



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Mariana da Costa Djaló

**Cálculo mental e escrito no 1.º e 2.º Ciclos
do Ensino Básico**



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Mariana da Costa Djaló

Cálculo mental e escrito no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de
Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Ema Paula Botelho Costa Mamede

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



**Atribuição-NãoComercial-SemDerivações
CC BY-NC-ND**

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Agradecimentos

À minha mãe que sempre me apoiou ao longo deste percurso, por ter estado sempre ao meu lado, pelo apoio que me deu e pelo empenho e dedicação que teve para comigo. Agradeço do fundo do coração, pois sem ela nada disto seria possível.

Ao meu padrasto por me acompanhar neste percurso, me apoiar e por ter estado ao meu lado nesta etapa.

Aos meus irmãos pela paciência e compreensão que sempre tiveram comigo e por também me apoiarem e acompanharem nesta caminhada.

À professora doutora Ema Mamede por toda a disponibilidade e dedicação, pelos conselhos e conhecimentos partilhados ao longo destes dois anos que me auxiliaram na concretização deste trabalho.

Às professoras cooperantes agradeço por me terem recebido tão bem, pela partilha de conhecimento e por terem feito parte do meu desenvolvimento profissional e pessoal.

Um muito obrigada a todos os que fizeram parte deste percurso.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Cálculo mental e escrito no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Resumo

O presente relatório apresenta uma investigação focada no cálculo mental e escrito dos alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Tem como objetivo perceber que competências de cálculo mental e escrito possuem os alunos e como podem ser promovidos. Assim, procura dar-se resposta a um conjunto de questões: 1) Que dificuldades possuem os alunos no cálculo mental e escrito? 2) Que estratégias de cálculo mental utilizam os alunos? 3) Como pode ser promovido o cálculo mental nos alunos? 4) Como pode ser promovido o cálculo escrito nos alunos?

A metodologia de investigação adotada assentou numa prática reflexiva, sustentada numa metodologia próxima de investigação-ação. A recolha de dados foi realizada com recurso à observação participante, a registos escritos dos trabalhos dos alunos, a gravações de áudio e a fotografias.

A investigação comporta dois estudos. O Estudo 1 realizou-se no 1.º Ciclo do Ensino Básico com 22 alunos de uma turma do 3.º ano e desenvolveu-se em três momentos, sendo eles o momento diagnóstico, o momento de intervenção, que contemplou cinco sessões de intervenção, e o momento avaliativo. Neste estudo, ao longo das sessões de intervenção foram desenvolvidas diferentes tarefas que envolviam o cálculo mental e o cálculo escrito com as operações de adição e subtração com números naturais. O Estudo 2 realizou-se no 2.º Ciclo do Ensino Básico com 20 alunos de uma turma do 5.º ano e, tal como o Estudo 1, desenvolveu-se em três momentos, sendo que o momento relativo à intervenção contemplou três sessões de intervenção. No que toca a este estudo, atendeu-se às operações de adição e subtração com números racionais não negativos, em que neste foram abordados diferentes tipos de casos, que apresentavam diferentes representações do número racional.

Em ambos os estudos, verificou-se uma evolução positiva no que toca ao uso das estratégias de cálculo mental e à sua compreensão, que se observou não só no cálculo mental, mas também no cálculo escrito ao longo das sessões de intervenção desenvolvidas e que se refletiu no momento avaliativo. Contudo, no Estudo 2, essa evolução foi mais notória em determinados casos do que noutros. Para além disto, é de salientar o envolvimento e o empenho dos alunos ao longo do decorrer do projeto e, ainda, a motivação.

Deste modo, conclui-se que o desenvolvimento desta intervenção pedagógica foi positivo e benéfica para os alunos, na medida em que desenvolveu competência ao nível do cálculo mental e escrito, destacando-se como principais propósitos destes ciclos de ensino e que são importantes para todo o percurso escolar, bem como ao longo da vida.

Palavras-chave: Cálculo mental; Cálculo escrito; Estratégias de cálculo mental.

Mental and written calculations in the 1st and 2nd cycles of Basic Education

Abstract

The present report presents an investigation focused on the mental and written calculation of students in the 1st and 2nd cycles of Basic Education. It aims to understand what mental and written calculation skills students have and how they can be promoted. Thus, it seeks to answer a set of questions: 1) What difficulties do students have in the mental and written calculation? 2) What mental calculation strategies do students use? 3) How can mental calculation be promoted in students? 4) How can written calculus be promoted in students?

The research methodology adopted was based on a reflective practice, supported by a methodology close to action research. Data collection was carried out using participant observation, written records of students' work, audio recordings, and photographs.

The investigation comprises two studies. Study 1 was carried out in the 1st Cycle of Basic Education with 22 students from a 3rd-year class and was developed in three moments, the diagnostic moment, the intervention moment, which included five intervention sessions, and the evaluative moment. In this study, during the intervention sessions, different tasks were developed that involved mental calculation and written calculation with addition and subtraction operations with natural numbers. Study 2 was carried out in the 2nd Cycle of Basic Education with 20 students from a 5th-grade class and, like Study 1, was carried out in three moments, with the intervention moment comprising three sessions of intervention. In this study, addition and subtraction operations with non-negative rational numbers were considered, in which different types of cases were addressed, which presented different representations of the rational number.

In both studies, there was a positive evolution regarding the use of mental calculation strategies and their understanding, which was observed not only in the mental calculation but also in the written calculation during the intervention sessions developed, and that was reflected in the evaluation moment. However, in Study 2, this evolution was more noticeable in certain cases than in others. In addition, it is worth noting the involvement and commitment of the students throughout the project and, also, their motivation.

In this way, it is concluded that the development of this pedagogical intervention was positive and beneficial for the students, insofar as it developed competence in terms of mental and written calculation, standing out as the main purposes of these teaching cycles and which are important for all the school path, as well as throughout life.

Keywords: Mental calculus; Written calculation; Mental calculation strategies.

Índice

Capítulo I – Introdução	1
1.1. Relevância do Tema	1
1.2. Justificação da escolha do tema	2
1.3. Problema e questões de investigação	3
1.4. Organização do relatório	4
Capítulo II – Enquadramento teórico	5
2.1. Cálculo mental e cálculo escrito	5
2.2. Sentido de operação	6
2.3. Estratégias de cálculo mental	7
2.3.1. Cálculo mental com números naturais	8
2.3.2. Cálculo mental com números racionais não negativos	12
2.4. Estudos realizados no âmbito desta temática	14
Capítulo III – Metodologia	16
3.1. Opções metodológicas	16
3.2. Plano de estudo	17
3.3. Estudo 1	17
3.3.1. Participantes	17
3.3.2. Desenho da intervenção	18
3.3.3. Tarefas	18
3.3.4. Procedimentos	19
3.3.5. Calendarização	20
3.3.6. Recolha de dados	21
3.4. Estudo 2	21
3.4.1. Participantes	21
3.4.2. Desenho da intervenção	22

3.4.3. Tarefas	22
3.4.4. Procedimentos	23
3.4.5. Calendarização	24
3.4.6. Recolha de dados	24
Capítulo IV – Análise dos resultados	25
4.1. Estudo 1	25
4.1.1. Momento diagnóstico.....	25
4.1.2. Intervenção.....	30
4.1.2.2. Segunda sessão	33
4.1.2.3. Terceira sessão	36
4.1.2.4. Quarta sessão	38
4.1.2.5. Quinta sessão.....	42
4.1.3. Momento avaliativo.....	44
4.2. Estudo 2	49
4.2.1. Momento diagnóstico.....	49
4.2.2. Intervenção.....	61
4.2.2.1. Primeira sessão.....	61
4.2.2.3. Segunda sessão	64
4.2.2.4. Terceira sessão	71
4.2.3. Avaliação final.....	75
Capítulo V - Conclusões	88
5.1. Conclusões do estudo	88
5.1.1. Que dificuldades possuem os alunos no cálculo mental e escrito?	88
5.1.2. Que estratégias de cálculo mental utilizam os alunos?	89
5.1.3. Como pode ser promovido o cálculo mental nos alunos?	89
5.1.4. Como pode ser promovido o cálculo escrito nos alunos?.....	90

5.2. Reflexão	91
5.3. Implicações educacionais	92
5.4. Limitações do estudo	93
Referências bibliográficas	94
Anexos	100

Índice de figuras

Figura 1 - Estratégias de cálculo mental de adição, segundo Ribeiro et al. (2009, pp. 33-34).....	11
Figura 2 – Estratégias de cálculo mental de subtração, segundo Ribeiro et al. (2009, p. 34).....	12
Figura 3 - Exemplo de resposta certa.	26
Figura 4 - Exemplo de resposta errada.	26
Figura 5 – Exemplo de resoluções incompletas.	26
Figura 6 – Dificuldade no cálculo da subtração com empréstimo.	26
Figura 7 - Exemplo de resposta certa.	27
Figura 8 - Erram as duas alíneas.	27
Figura 9 - Erram apenas a alínea e).	27
Figura 10 - Exemplo de resposta certa.	27
Figura 11 – Resoluções que apresentam as dificuldades dos alunos.	27
Figura 12 - Exemplo de resolução correta.	28
Figura 13 - Exemplo das resoluções erradas.	28
Figura 14 - Exemplo de resposta incompleta.	28
Figura 15 - Exemplo de resposta certa.	28
Figura 16 - Exemplo de resposta certa.	29
Figura 17 – Exemplo de resposta incompleta.	29
Figura 18 - Exemplo de resoluções erradas.	29
Figura 19 – Exemplo de resolução em que trocam a posição do aditivo e do subtrativo.	29
.....	29
Figura 20 - Exemplo de resolução em que o que algoritmo não é efetuado corretamente.	29
.....	29
Figura 21 - Estratégia de cálculo mental.	30
Figura 22 - Explicação das estratégias.	31
Figura 23 - Estratégias explicadas aos alunos.	32
Figura 24- Resolução da operação feita pelo aluno.	32
Figura 25 - Cálculo da subtração com empréstimo com três algarismos.	34
Figura 26 - Cálculo da operação feito pelo aluno.	34
Figura 27 - Aluno que parecia estar a ter dificuldades.	34

Figura 28 - Aluno que foi calcular a operação.....	34
Figura 29 –Alunos a resolverem o desafio.....	35
Figura 30 - Resolução do primeiro problema.....	36
Figura 31 - Resolução do segundo problema.....	37
Figura 32 - Resolução do problema.	37
Figura 33 – Resolução do problema através da estratégia de cálculo. mental.	39
Figura 34 - Grupo que resolveu o problema através do algoritmo.....	39
Figura 35 – Resolução de outro grupo.	39
Figura 36 - Jogo da roleta.....	40
Figura 37 – Explicação do aluno.	40
Figura 38 –Cálculo dos alunos.	41
Figura 39 – Alunos que tinham o resultado desta operação.	41
Figura 40 - Aluno que explicou e calculou a operação.	41
Figura 41- Explicação acerca dos arredamentos.	42
Figura 42 - Exemplificação de alguns dos arredondamentos realizados pelos alunos. ..	43
Figura 43 – Aluno a explicar oralmente como estimou o resultado da operação.	44
Figura 44 – Aluno a explicar por escrito como estimou o resultado da operação.....	44
Figura 45 - Exemplo de respostas certas.....	45
Figura 46 - Exemplo de resposta incompleta.....	46
Figura 47 - Estratégia de cálculo mental.	46
Figura 48 - Alínea que alguns alunos erraram.	46
Figura 49 - Exemplo de resposta certa.	46
Figura 50 - Exemplo de respostas certas.....	47
Figura 51 - Exemplo de resposta errada.....	47
Figura 52 - Exemplo de resoluções referidas.	47
Figura 53 - Exemplo de resolução certa.	47
Figura 54 - Resolução incorreta.	48
Figura 55 - Exemplo de resposta certa.	48
Figura 56 – Algoritmo efetuado incorretamente.....	48
Figura 57 – Interpretação incorreta do problema.	48
Figura 58 - Estratégia adotada.	51
Figura 59 - Respostas completas dos alunos.....	54

Figura 60 - Resposta em que é realizada uma multiplicação.	55
Figura 61 - Respostas erradas dos alunos.	55
Figura 62 - Exemplos de respostas certas.	55
Figura 63 - Exemplo de respostas erradas.	55
Figura 64 - Exemplo de resposta certa.	55
Figura 65 - Respostas erradas.	56
Figura 66 - Uso da estratégia de mudança de representação.	56
Figura 67 - Respostas erradas dos alunos.	56
Figura 68 - Exemplo de respostas corretas.	56
Figura 69 - Exemplo de repostas erradas.	57
Figura 70 - Exemplo de respostas certas.	57
Figura 71 - Exemplo de respostas erradas.	57
Figura 72- Exemplo de respostas certas.	57
Figura 73 - Exemplo de respostas erradas dos alunos.	58
Figura 74 - Exemplo de respostas certas.	58
Figura 75 - Resposta errada.	58
Figura 76 - Exemplo de resposta certa.	58
Figura 77 - Exemplo de respostas erradas.	58
Figura 78 - Exemplo de resposta certa.	59
Figura 79 - Exemplo de respostas erradas.	59
Figura 80 - Exemplo de resposta certa.	59
Figura 81 - Exemplo de respostas erradas.	59
Figura 82 - Exemplo de respostas certas.	59
Figura 83 - Exemplo de respostas erradas.	60
Figura 84 - Exemplo de resposta certa.	60
Figura 85 - Exemplo de resposta errada.	60
Figura 86 - Exemplo de respostas certas.	60
Figura 87 - Exemplo de respostas erradas.	60
Figura 88 – Exploração do material manipulável.	61
Figura 89 - Alunos a manipularem o material manipulável de diferentes formas.	62
Figura 90 - Alunos a descobrirem frações equivalentes.	63
Figura 91 - Explicação do desafio no quadro.	65

Figura 92 - Alunos a resolverem os desafios utilizando os discos de fração.....	65
Figura 93 - Alunos a resolverem o desafio sobre as frações equivalentes.	65
Figura 94 - Operações no quadro, com a explicação dos alunos, na segunda operação.	66
Figura 95 - Grupo a utilizar os discos de fração para adicionar.	66
Figura 96 – Explicação dos alunos escrita no quadro.	67
Figura 97 - Explicação sobre adicionar e subtrair frações com denominadores iguais, na reta numérica.....	67
Figura 98 - Explicação dos alunos escrita no quadro.	68
Figura 99 - Alunos a descobrirem frações equivalentes.	68
Figura 100 - Explicação dos alunos escrita no quadro.	68
Figura 101 - Aluno a mostrar-me como achou a fração equivalente.	69
Figura 102 - Explicação dos alunos escrita no quadro.	69
Figura 103 - Quadro com a explicação dos alunos escrita.	70
Figura 104 - Explicação feita pelos alunos.....	70
Figura 105 – Resolução do problema no quadro.....	72
Figura 106 - Grupo que resolveu com uma estratégia de resolução diferente.....	72
Figura 107 - Alunos a resolverem o problema.	72
Figura 108 - Diferentes representações de um número racional escritas no quadro.	73
Figura 109 - Explicação da mudança de representação.....	73
Figura 110 - Alunos a resolverem a pequena ficha com as operações.	73
Figura 111 - Alunos no quadro a resolver as operações.....	73
Figura 112 - Jogo do loto.....	74
Figura 113 - Cálculo de algumas das operações presentes no jogo do loto.	74
Figura 114 - Exemplo de respostas certas.....	80
Figura 115 - Exemplo de respostas certas.....	81
Figura 116 - Exemplo de respostas erradas.	81
Figura 117 - Exemplo de respostas certas.....	81
Figura 118 - Exemplo de respostas erradas.	81
Figura 119 - Exemplo de respostas certas.....	82
Figura 120 - Exemplo de respostas erradas.	82
Figura 121 - Exemplo de respostas certas.....	82

Figura 122 - Exemplo de respostas erradas.	82
Figura 123 - Exemplo de respostas certas.....	83
Figura 124 - Exemplo de respostas erradas.	83
Figura 125 - Exemplo de respostas certas.....	83
Figura 126 - Exemplo de respostas erradas.	83
Figura 127 - Exemplo de respostas certas.....	84
Figura 128 - Exemplo de respostas certas.....	84
Figura 129 - Exemplo de respostas erradas.	84
Figura 130 - Exemplo de respostas certas.....	84
Figura 131 - Exemplo de respostas erradas.	84
Figura 132 - Exemplo de respostas certas.....	85
Figura 133 - Exemplo de respostas erradas.	85
Figura 134 - Exemplo de respostas certas.....	85
Figura 135 - Exemplo de respostas erradas.	85
Figura 136 - Exemplo de resposta certa.	86
Figura 137 - Exemplo de respostas erradas.	86
Figura 138 - Exemplo de respostas certas.....	86
Figura 139 - Exemplo de respostas erradas.	86

Índice de transcrições

Transcrição 1- Discussão sobre a subtração com empréstimo.....	31
Transcrição 2 - Discussão sobre o cálculo da subtração com empréstimo.	32
Transcrição 3 - Interação com os alunos sobre as estimativas.	43
Transcrição 4 - Discussão com os alunos sobre os discos de fração.....	62
Transcrição 5 - Discussão com os alunos sobre os discos de fração.....	63
Transcrição 6 - Discussão com os alunos sobre a regra.	67
Transcrição 7 - Discussão sobre da adição de frações com denominadores diferentes.	69
Transcrição 8 - Discussão sobre as operações apresentadas e discutidas anteriormente.	70

Índice de tabelas

Tabela 1 - Estratégias de cálculo mental da adição, segundo Reys e Reys (1993).	8
Tabela 2 - Estratégias de cálculo mental da subtração, segundo Reys e Reys (1993).	9
Tabela 3 - Estratégias de cálculo mental de adição e de subtração, segundo Vale e Pimentel (2004).	9
Tabela 4 - Estratégias de cálculo mental, segundo Caney e Watson (2003).	13
Tabela 5 – Calendarização das sessões de intervenção desenvolvidas no Estudo 1.	20
Tabela 6 – Calendarização das sessões de intervenção desenvolvidas no Estudo 2.	24
Tabela 7 - Resultados percentuais obtidos na ficha de diagnóstico.....	25
Tabela 8 - Resultados percentuais obtidos na ficha realizada antes e depois da intervenção.	45
Tabela 9 – Percentagem de sucesso obtida no <i>quiz</i> de cálculo mental.	49
Tabela 10 – Percentagem obtida nos diferentes tipos de casos de adição e subtração de frações.	53
Tabela 11 – Percentagem obtida nos diferentes tipos de casos de adição e subtração no <i>quiz</i> de cálculo mental.	76
Tabela 12 – Percentagem obtida nos diferentes tipos de casos de adição e subtração na ficha.....	79

Capítulo I – Introdução

Este capítulo encontra-se organizado em quatro partes, em que apresenta a relevância e a justificação da escolha do tema, atendendo ao contexto dos ciclos de ensino, bem como à sua presença no currículo, o problema e questões em estudo e, por fim, é exposta a organização do relatório.

1.1. Relevância do Tema

O tema cálculo mental e o cálculo escrito considera-se relevante, uma vez que é uma capacidade que é usada no dia a dia das pessoas, como por exemplo quando vamos ao supermercado e precisamos de saber se o dinheiro que levamos é suficiente para as compras que precisamos de fazer e calculamos mentalmente o valor (Albergaria & Ponte, 2008). E, também, devido ao contributo que o desenvolvimento do cálculo mental possui no desenvolvimento de outras capacidades igualmente importantes (Carvalho & Ponte, 2012).

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p. 16), “Com alguma frequência, as necessidades básicas em termos de formação matemática são identificadas com as competências elementares de cálculo (...)” e acrescentam ainda que, o cálculo é uma componente do currículo, demonstrando deste modo, a importância que o cálculo tem na matemática.

Este tem vindo a ser cada vez mais valorizado pela Educação, na medida em que é notória a sua presença nos documentos normativos, como o da Organização Curricular e Programas – 1.º Ciclo do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2004) e o do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). No documento referente à Organização Curricular e Programas – 1.º Ciclo do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2004), realçada a importância do cálculo mental ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade, sendo referido que “(...) deve ser dada especial importância ao cálculo mental” (p. 172). No documento referente ao Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), é apresentado como um dos propósitos principais o desenvolvimento da capacidade ao nível do cálculo mental e escrito e ao longo do documento são feitas diversas referências ao cálculo mental e, também, ao cálculo escrito no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.

Vários autores defendem a importância do desenvolvimento do cálculo mental, realçando o seu contributo para o desenvolvimento de outras capacidades. O cálculo mental contribui para o desenvolvimento do cálculo escrito (Guimarães, 2009; Buys, 2008) e, segundo Taton (1969), cálculo mental e o cálculo escrito são semelhantes, isto porque tanto um como outro utilizam o mesmo encadeamento de operações.

Atendendo ao que refere Taton (1969), é de salientar que o cálculo mental permite o desenvolvimento do sentido de operação. E, para além de contribuir para o sentido de operação, também contribui para o sentido de número, uma vez que segundo refere Vieira e Cruz (2007), estes estão intimamente ligados.

Assim, as razões que foram apresentadas mostram a importância que este tema tem na educação matemática e no quotidiano dos indivíduos, sendo, deste modo, necessário o seu desenvolvimento em contexto de sala de aula, através da promoção de situações tanto de cálculo mental como de cálculo escrito.

1.2. Justificação da escolha do tema

Nos documentos normativos, este tema tem vindo a receber uma maior importância, tal como referem Menezes et al. (2009, p. 1) “(...) o novo Programa de Matemática do Ensino Básico concede ao cálculo mental uma grande importância, em todos os ciclos, sendo que nos dois primeiros anos do 1.º Ciclo é um dos aspectos centrais do tema Números e operações”.

Os documentos normativos para o ensino básico expõem diversas orientações que apresentam como princípios fundamentais o desenvolvimento e compreensão do sentido dos números e das operações e o desenvolvimento da capacidade de cálculo tanto mental como o escrito (Ponte et al. 2007; Bivar et al., 2013).

No que toca ao Programa de Matemática do Ensino Básico, de Bivar et al. (2013), este alude à importância deste tema, mencionando que, no âmbito do 1.º Ciclo do Ensino Básico, “É fundamental que os alunos adquiram durante estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental” (Bivar et al., 2013, p.6).

Relativamente ao Programa de Matemática do Ensino Básico, de Ponte et al. (2007), é referido que o propósito principal de ensino tanto no 1.º como no 2.º ciclo do ensino Básico é “Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos” (Ponte et al., 2007, p. 15).

E, no Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais é referida “A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos” (Departamento de Educação Básica [DEB], 2001, p. 57), sendo esta uma competência fundamental para este tema.

Desta forma, é de mencionar que a importância de se desenvolver o cálculo mental e o escrito desde os primeiros anos de escolaridade, está presente nos documentos normativos que orientam os professores.

Tendo em consideração o contexto do 1.º Ciclo do Ensino Básico, foi notória a falta de atividades ao nível do cálculo mental e escrito ao longo das observações. Portanto, é possível considerar que os alunos têm dificuldades neste sentido e após uma conversa com a professora orientadora cooperante constatou-se ser um tema ao qual os alunos têm dificuldades.

Posto isto, considerou-se pertinente a exploração deste tema no 1.º Ciclo do Ensino Básico, que visa o desenvolvimento do cálculo mental e escrito, já que para que esse desenvolvimento aconteça é crucial a presença de atividades e situações que o estimulem.

No que concerne ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, no decorrer das observações foi possível verificar que os alunos também tinham dificuldades neste tema, sendo, desta forma, pertinente sua exploração. Após verificar este aspeto, conversei com a professora cooperante deste ciclo de ensino acerca da importância de implementar este projeto de intervenção pedagógica, em que esta foi de acordo, frisando que seria benéfico para os alunos.

1.3. Problema e questões de investigação

O problema em estudo é perceber que competências de cálculo mental e escrito possuem os alunos e como podem ser promovidos. Para me auxiliar na intervenção e investigação foram delineadas um conjunto de questões às quais se pretende dar resposta, sendo elas as seguintes:

- Que dificuldades têm os alunos no cálculo mental e escrito?
- Que estratégias de cálculo mental utilizam os alunos?
- Como pode ser promovido o cálculo mental nos alunos?
- Como pode ser promovido o cálculo escrito nos alunos?

Os objetivos da investigação são:

- Conhecer as competências de cálculo mental e de cálculo escrito dos alunos;
- Conhecer as dificuldades no cálculo mental e no cálculo escrito dos alunos;
- Utilizar recursos diferenciados para calcular mentalmente.

1.4. Organização do relatório

O presente relatório encontra-se estruturado em capítulos. O Capítulo I, referente à introdução, expõe uma breve apresentação ao tema, em que expõe a relevância do tema, a justificação da escolha deste tema e, ainda, o problema e as questões em estudo, que auxiliam na investigação.

O Capítulo II, diz respeito ao enquadramento teórico, onde é discutido o tema com base em diferentes autores, reflete acerca do sentido de operação, apresentando relações com o sentido de número e, também, com o cálculo mental e escrito. De seguida, discute-se as estratégias de cálculo mental e apresentam-se estratégias de cálculo mental da adição e da subtração de números naturais e de números racionais não negativos. Para além disto, serão apresentados estudos realizados no âmbito deste tema e expressa-se o que é que este estudo traz de diferente.

O Capítulo III apresenta e justifica a opção metodológica. Apresenta ainda o plano dos estudos, caracterizando para cada um o contexto de intervenção, o desenho da intervenção, as tarefas, os procedimentos adotados, a calendarização da realização do estudo e ainda os instrumentos de recolha de dados.

O Capítulo IV, referente à análise de resultados, apresenta os resultados das diferentes intervenções realizadas em cada Estudo. Para cada sessão de intervenção, primeiramente, apresenta-se o enquadramento, depois a descrição e, por fim, uma reflexão acerca da mesma.

Por fim, o Capítulo V apresenta as conclusões do estudo, procurando responder às questões de investigação. Inclui ainda uma reflexão acerca do projeto desenvolvido e o seu contributo no meu desenvolvimento profissional e pessoal, as implicações educacionais do estudo feito, as limitações do estudo e algumas recomendações para futuras investigações.

Capítulo II – Enquadramento teórico

Ao longo deste capítulo são apresentadas algumas perspetivas de diferentes autores acerca do tema em estudo. Além disso, apresenta uma abordagem ao sentido de operação, enfatizando a importância do sentido de número que antecede o sentido de operação, a importância deste no tema e, também, serão apresentadas estratégias de cálculo mental. Por fim, apresentam-se trabalhos de investigação realizados sobre o tema.

2.1. Cálculo mental e cálculo escrito

O cálculo mental é um tema analisado por diversos autores. Para Reys et al. (1995), o cálculo mental é um processo que consiste em calcular um resultado aritmético, sem que seja utilizado qualquer auxiliar externo, como a calculadora. Ainda, mencionam a sua importância em situações do dia a dia e, também, no desenvolvimento do pensamento matemático.

Gómez (2005) refere que o cálculo mental é um tipo de cálculo que tem como objetivo não só desenvolver a agilidade mental, mas também o cálculo rápido.

Buys (2008) afirma que o cálculo mental pode ser caracterizado como sendo um cálculo rápido e flexível que se baseia nos números, mais precisamente, nas suas características e relações numéricas que são conhecidas.

Já Menezes et al. (2008, p. 1) definem o conceito através de uma perspetiva mais direta, referindo que o “(...) (cálculo mental não é fazer os algoritmos “de cabeça”, mas antes calcular “com cabeça”)”. De acordo com a perspetiva destes autores, Janeiro (2007) afirmando que o cálculo mental deve ser visto como sendo um cálculo que é feito com a cabeça, uma vez que quando estamos a calcular mentalmente e pensamos em como vamos proceder.

Para além do cálculo mental, Menezes et al., (2008) consideram um outro tipo de cálculo, o cálculo escrito, que pode assumir duas formas, sendo elas a representação horizontal, em que é apresentada por uma expressão numérica, e a representação vertical, que é apresentada por um algoritmo.

O cálculo escrito, para Taton (1969), é uma forma adaptada de cálculo mental, quando este é realizado de cabeça. Assim, tal como menciona Maclellan (1995), o cálculo escrito não é um cálculo não mental, mas sim um tipo de cálculo que é registado no papel e que permite o registo das etapas de cálculo que está a ser feito de cabeça. Pinto (2016) vai ao encontro da ideia destes autores, referindo que todo cálculo escrito é mental e acrescenta que este emprega números maiores e problemas mais complicados.

Este é o tipo de cálculo que está mais presente no contexto de sala de aula, sendo reservado/destinado mais tempo para este do que para o cálculo mental. Porém, Cadeia et al. (2006, p. 71) dão relevância ao cálculo mental, referindo que “O cálculo mental é uma capacidade que pode substituir o cálculo escrito, na maioria dos casos do quotidiano nos quais não há necessidade de uso de calculadora”. Já Guimarães (2009, p. 28) afirma que o cálculo mental “(...) contribui para um maior domínio do cálculo escrito à medida que o agiliza, além de permitir ao aluno perceber algumas propriedades e regularidades das operações”.

O autor Buys (2008) apresenta uma definição de cálculo mental associada ao cálculo escrito, no qual define o conceito de cálculo mental defendendo que este permite o uso de papel para se efetuar registos (cálculo escrito), que envolve as operações e que usa propriedades elementares das mesmas e as relações que estas possuem. Esta ideia é também defendida por Taton (1969), uma vez que este refere que o cálculo mental e o cálculo escrito são semelhantes, isto porque tanto um como outro utilizam o mesmo encadeamento de operações.

