



**Universidade do Minho**  
Instituto de Educação

Samuel Rego Marques de Araújo

**A modelação matemática na aprendizagem das  
funções logarítmicas de alunos do 12º ano  
com recurso à calculadora gráfica**





**Universidade do Minho**  
Instituto de Educação

Samuel Rego Marques de Araújo

**A modelação matemática na aprendizagem das  
funções logarítmicas de alunos do 12<sup>º</sup> ano  
com recurso à calculadora gráfica**

Relatório de Estágio  
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico  
e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do  
**Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu**

## DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

### *Licença concedida aos utilizadores deste trabalho*



Atribuição

CC BY

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao meu supervisor, o Professor Doutor Floriano Viseu, que me orientou e motivou neste trabalho, mostrando-se sempre que possível disponível e pronto a colaborar.

À Professora e orientadora Maria Isabel Alves Teixeira Leite pelos conselhos partilhados, pela generosidade e ampla experiência transmitida, que considero inestimável.

À minha colega de estágio Cátia Ferreira pela amizade e constante colaboração.

Aos alunos da turma que me ensinaram muito.

À direção da escola, ao pessoal docente e não docente, pela receptividade e integração na comunidade escolar.

Aos colegas de mestrado, pela excelente companhia e partilha de ideias.

À minha família que sempre me apoiaram e incentivaram ao longo deste percurso.

## DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

## A MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS DE ALUNOS DO 12.º ANO COM RECURSO À CALCULADORA GRÁFICA

### RESUMO

Este trabalho pretende averiguar o contributo da modelação matemática na aprendizagem das funções logarítmicas de alunos do 12.º ano com recurso à calculadora gráfica. Para concretizar esse objetivo, formularam-se as seguintes questões de investigação: (1) Que atividades realizam os alunos com tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas? (2) Que dificuldades têm os alunos na aprendizagem das funções logarítmicas? E na resolução de tarefas de modelação? (3) Que perceções têm os alunos sobre a modelação matemática e a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas? Para dar respostas a estas questões, recorreu-se a diferentes métodos de recolha de dados: questionários (inicial e final), gravações áudio e vídeo das aulas e produções dos alunos.

A intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 12.º ano de uma escola do distrito de Braga. Na implementação desta investigação, a dinamização das atividades de ensino e de aprendizagem articulou-se em torno das tarefas de modelação e, logo, do ciclo de modelação, do ensino exploratório e da utilização da calculadora gráfica.

Os resultados obtidos apontam que os alunos, ao longo da sua escolaridade, não tiveram oportunidades de realizar tarefas de modelação. Os alunos também evidenciam que as tarefas de modelação promoveram o trabalho em grupo, o interesse e a participação de cada um. Na exploração destas tarefas, os alunos percorreram as fases de compreensão do enunciado, da análise dos dados, da construção e validação do modelo e da exploração do modelo, quer em momentos de introdução das funções logarítmicas e das suas derivadas quer em momentos de consolidação dos conhecimentos construídos.

Os alunos apresentaram dificuldades no que toca às propriedades e características das funções logarítmicas, e na representação gráfica e simbólica destas. As fases do ciclo de modelação também dificultaram os alunos, o que evidenciou dificuldades relacionadas à utilização da calculadora gráfica, nomeadamente na realização de regressões estatísticas e na definição de janela de visualização.

Os alunos destacam que as tarefas de modelação matemática contribuíram na aprendizagem das funções logarítmicas, referindo que permitiram uma melhor construção do conhecimento.

**Palavras-chave:** calculadora gráfica, funções logarítmicas, logaritmo, modelação matemática, tarefas de modelação.

# MATHEMATICAL MODELLING IN LEARNING LOGARITHMIC FUNCTIONS USING THE GRAPHING CALCULATOR: A STUDY WITH 12TH GRADE STUDENTS

## ABSTRACT

This work intends to investigate the contribution of mathematical modelling in learning logarithmic functions of 12th grade students using the graphing calculator. To achieve this goal, the following research questions were formulated: (1) What activities do students perform with modelling tasks in learning logarithmic functions? (2) What difficulties do students have in learning logarithmic functions? And in solving modelling tasks? (3) What perceptions do students have about mathematical modelling and the use of the graphing calculator in learning logarithmic functions? To answer these questions, different methods of data collection were used: questionnaires (initial and final), audio and video recordings of classes and students' productions.

The pedagogical intervention was carried out in a 12th grade class of a school in the district of Braga. In implementing this investigation, the dynamization of teaching and learning activities was articulated around the modelling tasks and, therefore, the modelling cycle, exploratory teaching, and the use of the graphing calculator.

The results obtained show that the students, throughout their schooling, did not have opportunities to carry out modelling tasks. The students also show that the modelling tasks promoted group work, the interest and participation of everyone. In the exploration of these tasks, the students went through the phases of understanding the utterance, data analysis, construction and validation of the model and exploration of the model, either in moments of introduction of logarithmic functions and their derivatives or in moments of consolidation of the constructed knowledge.

The students showed difficulties regarding the properties and characteristics of logarithmic functions, and in their graphical and symbolic representation. The phases of the modelling cycle also made it difficult for the students, which highlighted difficulties related to the use of the graphing calculator, namely in performing statistical regressions and in defining viewing windows.

Students emphasize that mathematical modelling tasks contributed to the learning of logarithmic functions, referring that they allowed a better construction of knowledge.

**Keywords:** graphing calculator, logarithmic functions, logarithm, mathematical modelling, modelling tasks,

## ÍNDICE

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS .....               | ii  |
| <i>Licença concedida aos utilizadores deste trabalho</i> .....                            | ii  |
| AGRADECIMENTOS .....                                                                      | iii |
| DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE.....                                                            | iv  |
| RESUMO .....                                                                              | v   |
| ABSTRACT .....                                                                            | vi  |
| ÍNDICE .....                                                                              | vii |
| ÍNDICE DE TABELAS .....                                                                   | x   |
| ÍNDICE DE QUADROS.....                                                                    | xi  |
| ÍNDICE DE FIGURAS.....                                                                    | xii |
| CAPÍTULO 1 .....                                                                          | 1   |
| INTRODUÇÃO.....                                                                           | 1   |
| 1.1. Tema e objetivos.....                                                                | 1   |
| 1.2. Pertinência do estudo.....                                                           | 2   |
| 1.3. Estrutura do relatório.....                                                          | 4   |
| CAPÍTULO 2 .....                                                                          | 5   |
| ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO .....                                                  | 5   |
| 2.1. Enquadramento contextual.....                                                        | 5   |
| 2.1.1. Caracterização da Escola.....                                                      | 5   |
| 2.1.2. Caracterização da Turma.....                                                       | 7   |
| 2.2. Enquadramento teórico .....                                                          | 10  |
| 2.2.1. A história dos logaritmos .....                                                    | 10  |
| 2.2.1.1. Os logaritmos antes de Napier.....                                               | 11  |
| 2.2.1.2. Napier e as tábuas logarítmicas .....                                            | 12  |
| 2.2.1.3. Réguas e instrumentos de cálculos logarítmicos .....                             | 14  |
| 2.2.1.4. Os logaritmos e curvas geométricas .....                                         | 15  |
| 2.2.1.5. O desenvolvimento da teoria dos logaritmos através do cálculo infinitesimal..... | 16  |
| 2.2.1.6. O problema dos logaritmos de números negativos .....                             | 17  |
| 2.2.1.7. O lugar dos logaritmos nos programas atuais .....                                | 18  |

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.2.2. A modelação matemática .....                                                   | 19 |
| 2.2.2.1. O que é a modelação matemática? .....                                        | 20 |
| 2.2.2.2. Dificuldades dos alunos no ciclo de modelação .....                          | 22 |
| 2.2.2.3. As funções matemáticas e a modelação: origem e dificuldades.....             | 24 |
| 2.2.3. A modelação matemática no currículo escolar .....                              | 26 |
| 2.2.3.1. Motivações para implementar a modelação matemática nas metas curriculares    | 26 |
| 2.2.3.2. A modelação matemática nos currículos portugueses .....                      | 31 |
| 2.2.3.3. A modelação matemática enquanto competência matemática incontornável .....   | 35 |
| 2.3. Estratégias de intervenção .....                                                 | 37 |
| 2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem .....                                 | 37 |
| 2.3.2. Estratégias de avaliação da ação .....                                         | 42 |
| CAPÍTULO 3 .....                                                                      | 44 |
| INTERVENÇÃO .....                                                                     | 44 |
| 3.1. Introdução ao estudo da função logarítmica.....                                  | 44 |
| 3.1.1. Compreensão do enunciado da tarefa.....                                        | 45 |
| 3.1.2. Análise dos dados/Construção e validação do modelo .....                       | 46 |
| 3.1.3. Exploração do modelo .....                                                     | 50 |
| 3.1.4. Síntese.....                                                                   | 54 |
| 3.2. Introdução à derivada da função logarítmica.....                                 | 56 |
| 3.2.1. Compreensão do enunciado da tarefa.....                                        | 57 |
| 3.2.2. Análise dos dados/Construção e validação do modelo .....                       | 59 |
| 3.2.3. Exploração do modelo .....                                                     | 61 |
| 3.2.4. Síntese.....                                                                   | 67 |
| 3.3. Sistematização de conhecimentos de funções logarítmicas .....                    | 69 |
| 3.3.1. Compreensão do enunciado/Análise dos dados/ Construção e validação do modelo.. | 70 |
| 3.3.2. Exploração da tarefa.....                                                      | 71 |
| 3.3.3. Síntese.....                                                                   | 77 |
| 3.4. Avaliação do ensino ministrado.....                                              | 79 |
| 3.4.1. Perceções dos alunos sobre a intervenção pedagógica.....                       | 79 |
| CAPÍTULO 4 .....                                                                      | 87 |
| CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES .....                                          | 87 |
| 4.1. Conclusões .....                                                                 | 87 |

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.1. Que atividades realizam os alunos com tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas? .....                                     | 87  |
| 4.1.2. Que dificuldades têm os alunos na aprendizagem das funções logarítmicas? E na resolução de tarefas de modelação? .....                         | 89  |
| 4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a modelação matemática e a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas? ..... | 92  |
| 4.2. Limitações.....                                                                                                                                  | 93  |
| 4.3. Recomendações para futuros estudos.....                                                                                                          | 94  |
| BIBLIOGRAFIA .....                                                                                                                                    | 96  |
| ANEXOS .....                                                                                                                                          | 102 |
| ANEXO 1 – Pedido de Autorização ao Diretor da Escola.....                                                                                             | 103 |
| ANEXO 2 – Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação.....                                                                                     | 104 |
| ANEXO 3 – Questionário Inicial .....                                                                                                                  | 105 |
| ANEXO 4 – Questionário final (realizado online através da plataforma Google Forms) .....                                                              | 107 |
| ANEXO 5 – Planificação das aulas .....                                                                                                                | 110 |

## ÍNDICE DE TABELAS

|                                                                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Taxa de Sucesso da Escola em comparação com a Taxa de Sucesso Nacional .....                                                                                             | 5  |
| Tabela 2: Disciplinas favoritas da turma ( $n = 31$ ) .....                                                                                                                        | 7  |
| Tabela 3: Disciplinas de aprendizagem difícil segundo a turma ( $n = 31$ ) .....                                                                                                   | 7  |
| Tabela 4: Classificação na disciplina de Matemática no final do 11.º ano ( $n = 29$ ) .....                                                                                        | 8  |
| Tabela 5: Síntese da intervenção pedagógica .....                                                                                                                                  | 44 |
| Tabela 6: Frequência dos diferentes tipos de resposta dos alunos na Tarefa 1 ( $n = 15$ ) .....                                                                                    | 45 |
| Tabela 7: Frequência dos diferentes tipos de resposta dos alunos na Tarefa 2 ( $n = 15$ ) .....                                                                                    | 57 |
| Tabela 8: Frequência dos tipos de resposta dos alunos na Tarefa 3 ( $n = 8$ ) .....                                                                                                | 70 |
| Tabela 9: Percepções (%) dos alunos relativamente às funções logarítmicas ( $n = 29$ ) .....                                                                                       | 80 |
| Tabela 10: Percepções (%) dos alunos relativamente às tarefas de modelação ( $n = 29$ ) .....                                                                                      | 81 |
| Tabela 11: Percepções (%) dos alunos relativamente à calculadora gráfica ( $n = 29$ ) .....                                                                                        | 81 |
| Tabela 12: Percepções (%) dos alunos relativamente ao trabalho em grupo ( $n = 29$ ) .....                                                                                         | 82 |
| Tabela 13: Percepções (%) dos alunos relativamente às dificuldades sentidas ( $n = 29$ ) .....                                                                                     | 82 |
| Tabela 14: Frequências das palavras que definem uma tarefa de modelação ( $n = 29$ ) .....                                                                                         | 83 |
| Tabela 15: Frequências das palavras que definem uma função logarítmica ( $n = 29$ ) .....                                                                                          | 83 |
| Tabela 16: Frequências das vantagens das tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n = 29$ ) .....                                                          | 84 |
| Tabela 17: Frequências das desvantagens das tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n = 29$ ) .....                                                       | 84 |
| Tabela 18: Frequências das dificuldades sentidas na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n=29$ ) .....                                                                         | 85 |
| Tabela 19: Frequências das dificuldades sentidas na resolução de tarefas de modelação ( $n = 29$ ) .....                                                                           | 85 |
| Tabela 20: Frequências do contributo das tarefas de modelação e da calculadora gráfica na clarificação de dificuldades na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n = 29$ ) ..... | 86 |
| Tabela 21: Frequências das diferenças entre a resolução de exercícios, de problemas e de tarefas de modelação ( $n = 29$ ) .....                                                   | 86 |

## ÍNDICE DE QUADROS

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1: Síntese de elementos de transição entre as fases de modelação na Tarefa 1 ..... | 54 |
| Quadro 2: Síntese de elementos de transição entre as fases de modelação na Tarefa 2 ..... | 67 |
| Quadro 3: Síntese de elementos de transição entre as fases de modelação na Tarefa 3 ..... | 78 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: O ciclo da modelação matemática (De Lange, 2006, p. 5) .....                                         | 3  |
| Figura 2: Respostas dos alunos A1, A4 e A31 à questão “Gostas de Matemática?” .....                            | 8  |
| Figura 3: Resposta do aluno A14 à questão “Gostas do tópico Funções?” .....                                    | 9  |
| Figura 4: Resposta do aluno A5 à questão “Gostas do tópico Funções?” .....                                     | 9  |
| Figura 5: Resposta do aluno A20 à questão “Em que consista a Modelação Matemática?” .....                      | 9  |
| Figura 6: Resposta do aluno A2 à questão “Já realizaste tarefas de modelação matemática?” ...                  | 9  |
| Figura 7: Resposta do aluno A26 à questão “Costumas usar a calculadora gráfica na resolução de tarefas?” ..... | 10 |
| Figura 8: Movimentos contínuos descritos por Napier .....                                                      | 13 |
| Figura 9: O processo de modelação .....                                                                        | 21 |
| Figura 10: Resposta correta do par P6 à alínea 1 da Tarefa 1 .....                                             | 46 |
| Figura 11: Resposta incorreta do par P3 às alíneas 2 e 3 da Tarefa 1 .....                                     | 46 |
| Figura 12: Opções disponíveis na escolha do modelo exponencial .....                                           | 47 |
| Figura 13: Resposta correta do par P1 à alínea 3 da Tarefa 1 .....                                             | 48 |
| Figura 14: Resposta parcialmente correta do par P13 à alínea 3 da Tarefa 1 .....                               | 48 |
| Figura 15: Resposta correta do par P7 às alíneas 2 e 3 da Tarefa 1 .....                                       | 49 |
| Figura 16: Resposta correta dos pares P4 e P5 à alínea 4 da Tarefa 1 .....                                     | 50 |
| Figura 17: Resposta correta do par P7 à alínea 5 da Tarefa 1 .....                                             | 50 |
| Figura 18: Resposta incorreta do par P6 à alínea 5 da Tarefa 1 .....                                           | 51 |
| Figura 19: Resposta correta do par P13 à alínea 5 da Tarefa 1 .....                                            | 51 |
| Figura 20: Resposta correta do par P10 à alínea 6 da Tarefa 1 .....                                            | 52 |
| Figura 21: Interseção do gráfico do modelo exponencial com a reta de equação $y = 40 \times 10^{12}$ .....     | 52 |
| Figura 22: Gráficos do modelo exponencial, da sua função inversa e da reta $y = x$ .....                       | 53 |
| Figura 23: Resposta correta do par P1 à alínea 1 da Tarefa 2 .....                                             | 58 |
| Figura 24: Resposta parcialmente correta do par P10 à alínea 1 da Tarefa 2 .....                               | 58 |
| Figura 25: Resposta incorreta do par P3 à alínea 1 da Tarefa 2 .....                                           | 59 |
| Figura 26: Resposta correta do par P5 à alínea 2 da Tarefa 2 .....                                             | 59 |
| Figura 27: Resposta incorreta do par P13 à alínea 2 da Tarefa 2 .....                                          | 60 |
| Figura 28: Resposta correta do par P15 à alínea 3 da Tarefa 2 .....                                            | 61 |

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 29: Resposta parcialmente correta do par P7 à alínea 3 da Tarefa 2.....                                 | 61 |
| Figura 30: Resposta incorreta do par P7 à alínea 3 da Tarefa 2.....                                            | 62 |
| Figura 31: Resposta correta do par P1 à alínea 4 da Tarefa 2 .....                                             | 62 |
| Figura 32: Resposta incorreta do par P2 à alínea 4 da Tarefa 2.....                                            | 63 |
| Figura 33: Resposta incorreta do par P5 à alínea 4 da Tarefa 2.....                                            | 63 |
| Figura 34: Cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 realizado com os alunos no quadro .....          | 64 |
| Figura 35: Continuação do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro.....                    | 64 |
| Figura 36: Continuação do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro.....                    | 64 |
| Figura 37: Continuação do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro.....                    | 65 |
| Figura 38: Fim do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro .....                           | 65 |
| Figura 39: Representação gráfica do modelo determinado na calculadora gráfica .....                            | 66 |
| Figura 40: Resposta correta do grupo G2 à alínea 1 da Tarefa 3.....                                            | 70 |
| Figura 41: Resposta parcialmente correta do grupo G4 à alínea 1 da Tarefa 3.....                               | 71 |
| Figura 42: Resposta incorreta do grupo G6 à alínea 1 da Tarefa 3.....                                          | 71 |
| Figura 43: Representações em notação científica de resultados matemáticos obtidos na calculadora gráfica ..... | 72 |
| Figura 44: Resposta correta do grupo G8 à alínea 2 da Tarefa 3.....                                            | 73 |
| Figura 45: Resposta incorreta do grupo G1 à alínea 2 da Tarefa 3.....                                          | 73 |
| Figura 46: Resposta parcialmente correta do grupo G3 à alínea 3 da Tarefa 3.....                               | 73 |
| Figura 47: Resposta parcialmente correta do grupo G4 à alínea 3 da Tarefa 3.....                               | 74 |
| Figura 48: Resposta incorreta do grupo G8 à alínea 3 da Tarefa 3.....                                          | 74 |
| Figura 49: Representação gráfica da inequação que traduz a alínea 3 da Tarefa 3.....                           | 74 |
| Figura 50: Resposta parcialmente correta do grupo G8 à alínea 4 da Tarefa 3.....                               | 76 |
| Figura 51: Resposta incorreta do grupo G2 à alínea 4 da Tarefa 3.....                                          | 76 |
| Figura 52: Resposta parcialmente correta do grupo G3 à alínea 5 da Tarefa 3.....                               | 76 |

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Este capítulo encontra-se dividido em três secções. A primeira secção é dedicada à apresentação do tema em estudo, assim como aos objetivos e às questões de investigação. Na segunda secção, é realçada a pertinência do estudo e, por fim, na terceira secção, é descrita a estrutura do relatório.

#### 1.1. Tema e objetivos

A escolha do tema para a realização da minha intervenção pedagógica incidiu essencialmente pelo interesse e curiosidade acerca da modelação matemática como meio de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Efetivamente, sendo que nunca vivenciei experiências de modelação durante a minha escolaridade, quer no Ensino Regular, quer no Ensino Superior, achei relevante e desafiante elaborar esta investigação em torno deste tema.

A modelação matemática está incorporada nos currículos e programas da Matemática por todo o mundo (Hoe & Dawn, 2015). Em Portugal, a modelação matemática faz parte integrante dos Programas e Metas Curriculares de Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2015) e do Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória (Ministério da Educação, 2017). Atualmente, é dada muita consideração, por numerosos autores (Blum, 2007; Carrejo & Marshall, 2007; Stillman, Blum & Kaiser, 2017), ao estudo e ao contributo da modelação na aprendizagem das ciências na Escola. Além do mais, a modelação está incluída na definição da literacia matemática do *Programme for International Student Assessment* (PISA) da Organização de Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE), como é referido no *PISA 2018 Mathematics Framework*:

A literacia Matemática é a capacidade de um indivíduo formular, aplicar e interpretar a matemática numa variedade de contextos. Inclusivamente raciocinar matematicamente e usar conceitos, processos, factos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenómenos. Ajuda indivíduos a reconhecer o papel da matemática no nosso mundo e a tomar julgamentos e decisões bem fundamentados necessários de cidadãos construtivos, comprometidos e reflexivos. (p. 75)

Um domínio de predileção da matemática para modelar fenómenos naturais é o domínio das funções. Desde o Ensino Básico, os alunos trabalham com relações entre quantidades como a proporcionalidade entre grandezas através, por exemplo, de um problema envolvendo velocidades de automóveis, ou funções quadráticas através de problemas de otimização de áreas de figuras geométricas. É especificado e reforçado no *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) que os alunos deverão ter, ao longo da escolaridade, experiências em modelar com matemática problemas diversos do mundo real, quer sociais quer físicos, e essa prática deverá ser mais presente nos níveis de escolaridade mais altos. De facto, no Ensino Secundário são introduzidos conceitos matemáticos poderosos, tal como a derivação, que permitem descrever e compreender funções mais complexas. Dessas funções, temos as funções logarítmicas introduzidas no 12.º do Ensino Secundário. Numerosos fenómenos do nosso mundo podem ser modelados por essas funções, como, por exemplo, o crescimento de uma população de bactérias ou a magnitude de um sismo.

Perante um problema de modelação matemática, é preciso compreender e estruturar a matemática presente no problema. Para esse efeito, o uso de tecnologia é primordial para identificar e visualizar o modelo que melhor se ajusta ao contexto do problema em estudo. A calculadora gráfica, ferramenta que já está bem implementada na sala de aula do ensino secundário, é indispensável na conceptualização e compreensão das diferentes representações de uma função e, logo, das tarefas de modelação matemática. Com base em tais pressupostos, este trabalho pretende averiguar o contributo da modelação matemática e da calculadora gráfica na aprendizagem de funções logarítmicas de alunos do 12.º ano. Para concretizar este objetivo, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

- Q1. Que atividades realizam os alunos com tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas?
- Q2. Que dificuldades têm os alunos na aprendizagem das funções logarítmicas? E na resolução de tarefas de modelação?
- Q3. Que perceções têm os alunos sobre a modelação matemática e a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas?

## **1.2. Pertinência do estudo**

Blum (2002) define a modelação matemática como o processo que permite tornar um problema do mundo real num modelo matemático. Blum (2002) ainda salienta a diferença entre

a modelação matemática e a matemática aplicada. Por um lado, a modelação foca-se no processo envolvido na transformação de uma situação real numa situação matemática. Por outro lado, a matemática aplicada foca-se no sentido contrário, ou seja, no uso e na utilidade de objetos matemáticos em situações reais. A modelação matemática é então um processo de resolução de problemas. Existem numerosas representações diagramáticas deste processo na literatura, sendo uma delas o diagrama de De Lange (2006):

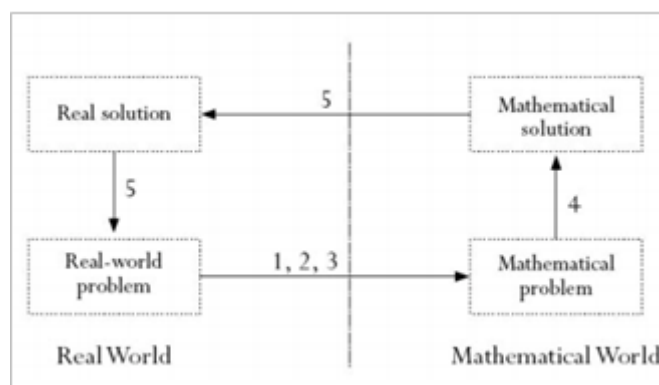


Figura 1: O ciclo da modelação matemática (De Lange, 2006, p. 5)

Segundo o autor, a modelação matemática é um processo que está dividido em cinco fases. A primeira fase (1) consiste em identificar e discutir o problema real. A seguir, o grupo de alunos tenta identificar conceitos matemáticos relevantes para o problema (2) e organizá-los de modo a direcionar-se pouco a pouco para um problema matemático (3). A quarta fase consiste em testar as informações recolhidas e as conjecturas elaboradas de modo a resolver o problema matemático obtido (4). Na última fase (5), os alunos têm que verificar os cálculos efetuados, a coerência dos conceitos matemáticos envolvidos com o problema inicial e a interpretação real das conclusões obtidas na resolução do problema matemático. São numerosos os autores (por exemplo, Niss, 1989), os estudos (por exemplo, Shahbari & Tabach, 2020) e as obras de referência (por exemplo, NCTM, 2000) que defendem o contributo da modelação matemática no desenvolvimento de competências fundamentais para o envolvimento dos alunos nas suas futuras atividades, quer profissionais quer sociais.

As funções são essenciais na representação e na resolução de problemas da vida real (Ponte, 1990; Sawalha, 2018). Como referi anteriormente, as funções logarítmicas estão presentes em numerosas situações do nosso mundo. Segundo Kastberg (2002) e Weber (2002), os alunos têm dificuldades na compreensão e na representação destas funções, pois a exploração deste tipo de funções restringe-se sobretudo aos aspetos teóricos. Para além disso, a escrita

simbólica dos logaritmos e, por extensão, das funções logarítmicas têm tendência em perturbar a sua compreensão (Mulqueeney, 2012). O ensino dessas funções através de problemas e situações da vida real pode ajudar os alunos a melhorar a sua compreensão.

O uso da calculadora gráfica é essencial no ensino da Matemática, pois ela permite verificar cálculos, visualizar a representação gráfica de uma função e conjecturar resultados. A calculadora gráfica cria uma nova dinâmica dentro da sala de aula onde os alunos podem pesquisar e experimentar com essa ferramenta, o que propicia a aquisição de conhecimentos e a motivação dos alunos para aprender. Contudo, é preciso ter alguns cuidados no uso da calculadora gráfica, pois, como sugere Consciência (2013), os alunos podem interpretar incorretamente resultados obtidos a partir de representações gráficas de funções. Na realização das tarefas de modelação na aprendizagem de tópicos das funções logarítmicas em estudo, a calculadora gráfica é um material didático que dispõe aos alunos o recurso a tabelas, à edição de gráficos e à exploração de curvas de regressão que melhor se ajustam aos dados que resultam das tarefas propostas nas aulas.

### **1.3. Estrutura do relatório**

Este relatório está organizado em quatro capítulos. No Capítulo 1, Introdução, é apresentado o tema, o objetivo e as questões de investigação, a pertinência do estudo, e a estrutura do relatório.

No Capítulo 2, Enquadramento Contextual e Teórico, apresenta-se o contexto onde ocorreu a intervenção pedagógica, assim como as características da turma. É feita uma revisão da literatura que serviu de base às metodologias de ensino e aprendizagem que orientaram a intervenção pedagógica e que sustenta a análise dos resultados obtidos.

O Capítulo 3 trata da Intervenção Pedagógica, onde são apresentados os resultados obtidos da análise dos dados recolhidos, resultantes das atividades realizadas, e se faz uma avaliação do ensino ministrado com base nas perceções dos alunos.

Finalmente, no Capítulo 4, Conclusões, Limitações e Recomendações, discutem-se os resultados obtidos através da resposta às questões de investigação formuladas neste trabalho. Ainda são referidas algumas limitações que foram encontradas neste estudo e recomendações para investigações futuras.

## CAPÍTULO 2

### ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo tem como intuito descrever o contexto onde foi realizada a intervenção pedagógica, apresentando a Escola e a Turma. De seguida, apresenta-se o enquadramento teórico que sustenta esta intervenção, clarificando as metodologias de ensino e de aprendizagem adotadas como também os métodos de recolha de dados.

#### 2.1. Enquadramento contextual

Neste subcapítulo é apresentada a caracterização da escola e da turma onde desenvolvi a minha intervenção pedagógica no ano letivo 2019/2020.

##### 2.1.1. Caracterização da Escola

A escola onde desenvolvi a minha prática pedagógica localiza-se no distrito de Braga e incorpora o 3.º ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário. No que diz respeito à oferta formativa e educativa, a escola propõe todos os cursos científico-humanísticos e os seguintes cursos profissionais: Técnico de Apoio Psicossocial; Técnico de Auxiliar de Saúde; Técnico de Comunicação e Serviço Digital; Técnico de Contabilidade; Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos; Técnico de Turismo.

Nos últimos anos, a escola teve uma média de 1075 alunos distribuídos por 43 turmas e cerca de 130 profissionais dos quais 88 são docentes, 10 são assistentes técnicos e 32 são assistentes operacionais. Em termos de resultados escolares, podemos observar na seguinte tabela as taxas de sucesso da Escola de 2014 a 2018.

Tabela 1: Taxa de Sucesso da Escola em comparação com a Taxa de Sucesso Nacional

| Ano letivo<br>Ensino | 2014/2015 |          | 2015/2016 |          | 2016/2017 |          | 2017/2018 |          |
|----------------------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|
|                      | Escola    | Nacional | Escola    | Nacional | Escola    | Nacional | Escola    | Nacional |
| Ensino Básico        | 95,18%    | 91,1%    | 92,81%    | 92,58%   | 90,76%    | 93,68%   | 95,68%    | 94,05%   |
| Ensino Secundário    | 81,67%    | 80,72%   | 89,89%    | 83,3%    | 84,85%    | 83,92%   | 88,46%    | 85,29%   |

O projeto educativo da escola evidencia o lema “uma escola faz-se com todos!” e tem por missão proporcionar formações diversificadas de qualidade aos seus alunos, quer a nível

profissional, quer a nível do indivíduo, assim como promover e potenciar os valores de cada estudante. Este projeto tenciona ligar a escola à comunidade e criar uma cultura de escola onde todos encontrem oportunidades para aprender e condições adequadas para se realizarem plenamente, respondendo às necessidades de cada aluno. Deste projeto sobressaem os seguintes princípios e valores: igualdade de oportunidades para todos (equidade); o respeito e a tolerância pela individualidade de cada um (inclusão); a aceitação do outro (integração); contribuir para a formação de indivíduos autónomos e valorizar a diferença de opiniões (autonomia); promover e potenciar a ligação entre a inovação e a criatividade, valorizar a igualdade de oportunidades no acesso à educação e à formação integral do indivíduo (solidariedade); promover e potenciar os valores da cidadania (responsabilidade) (Projeto Educativo).

Para elaborar este projeto educativo, foi enviado a todos os elementos da comunidade educativa um questionário para uma análise SWOT (*strenghts, weaknesses, opportunities, threats*). Desta análise, sobressai como *pontos fortes* a diversidade de apoio aos alunos, a visão da escola centrada mais nos processos do que nos resultados e a inexistência de taxas de abandono. No que toca aos *pontos fracos*, destacam-se os resultados das provas finais de 3.º ciclo com valores inferiores à média nacional, a resistência à mudança e a pouca valorização/reconhecimento dos cursos profissionais. Em termos de *oportunidades*, evidencia-se a imagem que a comunidade possui da escola, os diversos projetos nacionais e internacionais e os diversos clubes. No que diz respeito aos *constrangimentos*, destaca-se a rede de transportes deficitária, a distância casa/escola e o baixo índice de escolarização dos pais.

A escola propõe diversas atividades, projetos e clubes que fazem parte do quotidiano educativo dos alunos e que foram articulados com as metas do projeto educativo, nomeadamente: O Eco-Escolas; o “Olhar pela Lente”; o Plano Nacional de Cinema; o UP Cávado; o VerdEmCena; o Clube Europeu; o Clube de Multimédia e Comunicação; o Clube Casa do Conhecimento; o Clube de Proteção Civil; o Clube de Solidariedade; o Clube de Rádio; o Clube de Xadrez; o Clube de Programação e Robótica; o Clube de Jogos Matemáticos; O Clube de Astronomia; o programa Erasmus +.

Em termos de infraestruturas, todas as salas de aula da escola estão equipadas com computador e vídeo projetor, possuindo sete delas quadros interativos. A escola também disponibiliza aos alunos um auditório, um pavilhão gimnodesportivo, um ginásio, uma enfermaria, salas de informática e de artes, laboratórios, gabinetes de trabalho de professores e de pequenos grupos e espaços de convívio para os alunos e professores.

Devido à pandemia do vírus covid-19, a escola elaborou diversos documentos orientadores de ensino à distância E@D, quer para os alunos, quer para os docentes. Desses documentos destaca-se o “Plano de Ensino à Distância E@D” que contém diretivas relativamente à lecionação de aulas (síncrona ou assíncrona) e aos diferentes recursos tecnológicos que se podem utilizar, nomeadamente o Microsoft Teams. Este documento também disponibiliza orientações acerca das metodologias de ensino (construtivista), da avaliação das aprendizagens, da monitorização do Plano E@D, do apoio técnico e pedagógico na utilização dos meios tecnológicos e das avaliações finais.

### 2.1.2. Caracterização da Turma

A intervenção pedagógica foi implementada numa turma do 12.º ano do Curso de Ciências e Tecnologias, constituída por 31 alunos, dos quais 17 eram raparigas e 14 eram rapazes, com idade de 16 até 18 anos, sendo todos de nacionalidade portuguesa. A turma não possuía qualquer aluno repetente, mas dois alunos repetiram o 10.º ano durante o seu percurso escolar. Somente um aluno teve uma classificação negativa no ano anterior, na disciplina de Física e Química A. Em média, os alunos têm um agregado familiar composto por 3 ou 4 elementos, sendo que a maioria deles vive com os pais. Em termos de disciplinas favoritas, destacam-se a Matemática e a Física e Química (Tabela 2).

Tabela 2: Disciplinas favoritas da turma (n = 31)

| Disciplinas favoritas | Frequência |
|-----------------------|------------|
| Matemática            | 20         |
| Física e Química      | 17         |
| Biologia e Geologia   | 1          |
| Educação Física       | 7          |
| Português             | 3          |
| Inglês                | 10         |
| Psicologia            | 3          |

Entre as disciplinas a que sentiam mais dificuldades, evidencia-se a disciplina de Português, seguindo-se as disciplinas de Matemática, Física e Química e Biologia e Geologia (Tabela 3).

