H(R_m^D)$  e probabilidade de perda  $P[R_m^D \leq 0]$  e as respetivas ordenações das ações, segundo os valores obtidos, para  $\forall m \in \{1, \dots, 18\}$ .

$A_m$ - Títulos	$R(A_m) = -\mathbb{E}[R_m^D]$	Ordem	$R(A_m) = \text{Var}[R_m^D]$	Ordem	$R(A_m) = H(R_m^D)$	Ordem	$R(A_m) = P[R_m^D \leq 0]$	Ordem
$A_1$ - ALTRI	$-2,33 \times 10^{-4}$	4	$4,51 \times 10^{-4}$	13	1,1909	15	0,7328	3
$A_2$ - BCP	$6,73 \times 10^{-4}$	17	$5,03 \times 10^{-4}$	14	1,2708	16	0,7298	2
$A_3$ - CORA	$1,64 \times 10^{-4}$	7	$1,97 \times 10^{-4}$	2	0,9545	7	0,7836	9
$A_4$ - CTT	$2,16 \times 10^{-4}$	8	$4,33 \times 10^{-4}$	12	1,1127	14	0,7577	4
$A_5$ - EDP	$-4,41 \times 10^{-4}$	2	$2,10 \times 10^{-4}$	4	0,8925	4	0,7876	11
$A_6$ - EDPR	$-1,05 \times 10^{-3}$	1	$2,45 \times 10^{-4}$	6	0,9215	5	0,7886	12
$A_7$ - GALP	$4,70 \times 10^{-4}$	13	$3,52 \times 10^{-4}$	10	1,0888	13	0,7677	6
$A_8$ - JMT	$4,85 \times 10^{-5}$	5	$1,99 \times 10^{-4}$	3	0,8778	3	0,8066	14
$A_9$ - MOTA	$6,05 \times 10^{-4}$	16	$7,06 \times 10^{-4}$	17	1,3456	18	0,7208	1
$A_{10}$ - NOS	$5,88 \times 10^{-4}$	15	$2,16 \times 10^{-4}$	5	0,8762	2	0,8146	15
$A_{11}$ - NVGR	$2,63 \times 10^{-4}$	11	$2,90 \times 10^{-4}$	8	1,0708	11	0,7597	5
$A_{12}$ - RENE	$9,62 \times 10^{-5}$	6	$8,32 \times 10^{-5}$	1	0,5367	1	0,8943	18
$A_{13}$ - SEM	$4,21 \times 10^{-4}$	12	$3,15 \times 10^{-4}$	9	1,0235	10	0,7807	8
$A_{14}$ - YSO	$2,54 \times 10^{-4}$	10	$2,46 \times 10^{-4}$	7	1,0062	8	0,7727	7
$A_{15}$ - IBS	$5,85 \times 10^{-4}$	14	$5,46 \times 10^{-4}$	16	1,0207	9	0,8185	16
$A_{16}$ - NBA	$-3,63 \times 10^{-4}$	3	$4,03 \times 10^{-4}$	11	0,9401	6	0,8205	17
$A_{17}$ - PHRA	$1,19 \times 10^{-3}$	18	$7,21 \times 10^{-4}$	18	1,3368	17	0,7856	10
$A_{18}$ - RAMA	$2,33 \times 10^{-4}$	9	$5,45 \times 10^{-4}$	15	1,0886	12	0,8036	13

Os valores associados às medidas de risco apresentadas possuem entre si diferentes casas decimais para que à *posteriori* seja acessível classificá-las.

O termo “ordem” representa que se estabeleceu uma ordenação crescente para os valores das medidas de risco valor esperado, variância, entropia e probabilidade de perda.

Note-se que usando a distribuição de frequências dos retornos, cujas observações são  $\bar{r}_{r,c}$  e as probabilidades são  $p_{m,c}$  (ver, como exemplo, a Tabela B.1), para calcular  $P[R_m^D \leq 0]$ , verifica-se que  $P[R_m^D \leq 0] = P[R_m^D < 0], \forall m \in \{1, \dots, 18\}$ .

A Tabela 5.3 sugere que as ações EDP e EDPR, que pertencem ao setor da energia, têm o primeiro e segundo maior retorno esperado (ou, de outra forma, o primeiro e segundo menor risco) das 18 ações, de modo respetivo. Pelo contrário, as ações BCP e PHRA têm o primeiro e segundo menor retorno esperado, respetivamente, estando associadas a uma elevada variabilidade (ou, a um elevado risco) em relação às restantes, quer em termos de variância e entropia.

As ações que repercutam uma menor variabilidade em termos de variância ao investidor são: RENE, CORA, JMT, EDP e NOS, pela respetiva apresentação. Ora, as ações que possuem uma menor variabilidade em termos de entropia ao investidor são: RENE,

NOS, JMT, EDP e EDPR, também, pela respetiva apresentação. Note-se que, as ações RENE, EDP e JMT ocupam a mesma posição de classificação, quer se utilize a medida de dispersão variância, quer se utilize a medida de dispersão entropia.

Para um período de 5 anos, as probabilidades de perda para um quantil inferior a zero, isto é,  $P[R_m^D < 0]$  são elevadas, para  $m = 1, \dots, 18$ . A partir destes valores facilmente se conclui que mais de 70% dos retornos das 18 ações são negativos. Em particular, as ações  $A_{12}$  (ou, RENE),  $A_{16}$  (ou, NBA) e  $A_{15}$  (ou, IBS) representam os elementos do sub-conjunto de  $\mathcal{A}$  cujas probabilidades de perda são mais elevadas, pela respetiva enumeração, para um quantil inferior ou igual (ou, apenas, inferior) a zero. Recomenda-se o uso desta medida de risco, apresentada na Definição 7, como carácter informativo; isto é, os valores que obter-se-á permitirão informar o investidor a partir de que quantil, escolhido ou não de forma arbitrária, poderá obter mais perda independentemente do risco que a ação  $A_m$  possui quando aplicada uma das restantes medidas de risco clássicas. Por exemplo, deve notar-se, no entanto, que, enquanto a ação  $A_{12}$  (ou, RENE) representa a ação com menor variabilidade do conjunto  $\mathcal{A}$  (ou seja, a mais suscetível de escolha pelo investidor, à partida), a mesma representa a ação com maior probabilidade de perda quando os retornos são inferiores ou iguais (ou, apenas, inferiores) a zero.

Se, às interpretações consideradas anteriormente, se acrescentar a ordenação das ações considerando a relação de preferência  $\succsim$ , para as medidas de risco valor esperado, variância e entropia, então é possível identificar as ações que são mais ou menos preferíveis ou se, primar as que possuem um menor ou maior risco, respetivamente, a investir no *PSI*:

- **Valor Esperado**

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{16} \succsim A_1 \succsim A_8 \succsim A_{12} \succsim A_3 \succsim A_4 \succsim A_{18} \succsim A_{14} \succsim A_{11} \succsim \\ A_{13} \succsim A_7 \succsim A_{15} \succsim A_{10} \succsim A_9 \succsim A_2 \succsim A_{17}$$

- **Variância**

$$A_{12} \succsim A_3 \succsim A_8 \succsim A_5 \succsim A_{10} \succsim A_6 \succsim A_{14} \succsim A_{11} \succsim A_{13} \succsim A_7 \succsim A_{16} \succsim \\ A_4 \succsim A_1 \succsim A_2 \succsim A_{18} \succsim A_{15} \succsim A_9 \succsim A_{17}$$

- **Entropia**

$$A_{12} \succsim A_{10} \succsim A_8 \succsim A_5 \succsim A_6 \succsim A_{16} \succsim A_3 \succsim A_{14} \succsim A_{15} \succsim A_{13} \succsim A_{11} \succsim \\ A_{18} \succsim A_7 \succsim A_4 \succsim A_1 \succsim A_2 \succsim A_{17} \succsim A_9$$



Em relação à Figura 5.2 e à classificação que se obteve para a variância e entropia das ações na Tabela 5.3, é oportuno sugerir os seguintes e possíveis paralelismos, através de um procedimento visual e intuitivo que a Figura 5.2 e a Tabela 5.3 oferecem, respetivamente: uma baixa (ou, elevada) amplitude interquartil está relacionada com uma baixa (ou, elevada) ordenação para a entropia e vice-versa; e, uma baixa (ou, elevada) amplitude amostral está relacionada com uma baixa (ou, elevada) ordenação obtida para a variância e vice-versa. Para ilustrar tais possíveis paralelismos, faz-se uso dos resultados obtidos para a variância e entropia das ações IBS, NBA e CORA. As ações IBS e NBA possuem uma elevada amplitude amostral e menor amplitude interquartil (ver Figura 5.2) que resultarão numa classificação (ou, ordem) superior para a variância e numa classificação inferior para a entropia, respetivamente (ver Tabela 5.3). Em oposição à conclusão anterior, tem-se os resultados obtidos para a ação CORA.

Em consonância com os possíveis paralelismos anteriores, averiguar-se-á, então, a partir da representação tabular 5.4a, se as ordenações obtidas para as estatísticas de dispersão amplitude da amostra e amplitude interquartil são bons indicadores para as ordenações da variância e entropia, respetivamente.

Tabela 5.4: Representação tabular dos resultados das estatísticas de dispersão, entropia e variância para as ações do conjunto  $\mathcal{A}$ .

(a) Apresentação dos valores das estatísticas de dispersão - amplitude interquartil (AIQ) e amplitude da amostra (A) - e as respetivas ordenações. (b) Ordenação das ações usando a entropia e variância.

$A_m$ - Títulos	AIQ	Ordem	A	Ordem	$A_m$ - Títulos	Ordem	
						$R(A_m) = H(R_m^D)$	$R(A_m) = \text{Var}[R_m^D]$
$A_1$ - ALTRI	0,0222	15	0,2697	9	$A_1$ - ALTRI	15	13
$A_2$ - BCP	0,0251	18	0,3380	11	$A_2$ - BCP	16	14
$A_3$ - CORA	0,0173	9	0,1692	3	$A_3$ - CORA	7	2
$A_4$ - CTT	0,0196	14	0,3526	14	$A_4$ - CTT	14	12
$A_5$ - EDP	0,0156	5	0,2439	8	$A_5$ - EDP	4	4
$A_6$ - EDPR	0,0142	2	0,1960	4	$A_6$ - EDPR	5	6
$A_7$ - GALP	0,0194	13	0,3407	13	$A_7$ - GALP	13	10
$A_8$ - JMT	0,0160	6	0,2126	6	$A_8$ - JMT	3	3
$A_9$ - MOTA	0,0248	17	0,4444	17	$A_9$ - MOTA	18	17
$A_{10}$ - NOS	0,0145	4	0,2137	7	$A_{10}$ - NOS	2	5
$A_{11}$ - NVGR	0,0189	12	0,2021	5	$A_{11}$ - NVGR	11	8
$A_{12}$ - RENE	0,0089	1	0,1640	1	$A_{12}$ - RENE	1	1
$A_{13}$ - SEM	0,0182	11	0,3561	15	$A_{13}$ - SEM	10	9
$A_{14}$ - YSO	0,0174	10	0,1680	2	$A_{14}$ - YSO	8	7
$A_{15}$ - IBS	0,0161	7	0,4823	18	$A_{15}$ - IBS	9	16
$A_{16}$ - NBA	0,0144	3	0,3679	16	$A_{16}$ - NBA	6	11
$A_{17}$ - PHRA	0,0235	16	0,2890	10	$A_{17}$ - PHRA	17	18
$A_{18}$ - RAMA	0,0169	8	0,3383	12	$A_{18}$ - RAMA	12	15

A partir dos resultados apresentados na Tabela 5.4 é possível apontar que as ordenações obtidas para a amplitude interquartil (AIQ) e amplitude da amostra (A) não são bons indicadores de classificação de ações, quanto ao risco, para a entropia e variância, em resultado de alguma dissemelhança (ou, oscilação) verificada nas ordenações entre AIQ - entropia e A - variância. Mas, será que os resultados permitem concluir, ao nível de

significância de 5%, a hipótese de que existe uma associação positiva entre AIQ - entropia e/ou A - variância?