Segundo Cadeia e Sousa (2007, p. 101), “(...) não podemos continuar a trabalhar apenas os algoritmos. Antes de mais, temos de nos centrar nas técnicas de cálculo mental e essencialmente no sentido de operação”, ou seja, deve ser dada a devida atenção ao sentido das operações, uma vez que o cálculo mental as envolve e em que podem ser estabelecidas relações entre elas. Desta forma, é de salientar que o cálculo mental permite o desenvolvimento do sentido de operação.

2.2. Sentido de operação

O conhecimento dos números tem uma grande importância no conhecimento das operações, uma vez que usamos os números para efetuar operações. Por isso, é que conhecer a natureza dos números é muito importante, pois sem isso não é possível operar com eles.

O sentido de número, segundo Castro e Rodrigues (2008, p. 11), refere-se “(...) à compreensão global e flexível dos números e das operações, com o intuito de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes para cada um os utilizar no seu dia-a-dia, na sua vida profissional ou enquanto cidadão activo”. Complementando esta ideia, Barbosa (2007, p. 182) refere que este se relaciona com “(...) a apreensão contextualizada de conceitos e procedimentos lógicos-matemáticos envolvendo números e quantidades, mesmo antes da formalização do ensino da matemática pela escola”, ou seja, a aquisição deste conceito é feita desde as primeiras idades.

McIntosh et al. (1992), apresenta um modelo referente ao sentido de número, no qual estão presentes os seguintes aspetos: o conhecimento e a destreza com os números, o conhecimento e a

destreza com as operações e a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações que envolvem o cálculo. Este apresenta aspetos relativos não só ao sentido de número, como também ao sentido de operação e, desta forma, atendendo à ideia deste autor, podemos dizer que o sentido de número e o sentido de operação se relacionam. Tal como refere Vieira e Cruz (2007, p. 96), “(...) a ideia de sentido de número está intimamente relacionada com as operações e ter sentido de número é perceber quais as suas implicações quando se opera com eles”.

O sentido de operação, segundo Martins (2011), é muito mais que o conhecimento das operações elementares da aritmética, visto que “(...) elas podem modelar muitas outras situações que não correspondem às interpretações mais comuns” (Martins, 2011, p. 44). Ou seja, o sentido de operação diz respeito não só ao conhecimento das operações como também à aplicação desse conhecimento e da destreza com as operações.

Ainda, é de mencionar a importância que o sentido de operação tem no desenvolvimento do cálculo mental, pois, tal como refere Cadeira e Sousa (2007, p. 101), “(...) o sentido de operação está intimamente ligado ao cálculo mental e aos algoritmos”. Para se calcular mentalmente deve-se atender não só às técnicas de cálculo mental, mas, principalmente, ao sentido de operação.

Assim, é importante realçar a ideia de Abrantes et al. (1999, p. 41), que apresenta a importância da compreensão dos números e das operações, sendo que estes referem que “Todos os alunos devem adquirir a compreensão global dos números e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações”.

2.3. Estratégias de cálculo mental

No ensino da matemática está presente o ensino de diferentes estratégias de cálculo mental, sendo, segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), um dos objetivos na aprendizagem desta área curricular. Neste, é referido que “É importante ainda que os alunos aprendam a operar recorrendo a um amplo conhecimento de estratégias de cálculo e ao conhecimento que têm dos números e que aprendam a realizar algoritmos” (Ponte et al., 2007, p. 14).

As estratégias de cálculo mental permitem que os alunos desenvolvam o cálculo mental, sendo, desta forma, um bom recurso para que esse desenvolvimento ocorra, e permite não só operar como facilitar o cálculo das operações, bem como a resolução de diferentes tarefas, como por exemplo dos problemas. Ribeiro, Valério e Gomes (2009, p.33) afirmam que “(...) quando conhecidas, compreendidas e aplicadas permitem a realização eficaz e rápida do cálculo”.

Apresentam-se, neste seguimento, algumas das estratégias de cálculo mental, no qual vão ser tidas em consideração as estratégias da adição e da subtração de números naturais e de números racionais não negativos, uma vez que o estudo se foca nas operações e nos conjuntos de números referidos.

2.3.1. Cálculo mental com números naturais

Reys e Reys (1993) categorizam as estratégias de cálculo mental de forma diferente, em que são divididas entre as estratégias padrão e as não padrão. As estratégias padrão dizem respeito às que são ensinadas, ou seja, as que fazem parte do currículo, e as estratégias não padrão são aquelas os alunos inventam e aplicam, ou seja, as que não fazem parte do currículo nem são ensinadas. Estas estratégias foram consideradas e categorizadas num estudo realizado por estes autores, que teve como objetivo demonstrar as estratégias de cálculo mental que os alunos utilizavam.

As estratégias referidas serão apresentadas e exemplificadas na Tabela 1 e na Tabela 2.

Tabela 1 - Estratégias de cálculo mental da adição, segundo Reys e Reys (1993).

Estratégia de cálculo mental	Exemplos
Agrupar por dezenas e unidades - Dezenas primeiro: - Unidades primeiro - Acumular somas:	$70 + 20 = 90$; $9 + 6 = 15$; $90 + 15 = 105$ $9 + 6 = 15$; $70 + 20 = 90$; $15 + 90 = 105$ $70 + 20 = 90$; $90 + 9 = 99$
Manter uma parcela constante - Primeira parcela: - Segunda parcela:	$79 + 20 = 99$; $99 + 6 = 105$ $26 + 70 = 96$; $96 + 9 = 105$
Arredondar uma ou ambas as parcelas - Primeira parcela: - Segunda parcela: - Ambas as parcelas:	$80 + 26 = 106$; $106 - 1 = 105$ $79 + 30 = 109$; $109 - 4 = 105$ $80 + 30 = 110$; $110 - 1 - 4 = 105$
Arredondar ambas as parcelas para múltiplos de 5 e ajustar	$75 + 25 = 100$; $100 + 4 + 1 = 104$
Imagem mental do algoritmo de papel/lápis	
Imagem mental do <i>soroban</i> (ábaco japonês)	

Tabela 2 - Estratégias de cálculo mental da subtração, segundo Reys e Reys (1993).

Estratégia de cálculo mental	Exemplos
Contagem crescente - Contar para cima: - Facto conhecido: - Adivinhar e verificar:	(por unidades até 105) (por unidades até 100 e depois adicionar 5)
Arredondar os números e ajustar - Primeiro: - Segundo: - Ambos:	$107 - 97 = 10$; $10 - 2 = 8$ ou $100 - 97 = 3$; $3 + 5 = 8$ $105 - 95 = 10$; $10 - 2 = 8$ ou $105 - 100 = 5$; $5 + 3 = 8$ $100 - 90 = 10$; $15 - 7 = 8$
Dezenas e unidades Parcial:	$100 - 60 = 40$; $40 - 8 = 32$ ou $100 - 8 = 92$; $92 - 60 = 32$
Imagem mental do algoritmo do algoritmo de papel/lápis	
Imagem mental do <i>soroban</i> (ábaco japonês)	

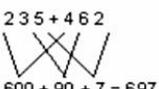
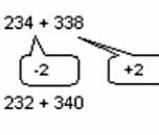
Vale e Pimentel (2004) apresentam um conjunto de estratégias de cálculo mental, referentes à adição e à subtração, referindo que “As propriedades das operações estão na base destas estratégias” (ver Tabela 3).

Tabela 3 - Estratégias de cálculo mental de adição e de subtração, segundo Vale e Pimentel (2004).

Estratégias de cálculo mental	Exemplos
Formar dezenas	$9 + 4 = 9 + (1 + 3) = (9 + 1) + 3 = 10 + 3$
Formar pares de parcelas iguais	$7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15$
Contar para trás	$6 + 9 = 6 + (10 - 1) = (6 + 10) - 1 = 16 - 1 = 15$
Adicionar da esquerda para a direita	$25 + 38 = (20 + 5) + (30 + 8) = (20 + 30) + (5 + 8) = 50 + 13 = 63$
Decompor uma das parcelas	$42 + 35 = 42 + (30 + 5) = (42 + 30) + 5 = 72 + 5 = 77$
Compensar para obter dezena	$43 + 28 = (43 + 7) + (28 - 7) = 50 + 21 = 71$
Associar para obter múltiplos de 10	$6 + 30 + 1 + 4 + 70 = (30 + 70) + (6 + 4) + 1 = 100 + 10 + 1 = 111$

Decompor e associar para obter múltiplos de 10	$35 + 49 = 35 + (45 + 4) = (35 + 45) + 4 = 80 + 4 = 84$
Subtrair da esquerda para a direita	$47 - 32 = (40 - 30) + (7 - 2) = 10 + 5 = 15$
Compensar para igualar as unidades ao aditivo e ao subtrativo	$53 - 35 = (53 + 2) - 35 - 2 = 55 - 35 - 2 = 20 - 2 = 18$
Subtrair por partes	$46 - 23 = (46 - 20) - 3 = 26 - 3 = 23$
Compensar para obter dezenas no subtrativo	$45 - 29 = (45 + 1) - (29 + 1) = 46 - 30 = 16$

Ribeiro et al. (2009) também definiram e categorizam as estratégias de cálculo mental da adição e subtração, sendo que algumas delas vão ao encontro das apresentadas anteriormente (ver Figuras 1 e 2).

Decompor e adicionar ordem a ordem	$235 + 462$  $600 + 90 + 7 = 697$	DECOMPOSIÇÃO
Compor o número com os resultados obtidos		
Retirar a uma parcela um número que, adicionado à outra parcela a transforma num número mais cómodo	$234 + 338$  $232 + 340$ $500 + 70 + 2 = 572$	
Adicionar um número próximo, mais cómodo, e, ao resultado: — subtrair o que se adicionou a mais ou — adicionar o que se adicionou a menos	$478 + 98$ $478 + 100 - 2 = 578 - 2 = 576$ $478 + 102$ $478 + 100 + 2 = 578 + 2 = 580$	COMPENSAÇÃO

<p>Trocar as parcelas, comutar as parcelas, de forma a facilitar o cálculo.</p> <p>Utilização da propriedade comutativa</p>	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>$57 + 15 + 3 =$</td> <td>$33 + 14 + 3 =$</td> </tr> <tr> <td>$57 + 3 + 15 =$</td> <td>$33 + 3 + 4 =$</td> </tr> <tr> <td>$60 + 15 =$</td> <td>$36 + 14 =$</td> </tr> <tr> <td>75</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table>	$57 + 15 + 3 =$	$33 + 14 + 3 =$	$57 + 3 + 15 =$	$33 + 3 + 4 =$	$60 + 15 =$	$36 + 14 =$	75	50	<p>PROPRIEDADE COMUTATIVA</p>
$57 + 15 + 3 =$	$33 + 14 + 3 =$									
$57 + 3 + 15 =$	$33 + 3 + 4 =$									
$60 + 15 =$	$36 + 14 =$									
75	50									
<p>Mudar a ordem das parcelas, de forma a facilitar o cálculo.</p> <p>Utilização da propriedade associativa.</p>	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>$15 + 57 + 3 =$</td> <td>$14 + 33 + 3 =$</td> </tr> <tr> <td>$15 + (57 + 3) =$</td> <td>$14 + (33 + 3) =$</td> </tr> <tr> <td>$15 + 60 =$</td> <td>$14 + 36 =$</td> </tr> <tr> <td>75</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table>	$15 + 57 + 3 =$	$14 + 33 + 3 =$	$15 + (57 + 3) =$	$14 + (33 + 3) =$	$15 + 60 =$	$14 + 36 =$	75	50	<p>PROPRIEDADE ASSOCIATIVA</p>
$15 + 57 + 3 =$	$14 + 33 + 3 =$									
$15 + (57 + 3) =$	$14 + (33 + 3) =$									
$15 + 60 =$	$14 + 36 =$									
75	50									
<p>Associar parcelas cujo soma é um múltiplo de 10, 100, 1000, ...</p> <p>Nota: Esta estratégia implica o conhecimento dos "números amigos" como facto numérico.</p> <p>Está subjacente a utilização da propriedade comutativa e/ou associativa</p>	<p>$15 + 16 + 25$ \swarrow $40 + 16 = 56$</p> <p>$27 + 22 + 48$ \swarrow $27 + 70 = 97$</p> <p>$145 + 70 + 55$ \swarrow $200 + 70 = 270$</p>	<p>"NÚMEROS AMIGOS" (A ASSOCIATIVA E/OU COMUTATIVA)</p>								

Figura 1 - Estratégias de cálculo mental de adição, segundo Ribeiro et al. (2009, pp. 33-34).

<p>Subtractivo</p> <p>Subtrair um número próximo, mais cómodo, e, ao resultado:</p> <p>- adicionar o que se subtraiu a mais</p> <p>ou</p> <p>- subtrair o que falta</p>	<p>$127 - 13$</p> <p>$127 - 20 + 7 = 107 + 7$</p> <p>$127 - 13$</p> <p>$127 - 10 - 3 = 117 - 3$</p>	C O M P E N S A Ç Ã O
<p>Aditivo</p> <p>Substituir o aditivo por um número mais cómodo, e, ao resultado adicionar o simétrico do número com que se operou.</p>	<p>$127 - 13$</p> <p>$127 + 3 - 13 + (-3) = 130 - 13 + (-3) = 117 - 3 = 114$</p> <p>$127 - 13$</p> <p>$127 - 7 - 13 + 7 = 120 - 13 + 7 = 107 + 7 = 114$</p>	
<p>Decompor o número e subtrair ordem a ordem</p> <p>Compor o número com os resultados obtidos</p>	<p>$465 - 232$</p>  <p>$200 + 30 + 3 = 233$</p>	DECOMPOSIÇÃO
<p>Adicionar ou subtrair ao aditivo e ao subtractivo o mesmo número de forma a transformar o subtractivo num número mais cómodo</p>	<p>$175 - 49 =$</p> <p>(+1) (+1)</p> <p>$176 - 50 = 126$</p> <p>$760 - 352 =$</p> <p>(-2) (-2)</p> <p>$758 - 350$</p>	SUBSTITUIÇÃO (Propriedade da Invariância do Resto)
<p>A partir do subtractivo, somando, até obter o aditivo</p>	<p>$175 - 49 =$</p> <p>49 +1</p> <p>50 +100</p> <p>150 +25</p> <hr style="width: 50px; margin-left: 100px;"/> <p>175 126</p>	SUBSTITUIÇÃO (Operação Inversa)

Figura 2 – Estratégias de cálculo mental de subtração, segundo Ribeiro et al. (2009, p. 34).

Neste estudo será considerada a denominação das estratégias de cálculo mental de números naturais apresentada por Vale e Pimentel (2004), tanto na adição como na subtração. Também será considerada a estratégia de cálculo mental denominada de decomposição, segundo Ribeiro et al. (2009) e, ainda, estratégia denominada de imagem mental do algoritmo (Reys & Reys, 1993).

2.3.2. Cálculo mental com números racionais não negativos

Caney e Watson (2003) apresentam um conjunto de estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos com números racionais, que foram identificadas após a realização de um estudo com alunos do 3.º ano ao 10.º ano e frisam a importância de serem compreendidas as relações entre as representações de um número racional, no desenvolvimento do cálculo mental com estes números.

Estas autoras destacam que as estratégias usadas pelos alunos passam pelo uso de uma regra memorizada e pelo uso de várias estratégias (Caney & Watson, 2003), sendo identificadas um total de onze estratégias de cálculo mental utilizadas com números racionais (ver Tabela 4).

Tabela 4 - Estratégias de cálculo mental, segundo Caney e Watson (2003).

Estratégias de cálculo mental	Exemplos
Mudança de operação	
- Divisão para multiplicação - Subtração para adição	$3 \div 0,5$, muda para uma multiplicação $4,5 - 3$, muda para uma adição
Mudança de representação	
- Fração para número decimal	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, muda-se a representação de fração para número decimal e fica $0,75 - 0,25$
- Número decimal para fração	$0,5 + 0,75$, muda-se a representação de número decimal para fração e fica $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
- Percentagem para fração	25 % de 80, muda-se 25% para fração e fica $\frac{1}{4}$
-Números inteiros referentes a $\frac{10}{100}$	$0,19 + 0,1$ representa-se o 0,19 em 19 e o 0,1 em 10
Utilização de equivalências	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ é alterado para $\frac{2}{4}$
Utilização de factos conhecidos	10% de 45, usa-se o conhecimento de 10% para retirar primeiro 10% de 40 e depois 10% de 50
Repetição de operações	
- Repetição de adições/multiplicações	$4 \times \frac{3}{4}$, multiplica-se $\frac{3}{4}$ duas vez e outras duas vezes
- Repetição de dobros e metades	25% de 80, calcula-se metade de 80 e depois calcula-se novamente metade do valor obtido anteriormente.
Estabelecer relações	$6,2 + 1,9$, considera-se o 1,9 como 2
Trabalha com partes de um segundo número	
- Dividir pelo valor posicional	10 % de 45, divide-se 40 por 10 e depois 5 por 10
- Dividido por partes	$0,5 + 0,75$, torna-se o 0,75 em $0,5 + 0,25$
Trabalho da esquerda para a direita	

- Separar a parte inteira da decimal - Separar os números pelo valor posicional após a vírgula	4,5 – 3,3 , primeiro opera-se com os números inteiros depois com a parte decimal 0,19 + 0,1 , primeiro opera-se com as décimas e depois com as centésimas
Recurso a imagem mental	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, divide-se um retângulo imaginário em 4 partes
Uso da forma mental do algoritmo escrito	Opera-se através da visualização mental do algoritmo
Uso de regras memorizadas	$1,2 \times 10$, aplica-se a regra “mover” a vírgula para a direita

Atendendo à denominação dada por Caney e Watson (2003), neste estudo serão consideradas as estratégias de cálculo mental denominadas de mudança de representação, utilização de equivalências e o uso mental do algoritmo.

2.4. Estudos realizados no âmbito desta temática

A literatura apresenta já vários estudos referentes ao cálculo mental, realizados no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.

Relativamente ao cálculo mental com números naturais, Teixeira e Rodrigues (2014) realizaram um estudo com 23 alunos do 3.º ano de escolaridade, com o objetivo de compreender as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, nas diversas operações com números naturais, e como estas se desenvolvem. Neste verificou-se que os alunos evoluíram o repertório de estratégias de cálculo mental e destacam a importância dos procedimentos que utilizaram como a implementação da rotina de cálculo mental e os momentos de partilha de estratégias, sendo crucial a junção de ambas para que haja o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. Faria (2014) realizou um estudo no 2.º ano de escolaridade, que tinha como objetivo compreender de que forma os alunos compreendem e aplicam as estratégias de cálculo mental, no âmbito das operações de adição. Neste estudo verificou-se uma evolução positiva das estratégias, bem como dos registos dos alunos, sendo que estes apresentaram maior facilidade em representar os seus raciocínios por escrito.

Também Veloso (2015) procurou identificar as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos 20 alunos do 3.º ano de escolaridade e como estas evoluem. Verificou que os alunos evoluíram na utilização das estratégias de cálculo mental e concluiu que, na adição, utilizam mais a estratégia de decomposição, na subtração, a estratégia de saltos e, na multiplicação, utilizam tanto os procedimentos aditivos como os multiplicativos. O autor evidenciou ainda que a exploração de cadeias numéricas teve um papel

importante no desenvolver e expressar de novas estratégias, sendo que foi através desta que os alunos começaram a utilizar mais estratégias para além daquelas que foram utilizadas nas tiras de cálculo mental.

No que toca ao cálculo mental com números racionais não negativos, Carrapiço (2016) realizou um estudo com 39 alunos de duas turmas do 6.º ano de escolaridade, que tinha como objetivo compreender que estratégias e erros evidenciam os alunos no cálculo mental com números racionais, e contribuir para o desenvolvimento das estratégias de cálculo mental dos alunos. Este estudo concluiu que os alunos recorrem principalmente a vários tipos de relações numéricas, mas, às vezes, recorrem a estratégias centradas no uso de factos numéricos e regras memorizadas.

Laranjeira (2017) realizou um estudo numa turma do 6.º ano de escolaridade, com o objetivo de compreender as dificuldades dos alunos na adição e na subtração de números racionais não negativos, representados na forma de fração. Neste estudo verificou-se uma evolução dos alunos no que toca à compreensão de número racional não negativo, representado na forma de fração, contudo, ainda, se verificou que os alunos recorriam às memorizações, apesar de, no final, os alunos acabarem por compreender as mesmas.

Estudos no âmbito do cálculo escrito são mais raros. Foi nítida a dificuldade em encontrar estudos realizados no âmbito do cálculo escrito, ou estudos realizados com a temática aqui presente, em que estuda, em simultâneo, o cálculo mental e o cálculo escrito.

Capítulo III – Metodologia

Neste capítulo é apresentada a metodologia adotada na implementação do projeto, a justificação das opções metodológicas adotadas, as características de cada ciclo onde o estudo foi realizado, onde se elucida os participantes, o plano de estudo, as tarefas propostas, os procedimentos e a recolha de dados.

3.1. Opções metodológicas

Para a implementação do presente projeto recorreu-se a uma investigação qualitativa, na medida em que, tal como menciona Coutinho (2011, p. 299), “O propósito da investigação qualitativa é compreender os fenómenos na sua totalidade e no contexto em que ocorrem (...)”, sendo esta investigação sustentada por uma metodologia de investigação-ação.

A metodologia investigação-ação é definida por vários autores, sendo estes apresentados num estudo realizado por Latorre (2003). Elliott (1993) e Lomax (1990) definem a investigação-ação de forma semelhante, em que esta para eles é uma intervenção prática que tem como objetivo melhorar a prática. Já no caso de Bartalomé (1986) apresenta uma definição mais elaborada e completa, definindo a investigação-ação como um processo reflexivo que vincula a investigação, a ação e a formação, realizada por profissionais das ciências sociais, acerca da sua prática. Deste modo, podemos afirmar que esta é uma metodologia de investigação que abarca simultaneamente a investigação e a mudança de determinado contexto, tal como cita Fonseca (2012, p. 18), “(...) utiliza em simultâneo a Ação e a Investigação num processo cíclico, onde há uma variação progressiva entre a compreensão, a mudança, a ação e a reflexão crítica da prática docente”.

Coutinho et al. (2009) vai ao encontro do que foi dito anteriormente, afirmando que é uma metodologia que é essencialmente aplicada e prática, que se rege pela oportunidade de resolver problemas da realidade.

Kemmis e McTaggart (1988) descrevem a metodologia investigação ação como sendo colaborativa e participativa, uma vez que o investigador tem como objetivo melhorar as suas próprias práticas. Acrescenta ainda que esta segue um ciclo em espiral com quatro momentos fundamentais, a planificação, a ação, a observação e a reflexão, no qual não se limita apenas a um ciclo, permitindo aos participantes realizar ajustes na ação. Estes autores mencionam que os principais benefícios desta metodologia são a melhoria e a compreensão da prática e a melhoria da situação em que a prática ocorre.

Considerando o que foi referido um ciclo de espiral em que segue esta metodologia, segundo Kemmis e McTaggart (1988), o mesmo é referido por Coutinho et al. (2009), na medida em que este menciona que nesta metodologia é observado “(...) um conjunto de fases que se desenvolvem de forma contínua e que, basicamente, se resumem na sequência: planificação, acção, observação (avaliação) e reflexão (teorização). Este conjunto de procedimentos desencadeia novas espirais de experiência de acção reflexiva” (Coutinho et al., 2009, p. 366).

Segundo Altrichter, Posner e Somekh (1996), a investigação-ação é uma metodologia que se destina a apoiar os professores a enfrentarem os desafios e problemas que provêm da prática e a adotarem mudanças de forma reflexiva. Para além destes autores mencionarem que a investigação-ação contribui para que os professores melhorem as suas práticas, também mencionam que contribui para os professores ampliarem o seu conhecimento e a sua competência profissional.

Desta forma, é de salientar a importância que esta metodologia tem tanto para os professores como para os alunos, sendo importante que os professores assumam um papel reflexivo, de forma a procurarem melhorar e compreender a sua prática.

3.2. Plano de estudo

O presente estudo foi realizado em dois ciclos de ensino, no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, dando origem ao Estudo 1 e ao Estudo 2. A implementação do projeto no 1.º Ciclo do Ensino Básico teve três momentos fundamentais, sendo eles o momento diagnóstico, a intervenção e o momento avaliativo.

O momento diagnóstico teve como objetivo conhecer as dificuldades e competências dos alunos no cálculo mental e escrito, tendo sido o ponto de partida para o desenho das intervenções; o momento avaliativo teve como finalidade conhecer as aprendizagens realizadas pelos alunos.

Quanto ao momento da intervenção, é de referir que este foi pensado de acordo com as dificuldades sentidas pelos alunos na avaliação diagnóstica e a decisão que era feita em cada sessão dependia do desempenho e da aprendizagem dos alunos da sessão anterior.

Tal como o ciclo de ensino referido, a implementação do projeto no 2.º Ciclo do Ensino Básico, teve os mesmos momentos, com propósitos análogos.

3.3. Estudo 1

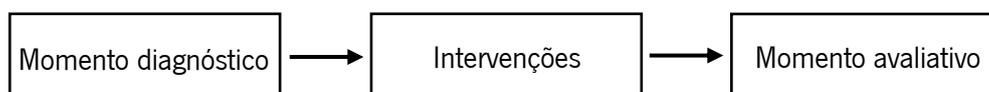
3.3.1. Participantes

O presente projeto foi desenvolvido numa Escola Básica do 1.º Ciclo do Ensino Básico, que tem uma dimensão de 170 alunos, sendo repartida por oito turmas no total. A turma do 1.º Ciclo do Ensino

Básico sobre a qual se debruçou a investigação é relativa ao 3.º ano de escolaridade e é composta por 22 alunos de uma escola do concelho de Felgueiras. A turma é constituída por 10 raparigas e 12 rapazes, em que as suas idades variam entre os oito e os nove anos de idade. Todos os alunos são portugueses, contudo existe um aluno cuja família é ucraniana e este acaba por ter um sotaque ucraniano. Este aluno é referenciado como aluno com Necessidades Educativas Especiais (NEE), usufruindo de medidas universais e seletivas definidas pelo Relatório Técnico Pedagógico (RTP), em que estas medidas são aplicadas na área curricular de português.

3.3.2. Desenho da intervenção

A intervenção deste estudo começou com o momento diagnóstico, em que ocorreu a implementação de uma ficha, precedendo a intervenção que foi desenhada com base nos resultados obtidos no diagnóstico e terminou com o momento avaliativo (Ver Esquema 1).



Esquema 1 – Desenho da intervenção do projeto do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

O momento de diagnóstico pretendeu conhecer as dificuldades e competências dos alunos no cálculo mental e no cálculo escrito; as intervenções tiveram como finalidade o desenvolvimento de competências já referidas, de modo a ultrapassar as dificuldades sentidas pelos alunos no primeiro momento; e o momento avaliativo pretendeu conhecer as aprendizagens realizadas pelos alunos.

3.3.3. Tarefas

As tarefas desenvolvidas nas diferentes intervenções integraram o cálculo mental e escrito, envolvendo, apenas, duas operações elementares da aritmética, a adição e a subtração.

A ficha de diagnóstico teve como intenção a avaliação diagnóstica dos alunos e a ficha de avaliação teve como propósito confrontar os resultados obtidos na ficha de diagnóstico, de modo a verificar o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Ambas integraram tarefas em que os alunos têm de calcular mentalmente e explicar como pensaram, situações problemáticas, estimativas e enigmas.

Na intervenção foram desenvolvidas diferentes tarefas que tiveram em atenção as dificuldades sentidas pelos alunos, para que estas fossem colmatadas, e o conhecimento prévio dos alunos, partindo deste para a abordagem e explicação das estratégias de cálculo mental abordadas.

Nesta foram implementados desafios, que consistiam no cálculo de operações atendendo ao conhecimento adquirido nas intervenções, sendo uma forma de ter feedback por parte dos alunos acerca do que estava a ser desenvolvido na intervenção. Para além disso, foram implementados problemas, em que requeria atividade mental e visava permitir aos alunos desenvolver o raciocínio e consolidar o conhecimento matemático (Ponte et al., 2007). E, os jogos permite o desenvolvimento e a exploração do cálculo mental de uma forma lúdica e motivadora e, ainda a sua exploração (Campos, Carvalho & Moreira, 2015).

Estes foram os recursos utilizados na dinamização das tarefas, uma vez que o cálculo mental e escrito são um aspeto importante na matemática e que podemos desenvolvê-lo atendendo à diversidade de recursos, fazendo com os alunos ganhem gosto pela mesma.

3.3.4. Procedimentos

A implementação do projeto teve em conta a metodologia adotada, em que foi muito importante refletir sobre a prática após cada sessão, para que, desta forma, fosse possível melhorar a prática, assim como adaptá-la às necessidades dos alunos e às dificuldades que não foram colmatadas na sessão anterior.

A prática pedagógica desenvolvida ao longo desta implementação teve como base uma visão construtivista, na medida em que pretendi que os alunos tivessem um papel ativo na construção do seu conhecimento. Para que isto fosse possível, dei espaço aos alunos para questionarem, tive em conta o seu conhecimento prévio, bem como o confronto deste com o que foi abordado acerca do conhecimento e, ainda, o feedback e a reflexão sobre a aprendizagem.

No momento de diagnóstico, ocorreu a realização de uma ficha, de forma individual, com o objetivo de conhecer as competências e as dificuldades dos alunos. Esta permitiu desenvolver uma prática a fim de colmatar as dificuldades dos alunos verificadas na ficha.