Tabela 3: Disciplinas de aprendizagem difícil segundo a turma (n = 31)

| Disciplinas favoritas | Frequência |
|-----------------------|------------|
| Matemática            | 7          |
| Física e Química      | 7          |
| Biologia e Geologia   | 7          |
| Educação Física       | 1          |
| Português             | 18         |
| Inglês                | 1          |
| Filosofia             | 1          |

De acordo com as respostas dadas pelos alunos no questionário inicial, cerca de 48% dedicam semanalmente mais de 4 horas para o estudo da disciplina de Matemática, 41% dedicam 3 a 4 horas e 10% estudam 1 a 2 horas por semana.

No que toca ao desempenho na disciplina de Matemática no final do 11.º ano, constata-se que 8 dos alunos que obtiveram 18 a 20 valores no final do 11.º ano dedicam mais de 4 horas por semana no estudo da disciplina de Matemática (Tabela 4). Nenhum aluno obteve uma classificação negativa no final do ano anterior.

Tabela 4: Classificação na disciplina de Matemática no final do 11.º ano (n = 29)

| Desempenho                   | Frequência |
|------------------------------|------------|
| Excelente (18-20 valores)    | 10         |
| Muito Bom (16-17 valores)    | 4          |
| Bom (14-15 valores)          | 9          |
| Satisfatório (10-13 valores) | 6          |
| Insatisfatório (0-9 valores) | 0          |

O desempenho dos alunos à disciplina de Matemática indicia traduzir a apreciação que a maior parte tem por esta disciplina, como exemplificam as respostas dos alunos A1, A4 e A31, evidenciando a importância dos seus desafios no desenvolvimento do raciocínio:

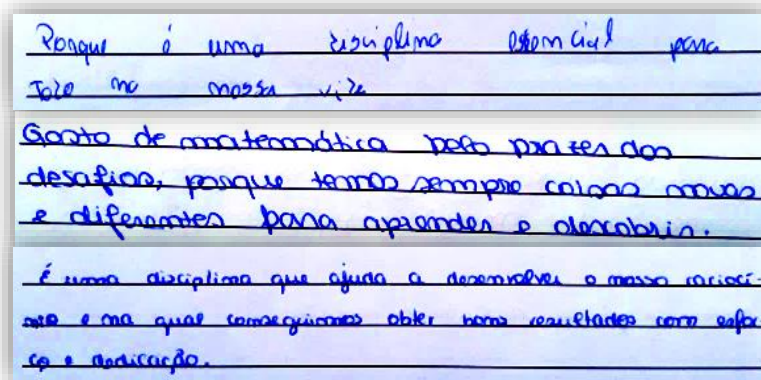
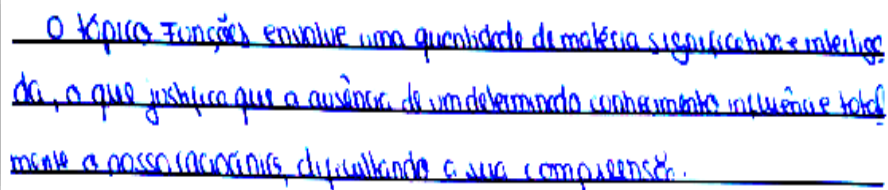


Figura 2: Respostas dos alunos A1, A4 e A31 à questão “Gostas de Matemática?”

Somente dois alunos consideram que não gostam de Matemática, dos quais um acrescentou que sentia “algumas dificuldades e preferia disciplinas relacionadas com línguas”.

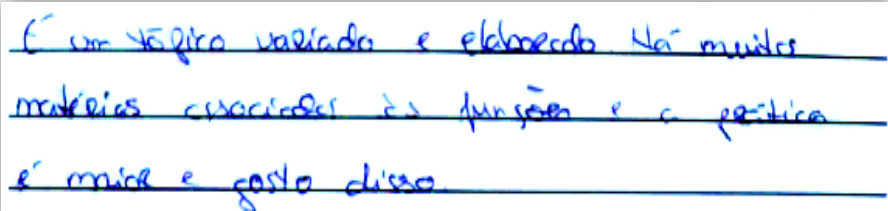
Quanto ao tópico das Funções, sete alunos apontam que não apreciaram o seu estudo. Segundo esses alunos, trata-se de um tópico que envolve conhecimentos abstratos, o que torna a sua aprendizagem difícil e confusa. Além disso, este tópico averigua matéria desde o básico e interliga-se com outros tópicos da Matemática. Lacunas acumuladas dos anos anteriores podem prejudicar a futura compreensão e aprendizagem do tópico, tal como exemplifica a seguinte posição do aluno A14:



O tópico Funções envolve uma quantidade de matéria significativa e interessante, o que justifica que a ausência de um determinado conhecimento influencia totalmente a nossa raciocínio, dificultando a sua compreensão.

Figura 3: Resposta do aluno A14 à questão “Gostas do tópico Funções?”

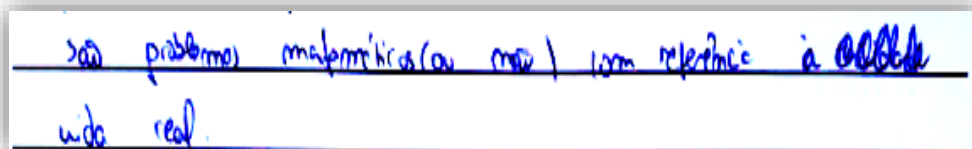
Dos alunos que responderam que gostam do tópico Funções, sobressai na sua justificação tratar-se de um tópico interessante, acessível e cativante, pois envolve a representação gráfica e muita prática com a manipulação de expressões analíticas, tal como ilustra a seguinte afirmação do aluno A5:



É um tópico variado e elaborado há muitas matérias associadas às funções e a prática é mais e gosto disso.

Figura 4: Resposta do aluno A5 à questão “Gostas do tópico Funções?”

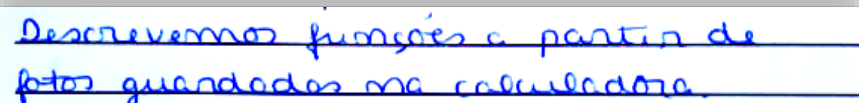
À questão “Em que consiste a Modelação Matemática?”, a maioria dos alunos responde que não sabia o significado desta atividade matemática ou que nunca tinha ouvido falar. Segundo o aluno A27, a modelação matemática consiste “no estabelecimento de um conjunto de ferramentas matemáticas que permitem fazer uma análise teórica de uma situação dada”. O aluno A20 respondeu, mais sucintamente, que era a aplicação da matemática ao mundo real (Figura 5).



são problemas matemáticos (ou mais) com referência à realidade real.

Figura 5: Resposta do aluno A20 à questão “Em que consista a Modelação Matemática?”

Somente três alunos respondem que já realizaram tarefas de modelação. No entanto, no presente ano letivo já resolveram uma tarefa de modelação com recurso à calculadora gráfica. Através do menu “Plot imagem” da calculadora gráfica, os alunos tiveram de descrever o movimento de uma turbina eólica ao longo do tempo, recorrendo a uma curva de regressão, o que é associado à modelação por tão poucos alunos, tal como ilustra a resposta de um deles:



Descrevermos funções a partir de fotos guardadas na calculadora.

Figura 6: Resposta do aluno A2 à questão “Já realizaste tarefas de modelação matemática?”

Todos os alunos possuem uma calculadora gráfica. À pergunta “Costumas usar a calculadora gráfica na resolução de tarefas?”, somente um aluno respondeu que não. Os restantes alunos descrevem situações nas quais costumam usar a calculadora gráfica. Dentro destas, destaca-se, na sua maioria, o uso da calculadora gráfica no estudo/visualização de gráficos de funções, na realização de cálculos mais complexos, na resolução de equações e para conferir resultados obtidos analiticamente (Figura 7).

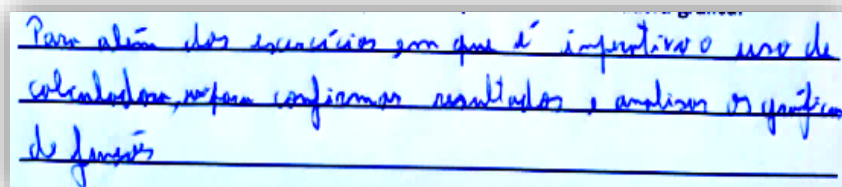


Figura 7: Resposta do aluno A26 à questão “Costumas usar a calculadora gráfica na resolução de tarefas?”

Em suma, e consoante as minhas observações, esta turma é composta por alunos bem-comportados, responsáveis e participativos, que manifestam interesse e empenho na realização de tarefas em grupo. Contudo, existem disparidades na repartição dos alunos na sala de aula, visto que os que têm mais dificuldades estão concentrados em grupos homogêneos, alguns deles mais afastados do resto da turma.

## 2.2. Enquadramento teórico

Esta secção destina-se à sustentação teórica deste relatório, encontrando-se dividida em três partes: a primeira dedicada à história dos logaritmos; a segunda à modelação matemática; e a terceira ao lugar da modelação matemática nos documentos curriculares internacionais e nacionais.

### 2.2.1. A história dos logaritmos

Nesta secção, pretende-se explicar a evolução do conceito de logaritmo ao longo do tempo, percorrendo as suas definições mais primitivas e passando naturalmente pela definição de Napier. Pretende-se também averiguar a versatilidade dos logaritmos enquanto instrumento de cálculo poderoso, assim como ferramenta matemática indispensável no estudo de lugares geométricos atípicos e no cálculo infinitesimal. Aborda-se também o problema dos logaritmos de números negativos e as suas conclusões. Por fim, encontra-se um enquadramento dos logaritmos e das funções logarítmicas nos programas atuais.

### 2.2.1.1. Os logaritmos antes de Napier

As primeiras marcas dos fundamentos da teoria dos logaritmos apareceram na época paleobabilônica (18.º século a.C.) (Trompler, 2002). Os historiadores encontraram tábuas didáticas que continham potências de 2 a 7, de 9, de 16, de 100 e também de 225. Dentro destas tábuas, uma se destaca em particular e responde explicitamente à pergunta ‘a que expoente deve ser elevado um número  $a$  para obter outro valor fixo?’, com a base  $a = 16$  e os seguintes valores fixos: 2; 4; 8; 16; 32; 64. Presume-se que os babilônicos se interessaram pelos números exponenciais e pelas suas tábuas a partir de problemas sobre cálculos de juros, onde se encontram resultados numéricos próximos de resultados que se podem obter através da fórmula dos juros compostos  $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ , onde  $C_n$  é o capital obtido após  $n$  períodos de tempo,  $C_0$  o capital inicial e  $r$  a taxa de juro.

O segundo encontro dos logaritmos com a história situa-se na época de Arquimedes (3.º século a.C.), com o desenvolvimento da sucessão de potência de 2 na sua obra *O Contador de Areia*, com intuito de determinar o limite máximo para o número de grãos de areia que ‘cabem’ no universo. Para esse efeito, o matemático grego teve de estimar o tamanho do universo e pressupor que este era esférico de diâmetro igual a 10 estádios, onde 1 estádio equivale aproximadamente a 176 metros (Trompler, 2002). Sem notações modernas e símbolos para os expoentes, Arquimedes conseguiu manipular números desmesurados e chegar à regra  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ .

Se números são continuamente proporcionais a partir da unidade, e se dois termos desta progressão são multiplicados um pelo outro, o produto será um termo dessa progressão afastado de tantos termos do fator maior quanto o fator menor for a unidade. Este mesmo produto será afastado da unidade por tantos termos menos um quanto os dois fatores juntos da unidade. (Peyrard<sup>1</sup>, 1807)

Segundo Trompler, não se encontra quase nada na literatura acerca dos logaritmos até à obra de Chuquet, matemático francês do 13.º século, *Triparty en la Science des Nombres* (1484), e a obra de Stifel, matemático alemão do 13.º-14.º século, *Arithmetica Integra* (1544). Ambos os matemáticos manipularam expoentes, nomeadamente expoentes negativos e fracionários, e encontraram também a regra enunciado por Arquimedes, sem ter conhecimento das obras dos

---

<sup>1</sup> Este documento encontra-se disponível, sem paginação, em francês, no seguinte link: <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/arenaire.htm>

babilônicos e do matemático grego. No entanto, nenhum deles introduziu os logaritmos, embora tivessem todo o conhecimento necessário para o fazer (Trompler, 2002). Avançamos então para o século 17, onde o desenvolvimento da astronomia e a descoberta das leis de Kepler mostram a necessidade de facilitar os cálculos. Já eram conhecidas dos astrónomos as fórmulas de prostaférese, que permitem substituir uma multiplicação por uma adição ( $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$  e  $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ ), mas que são limitadas pela precisão das tábuas trigonométricas.

### 2.2.1.2. Napier e as tábuas logarítmicas

John Napier (ou Neper), matemático escocês, publica em 1614 *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* e em 1619, póstumo, *Mirifici Logarithmorum canonis constructio*. O primeiro tratado descreve (“descriptio”) os princípios e regras utilizadas pelo autor na construção (“constructio”) das tábuas logarítmicas (Trompler, 2002). No prefácio do primeiro tratado, Napier indica claramente que não há nada mais difícil no cálculo que a multiplicação, a divisão e a extração de raízes quadradas ou cúbicas, o que o motivou a encontrar vários métodos para facilitar os cálculos, mas que nenhum, segundo ele, chega perto da eficácia dos logaritmos (Napier, 1614). Ainda no primeiro tratado, o matemático escocês define os logaritmos como sendo números que correspondem a números proporcionais e de diferenças iguais. Na construção etimológica da palavra logaritmo, encontra-se duas raízes grega. A primeira, *logos*, que significa “razão” (de uma progressão aritmética) e a segunda, *arithmos*, que significa “número” e daí o significado de logaritmo: “número de razões”. Napier construiu tábuas de logaritmos de seno, onde o “seno” representava, naquela época, a medida de um segmento numa circunferência de raio arbitrário, que se designava por “seno total”, e não a razão desse segmento com o raio. Com base num “seno total”, ou raio, de  $10^7$ , Napier desenvolve uma progressão geométrica de razão  $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ , à qual faz corresponder uma progressão aritmética (Boyer & Merzbach, 2011; Trompler, 2002). Obtém-se então  $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$ , onde  $L$  é o logaritmo do número  $N$  segundo a definição de Napier. Assim, o logaritmo de  $10^7$  é 0, o logaritmo de  $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^1$  é 1 e assim por diante. É de salientar que a noção de base para os logaritmos ainda não existia naquela época, mas se se dividir a definição de logaritmo segundo Napier por  $10^7$ , pode-se

considerar que a base com a qual este matemático trabalhava era  $\frac{1}{e}$ , pois  $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$  (Boyer & Merzbach, 2011).

Numa primeira análise, esses logaritmos são discretos, pois trata-se, no fundo, de sucessões, mas a visão de Napier dos logaritmos era uma visão contínua. Ele imaginou dois movimentos ligados, um ponto  $G$  sobre um segmento  $[TS]$  tal que a velocidade do ponto  $G$  seja proporcional à distância  $GS$  e um ponto  $C$  sobre uma semirreta  $\vec{Bx}$  movendo-se com velocidade constante, igual à velocidade inicial do ponto  $G$  (Figura 8).

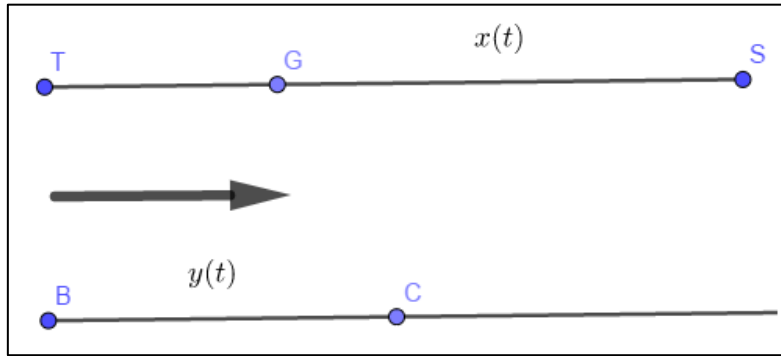


Figura 8: Movimentos contínuos descritos por Napier

Napier descreveu então a relação, a cada instante, da distância  $BC$  em função da distância  $GS$ , onde  $GS$  é o logaritmo da distância  $BC$  (Boyer & Merzbach, 2011; Trompler, 2002). Com notações atuais, pode-se verificar que a definição de Napier corresponde a um sistema de logaritmos de base  $\frac{1}{e}$ . Seja  $GS = x(t)$ ,  $BC = y(t)$ ,  $TS = x(0)$ ,  $x'(0) = v_0 = 10^7$ . Pela definição geométrica de Napier, obtém-se a seguinte equação diferencial:  $x'(t) = -kx(t)$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,  $x(t) = TS \times e^{-\frac{v_0 t}{TS}}$ . Sendo a velocidade do ponto  $C$  constante igual a  $v_0$ , tem-se que  $y(t) = v_0 t$  e obtém-se a seguinte relação:  $x = TS \times e^{-\frac{y}{TS}}$ . Isto é,  $\frac{y}{10^7} = -\ln\left(\frac{x}{10^7}\right)$  ou  $\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right)$ .

Joost Bürgi, matemático suíço, imaginou e inventou, independentemente e antes da publicação dos trabalhos de Napier, os logaritmos utilizando um processo semelhante ao matemático escocês (Trompler, 2002). Ele faz corresponder uma progressão geométrica de primeiro termo  $10^8$  e de razão  $\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$  a uma progressão aritmética de primeiro termo 0 e de razão 10 (Trompler, 2002). Bürgi publica as suas tábuas em 1620, mas como as tábuas de Napier já tinham percorrido todo o continente europeu, estas ficaram por ser poucas utilizadas e

esquecidas (Trompler, 2002). No entanto, nenhum deles considerou o logaritmo de 1 como sendo igual a 0, o que implica que não existe nenhum isomorfismo entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos seus logaritmos (Trompler, 2002). Consequentemente, a regra primordial dos logaritmos não se aplica para todos os números:  $\log ab \neq \log a + \log b$ . Com intuito de aperfeiçoar as tábuas de Napier e a construção dos logaritmos, Henry Briggs, matemático inglês, encontrou-se com ele em 1615 e ambos concordaram que seria mais simples e eficaz construir uma tábua cujo logaritmo de 1 seria igual a 0 e o logaritmo de 10 seria igual a 1 (Boyer & Merzbach, 2011; Thomas & Williams, 2009<sup>2</sup>). Briggs publicou em 1624 as suas tábuas *Arithmetica logarithmica* que contêm logaritmos de números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000. A partir desta data, as propriedades algébricas dos logaritmos como são conhecidas são perfeitamente válidas e definidas:  $\log(a \times b) = \log a + \log b$ ;  $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ ;  $\log a^q = q \times \log a$ , onde  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  e  $q \in \mathbb{Q}$ . Em 1628, Adriaan Vlacq, matemático holandês, publicou uma versão traduzida em francês e completada pelos 70 000 inteiros que faltavam nas tábuas de Briggs (Boyer & Merzbach, 2011; Thomas & Williams, 2009). Estas tábuas encontraram um sucesso imediato e foram utilizadas até à primeira metade do século XX, antes de serem pouco a pouco substituídas por calculadoras (Trompler, 2002).

### 2.2.1.3. Régua e instrumentos de cálculos logarítmicos

Após a inovação das tábuas de logaritmos, nasceu naturalmente a ideia de relacionar esses números a um instrumento de medida de modo a facilitar os cálculos. Edmund Gunter, astrónomo inglês, concebeu a escala logarítmica que usa o logaritmo de uma grandeza em vez da grandeza propriamente dita (Cajori, 1910). Ele completou esta escala com logaritmos de funções trigonométricas e juntou o todo numa régua, ou escala, designada por ‘Escala de Gunter’ (Cajori, 1910). Esse instrumento de medida destinado à navegação permitia realizar multiplicações e divisões de comprimentos ao adicionar ou retirar esses comprimentos com recurso a um compasso e com base nas propriedades algébricas dos logaritmos. Os princípios fundamentais da ‘Escala de Gunter’ são descritos no ‘*Canon triangulorum*’ de 1620 e no ‘*Description and use of the sector, cross-staff and other instruments*’ de 1624 (Cajori, 1910). Nos anos a seguir, vários autores britânicos dedicaram-se a aperfeiçoar e construir instrumentos de medida deslizantes, que

---

<sup>2</sup> Este documento consistia num catálogo que incorpora livros e manuscritos relacionados com a história da computação, disponível no seguinte link: <https://cse.umn.edu/cbi/erwin-tomash-library-history-computing>

não necessitavam do uso de compassos. Edmund Wingate inventou a primeira régua de cálculo deslizante, da qual explica os seus fundamentos em várias publicações, nomeadamente no '*Of natural and artificial arithmetic*', em 1630. Em 1632, William Oughtred apresentou a primeira "circunferência" de cálculo na sua obra '*The circle of proportion and the horizontal instrument*' (Cajori, 1910). Durante a segunda metade do século XVIII, a régua de cálculo foi aperfeiçoada por numerosos científicos britânicos, principalmente a nível de precisão de cálculos e somente se espalhou no resto do continente a partir do século XIX (Cajori, 1910). A régua de cálculo é considerada como a mãe das calculadoras numéricas e tornou-se obsoleta a partir da aparição destas por volta dos anos 70 do século XX (Tanonaka, 2008).

#### 2.2.1.4. Os logaritmos e curvas geométricas

Durante o século XVII, numerosos matemáticos de renome estudaram curvas geométricas que tinham ligações intrínsecas com os logaritmos, quer explicitamente (por exemplo, a representação gráfica de uma variável e do seu logaritmo), quer subjacentemente (por exemplo, a área de uma hipérbole). Torricelli, matemático italiano e discípulo de Galileu, foi provavelmente um dos primeiros a representar graficamente a curva de equação  $x = \log y$ , ou seja, um dos primeiros a representar o gráfico da função logarítmica, o qual designa por 'linha logarítmica ou neperiana' numa correspondência com Cavalieri, outro matemático e discípulo de Galileu (Boyer & Merzbach, 2011; Trompler, 2002). Descartes, matemático francês, inventou, em 1638, a representação em coordenadas polares da relação entre uma variável e o seu logaritmo. Ele a descreve como sendo a curva que faz ângulos iguais com todos os raios traçados a partir da origem. No entanto, não lhe atribuiu equação e, sobretudo, não fez qualquer ligação com os logaritmos. Torricelli estudava na altura várias espirais e com recurso ao cálculo infinitesimal reinventou, em 1645, a espiral logarítmica (Boyer & Merzbach, 2011; Trompler, 2002). Esta curva foi principalmente estudada por Jacques Bernoulli, matemático suíço, que demonstrou as suas propriedades de invariância. Ele ficou tão fascinado por essa curva e pelas suas propriedades que requisitou que a '*spira mirabilis*' (nome dado pelo matemático a espiral logarítmica) fosse gravada no seu túmulo (Boyer & Merzbach, 2011).

Outra curva que é ligada aos logaritmos é a hipérbole. Grégoire de Saint-Vincent estudou a quadratura da hipérbole na sua obra '*Opus Geometricum*', publicada em 1647. Nesta obra, Saint-Vincent mostra que "à medida que a abscissa aumenta geometricamente, a área debaixo da curva aumenta aritmeticamente" (Boyer & Merzbach, 2011, p. 326). Portanto, sem mencionar os

logaritmos, Saint-Vincent chegou à conclusão de que  $\int_a^b \frac{1}{x+1} dx = \ln(b+1) - \ln(a+1)$ , onde  $[a, b]$  é um intervalo de  $\mathbb{R}^+$ . Somente em 1649 é que António de Sarasa, amigo de Saint-Vincent, fez a ligação entre o comportamento da área debaixo da curva de uma hipérbole e os logaritmos. Huygens foi, em 1666, o primeiro a calcular valores aproximados da área sobre uma hipérbole, com base nos trabalhos de Saint-Vincent e nas tábuas de logaritmos (Trompler, 2002).

### 2.2.1.5. O desenvolvimento da teoria dos logaritmos através do cálculo infinitesimal

A descoberta do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz na segunda metade do século XVII permitiu aprofundar significativamente o estudo dos logaritmos e, em consequência, o estudo do cálculo infinitesimal (Trompler, 2002). Nicolaus Mercator, matemático dinamarquês, publicou em 1668 *Logarithmotechnia*. Nesta obra, ele mostra métodos aperfeiçoados de cálculo de logaritmos baseado nos métodos de Napier e Briggs e, sobretudo, aproximações de séries de logaritmos. Com base nos trabalhos de Saint-Vincent e Sarasa, integra termo a termo da série  $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$  para valores de  $a = 0,1$  e  $a = 0,21$  e ligar os seus resultados com os logaritmos para obter uma aproximação da área debaixo da curva de uma hipérbole, mas sem escrever que esta série é igual a  $\ln(1 + a)$  (Trompler, 2002). Resultados semelhantes foram obtidos por Newton em 1667, sem os publicar, a partir da área debaixo da curva de uma hipérbole no intervalo  $[0, x]$  onde ele escreveu o desenvolvimento em série de  $\ln(1 + x)$  (Boyer & Merzbach, 2011):

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Na mesma altura, Pietro Mengoli, matemático italiano que cresceu sob influência de Torricelli e Saint-Vincent, descobriu que a série harmónica alternada  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  é igual a  $\ln 2$  (Boyer & Merzbach, 2011). Em 1676, Leibniz definiu os fundamentos e a notação simbólica do cálculo diferencial e, derivando a integral  $\int \frac{dy}{y}$ , concluiu que a curva obtida era logarítmica (Boyer & Merzbach, 2011; Trompler, 2002). Em 1685, John Wallis, matemático inglês, desenvolveu a teoria dos logaritmos no seu *Algebra* onde começa com duas progressões  $1, 2, 4, 8, \dots$  e  $0, 1, 2, 3, \dots$  para depois generalizar com  $1, r, rr, r^3, r^4, r^5, r^6, \dots$  e  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  e sublinha que: “Esses expoentes são chamados logaritmos, o que são números artificiais, de tal modo que a adição e a subtração destes correspondem à multiplicação e à divisão dos números naturais” (Cajori, 1913, p. 37). Segundo Trompler (2002), esta é

provavelmente a primeira vez, na época moderna, que os logaritmos são definidos como sendo expoentes. Em 1694, John Bernoulli e Leibniz discutiram, por meio de cartas, a construção da representação gráfica das curvas exponencial-potências  $x^x = y$  (Cajori, 1913). Bernoulli, através de uma construção geométrica e da definição moderna do logaritmo, mostrou que a curva logarítmica é interligada à equação  $a^x = y$ , onde  $x$  é o logaritmo de  $y$  na base  $a$ . Ele omitiu mencionar a definição moderna dos logaritmos e a propriedade  $x \log x = \log y$  que lhe permitiu construir a curva. Leibniz respondeu-lhe com ambas as equações  $x^x = y$  e  $x \log x = \log y$  para completar o trabalho do seu colega (Cajori, 1913).

#### 2.2.1.6. O problema dos logaritmos de números negativos

Durante os séculos XVII e XVIII, os matemáticos estavam, em geral, reticentes em trabalhar com números negativos e mais particularmente com números imaginários. Propriedades e operações com esses números deviam ser meticulosamente demonstradas de modo que fossem aceites pela comunidade científica (Cajori, 1913). Este conflito entre os matemáticos e esses números sobressai através de uma correspondência entre Leibniz e Bernoulli que se iniciou em 1712 sobre o logaritmo de números negativos. Leibniz afirmava num artigo publicado nesse ano que  $-1$  não tinha um logaritmo real, mas sim imaginário. Ele já tinha abordado esse assunto com Bernoulli através de uma carta, antes da publicação do artigo, e este não concordava com a demonstração. Daí, nasceu uma discussão epistolar sobre a existência de logaritmos de números negativos e que somente viu uma conclusão definitiva com os resultados apresentados por Euler em 1749 (Cajori, 1913). Efetivamente, Leibniz e Bernoulli não conseguiam chegar a um acordo em relação ao logaritmo de um número negativo. Leibniz insistia que  $\log(-x)$ , onde  $x$  é um número positivo, não existia, enquanto Bernoulli afirmava que  $\log(-x) = \log(x)$  e que  $\log(-1) = 0$ . Entretanto, Roger Cotes, matemático inglês, estabeleceu em 1714 a seguinte relação  $i\varphi = \log(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  a partir da área descrita por um quarto de uma elipse girando à volta de um dos seus eixos, mas sem fornecer qualquer explicação ou significado ao logaritmo desse número imaginário (Cajori, 1913; Trompler, 2002).

Ainda acerca dos logaritmos de números negativos, D'Alembert partilhava a mesma noção que Bernoulli, isto é, que  $\log(-x) = \log(x)$  (Boyer & Merzbach, 2011). Em 1747, Euler demonstrou rigorosamente a D'Alembert que o logaritmo de números negativos é puramente imaginário. A partir da fórmula geral de um número complexo (designada por fórmula de Euler)  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , onde  $\theta$  é um ângulo qualquer em radiano, Euler mostra que, como  $e^{i\pi} =$

$-1$ , então  $\ln(-1) = i\pi$ , e, logo, chega-se à conclusão acima escrita. Em 1749, Euler vai pôr fim à controvérsia inicialmente gerada por Leibniz e Bernoulli ao publicar demonstrações rigorosas (Boyer & Merzbach, 2011; Euler, 1751). Um resultado fundamental desta publicação mostra que qualquer número complexo possui uma infinidade de logaritmos. Além do mais, Euler, no seu *Elements of Algebra*, publicado em 1770, descreve nitidamente a teoria dos logaritmos e implementa a sua definição moderna:

Retomando a equação  $a^b = c$ , devemos começar por notar que, na doutrina dos Logaritmos, assumimos a base  $a$ , um número escolhido arbitrariamente, e supomos que esta base preserva invariavelmente o seu valor assumido. Isso sendo estabelecido, escolhemos o expoente  $b$  tal que a potencia  $a^b$  torna-se igual ao número  $c$ ; neste caso, o expoente  $b$  é o logaritmo do número  $c$ . (p. 63)

A definição publicada por Euler é a definição utilizada atualmente nas metas curriculares de Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2015). Em paralelo, a noção de função foi-se desenvolvendo com grandes nomes da Matemática e de outras áreas científicas, nomeadamente a Física e a Termodinâmica (Ponte, 1990). De Newton com a designação de variável dependente a outra quantidade, passando por Leibniz com a introdução dos termos ‘função’, ‘constante’, ‘variável’ e ‘parâmetro’, até Fourier e Dirichlet com a distinção da representação gráfica da expressão analítica, o que seguiu para a formulação da definição como tal a conhecemos atualmente. O conceito de função foi evoluindo e aperfeiçoado para responder à necessidade de estudar problemas concretos do nosso mundo (Ponte, 1990).

#### 2.2.1.7. O lugar dos logaritmos nos programas atuais

No Programa e Metas Curriculares Matemática A (Ministério da Educação e Ciência, 2015) em vigor, os logaritmos e as funções logarítmicas fazem parte do domínio de conteúdo “Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)” do 12.º. Neste, são abordados os seguintes conteúdos: Juros compostos e número de Neper<sup>3</sup>; Funções exponenciais; Funções logarítmicas; Limites notáveis; Modelos exponenciais. O programa sugere começar o domínio “Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas” com o cálculo de juros compostos, através de resolução de problemas, para introduzir ao aluno o número de Neper  $e$ . Em seguida, vem o estudo das propriedades (monotonia; continuidade; limites; propriedades algébricas) da função exponencial de base  $a \neq 1$  definida nos números racionais pela expressão  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ . Segue a

---

<sup>3</sup> Em Portugal, usa-se o nome Neper em vez do nome original Napier.

extensão ao caso real e a definição das funções exponenciais de base  $a \neq 1$  com determinadas passagens ao limite e admitindo alguns resultados ‘intuitivos’, sem prova, assim que as suas propriedades. É estudada a função exponencial natural de base  $e$  e a relação com o limite da sucessão de termo geral  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Por fim, é proposto o cálculo da derivada da função exponencial através do limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ , que é admitido (Ministério da Educação e Ciência, 2015).

A função logarítmica de base  $a \neq 1$  é introduzida como bijeção recíproca da função exponencial de base  $a \neq 1$ . Define-se da mesma forma o logaritmo decimal e o logaritmo neperiano. Em seguida, estabelecem-se a monotonia, o sinal, os limites e as propriedades algébricas das funções logarítmicas através das propriedades das funções exponenciais e da bijeção. Estuda-se o cálculo das derivadas das funções logarítmicas e da função  $a^x$ ,  $a > 0$  e a derivada da função  $x^\alpha$ ,  $\alpha$  real,  $x > 0$  (Ministério da Educação e Ciência, 2015).

O programa ainda sugere o estudo dos limites notáveis  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k}$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ , que comparam o crescimento polinomial com o crescimento exponencial e logarítmico. Também é sugerido a resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas (Ministério da Educação e Ciência, 2015).

No que toca ao conteúdo “Modelos Exponenciais”, é estudado a equação  $f' = kf$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , assim que as suas soluções, como o modelo matemático que se ajuste melhor à evolução de algumas populações, à temperatura de um sistema ou ao decaimento de uma substância radioativa. Ainda é proposto a resolução de problemas de aplicação, envolvendo a equação  $f' = kf$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Porém, este conteúdo não faz parte das Aprendizagens Essenciais e o estudo das funções logarítmicas através de problemas concretos de modelação é omitido (Ministério de Educação, 2018). Para além disso, o NCTM sugere que os alunos devem manipular escalas de medidas não lineares, nomeadamente a escala logarítmica, com intuito de compreender como estas escalas permitem analisar dados e construir modelos matemáticos fundamentais na representação de fenómenos reais (NCTM, 2000).

### 2.2.2. A modelação matemática

Esta secção trata de, à luz da literatura, definir o conceito de modelação matemática, averiguar as dificuldades que os alunos podem encontrar perante uma atividade de modelação e evidenciar a profunda ligação que existe entre as funções, em particular as funções exponenciais

e logarítmicas, e a modelação de fenómenos reais. Por último, pretende-se investigar as eventuais dificuldades que os alunos podem sentir no estudo destas funções e se estas podem ser ultrapassadas através de tarefas de modelação.