Usando o coeficiente de correlação ordinal de *Spearman* pretende-se testar a “associação nula” contra a alternativa de que a associação é positiva; isto é, realizar um teste unilateral à direita.

Em particular, para AIQ - entropia são formuladas as seguintes hipóteses:

- $H_0$  : A ordenação obtida para o indicador da amplitude interquartil não está associada à ordenação obtida para a entropia.
- $H_1$  : A ordenação obtida para a amplitude interquartil está diretamente associada à ordenação obtida para a entropia - isto é, uma ordenação baixa (ou, elevada) na AIQ tende a refletir-se numa ordenação baixa (ou, elevada) para a entropia.

Obtendo-se o valor-de-prova 0,34 não significativo ao nível de significância de 5%, pelo que não se rejeita a hipótese  $H_0$ , conclui-se que a hipótese uma baixa (ou, elevada) ordenação no indicador AIQ não está associada a uma baixa (ou, elevada) ordenação para a entropia.

Já, para A - variância as hipóteses nula e alternativa são então as seguintes:

- $H_0$  : A ordenação obtida para o indicador da amplitude da amostra não está associada à ordenação obtida para a variância.
- $H_1$  : A ordenação obtida para a amplitude da amostra está diretamente associada à ordenação obtida para a variância.

E, atendendo-se que o valor-de-prova é 0,41,  $H_0$  não pode ser rejeitada ao nível de significância de 5%, concluindo-se que o indicador da amplitude da amostra não está associado diretamente à variância, ao nível da ordenação.

Apesar dos resultados apresentados, efetuou-se ainda o teste de “*signed rank*” de Wilcoxon com as seguintes formulações de hipóteses:

1.  $H_0 : \eta_{AIQ} = \eta_{entropia}$  vs  $H_1 : \eta_{AIQ} \neq \eta_{entropia}$ .
2.  $H_0 : \eta_A = \eta_{variância}$  vs  $H_1 : \eta_A \neq \eta_{variância}$ ,

onde  $\eta_A$ ,  $\eta_{AIQ}$ ,  $\eta_{entropia}$  e  $\eta_{variância}$  representam as medianas das populações amplitude da amostra (A), amplitude interquartil (AIQ), entropia ( $H(\cdot)$ ) e variância ( $\text{Var}[\cdot]$ ), respetivamente.

Obtendo-se, como decisão estatística, para 1. e 2. a não rejeição da hipótese nula,  $H_0$ , ao nível de significância de 5%, com valores-de-prova iguais a 0,97 e 0,98, respetivamente. Comparando as decisões estatísticas dos testes de hipóteses de Spearman e “signed-rank” conclui-se que foram obtidas diferentes conclusões para a hipótese: as estatísticas de dispersão amplitude da amostra e amplitude interquartil são bons indicadores para as ordenações da variância e entropia, respetivamente.

## 5.5 Abordagem Baseada na Medida de Risco Valor Esperado - Variância

No âmbito desta secção só será contemplada a apresentação de resultados usando a medida de risco valor esperado - variância dos autores Pollatsek e Tversky, apresentada na Definição 8. Debaixo da suposição que os sete axiomas da medida de risco de Pollatsek e Tversky são satisfeitos apresenta-se os seguintes resultados e considerações.

De entre a vasta gama de valores que  $\theta$  pode tomar para se aplicar a medida de risco valor esperado - variância ( $0 < \theta \leq 1$  - ver Secção 3.3), foram selecionados, para análise nesta secção, o seguinte conjunto de valores para  $\theta$ :  $\theta \in \{1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ . Torna-se importante reforçar que a aplicação da medida de risco valor esperado - variância quando  $\theta = 1$  equivale à aplicação da medida de risco clássica variância (ver, também, a Secção 5.4).

Na Tabela 5.5 estão caracterizados os resultados da aplicação da medida de risco valor esperado - variância para as 18 ações do conjunto  $\mathcal{A}$ ; e, por consulta da Tabela 5.5, conclui-se que os valores obtidos suscitam os seguintes comentários (ou, observações).

A primeira observação refere-se ao facto de, à medida que  $\theta$  toma valores próximos de um, as ações ALTRI, MOTA, IBS, NBA e RAMA diminuem na preferência do investidor, em consequência, do aumento do risco em particular e em geral, aproximando-se dos valores que a medida de risco variância toma na Tabela 5.3. Por outro lado, verifica-se um comportamento oposto para as ações BCP, CORA, CTT, NOS, SEM e YSO.

O segundo comentário sugere que os valores selecionados para  $\theta$  não proporcionam diferenças na ordenação do risco nas ações EDP, EDPR, NVGR e PHRA, permitindo supor que a componente objetiva, composta pelas medidas de risco valor esperado e variância, predomina exclusivamente os resultados obtidos.

O último comentário enfatiza que os resultados obtidos vão de encontro aos valores apresentados na Tabela 5.3, nomeadamente, para as medidas de risco valor esperado e

Tabela 5.5: Valores obtidos da aplicação da medida de risco valor esperado - variância  $R_{PT}(A_m)$ ,  $m \in \{1, \dots, 18\}$ , e a respetiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de  $\theta \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ .

$A_m$ - Títulos	$\theta$					
	$1/4$		$1/2$		$3/4$	
	$R_{PT}(A_m)$	Ordem	$R_{PT}(A_m)$	Ordem	$R_{PT}(A_m)$	Ordem
$A_1 - ALTRI$	$-6,22 \times 10^{-5}$	4	$1,09 \times 10^{-4}$	5	$2,80 \times 10^{-4}$	8
$A_2 - BCP$	$6,30 \times 10^{-4}$	17	$5,88 \times 10^{-4}$	16	$5,45 \times 10^{-4}$	15
$A_3 - CORA$	$1,72 \times 10^{-4}$	7	$1,80 \times 10^{-4}$	7	$1,89 \times 10^{-4}$	5
$A_4 - CTT$	$2,70 \times 10^{-4}$	10	$3,25 \times 10^{-4}$	10	$3,79 \times 10^{-4}$	12
$A_5 - EDP$	$-2,78 \times 10^{-4}$	2	$-1,16 \times 10^{-4}$	2	$4,70 \times 10^{-5}$	2
$A_6 - EDPR$	$-7,29 \times 10^{-4}$	1	$-4,04 \times 10^{-4}$	1	$-7,96 \times 10^{-5}$	1
$A_7 - GALP$	$4,41 \times 10^{-4}$	13	$4,11 \times 10^{-4}$	14	$3,81 \times 10^{-4}$	13
$A_8 - JMT$	$8,62 \times 10^{-5}$	5	$1,24 \times 10^{-4}$	6	$1,62 \times 10^{-4}$	4
$A_9 - MOTA$	$6,30 \times 10^{-4}$	16	$6,55 \times 10^{-4}$	17	$6,80 \times 10^{-4}$	17
$A_{10} - NOS$	$4,94 \times 10^{-4}$	14	$4,02 \times 10^{-4}$	13	$3,09 \times 10^{-4}$	10
$A_{11} - NVGR$	$2,70 \times 10^{-4}$	9	$2,77 \times 10^{-4}$	9	$2,83 \times 10^{-4}$	9
$A_{12} - RENE$	$9,29 \times 10^{-5}$	6	$8,97 \times 10^{-5}$	4	$8,64 \times 10^{-5}$	3
$A_{13} - SEM$	$3,95 \times 10^{-4}$	12	$3,68 \times 10^{-4}$	11	$3,42 \times 10^{-4}$	11
$A_{14} - YSO$	$2,52 \times 10^{-4}$	8	$2,50 \times 10^{-4}$	8	$2,48 \times 10^{-4}$	7
$A_{15} - IBS$	$5,75 \times 10^{-4}$	15	$5,65 \times 10^{-4}$	15	$5,55 \times 10^{-4}$	16
$A_{16} - NBA$	$-1,71 \times 10^{-4}$	3	$2,03 \times 10^{-5}$	3	$2,12 \times 10^{-4}$	6
$A_{17} - PHRA$	$1,07 \times 10^{-3}$	18	$9,54 \times 10^{-4}$	18	$8,38 \times 10^{-4}$	18
$A_{18} - RAMA$	$3,11 \times 10^{-4}$	11	$3,89 \times 10^{-4}$	12	$4,67 \times 10^{-4}$	14

variância, com as ações EDP (ou,  $A_5$ ) e EDPR (ou,  $A_6$ ) a formarem o par de elementos de  $\mathcal{A}$  com menor risco.

Analogamente ao apresentado na Secção 5.4, apresentar-se-á a ordenação das ações aplicando a relação de preferência  $\succsim$ .

- Para  $\theta = 1/4$

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{16} \succsim A_1 \succsim A_8 \succsim A_{12} \succsim A_3 \succsim A_{14} \succsim A_{11} \succsim A_4 \succsim A_{18} \succsim \\ A_{13} \succsim A_7 \succsim A_{10} \succsim A_{15} \succsim A_9 \succsim A_2 \succsim A_{17}.$$

- Para  $\theta = 1/2$

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{16} \succsim A_{12} \succsim A_1 \succsim A_8 \succsim A_3 \succsim A_{14} \succsim A_{11} \succsim A_4 \succsim A_{13} \succsim \\ A_{18} \succsim A_{10} \succsim A_7 \succsim A_{15} \succsim A_2 \succsim A_9 \succsim A_{17}.$$

- Para  $\theta = 3/4$

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{12} \succsim A_8 \succsim A_3 \succsim A_{16} \succsim A_{14} \succsim A_1 \succsim A_{11} \succsim A_{10} \succsim A_{13} \succsim$$

$$A_4 \succ A_7 \succ A_{18} \succ A_2 \succ A_{15} \succ A_9 \succ A_{17}.$$

## 5.6 Abordagem Baseada na Medida de Risco Utilidade Esperada - Entropia

Em alternativa à medida de risco valor esperado - variância recorrer-se-á a outra medida, que tendo um procedimento conceptual semelhante, assenta num modelo de risco mais realista e adequado (ver a Secção 3.5). Trata-se da medida de risco utilidade esperada - entropia,

$$R_{UE-E}(A_m) = \lambda H(R_m^D) - (1 - \lambda) \frac{\mathbb{E}[u(R_m^D)]}{\max_{A_m \in \mathcal{A}} \{|\mathbb{E}[u(R_m^D)]|\}},$$

composta por duas componentes: objetiva, representada através da entropia, e subjetiva, representada a partir da constante  $\lambda$  e da função de utilidade monótona crescente.