Foram planeadas tarefas para resolver a pares, como ocorreu na resolução de problemas e em grande grupo, como nos *quizzes* e nos jogos que foram implementados, no qual os alunos tinham oportunidade de dizer se achavam que estava certo ou errado, explicando o porquê, sendo este um aspeto importante para fomentar a comunicação matemática e a partilha de ideias, opiniões e estratégias diferentes. É ainda de referir que os alunos tiveram um papel ativo no decorrer da intervenção, na medida em que podiam argumentar, ir ao quadro mostrar como fizeram, descobrir o porquê de terem errado e discutir as estratégias de cálculo mental, bem como as diferentes resoluções feitas. Considerei o conhecimento prévio dos alunos, sendo este o ponto de partida para a abordagem de determinado

aspecto, tive em atenção o ritmo de trabalho dos alunos, respeitando o mesmo, e, ainda, o cuidado em esclarecer todas as dúvidas, de modo a ultrapassar as suas dificuldades. Desta forma, os alunos desenvolvem outras competências como a de raciocinar e comunicar matematicamente.

No momento avaliativo foi implementada a mesma ficha do momento de diagnóstico e teve como objetivo a comparação dos resultados, de forma a verificar se os alunos ultrapassaram as dificuldades sentidas anteriormente.

3.3.5. Calendarização

No Estudo 1 desenvolveram-se cinco sessões de intervenções e na Tabela 5 encontra-se a calendarização das mesmas.

Tabela 5 – Calendarização das sessões de intervenção desenvolvidas no Estudo 1.

Intervenção	Dia	Duração	Objetivo/Propósito	Dinâmica
Primeira sessão	7 de dezembro	1 hora e 40 minutos	<ul style="list-style-type: none"> - Compreender as estratégias de cálculo mental das operações elementares da aritmética, a adição e a subtração. 	<ul style="list-style-type: none"> - Grande grupo; - Individual
Segunda sessão	10 de dezembro	2 horas	<ul style="list-style-type: none"> - Compreender as estratégias de cálculo mental das operações elementares da aritmética, a adição e a subtração; - Desenvolver o cálculo mental através de um recurso dinâmico e interativo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Grande grupo; - Individual
Terceira sessão	14 de dezembro	1 hora e 50 minutos	<ul style="list-style-type: none"> - Proporcionar aos alunos situações problemáticas que envolvam subtração com empréstimo; - Usar as estratégias de cálculo mental abordadas; - Desenvolver o cálculo mental através de um recurso dinâmico e interativo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Trabalho a pares; - Grande grupo.
Quarta sessão	16 de dezembro	1 hora e 30 minutos	<ul style="list-style-type: none"> - Proporcionar aos alunos situações problemáticas que envolvam subtração com empréstimo; 	<ul style="list-style-type: none"> - Trabalho a pares; - Grande grupo.

			<ul style="list-style-type: none"> - Proporcionar o uso das estratégias de cálculo mental; - Desenvolver o cálculo mental e escrito através do jogo da roleta. 	
Quinta sessão	14 de janeiro	1 hora e 50 minutos	<ul style="list-style-type: none"> - Produzir estimativas através do cálculo mental; - Desenvolvimento do cálculo mental e escrito; - Realização de uma atividade. 	- Grande grupo.

3.3.6. Recolha de dados

Ao longo da implementação do projeto foram utilizados diversos instrumentos que permitiram a recolha de dados e que, segundo Bogdan e Biklen (1994), são utilizados em investigações qualitativas.

Esta recolha foi realizada através de fotografias e de gravações áudio, que possibilitam destacar os diálogos estabelecidos no decorrer da intervenção, de anotações que foram sendo tomadas, que permitem evidenciar e que servem como base para a descrição. Também foi feita através de registos das produções escritas dos alunos, como as fichas realizadas e o que os alunos vão explicar por escrito no quadro, e que permitem verificar o desenvolvimento dos alunos. E, é ainda de referir a observação participante, que foi feita ao longo das aulas e que permite conhecer diretamente os fenómenos que ocorrem no contexto em questão, pois tal como refere Correia (2009, p. 31) “A observação participante é dinâmica e envolvente e o investigador é simultaneamente instrumento na recolha de dados e na sua interpretação (...)” e, para além disto, permite que sejam criadas interações atendendo à situação estudada (Amado & Silva, 2014).

3.4. Estudo 2

3.4.1. Participantes

O presente projeto, também, foi desenvolvido numa Escola Básica do 2.º Ciclo do Ensino Básico, do concelho de Felgueiras, com cerca de 364 alunos.

A implementação do projeto foi feita numa turma do 5.º ano de escolaridade, composta por 20 alunos, em que 11 alunos são do sexo masculino e 9 são do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 9 e os 10 anos. Todos os alunos são portugueses, contudo existe um aluno na turma que é proveniente do Luxemburgo, sendo de referir que frequentou nesse país um curso de Língua e Cultura Portuguesa. Nesta turma, há um aluno que com Relatório Técnico Pedagógico, que usufrui de Medidas

Universais e Seletivas. Porém, no que toca à área de Matemática é dada uma maior atenção, de forma que o processo de ensino e aprendizagem seja significativo e, ainda, são adaptadas as fichas de avaliação.

3.4.2. Desenho da intervenção

Este estudo iniciou-se com o momento diagnóstico, que teve duas partes, uma delas diz respeito ao *quiz* de cálculo mental e outra à ficha. Após a implementação destas duas partes da fase do diagnóstico procedeu-se a um conjunto de intervenções desenhadas com base nos resultados obtidos na mesma e terminou com o momento avaliativo, que diz respeito à implementação tanto do *quiz* como da ficha, como ocorreu na avaliação de diagnóstico. O Esquema 2 ilustra bem as fases deste processo.



Esquema 2 - Desenho da intervenção do projeto do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Cada um dos momentos apresentados têm finalidades análogas ao do Estudo 1.

3.4.3. Tarefas

As tarefas desenvolvidas neste ciclo de ensino integram, igualmente, o cálculo mental e escrito, envolvendo, apenas, duas operações elementares da aritmética, a adição e a subtração.

Neste ciclo de ensino, foi implementado nos momentos diagnóstico e avaliativo um *quiz* de cálculo mental e uma ficha com operações. Ambos integraram operações, em que cada uma delas apresenta diferentes casos frações com o mesmo denominador, frações em que um denominador é múltiplo doutro, frações com denominadores não múltiplos, número natural com fração, número natural com número decimal, fração com número decimal e número decimal com fração decimal.

Na intervenção desenvolvida foram implementados desafios, em que eram resolvidos com e sem auxílio do material manipulável, como também problemas e jogos, sendo que estes envolviam atividade mental. A resolução de problemas tem um papel importante, na medida em que, “(...) é uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático (...)” (Ponte et al., 2007, p. 6) e também desenvolve o raciocínio dos alunos (Lupinacci & Botin, 2004). O jogo é um recurso benéfico para o desenvolvimento do cálculo mental, que permite explorá-lo, exercitá-lo e motiva os alunos (Campos, Carvalho & Moreira, 2015).

As tarefas desenvolvidas nas intervenções tiveram em consideração as dificuldades sentidas pelos alunos no momento diagnóstico, para que estas fossem colmatadas, e o conhecimento prévio dos

alunos. Também se atendeu aos recursos utilizados como o material manipulável e os jogos, que permitem o desenvolvimento das capacidades de cálculo de uma forma lúdica e motivadora, o que faz com que os alunos ganhem gosto pelo mesmo.

3.4.4. Procedimentos

A implementação do projeto também teve em conta a metodologia adotada, tendo sido, desta forma, análoga à do Estudo 1. A prática pedagógica desenvolvida ao longo desta implementação atendeu aos mesmos aspetos referido no âmbito do Estudo 1.

Para o desenvolvimento da intervenção teve-se em atenção os resultados obtidos no momento de diagnóstico, no que toca às competências e às dificuldades dos alunos, sendo este o ponto de partida para o desenho da intervenção.

Neste estudo foram planeadas tarefas em que o método de trabalho era a pares, como ocorreu na exploração do material manipulável e na resolução de problemas, e em grande grupo, como ocorreu no jogo que foi realizado, no qual os alunos tinham oportunidade desenvolver o cálculo mental e escrito e, ainda, de desenvolver a comunicação matemática e a partilha de ideias, opiniões e estratégias diferentes. Também existiram momentos de trabalho individual, como na realização de desafios.

No decorrer das intervenções consideraram-se os diferentes ritmos de trabalho dos alunos, respeitando-os, e houve o cuidado em esclarecer todas as dúvidas e em colmatar as dificuldades dos alunos. Os alunos tiveram um papel ativo na intervenção e era considerado o seu conhecimento prévio, partindo do mesmo para o desenvolver da intervenção. Para além disso, foi dado espaço à comunicação matemática, que me permitia perceber se os alunos estavam a compreender e que estratégias de cálculo mental estariam a utilizar. E, também, houve a preocupação de conceber momentos em que os alunos exercitam e ocorre atividade mental.

Para verificar se as dificuldades dos alunos tinham sido colmatadas, ocorreu o momento avaliativo, em que foi implementada a mesma ficha de operações do diagnóstico e o *quiz* de cálculo mental, sendo este menor, devido ao tempo de aula destinado à sua concretização. Este momento tem como objetivo perceber se, com a intervenção desenvolvida, as dificuldades dos alunos foram colmatadas.

3.4.5. Calendarização

No Estudo 2 desenvolveram-se três sessões de intervenções e na Tabela 6 encontra-se a calendarização das mesmas.

Tabela 6 – Calendarização das sessões de intervenção desenvolvidas no Estudo 2.

Intervenção	Dia	Duração	Objetivo/Propósito	Dinâmica
Primeira sessão	24 de maio	45 minutos	<ul style="list-style-type: none">- Explorar do material manipulável, os discos de fração;- Compreender as frações e as frações equivalentes.	<ul style="list-style-type: none">- Trabalho a pares;- Grande grupo.
Segunda sessão	27 de maio	1 hora e 30 minutos	<ul style="list-style-type: none">- Compreender a regra de adicionar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes;- Desenvolver o cálculo mental e escrito.	<ul style="list-style-type: none">- Trabalho a pares;- Individual;- Grande grupo.
Terceira sessão	3 de junho	1 hora e 50 minutos	<ul style="list-style-type: none">- Compreender os processos matemáticos envolvidos na resolução de problemas;- Desenvolver o cálculo mental e escrito através da realização de um jogo.	<ul style="list-style-type: none">- Trabalho a pares;- Grande grupo.

3.4.6. Recolha de dados

Os instrumentos de recolha de dados utilizados foram análogos ao do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Capítulo IV – Análise dos resultados

Este capítulo diz respeito à análise dos resultados obtidos nos estudos realizados no 1.º e no 2.º Ciclo do Ensino Básico, dando origem ao Estudo 1 e ao Estudo 2.

Em ambos os estudos, é analisado o momento diagnóstico, as sessões de intervenção desenvolvidas, em que será apresentado o enquadramento, a descrição e a reflexão da sessão, e o momento avaliativo.

4.1. Estudo 1

4.1.1. Momento diagnóstico

Antes da intervenção, realizou-se o momento diagnóstico, em que foi implementada uma ficha de diagnóstico, para que a partir desta fossem desenhadas as sessões de intervenção. A ficha de diagnóstico (anexo 1, p.100) continha cálculo mental e cálculo escrito, sendo este visível não só na explicação de como pensaram quando calculam uma operação mentalmente, mas também na resolução de problemas, nas estimativas e nos enigmas. Com esta ficha pretende-se conhecer as competências e as dificuldades de cálculo mental e de cálculo escrito dos alunos. Esta ficha foi realizada por vinte e um alunos, uma vez que um dos alunos tinha faltado neste dia. Na Tabela 7 estão os resultados obtidos, em percentagem, na ficha de diagnóstico, em cada tarefa.

Tabela 7 - Resultados percentuais obtidos na ficha de diagnóstico.

Questões Tarefas	Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)
Adições	76,2	14,3	9,5
Subtrações	—	100	—
Ambas as operações Preenchimento de espaços	33,3	66,7	—
Operações com números com mais ordens	33,3	23,8	42,9
Estimativas	14,3	19	66,7
Resolução de problemas	52,4	28,6	19
Enigmas	64,3	16,7	19

Considerando a tarefa das adições, verifica-se que grande parte dos alunos acertou (76,2%) e 9,5% dos alunos erram. Tanto os alunos que acertaram como os que erraram, utilizaram a estratégia de cálculo mental de decomposição, mas os alunos que erram efetuaram o cálculo incorretamente (ver figuras 3 e 4).

Figura 3 - Exemplo de resposta certa.

Figura 4 - Exemplo de resposta errada.

Contudo, é de realçar a percentagem de respostas incompletas (14,3%), uma vez que estas ocorrem na mesma operação (ver Figura 5), no qual se verifica que o erro está no cálculo da adição com transporte, uma vez que utilizam corretamente a estratégia de cálculo mental.

Figura 5 – Exemplo de resoluções incompletas.

Na tarefa que apresenta as subtrações, todas as respostas foram consideradas incompletas, visto que nenhum aluno calculou corretamente todas as alíneas presentes. A dificuldade dos alunos foi no cálculo da subtração com empréstimo, em que foi evidenciado que subtraem as dezenas do aditivo ao subtrativo (Figura 6).

Figura 6 – Dificuldade no cálculo da subtração com empréstimo.

Na tarefa que apresenta ambas operações, em que os alunos têm de preencher os espaços em branco, 33,3% dos alunos responderam corretamente, visto que preencheram todos os espaços de forma correta, tal como podemos ver na Figura 7.

a) $177 + \underline{200} = 377$	d) $124 + \underline{34} = 158$
b) $386 - 246 = \underline{140}$	e) $56 - \underline{19} = 37$
c) $58 + \underline{21} = 79$	f) $100 - \underline{25} = 75$

Figura 7 - Exemplo de resposta certa.

Nesta 66,7% são respostas incompletas, pois a dificuldade sentida foi nas duas subtrações com empréstimo apresentadas, no qual erram as duas em simultâneo (Figura 8) ou apenas uma (Figura 9).

e) $56 - \underline{21} = 37$	e) $56 - \underline{20} = 37$
f) $100 - \underline{75} = 75$	f) $100 - \underline{31} = 75$

Figura 8 - Erram as duas alíneas.

e) $56 - \underline{21} = 37$	e) $56 - \underline{22} = 37$
f) $100 - \underline{25} = 75$	f) $100 - \underline{25} = 75$

Figura 9 - Erram apenas a alínea e).

Já na tarefa que apresenta operações com números com mais ordens, uma adição e uma subtração, 33,3% dos alunos acertaram, tendo utilizado o algoritmo como estratégia (Figura 10).

Figura 10 - Exemplo de resposta certa.

As respostas erradas e incompletas (ver figura 11) apresentam uma percentagem de 42,9% e 23,8% respetivamente e verificou-se que os alunos sentem dificuldade no algoritmo da adição com transporte e na subtração com empréstimo apresentadas. Também é de referir que houve alunos que na adição com transporte que utilizaram a estratégia de decompor as parcelas e adicionar, de forma incompleta.

Figura 11 - Resoluções que apresentam as dificuldades dos alunos.

Na tarefa que apresenta estimativas, 14,3% dos alunos respondem corretamente, uma vez que tanto arredondaram como calcularam corretamente as diferentes operações (Figura 12).

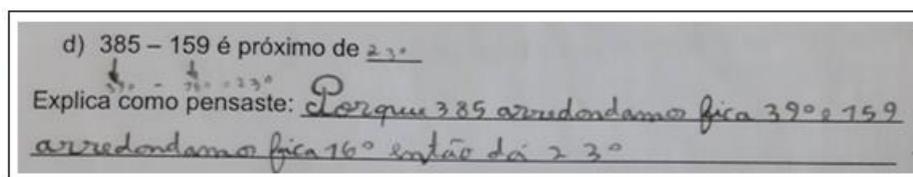


Figura 12 - Exemplo de resolução correta.

E, verificou-se que 66,7% dos alunos erram, porque resolveram apenas as operações através do uso de estratégias de cálculo mental e outros alunos, depois de resolverem a operação, escreveram o valor próximo do resultado obtido na operação (Figura 13).

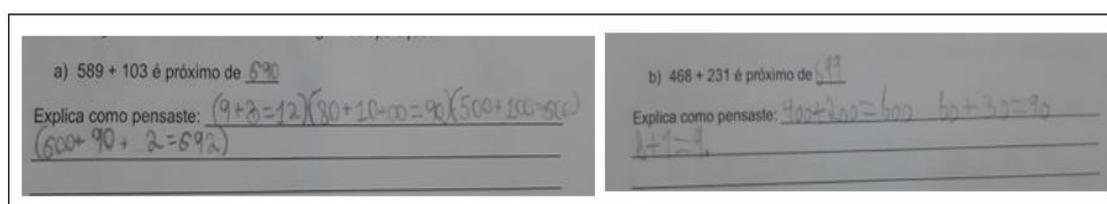


Figura 13 - Exemplo das resoluções erradas.

É, ainda, de referir que 19% dos alunos tiveram resposta incompleta, pois erraram uma alínea, devido a arredondarem o número 385 para 380.

Relativamente às tarefas referentes à resolução de problemas, é de referir que 52,4% dos alunos responderam corretamente, 28,6% dos alunos respondeu de forma incompleta e 19% dos alunos errou. No entanto, existe uma discrepância nos diferentes problemas, em que no problema de um passo que envolve a adição, verificou-se que 85,7% dos alunos acertaram e nenhum aluno errou. E, quanto às respostas incompletas, a percentagem é de 14,3%, uma vez que os alunos apesar de terem interpretado corretamente o problema, efetuaram incorretamente os cálculos (Figura 14).

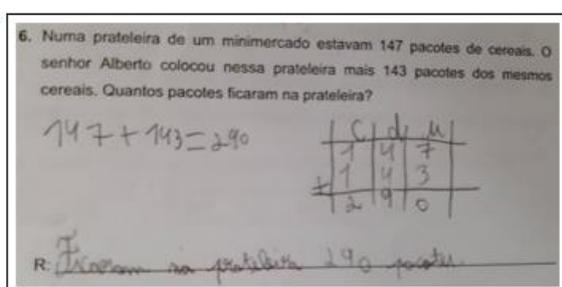


Figura 15 - Exemplo de resposta certa.

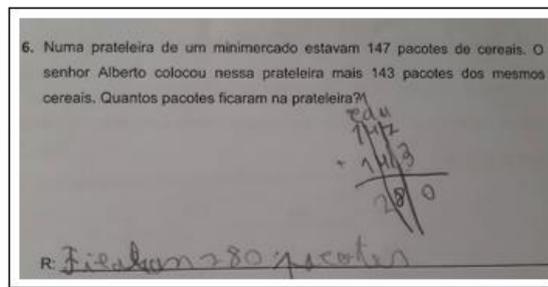


Figura 14 - Exemplo de resposta incompleta.

No problema de um passo que envolve a subtração, verifica-se que 47,7% dos alunos responderam corretamente, 33,3% responderam de forma incompleta, visto que apresentaram o seu raciocínio corretamente, mas não resolvem corretamente o algoritmo (Figura 17). E, 19% dos alunos errou, uma vez que não o interpretaram corretamente, pois realizaram uma adição. (Figura 18).

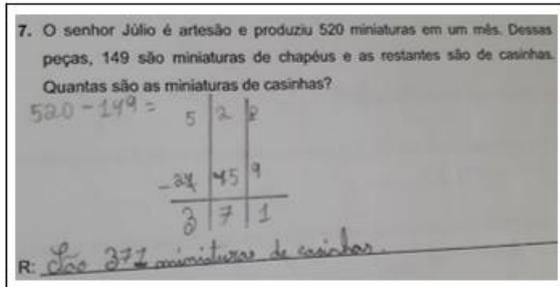


Figura 16 - Exemplo de resposta certa.

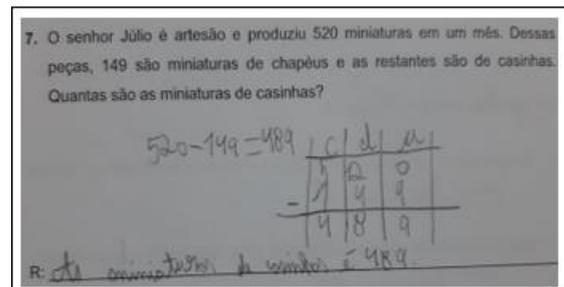


Figura 17 – Exemplo de resposta incompleta.

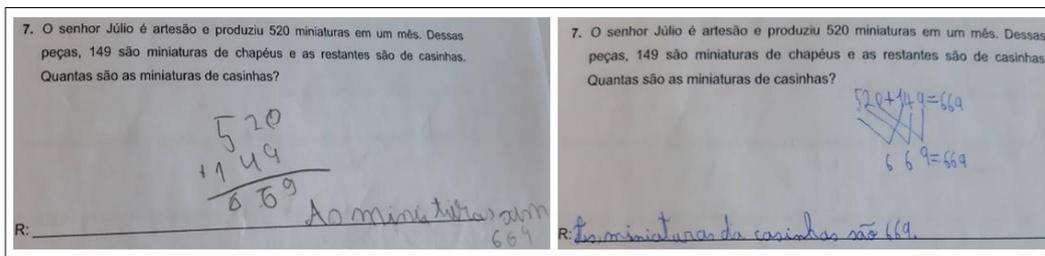


Figura 18 - Exemplo de resoluções erradas.

E, no problema que envolve a adição e a subtração, 33,3% das respostas são certas, 28,6% são incompletas e 38,1% são erradas. Nas respostas erradas, os alunos trocaram a ordem do aditivo e do subtrativo no algoritmo (Figura 19) e alguns interpretaram corretamente o problema, mas não efetuam corretamente o algoritmo (Figura 20).

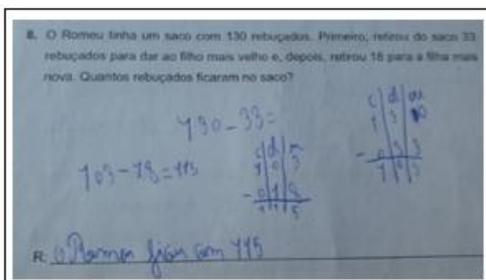


Figura 20 - Exemplo de resolução em que o algoritmo não é efetuado corretamente.

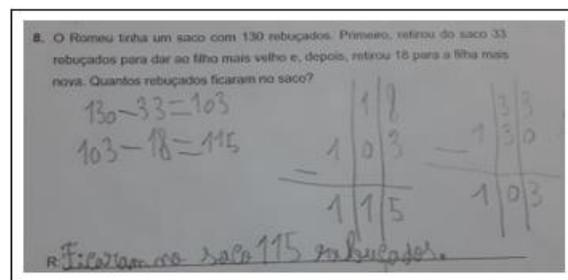


Figura 19 – Exemplo de resolução em que trocam a posição do aditivo e do subtrativo.

Por fim, nas tarefas dos enigmas, 64,3% dos alunos responderam corretamente, 16,7% responderam de forma incompleta e 19% errou, sendo de referir que estas ocorreram, devido aos alunos, de uma forma geral, não terem acertado um dos enigmas que envolvia a subtração.

Com a análise destes resultados, conclui-se que alguns alunos erram as adições com transporte, porém, em alguns casos, a estratégia de cálculo estava bem aplicada e erravam o cálculo. Também foi verificado que os alunos sentem dificuldades nas subtrações com empréstimo, tendo sido verificada no cálculo mental e cálculo escrito. Esta dificuldade paralela já seria de esperar, uma vez que o cálculo mental é uma base para o cálculo escrito e também se reflete na resolução de problemas. Para além disso, verificou-se que os alunos sentem dificuldades nas estimativas, no qual pode advir pelo facto de ser algo que não foi muito trabalhado.

4.1.2. Intervenção

4.1.2.1. Primeira sessão

Enquadramento

Após a análise da avaliação diagnóstica, foram verificadas dificuldades no âmbito da adição com transporte e da subtração com empréstimo. Portanto, esta sessão teve como objetivo compreender as estratégias de cálculo mental da adição e da subtração. Para isso, foram explicadas estratégias de cálculo em relação à adição com transporte e à subtração com empréstimo e ao longo da sessão os alunos irão ao quadro explicar como pensaram tanto por escrito como oralmente, e foi dada a oportunidade aos alunos para exercitarem o uso das mesmas.

Descrição da sessão

Para iniciar a sessão, comecei por apresentar uma adição com transporte e perguntar aos alunos como resolveríamos a operação e um aluno foi quadro para explicar, em que se verificou que calculou a operação utilizando uma estratégia de cálculo mental (Figura 21).

$$547 + 329 = 876$$

800 60 7
 $800 + 60 + 7 = 867$
 $867 + 9 = 876$

Figura 21 - Estratégia de cálculo mental.

Como esta foi estratégia de cálculo mental utilizada pelos alunos, passei à explicação de uma outra estratégia de cálculo, sendo ela a de compensar para obter dezenas e apresentei a estratégia de decomposição das parcelas, utilizada pelos alunos, de outra forma (Figura 22).

Figura 22 - Explicação das estratégias.

Posteriormente, fui apresentando adições com transporte, dando tempo para os alunos calcularem, e foram encaminhados a calcular as mesmas usando as estratégias de cálculo mental. Com isto, verifiquei que a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a da decomposição das parcelas, seja esta apresentada em forma de árvore ou como expliquei. Desta forma, pode-se concluir que os alunos se sentem mais à vontade a usar esta estratégia de cálculo mental, demonstrando estar mais familiarizados.

De forma, a verificar se os alunos estavam a conseguir utilizar as estratégias de cálculo, pedi que pousassem os lápis, para que calculassem mentalmente a operação $545 + 317$, no qual dei algum tempo e verificou-se que já estavam a compreender, na medida em que responderam corretamente.

De seguida, apresentei uma subtração, em que comecei por perguntar como é que eles resolveriam a operação $81 - 37$ e solicitei um aluno para ir ao quadro. O aluno cometeu o mesmo erro que foi verificado na ficha de diagnóstico, no qual os alunos acabam por subtrair o algarismo das unidades do subtrativo ao algarismo das unidades do aditivo, sendo este inferior. Portanto, questionei o aluno acerca disso, de forma a este perceber o porquê de não estar a calcular corretamente (Transcrição 1).

I: Fazemos $80 - 30 = 50$ e depois $1 - 7 = 6$

Estagiária: E podemos subtrair sete ao um? Tens uma caneta consegues dar sete e ficar com seis?

I: Não professora!

Estagiária: Então vocês acham que esta resolução está correta?

Alunos: Não.

Estagiária: E porque é que não está correta?

D: Porque podemos fazer $80 - 30$, mas não se pode fazer $1 - 7$, tens um vais tirar sete e ainda ficas com seis, não dá.

Estagiária: Pois, muito bem! Não dá mesmo. Mas, e alguém me sabe dizer como podemos resolver?

Transcrição 1- Discussão sobre a subtração com empréstimo

Com esta questão, os alunos ficaram a pensar, demonstrando apenas que sabiam que não se podia fazer da forma que a colega apresentou, até que um aluno apresentou o seu pensamento, que apesar de estar incompleto, se encontrava num bom caminho (Transcrição 2).

E: Podemos fazer 81 menos 30, porque não podemos fazer 1 menos 7.

Estagiária: E depois?

E: Então fazemos o 81 menos 30 que dá 51 e depois adicionamos 7.

Estagiária: O teu pensamento está meio correto, mas será que adicionamos o 7 ao 51?

Transcrição 2 - Discussão sobre o cálculo da subtração com empréstimo.

Posto isto, expliquei estratégia de subtrair por partes, e expliquei mais duas estratégias diferentes, sendo elas a de compensar para obter dezenas no subtrativo e a de compensar para igualar as unidades no aditivo e no subtrativo.

Figura 23 - Estratégias explicadas aos alunos.

Seguidamente, apresentei outras operações, para que os alunos exercitassem o cálculo destas subtrações. Nesta fase, um aluno terminou e veio mostrar o cálculo da operação $74 - 28$, em que cometeu o mesmo erro apresentado anteriormente (Figura 24). E, partilhei com a turma, escrevendo a resolução do aluno no quadro, para perguntar, mais uma vez, se isto é possível.

Figura 24- Resolução da operação feita pelo aluno.

Após a minha pergunta, um aluno respondeu que não e explicou oralmente como calculou a operação, em que utilizou a estratégia de compensar para obter dezenas no subtrativo. Enquanto o aluno explicava, escrevi a sua explicação no quadro para que os alunos a visualizassem e compreendessem a mesma.

Deste modo, reparei que havia alunos que estavam com dificuldades nas subtrações com empréstimo, optei por não avançar com as subtrações com empréstimo com três algarismos, para que os alunos exercitassem e compreendessem as estratégias de cálculo mental.

Reflexão da sessão

Nesta sessão, os alunos mostraram-se participativos e empenhados, tendo sido bastante significativa, na medida em que foi notória a evolução dos alunos na utilização das estratégias de cálculo mental. Contudo, os alunos compreenderam melhor as adições com empréstimo, sendo essa compreensão visível tanto através do uso do cálculo mental como do escrito. Já no que toca às subtrações com empréstimo, alguns dos alunos estavam com algumas dificuldades e, atendendo a isto, optei por manter o uso das operações com dois algarismos, de forma a exercitarem. É importante referir que as estratégias adotadas foram significativas para a evolução dos alunos, uma vez que dava oportunidade para explicarem como calcularam mentalmente e fazia com que os alunos compreendessem o porquê de não estarem a calcular corretamente.