#### **2.2.2.1. O que é a modelação matemática?**

Nos últimos anos, a utilização de modelos matemáticos no ensino e na aprendizagem de disciplinas científicas foi consideravelmente abordada por inumeráveis autores (Carrejo & Marshall, 2007; Hestenes, 2010; Lesh & Fennewald, 2010; Niss, 2010; Stillmann et al., 2017). Existem imensas ligações entre a Matemática e o mundo real e estas podem afetar o seu ensino e a sua aprendizagem (Barbosa, 2009; Blum, 2002). Consequentemente, muitos interessaram-se do papel e do impacto da modelação matemática no ensino de todos os anos de escolaridade (Burkhardt, 2006; English & Watters, 2005; Stillman et al., 2007). Porém, importa analisar na literatura como a modelação matemática favorece o desenvolvimento de competências na formação dos alunos. O primeiro impasse natural a ultrapassar é de definir modelação matemática. Antes de tudo, convém esclarecer a distinção entre a matemática aplicada e a modelação matemática. Segundo vários autores (Blum, 2002; Stillman et al. 2007), a matemática aplicada foca-se na utilização de ferramentas matemáticas numa determinada situação real. A modelação matemática foca-se, por sua vez, no sentido recíproco, ou seja, perante um problema concreto, que ferramentas matemáticas me podem ajudar a solucionar esse problema. A modelação matemática é então um processo de resolução de problemas de contexto real. No entanto, o intuito da modelação matemática pode ser interpretado de diversas maneiras. Alguns autores interpretam a modelação matemática como um vetor motivador na introdução, no desenvolvimento ou na consolidação de conhecimentos e aprendizagens matemáticas (Barbosa, 2009). Outros interpretam-na como uma abordagem puramente educacional com objetivo de desenvolver a capacidade dos alunos a resolver problemas concretos (Galbraith & Stillman, 2006). Apesar de serem interpretações diferentes, elas não são dissociadas. Ao abordar um problema de modelação matemática focando-se nos processos de resolução, pode-se atingir objetivos de aprendizagens de determinados conteúdos (Barbosa, 2009; Galbraith & Stillman, 2006).

Para resolver um problema de modelação matemática, é necessário compreender e interpretar o contexto da situação em jogo. Para esse efeito, pode-se, se possível, coletar dados, descrever e compreender relações e padrões entre grandezas, de modo a traduzir toda essa informação em linguagem matemática (Blum, 2002). Essa estrutura matemática é designada por

modelo matemático (Blum, 2002; Lesh & Fennewwald, 2010; Larson et al., 2010). Lesh e Doerr (2003) definem os termos modelo e modelo matemático da seguinte forma:

Os *modelos* são sistemas conceituais (consistindo em elementos, relações, operações e regras que governam as interações) que são expressos usando sistemas de notações externas, e que são utilizados para construir, descrever, ou explicar os comportamentos de outro(s) sistema(s) – possivelmente para que o outro sistema possa ser manipulado ou previsto de forma inteligente.

Um modelo *matemático* foca-se nas características estruturais (em vez de, por exemplo, características físicas ou musicais) dos sistemas relevantes. (p. 10)

O desenvolvimento de um modelo pode ser feito através de representações variadas de modo a abranger todas as eventuais potencialidades do modelo para responder a uma determinada situação (Lesh & Fennewwald, 2010). Assim, os modelos percorrem diferentes dimensões como do concreto para o abstrato, do específico para o geral, do global para o analítico, do simples para o complexo, do situacional para o descontextualizado e do intuitivo para o formal (Lesh & Fennewwald, 2010).

Com um modelo matemático pode-se então aplicar ferramentas e métodos matemáticos que se conhece com intuito de extrair desse modelo resultados matemáticos. Por sua vez, esses resultados devem ser interpretados e validados ao analisar a sua pertinência relativamente ao contexto e objetivo do problema real. Este processo pode ser repetido, desde raiz, na definição do modelo, consoante a sua eficácia como solução do problema (Blum, 2002; Stillman et al., 2007). Numerosos pesquisadores em educação matemática designam este processo por modelação matemática, identificando e definindo as suas fases e transições numa variedade de diagramas ou esquemas. Stillman et al. (2007) adaptaram um diagrama de Galbraith e Stillman (2006) representando o ciclo de modelação matemática, incorporando o raciocínio envolvido entre cada fase.

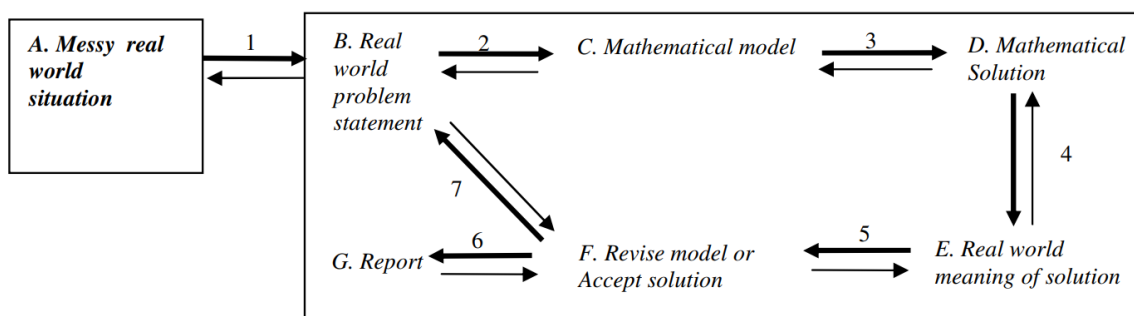


Figura 9: O processo de modelação

Neste diagrama, identificam-se as letras A-G que representam as diferentes fases do processo de modelação e setas a cheio que representam as transições entre as diferentes fases:

1. Compreender, estruturar, simplificar, interpretar o contexto;
2. Assumir, formular, matematizar;
3. Desenvolver e explorar matematicamente;
4. Interpretar resultados matemáticos;
5. Comparar, criticar, validar;
6. Comunicar, justificar (se o modelo for considerado satisfatório);
7. Percorrer novamente o processo de modelação (se o modelo for considerado insatisfatório).

As setas mais finas representam o percurso que a solução obtida através do processo de modelação deve percorrer de modo a responder ao problema físico. Observa-se então que este processo não é unilateral e destaca-se a importância da autorreflexão entre as fases (Stillman et al., 2007). Além do mais, Borromeo Ferri sublinha que não é sempre do interesse de o aluno percorrer todas as fases do ciclo de modelação na aprendizagem de conteúdos matemáticos e que devemos tentar de adaptar este ciclo ao contexto da sala de aula (Borromeo Ferri, 2006).

#### 2.2.2.2. Dificuldades dos alunos no ciclo de modelação

Para além de partilhar uma definição do ciclo de modelação, os autores identificam, a partir de estudos e dados empíricos, aspetos críticos que podem bloquear os alunos numa determinada fase. Esses dados foram recolhidos num âmbito de aprendizagem de conteúdos matemáticos através de problemas de modelação e com recurso a ferramentas tecnológicas (Galbraith & Stillman, 2006; Stillman et al., 2007). Possíveis dificuldades que os alunos podem encontrar ao percorrer o ciclo de modelação (Stillman et al., 2007, p. 4):

1. Problema confuso do mundo real → enunciado do problema real:
  - 1.1. Clarificar o contexto do problema;
  - 1.2. Elaborar hipóteses e conjeturas simples;
  - 1.3. Identificar grandeza(s) estratégica(s);
  - 1.4. Especificar os elementos corretos da(s) grandeza(s) estratégica(s);
2. Enunciado do problema real → modelo matemático:
  - 2.1. Identificar variáveis dependentes e independentes para as incluir no modelo algébrico;
  - 2.2. Perceber que a variável independente deve ser definida de forma única;
  - 2.3. Representar elementos matematicamente para que as fórmulas possam ser aplicadas;
  - 2.4. Elaborar hipóteses relevantes;
  - 2.5. Escolher tecnologia/tabelas matemáticas para efetuar cálculos;
  - 2.6. Escolher tecnologia para automatizar a aplicação de fórmulas para vários casos;

- 2.7. Escolher tecnologia para representar graficamente o modelo;
- 2.8. Optar por utilizar tecnologia para verificar equações algébricas;
- 2.9. Perceber que a representação gráfica de uma função pode ser utilizada para verificar uma equação algébrica, mas uma nuvem de pontos não;
3. Modelo matemático → solução matemática:
  - 3.1. Aplicar fórmulas simbólicas apropriadas;
  - 3.2. Aplicar processos algébricos de simplificação para fórmulas de modo a construir funções mais sofisticadas;
  - 3.3. Utilizar tecnologia/tabelas matemáticas para efetuar cálculos;
  - 3.4. Utilizar tecnologia para automatizar a extensão da aplicação de fórmulas para vários casos;
  - 3.5. Utilizar tecnologia para produzir representações gráficas;
  - 3.6. Utilizar corretamente as regras de sintaxe de notação (seja matemática ou tecnológica);
  - 3.7. Verificar o modelo algébrico com recurso a tecnologia;
  - 3.8. Obter resultados adicionais para permitir a interpretação de soluções;
4. Solução matemática → Significado concreto da solução:
  - 4.1. Identificar resultados matemáticos com as suas contrapartes no mundo real;
  - 4.2. Contextualizar resultados matemáticos intermediários e finais em termos de situação real (rotina - versões complexas);
  - 4.3. Integrar argumentos para justificar interpretações;
  - 4.4. Relaxamento de restrições anteriores para produzir resultados necessários para apoiar uma nova interpretação;
  - 4.5. Perceber a necessidade de envolver matemática antes de abordar uma questão interpretativa;
5. Significado concreto da solução → rever o modelo ou aceitar a solução:
  - 5.1. Reconciliar resultados provisórios inesperados com a situação real;
  - 5.2. Considerar implicações reais a partir de resultados matemáticos;
  - 5.3. Reconciliar aspetos matemáticos e reais do problema;
  - 5.4. Perceber que existe um limite no relaxamento de restrições que é aceitável para uma solução válida;
  - 5.5. Considerar a adequação dos resultados globais do modelo à situação real.

Em estudos cujo foco era de averiguar, perante um problema de modelação e com recurso a tecnologia, a capacidade dos alunos em percorrer o ciclo de modelação, baseado no diagrama de Gilbraith e Stillman (2006), sobressai que uma das principais dificuldades dos alunos é a compreensão do enunciado e do seu contexto (Gilbraith & Stillman, 2006; Stillman et al., 2007). Em particular, identificar as grandezas dependentes e independentes em jogo, elaborar e navegar entre as diferentes possíveis representações do modelo, assim que a estrutura matemática do problema real dificulta significativamente as transições entre as fases (Gilbraith & Stillman, 2006; Hubbard, 2003; Shahbari e Tabach, 2020). Além do mais, o uso da tecnologia torna-se primordial na definição do modelo matemático. Estes estudos mostram que os alunos necessitam de conhecer e perceber as potencialidades das ferramentas tecnológicas que têm a sua disposição

de modo a ultrapassar as limitações dos processos analíticos usuais (Consciência, 2013; Gilbraith & Stillman, 2006; Ponte, 1995). Por exemplo, perante problemas de modelação envolvendo tabelas de dados, é fundamental o aluno saber realizar folhas de cálculos e representações gráficas com a calculadora gráfica, sendo esta a ferramenta tecnológica que lhe irá acompanhar ao longo da sua escolaridade (Campos et al., 2015). Logo, o uso da tecnologia está entrelaçado com o ciclo de modelação.

### 2.2.2.3. As funções matemáticas e a modelação: origem e dificuldades

A origem do conceito de função tem por raiz o estudo de fenómenos naturais (Michelsen, 2006; Ponte, 1990; Sawalha, 2018). Relações e padrões entre grandezas de fenómenos físicos são estudados de modo a descrever, explicar e prever matematicamente o que nos rodeia. Assim, uma introdução natural ao conceito de função seria através de uma atividade de modelação matemática. Além do mais, esta perspetiva torna possível e favorece a interdisciplinaridade entre a Matemática e outras ciências, o que é fundamental na perceção dos alunos do papel da Matemática como um conjunto coerente de ferramentas poderosas que permitam lidar com situações reais (Michelsen, 2006; Niss, 1989). No currículo português, uma função é uma correspondência  $f$  de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$  que associa a cada elemento  $x$  de  $A$  um elemento único de  $B$  representado por  $f(x)$  (Ministério da Educação e Ciência, 2012). Segundo Michelsen (2006), os alunos encontram dificuldades em dar significado às funções e sentam a necessidade de as ilustrar com exemplos concretos. Isto mostra a necessidade de dar relevância ao estudo de funções enquanto modelos de situações reais de modo a reduzir o fosso entre a Matemática formal e a realidade. A modelação matemática é então fundamental na aprendizagem e na representação de funções.

As funções logarítmicas são essenciais no cálculo infinitesimal e na modelação matemática, pois estas podem ser associadas a diversos fenómenos naturais como, por exemplo, à medida da amplitude de um sismo através da escala de Richter, uma escala logarítmica (Weber, 2017). Por esses motivos, a compreensão do conceito de função logarítmica torna-se crítica para preparar os alunos a serem capazes de lidar com problemas concretos (Kenney & Kastberg, 2013). Formalmente e na maioria dos currículos, a função logarítmica é definida como sendo a função inversa da função exponencial. Isto é, uma função logarítmica de base  $a$  é definida como  $y = \log_a(x)$  para  $x > 0$  e  $a > 0, a \neq 1$ , se e só se  $x = a^y$ . Consequentemente, para compreender a função logarítmica, os alunos devem compreender a função exponencial. Mais precisamente,

Weber (2002) sugere que os alunos devem compreender a exponenciação como “um processo matemático e as expressões exponenciais como objetos que são resultados deste processo” (p. 3). Este autor distingue e define a exponenciação como uma ação e como um processo. Uma ação é o facto de repetir transformações num objeto de modo a obter outro objeto. No caso da função exponencial, a ação de  $a^x$  seria então de multiplicar  $a$   $x$  vezes. A exponenciação como uma ação é então limitada aos casos particulares onde o expoente é dado. Um processo é o facto de refletir e interiorizar uma ação. Deste modo, os alunos que entendam a exponenciação como um processo podem visualizar, sem efetuar as devidas transformações, resultados matemáticos e possivelmente inverter estas transformações de modo a obter um novo processo (Weber, 2002). Assim, os alunos podem raciocinar sobre as propriedades das funções exponenciais e das funções logarítmicas. Porém, segundo vários autores (por exemplo, Mulqueeny, 2012; Weber, 2002), uma das principais dificuldades dos alunos situa-se na perceção do papel da variável  $x$  na função  $f(x) = a^x$ . Sem ultrapassar esta dificuldade, os alunos estão na incapacidade de aplicar estes conceitos em situações reais (Mulqueeny, 2012).

Analogamente às funções exponenciais, parte da compreensão das funções logarítmicas consiste na capacidade de interpretar a notação e os símbolos em jogo (Kenney & Kastberg, 2013; Weber, 2017). Na expressão  $y = \log_a(x)$ , perceber a dualidade entre o objeto  $x$  como sendo um elemento do domínio da função logarítmica e também como o produto de  $y$  fatores de  $a$  é um obstáculo para a maioria dos alunos (Weber, 2002). Além do mais, como a notação  $\log_a x$  é relativamente atípica comparada às outras funções algébricas, torna-se confuso para a maioria dos alunos de lhe associar propriedades e características específicas (Kenney & Kastberg, 2013). Uma falta de compreensão dos símbolos envolvidos na notação das funções logarítmicas, nomeadamente das bases e das diferentes notações  $\log_a x$ ,  $\log x$  e  $\ln x$ , pode prejudicar a aprendizagem das propriedades algébricas destas. Os alunos podem conseguir interpretar as funções lineares, quadráticas e até exponenciais, pois, as suas expressões algébricas indicam de uma certa forma qual é o processo que está subjacente. Porém, a notação simbólica das funções logarítmicas é mais complexa e ambígua (Mulqueeny, 2012). Perante uma equação logarítmica, os alunos podem ter tendência a ‘cancelar’ os logaritmos de mesma base como se fossem funções polinomiais (Kenney & Kastberg, 2013). Isto mostra que os alunos têm dificuldades em perceber o papel das funções logarítmicas como funções inversas das funções exponenciais. Esta dificuldade também se faz sentir na representação gráfica destas funções, onde alguns alunos as fazem coincidir com a representação gráfica de funções exponenciais (Weber, 2017). Portanto,

um reforço da dualidade existente entre uma função bijetiva e sua inversa através, por exemplo, da função raiz quadrada e da função quadrática, pode melhorar a aprendizagem das funções logarítmicas (Kenney & Kastberg, 2013). Além do mais, segundo Sawalha (2018), proporcionar aos alunos tarefas de modelação na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas favorece a estruturação e a compreensão destes conceitos. A autora destaca que, perante um problema real, os alunos possuem um papel ativo na aprendizagem destas funções e conseguem desenvolver questões concetuais mais desafiantes. Contudo, não se pode minimizar o ensino dito 'tradicional', pois este permite desenvolver capacidades de processos analíticos (Sawalha, 2018).

### **2.2.3. A modelação matemática no currículo escolar**

Esta secção incide sobre as motivações para incorporar atividades de modelação no currículo matemático, evidenciando os seus aspetos benéficos na aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos. Apresenta-se também uma análise dos documentos curriculares portugueses, passados e atuais, em relação à modelação matemática. Por fim, demonstra-se que a modelação matemática é de facto uma competência matemática fundamental, sendo que esta favorece de diversas maneiras o desenvolvimento da competência matemática dos alunos.

#### **2.2.3.1. Motivações para implementar a modelação matemática nas metas curriculares**

Durante os anos setenta e oitenta, vários estudos apontaram que estudantes formados em Matemática e recentemente empregados sentiam e mostravam lacunas relevantes nomeadamente na resolução e formulação de problemas, na comunicação e organização de trabalho em grupo, assim como na avaliação e autocritica de resultados encontrados (Houston et al., 2019). Para colmatar essas lacunas, vários autores colaboraram com intuito de enfatizar o ensino da modelação matemática. Assim, com base nas suas experiências e nos seus trabalhos, Berry, Burghes, Huntley, James e Moscardini organizaram a primeira "International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling", onde se acrescentou mais tarde "and Applications" (ICTMA) (Houston et al., 2019). Os dois focos dessas conferências eram, e ainda são, a Matemática e o ensino da matemática. O objetivo principal dos autores era de implementar definitivamente a modelação matemática nos currículos, quer do ensino superior, quer do ensino tradicional (Houston et al., 2019).

Na terceira edição da ICTMA, em 1987, Niss listou cinco argumentos que demonstram a necessidade de incorporar a modelação matemática nos currículos matemáticos (Niss, 1989):

- i. Promover entre os alunos atitudes, atividades e competências criativas e de resolução de problemas gerais.
- ii. Criar, desenvolver e beneficiar um potencial crítico nos alunos para o uso (e mau uso) da matemática em contextos extra-matemáticos.
- iii. Preparar os alunos para serem capazes de aplicar aplicações e modelos em outras disciplinas de ensino; como indivíduos ou como cidadãos, no presente ou no futuro; ou em suas futuras profissões.
- iv. Estabelecer uma imagem da matemática representativa e equilibrada, das suas características e do seu papel no mundo. Tal imagem tem de abranger todos os aspetos essenciais da matemática, e da aplicação da matemática e da modelação matemática em outras áreas onde se encontra tais aspetos.
- v. Assistir os alunos na aquisição e na compreensão de conceitos, noções, métodos, resultados e tópicos matemáticos, quer para os ampliar, quer para fornecer motivação no estudo de determinadas disciplinas de matemática. (p. 6)

Segundo o autor, cada argumento foca-se em aspetos educacionais diferentes, mas não dissociados. O primeiro (i), sugere o uso da modelação matemática como vínculo de um objetivo formativo global: a educação e o desenvolvimento pessoal dos alunos. O argumento (v), também possui um aspeto formativo, nomeadamente no que toca às estratégias de ensino, utilizando, mais uma vez, a modelação como vetor principal. Ambos os argumentos (ii) e (iii), focam-se em aspetos extra matemáticos e, logo, na modelação matemática como uma componente principal e não mais apenas como um veículo. Com intuito de preparar os alunos para a vida profissional, é primordial habilitá-los ao uso da Matemática em contextos reais. O argumento (ii), sugere a exploração da modelação matemática numa vertente mais analítica, crítica e passiva, enquanto o argumento (iii), induz uma postura mais ativa e construtiva. O argumento (iv), foca-se na perceção dos alunos da Matemática como um todo coerente e não como um fator isolado do mundo (Niss, 1989).

Niss justifica a implementação da modelação matemática nos currículos salientando o facto que a Matemática está cada vez mais presente na sociedade, nas vidas e nas profissões de cada um. Efetivamente, segundo o autor, o ensino tradicional e puramente teórico da Matemática não permite suficientemente desenvolver nos alunos competências e capacidades requeridas para lidar com a Matemática noutras áreas, o que leva novamente aos argumentos (ii) e (iii). Além do mais, o uso da Matemática noutras áreas pode ter um papel diferente em função da área. Por exemplo, em muitas áreas da Economia, na Biologia, ou em profissões extra matemáticas, a Matemática é aplicada na prática dessas áreas ou profissões. No entanto, nas áreas da Física, da Astronomia, da Economia teórica e da Engenharia, a Matemática faz parte integrante da formação. Enquanto nos primeiros exemplos a Matemática é utilizada para servir a prática dessas profissões, nos segundos exemplos, a Matemática está intrinsecamente envolvida na pesquisa de soluções e na

elaboração de resultados ligados a essas áreas (argumento (ii) e (iii)). No que toca aos profissionais da matemática, ou seja, matemáticos quer na área da pesquisa, quer na da aplicação ou quer no ensino, o papel da Matemática não pode ser só reduzido, de modo nenhum, à sua aplicação em determinadas áreas. Segundo o autor, sendo a Matemática um elemento indispensável nas suas atividades profissionais, é primordial que todos os matemáticos tenham uma imagem global e representativa da Matemática como um todo contínuo, inclusive a modelação matemática (argumento (ii) e (iv)). Com uma perspetiva total e não pontual, teórica da Matemática, Niss considera que os matemáticos só podem melhorar nas suas profissões como também nas suas funções sociais (Niss, 1989). Niss exemplifica três aspetos que demonstram como a modelação matemática pode ser objeto de estudo no ensino da Matemática em qualquer nível de ensino (Niss, 1989):

(1) Os alunos podem adquirir conhecimentos de:

(a) modelos e aplicações matemáticas existentes. Isso pode incluir conhecimentos de categorias diferentes de modelos, classificados segundo características matemáticas como também características relacionadas às diferentes áreas de aplicação a que os modelos se referem; (b) características do processo de modelação, quer em geral, quer em relação com categorias específicas de modelos.

(2) Os alunos podem criar modelos por si próprios, quer em:

(a) aplicar modelos conhecidos pelos alunos em situações que são novas para eles, ou por (b) construir novos (para os alunos) modelos, ou em modificar aqueles já conhecidos.

Finalmente, (3) os alunos podem analisar e avaliar de forma crítica os modelos, já existentes ou modelos que construíram por si próprios, em relação:

(a) às suas propriedades matemáticas (estudo dentro do modelo), ou (b) às propriedades, qualidades e bases de justificação do modelo como representações de determinado segmento da realidade. (pp. 21-22)

Segundo o autor, como a modelação matemática permite estimular um potencial crítico nos alunos perante o uso da Matemática em contextos da vida real (argumento (ii)), é incontestável que o aspeto (3) deve ser incorporado nos currículos matemáticos em todos os níveis de ensino. No entanto, para os alunos poderem analisar e avaliar modelos, é necessário que possuam algum conhecimento dos modelos em estudo. Logo, o aspeto (3) tem de ser implementado nos currículos matemáticos em todos os níveis conjuntamente com o aspeto (1). Além do mais, já foi discutido aqui que os alunos devem manipular e criar modelos matemáticos em contextos reais de modo a se preparar para a sua futura vida profissional, o que justifica a incorporação do aspeto (2) nos currículos matemáticos. Deste modo, conclui-se que todos os aspetos definidos pelo autor permitem legitimar a implementação da modelação matemática nos currículos em todos os níveis

de ensino. No entanto, o autor sublinha que nem todos esses aspetos devem estar presentes uniformemente nos diferentes níveis. Pode-se imaginar que o aspeto (1) seria mais presente no Ensino Básico com, por exemplo, a introdução da proporcionalidade direta/inversa com problemas específicos, enquanto o aspeto (2) seria mais abordado no Ensino Secundário e Superior, pois necessita que o aluno já possua algum *background* matemático mais robusto. Por fim, Niss salienta que o principal objetivo da modelação matemática nos currículos matemáticos é de servir os objetivos da educação matemática de forma geral, e, logo, de servir os objetivos da educação em preparar os educandos para serem cidadãos respeitosos e promover o desenvolvimento pessoal de cada um (Niss, 1989).

Na mesma altura, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), no relatório *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Owens, 1988), discute o currículo norte-americano em vigor e de possíveis alterações nos conteúdos, quer no Ensino Básico, quer no Ensino Secundário. Neste, destaca-se a adição da modelação matemática no estudo da Álgebra, da Geometria, da Trigonometria e das funções no currículo do Ensino Secundário. Efetivamente, no estudo da Álgebra, o relatório sugere, e enfatiza, a resolução de problemas do mundo real com intuito de motivar os alunos. A mesma sugestão encontra-se no que toca ao estudo da Geometria e da Trigonometria, mas desta vez acrescentando também a construção de modelos e aplicações matemáticas realistas. No estudo das funções, o relatório realça que o currículo deve dar ênfase à ligação entre o contexto do problema, o seu modelo e, logo, a sua expressão analítica, assim que a sua representação gráfica. A construção de funções que modelam problemas reais deve ser considerada no estudo das funções. De uma forma geral, o relatório mostra o desejo de implementar problemas envolvendo situações da vida real em todos os anos de escolaridade, criticando assim a presença invasiva dos problemas teóricos no ensino da Matemática. Finalmente, segundo o NCTM, um dos pressupostos fundamentais do ensino da Matemática é que esta deve ser estudada pelos alunos como um todo contínuo e dinâmico que ocupa um lugar essencial no nosso quotidiano, o que vai ao encontro das ideias de Niss (Owens, 1988).

Mais tarde, no ano 2000, o NCTM publicou uma obra de referência no que toca ao ensino da matemática. Os *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Normas para a Matemática Escolar) têm por intuito ser um recurso e uma orientação para todos aqueles que são responsáveis na educação matemática dos nossos alunos. Segundo o NCTM, os currículos matemáticos devem focar-se em tópicos e processos matemáticos que demonstrem a

interdisciplinaridade e a versatilidade da Matemática. Seria então imperativo mostrar aos alunos que a Matemática é essencial na modelação e na predição de fenómenos reais (NCTM, 2000). Realça-se que a compreensão conceitual, isto é, a capacidade de conhecer, compreender e interligar ideias matemáticas como um todo (NRC, 2001), é fundamental na resolução de problemas. Contudo, com o avanço predominante da tecnologia e da informática, o foco do papel do aluno na resolução de problemas já não se situa nos cálculos, mas sim nos processos de resolução. No estudo da Álgebra, o NCTM sugere a implementação, em todos os níveis de ensino, de modelos matemáticos na representação e na compreensão de relações quantitativas, sendo que estes podem ser representados por expressões algébricas. Realça-se que os alunos devem ter um contacto gradual com a modelação de fenómenos reais ao longo dos anos de escolaridade, evoluindo em função dos conhecimentos adquiridos (NCTM, 2000). No que toca ao estudo da Geometria, encontra-se as mesmas sugestões do que anteriormente, dado ênfase ao uso da tecnologia na resolução de problemas, sendo que esta permite visualizar diversos modelos geométricos no plano ou no espaço. Segundo o NCTM, a modelação matemática permite ter uma perspetiva de um fenómeno do mundo real através de uma determinada representação; e um modelo matemático é uma representação matemática de elementos e de relações numa versão ideal de um fenómeno complexo.

Ao longo dos anos, os alunos devem ter a oportunidade de poder modelar fenómenos físicos, sociais e matemáticos com diversas representações. Por exemplo, nos primeiros anos, os alunos podem utilizar diferentes materiais para representar e construir modelos envolvendo a adição e a subtração. Do 3.º ano ao 5.º ano, os alunos podem usar representações para modelar e tentar interpretar padrões quantitativos. Os alunos do 2.º e 3.º ciclo aprendem a usar variáveis para representar incógnitas e a usar equações, tabelas, gráficos para analisar relações entre elas, o que é essencial na resolução de problemas de modelação (Leitão & Canguero, 2007; NCTM, 2000). No Secundário, o leque dos fenómenos estudados amplia-se às outras disciplinas, quer sociais, quer científicas. Os alunos devem ter oportunidades de construir, interpretar e desenvolver modelos baseando-se nos conhecimentos adquiridos no estudo das Funções. O leque de funções, e as suas representações, abordadas no Ensino Secundário proporciona aos alunos ‘um meio poderoso e versátil’ que lhes permite descrever e analisar numerosos fenómenos (NCTM, 2000). Além do mais, o acesso a laboratórios informáticos e à calculadora gráfica favorece a construção de modelos e a sua análise numa diversidade de situações. O estudo da modelação matemática pode ser feito através da análise de dados fiáveis, gerados pelos alunos se possível, e da exploração

das características, das propriedades e das limitações do melhor modelo que se ajusta aos dados (NCTM, 2000).

### 2.2.3.2. A modelação matemática nos currículos portugueses

A nível nacional, encontra-se uma tentativa de implementação dos pressupostos presentes quer no trabalho de Niss, quer na obra de referência do NCTM. Efetivamente, já no programa de Matemática do 3.º ciclo homologado em 1990, sobressai no estudo das Funções que estas permitem “descrever e estudar o comportamento de certos fenómenos, tanto do quotidiano como da Matemática, da Física, da Geografia, e da Economia” (Ministério da Educação, 1990, p. 7). Realça-se ainda que os alunos devem trabalhar com modelos simples envolvendo situações e relações da vida corrente de forma a explorar novas situações. No estudo da Estatística, encontra-se que os alunos devem ter a possibilidade de recolher e trabalhar com dados fiáveis, respeitantes a situações reais. Não se encontra nitidamente as palavras ‘modelação’ ou ‘modelação matemática’ neste documento, apenas fala-se de modelos, sem definição concreta do que é, nos conteúdos do estudo das Funções. No entanto, o estudo da modelação matemática está claramente evidenciado neste programa, nomeadamente no que toca à resolução e interpretação de problemas reais.

No programa de Matemática A do Ensino Secundário homologado em 2001/2002, após uma breve apresentação da abordagem da disciplina e dos seus conteúdos, realça-se que

o ensino de todos estes temas tem de ser suportado em atividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros. (Ministério da Educação, 2001, p. 2).

Isto é, a modelação matemática não deve ser lecionada como um tema distinto, mas sim como uma componente transversal a todos os temas, apoiando o estudo e a compreensão destes. Portanto, a análise, a interpretação e a resolução de problemas da vida real identificando modelos matemáticos torna-se uma capacidade fundamental que os alunos devem desenvolver ao longo do Ensino Secundário. Neste documento, encontra-se então os alicerces do estudo da modelação matemática na escola apresentados no *Principles and Standards for School Mathematics* e discutido por Niss. Sobressai também uma definição de modelo matemático que, segundo os autores deste programa, é “uma descrição matemática do mundo real” (Ministério da Educação, 2001, p.11), o que vai ao encontro da literatura (Blum, 2002; Lesh & Doerr, 2003). Em suma, a

modelação matemática deve ser abordada como uma ferramenta essencial para utilizar a Matemática na descrição de situações reais, sendo esta incontornável na investigação de problemas relacionados com as outras disciplinas científicas (Ministério da Educação, 2001). Além do mais, a modelação matemática na sala de aula é intrinsecamente ligada à tecnologia. O uso das calculadoras gráficas, de sensores e dos computadores propicia o percurso dos alunos nas diferentes fases do processo de modelação matemática (Gilbraith & Stillman, 2006). Consequentemente, encontra-se nos três anos do Ensino Secundário, no estudo das Funções, nomeadamente as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, indicações metodológicas que envolvem a utilização das potencialidades da calculadora gráfica e, logo, da modelação matemática evidenciando, sempre que possível, a sua importância no nosso quotidiano (Ministério da Educação, 2001).

No programa de Matemática do Ensino Básico homologado em 2007, que é uma atualização e reajustamento do programa de Matemática para o ensino básico de 1990, destaca-se de seguida a incorporação da modelação matemática na resolução de problemas. Evidencia-se a profunda ligação da Matemática com as outras ciências, nomeadamente na elaboração de modelos matemáticos na procura de respostas a problemas concretos (Ministério da Educação, 2007). Os autores definem duas finalidades orientadoras do ensino da Matemática para o Ensino Básico, sendo estas: “Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados”; “Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência” (Ministério da Educação, 2007, pp. 5-6). Em ambas as finalidades, encontram-se capacidades relacionadas diretamente com a modelação matemática, nomeadamente a “capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática” e a “capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico” (Ministério da Educação, 2007, p.3). À semelhança da obra do NCTM, os autores realçam que os alunos devem ser capazes de trabalhar com representações diversas de modo a construir, interpretar e analisar modelos matemáticos, quer abstratos, quer reais. Na análise dos conteúdos dos temas matemáticos abordados pelo programa, contempla-se uma progressão gradual da modelação matemática no estudo desses temas à medida que avançamos nos anos de escolaridade, o que vai ao encontro da literatura (NCTM, 2000; Niss, 1989), sendo o auge atingido no 3.º ciclo. Efetivamente, o estudo das funções é aprofundado no 3.º ciclo,

nomeadamente com as funções de proporcionalidade direta e a introdução das funções de proporcionalidade inversa e quadráticas. O estudo dessas funções e das suas propriedades permitem explorar tarefas de modelação de contexto real com intuito de introduzir conceitos novos ou de consolidar procedimentos algébricos. Por esses motivos, os autores incorporam a modelação matemática como um dos objetivos principais de aprendizagem dos alunos do 3.º ciclo (Ministério da Educação, 2007).

O programa de Matemática do Ensino Básico é atualizado e harmonizado em 2012. Neste, a modelação matemática mantém-se como uma das finalidades do ensino da matemática, realçando que os alunos devem ser capazes de relacionar conceitos matemáticos na resolução de problemas em contexto de modelação em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência, 2012). Contudo, na leitura dos conteúdos abordados pelo programa, a modelação matemática não é referida, quer na interpretação, na construção ou na análise de modelos, quer na resolução de problemas. Para completar o programa, e em direta articulação com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, as Aprendizagens Essenciais (AE) evidenciam que os alunos devem, ao longo da sua escolaridade, desenvolver a capacidade da utilização da Matemática em contextos matemáticos e não matemáticos (Ministério da Educação, 2018). Assim, na leitura das AE do 7.º, 8.º e do 9.º ano, destaca-se que o estudo da Geometria, da Álgebra e das Funções deve ser contemplado por modelação matemática de modo a satisfazer e corresponder às expectativas e exigências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2017).