Para a componente subjetiva, define-se para  $\lambda$  e para a função de utilidade os seguintes valores e funções, de modo respetivo:

- Do conjunto de valores que  $\lambda$  pode admitir  $0 \leq \lambda \leq 1$ , especificou-se que  $\lambda$  pode tomar valores pertencentes ao conjunto  $\{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ . Reforça-se, novamente, quando  $\lambda = 1$ , a medida de risco  $R_{UE-E}(\cdot)$  apresentada na expressão (3.10) e anteriormente nesta secção, fica simplificada à expressão (3.4) e, por conseguinte, aos resultados apresentados na Tabela 5.3 (ver, nomeadamente, a coluna  $R(A_m) = H(R_m^D)$ ).
- Para esta aplicação, considerou-se duas funções de utilidade, designadamente, as funções de utilidade exponencial do tipo *S-shaped* e linear definidas pelas seguintes expressões:

$$u(w) = \begin{cases} 1 - \exp(-w) & w \geq 0 \\ -\kappa(1 - \exp(w)) & w < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$u(w) = w, \forall w \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

respetivamente,

onde, o argumento  $\kappa$  representa um parâmetro que apenas assume valores iguais ou superiores a 1, ou seja,  $\kappa \geq 1$ . Para valores de  $\kappa > 1$ , a função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped* tem a capacidade de aumentar a perceção de risco sob uma ação quando as realizações representam possíveis perdas comparativamente a valores de  $\kappa = 1$  (ver, como exemplo, a Figura D.2 e, para mais curiosidade, a Figura D.1).

Nas próximas subsecções implementar-se-á cada função de utilidade apresentada nas equações (5.2) e (5.3) na medida de risco utilidade esperada - entropia e comentar-se-á os resultados.

### 5.6.1 Função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped*

Como existe uma predominância de retornos negativos que conduzem uma elevada probabilidade de perda para todas as 18 ações do conjunto  $\mathcal{A}$ , definir-se-á que  $\kappa$ , argumento da função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped*, tomará dois valores, designadamente,  $\kappa = 1$  e  $\kappa = 2$  - com o propósito de retirar possíveis conclusões a partir da comparação de resultados.

Nas Tabelas 5.6 e 5.7 apresentam-se os resultados quando se admite para  $\kappa$  valores iguais a 1 e 2, respetivamente.

Tabela 5.6: Valores obtidos da aplicação da medida de risco utilidade esperada - entropia  $R_{UE-E}(A_m)$ ,  $m = 1, \dots, 18$ , quando se utiliza  $\kappa = 1$ , e a respetiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de  $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ .

$A_m$ - Títulos	$\lambda$							
	0		$1/4$		$1/2$		$3/4$	
	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem
$A_1$ - ALTRI	-0,1841	4	0,1596	4	0,5034	6	0,8471	9
$A_2$ - BCP	0,5456	17	0,7269	17	0,9082	16	1,0895	16
$A_3$ - CORA	0,1340	7	0,3392	7	0,5443	7	0,7494	6
$A_4$ - CTT	0,1513	8	0,3917	8	0,6320	9	0,8724	13
$A_5$ - EDP	-0,3551	2	-0,0432	2	0,2687	2	0,5806	3
$A_6$ - EDPR	-0,8481	1	-0,4057	1	0,0367	1	0,4791	2
$A_7$ - GALP	0,3788	13	0,5563	13	0,7338	14	0,9113	15
$A_8$ - JMT	0,0425	5	0,2514	6	0,4602	5	0,6690	5
$A_9$ - MOTA	0,5050	16	0,7151	16	0,9253	17	1,1354	17
$A_{10}$ - NOS	0,4765	14	0,5764	14	0,6763	12	0,7763	7
$A_{11}$ - NVGR	0,2101	11	0,4253	11	0,6404	10	0,8556	10
$A_{12}$ - RENE	0,0709	6	0,1874	5	0,3038	3	0,4203	1
$A_{13}$ - SEM	0,3636	12	0,5286	12	0,6936	13	0,8586	11
$A_{14}$ - YSO	0,2066	10	0,4065	9	0,6064	8	0,8063	8
$A_{15}$ - IBS	0,5017	15	0,6315	15	0,7612	15	0,8910	14
$A_{16}$ - NBA	-0,2593	3	0,0405	3	0,3404	4	0,6403	4
$A_{17}$ - PHRA	1,0000	18	1,0842	18	1,1684	18	1,2526	18
$A_{18}$ - RAMA	0,1965	9	0,4195	10	0,6425	11	0,8656	12

A partir da Tabela 5.6 verifica-se que existem algumas dissemelhanças nas ordenações das ações quanto ao risco, para variações no valor de  $\lambda$  em  $1/4$  unidades. Por exemplo, à medida que se aumenta o valor de  $\lambda$  observa-se que a ação RENE aproxima-se da primeira posição da ordenação crescente, verificando-se até lá algumas oscilações na classificação.

Tabela 5.7: Valores obtidos da aplicação da medida de risco utilidade esperada - entropia  $R_{UE-E}(A_m)$ ,  $m = 1, \dots, 18$ , quando se utiliza  $\kappa = 2$ , e a respetiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de  $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ .

$A_m$ - Títulos	$\lambda$							
	0		$1/4$		$1/2$		$3/4$	
	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem
$A_1$ - ALTRI	0,6265	15	0,7676	15	0,9087	15	1,0498	15
$A_2$ - BCP	0,8344	16	0,9435	16	1,0526	16	1,1617	16
$A_3$ - CORA	0,4600	6	0,5836	6	0,7073	7	0,8309	7
$A_4$ - CTT	0,6241	14	0,7463	14	0,8684	14	0,9906	14
$A_5$ - EDP	0,3355	3	0,4748	3	0,6140	3	0,7532	2
$A_6$ - EDPR	0,2630	2	0,4276	2	0,5923	2	0,7569	3
$A_7$ - GALP	0,6177	12	0,7355	12	0,8533	12	0,9710	12
$A_8$ - JMT	0,3991	5	0,5188	4	0,6384	4	0,7581	4
$A_9$ - MOTA	0,9026	17	1,0133	17	1,1241	17	1,2348	17
$A_{10}$ - NOS	0,5010	7	0,5948	7	0,6886	6	0,7824	5
$A_{11}$ - NVGR	0,5672	9	0,6931	10	0,8190	11	0,9449	11
$A_{12}$ - RENE	0,1852	1	0,2731	1	0,3610	1	0,4488	1
$A_{13}$ - SEM	0,5770	10	0,6886	9	0,8003	9	0,9119	9
$A_{14}$ - YSO	0,5328	8	0,6511	8	0,7695	8	0,8879	8
$A_{15}$ - IBS	0,6063	11	0,7099	11	0,8135	10	0,9171	10
$A_{16}$ - NBA	0,3985	4	0,5339	5	0,6693	5	0,8047	6
$A_{17}$ - PHRA	1,0000	18	1,0842	18	1,1684	18	1,2526	18
$A_{18}$ - RAMA	0,6215	13	0,7383	13	0,8551	13	0,9718	13

Acrescenta-se que, à medida que  $\lambda$  se aproxima de  $3/4$ , o risco associado às ações aumenta aproximando-se dos valores obtidos para a entropia, apresentados na Tabela 5.3.

Em adição, os resultados da Tabela 5.7 sugerem um comportamento sem grandes oscilações na ordenação das ações para os diferentes valores de  $\lambda$  apresentados. Esta observação leva a aluna a refletir e questionar o seguinte: será que à medida que  $\kappa$  aumenta, a importância de  $\lambda$  diminui na medida de risco  $UE - E$ ?; isto é, observa-se uma menor oscilação (ou dissemelhança) na ordenação para variações no valor de  $\lambda$  em  $1/4$  unidades.

Quando se efetua um estudo comparativo, pelo motivo da alteração do valor do argumento  $\kappa$ , por consulta das Tabelas 5.6 e 5.7, verifica-se que existem algumas alterações na classificação e nos valores que a medida de risco toma. Em particular, nas ações NOS e RENE a alteração no argumento (o aumento do valor de  $\kappa$ ) provocou uma diminuição na classificação, e em contrapartida, um aumento nos valores do risco. Ora, nas ações ALTRI e CTT verificam-se um aumento na ordenação acompanhado por um aumento nos valores do risco. A grande semelhança verificada, a partir das observações anteriores e, também, das Tabelas 5.6 e 5.7, remete-se para o aumento do valor do risco justificado pelo aumento de uma unidade no valor do argumento  $\kappa$  e penalizado pela elevada existência de realizações negativas nas ações. Como todas as ações do índice do *PSI* possuem

um elevado volume de retornos negativos (superior a 70%), que realça a existência de uma semelhança entre as ações aparentemente, acredita-se que a implementação de  $\kappa = 2$  na função de utilidade exponencial do tipo *S – Shaped* destaca, através do valor que a utilidade assumirá, as mais pequenas diferenças existentes nos retornos das ações comparativamente à utilização de  $\kappa = 1$ , produzindo, por consequência, diferenças no valor do risco e na ordenação.

Em termos de risco (ou, preferência), para  $\kappa = 1$  e  $\forall \lambda \in \{0, 1/4\}$ , as ações EDPR, EDP e NBA proporcionarão um menor risco em caso de investimento no PSI; no entanto, enquanto, para valores de  $\forall \lambda \in \{1/2, 3/4\}$ , as ações RENE, EDPR, EDP e NBA sobressaem-se por apresentar menor risco (ou, maior preferência) de todas as ações de  $\mathcal{A}$ . Ora, para  $\kappa = 2$  e  $\forall \lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ , verifica-se que as ações RENE, EDPR, EDP constituem sempre o sub-conjunto de três ações (ou, elementos) de  $\mathcal{A}$  com menor risco.

Analogamente ao apresentado nas secções anteriores, para  $\kappa = 1$  (escolhido de forma arbitrária), estabelecer-se-á entre as ações uma ordenação de preferência  $\succsim$  para todos os valores de  $\lambda$  seleccionados.