4.1.2.2. Segunda sessão

Enquadramento

A segunda sessão deu continuidade à anterior, pois os alunos necessitavam de exercitar as subtrações com empréstimo com dois algarismos. Desta forma, decidi que esta intervenção iria começar por apresentar subtrações com empréstimo com três algarismos, para que os alunos exercitassem e compreendessem. De seguida, uma das tarefas propostas consistiu na realização de um desafio com operações e, no final, foi realizado um *quiz* de cálculo mental.

Assim, os objetivos desta sessão são os mesmos da sessão anterior, acrescentando, o de desenvolver o cálculo mental através de um recurso dinâmico e interativo.

Descrição da sessão

Para dar início à sessão, comecei por apresentar uma subtração com empréstimo, com três algarismos, e pedi aos alunos que calculassem a mesma enquanto ia circulando pela sala para verificar se a estavam a calcular corretamente. Depois de efetuarem o cálculo no caderno, pedi que me dissessem quais foram as estratégias de cálculo mental que abordamos na aula passada, de forma a verificar as aprendizagens realizadas. Vários alunos pediram para falar e eu fui escolhendo, tendo em conta as participações da aula anterior, para que conseguisse ter um *feedback* por parte de todos os alunos. Então, um aluno começou a explicar oralmente a estratégia de cálculo mental, que diz respeito à subtração por partes, e eu ia escrevendo no quadro (Figura 25).

$341 - 123 =$
 $341 - 123 =$
 $100 + 20 + 3$
 $341 - 100 = 241$
 $241 - 20 = 221$
 $221 - 3 = 218$

 $341 - 123 =$
 $341 + 2 = 343$
 $343 - 123 - 2 = 220 - 2 = 218$

 $341 - 123$
 $341 + 7 = 348$
 $123 + 7 = 130$
 $348 - 130 = 218$

Figura 25 - Cálculo da subtração com empréstimo com três algoritmos.

De seguida, escrevi outra operação no quadro para os alunos calcularem e fui circulando pela sala, de forma a ver como os alunos estavam a calcular e reparei que havia um aluno que parecia estar a sentir algumas dificuldades, então chamei-o ao quadro, tal como podemos ver na Figura 26.

$834 - 526 =$
 $500 + 20 + 6$
 $934 - 500 = 334$

Figura 27 - Aluno que parecia estar a ter dificuldades.

$834 - 526 = 308$
 $500 + 20 + 6$
 $934 - 500 = 334$
 $337 - 20 = 317$
 $314 - 6 = 308$

Figura 26 - Cálculo da operação feito pelo aluno.

Este aluno ao ir ao quadro, demonstrou estar a utilizar corretamente a estratégia de cálculo mental, portanto poderia ser apenas distração, enquanto calculava a mesma no lugar.

Seguidamente, apresentei mais operação e, após dar tempo para os alunos a calcularem, chamei um outro aluno ao quadro, de forma a verificar se estava a utilizar corretamente a estratégia de cálculo mental.

$371 - 125 = 246$
 $371 - 100 = 271$
 $271 - 20 = 251$
 $251 - 5 = 246$

Figura 28 - Aluno que foi calcular a operação.

Visto que os alunos demonstraram estar a compreender, decidi distribuir um desafio que consistia no cálculo mental de quatro operações e na explicação do mesmo, no qual tinha uma adição

com transporte e subtrações com empréstimo com dois algarismos e com três algarismos. Ao circular pela turma, verifiquei que os alunos estavam a conseguir realizar o cálculo de forma correta, que estavam a compreender e que tinham sido realizadas aprendizagens ao nível das estratégias de cálculo mental.

É de referir que os alunos à medida que iam acabando, pediam para ir corrigir e depois de verem que tinham acertado diziam expressões como “Fixe”, “Tenho tudo certo!”, “Consegui fazer à primeira!”, o que demonstra estarem a gostar das estratégias de cálculo mental e estarem motivados.

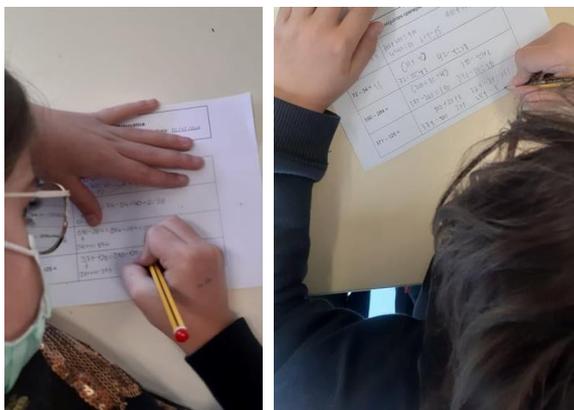


Figura 29 –Alunos a resolverem o desafio.

No final desta intervenção foi feito um *quiz* de cálculo mental, em formato PowerPoint em que os alunos responderam corretamente ao *quiz*. Este tinha como objetivo não só desenvolver o cálculo mental dos alunos, mas também motivá-los, uma vez que com estas dinâmicas os alunos acabam por gostar e demonstram-se mais atentos ao que se está a fazer.

Reflexão da sessão

Relativamente à sessão desenvolvida, considero que foi bem conseguida, na medida em que os alunos já calculam as operações corretamente, utilizando as estratégias de cálculo mental abordadas. No que toca ao *quiz* de cálculo mental, os alunos encararam o mesmo com agrado, em que foi notório o envolvimento dos alunos, bem como o empenho e a participação, sendo, desta forma, benéfico, no que diz respeito à motivação e, ao mesmo tempo, para o desenvolvimento do cálculo mental. É de referir que nesta fase um dos alunos, após o quiz terminar, disse “Professora, já acabou?!”, demonstrando estar motivado e querer que o quiz fosse maior.

Ainda é de referir que houve evolução dos alunos na compreensão das estratégias de cálculo mental da adição com transporte e da subtração com empréstimo. Desta forma, na seguinte sessão será relevante atender a outra dificuldade sentida pelos alunos na ficha de diagnóstico.

4.1.2.3. Terceira sessão

Enquadramento

Nesta sessão será dada atenção à resolução de problemas. Assim, os objetivos desta é proporcionar aos alunos situações problemáticas que envolvam subtração com empréstimo, usar as estratégias de cálculo mental já abordadas e desenvolver o cálculo mental através de um recurso dinâmico e interativo.

Descrição da sessão

No início da sessão, comecei a organizar os alunos a pares, que foram definidos por mim, considerando as competências e capacidades de cada aluno. Esta organização teve como objetivo fomentar o trabalho colaborativo, a partilha de ideias, o respeito pelo ritmo dos colegas e apoiarem-se mutuamente.

Seguidamente, entreguei aos alunos a ficha com os problemas (Anexo 2, p. 101), sendo eles problemas de dois passos, e disse-lhes para fazerem a leitura silenciosa do primeiro problema denominado de “Problema – Pastelaria”, posteriormente, passei para a leitura do mesmo em voz alta e pedi que resolvessem o mesmo.

Entretanto, chamei um grupo para vir resolver e explicar a resolução ao quadro, em que esta escolha teve em consideração as estratégias usadas pelos alunos, assim como a participação destes nas intervenções. Um dos grupos que veio ao quadro usou o algoritmo para resolver o mesmo, outro usou a mesma estratégia, mas o raciocínio foi diferente e outro usou a estratégia de subtrair por partes (Figura 30).

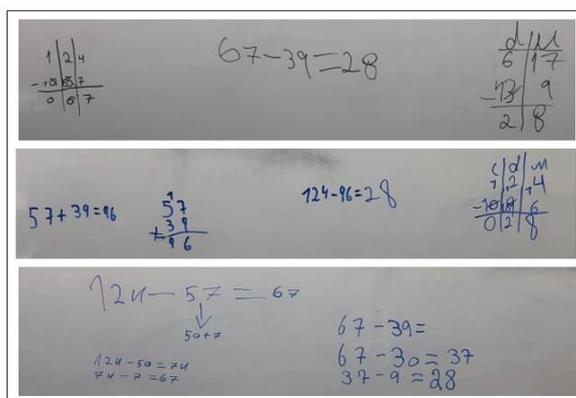


Figura 30 - Resolução do primeiro problema.

De seguida, foi feito o mesmo processo mencionado anteriormente para o problema denominado de “Problema – Parque de estacionamento”, no qual tive em consideração os grupos que tinham utilizado estratégias diferentes e que ainda não tinham ido ao quadro. Neste problema um grupo também

resolveu através do algoritmo e o outro grupo resolveu através de uma das estratégias de cálculo mental (Figura 31).

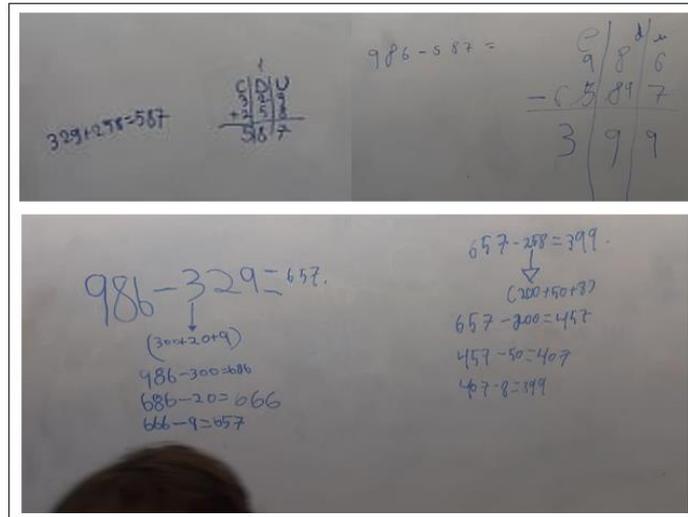


Figura 31 - Resolução do segundo problema.

De acordo com o que foi feito na introdução dos outros problemas, o mesmo aconteceu no terceiro problema denominado de “Problema – Campeonato de atletismo”, em que verifiquei que os alunos voltaram a utilizar as mesmas estratégias de resolução, sendo elas a do algoritmo e uma das estratégias de cálculo mental, sendo que nesta última apenas utilizaram a estratégia para o cálculo da adição. Entretanto, veio um grupo ao quadro resolver através do algoritmo (Figura 32) e perguntei se alguém tinha resolvido de uma outra forma, no qual todos disseram que fizeram este através do algoritmo.

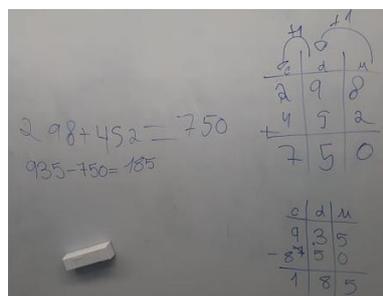


Figura 32 - Resolução do problema.

Posteriormente à resolução e discussão dos problemas, foi feito um *quiz* de cálculo mental maior do que o da intervenção anterior. Este tem como objetivo desenvolver o cálculo mental dos alunos, de um forma motivante, no qual os alunos demonstraram, mais uma vez, que gostaram do *quiz*, visto que acaba por ser um recurso mais dinâmico e interativo.

Reflexão da sessão

Relativamente à resolução dos problemas, é de referir que foram realizados com sucesso, na medida em que ao circular pelos diferentes grupos verifiquei que estavam a ter um raciocínio que os levava à resolução correta do problema. Também verifiquei que os alunos mobilizaram diferentes estratégias de resolução, sendo elas o algoritmo, uma das estratégias de cálculo mental, que diz respeito à subtração por partes, e a utilização de diferentes pensamentos matemáticos que conduziam à resolução igualmente correta dos problemas. Consequentemente, permitiu-me verificar que os alunos compreenderam as estratégias e as sabem aplicar em situações problemáticas, como também me permitiu verificar o cálculo escrito dos mesmos. Nesta fase, é de destacar o facto de quando os alunos vão ao quadro explicar o que estão a escrever, sendo esta uma forma destes aprimorarem a comunicação matemática.

Em relação ao *quiz*, este foi, mais uma vez, encarado com agrado por parte dos alunos, sendo este um aspeto importante, pois assim os alunos sentem-se mais envolvidos e motivados, sendo benéfico para o seu processo de ensino e aprendizagem dos mesmos.

Desta forma, na quarta sessão será pertinente para os alunos resolverem um problema de três passos, para se verificar a aprendizagem dos alunos, em relação às situações problemáticas que envolvem subtrações com empréstimo.

4.1.2.4. Quarta sessão

Enquadramento

A quarta sessão deu continuidade à anterior, no qual optei por começar com a resolução de um problema que envolve empréstimo e com três passos.

Esta tem como objetivo proporcionar aos alunos situações problemáticas que envolvam subtração com empréstimo, proporcionar o uso das estratégias de cálculo mental e, ainda, desenvolver o cálculo mental e escrito através do jogo da roleta.

Descrição da sessão

Nesta intervenção, os alunos continuaram organizados com os mesmos pares da última sessão e, posteriormente à sua organização, distribui o problema e pedi que fizessem a sua leitura silenciosa, para que de seguida eu fizesse a leitura em voz alta do mesmo e os alunos o resolvessem. Enquanto os alunos iam resolvendo, eu ia circulando para ver de que forma os alunos estavam a resolver e se estavam a resolver corretamente.

Após os alunos resolverem o problema, chamei ao quadro um grupo para vir o resolver (Figura 33), no qual utilizou uma estratégia de cálculo mental para o resolver.

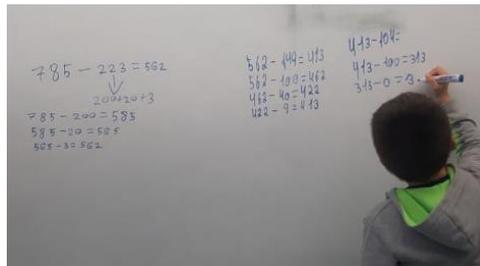


Figura 33 – Resolução do problema através da estratégia de cálculo.

Seguidamente, chamei um outro grupo para resolver o mesmo (Figura 34), no qual a estratégia de resolução adotada por este grupo foi o algoritmo.

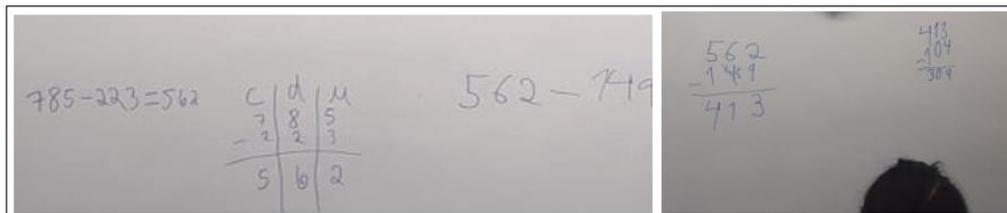


Figura 34 - Grupo que resolveu o problema através do algoritmo.

Acerca destas resoluções, é de referir que, apesar de apresentarem estratégias diferentes, apresentam o mesmo pensamento matemático.

Depois houve um grupo que disse que tinha resolvido de uma forma diferente e acabaram por vir ao quadro explicar essa mesma resolução (Figura 35). Este grupo utilizou a mesma estratégia que o grupo anterior, mas um pensamento diferente.

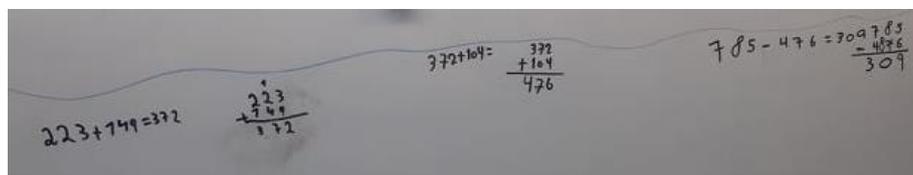


Figura 35 – Resolução de outro grupo.

Perante a resolução do problema, os alunos demonstraram ter compreendido e, posto isto, passei para a outra parte desta intervenção, que diz respeito ao jogo da roleta (Figura 36). Este tem como objetivo desenvolver o cálculo mental nos alunos, no qual a roleta era consituída por doze operações, sendo elas adições com e sem transporte e subtrações com e sem empréstimo.

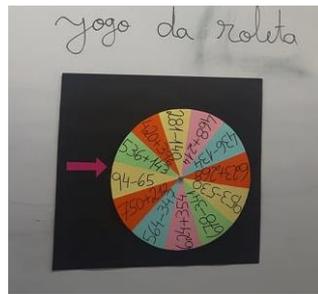


Figura 36 - Jogo da roleta.

Para explicar o jogo, comecei por dizer aos alunos que a roleta tinha continha adições e subtrações e que iria distribuir dois cartões a cada aluno com números que poderiam ser ou não resultados das operações presentes na roletas, isto para que todos os alunos calculassem mentalmente. Também disse que iria rolar a rotela e o aluno que tivesse o resultado da operação iria ao quadro explicar como calculou mentalmente. É de referir que haviam cartões com o mesmo resultado de algumas das operações, mas isso não foi dito aos alunos, com o objetivo de quando ocorresse os alunos se levantassem para ir explicar como calcularam mentalmente, de forma a ver a explicação de cada um dos alunos para o cálculo da mesma operação.

Após a explicação, dei início ao jogo, rolei a primeira vez e fui circulando pela sala, de modo a ver qual o aluno que tinha esse resultado. Nesta fase foi visível que os alunos estavam atentos e a calcular mentalmente para ver se eram eles que tinham o resultado da operação para irem ao quadro. Entretanto, quando o aluno verificava que era ele que tinha o resultado ia ao quadro explicar como calculou mentalmente através do cálculo escrito (Figura 37), tendo ocorrido situações em que explicaram oralmente.

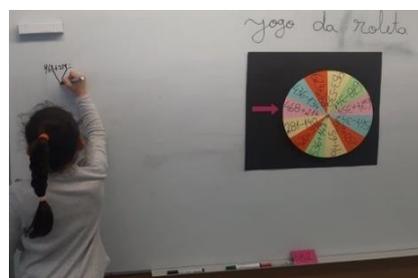


Figura 37 – Explicação do aluno.

Ao longo do jogo verificou-se o uso das diferentes estratégias de cálculo mental abordadas anteriormente, apesar de umas serem utilizadas por mais alunos do que outras.

Ainda se verificou casos em que os alunos tinham o mesmo resultado e o cálculo tinha sido feito com recurso a estratégias diferentes, em que um dos alunos usou o algoritmo e outro a estratégia de igualar as unidades do aditivo e do subtrativo.



Figura 39 – Alunos que tinham o resultado desta operação.

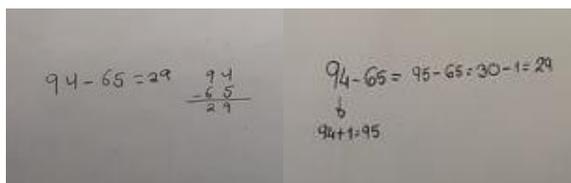


Figura 38 –Cálculo dos alunos.

É de referir o facto de nenhum dos alunos ter o cartão com o resultado de uma das operações e quando essa operação calhou os alunos, passado algum tempo, foram percebendo que ninguém tinha o resultado. Até que um aluno se virou para mim e disse “Oh professora, ninguém tem esse resultado!” e depois todos começaram a concordar. Então chamei o aluno que falou ao quadro para me dizer como pensou para chegar ao resultado obtido.

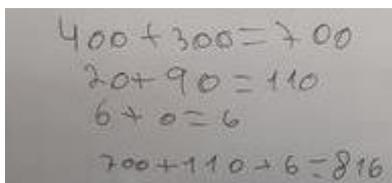


Figura 40 - Aluno que explicou e calculou a operação.

Após a sua explicação no quadro (Figura 40), os alunos demonstraram-se confiantes por terem descoberto esse “erro”, no qual não tinha sido um erro, mas sim uma coisa intencionada, para me permitir ter um feedback acerca do cálculo das operações presentes na roleta e do desenvolvimento do cálculo mental.

Reflexão da sessão

Com esta sessão, verificou-se que os alunos utilizam com maior frequência algumas estratégias de cálculo mental do que outras. No caso da adição utilizam a estratégia de decompor as parcelas e adicionar. Já no caso da subtração, utilizam a estratégia de subtrair por partes e ainda se verificou o uso da estratégia de igualar as unidades do subtrativo e do aditivo. Contudo, é de realçar um significativo desenvolvimento do cálculo mental, bem como do escrito, uma vez que nesta dinâmica de jogo os alunos demonstraram este desenvolvimento.

Acrescento ainda que foi uma situação de ensino e aprendizagem alcançada, na medida em que os alunos foram capazes de resolver o problema, no qual foram respeitados os ritmos dos diferentes pares. Também, é de mencionar que, em relação ao jogo da roleta, os alunos o encararam com um grande contentamento, pois demonstraram conseguir aplicar mentalmente as estratégias aprendidas, mesmo no que toca às adições com transporte e, principalmente, às subtrações com empréstimo, sendo

que eram nestas que os alunos tinham mais dificuldade. Considerando os momentos ocorridos nesta intervenção, destaco, ainda, a participação, o empenho e o envolvimento dos alunos, tendo de expor que o jogo, sendo um recurso lúdico, é uma mais-valia no que diz respeito não só à motivação, mas também no processo de ensino e aprendizagem.

Numa quinta sessão, tendo em conta as dificuldades sentidas na ficha de diagnóstico, seria pertinente abordar as estimativas, sendo uma intervenção, numa primeira parte, explicativa e para exercitar e, numa segunda parte, colocar os alunos numa situação mais dinâmica e lúdica, de forma a verificar se os alunos compreenderam as mesmas.

4.1.2.5. Quinta sessão

Enquadramento

Considerando que até então as aprendizagens ocorridas foram alcançadas, de forma significativa, a quinta intervenção foi destinada às estimativas.

Portanto, o objetivo desta intervenção é produzir estimativas através do cálculo mental, explicando aos alunos como estas se realizam.

Descrição da sessão

Comecei por uma abordagem mais dialogada, para que os alunos percebessem para que servem as estimativas. Portanto, disse aos alunos que em situações em que são usados números maiores para adicionar ou subtrair e em que temos de os calcular mentalmente usamos as estimativas, recorremos, deste modo, aos arredondamentos.

Depois passei para a explicação dos arredondamentos (Figura 41) e, para isso, escrevi os algarismos de um a nove no quadro, para dizer quando é que os arredondamentos eram feitos para cima e quando eram feitos para baixo, considerando a dezena mais próxima. Nesta fase, ia estabelecendo interações com os alunos, para ver se alguém sabia como os arredondamentos eram feitos.

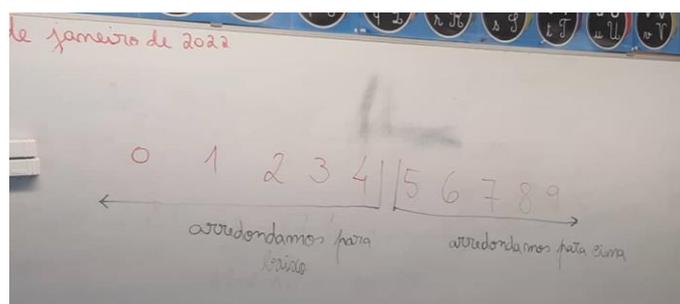


Figura 41- Explicação acerca dos arredamentos.

De forma a verificar se os alunos estavam a compreender, escrevi números no quadro (Figura 42) e pedi para os alunos arredondarem, dando a oportunidade de todos responderem, para ter uma melhor perceção em relação à compreensão dos alunos acerca dos arredondamentos.

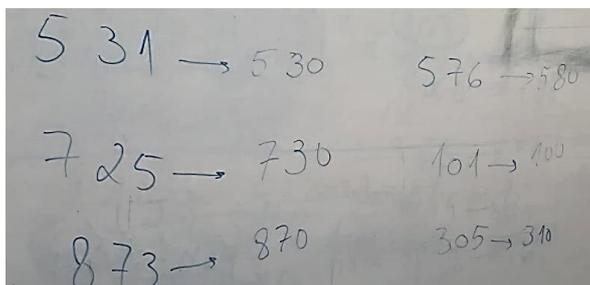


Figura 42 - Exemplificação de alguns dos arredondamentos realizados pelos alunos.

Após isto, passei para a explicação de como se estima o resultado das operações, no qual comecei por apresentar uma operação e a questionar os alunos acerca de como estimávamos o resultado da mesma (Transcrição 3).

Estagiária: Então $525 + 131$ é próximo de...? Alguém sabe como fazer?

D: Vamos ter de usar os arredondamentos!

Estagiária: Alguém me sabe dizer como?

G: Temos de arredondar os dois números da operação.

Estagiária: Sim, muito bem! E mais?

D: E depois adicionar.

Estagiária: Muito bem! E assim sabemos qual é o resultado próximo desta operação.

Transcrição 3 - Interação com os alunos sobre as estimativas.

Com esta interação, os alunos demonstraram compreender que eram necessários os arredondamentos para se saber o valor próximo da operação apresentada. Depois, fui escrevendo algumas operações para os alunos me dizerem como fazíamos para estimarmos o valor das mesmas, tendo verificado que os alunos compreenderam as mesmas. Seguidamente, foi realizada uma atividade dinâmica, em que havia cartões com adições e subtrações e os alunos tinham de estimar o resultado. Os alunos eram chamados aleatoriamente e escolhiam um cartão, em que não era visível a operação que continha, e depois ao saberem qual a operação estimavam o resultado e explicavam como calcularam, tanto oralmente como por escrito (ver Figuras 43 e 44).

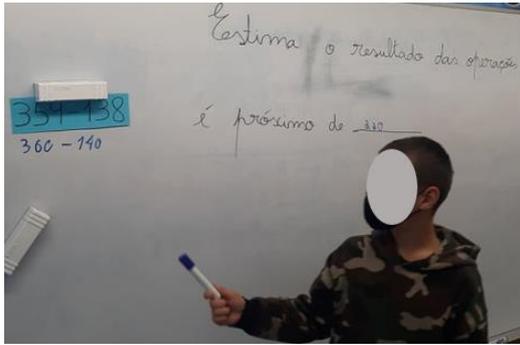


Figura 43 – Aluno a explicar oralmente como estimou o resultado da operação.

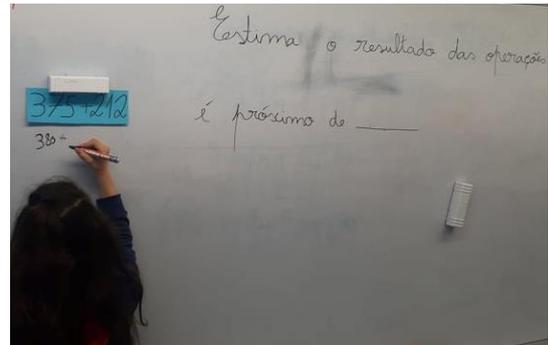


Figura 44 – Aluno a explicar por escrito como estimou o resultado da operação.

Ainda nesta aula, foi realizado um *quiz* de cálculo mental, uma vez que os resultados das suas realizações anteriores estavam a ser positivos, no que toca ao desenvolvimento do cálculo mental e, também, demonstrou ser um recurso que os alunos gostavam muito e em que se demonstravam bastante entusiasmados e recetivos à sua realização.

Reflexão da sessão

Atendendo a esta sessão, considero que as atividades decorreram de forma positiva, contribuindo, assim, para a aquisição de aprendizagens significativas. É de realçar que na realização da atividade com os cartões, de modo geral, os alunos compreenderam como são feitas as estimativas.

Também destaco o *quiz* de cálculo mental realizado, no qual se verifica uma evolução significativa na sua realização e todos os alunos se demonstram, cada vez mais, motivados e participativo, sendo esta uma prática já recorrente em algumas sessões, pois considero que é importante este tipo de atividades que estimulem o cálculo mental, tendo verificado um desenvolvimento significativo de intervenção para intervenção.

4.1.3. Momento avaliativo

Após as sessões desenvolvidas, foi implementada a ficha de avaliação, que é igual à de diagnóstico, com o objetivo de comparar os resultados obtidos nas fichas e perceber a evolução dos alunos. A ficha de avaliação foi realizada por 20 alunos, visto que um aluno foi transferido para outra escola e outro estava a faltar. Na Tabela 8 estão os resultados obtidos, em percentagem, na ficha, em cada tarefa, antes e depois da intervenção realizada.

Tabela 8 - Resultados percentuais obtidos na ficha realizada antes e depois da intervenção.

Respostas Tarefas	Antes			Depois		
	Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)	Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)
Adições	76,2	14,3	9,5	90	10	—
Subtrações	—	100	—	70	30	—
Ambas as operações Preenchimento de espaços	33,3	66,7	—	75	25	—
Operações com números com mais ordens	33,3	23,8	42,9	65	35	—
Estimativas	14,3	19	66,7	80	15	5
Resolução de problemas	52,4	28,6	19	95	5	—
Enigmas	64,3	16,7	19	75	10	—

Analisando os resultados obtidos nas tarefas de adição, verifica-se que houve evolução, visto que a maioria dos alunos grande parte dos alunos (90%). Podemos verificar na Figura 45, que as estratégias de cálculo mental mais utilizadas foram a de decomposição das parcelas e adicionar as centenas com centenas, as dezenas com dezenas e as unidades com as unidades e a decompor uma das parcelas.

a) $470 + 512 = 982$ $400 + 500 = 900$ $70 + 10 = 80$ $0 + 2 = 2$	b) $42 + 58 = 100$ $40 + 50 = 90$ $8 + 2 = 10$	c) $79 + 68 = 147$ $70 + 60 = 130$ $9 + 8 = 17$
a) $470 + 512 = 982$ $470 + 500 = 970$ $970 + 10 = 980$ $980 + 2 = 982$	b) $42 + 58 = 100$ $42 + 50 = 92$ $92 + 8 = 100$	c) $79 + 68 = 147$ $79 + 60 = 139$ $139 + 8 = 147$

Figura 45 - Exemplo de respostas certas.