No programa de Matemática A do Ensino Secundário que entrou em vigor em 2015/2016, os autores dão especial relevância à modelação e à aplicação da Matemática ao mundo real. Iniciam por enfatizar a importância da Matemática na resolução de problemas envolvendo fenómenos naturais. Os autores também referem que se deve ter um especial cuidado na utilização de modelos matemáticos, nomeadamente na sua construção e nas grandezas em jogo, com receio de “transmitir aos alunos uma visão deturpada de como se pode, de facto, aplicar corretamente a Matemática ao mundo real” (Ministério da Educação e Ciência, 2015, p. 5). No entanto, na leitura dos conteúdos abordados pelo programa, observa-se que a presença da modelação matemática é pobre relativamente aos documentos curriculares mais antigos. Por exemplo, observa-se, no 10.º ano, no estudo das funções, que os alunos devem resolver problemas envolvendo a construção, a análise e a interpretação de modelos de situações reais. Porém, no 11.º ano, já não se encontra a resolução de problemas de modelação, o que é absurdo, pois os

alunos adquirem nesse mesmo ano o conceito de derivação, conceito que se pode ligar às diversas situações concretas e nomeadamente à área da Física. No 12.º ano são introduzidas as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Todas estas funções são propícias ao estudo de problemas de modelação matemática, pois elas estão intrinsecamente ligadas a fenómenos naturais como, por exemplo, a evolução de uma população de bactérias para as funções exponenciais, a escala de Richter para as funções logarítmicas e os osciladores harmónicos para as funções trigonométricas (Sawalha, 2018; Weber, 2017). O programa prevê um capítulo dedicado a modelos exponenciais onde os alunos terão de trabalhar com equações diferenciais de primeira ordem cujas soluções são funções exponenciais. Os alunos devem então saber e reconhecer a equação diferencial:  $f' = kf$ , saber que esta modela, por exemplo, a evolução de uma substância radioativa e justificar, sem ter o conhecimento do conceito de primitiva, que as soluções são as funções da forma  $f(x) = ce^{kx}$ , onde  $c, k \in \mathbb{R}$ . Portanto, perante um problema real, não é exigido aos alunos analisar dados e construir um modelo exponencial que se ajuste melhor a situação, mas somente colocar a expressão da solução que decoraram e identificar os coeficientes consoante os dados do enunciado. Esta aplicação da modelação matemática é muita redutora, contradiz a literatura e torna-se incoerente relativamente às metas curriculares anteriores, quer do Ensino Básico, quer do Ensino Secundário (Niss, 1989; Sawalha, 2018). Além do mais, no programa de Matemática B do 11.º ano, observa-se uma forte presença da modelação matemática no estudo das funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Efetivamente, pretende-se com este programa que os alunos sejam capazes de elaborar “modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções” (Ministério da Educação, 2002, p. 3). Da leitura das AE do 11.º ano da Matemática B homologado em 2018, sobressai o estudo das funções como modelo de fenómenos reais e a relação destes com as outras disciplinas, o que vai ao encontro da ideia geral do programa associado (Ministério da Educação, 2018). No que toca às AE do 10.º, do 11.º e do 12.º de Matemática A, a modelação matemática faz parte dos temas transversais, que servem de apoio aos temas principais. Consequentemente, destaca-se dos conteúdos das AE a resolução de problemas de modelação matemática, quer no estudo da Álgebra, da Geometria e das Funções, nos três anos de escolaridade. No entanto, nos conteúdos abordados no estudo das funções exponenciais e logarítmicas, a modelação matemática não é referida (Ministério da Educação, 2018).

Além de ter em conta os documentos curriculares anteriores, os autores consideraram avaliações internacionais em que Portugal participa na conceção das Metas Curriculares e

Programa de Matemática do Ensino Secundário, nomeadamente o *Programme for International Student Assessment* (PISA) e o *Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks* (TIMSS-Advanced) (Ministério da Educação e Ciência, 2015). O PISA permite medir a capacidade de ler, os conhecimentos matemáticos e científicos e as competências de alunos de 15 anos para enfrentar os desafios da vida real. O TIMSS-Advanced consiste num estudo internacional de avaliação de desempenho de alunos do 4.º ano e 8.º ano de escolaridade a Matemática e Ciências. Sendo que o PISA averigua as competências e os conteúdos curriculares essenciais para que alunos de 15 anos sejam devidamente preparados, socialmente e profissionalmente, para a vida, considero que este documento se ajuste melhor ao corpo deste subcapítulo. Segundo os autores, é primordial desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinar matematicamente e de usar a matemática para “descrever, explicar e prever fenómenos”, salientado o facto que estes devem vivenciar experiências enriquecedoras de contextos variados durante a sua escolaridade (OECD, 2019). Na definição de literacia matemática do PISA, os autores dão especial relevância aos verbos “formular”, ‘utilizar’ e ‘interpretar’ assim como na modelação matemática. Os autores ainda realçam que as fases que compõem o ciclo de modelação fazem parte integrante do desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos, embora estes não precisem de percorrer todas estas fases, como referem numerosos autores (por exemplo, Shahbari & Tabach, 2020; Stillman et al., 2007). Com ‘formular’, os autores referem-se à capacidade de identificar situações que podem ser traduzidas por modelos matemáticos, fornecendo assim ao problema real uma estrutura matemática que pode ser analisada, interpretada e resolvida através de procedimentos analíticos e tecnológicos (OECD, 2019). Com ‘utilizar’, é enfatizada a capacidade do indivíduo de aplicar conceitos, conhecimentos e procedimentos matemáticos na resolução de problemas de modo a tirar conclusões puramente matemáticas. Assim, os alunos devem explorar modelos matemáticos através, sempre que possível, de ferramentas matemáticas e tecnológicas, para identificar relações e padrões entre as variáveis. Com ‘interpretar’, os alunos devem ser capazes de, perante um problema de modelação, refletir sobre os resultados matemáticos, traduzi-los de volta no contexto real do problema e averiguar se estes são pertinentes relativamente ao contexto.

### **2.2.3.3. A modelação matemática enquanto competência matemática incontornável**

Em todos os documentos de referência que foram analisados, reflete-se sobre as competências que os alunos devem adquirir durante a sua escolaridade. Segundo Niss e Højgaard

(2019), a competência matemática é a capacidade de um indivíduo a responder com prontidão e perspicácia a qualquer tipo de desafio matemático em determinadas situações (Niss & Højgaard, 2019). Os autores salientam a diferença entre a competência matemática e uma competência matemática, sendo a última a capacidade de um indivíduo de responder com prontidão e perspicácia a um tipo de desafio matemático específico. Ou seja, a competência matemática é uma união de competências matemáticas (Niss & Højgaard, 2019). Para definir esses subconjuntos de competências matemáticas, os autores realçam que estes devem satisfazer a integralidade das atividades matemáticas. Uma atividade matemática é uma atividade cujo propósito seja de “fazer e responder perguntas na ou por meio da matemática” (Niss & Højgaard, 2019, p. 14). Com base em tais pressupostos, os autores definem quatro competências que são essenciais para se envolver eficientemente numa atividade matemática: o pensamento matemático fundamental; elaborar e resolver problemas matemáticos; lidar com modelos e modelação matemática; raciocinar matematicamente (Niss & Højgaard, 2019). Para além disso, o domínio da linguagem, de construções e de ferramentas matemáticas permitem elevar o desempenho na realização de atividades matemáticas, o que os autores traduzem com mais quatro competências: lidar com representações matemáticas; lidar com símbolos e o formalismo matemático; comunicar em matemática; lidar com recursos materiais; e ferramentas matemáticas. Os autores sublinham que todas estas competências são distintas, mas longe de serem dissociadas. Por esse motivo, decidi dar especial relevância a três competências que considero fundamentais para a modelação matemática: lidar com modelos e modelação matemática; lidar com representações matemáticas; lidar com recursos materiais e ferramentas matemáticas. A primeira foca-se na capacidade de construir modelos matemáticos, assim como analisar e avaliar modelos já definidos, tendo em conta uma diversidade de fatores exteriores como os dados, os factos, as propriedades e o contexto da situação. Logo, a capacidade de articular com as diferentes fases do processo de modelação está incluída nesta competência (Stillman et al., 2007). A competência de lidar com diferentes representações matemáticas consiste na capacidade de interpretar e traduzir objetos, fenómenos, correspondências e processos matemáticos numa variedade de representações equivalentes, tendo em conta as vantagens e as limitações de cada uma, na realização de uma atividade matemática. Como já vimos aqui, a elaboração, a análise e a interpretação de modelos é diretamente ligada com a manipulação de representações matemáticas (Michelsen, 2006; NCTM, 2000; Shahbari & Tabach, 2020). Por último, a utilização da tecnologia como recurso construtivo e crítico na realização de uma atividade

matemática é essencial. Esta competência também consiste em ter em conta as vantagens e as limitações dessas ferramentas matemáticas de modo a utilizá-las oportunamente em função da atividade matemática (Niss & Højgaard, 2019).

### 2.3. Estratégias de intervenção

Esta secção pretende especificar, numa primeira parte, as metodologias de ensino e de aprendizagem que implementei na minha ação pedagógica e, numa segunda parte, as estratégias de avaliação desta ação.

#### 2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

Na procura de promover e valorizar a participação do aluno no processo de ensino e de aprendizagem dei especial relevância na minha intervenção pedagógica aos momentos de discussão com os alunos na introdução e na sistematização de tópicos das funções logarítmicas. Tive o cuidado de, sempre que possível, proporcionar aos alunos um papel ativo na aprendizagem destas funções. As tarefas que propus aos alunos foram elaboradas com base nestas linhas orientadoras. Como as tarefas de modelação reúnem características de problemas ou de tarefas de exploração e de investigação (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Ponte, 2005), a sua integração na minha intervenção pedagógica proporcionou um formato de ensino e de aprendizagem de cunho exploratório (Ponte, 2005). Como as atividades de modelação matemática podem ser interligadas à utilização de materiais tecnológicos e que estes são destacados por numerosos documentos de referência na aprendizagem da Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2015; NCTM, 2000), incorporei a calculadora gráfica na minha prática pedagógica.

*Tarefas de modelação.* Os alunos, perante uma dada tarefa, quando realizam atividades e refletem sobre elas reúnem condições para a aprendizagem num determinado tópico matemático. Por atividade entende-se aquilo que os alunos realizam durante a aula (Ponte, 2005). Ponte (2005) define tarefa como sendo o objetivo da atividade. A tarefa pode ser proposta explicitamente no início duma atividade ou implicitamente durante a sua realização. Pode ser proposta pelo professor ou pode surgir da iniciativa dos alunos ou de um momento de discussão entre os alunos e o professor. Ponte (2005) caracteriza as tarefas segundo o seu grau de desafio cognitivo, de abertura, de duração e de contexto:

- *Exercício:* uma tarefa curta, fechada e de desafio reduzido. O aluno consegue realizar este tipo de tarefa com os conhecimentos já adquiridos. As questões indicam

explicitamente o que aluno é suposto fazer, sendo uma aplicação direta dos seus conhecimentos.

- *Problema*: uma tarefa de duração média, fechada e de desafio mais elevado de que um exercício. Perante este tipo de tarefa, o aluno não deveria ser capaz de a realizar de imediato. Este tipo de tarefa é acessível aos alunos somente com os conhecimentos previamente adquiridos, mas o desafio está na interpretação do problema e na sua tradução em linguagem matemática.
- *Investigação*: uma tarefa de duração média, aberta e de desafio elevado. Uma tarefa deste tipo pede ao aluno para elaborar uma estratégia de resolução e para formular questões consoante os dados presentes no enunciado. Também pode ser pedido ao aluno para pesquisar e recolher dados para a resolução da tarefa.
- *Exploração*: uma tarefa de duração média, aberta e de desafio mais reduzido do que uma tarefa de investigação. Este tipo de tarefa pode ser iniciado e realizado de imediato, “sem muito planeamento” (Ponte, 2005, p.8).
- *Projeto*: uma tarefa longa, aberta e de desafio elevado. Este tipo de tarefa exige muito do aluno a nível de tempo de realização e de elaboração de estratégia de resolução, o que permite aprendizagens ricas e profundas. Porém, devido à dificuldade da tarefa, os alunos podem ficar bloqueados ou perder tempo com estratégias irrelevantes, o que os pode desmotivar e frustrar.
- *Modelação*: uma tarefa de duração média, aberta ou fechada e de desafio elevado. As tarefas de modelação podem-se confundir com problemas ou tarefas de investigação, mas num contexto exclusivamente real.

Cada tipo de tarefa promove um aspeto diferente no desenvolvimento do processo de ensino e de aprendizagem do aluno (Ponte, 2005):

- As tarefas mais fechadas (exercícios, problemas) propiciam o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos.
- As tarefas mais acessíveis (explorações, exercícios) contribuem o desenvolvimento da autoconfiança dos alunos.
- As tarefas desafiantes (investigações, problemas) permitem aos alunos vivenciar experiências matemáticas eficientes.
- As tarefas mais abertas desenvolvem a autonomia dos alunos.

Ponte (2005) ainda sublinha que a seleção das tarefas é “um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos” (p. 23). Segundo o autor, não é suficiente propor aos alunos um grande leque de tarefas de tipologia variada. É preferível selecionar cuidadosamente as tarefas de modo que elas se adequem ao processo de desenvolvimento do ensino e da aprendizagem. O *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) corrobora esta ideia e reforça que:

Quando desafiados com tarefas apropriadamente escolhidas, os alunos tornam-se confiantes nas suas capacidades de resolver problemas difíceis, capazes de descobrir coisas por si próprios, flexíveis em explorar ideias matemáticas e experimentar caminhos alternativos de soluções, e vontade de perseverança. (NCTM, 2000, p. 21)

Na elaboração de planos de aulas de um tema ou tópico matemático, o professor deve então ter o cuidado de propor aos alunos uma sequência de tarefas diversificada e coerente com os objetivos a cumprir nesse tema ou tópico (Canavarro & Santos, 2012). Observa-se que, tirando as tarefas de modelação, todos os tipos de tarefas acima destacadas podem-se apresentar em contextos de realidade, semi-realidade ou de matemática pura. Segundo Ponte e Quaresma (2012), o contexto é “o universo conceptual associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode ter maior ou menor experiência pessoal, ou remeter apenas para o universo matemático” (p. 3). O contexto de semi-realidade não se foca nas propriedades da situação do problema, mas exclusivamente nas suas propriedades matemáticas, fazendo então abstração do contexto real. Este tipo de situação não existe no nosso quotidiano, mas é elaborado com fins educativos (Ponte, 2005). Os autores ainda evidenciam que estes contextos e a Matemática são interligados através do processo de modelação, pois, num determinado momento traduz-se a situação da tarefa numa representação matemática (Ponte & Quaresma, 2012). Para além disso, esses contextos devem permitir aos alunos construir ideias matemáticas e sugerir conceitos, representações e estratégias de resolução, mas também podem servir de aplicação direta de conteúdos matemáticos. Ao contexto da tarefa não se pode dissociar o contexto de trabalho. Este influencia grandemente o interesse, a motivação e o empenho do aluno na aprendizagem da Matemática. Com base em tais pressupostos, procurei nas minhas aulas propor aos alunos atividades de modelação de contexto real através de problemas ou de tarefas de investigação.

*Ensino Exploratório.* Para otimizar a aprendizagem dos alunos perante uma tarefa de modelação, procurei centrar as minhas aulas na sua atividade, colocando-os como protagonistas no processo de aprendizagem, afastando-me assim do ensino de cunho ‘direto’. O ensino exploratório foca-se na atividade do aluno na construção do conhecimento, induzindo que o professor assume um papel secundário (Ponte, 2005). Porém, Ponte realça que o ‘ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula’ (p. 14). Este modelo de ensino favorece então os momentos de reflexão, de discussão e de análise crítica após a realização de uma atividade matemática, o que propicia a aprendizagem dos alunos. Assim, uma estratégia de ensino

de cunho exploratório dará especial relevância à realização de atividades mais abertas, como tarefas de exploração, de investigação ou problemas, valorizando os momentos de reflexão e discussão em grupo turma. Com base nestes princípios, Canavarro et al. (2012) e Ponte (2005) estruturam a aula em quatro fases: (i) introdução da tarefa; (ii) desenvolvimento da tarefa; (iii) discussão da tarefa; e (iv) sistematização das aprendizagens. Na primeira fase da aula, apresentava a tarefa à turma, com o cuidado de averiguar se os alunos entendiam o enunciado da tarefa e de regular o desenvolvimento desta, gerindo o tempo e os recursos que podiam ser utilizados. Na segunda fase, os alunos realizaram, individualmente ou em pequenos grupos, a tarefa de maneira autónoma. Neste momento da aula, procurava dar apoio os alunos, tendo especial atenção com os meus comentários de modo a não interferir com as estratégias de resolução dos alunos. Ao mesmo tempo, procurava indicadores que me permitissem organizar a discussão em grupo turma, selecionando antecipadamente produções dos alunos que incentivassem o debate de ideias e de resoluções. Na penúltima fase, orquestrava a discussão em grupo turma, com o cuidado de gerir as intervenções e argumentações dos alunos de modo a averiguar e comparar resoluções diferentes. Na última fase, a partir do que os alunos faziam ou diziam, procurava institucionalizar novos conceitos ou procedimentos frutos da exploração e da discussão da tarefa, assim como destacar eventuais ligações que existiam com conhecimentos adquiridos anteriormente.

No que toca às estratégias de ensino da modelação matemática, Blum e Borromeo Ferri (2009) defendem que os alunos devem ter o papel principal nas atividades de aprendizagem, mas tal não significa que o papel do professor deixe de ser crucial. Isto é, segundo os autores, deve existir um equilíbrio permanente entre as orientações do professor, que devem ser mínimas, e a independência dos alunos, que deve ser máxima (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Logo, as intervenções do professor durante a exploração da tarefa pelos alunos devem ser antecipadas e estratégicas. À semelhança do ensino exploratório, optei por um momento de exploração da tarefa em grupos pequenos e um momento de discussão dos resultados obtidos em grupo turma. Para além disso, os autores realçam que o professor deve imperativamente evitar direcionar os alunos num tipo de resolução. Antes de propor uma atividade de modelação, procurava averiguar diferentes estratégias de resolução de modo a poder orientar as diferentes ideias matemáticas que os alunos podiam eventualmente ter. Na sala de aula, encorajava os alunos nos seus próprios percursos de modelação, o que, por vezes, enriquecia o confronto das diferentes resoluções, promovendo assim a qualidade matemática das discussões entre os alunos (Blum & Borromeo

Ferri, 2009). Observa-se que os princípios discutidos por estes autores para ensinar modelação matemática vão ao encontro da metodologia do ensino exploratório. Estes autores obtiveram resultados empíricos significativos na aprendizagem dos alunos baseando-se em tais pressupostos, o que me incentivou em elaborar as minhas aulas seguindo os mesmos.

*Calculadora gráfica.* São diversos os documentos curriculares de referência que recomendam o uso de materiais tecnológicos em sala de aula, onde se insere a calculadora gráfica (NCTM, 2000; Ministério da Educação e Ciência, 2015). As calculadoras gráficas permitem visualizar ideias matemáticas, organizar e analisar dados e realizar cálculos rapidamente, o que pode servir de recurso aos alunos na realização de tarefas em qualquer área da Matemática (NCTM, 2000). Em particular, no que toca ao domínio das funções, os alunos recorrem à calculadora gráfica para representar graficamente uma função, conferir graficamente resultados obtidos por processos analíticos, testar e formular conjecturas e resolver situações matemáticas que não conseguem resolver analiticamente (Consciência, 2013). No entanto, observa-se também que os alunos têm tendência em utilizar a calculadora gráfica somente quando existe uma indicação exterior para o fazerem (Semião & Canavarro, 2012). Para além disso, a metodologia de ensino implementada pelo professor na sala de aula influencia os alunos na utilização desta ferramenta. Se os alunos estão mais acostumados em resolver situações matemáticas analiticamente, então sentem-se mais seguros em resolver desta forma, excluindo naturalmente a possibilidade de utilizar as potencialidades da calculadora gráfica (Semião & Canavarro, 2012). Acerca dessas potencialidades, destaca-se a representação gráfica de uma função e a janela de visualização. Desenvolver nos alunos a capacidade de representar graficamente uma função na calculadora gráfica e definir uma janela de visualização adequada torna-se fundamental no estudo de funções uma vez que o gráfico obtido depende integralmente da janela de visualização definida (Consciência, 2013). Uma janela de visualização demasiada limitada pode conduzir a representações que não incluam certas propriedades importantes do gráfico da função. Isto mostra que, para utilizar eficientemente esta ferramenta, os alunos e o professor devem ter um conhecimento teórico robusto de modo a ter um ponto de vista crítico naquilo que aparece no ecrã. Competiu-me, assim, de alertar os alunos sobre essas limitações das calculadoras gráficas. O Programa de Matemática do Ensino Secundário, à semelhança do NCTM, realça ainda que esta ferramenta “não pode substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas” (Ministério da Educação e Ciência. 2015, p.28). Por esses motivos, decidi propor aos alunos tarefas que incorporam questões que podem ser resolvidas quer

por processos analíticos, quer por processos gráficos. Para além disso, tive o cuidado de alertar os alunos no início de cada tarefa que podiam utilizar a calculadora gráfica na resolução da tarefa.

### 2.3.2. Estratégias de avaliação da ação

No âmbito deste projeto, para responder à questão de investigação relativa à minha intervenção pedagógica, recorri a diferentes instrumentos de recolha de dados: gravações áudio e vídeo das aulas que lectionei; produções dos alunos (resoluções das tarefas propostas nas aulas); e questionários (inicial e final).

*Observação e gravação de aulas.* Foi fundamental observar a atitude dos alunos perante uma atividade de modelação matemática. Inicialmente, os alunos mostraram uma postura reticente relativamente a este tipo de atividade, o que, ao longo da minha intervenção, melhorou para uma postura ativa e curiosa. As gravações das aulas permitiram constatar esta melhoria, pois com estas consegui obter o registo das discussões que aconteceram durante cada aula, quer entre os alunos, quer entre os alunos e o professor. Todas as aulas tiveram gravação de áudio e vídeo, com as respetivas autorizações dos encarregados de educação (Anexo 2). Nas primeiras aulas, durante a exploração da tarefa proposta, circulava na sala de aula com um gravador de modo a gravar momentos de discussão que podia ter com os grupos que chamavam por mim. Nas seguintes aulas, coloquei gravadores em quase todos os grupos e um gravador em frente ao quadro para o aluno que iria apresentar a sua proposta de resolução no momento de debate em grupo turma. Deste modo, foi possível analisar mais profundamente o que os alunos diziam sobre as estratégias de resolução de cada grupo e o debate entre os alunos.

*Produções dos alunos.* Para responder às questões de investigação deste projeto, foi fundamental recolher e analisar as produções dos alunos. Procurei realizar tarefas de modelação com os alunos em diferentes fases, nomeadamente na fase introdutória das funções logarítmicas assim como na fase de sistematização e de consolidação destas funções, com tarefas mais desafiantes. As produções dos diferentes pares e grupos são identificadas por P# ou G#, em que # representa um número distinto atribuído a cada par/grupo. Analogamente, dentro desses pares/grupos, identifiquei os alunos por A#. Todas as tarefas propostas foram distribuídas a todos os alunos. Para a recolha das resoluções das tarefas forneci a cada par/grupo folhas identificadas com o número do par/grupo dedicadas à resolução final que iria recolher. Incentivei os alunos, numa primeira parte, em explorar as tarefas nos seus cadernos e, numa segunda parte, em confrontar as suas resoluções antes de me devolverem a folha dedicada à resolução final. Todas

estas resoluções foram recolhidas antes do momento de discussão da tarefa em grupo turma. As produções dos alunos, juntamente com as gravações, foram analisadas tendo em conta o processo de modelação e a lista de possíveis bloqueios que os alunos podem encontrar ao percorrer este processo definido no enquadramento teórico.

*Questionário inicial e final.* Os questionários serviram para complementar as informações recolhidas através dos outros métodos de recolha de dados. Em particular, o questionário inicial ajudou-me a identificar as características dos alunos, nomeadamente no que toca às suas preferências na disciplina de Matemática, os métodos de ensino que mais vivenciam e apreciam, as perceções que têm sobre a modelação matemática e se estão acostumados a usar a calculadora gráfica. O questionário final teve como objetivo conhecer as perceções dos alunos relativamente à modelação matemática na aprendizagem das funções logarítmicas e de perceber qual foi o contributo da minha intervenção pedagógica na sua aprendizagem. Este questionário era constituído por dois grupos, sendo o primeiro constituído por questões de resposta fechada, onde cada aluno teve de escolher uma das cinco opções apresentadas segundo uma escala Likert: DT: Discordo Totalmente; D: Discordo; I: Indiferente; C: Concordo; CT: Concordo Totalmente. O segundo grupo é constituído por questões abertas relacionadas com a perceção do aluno sobre a modelação matemática e as funções logarítmicas, as vantagens e desvantagens da modelação na aprendizagem destas funções, as dificuldades que sentiram na realização destas tarefas e o contributo da calculadora gráfica para colmatar essas dificuldades.

## CAPÍTULO 3

### INTERVENÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos que resultam da análise dos dados recolhidos em três das cinco aulas da intervenção pedagógica. Nas três primeiras aulas, os alunos exploraram um problema de modelação por aula e na última dois problemas, o que faz um total de cinco problemas. As duas primeiras aulas foram dedicadas a atividades de modelação matemática na introdução do estudo da função logarítmica e das suas derivadas. As duas últimas aulas debruçaram-se sobre momentos de consolidação de conhecimentos de funções logarítmicas através de um problema de modelação. Todas estas aulas tiveram uma duração de 90 minutos.

Tabela 5: Síntese da intervenção pedagógica

| Momento | Tópicos                                      | Objetivos                                                                            |
|---------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Preenchimento do questionário inicial        | Identificar características dos alunos                                               |
| 2       | Introdução ao estudo da função logarítmica   | Definir a função logarítmica como inversa da função exponencial                      |
| 3       | Introdução à derivada da função logarítmica  | Definir a derivada da função logarítmica de base $a \in \mathbb{R}/\{1\}$            |
| 4       | Função logarítmica                           | Aplicar conhecimentos adquiridos no estudo da função logarítmica                     |
| 5       | Função logarítmica                           | Aplicar conhecimentos adquiridos no estudo da função logarítmica                     |
| 6       | Preenchimento do questionário final (online) | Averiguar o contributo da minha intervenção na aprendizagem das funções logarítmicas |

#### 3.1. Introdução ao estudo da função logarítmica

Na introdução ao estudo da função logarítmica, os alunos começaram por resolver uma tarefa de modelação que envolvia conhecimentos da função exponencial, já estudada previamente. A escolha desta função como modelo que emerge da resolução da tarefa proposta deveu-se à relação que existe entre a função exponencial, com uma dada base real positiva diferente de um, e a respetiva função inversa, a função logarítmica com a mesma base. Quando os alunos chegaram à questão 2, foi essencial lembrar a turma o que era um modelo e como podíamos na calculadora gráfica organizar dados numa tabela e representar a nuvem de pontos associada aos dados. A calculadora gráfica permite realizar regressões lineares e não lineares que se ajustam aos dados da tabela. Podemos então escolher se queremos representar um modelo linear, polinomial, logarítmico, exponencial, sinusoidal ou logístico. Perante esses modelos, podemos averiguar qual se ajusta melhor aos dados na leitura do coeficiente de determinação  $r^2$  ou do erro

quadrático médio  $MSe$ . Mais próximo de 1 é o coeficiente de determinação  $r^2$  que traduz o modelo que melhor se ajusta aos dados, e, analogamente, mais próximo de 0 é o erro quadrático médio  $MSe$  desse modelo. Embora os alunos já tivessem realizado atividades de modelação anteriormente à minha prática pedagógica, considerei fundamental explicar passo a passo como realizar estas regressões e como identificar devidamente o melhor modelo que correspondesse à situação do enunciado.

**Tarefa:** O crescimento de uma população de bactérias

As bactérias reproduzem-se assexuadamente por um processo chamado divisão binária. A divisão binária ocorre quando uma bactéria duplica o seu material genético e logo em seguida se divide, originando duas bactérias idênticas a ela. Em condições ideais de temperatura e nutrientes, uma bactéria leva aproximadamente vinte minutos para completar todo o processo de divisão.

1. Completa a seguinte tabela.

|                     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---------------------|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Tempo (minutos)     | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Número de bactérias | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

2. Com recurso à calculadora gráfica, representa graficamente a nuvem de pontos do número de bactérias em função do tempo  $t$ .
3. Define o modelo matemático que melhor represente a situação.
4. Após um dia quantas bactérias constituem a população?
5. Quanto tempo é necessário para a população atingir 8000 bactérias?
6. Sendo o número de células bacterianas no corpo humano aproximadamente igual a  $40 \times 10^{12}$ , em quanto tempo a população de bactérias atingirá esse valor?

As questões da tarefa foram desenhadas para que os alunos percorressem as diferentes fases do ciclo de modelação consideradas a partir do enquadramento teórico deste trabalho: (1) compreensão do enunciado da tarefa; (2) análise dos dados/construção e validação do modelo; (3) exploração do modelo.

A tarefa foi resolvida em pares. As respostas dos alunos são analisadas, em cada uma das fases de modelação, mediante os seguintes tipos de resposta: corretas (C); parcialmente corretas (PC); incorretas (I); e não apresentam qualquer resposta (NR) (Tabela 6).

Tabela 6: Frequência dos diferentes tipos de resposta dos alunos na Tarefa 1 ( $n = 15$ )

| Fases de modelação                                 | Tipos de Resposta |    |   |    |
|----------------------------------------------------|-------------------|----|---|----|
|                                                    | C                 | PC | I | NR |
| Compreensão do enunciado da tarefa                 | 15                | –  | – | –  |
| Análise dos dados/Construção e validação do modelo | 11                | 2  | 2 | –  |
| Exploração do modelo                               | 8                 | 4  | 3 | –  |

### 3.1.1. Compreensão do enunciado da tarefa

Os alunos não apresentaram dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa, indiciando ter interpretado o que a tarefa lhes fornecia e lhes pedia que fizessem, o que é ilustrado pelo correto preenchimento de todos os pares da tabela que integrava a primeira questão da tarefa.

Alguns pares acrescentaram notas à volta da tabela, em particular de quanto se aumentava o tempo e o número de bactérias de uma coluna para outra. Um par, o P6, sublinhou elementos do enunciado que acharam pertinentes e efetuou um esquema para representar a divisão binária de uma bactéria (Figura 10).

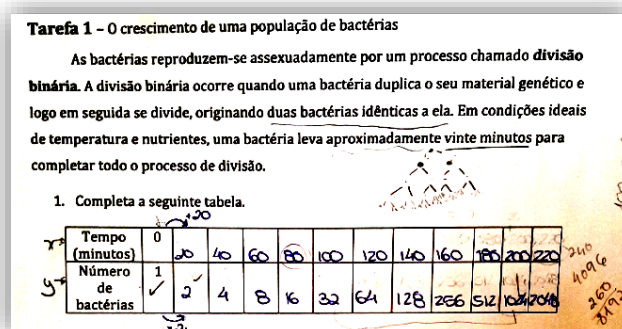


Figura 10: Resposta correta do par P6 à alínea 1 da Tarefa 1

### 3.1.2. Análise dos dados/Construção e validação do modelo

Nestas fases, pretendia-se que os alunos formulassem um modelo matemático que permitisse representar matematicamente a situação da tarefa. As questões 2 e 3 da tarefa completam-se e ilustram estas fases. Os alunos não manifestaram dificuldades de esquemas de uso na organização dos dados na calculadora gráfica, nem em identificar a variável dependente e a variável independente. No entanto, na parte da regressão, os pares P3 e P6 recorreram a esquemas de ação instrumentada da calculadora gráfica para obterem um modelo linear. O par P3 representou um esboço da nuvem de pontos do número de bactérias em função do tempo. Embora se observe neste esboço uma curva exponencial, eles definiram um modelo linear. Isto mostra que o papel do coeficiente de determinação  $r^2$  não foi bem percebido ou que estes alunos não tentaram averiguar eventuais outros modelos na calculadora gráfica (Figura 11).

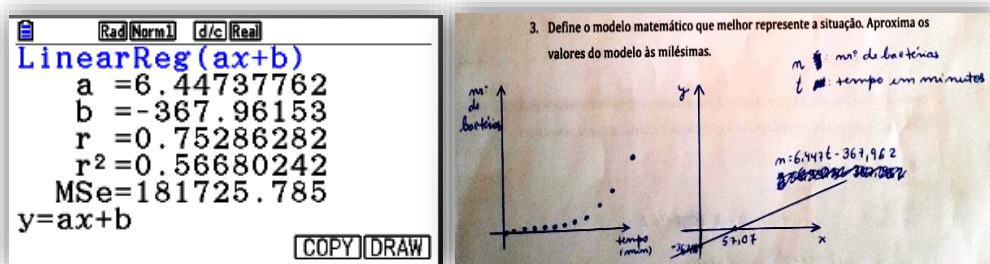


Figura 11: Resposta incorreta do par P3 às alíneas 2 e 3 da Tarefa 1

O par P12 revelou dificuldade na organização dos dados. Na calculadora gráfica, os alunos podem colocar os dados numa tabela onde cada coluna corresponde a uma lista numerada a

partir de 1. Ao representar a nuvem de pontos, os alunos têm de ter o cuidado de verificar na janela de visualização se as listas escolhidas correspondem às variáveis.

A1P12: Aqui, a lista, está bem?

Prof: Não vou dizer se está bem ou não.

A1P12: Sim.

Prof: Conforme os dados, parece-te bem ou não?

A1P12: Eu acho que sim.

Prof: Em cada 20 minutos, duplica.

A1P12: Sim.

Prof: Então qual é a tua pergunta?

A1P12: É que não sei se dá por este método.

Prof: Podes, claro. Só que, ao fazer a regressão não linear, tens de ter em conta... faz outra vez o que estavas a fazer, representa outra vez aquela função. Aqui, aparecem vários coeficientes. Este  $r^2$  é o coeficiente de determinação que te diz se a função que obtiveste une os pontos da melhor maneira possível. Mais próximo de 1, melhor é o modelo.

A2P12: Então não está assim tão mal.

Prof: Vocês agora têm de encontrar qual é que se ajusta melhor à situação.

Ainda na parte da regressão, a maioria dos pares conseguiu identificar o modelo exponencial como sendo aquele que melhor se ajusta aos dados da situação em estudo, pois apresenta um coeficiente de determinação  $r^2$  igual a 1. Ao seleccionar o modelo exponencial, os alunos tiveram duas opções: escolher um modelo exponencial de base  $e$  tal que  $y = ae^{bx}$ , ou de base  $b \neq 1$  tal que  $y = ab^x$  (Figura 12).

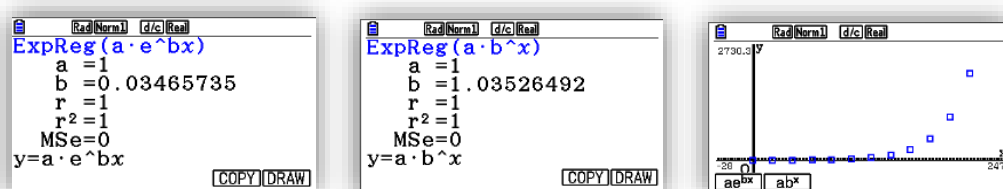


Figura 12: Opções disponíveis na escolha do modelo exponencial

Nesse momento da aula, realcei à turma de que ambos os modelos exponenciais, apesar de terem bases diferentes, serviam para modelar os dados, o que poderiam conferir ao representar ambos os gráficos na calculadora gráfica. No entanto, como era pedido uma aproximação dos coeficientes às milésimas, esta vai influenciar os valores que os alunos podem obter ao resolver as restantes questões. O par P1 escolheu, por exemplo, o modelo exponencial de base 1,035 (Figura 13).