- **Para**  $\lambda = 0$

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{16} \succsim A_1 \succsim A_8 \succsim A_{12} \succsim A_3 \succsim A_4 \succsim A_{18} \succsim A_{14} \succsim A_{11} \succsim \\ A_{13} \succsim A_7 \succsim A_{10} \succsim A_{15} \succsim A_9 \succsim A_2 \succsim A_{17}.$$

- **Para**  $\lambda = 1/4$

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{16} \succsim A_1 \succsim A_{12} \succsim A_8 \succsim A_3 \succsim A_4 \succsim A_{14} \succsim A_{18} \succsim A_{11} \succsim \\ A_{13} \succsim A_7 \succsim A_{10} \succsim A_{15} \succsim A_9 \succsim A_2 \succsim A_{17}.$$

- **Para**  $\lambda = 1/2$

$$A_6 \succsim A_5 \succsim A_{12} \succsim A_{16} \succsim A_8 \succsim A_1 \succsim A_3 \succsim A_{14} \succsim A_4 \succsim A_{11} \succsim A_{18} \succsim \\ A_{10} \succsim A_{13} \succsim A_7 \succsim A_{15} \succsim A_2 \succsim A_9 \succsim A_{17}.$$

- **Para**  $\lambda = 3/4$

$$A_{12} \succsim A_6 \succsim A_5 \succsim A_{16} \succsim A_8 \succsim A_3 \succsim A_{10} \succsim A_{14} \succsim A_1 \succsim A_{11} \succsim A_{13} \succsim \\ A_{18} \succsim A_4 \succsim A_{15} \succsim A_{17} \succsim A_2 \succsim A_9 \succsim A_{17}.$$



### 5.6.2 Função de utilidade linear

A abordagem que implementa a utilização da função linear (5.3) como função de utilidade permitirá reduzir a componente da utilidade esperada, apresentada na equação (3.10), numa componente de valor esperado - obtendo-se então uma medida de risco que combina as medidas valor esperado e entropia. Esta abordagem permitirá, assim, averiguar possíveis diferenças “significativas” nos resultados quando se aplica a medida de risco utilidade esperada - entropia usando uma função de utilidade linear e outra função de utilidade monótona crescente, nomeadamente, as funções (5.3) e (5.2), de modo respetivo.

Apresenta-se na Tabela 5.8 os resultados da implementação da função linear (5.3) como função de utilidade na medida de risco utilidade esperada - entropia.

Tabela 5.8: Valores obtidos da aplicação da medida de risco utilidade esperada - entropia  $R_{UE-E}(A_m)$ ,  $m = 1, \dots, 18$ , quando se implementa como função de utilidade a função linear (5.3), e a respetiva ordenação (ordem) das ações para os diferentes valores de  $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ .

$A_m$ - Títulos	$\lambda$							
	0		$1/4$		$1/2$		$3/4$	
	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem	$R_{UE-E}(A_m)$	Ordem
$A_1$ - ALTRI	-0,1965	4	0,1503	4	0,4972	6	0,8440	9
$A_2$ - BCP	0,5670	17	0,7429	17	0,9189	16	1,0949	16
$A_3$ - CORA	0,1378	7	0,3420	7	0,5462	7	0,7504	6
$A_4$ - CTT	0,1818	8	0,4145	9	0,6473	11	0,8800	13
$A_5$ - EDP	-0,3714	2	-0,0554	2	0,2606	2	0,5765	3
$A_6$ - EDPR	-0,8872	1	-0,4350	1	0,0172	1	0,4693	2
$A_7$ - GALP	0,3963	13	0,5694	13	0,7426	14	0,9157	15
$A_8$ - JMT	0,0408	5	0,2501	6	0,4593	5	0,6686	5
$A_9$ - MOTA	0,5095	16	0,7185	16	0,9275	17	1,1365	17
$A_{10}$ - NOS	0,4944	15	0,5898	14	0,6853	12	0,7807	7
$A_{11}$ - NVGR	0,2219	11	0,4342	11	0,6464	10	0,8586	11
$A_{12}$ - RENE	0,0810	6	0,1950	5	0,3089	3	0,4228	1
$A_{13}$ - SEM	0,3549	12	0,5220	12	0,6892	13	0,8564	10
$A_{14}$ - YSO	0,2137	10	0,4118	8	0,6100	8	0,8081	8
$A_{15}$ - IBS	0,4927	14	0,6247	15	0,7567	15	0,8887	14
$A_{16}$ - NBA	-0,3054	3	0,0060	3	0,3173	4	0,6287	4
$A_{17}$ - PHRA	1,0000	18	1,0842	18	1,1684	18	1,2526	18
$A_{18}$ - RAMA	0,1960	9	0,4191	10	0,6423	9	0,8654	12

Os resultados apresentados na Tabela 5.8 sugerem um comportamento idêntico aos resultados apresentados na Tabela 5.6. Estes resultados não surpreendem! Porque, de facto, a função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped*, quando  $\kappa = 1$ , para valores compreendidos entre  $[-0,2600; 0,2801]$  indica um comportamento semelhante, e, aproximadamente, linear, à função (5.3) (ver a Figura D.2c). Logo, para a aplicação ao mercado de ações do *PSI*, só se observam diferenças nos resultados obtidos para as duas funções

de utilidade implementadas, na medida de risco utilidade esperada - entropia, quando  $\kappa$ , da função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped*, toma valores superiores a 1, neste caso para,  $\kappa = 2$ .

Quando se compara os valores obtidos da Tabela 5.5 com os valores obtidos da Tabela 5.8 (ou, Tabela 5.6) é possível apontar que a escolha da variância ou da entropia, como medida de risco clássica, influencia “levemente” a ordenação que se obtém para as ações e a “suavidade” das oscilações na classificação de ações, para os mesmos valores de  $\theta$  e  $\lambda$ , à medida que se incrementa  $1/4$  unidades em  $\theta$  ou  $\lambda$  (isto é, as oscilações na classificação de ações, à medida que se incrementa  $1/4$  unidades em  $\lambda$ , quando se implementa a medida de dispersão entropia não são tão “bruscas” comparativamente à aplicação da medida de dispersão variância). Coloca-se como hipótese se, esta “suavidade” está relacionada significativamente com robustez da medida de risco aplicada. Note-se, também, que para os mesmos valores de  $\lambda$  e  $\theta$  os valores obtidos para a medida de risco valor esperado - variância são menores do que quando se implementa a medida de risco utilidade esperada - entropia utilizando as funções (5.3) ou (5.2) com  $\kappa = 1$  como função de utilidade. Estes resultados podem ser justificados pela definição de variância e não pela possibilidade de existência de menor risco (porque a ordenação é, relativamente, análoga).

Para terminar, verifica-se, apesar das diversas medidas de risco aplicadas ao conjunto de dados do PSI, uma consistência nos resultados que possuem menor e maior risco.

## 5.7 Processo de Otimização Média-Variância

Os procedimentos apresentados nas últimas três secções permitem classificar as ações como mais ou menos preferíveis (ou, se primar, por menos ou mais arriscadas, de modo respetivo) tendo em conta a medida de risco considerada. Nesta secção será apresentado um outro procedimento: o processo de otimização de média-variância de portefólios; cujos objetivos e conceitos apresentados no Capítulo 4 serão aplicados recorrendo à base de dados apresentada minuciosamente na Secção 5.1. De acordo com o figurado na Secção 4.1, a motivação da implementação do modelo de otimização média-variância, em singular, é justificada pela premissa:

- “**Para distribuições arbitrárias**, o modelo média-variância pode ser motivado assumindo uma função de utilidade quadrática”.

A utilização da premissa a jusante como motivação ao processo de otimização média-variância (apresentada na Secção 4.1) não é adequada, porque as ações  $A_m$  representadas

através da variável aleatória  $R_m^C, \forall m \in \{1, \dots, 18\}$ , não são provenientes de uma distribuição normal, tal como foi enunciado na Secção 5.3.

Para resolver o problema de minimização detalhado na Secção 4.2.2 recorrer-se-á ao *package* `fPortfolio`, do *software* R, e à programação quadrática (ou, otimização quadrática): processo de resolução de problemas de otimização matemática, minimização ou maximização, envolvendo uma função objetivo quadrática sujeita a restrições lineares, permitindo, assim, obter o ponto de variância mínima global; as fronteiras viável e eficiente; e, as ações do conjunto  $\mathcal{A}$  que constituem os portefólios eficientes e os respetivos valores esperados e variância.

Admita-se que, para a apresentação de resultados, definiu-se um total de 50 portefólios dos quais: 23 representam portefólios viáveis, os quais formam a fronteira viável; 1 representa o portefólio de variância mínima global; e, 26 ( $p = 26$ ) representam portefólios eficientes, formando a fronteira eficiente. Tais fronteiras e portefólios são ilustrados na Figura 5.3 devidamente distinguíveis.

Na Tabela 5.9 é detalhado o valor esperado, a variância e o vetor de pesos para o portefólio de variância mínima global.

Sendo assim, a partir da Tabela 5.9, é possível identificar que as ações CORA, CTT, EDPR, JMT, NOS, RENE, YSO, IBS, NBA e RAMA contidas no portefólio  $P^*$  geram um retorno esperado negativo ( $\mathbb{E}[P^*] = -0,0104$ ) e uma variância mínima global de 0,8527. Note-se, outrossim, que, a ação RENE contribui, em termos de peso, mais para o portefólio  $P^*$ , seguindo-se a JMT, ambas associadas a um valor esperado negativo (ver, especialmente, a primeira coluna da Tabela 5.3).

Detalhadamente, estabelece-se uma relação de preferência  $\succsim$  entre as 18 ações considerando os valores obtidos para  $\omega^*$ :

$$\begin{aligned} A_{12} \succsim A_8 \succsim A_3 \succsim A_{10} \succsim A_{18} \succsim A_{16} \succsim A_6 \succsim A_{15} \succsim A_4 \succsim \\ A_{14} \succsim A_1 \succsim A_2 \succsim A_5 \succsim A_7 \succsim A_9 \succsim A_{11} \succsim A_{13} \succsim A_{17}. \end{aligned}$$

Ora, nas Tabelas 5.10 e E.1 apresentam-se, em detalhe, os vetores de pesos  $\omega$ , valores esperados, as variâncias e as taxas instantâneas de variação de  $\mathbb{E}[P_p]$  em  $\text{Var}[P_p]$  para os  $p$  portefólios eficientes.

Como primeira observação, é importante notar que, a composição dos três primeiros portefólios,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  figurados na Tabela 5.10, que sucedem o portefólio de variância mínima global ( $P^*$ ) é análoga e contêm as ações CORA, CTT, EDPR, JMT, NOS, RENE, YSO, IBS, NBA e RAMA; verificando-se, apenas, diferenças nos pesos atribuídos às ações

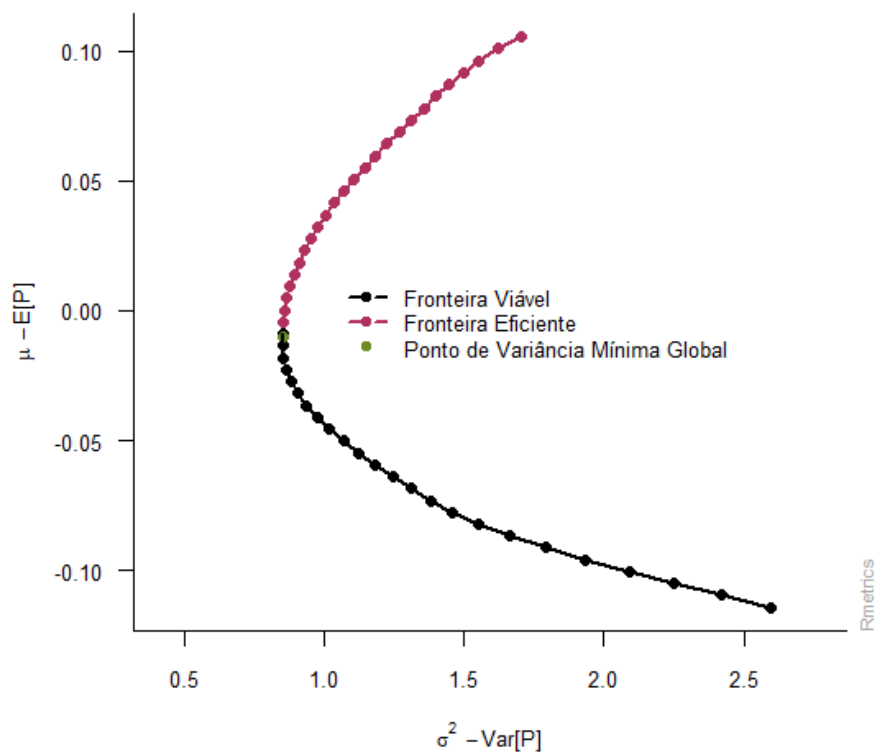


Figura 5.3: Valor esperado do portfólio *versus* variância do portfólio do problema de otimização do PSI: fronteiras viável e eficiente e ponto de variância mínima global.