No que toca às respostas incompletas, estas ocorrerem porque houve alunos que não explicaram como pensaram, apesar de o resultado da operação estar correto, tal como se pode observar na Figura 46.

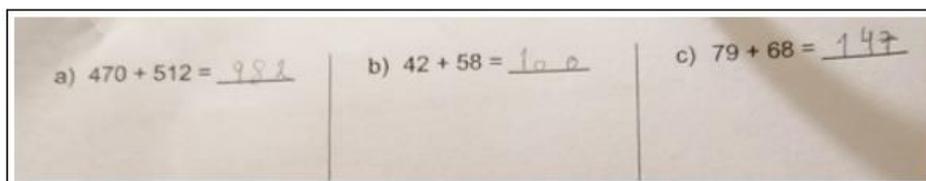


Figura 46 - Exemplo de resposta incompleta.

Na tarefa de subtrações, também ocorreu uma evolução em que as respostas incompletas passaram de 100% para 30%, em que foi possível verificar que os alunos calculam corretamente a subtração com empréstimo, utilizando a estratégia de subtrair por partes (Figura 48). Mas, ainda há alunos que erram a alínea d), em que é possível verificar que ainda cometem o mesmo erro de subtrair as dezenas do subtrativo ao aditivo (ver Figura 47).

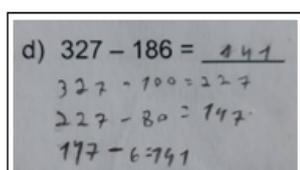


Figura 47 - Estratégia de cálculo mental.

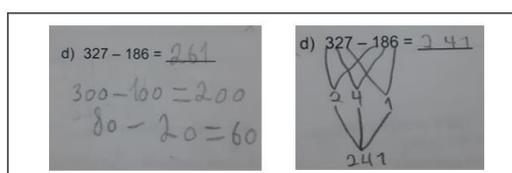


Figura 48 - Alínea que alguns alunos erraram.

Quanto à tarefa que apresenta ambas as operações, em que os alunos têm de preencher os espaços em branco, 75% dos alunos responderam corretamente e 25% responderam de forma incompleta. Nesta foi visível o facto de os alunos ultrapassarem as dificuldades nas alíneas que envolviam a subtração com empréstimo, apesar de, em alguns casos, ainda erram a alínea e).

Na tarefa que envolve as duas operações com números com mais ordens, a percentagem de respostas certas aumentou comparativamente à ficha de diagnóstico, em que se verificou que os alunos aplicam tanto a estratégia de cálculo mental de decomposição das parcelas e adicionar corretamente, de subtrair por partes e o algoritmo (ver Figura 50). Porém, ainda há alunos que cometem o mesmo erro verificado no diagnóstico.

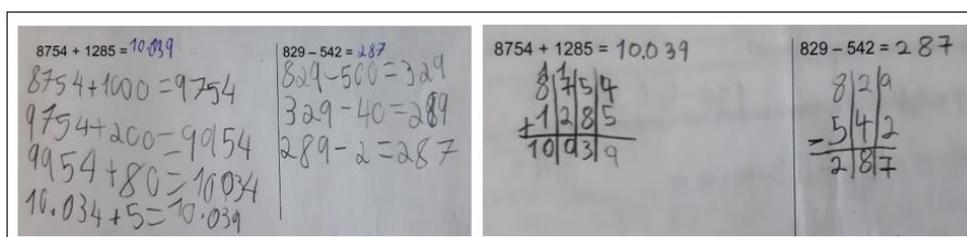


Figura 49 - Exemplo de resposta certa.

Na tarefa das estimativas, foi notória a grande evolução, no qual a percentagem de respostas certas foi de 80%, visto que a maioria dos alunos explicou corretamente e conseguiram estimar o resultado das operações (Figura 50). No entanto ainda há alunos que não compreenderam, uma vez que calculam a operação (Figura 51).

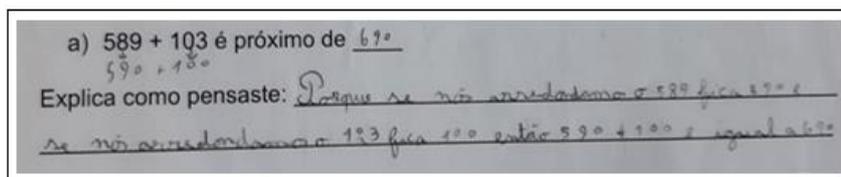


Figura 50 - Exemplo de respostas certas.

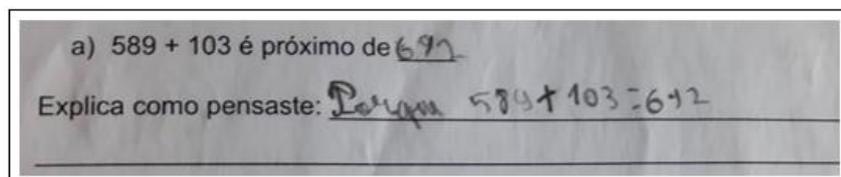


Figura 51 - Exemplo de resposta errada.

Relativamente aos problemas, houve uma evolução significativa, nomeadamente no problema que envolve a subtração com empréstimo, que foi uma dificuldade sentida pelos alunos.

No que toca ao problema que envolve a adição, todos os alunos o resolveram corretamente. É de destacar que houve alunos que recorreram ao algoritmo, como aconteceu na ficha de diagnóstico, mas também houve alunos que recorreram à estratégia de cálculo mental de decomposição (ver Figura 52).

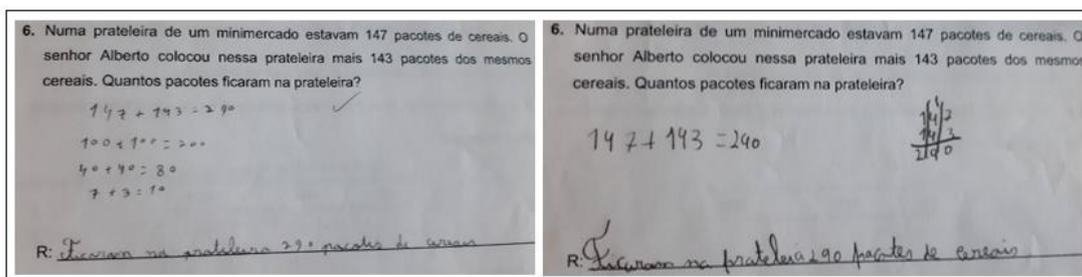


Figura 52 - Exemplo de resoluções referidas.

No problema que envolve a subtração, a maioria dos alunos acertou (95%), tendo-se verificado que recorreram ao uso do algoritmo para o resolverem (Figura 53), e 5% erraram, sendo de mencionar que o erro foi na interpretação do problema, pois adicionou em vez de subtrair (Figura 54).

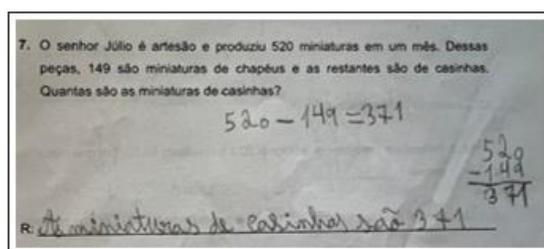


Figura 53 - Exemplo de resolução certa.

520 + 149 = 669
Lão 669 miniaturas de casinhas.

Figura 54 - Resolução incorreta.

E, no problema que envolve ambas as operações, verifica-se que 80% dos alunos acertaram, em que se verificou que recorreram ao algoritmo (Figura 55). Neste problema 15% dos alunos responderam de forma incompleta, uma vez que não concretizaram o uso do algoritmo corretamente, devido a esta ser uma subtração com empréstimo (Figura 57). Já 5% dos alunos erraram, porque não interpretaram o problema corretamente, de acordo com o enunciado do problema (Figura 56).

8. O Romeu tinha um saco com 130 rebuçados. Primeiro, retirou do saco 33 rebuçados para dar ao filho mais velho e, depois, retirou 18 para a filha mais nova. Quantos rebuçados ficaram no saco?

$$130 - 33 = 97$$

$$97 - 18 = 79$$

R: ficaram no saco 79 rebuçados.

Figura 55 - Exemplo de resposta certa.

8. O Romeu tinha um saco com 130 rebuçados. Primeiro, retirou do saco 33 rebuçados para dar ao filho mais velho e, depois, retirou 18 para a filha mais nova. Quantos rebuçados ficaram no saco?

$$130 - 33 = 100$$

$$100 - 18 = 100$$

R: ficaram no saco 100 rebuçados.

Figura 56 – Algoritmo efetuado incorretamente.

8. O Romeu tinha um saco com 130 rebuçados. Primeiro, retirou do saco 33 rebuçados para dar ao filho mais velho e, depois, retirou 18 para a filha mais nova. Quantos rebuçados ficaram no saco?

$$130 - 33 = 145$$

$$130 - 18 = 115$$

R: no saco ficaram 115 rebuçados.

Figura 57 – Interpretação incorreta do problema.

Por fim, na tarefa dos enigmas, praticamente todos os alunos acertaram, sendo possível verificar que 90% dos alunos acertaram e 10% tiveram a resposta erraram, em que se verificou que, apesar de poucos alunos, ainda há alunos que acertam apenas o enigma da adição.

Atendendo a esta análise, verifica-se uma evolução significativa no que respeita às dificuldades destacadas na ficha de diagnóstico. Nesta ficha verificou-se uma melhoria no uso das estratégias de cálculo mental tanto na adição com transporte como na subtração com empréstimo, uma vez que aplicaram as estratégias exploradas nas intervenções. Também, se verificou que os alunos conseguiram compreender as estimativas e perceber o modo como são feitos os arredondamentos. Contudo, alguns alunos ainda apresentam dificuldades, mas este aspeto pode advir destes precisarem de um maior

período de exploração, levando-me a pensar que se este fosse maior, estes seriam capazes de ultrapassar as dificuldades ainda presentes.

4.2. Estudo 2

4.2.1. Momento diagnóstico

O momento diagnóstico realizou-se em duas partes. Na primeira parte, ocorreu o diagnóstico do cálculo mental através de um *quiz* em formato PowerPoint (Anexo 3, p. 102) e, na segunda parte, ocorreu o diagnóstico do cálculo escrito através de uma ficha (Anexo 4, p. 103). Este momento teve como objetivo conhecer as competências e as dificuldades de cálculo mental e escrito dos alunos. Tanto o *quiz* como a ficha continham adições e subtrações de números racionais, em que apresentavam diferentes casos, sendo eles frações com o mesmo denominador, frações em que um denominador é múltiplo do outro, frações com denominadores não múltiplos, número natural com fração, número natural com número decimal, fração com número decimal e número decimal com fração decimal. Quanto ao *quiz* de cálculo mental, este apresenta entre duas a três operações em cada um dos casos acima referidos e a ficha apresenta uma operação para cada caso.

Cálculo mental

Começando pelo *quiz* de cálculo mental, este foi realizado por dezanove alunos, visto que um dos alunos estava a faltar. Na Tabela 9 estão os resultados obtidos, em percentagem, a cada um dos casos referidos anteriormente tanto na adição como na subtração. É de referir que a percentagem apresentada considera a média de respostas dadas às operações presentes em cada caso.

Tabela 9 – Percentagem de sucesso obtida no *quiz* de cálculo mental.

		Adição			Subtração		
Respostas	Casos	Certas (%)	Não responde (%)	Erradas (%)	Certas (%)	Não responde (%)	Erradas (%)
	Frações com o mesmo denominador	100	0	0	84,2	10,5	5,3

Frações com denominadores múltiplos	84,2	0	15,8	31,6	15,8	52,6
Frações com denominadores não múltiplos	15,8	26,3	57,9	15,8	23,7	60,5
Número natural com fração	47,4	42,1	10,5	15,8	36,8	47,4
Número natural com número decimal	36,8	21,1	42,1	31,6	26,3	42,1
Fração com número decimal	34,2	47,4	18,4	21,1	36,8	42,1
Número decimal com fração decimal	31,6	23,7	44,7	47,4	36,8	15,8

Analisando a adição, no que toca ao caso das frações com o mesmo denominador, verifica-se 100% de respostas certas. Contudo, é de referir que cerca de três alunos responderam e eram sempre os mesmos a responder o resultado das operações, portanto, achei por bem adotar uma outra estratégia no próximo caso.

Desta forma, no caso das frações com denominadores múltiplos, optei por perguntar quem concordava com o aluno que disse o resultado da operação e, assim, os resultados obtidos já foram diversificados no que concerne às respostas certas e erradas, sendo 84,2% e 15,8% respetivamente. Nas respostas erradas, foi possível verificar que havia casos em que os alunos adicionavam os numeradores e denominadores.

Relativamente ao caso das frações com denominadores não múltiplos, verificou-se que há 15,8% de respostas certas e 57,9% de respostas erradas, sendo visível o mesmo erro do caso anterior. Como ao longo do *quiz* verifiquei que a maioria dos alunos estavam a concordar com quem dizia primeiro o resultado, decidi mudar novamente de estratégia. A partir daqui comecei a circular pelos lugares com uma folha para eles escreverem o resultado obtido a calcularem mentalmente (Figura 58).



Figura 58 - Estratégia adotada.

Quanto ao caso do número natural com fração, 47,4% das respostas são certas e 10,5% são erradas, em que se verificou que os alunos adicionaram o número natural com o numerador da fração e mantiveram o denominador da fração.

Relativamente ao caso número natural com número decimal, 36,8% são respostas certas e 42,1% das respostas são erradas, em que se verificou que os alunos adicionaram a parte decimal com a parte inteira.

No caso da fração com número decimal, obtiveram-se 34,2% de respostas certas e 18,4% de respostas erradas, em que nestas foi possível verificar que os alunos adicionam a parte inteira com a parte decimal e, em alguns casos, os alunos fazem a mudança de representação incorretamente. Para além disto, é ainda de referir que os alunos que responderam corretamente utilizaram a estratégia de mudança de representação, uma vez que houve alunos que disseram o resultado em número decimal e outros em fração.

Por fim, no caso do número decimal com a fração decimal, 31,6% das respostas são certas e 44,7% são erradas. Neste caso é de realçar que os alunos que responderam corretamente foi em forma de fração, tendo apenas um dos alunos respondido em forma de número decimal. E, os alunos que responderam incorretamente, adicionaram os numeradores e os denominadores, quando representam o número decimal em fração.

Passando para a análise da subtração, no caso das frações com o mesmo denominador, grande parte dos alunos respondeu corretamente (84,2%) e 5,3% dos alunos responderam de forma errada. Neste caso foi visível o facto de alguns dos alunos, que responderam incorretamente, terem subtraído os numeradores e os denominadores.

Quanto ao caso das frações em que um denominador é múltiplo doutro, 31,6% são respostas certas e 52,6% são respostas erradas. Este caso, mais uma vez, apresenta o erro cometido anteriormente e, ainda, em alguns casos, os alunos mantêm o numerador, por este ser igual em ambas as frações, e subtraem o denominador.

No que toca ao caso das frações com denominadores não múltiplos, a maior percentagem diz respeito às respostas erradas (60,5%), em que, tal como nos outros casos, alguns dos alunos, subtraíram numerador com numerador e denominador com denominador e outros multiplicaram o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador.

Relativamente ao caso do número natural com fração, 15,8% são respostas certas e 47,4% são respostas erradas. É de realçar que os alunos que responderam corretamente, responderam tanto em número decimal como em fração. Em relação às respostas incorretas, os alunos cometeram o mesmo erro anteriormente referido de subtrair ambos os termos das frações.

No que diz respeito ao caso do número natural com o número decimal, 31,6% são respostas certas e 42,1% erradas. Em relação à percentagem dos alunos que erraram, esta deve-se ao facto dos alunos utilizarem a estratégia de mudança de representação de forma incorreta e, também, efetuarem de forma incorreta a subtração das frações com denominadores diferentes.

Em relação ao caso da fração com número decimal, 21,1% são respostas certas, em que é de referir que a estratégia de cálculo mental utilizada foi a de mudança de representação quer seja do número decimal para fração e vice-versa. A percentagem de respostas erradas foi de 42,1%, em que, neste caso, se verificou que os alunos subtraíram os numeradores e os denominadores.

No caso da fração decimal com número decimal, 47,4% das respostas são certas e 15,8% erradas. Neste caso é de realçar que os alunos que responderam corretamente utilizaram a estratégia de mudança de representação. No que toca às respostas erradas, estas demonstraram que os alunos não subtraem corretamente frações com denominadores diferentes, tal como tem vindo a ser referido e, também, em alguns casos, apenas alteravam os denominadores de forma a ficarem iguais e depois subtraíam os numeradores iniciais.

Com a análise dos resultados obtidos no *quiz* de cálculo mental, conclui-se que a percentagem de alunos que não respondem ao longo dos casos é significativa, demonstrando, desta forma, que não os sabem calcular. Também se conclui que a maioria dos alunos calcula corretamente as adições e subtrações com frações com denominadores iguais. Já no que diz respeito ao cálculo de frações com denominadores diferentes, começam a surgir dificuldades, pois os alunos adicionam e subtraem numerador com numerador e denominador com denominador.

Assim, é possível concluir que os alunos não compreendem a adição e subtração de frações, principalmente, com denominadores diferentes.

Os alunos também apresentam dificuldades nos restantes casos apresentados, em que o número racional é representado de diversas formas. Ainda se concluiu que o cálculo incorreto de alguns

desses casos advém do facto de ser necessário adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes e dos alunos utilizarem a estratégia de cálculo mental denominada de mudança de representação de forma incorreta. Isto porque, têm dificuldades em mudar um número racional de representação, mais precisamente, de um número decimal para uma fração e vice-versa, em que se verificou através dos resultados ditos por alguns alunos, que eles representam, por exemplo, 0,7 em $\frac{1}{7}$ e 0,75 em $\frac{75}{10}$. E, também se conclui que alguns alunos têm dificuldade em adicionar e subtrair número natural com número decimal.

Cálculo escrito

A ficha foi realizada por vinte alunos. Na Tabela 10 são apresentados os resultados obtidos, em percentagem, a cada um dos casos referidos anteriormente na adição e na subtração. Na análise da mesma serão consideradas as respostas certas e erradas, sendo de referir que as respostas são consideradas incompletas quando a explicação não é realizada ou quando não explicam todo o pensamento envolvido.

Tabela 10 – Percentagem obtida nos diferentes tipos de casos de adição e subtração de frações.

		Adição				Subtração			
		Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)	Não responde (%)	Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)	Não responde (%)
Respostas	Casos								
	Frações com o mesmo denominador	75	5	15	5	70	15	5	10
	Frações em que um denominador é múltiplo doutro	45	10	40	5	30	5	45	20

Frações com denominadores não múltiplos	30	15	50	5	20	—	45	35
Número natural com fração	35	10	50	5	20	5	40	35
Número natural com número decimal	25	5	60	10	25	—	45	30
Fração com número decimal	15	—	65	20	20	—	35	45
Número decimal com fração decimal	40	—	40	20	15	—	45	40

Começando pela análise da adição, no que diz respeito ao caso das frações com o mesmo denominador, é possível verificar que 75% dos alunos calcula corretamente, sendo que os alunos sabem que, neste caso, mantemos os denominadores e adicionamos os numeradores (Figura 59).

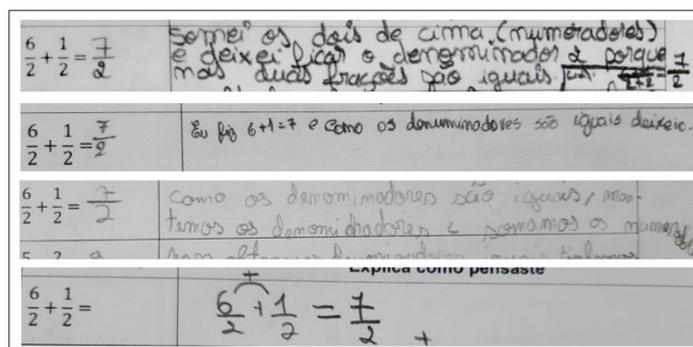


Figura 59 - Respostas completas dos alunos.

Neste caso, 15% dos alunos erraram, visto que adicionaram numerador com numerador e denominador com denominador (Figura 60) e houve um aluno que efetuou uma multiplicação (Figura 61).

$\frac{6}{2} + \frac{1}{2} =$	$\frac{7}{4} = \frac{6+1}{2+2}$
$\frac{6}{2} + \frac{1}{2} =$	$\frac{6+1}{2} = \frac{6+1}{2+2} = \frac{7}{4}$

Figura 61 - Respostas erradas dos alunos.

$\frac{6}{2} + \frac{1}{2} =$	$\frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{4}$
-------------------------------	--

Figura 60 - Resposta em que é realizada uma multiplicação.

No que toca ao caso das frações em que um denominador é múltiplo do outro, 45% dos alunos respondeu corretamente, tendo utilizado a regra de adicionar frações com denominadores diferentes (Figura 62).

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$	$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{5}{8} + \frac{4}{8} = \frac{9}{8}$
$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{20 + 16}{32} = \frac{36}{32}$	Eu fiz a multiplicação quando os denominadores não eram iguais e depois fiz a conta
$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} =$	$\frac{5}{8} + \frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{5}{8} + \frac{4}{8} = \frac{9}{8}$

Figura 62 - Exemplos de respostas certas.

Também é de referir que 40% dos alunos responderam incorretamente, em que se verificou que o erro cometido foi a adição dos numeradores e dos denominadores (Figura 63).

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} =$	$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{7}{8+4} = \frac{7}{12}$ portanto x
$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} =$	$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{5+2}{8+4} = \frac{7}{12}$

Figura 63 - Exemplo de respostas erradas.

Relativamente ao caso das frações com denominadores não múltiplos, foi possível verificar que a percentagem de respostas certas é baixa (30%), em que a estratégia utilizada é a mesma da apresentada no caso em que um denominador é múltiplo do outro (Figura 64).

$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{47}{14}$	$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{35}{14} + \frac{12}{14} = \frac{47}{14}$
---	---

Figura 64 - Exemplo de resposta certa.

É ainda de referir 50% dos alunos respondeu incorretamente, uma vez que adicionaram numerador com numerador e denominador com denominador (Figura 65).

$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} =$	$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{5+6}{2+7} = \frac{11}{9}$
$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} =$	$\frac{11}{9} \quad \frac{5+6}{2+7}$
$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{11}{9}$	$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{11}{9}$

Figura 65 - Respostas erradas.

No caso do número natural com fração, 35% dos alunos respondeu corretamente, em que foi possível verificar que os alunos utilizaram a estratégia de mudança de representação (Figura 66), sendo que ocorre a mudança de fração para número decimal e vice-versa.

$3 + \frac{1}{2} = \frac{35}{10}$	$\frac{1}{2}$ é igual a 0,5. $3 + 0,5 = 3,5 = \frac{35}{10}$
$3 + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$	Como os denominadores são diferentes, fui em um número que a multiplicar por 2 que desse 2 e foi 2. $2 \times 3 = 6$ e $2 \times \frac{1}{2} = 1$ então $6+1=7$ e o denominador é 2.
$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	$3 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Figura 66 - Uso da estratégia de mudança de representação.

A percentagem de respostas erradas foi de 50%, tendo-se verificado que os alunos, mais uma vez, adicionam os numeradores e os denominadores (Figura 67).

$3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$	Como os dois números são o mesmo caso de $\frac{3}{7}$ e calculei $3+1=4$ e $2+0=2$
$3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$	fazemos $3+1=4$ e depois somamos o denominador 2, do $\frac{1}{2}$
$3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$	$\frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

Figura 67 - Respostas erradas dos alunos.

Em relação ao caso do número natural com número decimal, 25% dos alunos responderam corretamente, apresentando uma explicação em que está presente, em alguns casos, o uso da estratégia de cálculo mental referida anteriormente (Figura 68).

$3 + 0,26 = \frac{326}{100}$	$3 + 0,26 = \frac{300}{100} + \frac{26}{100} = \frac{326}{100}$
$3 + 0,26 = 3,26$	adicionamos as unidades com as decimas

Figura 68 - Exemplo de respostas corretas.

Já no que toca às respostas erradas, a percentagem é de 60%, tendo sido verificado que os alunos não fazem a mudança de representação corretamente e em alguns casos, depois de terem duas frações com denominadores diferentes adicionam os numeradores e os denominadores (Figura 69).

Figura 69 - Exemplo de repostas erradas.

Quanto ao caso da fração com número decimal, 15% dos alunos responderam corretamente e foi possível verificar que os alunos voltaram a utilizar a estratégia de cálculo mental denominada de mudança de representação (Figura 70).

Figura 70 - Exemplo de repostas certas.

Neste caso 65% das respostas são erradas, porque alguns dos alunos não efetuarem corretamente a mudança de representação e outros, para além disso, ainda adicionaram os numeradores e os denominadores e, também, há alunos que fizeram corretamente a mudança de representação, mas depois adicionaram incorretamente (Figura 71).

Figura 71 - Exemplo de repostas erradas.

Por fim, no que diz respeito ao caso do número decimal com fração decimal, as respostas corretas apresentam uma percentagem de 40%, em que é de referir que foi utilizada a estratégia de mudança de representação.

Figura 72- Exemplo de repostas certas.

Nas respostas erradas, a percentagem também é de 40% e é de referir que as dificuldades evidenciadas foram relativamente à mudança de representação e, para além disto, também adicionam de forma incorreta, uma vez que os alunos adicionam os numeradores e os denominadores (Figura 73).

$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{8}{20}$ *0,3 = $\frac{3}{10}$ então calculei $5 + 3 = 8$*
 $\frac{5}{10} + 0,3 = 5,3$ *$5,10 + 0,3 = 5,13$*

Figura 73 - Exemplo de respostas erradas dos alunos.

Passando para a análise da subtração, no que toca ao caso das frações com denominadores iguais, 70% são respostas certas, uma vez que utilizaram corretamente a regra de subtrair frações com o mesmo denominador (Figura 74).

$\frac{8}{17} - \frac{3}{17} = \frac{5}{17}$
Subtraí os numeradores e deixei o denominador igual, porque as duas frações têm o mesmo denominador.
Subtraí o 10 pelo 4 e o 5 pelo 5.
5 -> 5 e como os denominadores eram iguais deixei estar.
como os denominadores são iguais subtraímos só os numeradores.

Figura 74 - Exemplo de respostas certas.

Neste caso é de referir que 5% das respostas são respostas erradas, em que se verificou que um aluno efetuou uma multiplicação, em vez da subtração.

$\frac{8}{17} - \frac{3}{17} = \frac{24}{17}$

Figura 75 - Resposta errada.

Em relação ao caso das frações em que um denominador é múltiplo do outro, 30% dos alunos responderam corretamente, uma vez que se verifica a utilização da regra de subtrair frações com denominadores diferentes (Figura 76).

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$

Figura 76 - Exemplo de resposta certa.

A percentagem de alunos a errar é de 45%, pois os alunos subtraíram os numeradores e os denominadores. Também houve casos em que os alunos estavam a ter em atenção o facto das frações terem de ter denominadores iguais, mas depois subtraíram os numeradores apresentados inicialmente.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$
 $\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

Figura 77 - Exemplo de respostas erradas.

No que diz respeito ao caso das frações com denominadores não múltiplos, 20% das respostas são certas e 45% erradas. É de realçar que as respostas certas, utilizaram a regra de subtrair frações com denominadores diferentes (Figura 78) e que nas respostas incorretas, os alunos subtraíram os numeradores e os denominadores (Figura 79).

$$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{5 \times 4 - 6 \times 3}{12} = \frac{20 - 18}{12} = \frac{2}{12}$$

Figura 78 - Exemplo de resposta certa.

$$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{5-6}{3-4} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Figura 79 - Exemplo de respostas erradas.

Relativamente ao caso do número natural com fração, 20% dos alunos acertaram, em que foi visível a passagem do número natural para fração e a utilização da regra de subtrair frações com denominadores diferentes (Figura 80). É ainda de referir que 40% dos alunos responderam incorretamente, uma vez que os alunos adicionaram o número natural com o numerador e mantiveram o denominador (Figura 81).

$$4 - \frac{2}{3} = \frac{4}{1} - \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 - 2}{3} = \frac{12 - 2}{3} = \frac{10}{3}$$

Figura 80 - Exemplo de resposta certa.

$$4 - \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Figura 81 - Exemplo de respostas erradas.

No que toca ao caso do número natural com número decimal, 25% das respostas são certas, em que se verificou que alguns alunos subtraíram o número decimal com o número natural e outros utilizaram a estratégia de mudança de representação.

$$3 - 0,2 = \frac{30}{10} - \frac{2}{10} = \frac{30-2}{10} = \frac{28}{10} = 2,8$$

$$3 - 0,2 = 2,8$$

Figura 82 - Exemplo de respostas certas.

A percentagem de respostas erradas é de 45%, visto que os alunos utilizam a estratégia de mudança de representação incorretamente e, ainda, em alguns casos, fazem a mudança de representação correta, mas subtraem de forma incorreta (Figura 83).