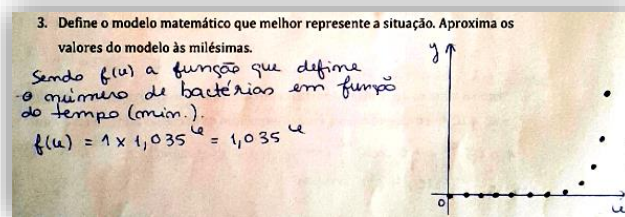


Figura 13: Resposta correta do par P1 à alínea 3 da Tarefa 1

Na definição do melhor modelo que se ajuste aos dados, dois pares, P11 e P13, não recorreram à calculadora gráfica, definindo um modelo matemático através de processos algébricos, com base nos pontos da tabela. Percebe-se que estes alunos reconheceram nos dados uma progressão geométrica de razão 2 e de termo geral  $2^n$ , onde  $n$  representa o número de processos de divisão binária que ocorreu, o que lhes permitiu definir as seguintes funções:  $f(x) = \frac{x}{2^{20}}$ , onde  $x$  é o tempo em minutos (P13);  $N(t) = \frac{t}{2^{20}}$ , onde  $t$  é o tempo em minutos (P11). Estes modelos correspondem perfeitamente aos dados da tabela e ao processo da divisão binária caso trabalhássemos com modelos discretos e não contínuos.

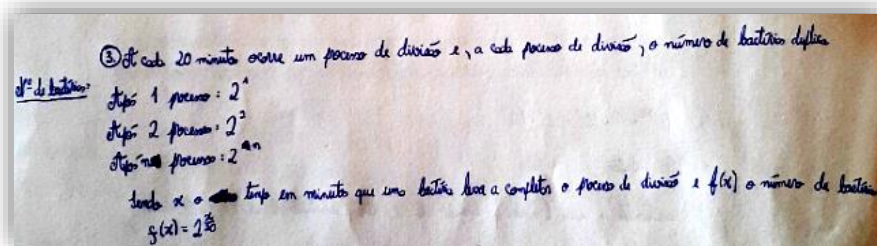


Figura 14: Resposta parcialmente correta do par P13 à alínea 3 da Tarefa 1

O par P7 identificou o modelo exponencial como sendo aquele que se ajusta melhor à situação com base no coeficiente de determinação  $r^2$ , mas não reconheceu que ambos os modelos apresentados no ecrã ( $y = ae^{bx}$  ou  $y = ab^x$ ) representavam o mesmo modelo. Na tentativa de averiguar qual efetivamente se ajusta melhor aos dados, estes alunos recorreram ao menu 'recursão' da calculadora gráfica e representaram numa tabela os dois modelos em função de  $n \in \mathbb{N}$  de modo a comparar os seus valores.

A1P7: Nós podemos dizer que isto é uma função? Nós só temos esses valores.

Prof: Sim, o objetivo da pergunta é de representar a nuvem de pontos na calculadora. Já tentaram representar a nuvem de pontos?

A1P7: Isso sim.

A2P7: E aqui, o modelo matemático... tipo a expressão?

Prof: O que é isto? Como obtiveram isso?

A2P7: Fomos à estatística. Temos aqui o gráfico e escolhemos este.

Prof: Porquê?

A2P7: Escolhemos este porque nós depois fomos a esta parte aqui e vimos que... tivemos a ver aqui.

Prof: Na parte 'recursão'?

A2P7: Sim e fomos ao 20.

A1P7: Quando o  $n$  era 20, temos esse valor, 2,0137 bactérias, e quando escolhemos aquela expressão, só obtemos 1.998...

Prof: Ok, ou seja, conforme esses resultados aqui, escolheram...

A1P7: O  $r^2$  dava sempre 1, portanto nós não sabíamos qual escolher então andamos a experimentar...

Prof: Experimentaram as duas, a base  $e$  e a base 1,035, para ver qual é que se ajustava melhor.

A2P7: Sim.

Prof: E com a outra, que resultados obtiveram na 'recursão'?

A2P7: Quando chegámos ao 20, só obtemos 1,98.

Prof: Escolheram aquele que estava mais próximo de 2.

A1P7: Porque 1,98 bactérias...

Prof: Agora, o que vou pedir, na segunda alínea, podem representar o esboço aqui também, têm espaço suficiente, e vão ter de definir o modelo. Ou seja, vão ter de escolher um deles.

A2P7: E explicar porquê que escolhemos este?

Prof: Sim.

Neste diálogo com o par P7, sobressai alguma ambiguidade em relação ao enunciado. Num contexto real, o número de bactérias é um número finito e discreto. Não faz sentido ter 1,5 bactérias num determinado momento. No entanto, o processo de divisão binária das bactérias não é perfeito, como outros processos biológicos, e, logo, existe sempre algum erro de aproximação do número de bactérias num organismo num determinado momento, em particular para uma população constituída por muitos indivíduos. Daí aproximar este processo biológico com uma função real de variável real. Em retrospectiva, penso que deveria ter dado mais ênfase a estes aspetos no início da tarefa e acrescentar na tabela 'Número aproximado de bactérias'. De qualquer forma, estes alunos tiveram uma iniciativa crítica em relação aos modelos obtidos através da calculadora gráfica e tentaram conferir esses resultados utilizando outra potencialidade da calculadora gráfica (Figura 15).

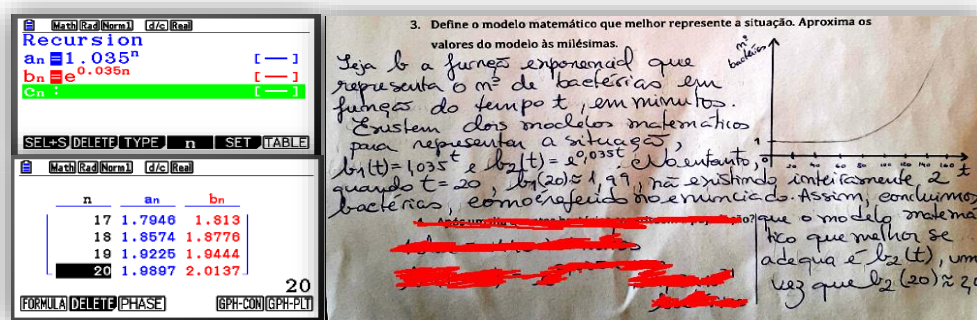


Figura 15: Resposta correta do par P7 às alíneas 2 e 3 da Tarefa 1

### 3.1.3. Exploração do modelo

Nesta fase, os alunos utilizaram o modelo matemático previamente obtido para finalizar a exploração da tarefa. Como os alunos já tinham estudado as funções exponenciais e as suas propriedades algébricas e analíticas, realcei que podiam resolver as questões da tarefa com 'papel e lápis' ou com recurso à calculadora gráfica. Na questão 4, os alunos não revelaram dificuldades na interpretação da questão e no cálculo. No entanto, como nem todos os pares escolheram o modelo exponencial com a mesma base, os resultados que obtiveram foram diferentes consoante o modelo e a aproximação dos coeficientes, como ilustram as respostas dos pares P4 e P5 (Figura 16).

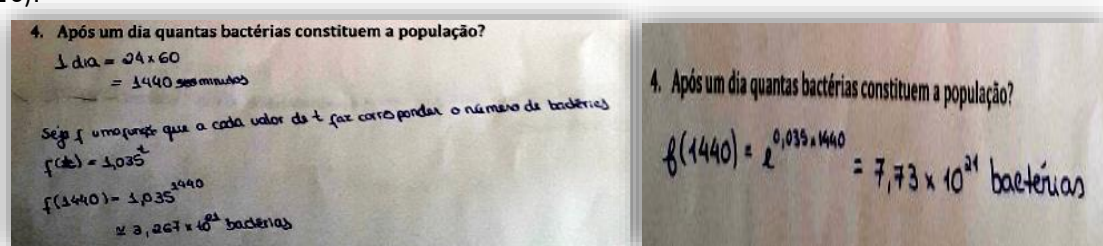


Figura 16: Resposta correta dos pares P4 e P5 à alínea 4 da Tarefa 1

Esta diferença de resultado é significativa, pois estamos a lidar com modelos exponenciais, ou seja, modelos de crescimento cada vez mais acentuado. Infelizmente, não houve tempo para discutir esse aspeto crítico após a exploração da tarefa. Apesar do modelo que o par P3 determinou, sugeri-lhes que podiam responder às restantes questões com o modelo definido na questão 3.

A1P3: Este ou este? É que há pessoas que estão a trabalhar com este e outras com este.

Prof: Tanto faz. Se vocês acharem que os dois são válidos, podem trabalhar com aquele que quiserem.

A1P3: É que os valores estão a dar diferentes na resolução. Elas fizeram com este e aqui dá diferente. E nós com este, dá isto.

Prof: Começaram a trabalhar com qual no início?

A1P3: Com a  $e$  e  $b$ .

A2P3: Assim, este.

Prof: Então continuem a trabalhar.

Relativamente à questão 5, a maioria dos alunos reconheceu que não conseguia resolver esta questão analiticamente e recorreu naturalmente à calculadora gráfica (Figura 17).

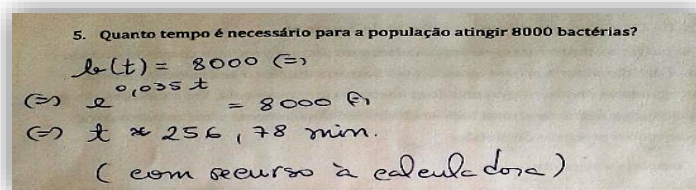


Figura 17: Resposta correta do par P7 à alínea 5 da Tarefa 1

No entanto, alguns pares expressaram dificuldade no seu uso para resolver graficamente esta questão, nomeadamente na definição da janela de visualização, o que revela que não estavam ainda familiarizados com esta ferramenta, como exemplifica os seguintes diálogos com os pares P15 e P13.

Prof: Não ouviram o que eu disse?

A1P15: Podemos usar a calculadora gráfica, mas eu não sei usar.

Prof: Podes, por exemplo, representar graficamente a função...

A1P15: Ah pois é e ver o ponto.

Prof: É uma opção. Há muitas maneiras de fazer.

A2P13: Eu quero calcular isto e aparece isto.

Prof: Deu errado. Ou seja, pode ser um valor muito grande para a nossa janela.

A1P13: Como assim?

Prof: Como deu errado, pode significar que a tua janela não contém aquele valor.

A1P13: Ah...

Os pares que responderam com métodos analíticos à esta questão foram aqueles que definiram na questão 3 um modelo matemático linear, como ilustra a resposta do par P6.

$$\begin{aligned}
 8000 &= 6,447x - 367,962 \\
 8000 + 367,962 &= 6,447x \\
 8367,962 &= 6,447x \\
 x &= 1297,962 \text{ minutos}
 \end{aligned}$$

Figura 18: Resposta incorreta do par P6 à alínea 5 da Tarefa 1

É de salientar que os pares P11 e P13, que definiram com 'papel e lápis' o mesmo modelo exponencial  $y = 2^{\frac{x}{20}}$ , tentaram resolver analiticamente esta questão. Nessa tentativa, ambos os pares realizaram a decomposição em fatores primos do número 8000 com intuito de resolver a equação  $2^{\frac{x}{20}} = 8000$ . Porém, a decomposição em fatores primos de 8000, que é  $2^6 \times 5^3$ , traduziu-se num impasse para estes alunos. O par P13 não desistiu e decidiu recorrer às potencialidades da calculadora gráfica para resolver graficamente a equação, como ilustra a seguinte resolução:

5. Quanto tempo é necessário para a população atingir 8000 bactérias?

$2^{\frac{x}{20}} = 8000$  (1)

$\hookrightarrow 2^{\frac{x}{20}} = 2^6 \cdot 5^3$

Com recurso à calculadora gráfica:

$x \approx 259,316$  minutos

Como os processos de divisão demoram 20 minutos, após formarem-se 8000 bactérias após 260 minutos, pois 260 é o múltiplo de 20 imediatamente a seguir a 259,316

| C.A. |   |
|------|---|
| 8000 | 2 |
| 4000 | 2 |
| 2000 | 2 |
| 1000 | 2 |
| 500  | 2 |
| 250  | 2 |
| 125  | 5 |
| 25   | 5 |
| 5    | 5 |
| 1    | 5 |

Figura 19: Resposta correta do par P13 à alínea 5 da Tarefa 1

Na última questão, os alunos enfrentaram diversas dificuldades, nomeadamente no uso da calculadora gráfica. Como recolhi as resoluções dos alunos antes da instituição dos logaritmos, os alunos só tiveram a oportunidade de responder a esta questão com recurso à calculadora gráfica. À semelhança da questão anterior, os alunos representaram graficamente o modelo exponencial obtido e utilizaram a reta que traduz a equação  $y = 40 \times 10^{12}$  de modo a determinar a interseção entre essas duas curvas para encontrar o tempo necessário para esse efeito. Metade da turma ajustou adequadamente a janela de visualização aos dados recolhidos e responderam corretamente à questão, como ilustra a resposta do par P10 (Figura 20).

6. Sendo o número de células bacterianas no corpo humano aproximadamente igual a  $40 \times 10^{12}$ , em quanto tempo a nossa população de bactérias atingirá esse valor?

$$f(x) = 40 \times 10^{12} \cdot 1.035^x$$

$$1.035^x = 40 \times 10^{12}$$

$$x = 903.70 \text{ minutos}$$

A nossa população de bactérias atinge o valor referido em 903,70 minutos.

Figura 20: Resposta correta do par P10 à alínea 6 da Tarefa 1

No entanto, a representação gráfica de valores desmesurados na calculadora gráfica torna a sua leitura confusa e pouca esclarecedora, o que pode ter dificultado os alunos. Após definição de uma janela de visualização que abrangesse os valores do enunciado ( $[0; 1000] \times [0; 40 \times 10^{12}]$ ), obtivemos o seguinte gráfico (Figura 21).

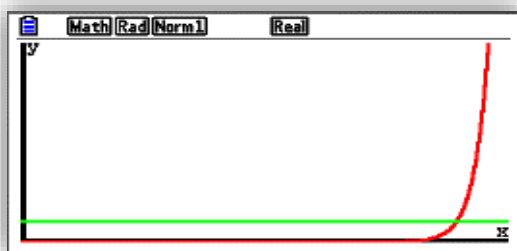


Figura 21: Interseção do gráfico do modelo exponencial com a reta de equação  $y = 40 \times 10^{12}$

Devido às limitações da calculadora gráfica, a curva exponencial coincide com o eixo das abcissas para valores pequenos de  $x$ .

Na exploração da tarefa pelos alunos, circulei na sala de aula de modo a averiguar o ritmo de cada par. Quando me apercebi que todos eles estavam a chegar à última questão da tarefa, mais ou menos após 45 minutos, decidi interromper a tarefa para discutir com os alunos se conheciam algum método analítico que lhes permitisse resolver as questões 5 e 6. A resposta da turma foi negativa, como esperado, e decidi então fazer uma analogia com a função quadrática e a sua função inversa, a raiz quadrada. Em suma, perguntei aos alunos se, em vez de termos uma

função exponencial, tivéssemos uma função quadrática e como poderíamos resolver estas questões. Naturalmente, os alunos responderam que bastava aplicar a raiz quadrada para determinar a solução da equação. Realcei então que as duas funções eram inversas uma da outra e que, da mesma forma, devemos determinar o processo inverso da função exponencial para determinar o valor de  $x$  solução da equação. Daí, questionei a turma sobre as propriedades das funções inversas, nomeadamente acerca da representação gráfica da função em comparação com a representação gráfica da função inversa e sobre os respetivos domínios e contradomínios. Os alunos identificaram o domínio e contradomínio da função exponencial definida na questão 3, mas não conseguiram perceber a ligação que existe com o domínio e contradomínio da respetiva função inversa. Em relação às representações gráficas, os alunos ficaram silenciosos. Tentei representar no emulador da calculadora gráfica a função exponencial, a reta de equação  $y = x$  e a função inversa, como apresentado na seguinte figura (Figura 22), salientando a simetria que existe entre essas duas curvas em relação à reta  $y = x$  e a reciprocidade do crescimento exponencial e logarítmico.

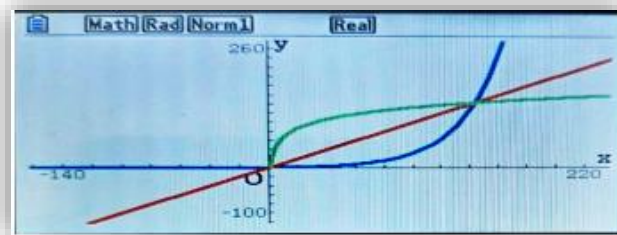


Figura 22: Gráficos do modelo exponencial, da sua função inversa e da reta  $y = x$

De seguida, defini no quadro a relação de reciprocidade entre essas duas funções,  $a^y \Leftrightarrow \log_a x = y$ , realçando que se lê 'logaritmo de  $x$  na base  $a$ ,  $a \neq 1$ '. Para averiguar se os alunos entenderam a noção de logaritmo de um número, propus-lhes a resolução de alguns exemplos sobre o logaritmo de um número numa dada base. Antes de voltar à resolução da tarefa, desafiei a turma a mostrar, com base na bijetividade da função logarítmica, as seguintes propriedades  $a^{\log_a x} = x$  e  $\log_x a^x = x$ . Aproveitei para relembrar que, de uma forma geral, para qualquer valor do domínio de uma função real de variável real bijetiva,  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ .

Prof: Então, alguém consegue demonstrar?

A1P3: Não é só usar?

Prof: Anda nos mostrar então.

A1P3: Então, com aquela fórmula, se substituimos fica que  $a$  é igual...

Prof: Substituis aonde? Aqui? E usas o quê?

A1P3: Aqui eu uso isto.  $a$  elevado a isto vai ser igual a  $a$  elevado a  $y$  e vai ser igual ao expoente.

A2P3: Sim, estamos a provar que um é igual ao outro, portanto está certo.

Voltando à tarefa, perguntei à turma se conseguiam responder à última questão com métodos exclusivamente analíticos. A aluna A1P7 resolveu no quadro esta última questão.

A1P7: O resultado é 910 e basicamente apliquei a relação que acabamos de ver.  
 $1,035^x = 40 \times 10^{12} \Leftrightarrow x = \log_{1,035}(40 \times 10^{12}) \Leftrightarrow x \approx 910,42$

### 3.1.4. Síntese

O seguinte quadro ilustra os elementos da transição entre as fases de modelação, que foram identificados na resolução da tarefa através da análise dos dados. À semelhança do estudo empírico realizado por Stillman et al. (2007), cada transição tem duas partes, sendo a primeira correspondente aos possíveis bloqueios encontrados pelos alunos nessas transições e a segunda correspondente a atividades cognitivas realizadas na exploração da tarefa.

Quadro 1: Síntese de elementos de transição entre as fases de modelação na Tarefa 1

| <b>Problema do mundo real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | → | <b>Enunciado do problema real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Clarificar o contexto do problema</li> <li>▪ Identificar grandeza(s) estratégica(s).</li> <li>▪ Elaborar hipóteses e conjecturas simples</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                 |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Compreender o enunciado e a situação</li> <li>▪ Identificar o n° de bactérias e o tempo em minutos</li> <li>▪ Completar a tabela e identificar algum padrão</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Enunciado do problema real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | → | <b>Modelo matemático</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Identificar as variáveis.</li> <li>▪ Representar os dados matematicamente para que as fórmulas possam ser aplicadas.</li> <li>▪ Elaborar hipóteses relevantes.</li> <li>▪ Escolher tecnologia para efetuar cálculos.</li> <li>▪ Escolher tecnologia para representar graficamente o modelo.</li> <li>▪ Optar por utilizar tecnologia para verificar equações algébricas.</li> </ul> |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ O número de bactérias em função do tempo.</li> <li>▪ Atribuir notação matemática às variáveis.</li> <li>▪ Perceber que o modelo da tarefa não pode ser um modelo linear.</li> <li>▪ Recorrer às potencialidades da calculadora gráfica para efetuar cálculos e organizar os dados numa tabela.</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para realizar regressões estatísticas e identificar o modelo que melhor se ajuste aos dados.</li> <li>▪ Reconhecer que métodos exclusivamente analíticos não são suficientes.</li> </ul> |
| <b>Modelo matemático</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | → | <b>Solução matemática</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Aplicar fórmulas simbólicas apropriadas</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para efetuar cálculos</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para produzir representações gráficas</li> <li>▪ Verificar o modelo algébrico com recurso à tecnologia</li> </ul>                                                                                                                                       |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Interpretar matematicamente as questões e ligá-las com o modelo exponencial obtido</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos complexos e resolver equações</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para representar graficamente o modelo obtido</li> <li>▪ Conferir resultados obtidos analiticamente com a calculadora gráfica</li> </ul>                                                                                                                                                               |
| <b>Solução matemática</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | → | <b>Significado concreto da solução</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Integrar argumentos para justificar interpretações</li> <li>▪ Perceber a necessidade de envolver matemática antes de abordar uma questão interpretativa</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                  |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Utilizar o modelo matemático convenientemente</li> <li>▪ Matematizar o enunciado e interpretá-lo</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

Nesta aula, identificam-se algumas competências de modelação, matemáticas e tecnológicas que foram fundamentais para explorar a tarefa e que vão ao encontro da literatura (Niss & Højgaard, 2019). Uma delas, e que sobressai logo no início, é a interpretação do enunciado. Os alunos identificaram, na leitura do enunciado, as informações relevantes e as que não são. Para além disso, identificaram as variáveis dependente e independente. Todos os alunos reconheceram o papel de cada variável. Os alunos também foram capazes de completar a tabela da primeira questão sem dificuldades, o que mostra que foram capazes de elaborar pequenas conjecturas. Na elaboração do modelo, foi primordial saber como colocar e organizar dados na calculadora gráfica. Saber como trabalhar com as listas presentes na calculadora gráfica, representar a nuvem de pontos associada aos dados e definir corretamente qual lista corresponde a qual variável torna-se essencial na exploração deste tipo de tarefa. A partir da nuvem de pontos, os alunos verificaram qual o modelo que se ajusta melhor aos pontos que representam os dados da tarefa. Logo, os alunos revelaram saber como utilizar e ler as regressões disponíveis na calculadora gráfica. Nesta tarefa, dois pares, os pares P6 e P3, definiram um modelo linear sem verificar se este era efetivamente o melhor perante a situação. Dois outros pares, os pares P11 e P13, definiram um modelo discreto à mão sem reconhecer que podiam utilizar a calculadora gráfica para verificar a veracidade do modelo obtido. Na tentativa de conferir o modelo obtido através da nuvem de pontos, o par P7 tentou utilizar o menu 'regressão' da calculadora gráfica para determinar qual se aproximava melhor aos dados, o que mostra que os alunos desconheciam algumas potencialidades da calculadora gráfica e que não estão muito familiarizados com esta ferramenta. Na elaboração da tarefa, não achei necessário implementar as últimas fases do ciclo de modelação matemática que consiste na revisão do modelo e dos resultados obtidos, pois a calculadora gráfica permite, na fase da definição do modelo, averiguar qual se ajusta melhor aos dados. De qualquer forma, sendo a primeira vez que exploramos uma tarefa de modelação com recurso à calculadora gráfica, acho natural que os alunos tenham revelados tais dificuldades.

Para a exploração das restantes questões, foi fundamental aplicar conhecimentos matemáticos. Com base no enunciado, os alunos traduziram a informação e ligaram-na com o modelo obtido. Diferenciar o papel do objeto e da imagem de uma função foi natural pelos alunos, que não apresentaram dificuldades na matematização do enunciado. Além disso, reconhecer a necessidade de recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos, representar gráficos, resolver equações e conferir resultados torna-se incontornável na exploração deste tipo de tarefa. A maioria dos alunos tentou resolver com recurso à calculadora gráfica as restantes questões, mas dois

pares, os pares P11 e P13, recorreram a métodos exclusivamente analíticos. Depois de esgotaram as propriedades algébricas das funções exponenciais que conheciam, encontraram-se bloqueados, mas o par P13 apercebeu-se que podia utilizar de alguma forma a calculadora para ultrapassar este impasse. Isto mostra a constante pesquisa de solução dos alunos e a percepção das ferramentas que estão ao seu dispor. Este tipo de tarefa evidencia a necessidade da parte dos alunos de saber representar graficamente uma função, realizar folhas de cálculo e definir rigorosamente uma janela de visualização adequada à situação, embora esta pode também conduzir a representações confusas quando temos de lidar com grandezas desmesuradas (Campos et al., 2015; Consciência, 2013).

No que diz respeito à introdução das funções logarítmicas, observa-se da parte dos alunos lacunas matemáticas relativamente ao conceito de função inversa. Embora sejam conceitos estudados no 10.º ano, não fazem parte das aprendizagens essenciais (Ministério da Educação, 2018). Os alunos utilizam constantemente propriedades diretamente ligadas às funções inversas na resolução de equações ou no estudo de funções e penso que essas não são devidamente evidenciadas ao longo da escolaridade, o que pode justificar tais lacunas para alunos do 12.º ano. Observa-se da parte dos alunos alguma dificuldade relativamente à notação dos logaritmos, em particular no papel da base, do objeto e da imagem. Por esses motivos, em concordância com a literatura (Weber, 2002; Weber, 2017), considero relevante introduzir o conceito de função logarítmica reforçando a dualidade existente com a função exponencial, quer para justificar propriedades analíticas ou algébricas, através de uma atividade de modelação (Kenney & Kastberg, 2013; Sawalha, 2018).

### **3.2. Introdução à derivada da função logarítmica**

A introdução da derivada da função logaritmo resultou da resolução de uma tarefa de modelação sobre a intensidade sonora em decibel.

**Tarefa:** O que é um Decibel?

Nos seus primeiros estudos de acústica, Bell, inventor do telefone, percebeu que a variação de som que o ouvido humano pode sentir não acompanha uma escala linear. Se dobrarmos a amplitude de um sinal, o nosso ouvido não capta esta transformação. Com base nas suas experiências, Bell resolveu utilizar uma escala logarítmica para representar a amplificação ou a atenuação de um sistema. Para quantificar a redução ao nível acústico sobre um cabo telefónico padrão com 1 milha de comprimento, Bell criou a unidade de medida TU (Transmission Unit). Esta unidade de medida foi renomeada *Bel*. Com a prática, percebeu-se que a unidade era muito grande e decidiu-se então dividir a unidade *Bel* em dez, criando-se assim o *Decibel* (dB).

| Fonte sonora           | Intensidade sonora (dB) | Razão da intensidade sonora captada $I$ com o limiar da audibilidade $I_0$ |
|------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Murmúrios              | 10                      | 10                                                                         |
| Conversa normal        | 20                      | 100                                                                        |
| Quarto calmo           | 25                      | 316,2                                                                      |
| Biblioteca             | 30                      | 1000                                                                       |
| Rua residencial        | 40                      | 10000                                                                      |
| Máquina de lavar loiça | 45                      | 31622,8                                                                    |
| Escritório             | 50                      | 100 000                                                                    |
| Sala de aula           | 55                      | 316 227,8                                                                  |
| Motor de um carro      | 60                      | 1 000 000                                                                  |
| Aspirador              | 65                      | 3 162 277,7                                                                |
| Trânsito congestionado | 70                      | 10 000 000                                                                 |
| Cantina escolar        | 80                      | 100 000 000                                                                |

1. Com base nos valores da tabela, comenta a afirmação: "Bell percebeu que a variação de som que o ouvido humano pode sentir não acompanha uma escala linear".
2. Recorrendo à calculadora gráfica, representa graficamente a nuvem de pontos da intensidade sonora (dB) em função da razão  $\frac{I}{I_0}$ . Que modelo matemático melhor representa esta situação?
3. Tendo como referência o modelo que definiste, compara a variação da intensidade sonora nos intervalos [10; 30] e [1010; 1030]. O que podes concluir?
4. Determina a taxa de variação instantânea da intensidade sonora para  $\frac{I}{I_0} = 15$
5. Determina a taxa de variação instantânea da intensidade sonora em função da razão  $\frac{I}{I_0}$ .
6. Descreve o comportamento da variação da função que modela a situação em estudo, referindo onde esse crescimento é mais acentuado.

Com base nos dados da tabela e recorrendo à calculadora gráfica, os alunos tinham de identificar qual era o modelo que melhor se ajusta aos dados apresentados e, com base nesse modelo, responder às restantes questões. Esta tarefa foi resolvida em pares, sendo discutidas e analisadas as conclusões retiradas no grupo turma. Na Tabela 2 apresentam-se os resultados das respostas dos alunos.

Tabela 7: Frequência dos diferentes tipos de resposta dos alunos na Tarefa 2 ( $n = 15$ )

| Fases de modelação                                            | Tipos de Resposta |    |   |    |
|---------------------------------------------------------------|-------------------|----|---|----|
|                                                               | C                 | PC | I | NR |
| Compreensão do enunciado da tarefa (alínea 1)                 | 9                 | 3  | 1 | 2  |
| Análise dos dados/Construção e validação do modelo (alínea 2) | 8                 | -  | 7 | -  |
| Exploração do modelo (alínea 3)                               | 3                 | 5  | 5 | 2  |
| Exploração do modelo (alínea 4)                               | 5                 | -  | 7 | 3  |
| Exploração do modelo (alíneas 5 e 6)                          | -                 | -  | - | 15 |

### 3.2.1. Compreensão do enunciado da tarefa

A interpretação do enunciado da tarefa não fez emergir dúvidas aos alunos, nenhum par questionou o significado da expressão "escala linear" contida na questão. A maioria dos pares não encontrou dificuldades para conferir a veracidade da afirmação do Bell, reconhecendo que, para

os dados verificarem uma escala linear, deve existir alguma razão de proporcionalidade direta entre eles, como ilustra a resolução do par P1 (Figura 23).

1) A afirmação é verdadeira, tendo em conta que não é possível verificar uma razão de proporcionalidade direta entre as duas variáveis presentes na tabela.

Ex:  $\frac{100}{20} \neq \frac{316,2}{25}$

Figura 23: Resposta correta do par P1 à alínea 1 da Tarefa 2

Algumas respostas, consideradas parcialmente corretas, apresentam uma justificação incompleta ou errada, o que pode derivar de uma interpretação errónea do enunciado ou dos dados da tabela, tal como revela a resposta dada pelo par P10 (Figura 16).

1) Com base nos dados da tabela verificamos que a variação de som que o ouvido humano pode ouvir não acompanha uma escala linear, uma vez que se trata de uma função exponencial, daí os valores ~~de~~ terem aumentos desproporcionais.

Figura 24: Resposta parcialmente correta do par P10 à alínea 1 da Tarefa 2

No momento de discussão em grupo turma, um aluno do par P3 apresentou a sua proposta de resolução à turma.

A1P3: Nós fizemos... A razão da intensidade sonora captada, que é o  $I$ , com o limiar da audibilidade. E na intensidade sonora, nós temos o valor na coluna ao lado. E então, fomos determinar o  $I_0$ . Determinamos o  $I_0$  da intensidade sonora igual a 20, 25 e 30. Depois, fizemos a diferença e não deu igual.

Este par entendeu o conceito de “escala linear”, mas interpretou mal os dados da tabela. Assumiram que a intensidade sonora captada  $I$  era a mesma que a intensidade sonora em dB, como se pode verificar na sua resolução (Figura 25).

1.  $r =$  razão da intensidade sonora  $p$  captada  $I$  com o limiar da audibilidade  $I_0$ .

$$r = \frac{I}{I_0} \quad r = 100 \quad 100 = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I_0 = \frac{I}{100} \Rightarrow I_0 = 0,2000$$

$$r = 316,2 \quad 316,2 = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I_0 = 0,0791$$

$$r = 1000 \quad 1000 = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I_0 = 0,0300$$

$$[20,25] = 0,0791 - 0,2000 = -0,1209$$

$$[25,30] = 0,0300 - 0,0791 = -0,0491$$

Como os valores ~~não~~ da diferença são diferentes provamos que a variação do som que o ouvido humano pode sentir não acompanha uma escala linear.

Figura 25: Resposta incorreta do par P3 à alínea 1 da Tarefa 2

### 3.2.2. Análise dos dados/Construção e validação do modelo

Apesar de os alunos já terem realizado uma atividade de modelação matemática, a noção de modelo matemático não ficou clara para todos, como também a utilização da calculadora gráfica para determinar esse modelo. Oito pares de alunos identificaram devidamente o papel de cada variável perante a situação da tarefa, organizaram corretamente os dados na calculadora gráfica e verificaram que o modelo logarítmico era aquele que melhor se adequa aos dados, como ilustra a resolução do par P5 (Figura 26).

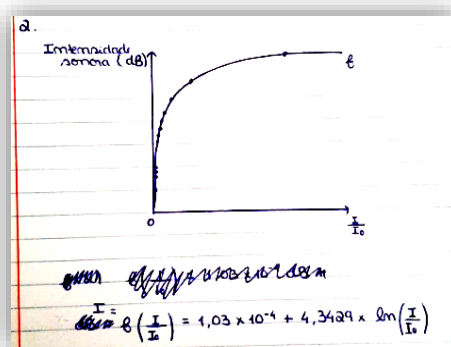


Figura 26: Resposta correta do par P5 à alínea 2 da Tarefa 2

Alguns alunos não tinham conseguido encontrar o modelo correto, pois inverteram as variáveis ou as listas da tabela do menu estatística. Por defeito, a lista 1 é atribuída à variável independente  $x$  e a lista 2 à variável dependente  $y$ . No caso desta tarefa, a primeira coluna da tabela de dados corresponde à variável dependente e a segunda coluna corresponde à variável independente. Ao inverter o papel das variáveis, esses alunos obtiveram naturalmente um modelo

exponencial. No entanto, outros alunos não reconheceram o papel das grandezas em jogo e representaram graficamente a nuvem de pontos da razão  $\frac{I}{I_0}$  em função da intensidade sonora em dB, o que induziu um modelo exponencial, como exemplifica a resposta dada pelo par P13 (Figura 27).

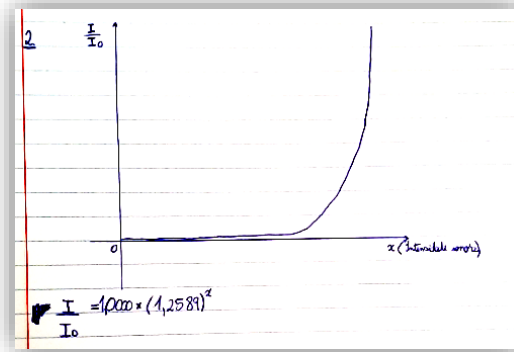


Figura 27: Resposta incorreta do par P13 à alínea 2 da Tarefa 2

No momento de discussão em grupo turma, um aluno do par P1 apresentou a sua resolução no quadro.

Prof: Como é que fizeram?

A1P1: Fizemos na tabela, no menu estatística.

Prof: Ou seja, colocaram os dados na tabela.

A1P1: Sim.

Prof: E depois?

A1P1: Depois, sabemos que a razão da intensidade sonora captada  $I$  com o limiar da audibilidade  $I_0$  é o nosso  $x$  e que a intensidade sonora em dB é o  $y$ .