Tabela 5.9: Informações relevantes obtidas para o portefólio de variância mínima global: valor esperado  $\mathbb{E}[P^*]$ , variância  $\text{Var}[P^*]$  e vetor de pesos ótimo  $\omega^*$ .

$A_m$ - Títulos	$P^*$ - Portefólio de Variância Mínima Global
	$\omega^*$ - Vetor de Pesos Ótimo
$A_1$ - ALTRI	0,0000
$A_2$ - BCP	0,0000
$A_3$ - CORA	0,1363
$A_4$ - CTT	0,0085
$A_5$ - EDP	0,0000
$A_6$ - EDPR	0,0379
$A_7$ - GALP	0,0000
$A_8$ - JMT	0,1604
$A_9$ - MOTA	0,0000
$A_{10}$ - NOS	0,0951
$A_{11}$ - NVGR	0,0000
$A_{12}$ - RENE	0,4279
$A_{13}$ - SEM	0,0000
$A_{14}$ - YSO	0,0043
$A_{15}$ - IBS	0,0315
$A_{16}$ - NBA	0,0462
$A_{17}$ - PHRA	0,0000
$A_{18}$ - RAMA	0,0518
$\mathbb{E}[P^*]$	-0,0104
$\text{Var}[P^*]$	0,8527

Tabela 5.10: Representação tabular dos cinco primeiros e últimos portefólios eficientes do modelo de otimização média-variância e os respetivos vetores de pesos  $\omega^p$ , valores esperados  $\mathbb{E}[P_p]$ , variância  $\text{Var}[P_p]$  e taxa instantânea de variação de  $\mathbb{E}[P_p]$  em  $\text{Var}[P_p]$ .

$A_m$ - Títulos	$P_p$ - Portefólios Eficientes											
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	...	$P_{21}$	$P_{22}$	$P_{23}$	$P_{24}$	$P_{25}$	$P_{26}$
	$\omega^p$ - Vetor de Pesos											
$A_1$ - ALTRI	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0456	0,0472	0,0330	0,0000	0,0000	0,0000
$A_2$ - BCP	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_3$ - CORA	0,1358	0,1341	0,1325	0,1308	0,1290	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_4$ - CTT	0,0079	0,0061	0,0043	0,0025	0,0005	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_5$ - EDP	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0087	0,0050	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_6$ - EDPR	0,0466	0,0751	0,1036	0,1321	0,1606	...	0,7177	0,7572	0,8076	0,8676	0,9338	1,0000
$A_7$ - GALP	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_8$ - JMT	0,1599	0,1584	0,1568	0,1552	0,1534	...	0,0350	0,0214	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_9$ - MOTA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{10}$ - NOS	0,0911	0,0779	0,0647	0,0514	0,0379	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{11}$ - NVGR	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{12}$ - RENE	0,4253	0,4167	0,4080	0,3994	0,3904	...	0,0212	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{13}$ - SEM	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{14}$ - YSO	0,0039	0,0026	0,0012	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{15}$ - IBS	0,0295	0,0230	0,0165	0,0099	0,0033	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{16}$ - NBA	0,0481	0,0543	0,0605	0,0667	0,0728	...	0,1647	0,1680	0,1595	0,1324	0,0662	0,0000
$A_{17}$ - PHRA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{18}$ - RAMA	0,0518	0,0519	0,0519	0,0520	0,0520	...	0,0072	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\mathbb{E}[P_p]$	-0,0090	-0,0044	0,0002	0,0047	0,0093	...	0,0824	0,0870	0,0916	0,0962	0,1007	0,1053
$\text{Var}[P_p]$	0,8529	0,8553	0,8607	0,8690	0,8801	...	1,4026	1,4496	1,4989	1,5549	1,6221	1,7019
$\Delta\mathbb{E}[P_p]/\Delta\text{Var}[P_p]$	9,9760	1,8950	0,8494	0,5510	0,4107	...	0,0998	0,0974	0,0927	0,0815	0,0681	0,0572

contidas nos portefólios, variância e valor esperado - sendo que, na última (valor esperado) a diferença é mais notável. Note-se que, o retorno esperado dos portefólios  $P_1$  e  $P_2$  (e, ainda assim  $P^*$ ) é negativo, gerando, assim, perdas para o investidor, uma vez que, os valores esperados e pesos associados às ações são negativos e elevados, de modo respetivo. Por outro lado,  $P_3$ , cuja composição de ações é semelhante aos anteriores, gera ganhos devido ao ligeiro aumento do peso da ação EDPR, cujo seu valor esperado é o mais elevado do conjunto de ações  $\mathcal{A}$ . Assim sendo, recomenda-se, principalmente, a investidores aversos ao risco o portefólio eficiente  $P_3$ , uma vez que retorna ganhos (valor esperado positivo), uma variância, aproximadamente, semelhante à obtida para o portefólio  $P^*$  e a mesma composição de ações.

Analisando os últimos cinco portefólios eficientes  $P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25}$  e  $P_{26}$ , caracterizados a partir das Figura 5.3 e Tabela 5.10 por apresentarem maior valor esperado e variância, corrobora-se que as ações: EDPR, NBA, ALTRI e EDP - com maior valor esperado, essencialmente, e variância - constituem os portefólios enunciados. A partir da observação anterior e da Tabela E.1 pode-se antever que os resultados obtidos a partir do processo de otimização média-variância são um reflexo dos que se obtiveram para as medidas de risco valor esperado e variância apresentadas na Tabela 5.3.

Verifica-se, outrossim, que, a influência da ação EDPR nos portefólios aproxima-se da totalidade, à medida que a variância e o valor esperado aumentam (como seria de esperar!). Sendo possível conjecturar com este acontecimento que, à medida que a variância e valor esperado do portefólio aumentam o atual processo de otimização atribui maior ponderação (ou, peso) às ações que contenham maior valor esperado e variância.

Por fim, é verificado que a dimensão do número de ações nos portefólios eficientes cresce à medida que a variância aumenta. Este resultado pode ser uma consequência da existência de diversificação entre portefólios. Recorde-se que na Secção 4.2.4 mencionou-se que o número de ações contidas nos portefólios é inversamente proporcional à variância do portefólio e diretamente proporcional à diversificação.

Estabelecendo uma comparação entre os resultados apresentados do processo de otimização média-variância e das medidas de risco verificam-se que: as ações mais preferíveis EDPR, RENE, CORA, JMT, NBA e NOS estão presentes na maioria dos portefólios eficientes e associadas em alguns portefólios os pesos maiores; podendo-se conjecturar que as medidas de risco, implementadas para classificar as ações quanto ao risco, são adequadas para prever quais as possíveis ações contidas nos portefólios eficientes. É surpreendente que a ação EDP esteja classificada nos modelos de risco, apresentados no Capítulo 3, como uma das 18 ações de menor risco e nos portefólios eficientes não está incorporada nos cinco primeiros portefólios eficientes (possui peso diferente de zero a partir do sétimo

portefólio - ver Tabela E.1).





# 6

## Conclusão e Trabalho Futuro

Esta dissertação intitulada de “Classificação e Otimização de Portefólios” contempla a realização dos seguintes objetivos: (1) estudar a Teoria de Utilidade Esperada; (2) estudar medidas de incerteza como a entropia e variância e medidas de risco que dependam (ou, não) da utilidade esperada como: o valor esperado, a probabilidade de perda, valor esperado - variância e utilidade esperada - entropia; (3) estudar o processo de otimização média-variância de Markowitz; (4) aplicar cada medida de risco apresentada e o processo de otimização média-variância ao conjunto de dados do *PSI*; e, (5) relacionar os resultados da otimização de portefólios com a classificação de ações do *PSI*, estabelecida a partir da ordenação dos valores de risco que se obteve de cada medida de risco apresentada em (2).

No Capítulo 2 apresentou-se o primeiro princípio matemático, que tentou explicar o comportamento humano sob situações de incerteza, o princípio do valor esperado. Porém, *à posteriori*, Bernoulli defendeu que o valor de um objeto não é determinado pelo seu preço (igual para todos os indivíduos), mas pela utilidade que oferece ao indivíduo; levando esta convicção ao nascimento de uma nova teoria de decisão: a Teoria de Utilidade Esperada. Já no século XX, Von Neumann e Morgenstern desenvolveram uma estrutura axiomática e concluíram que a relação de preferência  $\succsim$  satisfaz os axiomas de ordem fraca, continuidade arquimediana e independência se e só se existir uma função, na forma de utilidade esperada, que represente a relação de preferência entre dois objetos. No entanto, mais

tarde, o Paradoxo de Allais, apresentado na Secção 2.6, mostrou que a teoria de utilidade esperada nem sempre modela verdadeiramente a opinião dos indivíduos perante situações de incerteza. O exemplo apresentado por Maurice Allais revelou que o axioma da independência não foi satisfeito (ver, atentamente, a Secção 2.6). A partir do conceito de *certainty equivalent*, da desigualdade de *Jensen* e do *shape* de uma função de utilidade com  $u' > 0$  concluiu-se que é possível caracterizar o comportamento dos indivíduos face ao risco. Por exemplo, e atendendo ao *shape* de uma função de utilidade com  $u' > 0$ , os indivíduos podem-se comportar de maneira aversa (quando  $u' > 0$  e  $u'' < 0$ ), neutra (quando  $u' > 0$  e  $u'' = 0$ ) ou propensa (quando  $u' > 0$  e  $u'' > 0$ ) ao risco. A partir do Capítulo 3 concluiu-se que os indivíduos podem estabelecer uma relação de preferência de  $\succsim_R$  entre dois objetos baseando-se na perceção de risco que têm sobre as alternativas de escolha. Uma vez que a relação de preferência de risco  $\succsim_R$  é uma relação binária, concluiu-se que é possível representá-la através de uma medida de risco, permitindo assim ao indivíduo quantificar o quanto arriscada é a alternativa. Como medidas de risco apresentou-se: as medidas de risco clássicas (o valor esperado, a variância, a entropia e a probabilidade de perda), a medida de risco valor esperado - variância, a medida de risco utilidade esperada, e a medida de risco utilidade esperada - entropia. O processo de otimização média-variância apresentado no Capítulo 4 e desenvolvido por Markowitz pode ser motivado, ora por assumir-se uma função de utilidade quadrática, ora por assumir-se uma distribuição normal para as variáveis aleatórias associadas às ações de um mercado financeiro. Para aplicar o modelo de portefólio média-variância existem duas opções de otimização: o problema de Markowitz de risco mínimo e o problema de Markowitz de retorno máximo. A partir de qualquer opção, concluiu-se que é possível identificar os portefólios que constituem as fronteiras viável e eficiente e os respetivos valores esperados e variância. Concluiu-se, também, que a diversificação de um portefólio está relacionada com o número de ações existentes no portefólio, com a interdependência linear entre os retornos e com os fatores internos das sociedades detentoras de um título (ou, ação).