Figura 83 - Exemplo de respostas erradas.

Quanto ao caso da fração com número decimal, 20% dos alunos respondeu corretamente, em que utilizaram a estratégia de cálculo mental denominada de mudança de representação.

Figura 84 - Exemplo de resposta certa.

E, 35% dos alunos respondeu de forma errada, uma vez que os alunos não passaram corretamente o número decimal para fração e, ainda, cometeram o erro de subtrair os numeradores e os denominadores.

Figura 85 - Exemplo de resposta errada.

Por fim, no que toca ao caso de número decimal com fração decimal, 15% dos alunos responderam corretamente, tendo verificado que os alunos utilizaram corretamente a estratégia de cálculo mental (Figura 86).

Figura 86 - Exemplo de respostas certas.

E, a percentagem de alunos errou o cálculo desta operação foi de 45% dos alunos, uma vez que os alunos cometeram os mesmos erros descritos no caso anterior (Figura 87).

Figura 87 - Exemplo de respostas erradas.

Com a análise, conclui-se que grande parte dos alunos faz corretamente a adição e a subtração de frações com denominadores iguais. O mesmo já não acontece quando os denominadores são diferentes, em que os alunos subtraem os numeradores e os denominadores.

Também se conclui que nos restantes tipos de casos de adição e subtração de números racionais representados de diferentes formas, os alunos têm dificuldades no seu cálculo. Esta dificuldade advém do facto de ao utilizarem a estratégia de mudança de representação para o cálculo dos casos acabam por necessitar de saber adicionar e subtrair frações com o mesmo denominador e, também há alunos que não utilizam corretamente esta estratégia, particularmente a mudança de número decimal para fração e vice-versa, como por exemplo 0,2 em $\frac{1}{2}$ e 0,75 em $\frac{75}{10}$.

Atendendo tanto ao cálculo mental como ao cálculo escrito, verificou-se que as dificuldades sentidas são no mesmo âmbito. Desta forma, é possível dizer que os alunos não compreendem a regra da adição e da subtração de frações, estando esta dificuldade mais evidenciada quando as operações apresentam frações com denominadores diferentes. Para além disto, os alunos apesar de utilizarem a estratégia de cálculo mental, fazem-no de forma incorreta.

4.2.2. Intervenção

4.2.2.1. Primeira sessão

Enquadramento

Considerando as dificuldades verificadas, decidi começar pela exploração de um material manipulável, os discos de fração. A utilização deste material tem como objetivo sustentar o raciocínio dos alunos através da visualização da representação de frações, para que assim compreendam as frações e, posteriormente, a regra da adição e da subtração de números racionais não negativos.

Esta sessão tem como objetivo a compreensão das frações e, posteriormente, das frações equivalentes através do material manipulável.

Descrição da sessão

A primeira sessão começou com a organização dos alunos a pares. Posto isto, apresentei o material manipulável, os discos de fração, e distribuí-os aos alunos, dando-lhes tempo para explorarem e manipularem os discos de fração (Figura 88).



Figura 88 – Exploração do material manipulável.

Durante a manipulação, observei que os diferentes grupos estavam a proceder com diferentes formas de a executar (ver Figura 89), em que alguns pares estavam a espalhá-los, outros a organizá-los e, também, começaram a sobrepor os diferentes discos.



Figura 89 - Alunos a manipularem o material manipulável de diferentes formas.

Passado algum tempo, pedi aos alunos para me descreverem o material, sendo de realçar as interações dos alunos, na medida em que demonstraram compreender o que os discos de fração representam e chegaram ao significado da representação das frações, como parte de um todo, tal como podemos ver na Transcrição 4.

Estagiária: E agora se eu vos pedisse para descrever os discos de fração?

M: São frações.

Estagiária: Sim, são frações, muito bem. Ou melhor representam frações.

T: São partes de um todo.

Estagiária: Isso mesmo! Muito bem! Alguém tem mais alguma coisa a dizer?

H: São pedaços de cartolina com frações.

Estagiária: Sim, muito bem! Mais?

MA: Com todas as frações constituímos uma unidade.

Estagiária: Mas com todas as frações do quê?

MA: Com todas as frações do mesmo disco.

Estagiária: Sim! É isso mesmo! Todos compreenderam o que foi dito?

Alunos: Sim!

Estagiária: Muito bem meninos!

Transcrição 4 - Discussão com os alunos sobre os discos de fração.

Posteriormente, pedi aos alunos para me descreverem as características dos discos de fração, em que começaram por atender à sua cor, de forma a verem que fração representava determinado setor

circular e, depois, pedi para me dizerem o que verificaram ao observarem uma peça de cada disco de fração (Transcrição 6).

Estagiária: O que é que vocês repararam em relação ao tamanho?

Alunos: São diferentes.

Estagiária: Diferentes, como assim?

Alunos: Umas são maiores, outras mais pequenas.

Estagiária: Sim, pois são! Muito bem! E o que podemos concluir em relação ao tamanho? Se pegarmos na peça que representa $\frac{1}{2}$ e na que representa $\frac{1}{4}$, por exemplo?

D: A peça do $\frac{1}{2}$ é maior que a de $\frac{1}{4}$.

T: Que as peças diminuem.

Estagiária: Muito bem!

T: As peças vão diminuindo de tamanho, do 1 até ao $\frac{1}{10}$.

Estagiária: É isso! Muito bem!

Transcrição 5 - Discussão com os alunos sobre os discos de fração.

Posto isto, pedi aos alunos para acharem frações equivalentes a determinada fração, em que é de destacar que os alunos ao início estavam a ter dificuldades em usar os discos de fração para acharem frações equivalentes, mas depois como fui circulando pelos diferentes grupos, as dúvidas foram sendo esclarecidas e os alunos começaram a compreender melhor. Também, é de destacar o facto de terem compreendido que tinham de ter como referência a fração que eu dizia e escrevia no quadro e, depois, tinham de sobrepor outras frações até descobrirem uma fração equivalente.

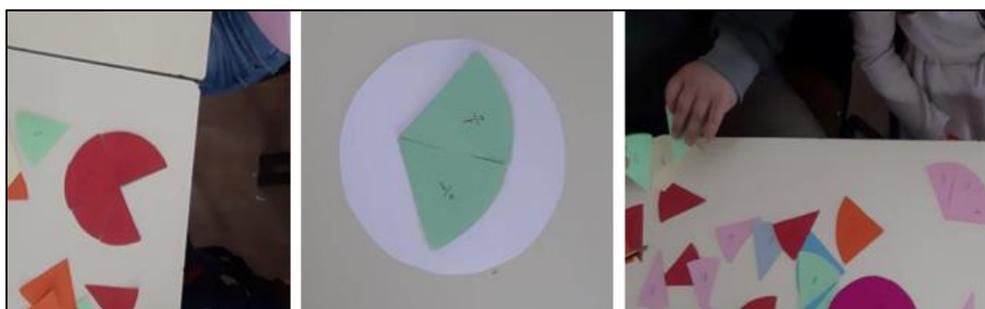


Figura 90 - Alunos a descobrirem frações equivalentes.

Seguidamente, distribui um desafio que aborda o mesmo, mas que, também, apresenta relação com a reta numérica e desafios em que já não é possível o uso do material manipulável, sendo necessário que os alunos raciocinem e compreendam como descobrimos as frações equivalentes.

A realização dos desafios acabou por ficar apenas pelo primeiro, uma vez que os alunos não estavam a compreender e o tempo da intervenção terminou.

Reflexão da sessão

Nesta sessão é de destacar a utilização do material manipulável, que foi uma estratégia muito positiva, no sentido em que ajudou os alunos a compreenderem as frações equivalentes. É importante referir que dei tempo aos alunos para explorarem e manipularem os discos de fração e que foi estabelecida uma discussão com os alunos, para que compreendessem que os diferentes discos são partes de um todo. Tanto para o conhecimento dos discos de fração, como para a compreensão das frações equivalentes, tive em atenção a participação e a interação dos alunos, para conseguir perceber se estavam a compreender o que estava a ser abordado. Em relação aos desafios, os alunos apenas começaram a fazer o primeiro, pois demonstraram dificuldades na sua realização, e o mesmo será explicado na seguinte intervenção.

4.2.2.3. Segunda sessão

Enquadramento

A segunda sessão deu continuidade à anterior, em que começou com a explicação do primeiro desafio, pois os alunos estavam com dúvidas na sua realização.

Esta sessão, para além de atender aos objetivos da anterior, ainda pretende que os alunos compreendam a regra de adicionar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes. Para isto, os alunos utilizaram novamente o material manipulável, que lhes irá sustentar o raciocínio, auxiliando-os na compreensão da regra.

Nesta sessão é de referir que havia dois alunos a faltar, no qual um deles estava com covid e, desta forma, estava a assistir à distância. Para que o aluno pudesse acompanhar a aula foram enviados previamente os materiais que seriam utilizados e, em relação ao material manipulável, foram enviadas fotos do mesmo, para que tivesse conhecimento. Ao longo da intervenção era sempre estabelecida interação como aluno, para participar e verificar se estava a compreender o que estava a ser abordado.

Descrição da sessão

Para iniciar a sessão, comecei por organizar os alunos com os pares da sessão anterior e distribuí o material manipulável.

De seguida, expliquei o primeiro desafio, em que comecei por perguntar as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e escrevi no quadro as que os alunos disseram, depois, desenhei uma reta numérica no quadro e fui estabelecendo diálogo com os alunos, para que fossem eles a dizer como iria representar as frações equivalentes na reta, sendo esta uma forma de perceber se os alunos estavam a compreender.

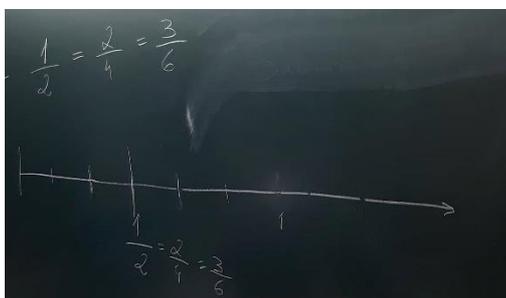


Figura 91 - Explicação do desafio no quadro.

Após a explicação, foi dado tempo aos alunos para resolverem os restantes desafios e, neste momento, eu fui circulando pelos lugares para ver se os alunos estavam a conseguir resolver e a compreender.



Figura 92 - Alunos a resolverem os desafios utilizando os discos de fração.

Quando os alunos terminaram de a resolver, ocorreu uma discussão em grande grupo, em que foi perguntado como é que tinham feito, para que fosse possível verificar se os alunos estavam a compreender. Na fase em que os alunos tinham de explicar a sequência de frações equivalentes, os alunos explicavam através da tabuada e também atendiam à divisão, em que foi possível verificar a compreensão dos alunos no que diz respeito às frações equivalentes.

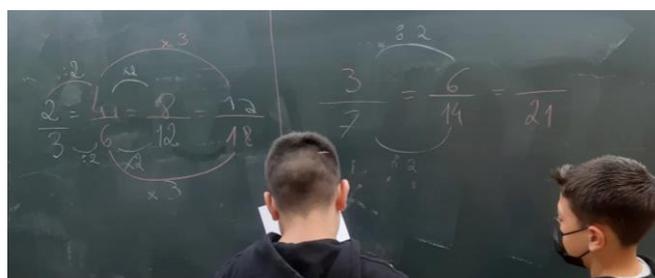


Figura 93 - Alunos a resolverem o desafio sobre as frações equivalentes.

Posteriormente, disse aos alunos que íamos adicionar e subtrair frações com denominadores iguais, utilizando os discos de fração e escrevi uma operação no quadro e depois foi estabelecido um ambiente de interação.

G: Já sei o resultado, é $\frac{3}{5}$.

Estagiária: Muito bem! Explica-me como chegaste aos $\frac{3}{5}$?

G: Peguei em duas peças de um quinto e depois em mais uma.

Estagiária: De que disco?

G e L: Do que esta dividido em cinco partes.

Estagiária: Muito bem! Perceberam todos o que foi dito?

Maioria dos alunos: Sim!

alunos:

Transcrição 6 - Discussão sobre a adição de frações com denominadores iguais.

De seguida, apresentei outra operação para verificar se todos os alunos conseguiam resolvê-la, em que neste caso todos os alunos conseguiram compreender e explicar, não só recorrendo aos discos de fração, mas também sem o auxílio dos mesmos. Nesta fase optei por escrever a explicação dos alunos no quadro, para que todos a visualizassem e a acompanhassem e para os que ainda tinham dificuldades, compreendessem visto que estavam a visualizar o que estava a ser dito.

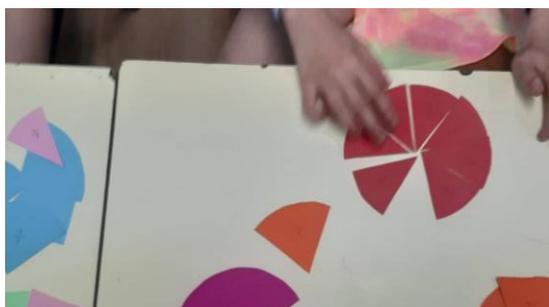


Figura 95 - Grupo a utilizar os discos de fração para adicionar.

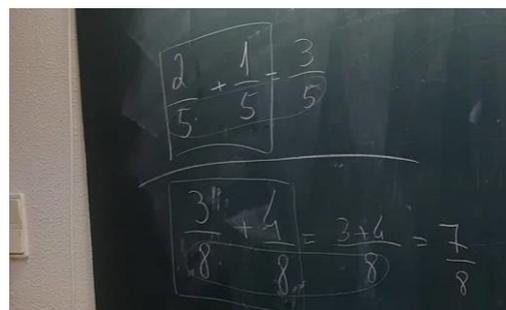


Figura 94 - Operações no quadro, com a explicação dos alunos, na segunda operação.

Visto que os alunos demonstraram compreender, passei para a abordagem da subtração de frações com denominadores iguais, em que comecei por apresentar operações e esperar que os alunos através da utilização dos discos de fração obtivessem o resultado da mesma, tal como se procedeu com a abordagem da adição. No que toca à primeira operação apresentada, os alunos disseram logo o resultado e explicaram-me como fizeram através dos discos de fração e apesar de recorrem ao material,

também, pedi que me explicassem, sem recorrer ao mesmo, e eu fui escrevendo essa explicação no quadro.

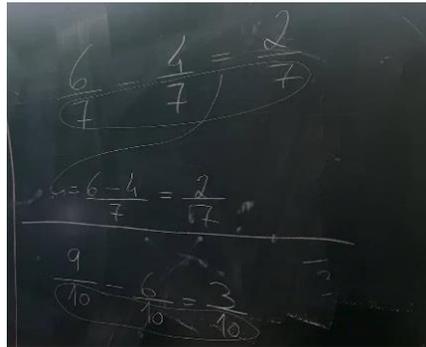


Figura 96 – Explicação dos alunos escrita no quadro.

Depois disto, foi estabelecida uma discussão com a turma, para que fossem os alunos a descobrir a regra para adicionar e subtrair frações, com denominadores iguais.

Estagiária: E o que podemos verificar com o cálculo destas operações?

A: Os denominadores ficam iguais e adicionamos.

Estagiária: Adicionamos o quê?

A: Os numeradores.

Estagiária: Isso mesmo! Muito bem! Mas agora uma frase completa?

L, M e A: Mantemos os denominadores e depois adicionamos ou subtraímos os numeradores.

Estagiária: Muito bem! Todos compreenderam?

Alunos: Sim!

Transcrição 6 - Discussão com os alunos sobre a regra.

Após isto, disse aos alunos que também podíamos adicionar e subtrair utilizando a reta numérica e procedi à explicação no quadro, sendo estabelecida a interação com os mesmos, para verificar se estavam a compreender esta estratégia de cálculo.

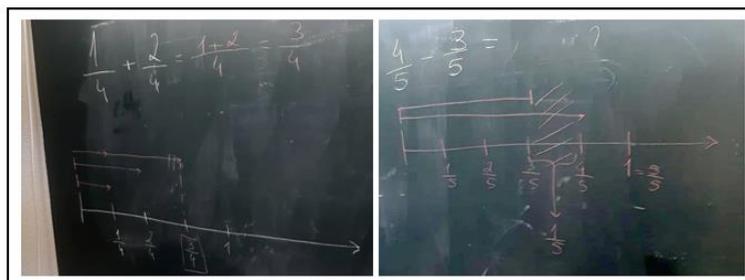


Figura 97 - Explicação sobre adicionar e subtrair frações com denominadores iguais, na reta numérica.

Seguidamente, deu-se a abordagem da adição e da subtração de frações com denominadores diferentes, em que comecei por apresentar uma operação que apresenta frações em que um denominador é múltiplo do outro e pedi aos alunos para calcularem, recorrendo aos discos de fração. Nesta fase, foi possível verificar que os alunos aplicaram o conhecimento das frações equivalentes, em que começaram por ver frações equivalentes através do disco de fração, assim como também se verificou na explicação dada pelos alunos e que foi escrita no quadro.

Posteriormente, apresentei outra operação, de forma a verificar se todos os alunos estavam a compreender, em que, tal como aconteceu com a anterior, escrevi no quadro a explicação dada pelos alunos.



Figura 99 - Alunos a descobrirem frações equivalentes.

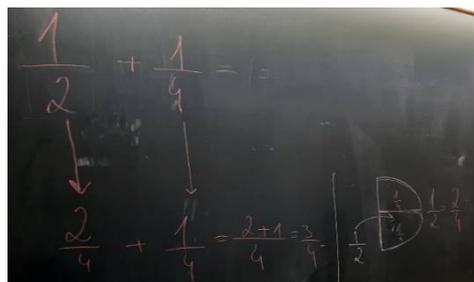


Figura 98 - Explicação dos alunos escrita no quadro.

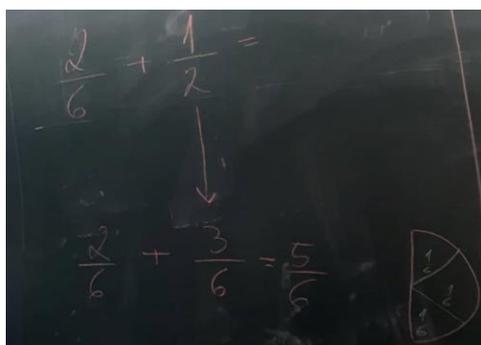


Figura 100 - Explicação dos alunos escrita no quadro.

Entretanto, apresentei subtrações de frações com denominadores diferentes e procedi da mesma forma que as apresentadas anteriormente. Na primeira subtração apresentada, $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$, questionei os alunos “E se for esta operação como fazemos?”, e a partir disto surgiram as intervenções dos alunos, assim como as exemplificações através dos discos de fração, em que à medida que eles iam explicando, ia escrevendo no quadro para todos os alunos visualizarem.



Figura 101 - Aluno a mostrar-me como achou a fração equivalente.

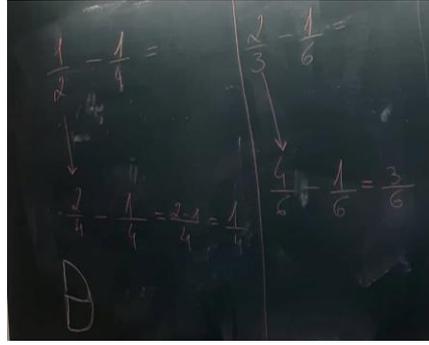


Figura 102 - Explicação dos alunos escrita no quadro.

Seguidamente, apresentei uma adição de frações com denominadores diferentes e não múltiplos, em que na primeira operação apresentada foi estabelecida interação com os alunos, de forma a explicarem como calcular e, assim, verificar se sabem e se estão a compreender.

Estagiária: Quem me sabe explicar como calculamos $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$?

L: Como $\frac{1}{5}$ não cabia em $\frac{1}{2}$, eu peguei em $\frac{1}{5}$ e peguei em $\frac{1}{10}$ de cada vez.

E um vezes um que dava um e um vezes cinco que dava dez.

Estagiária: E cinco vezes um dá dez?

M: Não, dá cinco.

L: Mas eu fiz um vezes um que dava um e um vezes cinco que dava dez

Estagiária: E achas que está bem? Tu achaste uma fração equivalente a $\frac{1}{5}$, qual é?

L: Achei, $\frac{2}{10}$.

Estagiária: Muito bem, ou seja, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. E o que é que fizeste?

L: Vezes dois.

Estagiária: Pois, muito bem, multiplicaste por dois e não por um. E o que vamos fazer com o $\frac{1}{2}$?

L e M: Pegamos no $\frac{1}{2}$ e pusemos em cima $\frac{5}{10}$.

Estagiária: E chegaste à conclusão que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$. Ou seja, o que vamos ter?

L: $\frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

Estagiária: Muito bem! Perceberam?

Alunos: Sim!

Transcrição 7 - Discussão sobre da adição de frações com denominadores diferentes.

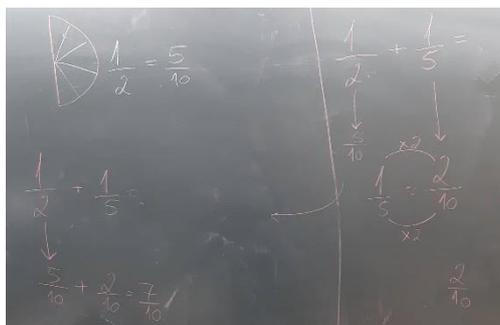


Figura 103 - Quadro com a explicação dos alunos escrita.

Após isto, foi realizada outra operação, em que a sua explicação foi feita oralmente e escrita no quadro, uma vez que os alunos estavam a demonstrar compreender o que se tem de fazer.

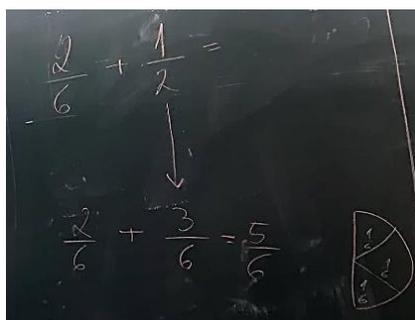


Figura 104 - Explicação feita pelos alunos.

No final, foi estabelecida uma discussão com os alunos, começando por perguntar a que conclusão chegaram depois de calcularem as operações apresentadas.

Estagiária: O que podemos verificar com o cálculo destas operações?

M e T: Temos de achar frações equivalentes.

Estagiária: É isso mesmo! E porquê?

A: Para os denominadores ficarem iguais.

Estagiária: Muito bem! E mais?

T: Depois adicionamos ou subtraímos os numeradores.

Estagiária: Muito bem! Perceberam?

Alunos: Sim!

Transcrição 8 - Discussão sobre as operações apresentadas e discutidas anteriormente.

Reflexão da sessão

Atendendo ao que se desenvolveu na sessão, foi possível verificar que os alunos demonstraram compreender a regra da adição e da subtração de frações com denominadores iguais e diferentes, bem

como o uso da estratégia de utilização de frações equivalentes. Esta compreensão verificou-se nas diferentes intervenções realizadas pelos alunos, assim como nas resoluções dos mesmos.

Quanto à utilização do material manipulável, foi possível verificar que contribuiu significativamente para a construção do conhecimento, tendo sido verificado a compreensão das frações equivalentes.

Ao longo da sessão foi sendo evidenciado o facto dos alunos estarem a começar a sentir uma maior facilidade no cálculo das operações que foram sendo apresentadas no decorrer da intervenção. Também se verificou essa facilidade na escrita, quando iam ao quadro explicar como pensaram, bem como na explicação oral, sendo de realçar que era estimulado que os alunos explicassem como pensaram com e sem recurso ao material manipulável. E, ainda, o facto dos alunos terem conseguido chegar à conclusão em relação às regras e de no final da abordagem da regra da adição e da subtração com denominadores diferentes eles terem relacionado com a regra com denominadores iguais, o que demonstra que os alunos compreenderam.

Assim, na próxima sessão seria pertinente implementar uma tarefa que requeira atividade mental, sendo a realização de problemas um bom recurso para que isso ocorra.

4.2.2.4. Terceira sessão

Enquadramento

Para esta sessão, achei que seria importante a resolução de problemas, para que, desta forma, os alunos apliquem o conhecimento e para que ocorra atividade mental. Também será realizado um jogo com o objetivo de desenvolver o cálculo mental e o escrito dos alunos.

Desta forma, os objetivos desta sessão são a compreensão dos processos matemáticos envolvidos na resolução de problemas, de forma a aplicarem o conhecimento que os alunos aprenderam e a desenvolverem o cálculo mental e escrito através da realização de um jogo.

Descrição da sessão

A terceira sessão começou com a revisão do que foi abordado nas intervenções anteriores, com o objetivo de rever as conclusões a que chegamos. Depois disto, distribui uma pequena ficha com problemas para os alunos resolverem a pares. Nesta fase circulava pelos grupos, de forma a ver como estavam a resolver, para depois ter em atenção quem viria ao quadro explicar como resolveu, de forma a serem partilhadas as diferentes estratégias de resolução.

Após a resolução do mesmo, um grupo foi ao quadro resolver (Figura 105) e explicar o problema que envolvia a adição de frações entre denominadores iguais.

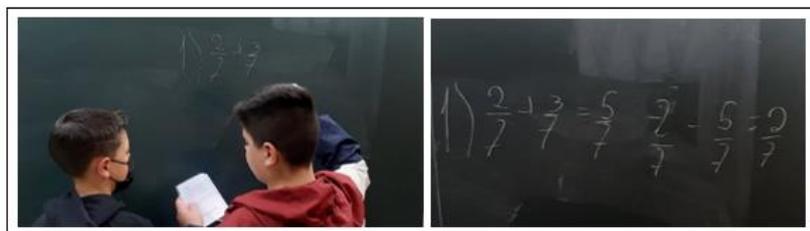


Figura 105 – Resolução do problema no quadro.

Posteriormente, veio um outro grupo ao quadro, uma vez que resolveu através da representação visual (Figura 106), sendo esta uma estratégia diferente da do grupo anterior.



Figura 106 - Grupo que resolveu com uma estratégia de resolução diferente.

Este grupo enquanto escrevia a resolução do problema no quadro, ia explicando aos alunos e, no final, perguntei o porque da barra estar dividida em 7 partes e explicaram-me dizendo de forma correta que representava a unidade.

Depois, chamei um outro grupo ao quadro para vir resolver o problema que envolve a adição de frações com denominadores diferentes e a subtração de frações com denominadores iguais (Figura 107).

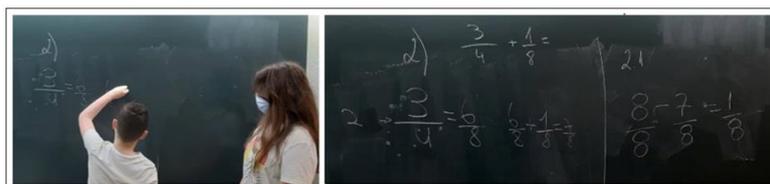


Figura 107 - Alunos a resolverem o problema.

Estes alunos demonstraram compreender, visto que mencionaram que temos de procurar frações equivalentes para que o denominador fique igual em ambas as frações, demonstrando estar a aplicar conhecimento abordado nas intervenções anteriores.

Seguidamente, passei para a abordagem da estratégia de cálculo mental denominada de mudança de representação, em que perguntei aos alunos quais eram as diferentes representações de um número decimal e para dizerem exemplos para escrever no quadro (Figura 109).

Depois, perguntei aos alunos como é que passávamos de um número decimal para uma fração e vice-versa. Nesta fase os alunos evidenciaram as mesmas dificuldades presentes na ficha de diagnóstico e, assim, parti deste aspeto para a explicação da estratégia de cálculo mental denominada por mudança de representação (Figura 108).

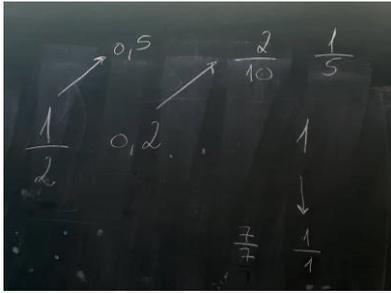


Figura 108 - Diferentes representações de um número racional escritas no quadro.

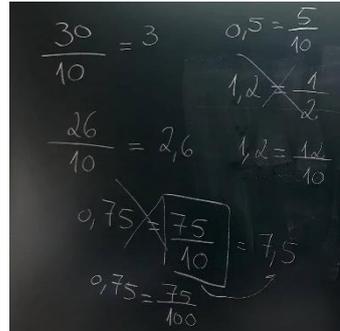


Figura 109 - Explicação da mudança de representação.

Depois dos alunos compreenderem, desafiei-os a calcular as operações distribuídas num pequeno cartão individualmente em que iriam utilizar a estratégia de mudança de representação, em que fui circulando pelos lugares enquanto os alunos resolviam (ver Figura 110), de forma a verificar se estavam a resolver corretamente e a compreender.



Figura 110 - Alunos a resolverem a pequena ficha com as operações.

Após resolverem as operações, chamei alguns alunos ao quadro para virem resolver, em que verifiquei que os alunos tinham compreendido a explicação acerca de passar de número decimal para fração e vice-versa.



Figura 111 - Alunos no quadro a resolver as operações.

Seguidamente, deu-se a realização do jogo do loto, sendo este um jogo que contempla tudo o que foi abordado nas intervenções e que tem como objetivo desenvolver o cálculo mental e escrito dos alunos.