Prof: O  $I$  sobre  $I_0$  é o  $x$  e a intensidade sonora em dB é o  $y$ . Aqui, o que fazer na calculadora?

Alunos: Trocar as variáveis.

Prof: Trocar as listas.

Alunos: Sim.

Prof: Porque o  $x$  está na lista 2 e o  $y$  está na lista 1. Ou seja, vou aqui no SET e troco as listas. Quem não teve o cuidado de verificar as listas basicamente obteve o modelo inverso.

Alunos: Pois.

Prof: E obtiveram então uma exponencial.

Alunos: Sim.

Prof: O que vamos obter aqui?

Alunos: Uma logarítmica.

Prof: Uma logarítmica. Ok, obtiveram esses valores, esses coeficientes?

Alunos: Sim.

### 3.2.3. Exploração do modelo

Relativamente à questão 3, com “variação” esperava que os alunos recorressem à definição da taxa média de variação num intervalo. Porém, a variação de uma função num intervalo  $[a, b]$  corresponde à diferença  $f(b) - f(a)$ . Em retrospectiva, deveria ser acrescentado e destacado a palavra “taxa” no enunciado. De qualquer modo, a análise das produções dos alunos teve em consideração a definição de variação de uma função num intervalo  $[a, b]$ . Dessa análise, observa-se que os alunos calcularam a diferença das imagens nos extremos desses intervalos, como ilustra a resposta do par P15 (Figura 28).

Handwritten calculations on lined paper:

$$f(1030) = 30,0436$$
$$f(1030) = 30,1287$$
$$19,7714 - 10 = 9,7714$$
$$30,1287 - 30,0436 = 0,0851$$

R: Podemos concluir que a variação no intervalo  $[1010; 1030]$  é menor do que no intervalo  $[10; 30]$

Figura 28: Resposta correta do par P15 à alínea 3 da Tarefa 2

No que toca às respostas parcialmente corretas, alguns alunos calcularam e compararam devidamente as variações do modelo obtido nos determinados intervalos, mas retiraram conclusões precipitadas ou erradas, nomeadamente sobre a monotonia do modelo, como revela a resolução do par P7 (Figura 29).

Handwritten calculations on lined paper:

$$3. \Delta[10; 30] = 1,03 \times 10^{-4} + 4,3429 \ln 30 - 1,03 \times 10^{-4} + 4,3429 \ln 10$$
$$= 4,7712$$
$$\Delta[1010; 1030] = 1,03 \times 10^{-4} + 4,3429 \ln 1030 - 1,03 \times 10^{-4} + 4,3429 \ln 1010$$
$$= 0,0852$$
$$\Delta[10; 30] > \Delta[1010; 1030]$$

Podemos concluir que a função está a estabilizar

Figura 29: Resposta parcialmente correta do par P7 à alínea 3 da Tarefa 2

Os pares que definiram um modelo exponencial formularam respostas incorretas, como mostra a resposta do par P14 (Figura 30). Para além disso, alguns destes pares não responderam ou mal começaram a calcular as variações pedidas. De facto, com o modelo exponencial deve-se calcular a variação no intervalo  $[1010; 1030]$ . No entanto, a calculadora gráfica não permite realizar esse tipo de cálculo. Indicia-se que esses alunos se confrontaram com algumas limitações da calculadora gráfica.

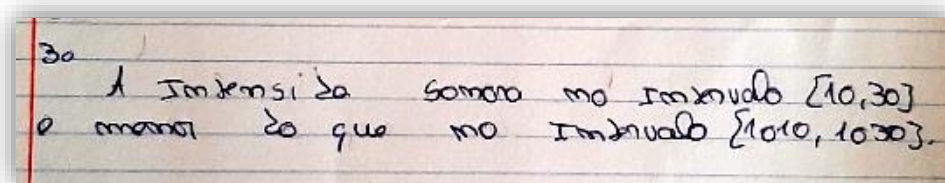


Figura 30: Resposta incorreta do par P7 à alínea 3 da Tarefa 2

No que toca à alínea 4, como ainda não fora introduzida a primeira derivada das funções logarítmicas, os alunos não tinham possibilidade de resolver analiticamente esta questão. Numa perspetiva de deixar os alunos explorar o seu método de resolução, achei pertinente colocar algumas dicas no quadro, tais como:  $(1,03 \times 10^{-4} + 4,343 \ln x)' = 4,343(\ln x)'$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ . Estas dicas permitiam resolver analiticamente as restantes alíneas. No entanto, nenhum par tentou explorar esse método de resolução. Cinco pares de alunos reconheceram que podiam recorrer à calculadora gráfica para determinar a taxa de variação instantânea do modelo no ponto de abcissa 15, como revela a resposta do par P1 (Figura 31).

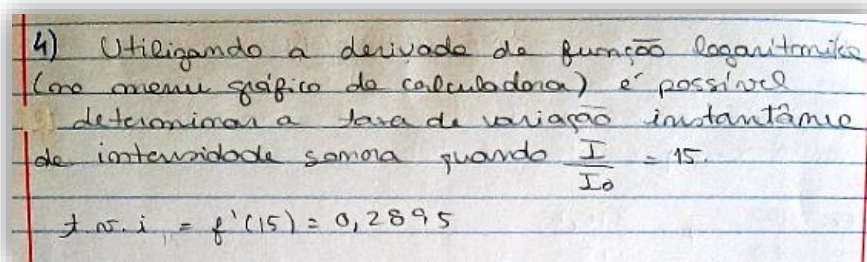


Figura 31: Resposta correta do par P1 à alínea 4 da Tarefa 2

No debate em grupo turma, quando o par P12 foi apresentar a sua proposta de resolução, ficou claro que a maioria dos alunos desconheciam como determinar a primeira derivada num ponto com recurso à calculadora gráfica.

Prof: Agora, pergunta número 4. O que é pedido?

A1P3: Determinar a taxa de variação instantânea.

Prof: Determinar a taxa de variação instantânea no ponto?

A1P1:  $x$  igual a 15.

Prof:  $\frac{I}{I_0}$  igual a 15. Ok, como fizeram?

A1P12: Nós fomos a primeira derivada.

Prof: Calculamos a primeira derivada. E como calcularam essa derivada?

A1P12: Na máquina.

Vários alunos: Pois.

Outros alunos: Ah!

Prof: Na máquina. Como fizeram então?

A1P12: Seleccionamos o Y onde temos a expressão da função.

Prof: Temos a expressão da função e depois?

A1P12: Seleccionamos o  $Y_2$ .

Prof: Mas o quê que escrevo? Fizeste no gráfico? No menu gráfico?

A1P12: Não. Fizemos separado e depois fizemos no  $Y$ .

Prof: Como fizeram então, explica-nos.

A1P12: 'Option', 'Calc',  $\frac{d}{dx}$  e agora escolhi o nosso  $Y$ .

Prof: E aqui o 15. O quê que isso vai nos dar? A primeira derivada no ponto 15. Ou seja,  $f'$  linha de 15.

A1P12: Nós aí não pusemos o 15, mas se fizemos depois o 'Y-calc' é igual.

Prof: Ok, então vocês aqui fizeram  $x$  igual a?

A1P12:  $x$  igual a  $x$ .

A2P6: Vai chegar ao mesmo.

Prof: Vai dar ao mesmo, exatamente.

A1P2: Pois é, depois metemos  $x$  igual a 15.

Prof: E depois?

A1P12: 'G-solve', 'Y-calc' e pusemos  $x$  igual a 15.

Dentre das respostas incorretas, surgem as dos pares que trabalharam com um modelo exponencial, como também de quem não reconheceu a taxa de variação instantânea num determinado ponto como sendo a primeira derivada nesse ponto (Figura 32).

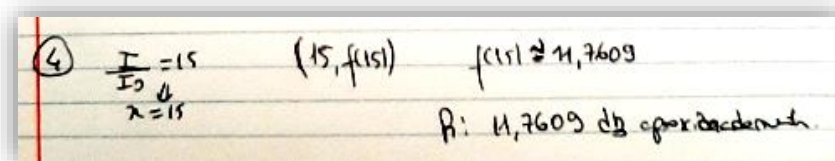


Figura 32: Resposta incorreta do par P2 à alínea 4 da Tarefa 2

O par P2 somente calculou a imagem de 15 por  $f$ , sendo  $f$  a função que representa o modelo definido na alínea 2. Os pares P5 e P15 associaram a imagem de 15 por  $f$  à primeira derivada no ponto de abscissa 15 (Figura 33).

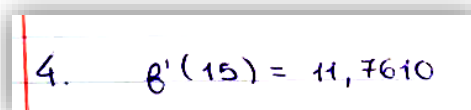


Figura 33: Resposta incorreta do par P5 à alínea 4 da Tarefa 2

Relativamente à alínea 5, poucos grupos tentaram de a resolver explorando as dicas que coloquei no quadro. O par P4 percebeu que tinha de utilizar a definição formal da primeira derivada, mas não conseguiu desenvolver os cálculos. Na análise das produções dos alunos, nenhum par propôs uma resolução para esta questão ou escreveu a definição da primeira derivada.

A1P4: Na 5 temos de calcular o limite disto?

Prof: Porquê? Qual é a pergunta?

A1P4: (lê a pergunta).

Prof: É a taxa de variação instantânea. Qual é a definição?

A2P4: É a derivada.

- A1P4: Mas nós já fizemos isso no 4.  
 Prof: Sim, mas vocês no 4 fizeram num ponto.  
 A2P4: Então nós vamos ter de calcular a derivada disto?  
 Prof: Sim, num ponto qualquer do seu domínio.

Como tais dicas não ficaram claras para todos os alunos, tomei a iniciativa de explorar o cálculo do limite da primeira derivada, tentando que fossem eles a desencadear elementos-chave que permitissem seguir para a próxima etapa do cálculo (Figura 34).

$$\begin{aligned} \text{Seja } x_0 \in \mathbb{R}^+ \\ f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &\stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,343 \ln(x_0+h) - 4,343 \ln(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Figura 34: Cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 realizado com os alunos no quadro

- Prof: Aqui, o que posso fazer?  
 A1P2: Dividir.  
 A1P4: Isso é parecido com aquele limite.  
 Prof: Dividir o quê?  
 A1P9: Meter o  $\ln x$  em evidência.  
 Prof: Mas o  $\ln x$  é uma função, não é uma incógnita ou um valor que podes meter em evidência.  
 A1P5: Não, como temos a subtração, eles estão a dizer dividir.  
 Prof: Ou seja, usar a regra operatória.

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,343 \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}$$

Figura 35: Continuação do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro

- A1P1: E agora se dividimos tudo por  $x_0$ ...  
 Prof: O objetivo é chegar a qualquer coisa do género. Nós conhecemos este limite, o limite do número de Neper.  
 A1P1: Mas nós não temos nenhum expoente.  
 Prof: Exato. Antes disso, vamos simplificar a nossa expressão. Reparem, naquela fração,  $x_0$  mais  $h$  sobre  $x_0$ .  
 A1P1: É 1 mais  $h$  sobre  $x_0$ .  
 A1P2: E vezes 1 sobre  $h$ .  
 Prof: Ok, ainda temos uma indeterminação, correto?  
 Alunos: Temos.

$$= 4,343 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h}$$

Figura 36: Continuação do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro

Nesta fase do cálculo, importava levantar a indeterminação:

Prof: Agora, temos  $h$  sobre  $x_0$ . Se eu quisesse colocar o  $h$  sobre  $x_0$ , o que temos de fazer?

A1P4: Regra do pneu.

Prof: O que obtemos?

A1P4:  $x_0$  sobre  $h$  vezes...

Prof:  $x_0$  sobre  $h$ ... para obtermos qualquer coisa do género  $h$  sobre  $x_0$ . Posso escrever o inverso, que é igual a 1 sobre  $x_0$  sobre  $h$ .

$$= 4.343 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)}{\frac{h}{x_0}} \times \frac{1}{x_0}$$

$$= \frac{4.343}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0}{h} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)$$

Figura 37: Continuação do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro

Seguiu-se a última parte do cálculo onde tivemos de usar a continuidade do logaritmo para poder colocar o limite dentro do logaritmo neperiano.

Prof: Estamos quase. O que falta?

A1P4: O limite do logaritmo é igual ao logaritmo do limite?

Prof: Tens a certeza ou não?

A1P4: Não, estou a perguntar.

Prof: É exatamente isso, mas porquê? Eu posso aqui trocar o limite e o  $\ln$ . Porquê? Porque a função logaritmo neperiano, aliás, as funções logarítmicas são contínuas no seu domínio. Portanto, o limite da função é igual à função do limite. Aqui para justificar, a função  $\ln$  é contínua. Então temos que 1 sobre  $x_0$  vezes  $\ln$  de limite...

A1P2: Não temos de pôr  $x_0$  sobre  $h$  a tender para mais infinito?

Prof: Sim, exatamente. Já temos o limite que queremos. Reparem que ainda temos de justificar que quando  $h$  tende para 0,  $x_0$  sobre  $h$  tende para...

Alunos: Mais infinito.

Prof: Aqui, vocês podem fazer a mudança de variável ou então justificar ao lado. De qualquer modo, tem de aparecer uma justificação. Depois, este limite é igual ao número de Neper. Portanto, é igual a  $e$ . Temos 1 sobre  $x_0$  vezes  $\ln$  de  $e$ . Quanto é que vale este número? Qual é o logaritmo na base  $e$  de  $e$ ?

Alunos: É 1.

A1P2: Ou seja, dá 1 sobre  $x_0$ .

Prof: Acabamos de calcular a derivada de  $\ln$  de  $x$ . Como aquele  $x_0$  é um valor arbitrário, a derivada é então isto para qualquer valor do domínio.

$$= \frac{4.343}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}$$

$$= \frac{4.343}{x_0} \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)$$

$$= \frac{4.343}{x_0} \times \ln e$$

$$= \frac{4.343}{x_0}$$

Figura 38: Fim do cálculo da primeira derivada do modelo da Tarefa 2 no quadro

Constata-se que os alunos tiveram de recorrer às propriedades algébricas dos logaritmos, nomeadamente às regras operatórias, e aos seus conhecimentos acerca de limites e continuidade. Porém, o levantamento de indeterminação neste limite foi um desafio elevado para os alunos.

No que diz respeito à última alínea da tarefa, como se aproximava o final da aula, optei por explorar e discutir com os alunos a monotonia da função logaritmo através da representação gráfica do modelo e das tangentes ao gráfico, recorrendo ao emulador da calculadora gráfica (Figura 39).

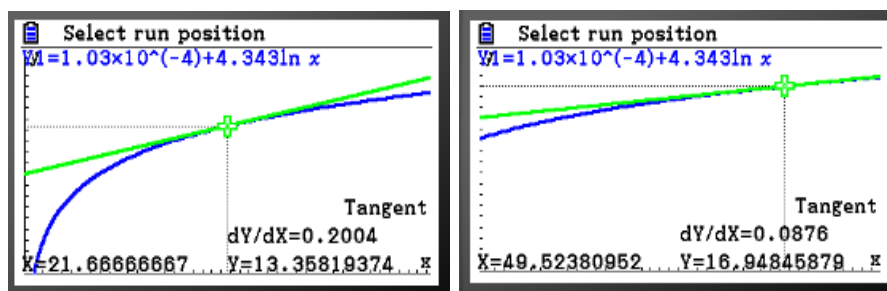


Figura 39: Representação gráfica do modelo determinado na calculadora gráfica

À medida que o valor de  $x$  aumenta, a inclinação da tangente nesse valor aproxima-se de 0. Ou seja, apesar de ter um crescimento ilimitado, este é mais acentuado no início, mas parece estabilizar a partir de um determinado valor de  $x$ .

Prof: O que nos diz a derivada relativamente ao gráfico?

A1P5: A primeira?

Prof: Sim, a primeira derivada.

A1P5: A monotonia.

Prof: Sim, podemos determinar a monotonia. Reparem que a inclinação da tangente é sempre positiva.

Alunos: Sim.

Prof: Ou seja, a função  $\ln$  é sempre crescente. Vocês já sabiam isso, mas aqui podemos verificar. E relativamente ao crescimento da função...

A1P5: É mais acentuado.

Prof: Mais uma vez, podemos observar que, no início, cresce muito rapidamente.

A1P4: Sim, depois começa a diminuir.

Prof: Quando  $x$  tende para 0,  $f'$  tende para mais infinito.

Alunos: Sim.

Prof: É o que se pode ver aqui no gráfico. O declive da tangente é cada vez maior quando  $x$  tende para 0. E quando  $x$  tende para mais infinito,  $f'$  tende para 0.

No final da aula, escrevemos rigorosamente a definição da primeira derivada da função logaritmo neperiano e deduzimos a primeira derivada de uma função logaritmo de base qualquer através das propriedades algébricas dos logaritmos. Alguns alunos mostraram dificuldades no

cálculo da derivada relativamente às regras de derivação e à mudança de base devido à notação atípica dos logaritmos.

### 3.2.4. Síntese

O Quadro 2 exemplifica os elementos da transição entre as fases de modelação que foram identificados na resolução da Tarefa 2.

Quadro 2: Síntese de elementos de transição entre as fases de modelação na Tarefa 2

| <b>Problema do mundo real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | → | <b>Enunciado do problema real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Clarificar o contexto do problema</li> <li>▪ Identificar grandeza(s) estratégica(s)</li> <li>▪ Elaborar hipóteses e conjecturas simples</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Compreender o enunciado e a situação</li> <li>▪ Identificar a intensidade sonora em dB e a razão da intensidade sonora captada <math>I</math> com o limiar de audibilidade <math>I_0</math></li> <li>▪ Reconhecer que as grandezas não verificam uma relação linear</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Enunciado do problema real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | → | <b>Modelo matemático</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Identificar as variáveis</li> <li>▪ Representar matematicamente os dados para que as fórmulas possam ser aplicadas</li> <li>▪ Perceber que a variável independente deve ser definida de forma única</li> <li>▪ Elaborar hipóteses relevantes</li> <li>▪ Escolher tecnologia para efetuar cálculos</li> <li>▪ Escolher tecnologia para representar graficamente o modelo</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para verificar equações algébricas</li> </ul> |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ A intensidade sonora em dB em função da razão</li> <li>▪ Atribuir notação matemática às variáveis</li> <li>▪ Manter a coerência das notações ao longo da exploração da tarefa</li> <li>▪ Perceber que o modelo não pode ser um modelo linear</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos e organizar os dados numa tabela</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para realizar regressões estatísticas e identificar o modelo que melhor se ajuste aos dados.</li> <li>▪ Reconhecer que métodos exclusivamente analíticos não são suficientes</li> </ul> |
| <b>Modelo matemático</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | → | <b>Solução matemática</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Aplicar fórmulas simbólicas apropriadas</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para efetuar cálculos</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para produzir representações gráficas</li> <li>▪ Verificar o modelo algébrico com recurso à tecnologia</li> </ul>                                                                                                                                                                                                        |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Interpretar matematicamente as questões e ligá-las com o modelo logarítmico obtido</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos complexos e resolver equações</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para representar graficamente o modelo obtido</li> <li>▪ Conferir resultados obtidos analiticamente com a calculadora gráfica</li> </ul>                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Solução matemática</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | → | <b>Significado concreto da solução</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Integrar argumentos para justificar interpretações</li> <li>▪ Perceber a necessidade de envolver matemática antes de abordar uma questão interpretativa</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Utilizar o modelo matemático convenientemente</li> <li>▪ Matematizar o enunciado e interpretá-lo</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

A exploração de tarefas de modelação no estudo das funções logaritmos com recurso à calculadora gráfica faz emergir que, na compreensão e interpretação do enunciado, a maioria dos alunos identificou o papel de cada variável e demonstrou que estas não correspondiam a uma escala linear. O par P3 percebeu que estas grandezas não verificavam nenhuma relação linear,

mas sentiu dificuldades na leitura do enunciado, pois estes alunos assumiram que a intensidade sonora em dB era a mesma que a intensidade sonora captada  $I$ .

Apesar de já ter realizado uma atividade de modelação com os alunos, destaca-se desta aula que o conceito de modelo não tinha ficado claro para todos e que o desconhecimento de certas potencialidades da calculadora gráfica dificultou a exploração autónoma da tarefa pelos alunos. Efetivamente, quase metade dos alunos revelou dificuldades em organizar os dados numa tabela consoante a situação da tarefa, nomeadamente na definição das listas. Estes alunos não tiveram o cuidado de verificar as definições da tabela antes de representar graficamente a nuvem de pontos. Em consequência, definiram um modelo exponencial em vez de um modelo logarítmico. Com um modelo exponencial, os alunos não podiam resolver a questão 3, pois a calculadora gráfica não permite calcular exponencias de valores tão grandes. Perante esses pares, optei por não dizer explicitamente onde se encontrava o erro, mas tentei fazê-los verificar se o erro vinha do modelo. No entanto, como os alunos ainda estavam pouco familiarizados com a utilização da calculadora gráfica de tabelas de dados e de curvas de regressão, nenhum par conseguiu identificar que as listas da tabela estavam trocadas. O facto de os alunos não trabalharem com o modelo correto encravou a exploração da tarefa e, logo, o objetivo desta. Para as restantes aulas da minha intervenção pedagógica, decidi então sempre verificar se os grupos estavam a trabalhar com um modelo adequado ao contexto da tarefa.

No que diz respeito às alíneas 3, 4 e 5, a maioria dos alunos reconheceu a necessidade de recorrer à calculadora gráfica para efetuar e conferir cálculos, representar graficamente o modelo e determinar a primeira derivada do modelo num ponto. Depois de discutir em grupo turma das potencialidades da calculadora gráfica que permitem resolver este tipo de questões, ficou claro que é fundamental dominar conceitos matemáticos relacionados com o estudo de função real de variável real de modo a poder usufruir eficientemente da calculadora gráfica, quer para determinar ou conferir resultados. Sem bases teóricas sólidas, os alunos não são capazes de identificar se o que aparece no ecrã da calculadora gráfica é matematicamente válido e se é coerente em relação à situação da tarefa (Consciência, 2013).

Além de encontrar o modelo matemático que melhor se ajuste aos dados, esta tarefa exigia relacionar conceitos matemáticos avançados (cálculo da taxa da variação média e da variação instantânea) com uma nova função, o que a tornou muito trabalhosa. A complexidade do cálculo da derivada da função logarítmico tornou a discussão um pouco unilateral apesar de ter tentado ‘puxar’ os alunos na resolução de cada etapa do cálculo. No entanto, observa-se da parte dos

alunos algumas lacunas relativamente à definição da primeira derivada, visto que nenhum par a escreveu nas produções que recolhi. No momento de debate em grupo turma, destacou-se algumas dificuldades sentidas pelos alunos, nomeadamente no que toca às regras operatórias dos logaritmos e às regras de derivação. Também identifiquei dificuldades na representação gráfica das funções logarítmicas e algumas confusões com a representação gráfica das funções exponenciais. Assim, acho relevante introduzir a primeira derivada das funções logarítmicas através de uma tarefa de modelação, realçando as propriedades desta de modo a evidenciar e diferenciar o crescimento logarítmico do crescimento exponencial (Kenney & Kastberg, 2013; Weber, 2017).

### 3.3. Sistematização de conhecimentos de funções logarítmicas

Depois da introdução da função logaritmo e da sua derivada com duas tarefas de modelação nas duas primeiras aulas, seguiu-se a aplicação de conhecimentos adquiridos no estudo da função logaritmo através da resolução de três tarefas. A primeira tarefa a ser explorada foi a seguinte:

#### Tarefa: O pH de uma substância

A acidez de uma substância é medida pela concentração (em moles por litro) de iões de Hidrogénio ( $H^+$ ) na substância. O processo normalizado de descrever esta concentração é definir o pH (potencial Hidrogeniónico) de uma substância, o que indica se uma substância é ácida, neutra ou básica. A escala de pH varia entre 0 e 14 na temperatura de 25°C. Se o valor do pH for igual a 7, o meio da substância será neutro. Mas se o pH for menor que 7, será ácido, e se for maior que 7, básico. A seguinte tabela apresenta concentrações de iões  $H^+$  e os respetivos valores do pH de substâncias presente no nosso quotidiano.

| Substâncias     | Concentração de iões $H^+$ | pH   |
|-----------------|----------------------------|------|
| Sumo de limão   | $3,981 \times 10^{-3}$     | 2,4  |
| Vinagre         | $1,2589 \times 10^{-3}$    | 2,9  |
| Sumo de maçã    | $3,1623 \times 10^{-4}$    | 3,5  |
| Cerveja         | $3,1623 \times 10^{-5}$    | 4,5  |
| Café            | $1,0 \times 10^{-5}$       | 5,0  |
| Chá             | $3,1623 \times 10^{-6}$    | 5,5  |
| Leite           | $3,1623 \times 10^{-7}$    | 6,5  |
| Água pura       | $1,0 \times 10^{-7}$       | 7,0  |
| Sangue          | $3,981 \times 10^{-8}$     | 7,4  |
| Água do mar     | $1,0 \times 10^{-8}$       | 8,0  |
| Sabonete de mão | $6,3096 \times 10^{-10}$   | 9,2  |
| Amónia caseira  | $3,1623 \times 10^{-12}$   | 11,5 |
| Água sanitária  | $3,1623 \times 10^{-13}$   | 12,5 |

1. Da análise dos dados apresentados na tabela, que modelo te parece que melhor traduz o pH de uma substância qualquer em função da sua concentração de iões? Com recurso à calculadora gráfica, verifica se o modelo que idealizaste traduz essa representação.
2. Tendo como referência o modelo que definiste, determina a concentração de iões  $H^+$  de um sumo de uva cujo valor de pH é igual a 3,2.
3. Que valores traduzem as concentrações de iões  $H^+$  de forma que o meio de uma substância seja ácido?
4. Da análise do gráfico do modelo que estabeleceste, verificas que a função representada é estritamente decrescente no seu domínio de validade e que o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima. Comprova analiticamente tais resultados.
5. Formalmente, o pH é dado por  $pH = -\log[H^+]$ . Que diferença há entre o modelo que estabeleceste e este modelo formal do pH?

A resolução desta tarefa foi realizada em grupos de 3 ou 4 alunos, com base nas seguintes regras de trabalho: (i) Um grupo só chama o professor depois de atender as considerações dos alunos que o constitui; (ii) Todos os elementos do grupo devem participar de modo a assegurar que qualquer um deles seja capaz de representar o grupo na apresentação das suas atividades à turma. Na Tabela 3 apresentam-se os resultados das respostas dos alunos.

Tabela 8: Frequência dos tipos de resposta dos alunos na Tarefa 3 ( $n = 8$ )

| Fases de modelação                                                                                 | Tipos de Resposta |    |   |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|----|---|----|
|                                                                                                    | C                 | PC | I | NR |
| Compreensão do enunciado da tarefa/ Análise dos dados/ Construção e validação do modelo (alínea 1) | 4                 | 1  | 3 | -  |
| Exploração do modelo (alínea 2)                                                                    | 5                 | -  | 3 | -  |
| Exploração do modelo (alínea 3)                                                                    | -                 | 5  | - | -  |
| Exploração do modelo (alíneas 4)                                                                   | -                 | 6  | 1 | 1  |
| Exploração do modelo (alíneas 5)                                                                   | -                 | 2  | - | 6  |

Na leitura desta tabela, destaca-se que ainda alguns grupos encontram dificuldades na construção e validação do modelo. Na exploração do modelo, tirando a última questão, a maioria dos grupos conseguiu dar elementos de respostas corretos.

### 3.3.1. Compreensão do enunciado/Análise dos dados/ Construção e validação do modelo

Todos os alunos determinaram um modelo logarítmico como sendo aquele que melhor se ajusta aos dados da tabela. No entanto, somente metade dos grupos determinou o melhor modelo logarítmico, tal como ilustra a resposta do grupo G2, apesar de não terem especificado o domínio da função (Figura 31).

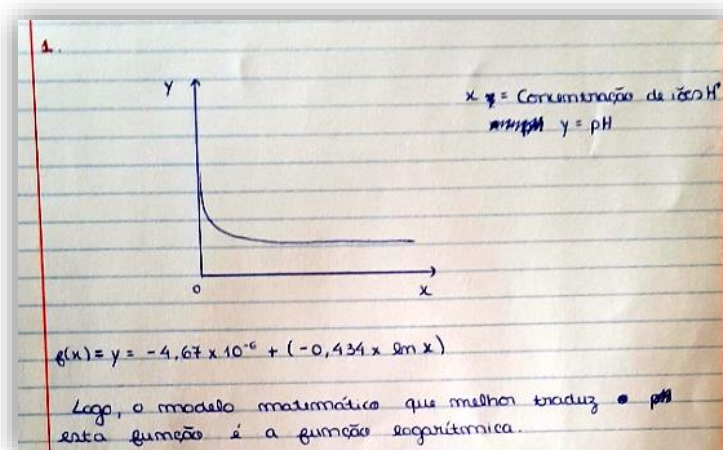


Figura 40: Resposta correta do grupo G2 à alínea 1 da Tarefa 3

Para além de registar o modelo de regressão que melhor se ajusta aos dados apresentados, o grupo G2 identificou as designações de cada uma das variáveis, reproduziu um esboço gráfico

que visualizaram na calculadora gráfica e consideraram a razoabilidade do modelo, mas sem a justificar.

O grupo G4 encontrou o mesmo modelo, mas não apresentou qualquer justificação, tal como era pedido no enunciado, o que faz com que a sua resposta seja considerada parcialmente correta (Figura 41).

1.  $y = -4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \ln x$

Figura 41: Resposta parcialmente correta do grupo G4 à alínea 1 da Tarefa 3

Os grupos que responderam incorretamente determinaram um modelo logarítmico que não corresponde ao que melhor se ajusta aos dados do enunciado. Provavelmente tais grupos enganaram-se na definição e na organização dos dados na calculadora gráfica. Um desses grupos, o grupo G6, determinou os coeficientes corretos do modelo logarítmico esperado, mas encontraram dificuldade na tradução destes valores no modelo que a própria calculadora gráfica lhes sugeria, como ilustra a seguinte resposta e exemplo (Figura 42).

1.  $y = (-4,67 \times 10^{-6} - 0,4342) \ln x$

LogReg  
 $a = -4.67 \times 10^{-6}$   
 $b = -0.4342947$   
 $r = -0.9999999$   
 $r^2 = 0.99999999$   
 $MSe = 1.8801 \times 10^{-11}$   
 $y = a + b \cdot \ln x$

Figura 42: Resposta incorreta do grupo G6 à alínea 1 da Tarefa 3

Na leitura dos coeficientes do modelo logarítmico obtido, estes alunos não identificaram que somente o coeficiente  $b$  estava a multiplicar o logaritmo neperiano de  $x$ .

### 3.3.2. Exploração da tarefa

As restantes questões podem ser resolvidas por processos analíticos ou com recurso à calculadora gráfica. Como consequência, no momento de discussão da resolução da tarefa em grupo turma, procurei averiguar diferentes métodos de resoluções. Na questão 2, um aluno do grupo G6 apresentou a resolução do seu grupo à turma.

A3G6: Nós fomos à calculadora, igualamos a expressão a 3,2 e deu-nos o  $x$ .

Prof: Fizem com a calculadora gráfica, muito bem. E qual é o resultado?

A3G6: 6.31.

Prof: Podes escrever o resultado. Toda a gente fez com a calculadora?

A2G1: Nós não.

Prof: Como é que fizeram?

A1G1: Usamos a expressão.

Prof: Podes vir ao quadro mostrar como é que fizeram?

A solução encontrada está incorreta, o que alguns alunos sublinharam. De seguida, um aluno do grupo G1 apresentou a sua proposta de resolução do seu grupo:

Prof: o A1G1 vai-nos mostrar uma proposta de resolução.

Alunos: A nós deu-nos diferente.

Prof: Pois, acho que 6.31 está um bocado fora do contexto.

A2G6: É 6.31, mas falta outra coisa.

A1G3: O expoente.

Os alunos do grupo G1 e do grupo G6 leram erroneamente o resultado que aparece na calculadora gráfica. Efetivamente, estes alunos não identificaram que o resultado obtido é multiplicado por  $10^{-4}$ . Na calculadora gráfica, pode aparecer os seguintes resultados (Figura 43). Os resultados variam em função da aproximação dos coeficientes do modelo previamente obtido.

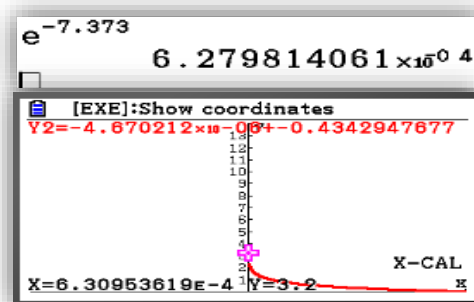


Figura 43: Representações em notação científica de resultados matemáticos obtidos na calculadora gráfica

É de salientar que o resultado aparece em notação científica  $\approx 6.28 \times 10^{-4}$  ou em notação científica 'E'  $\approx 6.31 \times E - 4$ , onde  $E$  representa 'vezes dez elevado à potência', repondo então o ' $\times 10^n$ '. Depreende-se que estes alunos desconheciam esta notação científica com o 'E' e, logo, não o consideraram. O grupo G2 procedeu de maneira análoga ao grupo G6 na utilização da calculadora gráfica para determinar o resultado, mas tendo em conta a multiplicação com a potência de 10.

A2G2: Nós fizemos ligeiramente diferente, mas também fizemos na máquina.

Prof: Como é que fizeram?

A2G2: Fomos ao gráfico, copiamos o modelo para o menu gráfico e depois fizemos 'Y-cal' e pusemos o  $x$  igual a  $y = 3.2$  e depois deu-nos  $6,278 \times 10^{-4}$ .

Relativamente às produções dos alunos, identificam-se resoluções analíticas e outras exclusivamente realizadas através da calculadora gráfica. Os grupos que resolveram com este artefacto escreveram simplesmente a equação que traduz o enunciado da questão e o resultado. Os grupos que resolveram analiticamente apresentaram as etapas todas da resolução da equação, como ilustra a resposta correta do grupo G8 (Figura 44).

$$\begin{aligned}
 2. \quad y &= 3,2 \\
 3,2 &= -4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \times \ln x \Leftrightarrow 3,2 + 4,67 \times 10^{-6} = \ln x \\
 \frac{3,200}{-0,434} &= \ln x \Leftrightarrow \ln x = -7,373 \Leftrightarrow x = e^{-7,373} \\
 \Leftrightarrow x &= 6,280 \times 10^{-4} \text{ mol/L}
 \end{aligned}$$

Figura 44: Resposta correta do grupo G8 à alínea 2 da Tarefa 3

As respostas consideradas incorretas evidenciam as lacunas dos alunos já ilustradas em relação às diferentes notações científicas apresentadas na calculadora gráfica. O grupo G1 resolveu analiticamente esta questão sem dificuldades, mas não considerou a potência de 10 no resultado (Figura 45).