Quando implementada na dissertação a base de dados *PSI* e as medidas de risco valor esperado, variância e entropia, que permitem a partir dos valores obtidos estabelecer uma classificação para as ações, obteve-se as seguintes conclusões: o sub-conjunto (ou, portefólio) constituído pelas ações EDPR e EDP gera o maior retorno esperado e uma menor variabilidade, usando a entropia ou variância como medida de dispersão; e, por outro lado, o sub-conjunto formado pelas ações PHRA e BCP gera os menores retornos esperados e uma elevada variabilidade, quer se utilize a medida de risco entropia ou variância como modelo de risco (ver a Tabela 5.3). Nesta dissertação propõem-se o uso da medida de risco probabilidade de perda como carácter informativo ou auxiliar de futuras

conclusões, bastando o investidor especificar um quantil para o qual pretende obter a informação.

A aplicação da medida de risco valor esperado - variância revelou que as ações ALTRI, MOTA, IBS, NBA e RAMA diminuem na preferência do investidor, à medida que a variância tem mais “poder” na medida implementada. Porém, as ações BCP, CORA, CTT, NOS, SEM e YSO aumentam na preferência do investidor, à medida que  $\theta$  se aproxima de  $3/4$ . Realça-se, novamente, e a partir da implementação de outra medida, que as ações EDPR e EDP, para  $\forall \theta \in \{1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ , transmitem resultados agradáveis ao investidor por possuírem o primeiro e segundo lugar na relação de preferência apresentada na Secção 5.5, respetivamente.

A escolha das funções de utilidade (5.2) e (5.3) para a medida de risco utilidade esperada - entropia permitiu a “génese” (de algumas) e, por conseguinte, a comparação das seguintes medidas de risco compostas: (1) valor esperado - variância e valor esperado - entropia; e, (2) valor esperado - entropia e utilidade esperada - entropia. Na opção (1) varia-se na medida de dispersão e, enquanto, em (2) varia-se na medida de preferência. A comparação das medidas de risco assinaladas em (1) permitiu concluir que a escolha das medidas de risco clássicas variância ou entropia afeta a “suavidade” das oscilações na classificação da ação para os mesmos valores de  $\theta$  e  $\lambda$  (por exemplo, por cada incremento de  $1/4$  unidades em  $\lambda$  e  $\theta$  as oscilações na classificação de uma ação quando se implementa a medida de dispersão entropia não são tão “bruscas” comparativamente à aplicação da variância). Por outro lado, a comparação das medidas de risco compostas assinaladas em (2) indicou que a ação EDPR, para  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 2$  e  $\forall \lambda$ , possui o “rótulo” de ação com menor risco do conjunto  $\mathcal{A}$ .

Os resultados do processo de otimização média-variância mostraram que o retorno esperado do portefólio de variância mínima global é negativo ( $\mathbb{E}[P^*] = -0,0104$ ), a variância 0,8527 e que é composto pelas seguintes de ações do conjunto  $\mathcal{A}$ : CORA, CTT, EDPR, JMT, NOS, RENE, YSO, IBS, NBA e RAMA, sendo que a ação RENE salienta-se pela contribuição de 43% para a obtenção dos resultados a montante (ver a Tabela 5.9). Verificou-se, outrossim, que as ações mais preferíveis, ou também denominadas de menor risco, de acordo com as medidas de risco apresentadas no Capítulo 3 e nos objetivos, EDPR, RENE, CORA, JMT, NBA e NOS estão presentes na maioria dos portefólios eficientes de menor variância e associadas a uma maior ponderação. As ações que estão contidas em portefólios eficientes de variância e retorno esperado elevado, próximo de 1,7019 e 0.1053, respetivamente, são as ações EDPR, NBA, ALTRI e RAMA. Curiosamente, para a medida de risco valor esperado - variância, as últimas três ações estão associadas a uma diminuição na preferência do decisor à medida que o valor de  $\theta$  se aproxima de  $3/4$ . Por fim, também, foi observável a partir da Tabela 5.10 que a ação EDPR

atinge uma contribuição de 100% para o portfólio eficiente de maior retorno esperado e variância.

Para dar resposta à questão apresentada no início do Capítulo 2 - **será que a teoria de utilidade esperada explica o comportamento humano sob situações de incerteza, dado o conhecimento do mundo naquela época?** - tem-se o resultado e/ou conclusões obtidas do paradoxo de Allais. A partir deste sabe-se que utilidade esperada, quando aplicada somente como medida de preferência, nem sempre permite representar de uma forma útil fenômenos ou processos com que a realidade nos confronta. Todavia, quando conjugada com uma medida de risco como, por exemplo, a entropia, originando a chamada medida de risco utilidade esperada - entropia, já permite obter e transmitir conclusões e interpretações razoáveis, por exemplo, para o paradoxo de Allais, respetivamente.

Como trabalho futuro poder-se-ia:

- considerar outro intervalo de tempo e comparar as classificações de ações;
- analisar a influência, em particular, o aumento do parâmetro  $\kappa$ , da função de utilidade exponencial do tipo *S-shape*, nos resultados da medida de risco utilidade esperada-entropia;
- analisar a atual classificação de ações com a entrada de outras ações, por exemplo a GreenVolt, ou com a saída de outras ações, por exemplo as ações RAMA, NBA, PHRA e IBS (noutros intervalos de tempo).

## Referências

- Daniel Bernoulli. Specimen theoriae novae de mensura sortis. commentari academiae scientiarum imperialis petropolitanae. versão traduzida: Expositions of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, 1738, 1954. [Citado nas páginas 2, 10 e 11]
- Hans Wolfgang Brachinger and Martin Weber. Risk as a primitive: A survey of measures of perceived risk. *Operations-Research-Spektrum*, 19(4):235–250, 1997. [Citado nas páginas 3, 29, 30 e 33]
- Irene Brito and Patrícia Gonçalves. Introdução à teoria de risco. Apontamentos de apoio às aulas de teoria de risco, Universidade do Minho, 2015. [Citado na página 19]
- Alain Chateauneuf, Michèle Cohen, and Jean-Marc Tallon. Decision under risk: The classical expected utility model. 2008. [Citado na página 16]
- Daniel Chiew, Judy Qiu, Sirimon Treepongkaruna, Jiping Yang, and Chenxiao Shi. Performance of portfolios based on the expected utility-entropy fund rating approach. In *Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings*, volume 46, page 15, 2019. [Citado na página 35]
- Rafael Tiecher Cusinato. Teoria da Decisão sobre Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. Tese de mestrado, Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 2003. [Citado na página 9]
- Wendell R Garner and William J McGill. The relation between information and variance analyses. *Psychometrika*, 21(3):219–228, 1956. [Citado na página 31]
- Chi-fu Huang and Robert H Litzenberger. *Foundations for financial economics*. North-Holland, 1988. [Citado na página 38]
- Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, and Michel Denuit. *Modern actuarial risk theory: using R*, volume 128. Springer Science & Business Media, 2008. [Citado nas páginas 2, 11, 23 e 24]
- Edi Karni. Axiomatic foundations of expected utility and subjective probability. *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty*, 1:1–39, 2014. [Citado na página 15]
- Will Kenton. Percentage Changes and How to Calculate Them. <https://www.investopedia.com/terms/p/percentage-change.asp>, 2022. [Online; acessado a 23 de dezembro de 2022]. [Citado na página 54]
- Lisa Koonce, Mary Lea McAnally, and Molly Mercer. How do investors judge the risk of financial items? *The Accounting Review*, 80(1):221–241, 2005. [Citado na página 27]
- Cristian Lorenzo Martínez. Utility functions and the st. petersburg paradox. Trabalho final para grau de matemática, Faculdade de Matemática - Universidade de Barcelona, 2013. [Citado na página 12]
- R Duncan Luce, CT Ng, AAJ Marley, and János Aczél. Utility of gambling ii: Risk, paradoxes, and data. *Economic Theory*, 36(2):165–187, 2008. [Citado na página 35]

- Donald G MacGregor, Paul Slovic, Michael Berry, and Harold R Evensky. Perception of financial risk: A survey study of advisors and planners. *Journal of Financial Planning*, 12(8):68, 1999. [Citado nas páginas 2, 27 e 29]
- Mark J Machina. Choice under uncertainty: Problems solved and unsolved. *Journal of Economic Perspectives*, 1(1):121–154, 1987. [Citado na página 16]
- Myles E Mangram. A simplified perspective of the markowitz portfolio theory. *Global journal of business research*, 7(1):59–70, 2013. [Citado na página 45]
- Barbara A Mellers and Shi-jie Chang. Representations of risk judgments. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 57(2):167–184, 1994. [Citado na página 27]
- Barbara A Mellers, Lisa D Ordoñez, and Michael H Birnbaum. A change-of-process theory for contextual effects and preference reversals in risky decision making. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 52(3):331–369, 1992. [Citado na página 27]
- Linh Nguyen, Gerry Gallery, and Cameron Newton. The joint influence of financial risk perception and risk tolerance on individual investment decision-making. *Accounting & Finance*, 59:747–771, 2019. [Citado nas páginas 2, 27 e 29]
- Robert A Olsen. Investment risk: The experts’ perspective. *Financial Analysts Journal*, 53(2):62–66, 1997. [Citado na página 29]
- Robert A Olsen. Trust as risk and the foundation of investment value. *The Journal of Socio-Economics*, 37(6):2189–2200, 2008. [Citado na página 29]
- George C Philippatos and Charles J Wilson. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3):209–220, 1972. [Citado na página 31]
- Alexander Pollatsek and Amos Tversky. A theory of risk. *Journal of Mathematical Psychology*, 7(3):540–553, 1970. [Citado nas páginas 3 e 32]
- Rosa Robalo Rita. Jovens portugueses procuram mais o mercado acionista do investidores mais velhos, 2021. <https://expresso.pt/economia/2021-10-06-Jovens-portugueses-procuram-mais-o-mercado-acionista-do-que-os-investidores> Viana do Castelo 2022-06-13. [Citado na página 4]
- Katharina Sachse, Helmut Jungermann, and Julia M Belting. Investment risk—the perspective of individual investors. *Journal of Economic Psychology*, 33(3):437–447, 2012. [Citado nas páginas 2 e 27]
- Ulrich Schmidt. Expected utility theory and alternative approaches. *OPTIMIZATION AND OPERATIONS RESEARCH—Volume IV*, page 192, 2009. [Citado na página 14]
- John Von Neumann and Oskar Morgenstern. Theory of games and economic behavior. In *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 2007. [Citado nas páginas 2 e 10]