Para iniciar o jogo do loto, comecei por dizer aos alunos que ia distribuir um cartão em forma de retângulo dividido em seis, em que cada divisão apresenta um número decimal ou uma fração ou um número racional representado na reta número ou discos de fração. Depois disse aos alunos que tinha

outros cartões, mas com operações e que iriam ser escolhidos ao acaso e eu iria mostrar e eles tinham de calcular mentalmente, para ver se tinham o resultado presente no cartão. Também disse que o aluno que tivesse o resultado da operação iria ao quadro explicar como calculou mentalmente.

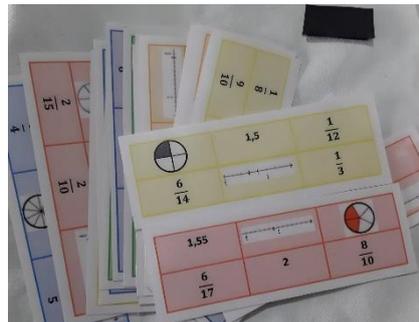


Figura 112 - Jogo do loto.

Após a explicação, dei início ao jogo e retirei aleatoriamente um dos cartões que contém operações e mostrei aos alunos. Nesta fase dava algum tempo aos alunos e ia circulando pela sala, de modo a ver quem tinha esse resultado, e foi possível verificar que a maioria dos alunos estavam atentos e a calcular mentalmente para verem se eram eles que tinham esse resultado. É de referir que quando o aluno tinha o resultado ia ao quadro explicar e dizia como tinha o resultado representado, tendo sido assim ao longo da realização do jogo.

No decorrer do jogo, os alunos demonstraram utilizar corretamente a regra de adicionar e subtrair frações com denominador iguais e com denominadores diferentes, assim como a estratégia de cálculo mental designada de mudança de representação.

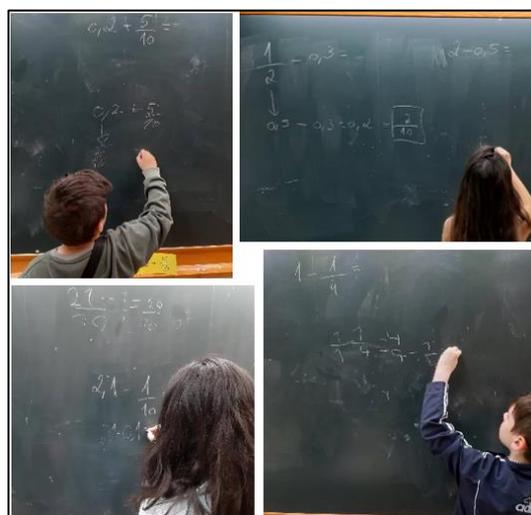


Figura 113 - Cálculo de algumas das operações presentes no jogo do loto.

Nas situações presentes na figura 1113, podemos verificar que os alunos apresentam corretamente as resoluções utilizando as estratégias anteriormente referidas. No entanto, verificou-se

que alguns alunos estavam com dificuldades no cálculo de alguns casos e, no que diz respeito à representação na reta numérica, alguns alunos sentiram dificuldades, pois apesar de chegarem ao resultado mentalmente não o associavam à sua representação na reta numérica.

Reflexão da sessão

Do meu ponto de vista, no que toca à resolução de problemas, é de realçar o facto dos alunos terem compreendido e, ainda, de num dos problemas terem surgido estratégias de resolução diferentes, sendo este um aspeto positivo, na medida em que os alunos puderam verificar que poderia ser resolvido de outra forma.

É de destacar o facto dos alunos terem demonstrado compreender a estratégia de cálculo mental, mudança de representação. Esta compreensão foi visível no cálculo das operações, em que os casos presentes envolviam fração e número decimal.

No que concerne à realização do jogo, foi uma situação de ensino e aprendizagem que contribuiu para o desenvolvimento do cálculo mental e escrito, pois os alunos demonstraram conseguir calcular mentalmente, utilizando as estratégias de cálculo. Também é de mencionar que nos momentos ocorridos os alunos demonstraram-se participativos, interessados, motivados e envolvidos no jogo, contribuindo para que o processo de ensino e aprendizagem positivo.

4.2.3. Avaliação final

Posteriormente às sessões desenvolvidas, ocorreu a avaliação diagnóstica, tendo sido implementado o *quiz* de cálculo mental (Anexo 5, p. 104) e a ficha com operações, com o objetivo de perceber a evolução dos alunos ao nível do cálculo mental e escrito.

Cálculo mental

Começando pelo *quiz* de cálculo mental, optei por fazer um com os mesmos casos, mas com apenas uma operação para cada caso, devido ao tempo de intervenção. Este foi realizado por 20 alunos e na sua realização utilizou-se a estratégia que melhor funcionou na realização da avaliação diagnóstica de circular com uma folha pela sala.

Tabela 11 – Percentagem obtida nos diferentes tipos de casos de adição e subtração no *quiz* de cálculo mental.

Respostas Casos	Adição			Subtração		
	Certas (%)	Não responde (%)	Erradas (%)	Certas (%)	Não responde (%)	Erradas (%)
Frações com o mesmo denominador	95	—	5	90	—	10
Frações em que um denominador é múltiplo doutro	70	—	30	65	—	35
Frações com denominadores não múltiplos	65	5	30	55	5	40
Número natural com fração	60	10	30	50	15	35
Número natural com número decimal	65	10	25	45	5	50
Fração com número decimal	55	15	30	55	10	35
Número decimal com fração decimal	60	5	35	65	—	35

Atendendo aos resultados obtidos, de uma forma geral, é possível dizer que houve evolução a todos os aspetos, apesar de ter sido pouco significativa em alguns casos, sendo de realçar o aumento de respostas certas e a diminuição de alunos que não respondem.

Analisando a adição, no que diz respeito ao caso das frações com o mesmo denominador, é possível verificar que praticamente todos os alunos responderam corretamente, em que se verificou a compreensão da regra de adicionar frações com o mesmo denominador.

No caso das frações com denominadores múltiplos, a percentagem de repostas certas é maior do que a de repostas erradas, em que as percentagens são de 70% e 30%, respetivamente. Neste é visível a compreensão da regra de adicionar denominadores diferentes. Apesar desta evolução, ainda se verifica que alguns alunos apesar de considerarem que os denominadores da fração têm de ser iguais, mantêm o numerador inicial.

No entanto, atendendo à estratégia adotada para a realização deste *quiz*, é de realçar a evolução significativa dos alunos nestes casos apresentados, pois no diagnóstico os alunos limitaram-se a concordar e/ou a responder o que o colega, que consideravam mais capacitado, respondia.

Relativamente ao caso das frações em que um denominador é múltiplo doutro, 65% dos alunos responderam corretamente e 30% respondeu incorretamente. Neste caso foi notória a compreensão da regra de adicionar frações com denominadores diferentes. No que toca às repostas erradas, verificou-se o mesmo aspeto do caso anterior.

Quanto ao caso referente ao número natural com fração, 60% dos alunos responderam corretamente, em que se verificou que, de certa forma, os alunos passaram do número natural para fração corretamente e adicionaram corretamente frações com denominadores diferentes. Atendendo às repostas incorretas (30%), foi possível verificar o mesmo erro referido no caso anterior.

Em relação ao caso do número natural com número decimal, também ocorreu evolução comparativamente ao diagnóstico, em que 65% das repostas são certas e 25% são erradas. Neste foi verificado a adição do número natural com o decimal e, no que toca às repostas erradas, pela análise dos resultados referidos pelos alunos, devem-se ao facto dos alunos ainda adicionarem o número natural à parte decimal do número decimal.

No que diz respeito ao caso da fração com número decimal, 55% das repostas são certas e 30% são erradas. É de destacar que os alunos que responderam corretamente usaram a estratégia de mudança de representação corretamente, apresentando o resultado tanto em número decimal como em fração. E, em relação aos que responderam incorretamente, verificou-se que, alguns dos alunos, ainda, adicionar a parte decimal ao denominador e o restante ao numerador e noutros não é perceptível o que os levou a obter tal resultado.

E, por fim, no caso do número decimal com fração decimal, as percentagens obtidas foi de 60% nas repostas certas e 35% nas repostas erradas. Tal como no caso anterior, as repostas erradas

advêm do mesmo motivo. Mas, para além disto, os alunos erram o cálculo e não o uso da estratégia de cálculo mental, sendo este um aspeto, de certa forma positivo, uma vez que a mudança de representação é feita corretamente, o que não aconteceu na avaliação diagnóstica.

Passando para a análise da subtração, no caso das frações com o mesmo denominador, foi visível uma evolução significativa, visto que a maioria dos alunos respondeu corretamente (90%).

No caso referente às frações em que um denominador é múltiplo do outro, foi verificada uma evolução, em que 65% dos alunos responderam corretamente e 35% responderam incorretamente. Contudo, ainda foi visível, em determinados resultados, a subtração dos numeradores e dos denominadores.²

Relativamente ao caso das frações com denominadores não múltiplos, 55% são respostas certas e 40% são respostas erradas. É de realçar que a percentagem de respostas certas aumentou e das respostas erradas diminuiu, sendo, desta forma, notória a evolução dos alunos no cálculo deste caso. Para além disso, é de referir que, pela análise dos resultados os alunos responderam incorretamente, efetuaram uma adição, em vez de uma subtração e, noutros casos, é evidenciada a dificuldade na tabuada.

Quanto ao caso do número natural com fração, ocorreu uma evolução, em que metade dos alunos responderam corretamente e verificou-se que 35% dos alunos responderam incorretamente, tendo sido alguns alunos ainda cometem os mesmos erros que cometeram na avaliação diagnóstica.

No que diz respeito ao caso do número natural com número decimal, apenas 45% dos alunos respondeu corretamente, que comparativamente percentagem obtida na avaliação diagnóstica, foi mais baixa, e a percentagem de respostas incorretas foi de 50%. Analisando a operação presente neste caso, isto pode ter acontecido, devido a ser uma subtração com empréstimo. E verificou-se que os alunos trocaram a operação e em vez de adicionar subtraíram.

Em relação ao caso da fração com número decimal, 55% das respostas são certas e 35% erradas. Neste caso verificou-se que os alunos demonstraram aplicar a estratégia de mudança de representação corretamente.

E, no caso do número decimal com fração decimal, 65% dos alunos responderam corretamente e 35% dos alunos responderam incorretamente. Neste caso foi possível verificar que os alunos nas respostas certas apresentaram o resultado tanto em forma de número decimal como de fração e demonstraram ter utilizado corretamente a estratégia de mudança de representação. Nas respostas erradas verificou-se que os alunos trocaram de operação e em vez de subtraírem, adicionaram e, também, em que subtraem o número presente na parte decimal ao denominador da fração.

Atendendo aos resultados obtidos, foi possível verificar uma evolução significativa do cálculo mental dos alunos, tanto na adição como na subtração, principalmente, no que toca aos casos das frações com o mesmo denominador, das frações com denominadores múltiplos e das frações com denominadores não múltiplos. Contudo, ainda há alguns alunos que, apesar de atenderem ao facto dos denominadores terem de ser iguais, acabam por adicionar os numeradores inicialmente apresentados.

Para além destes casos, também ocorreu uma evolução nos restantes, contudo foi uma ligeira evolução, sendo notória a existência de dificuldades em alguns alunos, uma vez que se verificou que relativamente aos casos que envolvem a estratégia de mudança de representação, os alunos utilizam-na corretamente, mas têm dificuldades em adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes, pelo facto de ser necessário a utilização tabuada. Desta forma, é de realçar que a dificuldade evidenciada na avaliação diagnóstica, não foi visível de uma forma tão abrangente.

Cálculo escrito

Tal como na realização do *quiz* de cálculo mental, a ficha foi realizada por vinte alunos. A tabela 12 abaixo apresenta os resultados obtidos, em percentagem, a cada um dos casos que se encontram presentes na ficha, tanto na adição como na subtração. Tal como na avaliação diagnóstica, nesta análise serão consideradas as respostas certas e erradas, sendo de referir que as respostas são consideradas incompletas quando a explicação não é realizada ou quando não explicam todo o pensamento envolvido.

Tabela 12 – Percentagem obtida nos diferentes tipos de casos de adição e subtração na ficha.

		Adição				Subtração			
		Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)	Não responde (%)	Certas (%)	Incompletas (%)	Erradas (%)	Não responde (%)
Respostas	Casos								
	Frações com o mesmo denominador	95	5	—	—	95	5	—	—

Frações em que um denominador é múltiplo do outro	75	—	25	—	70	5	25	—
Frações com denominadores não múltiplos	65	5	30	—	60	15	25	—
Número natural com fração	55	5	35	5	50	5	35	10
Número natural com número decimal	60	10	25	5	45	—	50	5
Fração com número decimal	45	10	35	10	55	5	40	5
Número decimal com fração decimal	75	—	20	5	40	—	45	15

Pela observação dos resultados obtidos, é possível referir que ocorreu uma evolução comparativamente aos resultados obtidos no diagnóstico, principalmente, no que toca ao aumento da percentagem de respostas certas e à diminuição da percentagem de alunos que não respondem.

Começando pela análise dos resultados obtidos na adição, no caso frações com o mesmo denominador, 95% das respostas dos alunos são certas, tendo sido possível verificar que os alunos compreenderam a regra.

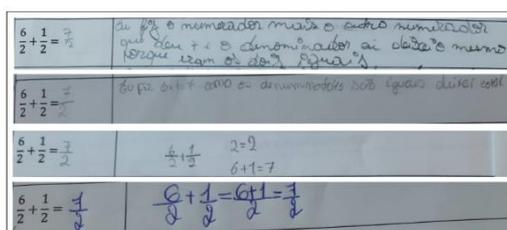


Figura 114 - Exemplo de respostas certas.

No caso das frações em que um denominador é múltiplo de outro, 75% das respostas são certas. Nestas foi visível a compreensão dos alunos na explicação de como pensaram, sendo de realçar as

respostas que referem que tem de se procurar frações equivalentes, aspeto esse que foi discutido nas sessões (Figura 115). E, 25% dos alunos erraram, porque apesar de considerarem que o denominador tem de ser igual, mantêm o numerador inicial e, alguns alunos, ainda cometerem o mesmo erro de adicionar os numeradores e os denominadores (Figura 116).

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{9}{8}$

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{5}{8} + \frac{4}{8} = \frac{9}{8}$ $8=8$
 $5+4=9$

Porque quando temos denominadores diferentes temos que encontrar uma fração equivalente a uma das frações.

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{10}{16} + \frac{8}{16} = \frac{18}{16}$

Como o mesmo denominador das duas, soma-se o numerador das 2 frações.

Figura 115 - Exemplo de respostas certas.

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{7}{12}$

$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{7}{8}$

Figura 116 - Exemplo de respostas erradas.

Relativamente ao caso de frações com denominadores não múltiplos, 65% das respostas são certas, em que se verificou que os alunos utilizaram a regra de adicionar frações com denominadores diferentes (Figura 117).

$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{35}{14} + \frac{12}{14} = \frac{47}{14}$

fiz $2 \times 7 = 14$ em todos denominadores ficaram iguais e somei os numeradores

$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} + \frac{6 \times 2}{7 \times 2} = \frac{35}{14} + \frac{12}{14} = \frac{47}{14}$

resultado

$\frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

eu fiz o numerador mais o outro numerador que deu 7 e o denominador eu deixei o mesmo porque eram os dois iguais.

Figura 117 - Exemplo de respostas certas.

E, 30% são respostas erradas, visto que alunos adicionam os numeradores e os denominadores e houve um caso em que o aluno apenas trocou o denominador, sem efetuar qualquer tipo de cálculo.

$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{11}{9}$

$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} = \frac{11}{8}$

Figura 118 - Exemplo de respostas erradas.

No que toca ao caso do número natural com fração, 55% são respostas corretas, sendo possível verificar que os alunos utilizaram a estratégia de mudança de representação, em que mudaram a

representação do número natural para fração e atenderam a regra de adicionar frações com denominadores diferentes (Figura 119).

Figura 119 - Exemplo de respostas certas.

Ainda neste caso, as respostas consideradas erradas foram 35%, pois adicionam o número natural com a fração e há casos em que mudam o número natural para fração e têm em atenção aos denominadores serem iguais, mas mantêm o numerador inicial (Figura 120).

Figura 120 - Exemplo de respostas erradas.

Em relação ao caso do número natural com número decimal, 60% das respostas são certas, em que se verificou que há mais alunos a utilizarem corretamente a estratégia de mudança de representação e a regra da adição de frações com denominadores diferentes (Figura 121). Contudo, ainda há alunos que apresentam algumas dificuldades, uma vez que houve 25% de respostas erradas, sendo que esta, em alguns casos, os alunos fazem a mudança de representação incorretamente e, ainda, acabam por realizar a adição de frações com denominadores diferentes incorretamente (Figura 122).

Figura 121 - Exemplo de respostas certas.

Figura 122 - Exemplo de respostas erradas.

No caso da fração com número decimal, 45% são respostas certas, em que se verificou que os alunos utilizam a estratégia de mudança de representação correta (Figura 123). Já 35% das respostas

são erradas, uma vez que há alunos que utilizam mal a estratégia de cálculo, mas também há alunos que a utilizam corretamente, mas não realizam corretamente a adição de frações com denominadores diferentes (Figura 124).

$\frac{1}{4} + 0,25 =$	$\frac{1}{4} + 0,25 = \frac{1^{25} + 25}{4 \cdot 25} = \frac{25 + 25}{100} = \frac{50}{100}$
$\frac{1}{4} + 0,25 = \frac{1}{4}$	$0,25 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Figura 123 - Exemplo de respostas certas.

$\frac{1}{4} + 0,25 = \frac{26}{104}$	$\frac{1}{4} + \frac{25}{100} = \frac{26}{104}$
$\frac{1}{4} + 0,25 = \frac{2}{8}$	porque 0,25 é igual a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Figura 124 - Exemplo de respostas erradas.

E, por fim no caso da fração decimal com número decimal, 75% dos alunos responderam corretamente, tendo-se verificado o uso correto da estratégia de mudança de representação e a posterior adição de frações (Figura 125). É de realçar a elevada percentagem de respostas certas, uma vez que na operação ambos os números apresentam décimas. Já 20% responderam incorretamente, pois representaram o número decimal em fração de forma incorreta e adicionaram os numeradores e os denominadores e, noutros casos, adicionavam o numerador da fração ao número decimal (Figura 126).

$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{8}{10}$	$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10}$
$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{3}{10}$	$0,3 = \frac{3}{10}$ os denominadores são iguais então soma os numeradores.
$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{8}{10}$	$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$
$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{8}{10}$	$0,3$ é $\frac{3}{10}$ e depois soma os $\frac{5}{10}$ e $\frac{3}{10}$. A os denominadores são iguais soma os numeradores.

Figura 125 - Exemplo de respostas certas.

$\frac{5}{10} + 0,3 =$	$\frac{5}{10} + 0,3 = \frac{53}{10}$
$\frac{5}{10} + 0,3 =$	$\frac{5+1}{10+3} = \frac{6}{13}$

Figura 126 - Exemplo de respostas erradas.

Passando para a análise da subtração, no caso das frações com o mesmo denominador, 95% das respostas são certas, sendo possível verificar que os alunos compreenderam a regra de subtrair frações com denominadores iguais.

$\frac{8}{17} - \frac{3}{17} = \frac{5}{17}$	$\frac{8}{17} - \frac{3}{17} = \frac{8-3}{17} = \frac{5}{17}$
$\frac{8}{17} - \frac{3}{17} = \frac{5}{17}$	como os denominadores são iguais subtraímos os numeradores e mantemos os denominadores

Figura 127 - Exemplo de respostas certas.

No caso das frações com denominadores múltiplos, 70% são respostas certas, em que se verificou que os alunos compreenderam a regra da subtração de frações com denominadores diferentes, havendo casos em que na explicação referem que procuraram frações equivalentes (Figura 128). Neste caso 25% das respostas são erradas, em que se verificou que os alunos têm a preocupação de igualar os denominadores, contudo mantém o numerador inicialmente apresentado e ainda há alunos que subtraem os numeradores e os denominadores (Figura 129).

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$	quando os denominadores não são iguais procura-se uma fração com os mesmos denominadores e depois subtraímos os numeradores
$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$	
$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$	$\frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$ $8 - 3 = 5$ $10 = 10$

Figura 128 - Exemplo de respostas certas.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$	$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$
$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

Figura 129 - Exemplo de respostas erradas.

No que toca ao caso das frações com denominadores não múltiplos, 60% das respostas são certas e 25% são erradas (Figura 130). Nas respostas certas verificou-se o mesmo que foi referido no caso anterior e no que toca às respostas erradas, houve um o aluno fez o inverso de uma das frações e ainda há alunos que subtraem os numeradores e os denominadores (Figura 131).

$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{2}{12}$	$\frac{5 \times 4}{3 \times 4} - \frac{6 \times 3}{4 \times 3} = \frac{20}{12} - \frac{18}{12} = \frac{2}{12}$
$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{2}{12}$	$\frac{5 \times 4}{3 \times 4} - \frac{6 \times 3}{4 \times 3} = \frac{20}{12} - \frac{18}{12} = \frac{2}{12}$

Figura 130 - Exemplo de respostas certas.

$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{1}{3}$	feito o inverso de $\frac{6}{4}$ para $\frac{3}{2}$ e depois, $\frac{5}{3}$ divide por 2 = $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{6} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} - \frac{9}{6}$
$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} = \frac{1}{3}$

Figura 131 - Exemplo de respostas erradas.

Relativamente ao caso do número natural com fração, 50% das respostas são certas, em que se verifica que os alunos utilizam a estratégia de mudança de representação corretamente e subtraem frações com denominadores diferentes corretamente (Figura 132). E, 35% das respostas são erradas, pois apesar de utilizarem corretamente a estratégia já mencionada, depois apenas têm em atenção o denominador ser igual e mantêm o numerador inicial (Figura 133).

Figura 132 - Exemplo de respostas certas.

Figura 133 - Exemplo de respostas erradas.

Quanto ao caso do número natural com número decimal, 45% das respostas são certas, em que se verificou que alguns alunos calcularam com os números inicialmente apresentados e outros utilizaram a estratégia de mudança de representação (Figura 134).

A percentagem de respostas erradas é de 50%, sendo esta percentagem maior comparativamente à de respostas certas, pois apesar de se preocuparem com o denominador ser igual, mantêm o numerador inicialmente apresentado e também o facto de mudarem o número decimal para fração corretamente, mas depois subtraírem o número natural ao numerador da fração e mantêm o denominador. E, também pode advir do facto de ser uma subtração com empréstimo (Figura 135).

Figura 134 - Exemplo de respostas certas.

Figura 135 - Exemplo de respostas erradas.

No caso da fração com o número decimal, 55% são respostas certas, em que se verificou que os alunos fazem a mudança de representação corretamente, bem como subtraem frações com denominadores diferentes (Figura 136). A percentagem de respostas erradas é de 40% e deve-se ao facto dos alunos, mais uma vez se preocuparem com o facto dos denominadores terem de ser iguais, mas mantêm o numerador inicial e há casos em que os alunos fazem a mudança de representação de forma incorreta (Figura 137).

$0,75 - \frac{2}{10} =$	$0,75 - \frac{2}{10} = \frac{75}{100} - \frac{20}{100} = \frac{75-20}{100} = \frac{55}{100}$
-------------------------	--

Figura 136 - Exemplo de resposta certa.

$0,8 - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$	$\frac{8}{10} - \frac{1}{5} = \frac{8}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$
$0,8 - \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$	Porque 0,8 e $\frac{1}{5}$.

Figura 137 - Exemplo de respostas erradas.

E, por fim no caso do número decimal com fração decimal, 40% de respostas são certas e 45% erradas. Nas respostas certas advém do mesmo motivo apresentado no caso anterior e as respostas erradas devem-se ao facto da mudança de representação não ter sido feita corretamente, sendo de referir que se trata de centésimas, podendo ser uma dificuldade dos alunos e acontece em várias respostas os alunos utilizarem corretamente a estratégia de cálculo, mas depois quando tornam os denominadores iguais acabam por manter o numerador inicialmente apresentado.

$0,75 - \frac{2}{10} = \frac{55}{100}$	$\frac{75}{100} - \frac{20}{100} = \frac{55}{100}$ $75-20=55$ $100=100$
$0,75 - \frac{2}{10} = \frac{55}{100}$	$\frac{75}{100} - \frac{2}{10} = \frac{75}{100} - \frac{20}{100} = \frac{55}{100} = 0,55$
$0,75 - \frac{2}{10} = 0,55$	$\frac{75}{100} = 0,75$ $0,75 - 0,20 = 0,55$

Figura 138 - Exemplo de respostas certas.

$0,75 - \frac{2}{10} = \frac{73}{100}$	$\frac{75}{100} - \frac{2}{10} = \frac{75}{100} - \frac{2}{100} = \frac{73}{100}$
$0,75 - \frac{2}{10} = \frac{73}{10}$	$\frac{75}{10} - \frac{2}{10} = \frac{73}{10}$

Figura 139 - Exemplo de respostas erradas.

Em conclusão, tanto na adição como na subtração é de referir que nos casos das frações com denominadores iguais, em que um denominador é múltiplo doutro e com denominadores não múltiplos a evolução foi significativa. Os alunos demonstraram ter compreendido a regra de adicionar e subtrair frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes. Contudo, quanto à regra com

denominadores diferentes os alunos atendem ao facto de terem de ter frações com denominadores iguais para operar, mas acabam por manter o numerador inicialmente apresentado.

Nos outros casos apresentados verificou-se uma ligeira evolução relativamente ao uso da estratégia de mudança de representação, bem como na utilização da regra de adicionar e subtrair com denominadores diferentes. No entanto, ainda há alunos que revelam dificuldades nestes aspetos, demonstrando que era necessário um maior tempo de trabalho com os alunos nestes últimos casos.

Capítulo V - Conclusões

Este último capítulo apresenta as conclusões deste projeto de investigação da prática conduzida no âmbito do Estudo 1 e 2. Primeiramente, procura dar-se resposta às questões de investigação previamente delineadas. Depois é apresentada uma reflexão acerca do projeto desenvolvido, sendo referido o seu contributo ao nível pessoal e profissional. Por fim, são apresentadas as implicações educacionais, as limitações do estudo e, também, as recomendações para futuras investigações.

5.1. Conclusões do estudo

5.1.1. Que dificuldades possuem os alunos no cálculo mental e escrito?

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico foram ao nível da adição com transporte e na subtração com empréstimo de números naturais. Estas foram evidenciadas em tarefas em que os alunos tinham de calcular mentalmente e explicar como pensaram, bem como na resolução de problemas, sendo de evidenciar que os alunos revelaram não saber utilizar as estratégias de cálculo mental, principalmente nas subtrações com empréstimo. O aspeto mencionado acerca da subtração já foi identificado por Veloso (2015), tendo apresentado esta operação como uma das grandes dificuldades que os alunos possuem.

Para além disto, os alunos sentiram dificuldades nas estimativas, uma vez que grande parte não resolveu de forma correta, demonstrando não saber estimar o resultado de uma operação, o que revelou pouca experiência na realização de tarefas que envolvem estimativas.

No 2.º Ciclo do Ensino Básico, as dificuldades sentidas foram ao nível da adição e da subtração de frações, principalmente nas frações com denominadores diferentes. Este facto também foi verificado por Carrapiço (2016), uma vez que, tal como aconteceu neste estudo, os alunos adicionaram os numeradores e denominador, bem como subtraíram. Isto, porque os alunos acabam por atender às regras memorizadas e não as compreendem, tal como verificou Laranjeira (2017) no seu estudo. Para além disto, também foram sentidas dificuldades nos restantes tipos de casos de adição e subtração, como no caso do número natural com número decimal, do número natural com fração, da fração com número decimal e do número decimal com fração decimal. Nestes casos, a dificuldade dos alunos deve-se ao facto de utilizarem de forma incorreta a estratégia de mudança de representação e também a não saberem adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes. Esta dificuldade evidenciada demonstra ser um aspeto inovador, uma vez que não me deparei com estudos que atendessem a esta dificuldade. Contudo, Carrapiço (2017) verifica uma relação entre o tipo de estratégia a utilizar com a representação do número racional, estando aqui evidente na medida em que os alunos usam a estratégia

de mudança de representação quando numa operação temos um número racional representado em forma de número decimal ou número natural.

5.1.2. Que estratégias de cálculo mental utilizam os alunos?

Antes das sessões desenvolvidas, as estratégias de cálculo mental da adição e subtração com números naturais utilizadas pelos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico eram a de decomposição e o algoritmo. Em alguns casos, as estratégias não eram utilizadas corretamente, na medida em que os alunos nas subtrações com empréstimo utilizavam a estratégia de decomposição, obtendo desta forma uma resposta errada, uma vez que não era a estratégia adequada. Estes factos já eram esperados, uma vez que o mesmo foi identificado na literatura (Velo, 2015), referindo-se não só ao uso das estratégias mencionadas, como também ao facto dos alunos se demonstrarem “(...) pouco à-vontade com as estratégias e até mesmo com a subtração em si (...)” (Velo, 2015, p. 84).

No decorrer das intervenções, as estratégias de cálculo mental utilizadas passaram a ser mais, em que os alunos começaram a utilizar e a aplicar as estratégias já referidas de forma correta, bem como outras estratégias como a de compensar para obter dezenas, subtrair por partes, compensar para obter dezenas no subtrativo e a de compensar para igualar as unidades no aditivo e no subtrativo. De acordo com Teixeira e Rodrigues (2014), para que os alunos desenvolvam o seu repertório é fundamental que haja uma rotina de cálculo mental, tal como aconteceu nesta intervenção.