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Sendo } f \text{ a função que traduz o pH em função da concentração de iões.} \\
 f(x) &= -4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \cdot \ln x \\
 f(x) &= 3,2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \ln x &= 3,2 \\
 \Leftrightarrow -0,434 \ln x &= 3,2 \\
 \Leftrightarrow \ln x &= -7,373 \\
 \Leftrightarrow x &= 6,280
 \end{aligned}$$

Figura 45: Resposta incorreta do grupo G1 à alínea 2 da Tarefa 3

Relativamente à alínea 3, constata-se que a maioria dos grupos tentou resolvê-la com métodos exclusivamente analíticos. Porém, nenhum grupo chegou ao resultado esperado, pois os alunos não determinaram o domínio do modelo logarítmico do pH tendo em conta que este só podia tomar valores entre 0 e 14. Logo, os alunos que apresentam uma resposta parcialmente correta resolveram a inequação que traduz o enunciado para valores de  $x$  estritamente positivos, como no caso de uma função logarítmica com o domínio habitual  $\mathbb{R}^+$  (Figura 46).

$$\begin{aligned}
 3. \quad f(x) < 7 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \\
 \Leftrightarrow -4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \ln x < 7 \quad \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow -0,434 \ln x < 7 + 4,67 \times 10^{-6} \quad \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow -\ln x < \frac{7 + 4,67 \times 10^{-6}}{0,434} \quad \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{7 + 4,67 \times 10^{-6}}{0,434} \quad \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{7 + 4,67 \times 10^{-6}}{0,434}} \quad \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow x > 9,891 \times 10^{-8} \quad \wedge x \in D \\
 x \in ]9,891 \times 10^{-8}; +\infty[
 \end{aligned}$$

Figura 46: Resposta parcialmente correta do grupo G3 à alínea 3 da Tarefa 3

Somente um grupo restringiu o domínio do modelo logarítmico considerando a situação da tarefa. O grupo G4 resolveu previamente a equação  $f(x) = 0$ , onde  $f$  representa o modelo obtido, para determinar o domínio do modelo. Depois, com base na tabela de dados, determinou os valores de  $x$  pelos quais uma solução possui um pH de tipo ácido. Contudo, na resposta final, este grupo trocou os valores do intervalo solução da inequação que traduz o enunciado, pois  $1,0 \times 10^{-7}$  é menor que 1 (Figura 47).

3.  $f(x) = 0 \Rightarrow -4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \ln x = 0$   
 $\Rightarrow \ln x = -1,007 \times 10^{-5}$   
 $\Rightarrow x = e^{-1,007 \times 10^{-5}}$   
 $\Rightarrow x = 1,00$   
 Para que o meio seja ácido,  
 as concentrações de  $H^+$  variam  
 entre  $]1,00, 1,0 \times 10^{-2}[$

Figura 47: Resposta parcialmente correta do grupo G4 à alínea 3 da Tarefa 3

Para além do domínio, o modelo logarítmico traduz uma função estritamente decrescente, o que vai impactar com a ordem da inequação que traduz o enunciado. Os grupos que responderam incorretamente sentiram dificuldades na resolução da inequação e na definição do domínio (Figura 48).

3.  $-4,67 \times 10^{-6} - 0,434 \ln x < 7$   
 $\Rightarrow -0,434 \ln x < 7,000$   
 $\Rightarrow \ln x < -16,130$   
 $\Rightarrow x < e^{-16,130}$   
 $\Rightarrow x < 9,891 \times 10^{-8}$

Figura 48: Resposta incorreta do grupo G8 à alínea 3 da Tarefa 3

Na resolução desta alínea com recurso à calculadora gráfica, encontram-se diversas limitações, nomeadamente na definição da janela de visualização. Efetivamente, ao representar graficamente o modelo logarítmico e a reta de equação  $y = 7$  numa janela de visualização adaptada à situação da tarefa, não se consegue observar a interseção das duas curvas (Figura 49).

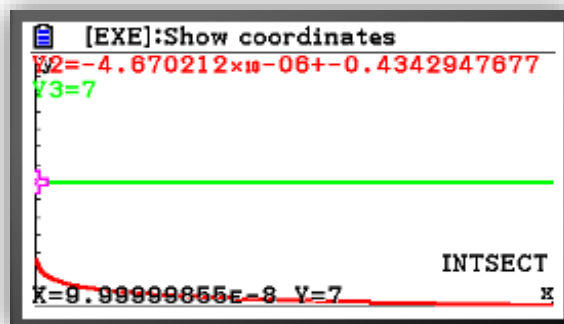


Figura 49: Representação gráfica da inequação que traduz a alínea 3 da Tarefa 3

Como os valores são demasiados pequenos, mesmo realizando um ‘zoom’ no gráfico, não se consegue visualizar a interseção destas curvas. Estas limitações observadas provêm das capacidades tecnológicas da calculadora gráfica que encontra dificuldades em representar grandezas infinitamente pequenas ou grandes. Podemos então imaginar que os alunos não tentaram resolver graficamente esta alínea por esses motivos. O facto de não se poder ler graficamente a solução pode ter perturbado os alunos na utilização da calculadora gráfica para resolver esta alínea.

Relativamente à alínea 4, a maioria dos alunos não sentiu dificuldades no estudo da monotonia e da concavidade do gráfico da função representada pelo modelo encontrado. Porém, nenhum grupo definiu o domínio do modelo tendo em conta o contexto da tarefa, como ilustra o seguinte diálogo em grupo turma.

Prof: Qual é o sinal daquela expressão? Aliás, antes disso, o G5A4 escreveu aqui muito bem  $x$  pertence ao domínio de  $f$ , mas qual é o domínio desta função?

Alunos:  $\mathbb{R}$  mais.

Prof:  $\mathbb{R}$  mais. E agora se eu perguntasse qual é o domínio do nosso modelo relativamente à nossa situação? Porque aquela função dá valores negativos? Aliás, a função dá valores negativos?

Alunos: Não.

Prof: Dá, é um logaritmo. Mas o nosso modelo, o pH, é compreendido entre 0 e 14. Portanto, o domínio já vai ser diferente. Ninguém pensou em estudar o domínio do modelo então?

A1G1: O quê?

Prof: O domínio do nosso modelo, que é diferente do domínio da função.

A1G1: E pronto, o domínio do modelo é de 0 a mais infinito.

A1G2: Não, é de 0 até ao valor de concentração pelo qual o pH é igual a 14.

Alunos: Ah.

Prof: Exatamente. O domínio do nosso modelo vai ser de 0 até ao valor de concentração pelo qual o pH é igual a 14. A diferença entre a função e o nosso modelo é que o nosso modelo tem um contexto real, o que vai influenciar o domínio e contradomínio do modelo.

As respostas parcialmente corretas englobam as repostas corretas no caso de um estudo de função real de variável real sem restrição no seu domínio. Nestas respostas, observam-se respostas puramente analíticas, com o cálculo da primeira derivada e da segunda derivada através das regras de derivação e com frases de conclusão sucintas ou com tabelas de sinais, de variações ou de concavidade do gráfico que representa a função. Somente um grupo, o grupo G4, respondeu sem apresentar cálculos intermédios na definição da primeira e segunda derivada. Estes alunos indiciam que utilizaram a calculadora gráfica para realizar estes cálculos. O grupo G8 respondeu

com o cálculo da primeira e da segunda derivada do modelo, mas sem qualquer conclusão sobre a sua monotonia ou sentido de concavidade (Figura 50).

$$\begin{aligned}
 4. \quad f'(x) &= (-4.63 \times 10^{-6} - 0.434 \ln x)' \\
 &= (-0.434 \ln x)' \\
 &= (-0.434)' \times \ln x + (\ln x)' \times (-0.434) \\
 &= \left(\frac{-0.434}{x}\right) \times (-0.434) \\
 &= \frac{0.188}{x} \\
 f''(x) &= \left(\frac{0.188}{x}\right)' = \frac{-0.188}{x^2} \times x^1 = \frac{-0.188}{x^2}
 \end{aligned}$$

$Df = \{x \in \mathbb{R}^+ | x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Figura 50: Resposta parcialmente correta do grupo G8 à alínea 4 da Tarefa 3

A resposta incorreta revela dificuldades em relação às regras de derivação, nomeadamente à regra  $(kf)' = k(f)'$ , onde  $f$  é uma função real de variável real e  $k \in \mathbb{R}$ . O grupo G2 assumiu que a primeira derivada do modelo era igual à derivada da função  $x \mapsto \ln x$ , sem ter em conta o coeficiente que o integra, tal como expressa a sua resolução (Figura 51).

$$\begin{aligned}
 4. \quad g'(x) &= (\ln x)' = \frac{1}{x} \\
 \frac{1}{x} &\neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que quanto maior o  $x$ , menor o valor de  $g'(x)$ , pelo que a função  $g$  é estritamente decrescente.

Figura 51: Resposta incorreta do grupo G2 à alínea 4 da Tarefa 3

Relativamente à alínea 5, são poucos os grupos que tiveram tempo para a explorar. Somente dois grupos responderam, identificando que uma das diferenças entre o modelo teórico do pH e o modelo obtido através da tarefa era a base do logaritmo, sendo um logaritmo decimal para o modelo teórico e um logaritmo neperiano para o modelo (Figura 52).

5. A fórmula formal do pH apresenta-se através do logaritmo decimal. Já o modelo por nós apresentado é dado em função do logaritmo neperiano.

Figura 52: Resposta parcialmente correta do grupo G3 à alínea 5 da Tarefa 3

No debate no grupo turma, o aluno A1 do grupo G3 apresentou no quadro os resultados do seu grupo. Relembrei a turma que se pode efetuar uma mudança de base de logaritmos para uma base  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  qualquer de modo a poder trabalhar com logaritmos de bases iguais. Deste modo, pode-se comparar a precisão do 'nosso' modelo com o modelo teórico do enunciado. O seguinte diálogo ilustra esta fase da aula e a conclusão da turma para a alínea 5.

Prof: Alguém pode fazer na calculadora aquele cálculo?  $-\frac{0.434}{\log e}$ . Aliás, concordam com essa mudança de base?

Alunos: Sim.

A2G3: Dá  $-0.999$ .

Prof: Relembrei lá acima a fórmula da mudança de base. Podes repetir o resultado?

A3G3:  $-0.999$ .  $-1$  vá.

A1G3: Isto tudo?

A2G3: Não, o menos  $-\frac{0,434}{\log e}$ .

Prof: Ou seja, temos  $-4,67 \times 10^{-6}$  ...

A3G3:  $-\log x$ .

Prof:  $-\log x$ . Ok, concordam?

Alunos: Sim.

Prof: A G3A3 fez a aproximação de  $0,999$  por  $1$ , o que faz sentido. Agora, o quê que é pedido? Que diferença há entre o modelo que estabeleceste e este modelo formal do pH?

A1G3: É só este valor.

Prof: A única diferença é aquela constante  $-4,67 \times 10^{-6}$ . O que se pode dizer então relativamente àquele valor?

A2G1: São praticamente iguais porque aquele valor é muito pequeno.

Prof: Podes repetir para toda a gente ouvir?

A2G1: As duas expressões são praticamente iguais porque aquele valor é muito pequeno.

Prof: Ok, como aquele valor é basicamente  $0,00000467$ , o que a A2G1 diz é que os modelos são praticamente iguais porque aquele valor é desprezível, é muito pequeninho.

### 3.3.3. Síntese

O Quadro 3 exemplifica os elementos da transição entre as fases de modelação que foram identificados na resolução da Tarefa 3.

Quadro 3: Síntese de elementos de transição entre as fases de modelação na Tarefa 3

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Problema do mundo real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | → | <b>Enunciado do problema real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Clarificar o contexto do problema</li> <li>▪ Identificar grandeza(s) estratégica(s)</li> <li>▪ Elaborar hipóteses e conjecturas simples</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Compreender o enunciado e a situação</li> <li>▪ Identificar a concentração de iões <math>H^+</math> e o pH</li> <li>▪ Conjeturar que as grandezas podem verificar uma relação logarítmica</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Enunciado do problema real</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | → | <b>Modelo matemático</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Identificar as variáveis</li> <li>▪ Representar matematicamente os dados para que as fórmulas possam ser aplicadas</li> <li>▪ Perceber que a variável independente deve ser definida de forma única</li> <li>▪ Elaborar hipóteses relevantes</li> <li>▪ Escolher tecnologia para efetuar cálculos</li> <li>▪ Escolher tecnologia para representar graficamente o modelo</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para verificar equações algébricas</li> </ul> |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ O pH em função da concentração de iões <math>H^+</math></li> <li>▪ Atribuir notação matemática às variáveis</li> <li>▪ Manter a coerência das notações ao longo da exploração da tarefa</li> <li>▪ Esboçar uma nuvem de pontos dos dados da tabela</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos e organizar os dados numa tabela</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para realizar regressões estatísticas e identificar o modelo que melhor se ajuste aos dados</li> <li>▪ Reconhecer que métodos exclusivamente analíticos não são suficientes</li> </ul>                     |
| <b>Modelo matemático</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | → | <b>Solução matemática</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Aplicar fórmulas simbólicas apropriadas</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para efetuar cálculos</li> <li>▪ Utilizar tecnologia para produzir representações gráficas</li> <li>▪ Utilizar corretamente as regras de sintaxe de notação (seja matemática ou tecnológica)</li> <li>▪ Obter resultados adicionais para permitir a interpretação de soluções</li> <li>▪ Verificar o modelo algébrico com recurso à tecnologia</li> </ul>                     |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Interpretar matematicamente as questões e ligá-las com o modelo logarítmico obtido</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos complexos e resolver equações</li> <li>▪ Recorrer à calculadora gráfica para representar graficamente o modelo obtido</li> <li>▪ Reconhecer as diferentes notações científicas/coeficientes que podem aparecer nos resultados obtidos através da calculadora gráfica</li> <li>▪ Relacionar o domínio/contradomínio do modelo com o contexto real da tarefa</li> <li>▪ Conferir resultados obtidos analiticamente com a calculadora gráfica</li> </ul> |
| <b>Solução matemática</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | → | <b>Significado concreto da solução</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Integrar argumentos para justificar interpretações</li> <li>▪ Perceber a necessidade de envolver matemática antes de abordar uma questão interpretativa</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Utilizar o modelo matemático convenientemente</li> <li>▪ Matematizar o enunciado e interpretá-lo</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

Sendo a terceira tarefa de modelação realizada pelos alunos, estes não apresentaram dificuldades na utilização da calculadora gráfica para determinar o melhor modelo que se ajuste aos dados. No entanto, o grupo G2 leu incorretamente os coeficientes do modelo que apareceram no ecrã da calculadora gráfica. Determinaram que o modelo era  $(a + b) \times \ln x$  em vez de  $a + b \times \ln x$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Devido às regras de trabalho em grupo estabelecidas no início da aula, os alunos revelaram um empenho considerável na exploração da tarefa relativamente às outras aulas, o que implicou também um maior interesse e participação na discussão das resoluções em grupo turma.

No que toca à exploração da tarefa, os alunos perceberam que podiam responder às questões conforme o método que achavam mais pertinente e eficaz, isto é, ou com recurso à

calculadora gráfica ou com processos analíticos. Porém, a exploração da tarefa sobressai mais lacunas relacionadas com o uso da calculadora gráfica. Efetivamente, os resultados obtidos através da calculadora gráfica podem ser apresentados com duas notações científicas diferentes. Esta ferramenta apresenta resultados obtidos através de cálculos com notação científica  $a \times 10^k$ , onde  $1 \leq |a| < 10$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , e resultados obtidos através de uma resolução gráfica com a notação 'E',  $aEk$ . Os grupos G1 e G6 mostraram dificuldades na leitura destes resultados, o que prejudicou a exploração da tarefa. Isto revela a necessidade de conhecer e dominar a calculadora gráfica com a qual se trabalha de modo a não ser prejudicado devido ao seu uso erróneo (Consciência, 2013; Gilbraith & Stillman, 2006; Ponte, 1995).

Nesta tarefa encontram-se novamente limitações tecnológicas quanto à resolução gráfica de algumas das suas alíneas, nomeadamente a alínea 3. Devido às capacidades limitadas da calculadora gráfica na representação gráfica de valores demasiados pequenos ou grandes, torna-se indecifrável a leitura deste tipo de resolução na calculadora gráfica, mesmo adaptando rigorosamente a janela de visualização.

Para além de saber utilizar a calculadora gráfica, os alunos devem conhecer conceitos matemáticos primordiais para o estudo de uma função real a variável real de modo a serem capazes de realizar eficientemente este tipo de tarefa. Observa-se aqui algumas lacunas em relação à resolução de inequações, assim como em relação às regras de derivação. Outro aspeto que se evidencia com os alunos é o do domínio e contradomínio do modelo tendo em conta o contexto da tarefa. Se consideramos o modelo obtido através da regressão meramente como uma função real de variável real, afastamo-nos do propósito da tarefa de modelação e do seu contexto. O problema de modelação torna-se assim um simples problema matemático puro, perdendo as suas motivações iniciais (Barbosa, 2009; Galbraith & Stillman, 2006). Portanto, é fundamental ter conhecimentos teóricos sólidos e estar familiarizado com a calculadora gráfica, ou seja, conhecer as suas potencialidades, mas também as suas limitações, para os alunos encararem da melhor maneira este tipo de tarefa (Sawalha, 2018).

### **3.4. Avaliação do ensino ministrado**

#### **3.4.1. Perceções dos alunos sobre a intervenção pedagógica**

O objetivo da minha intervenção pedagógica consistiu em averiguar o contributo das tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas com recurso à calculadora gráfica.

Solicitei então os alunos a responder a um questionário no final da minha intervenção pedagógica na procura de perceber quais as suas perceções sobre esse contributo. Devido à pandemia relativa ao vírus SARS-CoV-2, este questionário foi realizado online durante a primeira fase do confinamento. A primeira parte do questionário era composto por questões de natureza fechada, onde os alunos tinham de escolher uma opção segundo o seu grau de concordância (escala tipo Likert) para cada uma das afirmações apresentadas. A segunda parte do questionário era composto por oito questões de natureza aberta relativamente às vantagens, desvantagens, dificuldades, contributo das tarefas de modelação e da calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas e a diferença quanto às tarefas sob a forma de exercícios e problemas.

As respostas dadas pelos alunos às questões fechadas foram analisadas segundo as seguintes categorias: (i) funções logarítmicas; (ii) tarefas de modelação; (iii) calculadora gráfica; (iv) trabalho em grupo; e (v) dificuldades. Para quantificar os dados com parâmetros estatísticos como o valor médio e o desvio-padrão, atribuí o valor 1 a discordo totalmente (DT), 2 a discordo parcialmente (DP), 3 a indiferente (I), 4 a concordo parcialmente (CP) e 5 a concordo totalmente (CT). Na Tabela 9, apresentam-se os resultados das respostas dos alunos quanto às suas perceções relativamente às funções logarítmicas.

Tabela 9: Perceções (%) dos alunos relativamente às funções logarítmicas ( $n = 29$ )

| Afirmação                                                                                            | DT/DP | I     | CP/CT | $\bar{x}$ | $s$   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| Gostei de estudar as funções logarítmicas.                                                           | 0%    | 13,8% | 86,2% | 4,31      | 0,699 |
| No estudo das funções logarítmicas, evidenciei mais dificuldades do que os outros temas matemáticos. | 58,6% | 27,6% | 13,8% | 2,414     | 1,001 |

A maioria dos alunos afirma que gostou de estudar as funções logarítmicas (86,2%) e que não sentiu mais dificuldades em comparação a outros conteúdos matemáticos (58,6%).

Na Tabela 10 são ilustrados os resultados das respostas dos alunos relativamente às tarefas de modelação. Grande parte dos alunos afirma que estas tarefas ajudaram na compreensão das funções logarítmicas (75,9%) e na introdução destas (79,3%). Para além disso, os alunos concordam na maioria que estas tarefas aumentaram o interesse (75,9%), o empenho e a participação no estudo das funções logarítmicas (55,2%). Os alunos também afirmam que estas tarefas ajudaram a perceber melhor a ligação da Matemática com situações do quotidiano (93,1%) e permitiram trabalhar conceitos matemáticos aplicados a outras áreas científicas (79,3%). Cerca de 58,6% dos alunos considera que estas tarefas são mais desafiantes do que os exercícios e alguns problemas sendo que estas, segundo 79,3% dos alunos, exigiram melhor conhecimento dos conceitos matemáticos. Em relação à resolução deste tipo de tarefa, cerca de 41,4% dos

alunos considera que esta não é mais fácil em comparação a resolução de exercícios e de alguns problemas. Em média, os alunos gostariam de aprender outros tópicos matemáticos com recurso às tarefas de modelação (58,6%).

Tabela 10: Perceções (%) dos alunos relativamente às tarefas de modelação ( $n = 29$ )

| Afirmação                                                                                                           | DT/DP | I     | CP/CT | $\bar{x}$ | $s$   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| As tarefas de modelação propostas ajudaram-me a compreender melhor as funções logarítmicas.                         | 13,8% | 10,3% | 75,9% | 3,931     | 0,980 |
| As tarefas de modelação propostas aumentaram o meu interesse no estudo das funções logarítmicas.                    | 10,3% | 13,8% | 75,9% | 3,759     | 1,005 |
| As tarefas de modelação propostas ajudaram-me a perceber melhor a ligação da matemática com situações da vida real. | 0%    | 6,9%  | 93,1% | 4,448     | 0,385 |
| As tarefas de modelação propostas permitiram trabalhar conceitos matemáticos aplicados a outras áreas científicas.  | 6,9%  | 13,8% | 79,3% | 4,069     | 0,754 |
| As tarefas de modelação propostas favoreceram a introdução dos tópicos das funções logarítmicas.                    | 3,4%  | 20,7% | 75,9% | 3,931     | 0,547 |
| As tarefas de modelação propostas exigiram melhor conhecimento dos conceitos matemáticos.                           | 0%    | 20,7% | 79,3% | 4,282     | 0,557 |
| As tarefas de modelação são mais desafiantes do que os exercícios e alguns problemas.                               | 13,8% | 27,6% | 58,6% | 3,552     | 0,730 |
| A resolução de tarefas de modelação é mais fácil do que a resolução de exercícios e de alguns problemas.            | 41,4% | 34,5% | 24,1% | 2,690     | 0,987 |
| Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso às tarefas de modelação                                 | 20,7% | 20,7% | 58,6% | 3,448     | 1,101 |
| As tarefas de modelação incentivaram-me a empenhar-me e participar mais.                                            | 13,8% | 31,0% | 55,2% | 3,552     | 1,213 |

A calculadora gráfica auxiliou a minha intervenção pedagógica. Para os alunos, a calculadora gráfica contribuiu bastante na resolução de tarefas de modelação (72,4%) e na compreensão das funções logarítmicas (86,2%) (Tabela 11).

Tabela 11: Perceções (%) dos alunos relativamente à calculadora gráfica ( $n = 29$ )

| Afirmação                                                                                                          | DT/DP | I     | CP/CT | $\bar{x}$ | $s$   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| As tarefas de modelação propostas ajudaram-me a melhorar a minha capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica | 3,5%  | 17,2% | 79,3% | 4,207     | 0,846 |
| A calculadora gráfica permitiu-me verificar resultados que obtive analiticamente                                   | 0%    | 0%    | 100%  | 4,620     | 0,486 |
| A calculadora gráfica ajudou-me a compreender melhor as funções logarítmicas                                       | 0%    | 13,8% | 86,2% | 4,310     | 0,699 |
| Na resolução de tarefas de modelação a calculadora gráfica pouco contribuiu                                        | 72,4% | 13,8% | 13,8% | 1,828     | 1,205 |
| Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.                             | 20,7% | 3,4%  | 75,9% | 3,793     | 1,126 |

A maioria dos alunos também afirma que as próprias tarefas de modelação ajudaram a melhorar a capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica (79,3%). Todos os alunos consideram que a calculadora gráfica permitiu verificar resultados obtidos analiticamente e cerca

de 75,9% afirmam recorrer a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.

Todas as tarefas de modelação resolvidas na sala de aula foram realizadas em pares ou em grupos de 3 ou 4 alunos. A maioria dos alunos avalia positivamente a oportunidade de trabalhar em grupo na resolução de tarefas de modelação na aprendizagem de funções logarítmicas. Efetivamente, cerca de 82,8% alunos afirmam que o trabalho em grupo contribuiu na aprendizagem das funções logarítmicas e 65,6% discordam com o facto que estas tarefas são mais propícias ao trabalho individual do que em grupo. Os alunos também afirmam que gostavam de ter mais oportunidades para trabalhar em grupo (79,3%) (Tabela 12).

Tabela 12: Perceções (%) dos alunos relativamente ao trabalho em grupo ( $n = 29$ )

| Afirmação                                                                                   | DT/DP | I     | CP/CT | $\bar{x}$ | s     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| O trabalho em grupo contribuiu na aprendizagem das funções logarítmicas.                    | 6,9%  | 10,3% | 82,8% | 4,276     | 0,906 |
| A resolução de tarefas de modelação é mais propícia ao trabalho individual do que em grupo. | 65,6% | 24,1% | 10,3% | 2,172     | 0,949 |
| Gostava de ter mais oportunidades para trabalhar em grupo.                                  | 0%    | 20,7% | 79,3% | 4,138     | 0,730 |

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos, observam-se resultados homogéneos sendo que cerca de 51,7% dos alunos afirmam ter encontrado dificuldades na exploração das tarefas de modelação propostas e 62,1% concordam ter sentido dificuldades no uso da calculadora gráfica na resolução destas (Tabela 13).

Tabela 13: Perceções (%) dos alunos relativamente às dificuldades sentidas ( $n = 29$ )

| Afirmação                                                                                        | DT/DP | I     | CP/CT | $\bar{x}$ | s     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| Senti dificuldades no uso da calculadora gráfica para resolver as tarefas de modelação propostas | 41,4% | 6,9%  | 51,7% | 2,931     | 1,285 |
| Encontrei dificuldades na resolução das tarefas de modelação propostas                           | 20,7% | 17,2% | 62,1% | 3,379     | 1,187 |

Em suma, com exceção de quatro respostas, a média de todas as outras varia entre 2,931 e 4,620 num máximo possível de 5. Podemos então concluir que os alunos tiveram opiniões favoráveis relativamente ao teor das questões de natureza fechada.

As duas primeiras questões de natureza aberta pediam aos alunos para definir, com três palavras, o que é uma tarefa de modelação e o que é uma função logarítmica. Nas próximas duas tabelas apresentam-se as frequências das respostas dos alunos relativamente a estas questões. Segundo os alunos, uma tarefa de modelação é interessante, desafiante e permite uma construção do conhecimento através de uma atividade que consiste em relacionar a Matemática com uma situação real (Tabela 14).

Tabela 14: Frequências das palavras que definem uma tarefa de modelação ( $n = 29$ )

| Palavras                                | Frequência |
|-----------------------------------------|------------|
| Interessante                            | 9          |
| Desafiante, complexa, complicada        | 9          |
| Aprendizagem/Construção do conhecimento | 4          |
| Simulação com realidade                 | 4          |
| Relacionar a matemática com o dia a dia | 3          |
| Inovador                                | 3          |
| Atividade/proposta                      | 2          |
| Criar modelos matemáticos/funções       | 2          |
| Não faço ideia                          | 2          |
| Não me lembro                           | 2          |
| Dinâmica                                | 1          |
| Proporcional                            | 1          |
| Diferente                               | 1          |
| Matemática aplicada à realidade         | 1          |
| Prática                                 | 1          |
| Aplicável                               | 1          |
| Reversível                              | 1          |
| Adequada                                | 1          |
| Didática                                | 1          |

Quanto à função logarítmica, os alunos realçam que esta é a inversa da função exponencial (Tabela 15).

Tabela 15: Frequências das palavras que definem uma função logarítmica ( $n = 29$ )

| Palavras                                         | Frequência |
|--------------------------------------------------|------------|
| Inversa da exponencial                           | 17         |
| Função definida por um expoente                  | 2          |
| Interessante                                     | 2          |
| Função que associa um número real a um logaritmo | 1          |
| Valor do expoente                                | 1          |
| Função                                           | 1          |
| Log, exp                                         | 1          |
| Contínua                                         | 1          |
| Injetiva                                         | 1          |
| Crescimento                                      | 1          |
| Brusca                                           | 1          |
| Nova                                             | 1          |
| Diferente                                        | 1          |
| Estável                                          | 1          |
| Confusa                                          | 1          |
| Desafiadora                                      | 1          |
| Esclarecedora                                    | 1          |

As próximas quatro questões abertas pediam que fossem identificadas três vantagens, três desvantagens e as dificuldades encontradas na aprendizagem das funções logarítmicas com tarefas de modelação. Para a análise destas questões, foram criadas categorias baseadas nas respostas dos alunos de modo a permitir a determinação de frequências (Tabela 16).

Tabela 16: Frequências das vantagens das tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n = 29$ )

| Vantagens                                                                                      | Frequência |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Aperfeiçoa a utilização da calculadora gráfica e das suas potencialidades no estudo de funções | 13         |
| Contribui para uma melhor compreensão das funções logarítmicas                                 | 9          |
| Incentiva a participação, o interesse dos alunos e o trabalho em grupo                         | 8          |
| Permite uma melhor perceção da aplicação da matemática no mundo real                           | 6          |
| Permite ter uma noção do papel das funções logarítmicas em situações reais                     | 5          |
| Torna o estudo de funções mais desafiante e prático                                            | 4          |

No que toca às vantagens das tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas, os alunos destacam que essas melhoraram os conhecimentos das funcionalidades da calculadora gráfica e como utilizar devidamente esta ferramenta na elaboração de um modelo matemático e no seu estudo. Os alunos evidenciam que estas tarefas contribuíram positivamente na aprendizagem das funções logarítmicas e a exploração em grupo destas favoreceu a sua participação, o interesse e o empenho. Além disso, estas tarefas permitem, segundo os alunos, ter uma melhor perceção do papel da Matemática e das funções logarítmicas no estudo de fenómenos naturais.

Relativamente às desvantagens, os alunos referem que as tarefas de modelação podem-se tornar confusas por causa do seu enunciado, do seu grau de dificuldade, da falta de conhecimento das potencialidades da calculadora gráfica e da definição errónea do modelo. Alguns alunos salientam também que a realização deste tipo de tarefa não os prepara para um eventual momento de avaliação ou de exame, pois esses momentos costumam propor exercícios e problemas de contexto matemático. No entanto, outros alunos destacam que não existem desvantagens na aprendizagem de funções logarítmicas com tarefas de modelação (Tabela 17).

Tabela 17: Frequências das desvantagens das tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n = 29$ )

| Desvantagens                                                                                     | Frequência |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Não tem desvantagens                                                                             | 8          |
| A compreensão e interpretação do enunciado                                                       | 7          |
| O grau de dificuldade da tarefa e da sua resolução                                               | 7          |
| Exigem conhecer as potencialidades da calculadora gráfica                                        | 4          |
| A tarefa torna-se confusa se não conseguimos identificar o modelo certo                          | 4          |
| A dificuldade de relacionar conceitos matemáticos com a tarefa                                   | 3          |
| A diferença das tarefas com os exercícios/problemas que podem sair no momento de avaliação/exame | 3          |
| A exploração das tarefas em grupo                                                                | 1          |

No que toca às dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem das funções logarítmicas, destacam-se as relacionadas com o estudo do domínio, do contradomínio, da

primeira e segunda derivada e a determinação de certos limites que envolvem os limites notáveis. Certos alunos também realçam a dificuldade de compreender o conceito de função logarítmica e de se adaptar à sua simbologia atípica. No entanto, outros alunos referem que não sentiram muitas dificuldades no estudo destas funções (Tabela 18).

Tabela 18: Frequências das dificuldades sentidas na aprendizagem das funções logarítmicas (n=29)

| Dificuldades                                                                                     | Frequência |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Não senti muitas dificuldades                                                                    | 8          |
| Dificuldades em determinados conceitos (domínio, contradomínio, monotonia, concavidade, limites) | 6          |
| A compreensão da função e da sua simbologia atípica                                              | 6          |
| A resolução de problemas mais desafiantes                                                        | 2          |

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas de modelação, sobressai a utilização da calculadora gráfica, o que mostra que alguns alunos não estavam familiarizados com certas potencialidades da calculadora gráfica, nomeadamente a regressão estatística e a representação gráfica. Outra dificuldade que se destaca é a interpretação, a compreensão e a análise da tarefa. Alguns alunos referem que acharam as tarefas difíceis de interpretar, o que os deixaram confusos na sua exploração (Tabela 19).

Tabela 19: Frequências das dificuldades sentidas na resolução de tarefas de modelação (n = 29)

| Dificuldades                                                                                              | Frequência |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Utilização da calculadora gráfica (determinação do modelo, representação gráfica, janela de visualização) | 8          |
| Interpretação, compreensão e análise                                                                      | 7          |
| Não senti muitas dificuldades                                                                             | 4          |
| Grau de desafio elevado                                                                                   | 2          |
| Aplicar conhecimentos matemáticos tendo em conta o contexto                                               | 2          |

No que diz respeito ao contributo das tarefas de modelação e da calculadora gráfica na clarificação de dificuldades na aprendizagem das funções logarítmicas, os alunos referem que estas tarefas ajudaram numa melhor visualização e compreensão de determinados conceitos como, por exemplo, o domínio, a representação gráfica e a monotonia. Alguns alunos também consideram que aprenderam a trabalhar melhor com a calculadora gráfica no estudo de funções e que estas tarefas permitiram a consolidação das suas aprendizagens (Tabela 20).

Tabela 20: Frequências do contributo das tarefas de modelação e da calculadora gráfica na clarificação de dificuldades na aprendizagem das funções logarítmicas ( $n = 29$ )

| Contributo                                                                                                                              | Frequência |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Ajudou a visualizar e perceber determinados conceitos matemáticos (modelo, domínio, representação gráfica, monotonia, assintotas, etc.) | 13         |
| Melhorou a utilização da calculadora gráfica no estudo de funções                                                                       | 9          |
| Auxiliou a superar dificuldades e consolidar conhecimentos                                                                              | 5          |
| Evidenciou a importância da matemática no quotidiano                                                                                    | 2          |
| Nenhum                                                                                                                                  | 2          |

Quanto à diferença entre a resolução de exercícios, de problemas e de tarefas de modelação, sobressai a natureza do contexto real das tarefas de modelação, o seu grau de desafio elevado, nomeadamente na sua interpretação, e o facto que estas são mais cativantes e práticas do que os outros tipos de tarefa (Tabela 21).

Tabela 21: Frequências das diferenças entre a resolução de exercícios, de problemas e de tarefas de modelação ( $n = 29$ )

| Diferença                                                                            | Frequência |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| As tarefas de modelação envolvem mais a matemática com a realidade                   | 9          |
| Não há diferenças                                                                    | 5          |
| As tarefas de modelação são mais difíceis de interpretar e mais trabalhosas          | 4          |
| As tarefas de modelação são mais interessantes, desafiantes e práticas               | 4          |
| Os exercícios e problemas são mais claros, direccionados e de resolução mais simples | 4          |
| As tarefas de modelação permitem explorar diferentes estratégias de resolução        | 2          |
| Os exercícios e problemas são mais úteis para nos preparar ao exame                  | 1          |
| As tarefas de modelação podem se tornar redundantes e monótonas                      | 1          |

## CAPÍTULO 4

### CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este último capítulo está dividido em três secções. Na primeira, encontram-se as conclusões da investigação, na qual se apresentam elementos de resposta, com base no quadro teórico e na análise de dados, às questões de investigação que orientaram este trabalho. Na segunda secção, são delineadas limitações e dificuldades que foram encontradas na preparação e implementação do projeto. Por fim, a última secção destina-se às recomendações e sugestões para estudos futuros.