- Elke Weber. The role of risk perception in risk management decisions: Who's afraid of a poor old-age. *Pension design and structure: New lessons from behavioral finance: Part I. Research on decision-making under uncertainty*, pages 53–66, 2004. [Citado nas páginas 2 e 27]
- Diethelm Wuertz, Tobias Setz, Yohan Chalabi, and William Chen. Rmetrics - portfolio selection and optimization, 2017. <https://cran.r-project.org/web/packages/fPortfolio/fPortfolio.pdf>, Viana do Castelo 09.10.2022. [Citado na página 6]
- Diethelm Würtz, Yohan Chalabi, William Chen, and Andrew Ellis. *Portfolio optimization with R/Rmetrics*. Rmetrics, 2009. [Citado nas páginas 3, 37 e 41]
- Jiping Yang and Wanhua Qiu. A measure of risk and a decision-making model based on expected utility and entropy. *European Journal of Operational Research*, 164(3): 792–799, 2005. [Citado nas páginas 3, 33 e 35]







# Histogramas das ações do conjunto $A$

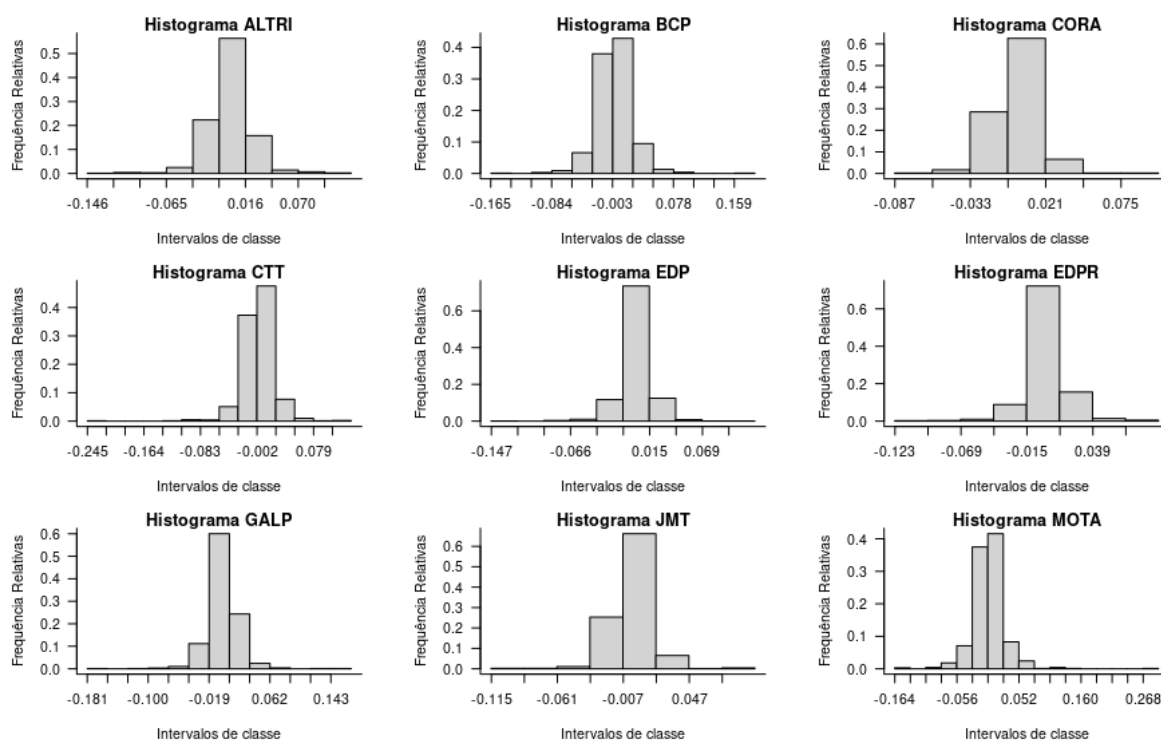


Figura A.1: Histograma das ações  $A_m$ , para  $m = 1, \dots, 9$ .

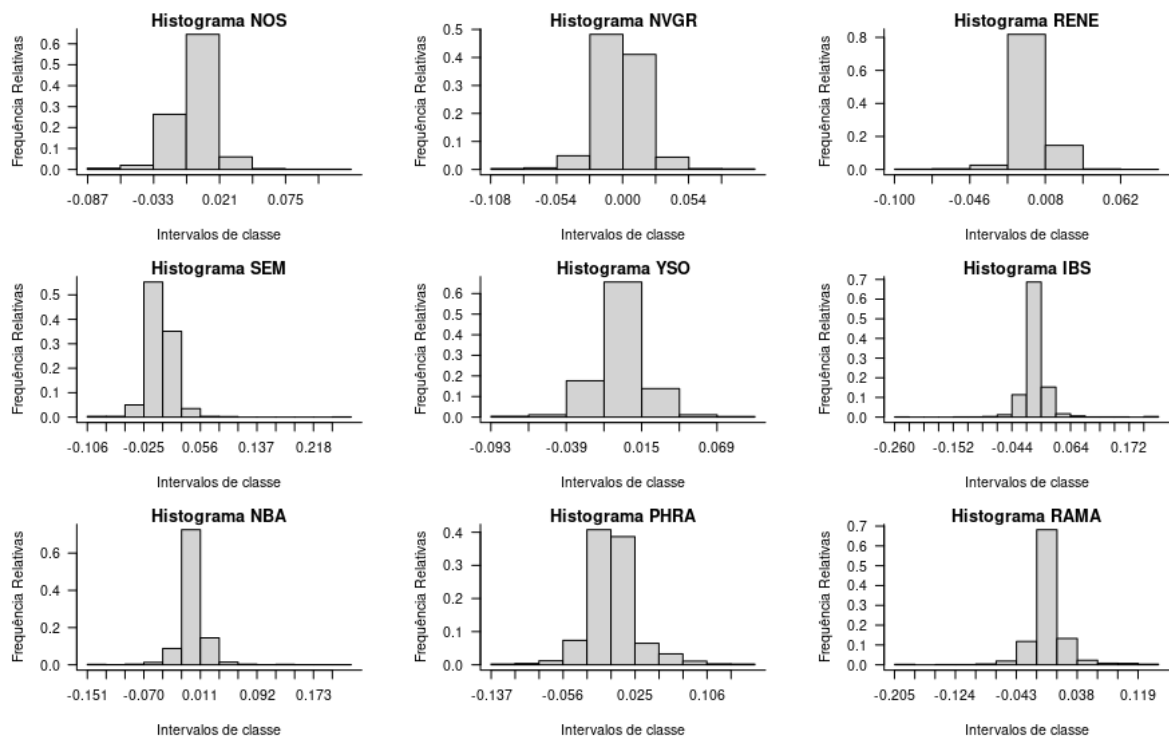


Figura A.2: Histograma das ações  $A_m$ , para  $m = 10, \dots, 18$ .

# B

## Resultados para a ação Altri

Tabela B.1: Resultados das probabilidades  $p_{1,c}$  e médias dos retornos  $\bar{r}_{1,c}$  da ação  $A_1$  para todas as classes  $C_c, c = 1, \dots, 20$ .

	Classes	$p_{1,c}$	$\bar{r}_{1,c}$
$C_1$	$[-0, 2600; -0, 2330)$	0,000	-
$C_2$	$[-0, 2330; -0, 2060)$	0,000	-
$C_3$	$[-0, 2060; -0, 1790)$	0,000	-
$C_4$	$[-0, 1790; -0, 1520)$	0,000	-
$C_5$	$[-0, 1520; -0, 1250)$	$9,97 \times 10^{-4}$	$-1,46 \times 10^{-1}$
$C_6$	$[-0, 1250; -0, 0980)$	$3,99 \times 10^{-3}$	$-1,09 \times 10^{-1}$
$C_7$	$[-0, 0980; -0, 0710)$	$1,99 * \times 10^{-3}$	$-7,93 \times 10^{-2}$
$C_8$	$[-0, 0710; -0, 0440)$	$1,30 \times 10^{-2}$	$-5,26 \times 10^{-2}$
$C_9$	$[-0, 0440; -0, 0170)$	$1,41 \times 10^{-1}$	$-2,65 \times 10^{-2}$
$C_{10}$	$[-0, 0170; 0, 0100)$	$5,72 \times 10^{-1}$	$-2,48 \times 10^{-3}$
$C_{11}$	$[0, 0100; 0, 0371)$	$2,25 \times 10^{-1}$	$2,00 \times 10^{-2}$
$C_{12}$	$[0, 0371; 0, 0641)$	$3,30 \times 10^{-2}$	$4,51 \times 10^{-2}$
$C_{13}$	$[0, 0641; 0, 0911)$	$5,98 \times 10^{-3}$	$7,81 \times 10^{-2}$
$C_{14}$	$[0, 0911; 0, 1181)$	$1,99 \times 10^{-3}$	$1,03 \times 10^{-1}$
$C_{15}$	$[0, 1181; 0, 1451)$	$9,97 \times 10^{-4}$	$1,24 \times 10^{-1}$
$C_{16}$	$[0, 1451; 0, 1721)$	0,000	-
$C_{17}$	$[0, 1721; 0, 1991)$	0,000	-
$C_{18}$	$[0, 1991; 0, 2261)$	0,000	-
$C_{19}$	$[0, 2261; 0, 2531)$	0,000	-
$C_{20}$	$[0, 2531; 0, 2801)$	0,000	-

O símbolo – remete-se para o seguinte significado: não foi possível calcular o representante da classe  $\bar{r}_{1,c}$  uma vez que não existe presença de retornos no intervalo de classe  $C_c$  da ação  $A_1$ .





## Teste Kolmogorov - Smirnov

Tabela C.1: Resultados da aplicação do teste Kolmogorov-Smirnov para os retornos das ações  $A_m, m = 1, \dots, 18$ ; representação tabular do valor de prova e da decisão estatística para cada ação  $A_m$ .