Atendendo ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, as estratégias de cálculo mental utilizadas na adição e na subtração de números racionais foram a mudança de representação, a utilização de equivalências, a imagem mental e o uso mental do algoritmo, isto é, a regra de adicionar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes. Os alunos antes das intervenções não utilizavam corretamente estas estratégias, sendo que ao longo das intervenções desenvolvidas os alunos começaram a compreender e aplicá-las de forma correta. Este facto, de certa forma, já era esperado, atendendo à literatura de Carrapiço (2017), pois este também verificou que primeiro recorrem a regra memorizadas, cometendo erros devido à falta de compreensão das mesmas e, até mesmo, do que representa uma fração e da relação entre os termos de uma fração e, ainda, verificou que os alunos cometiam erros quanto à mudança de representação de um número racional.

5.1.3. Como pode ser promovido o cálculo mental nos alunos?

Os alunos devem ser solicitados a explicar como calcularam mentalmente, de forma que os restantes alunos conheçam o pensamento do aluno e para que o próprio clarifique o seu pensamento

(Serrazina, 2002). Os alunos devem ser expostos a tarefas que tenham como objetivo promover o cálculo mental (Brocardo, 2011), desta forma, é de realçar o seu papel fundamental no desenvolvimento do cálculo mental, uma vez que através destas ocorre o uso das estratégias de cálculo mental, o que faz com que os alunos as compreendam (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011; Carvalho e Ponte, 2014). A diversidade de tarefas também é um aspeto importante na aprendizagem matemática dos alunos (Ministério da Educação [ME], 2001; Canavarro & Santos, 2012). Assim, é importante expor os alunos a tarefas que requeiram atividade mental, de modo a saberem qual a estratégia mais adequada a determinada situação apresentada, em vez de ser apenas a aplicação das mesmas e a sua adequação a determinada operação.

Juntamente com as tarefas, é importante que sejam criados ambientes de discussão e partilha, na medida em que podem constituir-se uma mais-valia para o desenvolvimento do mesmo dos alunos.,

Para além disto, os jogos, bem como os *quizzes* são um recurso pedagógico bastante benéfico para o processo de ensino e aprendizagem (Alves, 2015; Pacífico & Luiz, 2017) e, também, ao longo das intervenções realizadas, verificou-se que tiveram um papel importante no desenvolvimento do cálculo mental, demonstrando o seu contributo na motivação e no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, é necessário que os alunos estejam expostos a situações em que se necessite do cálculo mental, bem como a momentos de interação, para que este se desenvolva, sendo essencial a consistência e a repetição desta exposição.

5.1.4. Como pode ser promovido o cálculo escrito nos alunos?

Ao longo das sessões verificou-se que o cálculo mental e o cálculo escrito complementam-se, na medida em que se forem propostas atividades de cálculo escrito, o cálculo mental também está presente (Taton, 1996). Isto foi notório ao longo das intervenções, em que, por exemplo, nos jogos, os alunos necessitavam de utilizar o cálculo mental, mas após saberem o resultado, iam explicar como pensaram por escrito, expondo, desta forma, os processos e a estratégia de cálculo mental utilizada. Atendendo a esta característica, foi notória a dificuldade em encontrar estudos em que era possível identificá-la.

Desta forma, as atividades que complementavam o cálculo mental e escrito, como os jogos que foram dinamizados, e, ainda, as interações que proporcionavam os ambientes de discussão e a explicação dos alunos parecem ter resultado em aspetos benéficos para o desenvolvimento de ambos os cálculos.

Algumas das tarefas propostas tinham o intuito de promover o cálculo escrito, como as que envolviam o cálculo de operações, estimativas e enigmas, bem como as de resolução de problemas.

Estas contribuíram para o desenvolvimento das estratégias de cálculo mental e para verificar os erros que os alunos cometiam no cálculo e consolidar e rever aprendizagens relacionadas com o sentido de operação, bem como de número (Carvalho & Ponte, 2014).

Os jogos também são um recurso que contribui para o desenvolvimento do cálculo escrito, quando estes têm uma componente ligada, sendo esta, por exemplo, a de expor o cálculo escrito no quadro. Atendendo a este aspeto, é possível concordar com a perspetiva de Guimarães (2009) quando refere que o cálculo mental contribui para o desenvolvimento do cálculo escrito, pois os alunos aos explicarem como calcularam mentalmente estão a expor o raciocínio que realizaram mentalmente.

Assim, é de referir que quando se executa o cálculo escrito, o cálculo mental encontra-se presente. O cálculo escrito é um tipo de cálculo que regista em papel as etapas de cálculo realizadas de cabeça (Maclellan, 1995; Pinto, 2016), pelo que todo o cálculo escrito é mental.

5.2. Reflexão

A intervenção pedagógica desenvolvida decorreu de forma positiva nos ciclos de ensino que se debruçou, visto que se verificou uma evolução no decorrer das mesmas, nas observações realizadas, nos trabalhos desenvolvidos pelos alunos e nas suas interações.

No decorrer da mesma, os alunos demonstraram-se interessados, participativos, motivados, recetivos às diferentes tarefas desenvolvidas, sendo estes aspetos positivos para o processo de ensino e aprendizagem. Para além disso, foi dada importância à sua participação, sendo, muitas das vezes, o ponto de partida para o decorrer da intervenção.

Relativamente às estratégias adotadas, estas foram sempre de acordo com os objetivos, que foram estabelecidos atendendo às necessidades dos alunos e, também, para que ultrapassassem as dificuldades que foram identificadas inicialmente. Existiu a ocorrência de jogos, *quizzes* e a exploração de material manipulável, que são recursos pedagógicos e que facilitou a aquisição e compreensão das aprendizagens pretendidas. Também eram considerados aspetos relativos à sessão de intervenção anterior, como as conclusões acerca das mesmas e as aprendizagens realizadas, sendo este um aspeto importante, conduzindo a uma prática que vai ao encontro das necessidades dos alunos. Deste modo, considero que estas foram bem aplicadas e contribuíram para o sucesso processo de ensino e aprendizagem.

De modo geral, considero que o trabalho desenvolvido foi positivo, isto, porque foi notória a recetividade dos alunos, assim como a compreensão dos mesmos com os diferentes aspetos relativos ao projeto de intervenção pedagógica. E, foi visível a evolução das capacidades e competências dos

alunos no cálculo mental e escrito, em que é de realçar a utilização de recursos diferenciados, os jogos e os *quizzes*, como do material manipulável, que permitiu que os alunos ultrapassem as dificuldades, a partir da compreensão de determinados aspetos.

Refletindo sobre a relevância do projeto, mais precisamente a intervenção pedagógica desenvolvida nos dois ciclos de ensino, considero que tiveram uma grande importância a vários níveis como o profissional e o pessoal. O facto de este ter sido desenvolvido nos dois ciclos de ensino, deu-me a oportunidade de conhecer a realidade dos mesmos, do trabalho que é desenvolvido pelo professor e dos desafios que este enfrenta ao longo da prática. Permitiu-me aprender com os profissionais que já estão a trabalhar a alguns anos nestes ciclos de ensino e, principalmente, com as professoras cooperantes, que me ajudaram a evoluir tanto a nível profissional como a nível pessoal.

Concluindo, é de realçar todo o trabalho desenvolvido no âmbito do estágio que me permitiu desenvolver e adquirir aprendizagens e competências que irão ser úteis para todo o meu percurso, a nível profissional e pessoal, tendo, desta forma, contribuído significativamente para a minha formação.

5.3. Implicações educacionais

O projeto desenvolvido teve como objetivo desenvolver competências ao nível do cálculo mental e escrito dos alunos, promovendo o uso das estratégias de cálculo mental, que iam para além daquelas que os alunos utilizavam inicialmente. Este aborda um tema ao qual é dado uma grande importância na matemática, estando presente nos documentos normativos, destacando-se como dos principais propósitos do desenvolvimento da capacidade de cálculo ao nível do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (ver Bivar et al, 2013; DGE, 2018). As competências desenvolvidas neste âmbito serão importantes para todo o percurso escolar dos alunos, sendo de destacar a importância que este tem ao longo da vida.

Na intervenção aqui apresentada, realizada nos dois ciclos revelou-se motivadora para os alunos, além de benéfica na construção do seu conhecimento sobre as operações e nas competências de cálculos dos alunos. Este é um aspeto a destacar, na medida em que os alunos se demonstraram empenhados, atentos e participativos.

Para além disto, na realização das tarefas foram valorizados os pensamentos e as ideias dos alunos, tendo sido, desta forma, criados ambientes de interação que promoveram a construção de aprendizagens, que contribuíram para o desenvolvimento do pensamento matemático e de competências ao nível do cálculo mental e escrito dos alunos, além da comunicação matemática destes.

A intervenção aqui documentada, constitui-se assim, uma evidência relevante no mapa de testemunhos de práticas promotoras de competências de cálculo dos alunos. Deste modo, é importante

que os professores considerem introduzir nas suas práticas este tipo de recursos, de uma forma mais regular, pois parece ser benéfico para a construção do conceito de operação dos alunos e consequente sentido de número.

5.4. Limitações do estudo

Neste estudo existiram as suas limitações, principalmente, no que diz respeito ao tempo, em que este era acordado com as professoras cooperantes e com o horário das mesmas. Esta limitação, foi mais sentida no 2.º ciclo, visto que devido a ter pouco tempo de aulas referente aos dias de estágio. Para além disso, é de realçar a situação pandémica que, de certa forma, influenciou as sessões, as lacunas do 1.º ciclo que os alunos do 2.º ciclo apresentavam, sendo notória a dificuldade dos alunos, o que requeria um maior tempo de trabalho com os alunos para a abordagem e compreensão de conteúdos.

5.5. Recomendação para futuras investigações

Considerando o estudo e as conclusões acerca do mesmo, considero que seria pertinente realizar outros estudos acerca deste tema, na medida em que o cálculo escrito é um aspeto novo em estudo e para se verificar se as conclusões de um futuro estudo vão ao encontro deste. Especificando cada ciclo de ensino, no 1.º ciclo seria relevante proporcionar mais atividades que envolvam as estimativas, tendo-se verificado um aspeto que grande parte dos alunos não tinham conhecimento do que eram. Já no 2.º ciclo, aconselham-se mais estudos que envolvam a adição e a subtração de números racionais não negativos e que envolvam as diferentes representações de um número racional.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

https://www.academia.edu/21700435/A_Matem%C3%A1tica_na_Educa%C3%A7%C3%A3o_B%C3%A1sica

Albergaria, I. S. & Ponte, J. P. (2008, January). *Cálculo mental e calculadora*. [Conference Paper]. Tecnologias e educação matemática – Actas do XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática, Lisboa. <https://www.researchgate.net/publication/242309093>

Altrichter, H., Posch, P. & Somekh, B. (1996). *Teachers Investigate their work: An introduction to the methods of action research*. London: Routledge.

<https://kangkholidblog.files.wordpress.com/2018/03/herbert-dkk-teachers-investigate-their-works.pdf>

Alves, R.M.M., Geglio, P.C., Moita, F.M.G.S.C., Souza, C.N.S. & Araújo, M.S.M. (2015). O Quiz como Recurso Pedagógico no Processo Educacional: Apresentação de um Objeto de Aprendizagem. *Anais do XIII Congresso Internacional de Tecnologia na Educação*. http://sefarditas.net.br/ava/oficina_online/apren/quiz1.pdf

Amado, J. & Silva, L. C. S. (2014). Os estudos etnográficos em contextos educativos. In J. Amado (Ed.), *Manual de Investigação Qualitativa em Educação*. (145-169). Imprensa da Universidade de Coimbra.

<https://digitalis->

[dsp.uc.pt/jspui/bitstream/10316.2/35271/1/Manual%20de%20investiga%C3%A7%C3%A3o%20qualitativa%20em%20educa%C3%A7%C3%A3o.pdf](https://digitalis-dsp.uc.pt/jspui/bitstream/10316.2/35271/1/Manual%20de%20investiga%C3%A7%C3%A3o%20qualitativa%20em%20educa%C3%A7%C3%A3o.pdf)

Barbosa, H. H. J. (2007). Sentido de número na infância: uma interconexão dinâmica entre conceitos e procedimentos. *Paidéia*, 17(37), 181-194.

https://www.academia.edu/68168677/Sentido_de_n%C3%BAmero_na_inf%C3%A2ncia_uma_interconex%C3%A3o_din%C3%A2mica_entre_conceitos_e_procedimentos

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo M. C. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Bogdan, R. C. & Biklen S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao

Brocardo, J. (2011). *Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano*. [Conference Paper]. Actas da Conferência ProfMat2011, XXII SIEM, Lisboa: APM. <https://docplayer.com.br/4472423-Uma-linha-de-desenvolvimento-do-calculo-mental-comecando-no-1-o-ano-e-continuando-ate-ao-12-o-ano.html>

Buys, K. (2008). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121-122) Netherlands: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087903954_012

Cadeia, C., Oliveira, M. & Carvalho, P. (2006). Cálculo mental. In P. Palhares & A. Gomes (Eds.), *Mat 1C – desafios para um novo rumo. Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico* (pp. 71-76). Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Cadeia, C. & Sousa, F. (2007). O sentido das operações. O cálculo mental. Os algoritmos. In A. Gomes (Ed.), *Mat 1C – desafio à matemática. Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico* (pp. 101-113). Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Campos, H., Carvalho, A. & Moreira, R. (2015). O Jogo no Ensino e Aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Revista Eletrónica de Educação e Psicologia*, (6), 30–51. http://edupsi.utad.pt/images/PDF/Revista6/Artigo_Jogos_Helena_Campos_Final.pdf

Canavarro, A. P. & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp.99-104). SPIEM. <http://hdl.handle.net/10174/8305>

Carrapiço, R. A. C. (2016). *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6º ano de escolaridade*. [Doctoral dissertation, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/23646>

Carvalho, R., & Ponte, J. P. (2012). Práticas de ensino com cálculo mental. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 361-370). Lisboa: SPIEM. <http://hdl.handle.net/10451/7067>

Carvalho, R. & Ponte, J. P. (2014). O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 31-54). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

https://www.researchgate.net/publication/307168262_O_papel_das_tarefas_no_desenvolvimento_de_estrategias_de_calculo_mental_com_numeros_racionais

Castro, J. P. & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de Número e organização de dados - Textos de Apoio para Educadores de Infância*. Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Lisboa.

https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/sent_num_net.pdf

Correia, M., C., B. (2009). A observação participante enquanto técnica de investigação. *Pensar Enfermagem*, 13(2), 30-36. <https://docplayer.com.br/26395846-A-observacao-participante-enquanto-tecnica-de-investigacao.html>

Coutinho, C. P. (2014). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. (2). Almedina. <https://pt.scribd.com/document/464577525/Metodologia-de-Investigacao-Em-Ciencias-Sociais-e-Humanas>

Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J. & Vieira, S. (2009). Investigação-ação: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista de Psicologia, Educação e Cultura*, 3(2), 355-378. <http://hdl.handle.net/10400.26/5270>

DGE. (2018) *Aprendizagens essenciais de Matemática – Articulação com o Perfil do Aluno*. República portuguesa.

https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf

DEB. (2001). *Curriculo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério de Educação.

<https://www.alvarovelho.net/attachments/article/39/LivroCompetenciasEssenciais.pdf>

Faria, A. F. R. (2014). O cálculo mental na adição: um estudo no 2.º ano de escolaridade. [Master thesis, Instituto Superior de Ciências Educativas de Felgueiras]. Repositórios Científicos de Acesso Aberto de Portugal. <http://hdl.handle.net/10400.26/24412>

Fonseca, K. H. O. (2012). Investigação-Ação: Uma metodologia para prática e reflexão docente. *Revista Onis Ciência*, 1(2), 16-31. <https://revistaonisciencia.com/wp-content/uploads/2020/02/2ED02-ARTIGO-KARLA.pdf>

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (4), 17-29. <http://funes.uniandes.edu.co/14573/>

Guimarães, S. D. (2009). *A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano do ensino fundamental*. [Doctoral dissertation,

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul]. Repositório Institucional da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/84>

Heirdsfield, A. (2000, December 4-7). Mental computation: Is it more than mental architecture? [Paper presentation]. Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education, Sydney. <https://www.aare.edu.au/data/publications/2000/hei00259.pdf>

Janeiro, J. (2007). 13 ideias sobre o cálculo mental. *Educação e Matemática*, 93, 29. <https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/95>

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación acción*. Barcelona: Laertes. <https://pdfcoffee.com/qdownload/kemmis-e-y-mctaggart-1992-como-planificar-investigacion-accion-cap-1-apendices-b-y-c-4-pdf-free.html>

Laranjeira, A. C. F. (2017). *A compreensão da adição/subtração de números racionais (não negativos) representados na forma de fração: um estudo numa turma do 6º ano de escolaridade*. [Master thesis, Instituto Politécnico de Lisboa]. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10400.21/8204>

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa*. (1). Barcelona: Editorial Graó. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2019/07/La-investigacion-accion-conocer-y-cambiar-la-practica-educativa.pdf>

Lupinacci, V. L. M. & Botin, M. L. M. (2004). *Resolução de Problemas no Ensino de Matemática*. Universidade de Pernambuco: Anais do VIII ENEM. <http://sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC18361331034.pdf>

Maclellan, E. (1995). Some mental notes on mental addition. *Support for Learning*, 10(1), 18-21. https://www.academia.edu/9620173/Some_mental_notes_on_mental_addition

Martins, J. A. R. (2011). *O sentido das operações nos alunos do ensino Básico*. [Master's thesis, Universidade do Algarve]. Repositório da Universidade do Algarve. <http://hdl.handle.net/10400.1/3087>

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. In E. Simmt (Ed.), *For the Learning of Mathematics* (pp. 2-8,44). FLM Publishing Association. <https://www.jstor.org/stable/40248053>

Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. *Indagatio Didactica*, 3(1), 5-24. <https://doi.org/10.34624/id.v3i1.4554>

Menezes, L. Rodrigues, C. Novo, S. (2008). *Cálculo Mental: uma aposta forte. Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos.*

http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2007%202008/temas%20matematicos/Cal_Mental.pdf

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Direção Geral de Educação.

http://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/wp-content/uploads/2010/09/Curriculo_Nacional1CEB.pdf

Ministério da Educação. (2004). *Organização Curricular e Programas – 1.º Ciclo do Ensino Básico.* (4). Departamento da Educação Básica.

https://bibliomag.files.wordpress.com/2010/03/prog20_1cicloeb.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf#:~:text=Principles%20and%20Standards%20for%20School%20Mathematics%2C%20published%20by,system%20for%20

Pacífico, M. & Luiz, R. S. (2017). Os jogos no ensino da matemática: contribuições aos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista Tecer – Belo Horizonte, 10(19)*, 127-136. https://www.researchgate.net/publication/326378929_Os_jogos_no_ensino_da_matematica_contribuicoes_aos_anos_iniciais_do_ensino_fundamental

Pinto, N. B. (2016). Saberes para ensinar Cálculo Mental na Escola Primária: programas e manuais pedagógicos em meados do séc. XX. *Anais do 3.º Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática: História da Educação Matemática e Formação de Professores*, 1-14. <http://www.eventos.ufes.br/enaphem/3enaphem/paper/viewFile/2058/119>

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Reys, B. J. & Reys, R. E. (1993). *Mental Computation Performance and Strategy Use of Japanese Students in Grades 2, 4, 6 and 8.* Washington D.C.: National Science Foundation. https://www.academia.edu/es/26222841/Mental_Computation_Performance_and_Strategy_Use_of_Japanese_Students_in_Grades_2_4_6_and_8

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N. & Emori H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 304-326. <https://doi.org/10.2307/749477>

Ribeiro, D., Valério, N. & Gomes, J. T. (2009). *Cálculo Mental - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos*. Escola Superior de Educação de Lisboa. <https://docplayer.com.br/6233170-Programa-de-formacao-continua-em-matematica-para-professores-dos-1o-e-2o-ciclos.html>

Serrazina, L. (2002). Competência matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, (69), 57-60. https://www.researchgate.net/publication/260980012_Compentencia_matematica_e_competencias_d_e_calculo_no_1_ciclo

Taton, R. (1969). *O cálculo mental*. Lisboa: Arcádia.

Teixeira, R. & Rodrigues, M. (2014). Evolução de estratégias de cálculo mental: um estudo no 3.º ano de escolaridade. In A. Pereira, A. Vasconcelos, C. Delgado, C. Silva, F. Botelho, J. Pinto, J. Duarte, M. Rodrigues, M. Alves (Eds.), *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto* (pp. 249-267). Escola superior de Educação do Instituto Politécnico. https://www.si.ips.pt/ese_si/web_gessi_docs.download_file?p_name=F-1578426110/3_ebook_versao_final_web.pdf

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Números e Operações. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 159-214). Lidel – edições técnicas, lda.

Veloso, C. (2015). O uso das estratégias de cálculo mental por alunos do 3.º ano de escolaridade. [Master thesis, Instituto Politécnico de Setúbal]. Repositórios Científicos de Acesso Aberto de Portugal. <http://hdl.handle.net/10400.26/11354>

Vieira, L. & Cruz, O. (2007). Desenvolvimento do sentido do número. In A. Gomes (Ed.). *Mat 1C – desafio à matemática. Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico* (pp. 93-99). Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Anexos

Anexo 1: Ficha de diagnóstico/avaliação.

Ficha de diagnóstico de Matemática	
Nome: _____	Data: _____

1. Calcula mentalmente as seguintes adições e explica como pensaste.

a) $470 + 512 =$ _____ b) $42 + 58 =$ _____ c) $79 + 68 =$ _____

2. Calcula mentalmente as seguintes subtrações e explica como pensaste.

a) $570 - 270 =$ _____ b) $89 - 34 =$ _____

c) $280 - 72 =$ _____ d) $327 - 186 =$ _____

1

3. Completa as seguintes operações.

a) $177 + \underline{\quad} = 377$ d) $124 + \underline{\quad} = 158$

b) $386 - 246 =$ _____ e) $56 - \underline{\quad} = 37$

c) $58 + \underline{\quad} = 79$ f) $100 - \underline{\quad} = 75$

4. Consegues estimar o resultado das seguintes operações?

a) $589 + 103$ é próximo de _____

Explica como pensaste: _____

b) $468 + 231$ é próximo de _____

Explica como pensaste: _____

c) $647 - 321$ é próximo de _____

Explica como pensaste: _____

d) $385 - 159$ é próximo de _____

Explica como pensaste: _____

2

5. Tendo em conta as estratégias de resolução que aprendeste, calcula:

$8754 + 1285 =$ _____ $829 - 542 =$ _____

6. Numa prateleira de um minimercado estavam 147 pacotes de cereais. O senhor Alberto colocou nessa prateleira mais 143 pacotes dos mesmos cereais. Quantos pacotes ficaram na prateleira?

R: _____

7. O senhor Júlio é artesão e produziu 520 miniaturas em um mês. Dessas peças, 149 são miniaturas de chapéus e as restantes são de casinhas. Quantas são as miniaturas de casinhas?

R: _____

3

8. O Romeu tinha um saco com 130 rebuçados. Primeiro, retirou do saco 33 rebuçados para dar ao filho mais velho e, depois, retirou 18 para a filha mais nova. Quantos rebuçados ficaram no saco?

R: _____

9. Descobre o número misterioso, seguindo as indicações.

Sou um número ímpar, o algarismo das centenas é ímpar e não tenho dezenas.

Que número sou?

333 4501 1201

Anexo 2: Ficha de problemas.

Problema – Pastelaria

Num pastelaria confeccionaram-se 124 bolos. Na parte da manhã foram vendidos 57 bolos e na parte da tarde foram vendidos 39. Quantos bolos restaram?

Problema – Parque de estacionamento

Num parque de estacionamento estavam estacionados 986 carros. À tarde saíram 329. À noite voltaram a sair carros, num total de 258. Quantos carros ficaram no parque?

Problema – Campeonato de atletismo

Num campeonato de atletismo, os participantes poderiam inscrever-se em uma de três modalidades, sendo elas: corrida, estafetas e salto. No total inscreveram-se 935 participantes nas modalidades. Do total de atletas, 298 participantes competiram na modalidade de estafetas e 452 participantes na modalidade de salto. Quantos participaram na modalidade de corrida?

Anexo 3: Quiz de cálculo mental (momento diagnóstico).

		Quanto é? $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} =$	Quanto é? $\frac{11}{5} + \frac{6}{5} =$
Quanto é? $\frac{11}{20} + \frac{7}{20} =$	Quanto é? $\frac{5}{4} + \frac{3}{2} =$	Quanto é? $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$	Quanto é? $\frac{4}{9} + \frac{2}{3} =$
Quanto é? $\frac{1}{5} + \frac{3}{2} =$	Quanto é? $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$	Quanto é? $1 + \frac{2}{5} =$	Quanto é? $\frac{2}{2} + 4 =$
Quanto é? $\frac{2}{6} + 3 =$	Quanto é? $2 + 0,5 =$	Quanto é? $4 + 0,75 =$	Quanto é? $6 + 2,3 =$
Quanto é? $\frac{1}{5} + 0,7 =$	Quanto é? $3,2 + \frac{1}{2} =$	Quanto é? $1,2 + \frac{6}{10} =$	Quanto é? $0,2 + \frac{5}{10} =$
	Quanto é? $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} =$	Quanto é? $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} =$	Quanto é? $\frac{12}{9} - \frac{7}{9} =$
Quanto é? $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$	Quanto é? $\frac{5}{8} - \frac{2}{4} =$	Quanto é? $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$	Quanto é? $\frac{5}{3} - \frac{3}{2} =$
Quanto é? $\frac{5}{7} - \frac{1}{2} =$	Quanto é? $4 - \frac{1}{2} =$	Quanto é? $1 - \frac{2}{5} =$	Quanto é? $2 - \frac{1}{4} =$
Quanto é? $2 - 0,5 =$	Quanto é? $3 - 0,25 =$	Quanto é? $6 - 0,8 =$	Quanto é? $0,7 - \frac{1}{5} =$
Quanto é? $\frac{1}{2} - 0,3 =$	Quanto é? $\frac{13}{10} - 0,3 =$	Quanto é? $0,6 - \frac{2}{10} =$	

Anexo 4: Ficha do momento diagnóstico e avaliativo do cálculo escrito.

Nome: _____ Data: _____

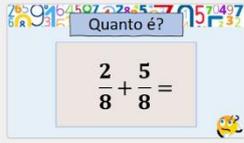
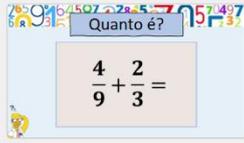
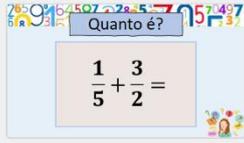
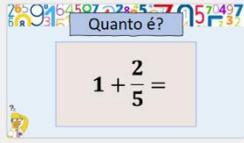
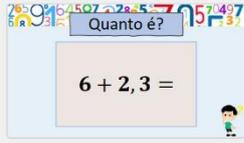
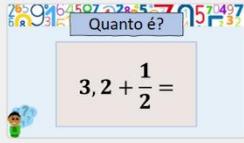
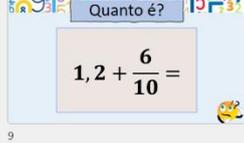
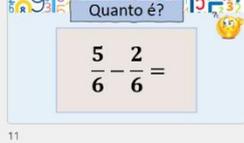
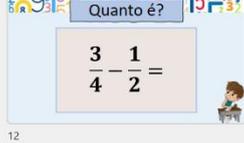
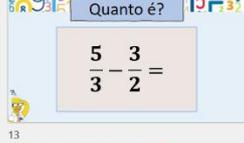
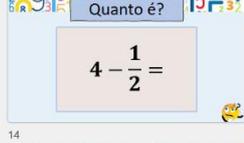
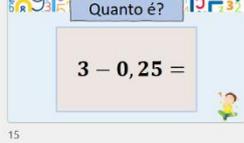
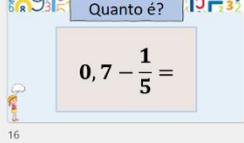
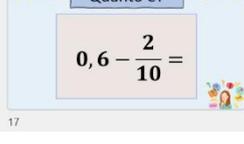
Cálculo Mental - Adição

Resultado	Explica como pensaste
$\frac{6}{2} + \frac{1}{2} =$	
$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} =$	
$\frac{5}{2} + \frac{6}{7} =$	
$3 + \frac{1}{2} =$	
$3 + 0,26 =$	
$\frac{1}{4} + 0,25 =$	
$\frac{5}{10} + 0,3 =$	

Cálculo Mental - Subtração

Resultado	Explica como pensaste
$\frac{8}{17} - \frac{3}{17} =$	
$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} =$	
$\frac{5}{3} - \frac{6}{4} =$	
$4 - \frac{2}{3} =$	
$3 - 0,2 =$	
$0,8 - \frac{1}{5} =$	
$0,75 - \frac{2}{10} =$	

Anexo 5: Quiz de cálculo mental (momento avaliativo).

 <p>1</p>	 <p>2</p>	 <p>3</p>	 <p>4</p>
 <p>5</p>	 <p>6</p>	 <p>7</p>	 <p>8</p>
 <p>9</p>	 <p>10</p>	 <p>11</p>	 <p>12</p>
 <p>13</p>	 <p>14</p>	 <p>15</p>	 <p>16</p>
 <p>17</p>	 <p>18</p>		