$A_m$ - Títulos	Teste Kolmogorov-Smirnov			
	$\hat{\mu}_m$	$\hat{\sigma}_{m,m}$	valor de prova	Decisão Estatística
$A_1$ - ALTRI	0,00	0,022	$2,19 \times 10^{-4}$	Rejeita-se $H_0$
$A_2$ - BCP	0,00	0,024	$2,51 \times 10^{-5}$	Rejeita-se $H_0$
$A_3$ - CORA	0,00	0,016	$6,59 \times 10^{-3}$	Rejeita-se $H_0$
$A_4$ - CTT	0,00	0,022	$4,19 \times 10^{-7}$	Rejeita-se $H_0$
$A_5$ - EDP	0,00	0,016	$5,32 \times 10^{-9}$	Rejeita-se $H_0$
$A_6$ - EDPR	0,00	0,017	$4,98 \times 10^{-12}$	Rejeita-se $H_0$
$A_7$ - GALP	0,00	0,020	$4,54 \times 10^{-7}$	Rejeita-se $H_0$
$A_8$ - JMT	0,00	0,016	$2,80 \times 10^{-5}$	Rejeita-se $H_0$
$A_9$ - MOTA	0,00	0,028	$1,05 \times 10^{-8}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{10}$ - NOS	0,00	0,016	$1,87 \times 10^{-8}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{11}$ - NVGR	0,00	0,018	$3,65 \times 10^{-3}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{12}$ - RENE	0,00	0,011	$2,52 \times 10^{-13}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{13}$ - SEM	0,00	0,019	$3,26 \times 10^{-7}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{14}$ - YSO	0,00	0,017	$1,76 \times 10^{-4}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{15}$ - IBS	0,00	0,024	$< 2,2 \times 10^{-16}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{16}$ - NBA	0,00	0,021	$< 2,2 \times 10^{-16}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{17}$ - PHRA	0,00	0,028	$< 2,2 \times 10^{-16}$	Rejeita-se $H_0$
$A_{18}$ - RAMA	0,00	0,024	$< 2,2 \times 10^{-16}$	Rejeita-se $H_0$

<sup>1</sup> Adotou-se um nível de significância de 5%.



# D

## Funções de utilidade

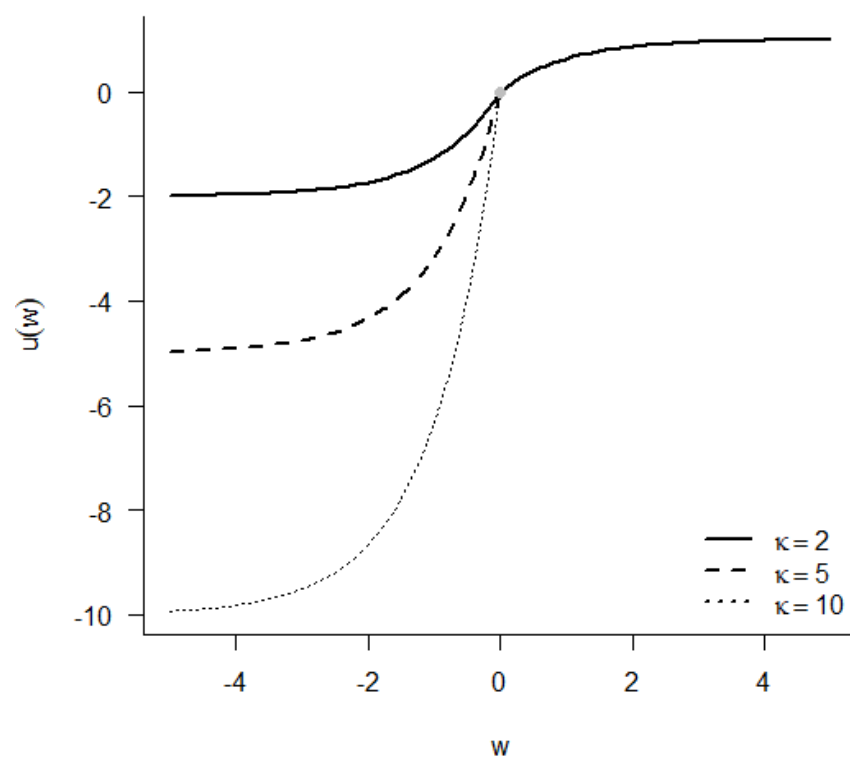
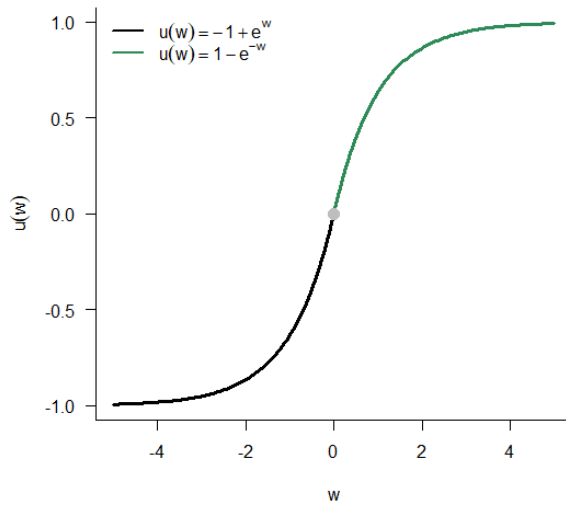
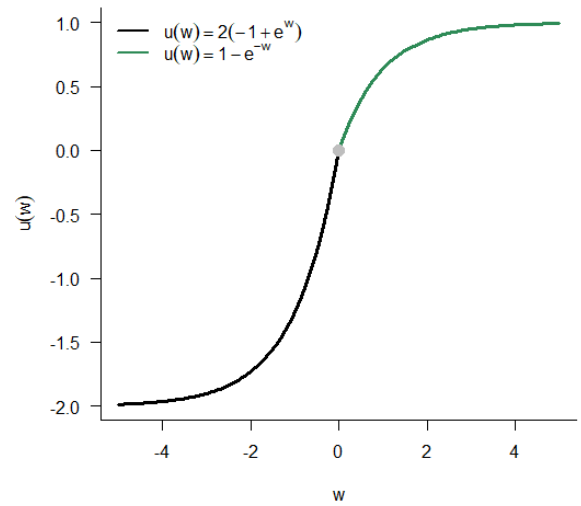


Figura D.1: Representação gráfica das funções de utilidade exponencial do tipo *S-shaped* para  $\kappa = 2$ ,  $\kappa = 5$  e  $\kappa = 10$ .

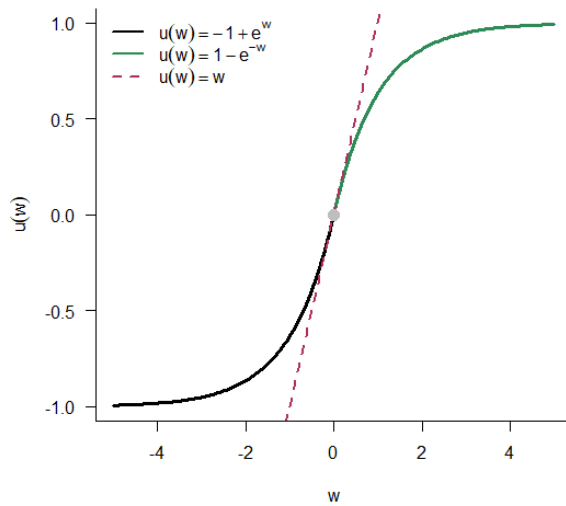




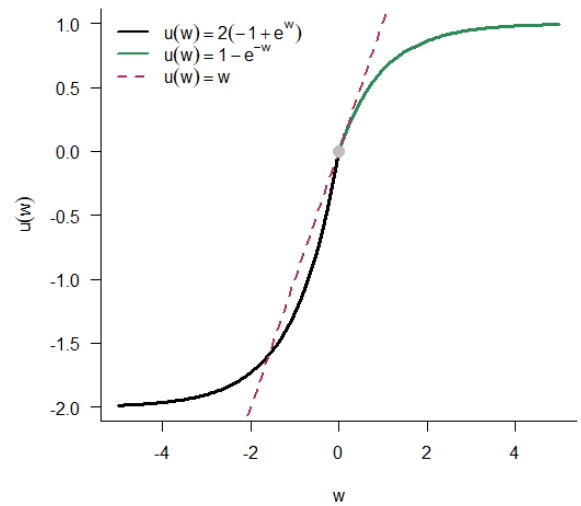
(a) Função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped* com  $\kappa = 1$ .



(b) Função de utilidade exponencial do tipo *S-shaped* com  $\kappa = 2$ .



(c) Comparação gráfica entre as funções (5.2) para  $\kappa = 1$  e (5.3).



(d) Comparação gráfica entre as funções (5.2) para  $\kappa = 2$  e (5.3).

Figura D.2: Representação gráfica das funções de utilidade exponencial do tipo *S-shaped* para  $\kappa = 1$  e  $\kappa = 2$  (painel superior) e as respectivas comparações com a função de utilidade linear (painel inferior)



# Portefólios Eficientes do modelo de otimização média-variância

Tabela E.1: Representação tabular dos demais portfólios eficientes do modelo de otimização média-variância e os respectivos vetores de pesos  $\omega^p$ , valores esperados, variância e taxa instantânea de variação de  $\mathbb{E}[P_p]$  em  $\text{Var}[P_p]$ , apresentados na Figura 5.10.

$A_m$ - Títulos	$P_p$ - Portefólios Eficientes														
	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$
	$\omega^p$ - Vetor de Pesos														
$A_1$ - ALTRI	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0058	0,0099	0,0140	0,0180	0,0221	0,0262	0,0303	0,0344	0,0385	0,0426
$A_2$ - BCP	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_3$ - CORA	0,1259	0,1217	0,1153	0,1069	0,0981	0,0885	0,0790	0,0695	0,0599	0,0504	0,0409	0,0313	0,0218	0,0122	0,0027
$A_4$ - CTT	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_5$ - EDP	0,0002	0,0015	0,0026	0,0037	0,0045	0,0049	0,0053	0,0056	0,0060	0,0064	0,0068	0,0071	0,0075	0,0079	0,0083
$A_6$ - EDPR	0,1899	0,2197	0,2528	0,2892	0,3252	0,3608	0,3964	0,4320	0,4676	0,5032	0,5387	0,5743	0,6099	0,6455	0,6811
$A_7$ - GALP	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_8$ - JMT	0,1508	0,1475	0,1419	0,1341	0,1261	0,1179	0,1097	0,1015	0,0933	0,0851	0,0769	0,0688	0,0606	0,0524	0,0442
$A_9$ - MOTA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{10}$ - NOS	0,0232	0,0075	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{11}$ - NVGR	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{12}$ - RENE	0,3797	0,3670	0,3481	0,3236	0,2989	0,2740	0,2491	0,2242	0,1994	0,1745	0,1496	0,1247	0,0998	0,0750	0,0501
$A_{13}$ - SEM	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{14}$ - YSO	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{15}$ - IBS	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{16}$ - NBA	0,0790	0,0853	0,0914	0,0975	0,1034	0,1090	0,1147	0,1203	0,1260	0,1316	0,1373	0,1429	0,1486	0,1542	0,1599
$A_{17}$ - PHRA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_{18}$ - RAMA	0,0513	0,0499	0,0478	0,0451	0,0422	0,0391	0,0360	0,0329	0,0298	0,0267	0,0236	0,0205	0,0174	0,0143	0,0112
$\mathbb{E}[P_p]$	0,0093	0,0139	0,0184	0,0230	0,0276	0,0322	0,0367	0,0413	0,0459	0,0504	0,0550	0,0596	0,0642	0,0687	0,0733
$\text{Var}[P_p]$	0,8801	0,8940	0,9108	0,9304	0,9532	0,9792	1,0079	1,0391	1,0727	1,1084	1,1459	1,1853	1,2262	1,2685	1,3121
$\Delta\mathbb{E}[P_p]/\Delta\text{Var}[P_p]$	0,3288	0,2725	0,2329	0,2001	0,1764	0,1592	0,1463	0,1362	0,1281	0,1216	0,1162	0,1118	0,1080	0,1049	0,1022