#### 4.1. Conclusões

Com este trabalho, pretendo averiguar o contributo da modelação matemática e da calculadora gráfica na aprendizagem de funções logarítmicas de alunos do 12.º ano. Para concretizar este objetivo, as conclusões deste estudo emergem como resposta às seguintes questões de investigação: (1) Que atividades realizam os alunos com tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas?; (2) Que dificuldades têm os alunos na aprendizagem das funções logarítmicas? E na resolução de tarefas de modelação?; (3) Que perceções têm os alunos sobre a modelação matemática e a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas?

As respostas a estas questões advêm da informação analisada no capítulo da intervenção pedagógica e são, quanto possível, sustentadas pelo quadro teórico que enquadra este estudo.

##### 4.1.1. Que atividades realizam os alunos com tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas?

De acordo com os documentos curriculares em vigor e com obras de referência, como o NCTM (2000) ou o PISA (OECD, 2019), os alunos devem vivenciar momentos de modelação matemática ao longo da sua escolaridade, por propiciarem, entre outros, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação matemática. No entanto, segundo o questionário realizado no início da minha intervenção pedagógica, eram muito poucos os alunos que conheciam a existência de tarefas de modelação. Observa-se então que estes alunos do 12.º ano, alunos que estão no último ano do ensino regular, não tiveram oportunidades de realizar tarefas deste tipo, o que vai contra as finalidades das metas curriculares e dos objetivos

do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2017). Apesar de numerosos autores e publicações evidenciem o papel fundamental da modelação matemática no ensino da matemática e no desenvolvimento de capacidades transversais, e apesar da adaptação e da implementação destas orientações metodológicas nos documentos curriculares ao longo dos últimos 30 anos, ainda se observa a ausência de situações sobre fenómenos naturais no estudo da Matemática (Niss & Højgaard, 2019).

Com o intuito de atribuir a primazia da ação aos alunos, numa ótica de ensino de cunho ‘exploratório’, sendo este propício às tarefas de modelação (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Ponte, 2005), foram formados pequenos grupos e foi dada autonomia aos alunos na exploração e na resolução das tarefas, colocando-me num papel de orientador das suas atividades. Os alunos tiveram então de aprender a trabalhar em grupo, a comunicar em matemática e a ser críticos perante os resultados obtidos. Segundo as perceções dos alunos, as tarefas de modelação promoveram o trabalho em grupo, o interesse e a participação de cada um, o que impactou o seu empenho. Ao longo da intervenção pedagógica, determinados grupos tentaram diversas estratégias de resolução de modo a otimizar o tempo definido para a exploração da tarefa. Por exemplo, alguns grupos dividiam a tarefa, atribuindo uma parte da tarefa a cada subgrupo, e, por fim, colocando os resultados obtidos em comum. No entanto, também houve alguns grupos onde nem todos os elementos participavam da mesma forma, sendo que os alunos com mais dificuldades tinham tendência em aguardar que os colegas trabalhem e lhes digam o que fizeram. Em suma, nota-se um aumento global da participação dos alunos perante tarefas de modelação, o que vai ao encontro dos resultados obtidos por Blum e Borromeo Ferri (2009) e Sawalha (2018).

A implementação das tarefas de modelação matemática baseou-se no ciclo de modelação definido no estudo de Stillman et al. (2007), adaptando as fases aos objetivos das aulas e à sala de aula. Os alunos percorreram, com auxílio à calculadora gráfica, as fases de compreensão do enunciado, da análise dos dados, da construção e validação do modelo e da exploração do modelo. Na primeira tarefa, foi essencial esclarecer à turma o que era um modelo matemático e explicar os procedimentos necessários para realizar regressões estatísticas na calculadora gráfica. Também foi fundamental como, perante os parâmetros apresentados na calculadora gráfica, averiguar qual o modelo que melhor se ajustava aos dados da tarefa. Ao longo da intervenção pedagógica, os alunos mostraram que assimilaram a construção e a verificação de modelos com recurso à calculadora gráfica. No que toca à exploração do modelo, destaca-se a variedade de resoluções propostas pelos alunos. Os alunos seguiram diferentes estratégias de resolução, quer

com processos analíticos, quer com auxílio à calculadora gráfica. Inicialmente, os alunos mostraram restringimentos na utilização da calculadora para resolver a tarefa e foi necessário orientá-los, nomeadamente na representação de gráficos e na definição de janelas de visualização. Nas restantes tarefas, observa-se que os alunos se sentiram mais familiarizados com a ‘ferramenta’ e exploraram as tarefas de maneira autónoma. No entanto, denotam-se lacunas por parte dos alunos no que diz respeito às resoluções analíticas, nomeadamente nas propriedades algébricas (regras operatórias e resolução de inequações) e analíticas (domínio, definição da primeira derivada) das funções logarítmicas.

As atividades desenvolvidas pelos alunos foram realizadas quer em momentos de introdução das funções logarítmicas e das suas derivadas quer em momentos de consolidação dos conhecimentos construídos. Relativamente às tarefas introdutórias de conceitos, observou-se que a transição dos resultados obtidos durante a exploração da tarefa para o estabelecimento formal do conhecimento é delicada, pois esta transição necessitava de uma interrupção do papel ativo do aluno para um papel mais passivo.

#### **4.1.2. Que dificuldades têm os alunos na aprendizagem das funções logarítmicas? E na resolução de tarefas de modelação?**

Os alunos apresentam diversas dificuldades no que toca ao tópico das funções e, em particular, das funções exponenciais (Michelsen, 2006; Weber, 2002), o que, consequentemente, limitou a aprendizagem das funções logarítmicas. Efetivamente, os alunos não estavam familiarizados com o conceito de função inversa de uma função real de variável real bijetiva. Foi então essencial relembrar esse conceito e as suas propriedades através de um exemplo que todos conheciam: a função quadrática e a função raiz quadrada. Realçando a reciprocidade existente entre essas duas funções, quer na representação gráfica, quer em processos algébricos, introduziu-se a função logarítmica como função inversa da função exponencial. De seguida, explorou-se o conceito de logaritmo de um número, salientado o papel da base, do objeto e da imagem na expressão  $y = \log_a x$  e a dualidade entre o objeto e a imagem:  $a^y = x$ . Segundo as perceções dos alunos, resultante da análise do questionário final, a função logarítmica é definida como sendo a função inversa da função exponencial, o que demonstra que esta abordagem das funções logarítmicas é eficaz nas aprendizagens dos alunos. Para além disso, na resolução de equações e inequações, esperava, com base na literatura (Kenney & Kastberg, 2013), encontrar logaritmos que fossem ‘cancelados’ à semelhança de uma equação polinomial, mas tal não foi

observado nas produções dos alunos. De facto, os erros relacionados com a resolução de inequações advinham maioritariamente da ordem dos números. No entanto, ao longo da intervenção pedagógica, identifiquei algumas dificuldades na representação gráfica de funções logarítmicas que, por vezes, se confundiam com a representação gráfica de funções exponenciais. Alguns alunos também mostraram dificuldades na representação simbólica dos logaritmos e, logo, no cálculo de logaritmos através das suas regras operatórias, realçando que a notação ' $\log_a x$ ' era difícil de interpretar e que precisava de algum tempo de adaptação. Estes resultados vão ao encontro das dificuldades evidenciadas por Weber (2002) e Kenney e Kastberg (2013).

Outro aspeto em que os alunos encontraram dificuldades foi no estudo das funções logarítmicas, nomeadamente na definição do domínio e na introdução da primeira derivada através da definição da taxa de variação instantânea. Na exploração da tarefa de modelação introdutória à derivada da função logarítmica, foi fundamental lembrar aos alunos a definição de derivada num ponto. Essa definição também revelou lacunas da parte dos alunos em relação ao cálculo de limites e de levantamento de indeterminações. A definição do domínio dos modelos logarítmicos explorados nas tarefas também dificultou os alunos, nomeadamente na consideração do contexto do modelo como condicionante do domínio. Na tentativa de colmatar estas dificuldades, foi essencial dar sentido a esses conceitos matemáticos através das tarefas de modelação, como sugerem Michelsen (2006) e Sawalha (2018). Por exemplo, no que toca à derivada, ilustrar com recurso à calculadora gráfica o significado da derivada num ponto com a respetiva tangente nesse ponto, e a relacionar com o contexto da tarefa, contribuiu no estudo da monotonia das funções logarítmicas e na sua representação gráfica, dando sentido a uma 'logarítmica' de modo a distingui-la de uma 'exponencial'.

Relativamente às dificuldades que os alunos denotam ter com as tarefas de modelação, estas encontram-se em diversas fases do ciclo de modelação que foram identificados com base nos resultados obtidos pelos autores Galbraith e Stillman (2006) e Stillman et al. (2007). Na primeira fase, que consiste em compreender e interpretar o enunciado de modo a identificar as grandezas dependentes e independentes em jogo, a maioria dos alunos conseguiu definir rigorosamente o papel de cada variável e, ao longo da intervenção, conjecturar que os dados não podiam verificar relações lineares ou exponenciais. No entanto, a interpretação do enunciado revelou-se ser um desafio tremendo na exploração do modelo, como sugerem Stillman et al. (2007). Os alunos sentiram dificuldades em ligar o contexto da tarefa com o modelo matemático

obtido. Isto demonstra dificuldades em dar sentido ao modelo matemático com o qual estão a trabalhar, ou seja, às funções de uma forma geral e às suas propriedades.

No que toca à definição do melhor modelo que se ajusta aos dados do enunciado, os alunos mostraram estar poucos familiarizados na utilização das funcionalidades da calculadora gráfica para organizar dados, representar nuvens de pontos e elaborar regressões estatísticas. Foi fundamental, no início da minha intervenção, orientar os alunos nesses procedimentos e, de uma forma geral, no uso da calculadora gráfica para a exploração da tarefa. Por exemplo, nas duas primeiras tarefas, alguns grupos tinham definido o modelo matemático inverso daquele que era esperado porque não verificaram as definições da tabela de dados. Outros não consideraram os coeficientes estimadores que permitam averiguar qual o melhor modelo que se ajuste aos dados e definiram modelos lineares ou exponenciais. Em suma, estas dificuldades ligam-se ao conhecimento das potencialidades da calculadora gráfica, que foram diminuindo ao longo da minha intervenção. Nas últimas tarefas, os alunos mostraram que sabiam recorrer à calculadora gráfica para definir o modelo mais adequado à situação da tarefa. Portanto, é primordial que os alunos conheçam as funcionalidades da calculadora gráfica de modo a serem capazes de organizar dados numa tabela, representar graficamente a nuvem de pontos associada, construir um modelo matemático que se ajuste à situação da tarefa e, consequentemente, resolver este tipo de tarefa (Blum, 2002; Campos et al., 2015).

Tendo o modelo matemático definido, os alunos também demonstraram dificuldades na exploração do modelo para responder às questões da tarefa. Nesta fase, observam-se dificuldades quer em processos analíticos, já evidenciados no início desta secção, quer na utilização da calculadora gráfica. A primeira dificuldade que se destaca foi a de habituar os alunos a recorrer a esta 'ferramenta' para visualizar o gráfico do modelo e conferir resultados obtidos analiticamente. Para esse efeito, procurei enfatizar que podiam responder às questões da tarefa com resoluções analíticas ou com recurso à calculadora e, no momento de discussão em grupo turma, sempre que possível, averiguar diferentes estratégias de resolução, como sugerem Semião e Canavarro (2012). Neste aspeto, alguns alunos mostraram dificuldades em recorrer à calculadora para superar limitações de determinados processos analíticos. Além do mais, foi fundamental relevar alguns pormenores que são necessários ter em conta na representação gráfica do modelo na calculadora, nomeadamente a janela de visualização. A definição da janela de visualização dificultou grande parte dos alunos ao longo da intervenção uma vez que esta depende do domínio do modelo, ou seja, do contexto da situação da tarefa. Uma janela de visualização defeituosa pode

induzir uma interpretação errónea da representação gráfica e, logo, entravar a exploração deste tipo de tarefa. O bom uso da calculadora gráfica implica intrinsecamente ter conhecimentos matemáticos robustos de modo a relacionar conceitos e propriedades de funções com a sua devida representação gráfica e reciprocamente (Consciência, 2013). Para usufruir plenamente das potencialidades da calculadora, também é essencial conhecer e compreender as notações matemáticas que podem aparecer no ecrã (Gilbraith & Stillman, 2006, Ponte, 1995). Alguns alunos revelam dificuldades na leitura simbólica de determinados conceitos como, por exemplo, a multiplicação que pode, por vezes, aparecer na forma de um ponto ou a notação científica de potências de base 10 que pode aparecer na forma da notação científica 'E'.

#### **4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a modelação matemática e a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas?**

No decorrer da minha intervenção pedagógica, as funções logarítmicas foram introduzidas e exploradas através de tarefas de modelação com recurso à calculadora gráfica. De modo a averiguar qual o contributo desta abordagem na aprendizagem das funções logarítmicas, é fundamental perceber quais são as perceções dos alunos.

Da análise das respostas ao questionário proposto, segundo a maioria dos alunos, as tarefas de modelação propostas têm por vantagens aperfeiçoar a utilização da calculadora gráfica e das suas potencialidades no estudo de funções, contribuir na compreensão das funções logarítmicas, incentivar a comunicação matemática e o trabalho em grupo, e perceber a importância da matemática na resolução de problemas de fenómenos reais, o que vai ao encontro da literatura (por exemplo, NCTM, 2000; Niss 1989). Alguns alunos, porém, destacaram que a tipologia das tarefas de modelação não se enquadrava na tipologia das tarefas propostas em exame, o que as tornavam menos preparatórias para este. Uma das outras desvantagens apontadas pelos alunos é a compreensão e interpretação do enunciado das tarefas que, por vezes, tornava a exploração destas um pouco confusa. Para além disso, estas tarefas exigiam conhecer as potencialidades da calculadora gráfica de modo a explorá-las de forma autónoma, o que foi sublinhado por alguns alunos como outra desvantagem. Estas desvantagens revelaram-se estar associadas também às principais dificuldades sentidas pelos alunos na exploração deste tipo de tarefa. Efetivamente, alguns alunos apontam que a utilização da calculadora gráfica na definição de modelos, na representação gráfica e na definição de janela de visualização foi um desafio elevado.

Os alunos realçam que a resolução de tarefas de modelação com recurso à calculadora gráfica contribuiu significativamente para a visualização de determinados conceitos matemáticos como, por exemplo, a representação gráfica, o domínio, a monotonia e as assintotas de modelos logarítmicos. O contexto real das tarefas contribuiu para atribuir um significado real a estes conceitos matemáticos, o que, segundo os alunos, ajudou a superar determinadas dificuldades na compreensão destes e, logo, na compreensão das funções logarítmicas. A calculadora gráfica serviu de recurso indispensável quer na representação gráfica, quer na verificação de cálculos de conjeturas ou de resultados obtidos analiticamente, nomeadamente na construção e na exploração do modelo. Em consequência, os alunos desenvolveram gradualmente a capacidade de interpretar e traduzir diferentes objetos matemáticos em representações equivalentes. Isto é, os alunos desenvolveram a capacidade de lidar com diferentes representações matemáticas com base nas suas vantagens e desvantagens consoante o objetivo da tarefa (Niss & Højgaard, 2019).

Para além disso, os alunos apontam que, ao contrário dos exercícios e problemas tradicionais, as tarefas de modelação evidenciam a presença da matemática em situações reais, o que contribuiu positivamente no interesse, na participação e no seu empenho. Os alunos também sentiram que estas tarefas foram mais exigentes a nível de interpretação, de conhecimentos matemáticos e de trabalho do que exercícios e problemas clássicos. Por fim, segundo os alunos, estas tarefas favorecem o trabalho em grupo e a interdisciplinaridade, o que gostariam de vivenciar no estudo de outros tópicos matemáticos ou em outras áreas científicas.

#### **4.2. Limitações**

No estudo realizado, que pretendia averiguar o contributo das tarefas de modelação com recurso à calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas, emergiram diversos tipos de limitações. A primeira limitação que se destaca é relacionada com a calculadora gráfica, quer na sua utilização, quer nas suas potencialidades. Embora os alunos do Ensino Secundário possuam uma calculadora gráfica desde o 10.º ano, foi notório que não estavam familiarizados com o uso dessa ‘ferramenta’ no estudo de funções, nomeadamente na sua representação gráfica. Como era esperado, os alunos desconheciam determinadas funcionalidades da calculadora gráfica, em particular a de poder organizar dados e realizar regressões estatísticas com base nesses dados. As primeiras tarefas de modelação foram um pouco menos conseguidas por esse motivo e foi fundamental esclarecer e orientar os alunos nesses procedimentos. No entanto, os

alunos mostraram que eram capazes de se adaptar pelo que a definição do melhor modelo que se ajuste aos dados não os dificultou nas últimas tarefas realizadas.

A definição de uma janela de visualização que se ajuste à representação gráfica, ou parte desta, consoante os objetivos da tarefa, revelou-se ser um desafio trabalhoso para os alunos. Sem uma janela de visualização adequada, podemos extrair da leitura e interpretação do ecrã da calculadora gráfica conclusões erróneas relativamente às características da função representada. Ainda na representação gráfica, os modelos logarítmicos estabelecem relações entre grandezas desmesuradas. Devido às limitações tecnológicas da calculadora gráfica, nomeadamente a resolução do ecrã ( $384 \times 216$  pixeis), esta não é capaz de representar no ecrã determinadas partes do gráfico desses modelos. Em consequência, a leitura, a interpretação e a resolução gráfica são perturbadas.

Outra limitação prende-se com a elaboração das tarefas de modelação envolvendo modelos logarítmicos. Foi um desafio elevado propor tarefas de modelação que cativem o interesse dos alunos, que se enquadrem aos objetivos de aprendizagem delineados no currículo e que estejam associadas a fenómenos naturais significativos. Em particular, reunir tarefas de modelação de contexto verdadeiramente real, ou seja, focado nas propriedades da situação do problema, e não semirreal, ou seja, focado somente nas suas propriedades matemáticas (Ponte & Quaresma, 2012), revelou-se ser uma tarefa árdua. Para que tais tarefas se tornem verdadeiramente reais, penso que seria necessário de alguma forma colocar os alunos num papel de investigador onde sejam eles próprios a recolher dados. No entanto, diversos fatores como a sala de aula, os recursos tecnológicos disponíveis e os objetivos de aprendizagem dificultam a incorporação desse aspeto.

#### **4.3. Recomendações para futuros estudos**

No estudo realizado, obtiveram-se resultados positivos e animadores quanto ao contributo das tarefas de modelação com recurso à calculadora gráfica na aprendizagem das funções logarítmicas. Logo, recomenda-se estudar o contributo das tarefas de modelação na aprendizagem de outros tópicos de Funções, promovendo sempre que possível o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento desses tópicos. Sendo que as tarefas de modelação podem abranger uma diversidade de fenómenos naturais, um estudo que averigue o contributo das tarefas de modelação, promovendo a interdisciplinaridade com outras áreas científicas e envolvendo outras ferramentas tecnológicas como, por exemplo, sensores, é recomendado.

Para estudos semelhantes ao que desenvolvemos neste trabalho, recomenda-se elaborar tarefas de modelação envolvendo modelos exponenciais e logísticos e não só logarítmicos, partindo de fenómenos reais que podem ser representados por modelos exponenciais e logísticos, diversificando assim o leque das propriedades relacionadas com a situação do problema, mas também o leque das propriedades algébricas e analíticas estudadas, sem excluir conceitos matemáticos relacionados com as funções logarítmicas.

Um outro estudo que se sugere consiste em averiguar o contributo das tarefas de modelação em momentos de avaliação das aprendizagens dos alunos no ensino de tópicos de Funções. Este estudo realçaria determinadas questões que suscitem algum interesse como, por exemplo, qual seria a tipologia das questões numa avaliação com tarefas de modelação? Em que modalidades de avaliação (diagnóstica, formativa ou sumativa) as tarefas de modelação são mais propícias? Quais são as perceções dos alunos sobre tarefas de modelação em momentos de avaliação?

Por último, uma outra recomendação consiste em implementar tarefas de modelação logo no início do Ensino Secundário e, se possível, no 3.º Ciclo de modo a: habituar os alunos a recorrer à calculadora gráfica, ou outros dispositivos que sejam acessíveis como, por exemplo, o GeoGebra, na verificação de conjecturas ou resultados obtidos analiticamente; desenvolver a capacidade de interpretação e de resolução de problemas reais e, logo, o raciocínio matemático; propiciar a manipulação de representações matemáticas; promover a comunicação e a cultura matemática (NCTM, 2000; Niss & Højgaard, 2019; Shahbari & Tabach, 2020).

## BIBLIOGRAFIA

- Barbosa, J. C. (2009). Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 69-85.
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 34(5), 229–239.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86-95.
- Boyer, C., & Merzbach, U. (2011). *A History of mathematics, Third Edition*. Canada: Wiley.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM - International Journal on Mathematics Education* 38, 178-195.
- Cajori, F. (1913). The History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *The American Mathematical Monthly*, 20(7), 205-210. DOI: <https://doi.org/10.2307/2974104>
- Cajori, F. (1909). *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments*. The Engineering News Publishing Company. Acedido em 25 de outubro, 2020, de [http://cs.furman.edu/~chealy/cs273e/A\\_History\\_of\\_the\\_Logarithmic\\_Slide\\_Rule.pdf](http://cs.furman.edu/~chealy/cs273e/A_History_of_the_Logarithmic_Slide_Rule.pdf)
- Campos, S., Viseu, F., Rocha, H., & Fernandes, J. A., (2015). A calculadora gráfica na promoção da escrita matemática. In S. Carreira, & N. Amado (Eds.), 12th *International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT12) (pp. 590-598).
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática
- Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). SPIEM
- Carrejo, D. J., & Marshall, J. (2007). What is mathematical modelling? Exploring prospective teachers' use of experiments to connect mathematics to the study of motion. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 45–76.

- Coolidge, J. L. (1950). The Number e. *The American Mathematical Monthly*, 57(9), 591-602.  
Harvard University. DOI: <https://doi.org/10.1080/00029890.1950.11999585>
- Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- De Lange, J. (2006). Mathematical Literacy for living from OECD-PISA perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25, 13–35.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2004). Mathematical Modelling with young children. In Proceedings of the 28th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 335–342.
- Euler, L. (1751). De la controverse entre Mrs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. Euler Archive - All Works. 168.
- Euler, L. (1840). *Elements of Algebra* (5th ed). Springer-Verlag.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the Modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 143-162.
- Hestenes, D. (2010). Modeling Theory for Math and Science Education. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 24-52). ICTMA 13.
- Hoe, L. N., & Dawn, N. K. E. (2015). Series on Mathematics Education Vol.8. *Mathematical Modelling: From Theory to Practice*. National Institute of Education, Nanyan Technological University, Singapura.
- Houston, K., Galbraith, P., & Kaiser, G. (2019). The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications. *The First Twenty-five Years*. Acedido em 20 de novembro, 2020, de <https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php>
- Hubbard, R. (2004). An Investigation into the modelling of word problems. In *Mathematics education for the third millennium: Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, 304-311.
- Kastberg, S. (2002). *Understanding mathematical concepts: The case of the logarithmic function*. Tese de Doutoramento, The University of Georgia, U.S.A.
- Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in learning logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, 27(1) 12-20.

- Larson, C., Harel, G., Oehrtman, M., Zandieh, M., Rasmussen, C., Speiser, R., & Walter, C. (2010). Modeling Perspectives in Math Education Research. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 61-71). ICTMA 13.
- Leitão, A., & Canguero, L. (2007). *Princípios e Normas do NCTM – um percurso pela Álgebra*. Grupo de trabalho das Publicações, da APM.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C., & Hurford, A. (Eds) (2010). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. ICTMA 13.
- Lesh, R., & Fennewald, T. (2010). Introduction to Part I Modeling: What is it? Why do it? In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 17-22). ICTMA 13.
- Michelsen, C. (2006). Functions: A modelling tool in mathematics and science. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38, 269-280.
- Ministério da Educação (1990). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico 3.º ciclo, Matemática*. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2001). *Matemática A: Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas*. Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2002). *Matemática A: Programa do 11.º ano*. Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2002). *Matemática B: Programa do 11.º ano*. Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2002). *Matemática A: Programa do 12.º ano*. Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação
- Ministério da Educação e Ciência (2012). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência

- Ministério da Educação e Ciência (2015). *Programa e Metas Curriculares. Matemática A – Ensino Secundário*. Ministério da Educação e Ciência
- Ministério da Educação (2017). *Perfil Dos Alunos À Saída Perfil Dos Alunos*. Direção-Geral da Educação. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos. 10.º ano. Ensino Secundário. Matemática A*. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos. 11.º ano. Ensino Secundário. Matemática B*. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos. 11.º ano. Ensino Secundário. Matemática A*. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos. 12.º ano. Ensino Secundário. Matemática A*. Ministério da Educação.
- Mulqueeney, E. (2012). *How do students acquire an understanding of logarithmic concepts?* Tese de Doutoramento, Kent State University.
- Napier, J. (1614). Mirifici logarithmorum canonis descriptio. In E. Tomash, & M. R. Williams (Eds) (2009), *The Erwin Tomash Library on the History of Computing: An Annotated and Illustrated Catalog* (pp. 913-944). Erwin Tomash and Michael R. Williams.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- National Research Council (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. The National Academies Press.
- Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, 22-31.
- Niss, M. (2010). Modeling a Crucial Aspect of Students' Mathematical Modeling. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 53-69). ICTMA 13.
- Niss, M., Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- OECD (2019). PISA 2018 Mathematics Framework, in *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*, OECD Publishing.

- Owens, J. E. (1988). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Report of the National Council of Teachers of Mathematics' Commission on Standards for School Mathematics. *The Summer Workshop of The Association of Teacher Educators*. NCTM.
- Peyrard, F. (1804). L'Arénaire. In *Œuvres d'Archimède, traduit littéralement avec un commentaire, par F. Peyrard*. Acedido em 23 de Outubro, 2020, de <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/arenaire.htm>
- Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, 15, 3-9.
- Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 22, 196-216.
- Sawalha, Y. (2018). *The effects of teaching exponential functions using authentic problem solving on students' achievement and attitude*. Tese de Doutorado, Wayne State University Dissertations.
- Semião, M. J., & Canavarro, A. P. (2012). A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das funções. In O. Magalhães, & A. Folque (Orgs.), *Práticas de investigação em Educação*. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.
- Shahbari, J.A., & Tabach, M. (2020). Features of modeling processes that elicit mathematical models represented at different semiotic registers. *Educational Studies in Mathematics* 105, 115–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09971-2>
- Stillman, G., Blum, W., & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Springer.
- Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*.
- Tanonaka, E. M. (2008). *Régua de cálculo: uma contribuição de William Oughtred para a matemática*. Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

- Tomash, E., & Williams, M. R. (Eds.) (2009). *The Erwin Tomash Library on the History of Computing: An Annotated and Illustrated Catalog*, 205-208. Acedido em 25 de Outubro, 2020, de <https://cse.umn.edu/cbi/erwin-tomash-library-history-computing>
- Trompler, S. (2002). L'histoire des logarithmes. *Cahier du CeDop*, Université libre de Bruxelles, Belgique.
- Weber, C. (2017). Multiple models for teaching logarithms: with a focus on graphing functions. In *Proceedings of the Tenth Congresso of the European Society for Research in Mathematics Education CERME10*. 537-544.
- Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

## ANEXOS

## ANEXO 1 – Pedido de Autorização ao Diretor da Escola

Exmo. Sr. Diretor da Escola

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professor estagiário, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos do tema “A modelação na aprendizagem das funções logarítmicas de alunos do 12.º ano com recurso à calculadora gráfica”. O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação de aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que os envolvam. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização do estágio.

Por fim, informa V. Exa que, caso autorize a realização das minhas pretensões, solicitarei de seguida a autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a participação dos mesmos no meu projeto de investigação.

Grato pela atenção prestada, com os meus cordiais cumprimentos,

██████████, 05 de dezembro de 2019

O estagiário de Matemática,

---

(Samuel Marques)

## ANEXO 2 – Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professor estagiário, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos de tópicos do tema “A modelação na aprendizagem das funções logarítmicas de alunos do 12.º ano com recurso à calculadora gráfica”. O desenvolvimento dessas experiências de ensino implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação de aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando. Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência na classificação dos alunos.

Agradeço desde já a sua colaboração. Para qualquer esclarecimento adicional pode contactar-me através do correio eletrónico: [REDACTED]

[REDACTED], 05 de dezembro de 2019

O estagiário de Matemática,

---

(Samuel Marques)

---

### Autorização

Eu, \_\_\_\_\_, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvam o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O Encarregado(a) de Educação,

### ANEXO 3 – Questionário Inicial

Este questionário tem como finalidade recolher informação que me permite conhecer características dos alunos da tua turma relativamente à disciplina de Matemática, às disciplinas favoritas, ao tempo dedicado à Matemática, à modelação matemática, às funções e ao uso da calculadora gráfica. Os dados recolhidos neste questionário são confidenciais e serão usados apenas para a realização do meu trabalho de investigação. Assim, solicito a tua colaboração de forma sincera e responsável. Não há respostas incorretas.

Muito obrigado pela tua colaboração!

#### Dados Pessoais

---

Nome: \_\_\_\_\_

Idade (em anos): \_\_\_\_\_

Quantas horas estudas, em média, semanalmente, para a disciplina de Matemática A?

|             |                       |                 |                       |                 |                       |
|-------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|
| Não estudo  | <input type="radio"/> | Menos de 1 hora | <input type="radio"/> | 1 a 2 horas     | <input type="radio"/> |
| 2 a 3 horas | <input type="radio"/> | 3 a 4 horas     | <input type="radio"/> | Mais de 4 horas | <input type="radio"/> |

Gostas de Matemática? ☐ Sim ☐ Não

Justifica a tua resposta.

---

---

---

Qual foi a tua classificação, na disciplina de Matemática, no final do 11.º ano? \_\_\_\_\_

Qual (ou quais) a(s) disciplina(s) em que tens mais dificuldade? Porquê?

---

---

---

Qual (ou quais) são a(s) tua(s) disciplina(s) favoritas? Porquê?

---

---

---

Gostas do tópico Funções? ☐ Sim ☐ Não

Justifica a tua resposta.

---

---

---

Em que consiste a Modelação Matemática?

---

---

---

Já realizaste tarefas de modelação matemática? ☐ Sim ☐ Não

Se sim, descreve brevemente do que te lembras.

---

---

---

Costumas usar a calculadora gráfica na resolução de tarefas?

☐ Sim ☐ Não

Se sim, descreve brevemente em que tipo de situações usas a calculadora gráfica.

---

---

---

#### ANEXO 4 – Questionário final (realizado online através da plataforma Google Forms)

As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente às tarefas de modelação na aprendizagem das funções logarítmicas com recurso à calculadora gráfica. É da maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

1. Das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz (X) a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: **DT**: Discordo Totalmente; **DP**: Discordo Parcialmente; **I**: Indiferente; **CP**: Concordo Parcialmente; **CT**: Concordo Totalmente.

| Afirmações                                                                                                          | DT | DP | I | CP | CT |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|---|----|----|
| Gostei de estudar as funções logarítmicas.                                                                          |    |    |   |    |    |
| No estudo das funções logarítmicas, evidenciei mais dificuldades do que os outros temas matemáticos.                |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas ajudaram-me a compreender melhor as funções logarítmicas.                         |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas aumentaram o meu interesse no estudo das funções logarítmicas.                    |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas ajudaram-me a perceber melhor a ligação da matemática com situações da vida real. |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas permitiram trabalhar conceitos matemáticos aplicados a outras áreas científicas.  |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas ajudaram-me a melhorar a minha capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica. |    |    |   |    |    |
| A calculadora gráfica permitiu-me verificar resultados que obtive analiticamente.                                   |    |    |   |    |    |
| A calculadora gráfica ajudou-me a compreender melhor as funções logarítmicas.                                       |    |    |   |    |    |
| Senti dificuldades no uso da calculadora gráfica para resolver as tarefas de modelação propostas.                   |    |    |   |    |    |
| Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.                              |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas favoreceram a introdução dos tópicos das funções logarítmicas.                    |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação propostas exigiram melhor conhecimento dos conceitos matemáticos.                           |    |    |   |    |    |
| O trabalho em grupo contribuiu na aprendizagem das funções logarítmicas.                                            |    |    |   |    |    |
| Encontrei dificuldades na resolução das tarefas de modelação propostas.                                             |    |    |   |    |    |
| Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso às tarefas de modelação.                                |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação são mais desafiantes do que os exercícios e alguns problemas.                               |    |    |   |    |    |
| A resolução de tarefas de modelação é mais fácil do que a resolução de exercícios e de alguns problemas.            |    |    |   |    |    |
| A resolução de tarefas é mais propícia ao trabalho individual do que em grupo.                                      |    |    |   |    |    |
| Na resolução de tarefas de modelação a calculadora gráfica pouco contribuiu.                                        |    |    |   |    |    |
| As tarefas de modelação incentivaram-me a empenhar-me e participar mais.                                            |    |    |   |    |    |
| Gostava de ter mais oportunidades para trabalhar em grupo.                                                          |    |    |   |    |    |

2. Define, com **três palavras**, o que é uma tarefa de modelação para ti.

---

---

---

3. Define, com **três palavras**, o que é uma função logarítmica para ti.

---

---

---

4. Indica **três vantagens** das tarefas de modelação propostas para a tua aprendizagem de tópicos das funções logarítmicas.

---

---

---

---

---

5. Indica **três desvantagens** das tarefas de modelação propostas para a tua aprendizagem de tópicos das funções logarítmicas.

---

---

---

---

---

6. Que dificuldades sentiste na aprendizagem das funções logarítmicas?

---

---

---

---

---

7. Que dificuldades sentiste na resolução das tarefas de modelação?

---

---

---

---

---

8. Qual foi o contributo das tarefas de modelação e da calculadora gráfica na clarificação dessas dificuldades?

---

---

---

---

---

9. Explica as diferenças que identificas entre a resolução de exercícios, problemas e das tarefas de modelação.

---

---

---

---

---

## ANEXO 5 – Planificação das aulas

## Plano de aula 1

**Tópico:** Introdução ao estudo da função logarítmica

**Objetivo:** Definir função logarítmica como inversa da função exponencial.

**Conhecimentos prévios:** Função exponencial; Noção de função inversa.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

**Tarefa:** O crescimento de uma população de bactérias

As bactérias reproduzem-se assexuadamente por um processo chamado divisão binária. A divisão binária ocorre quando uma bactéria duplica o seu material genético e logo em seguida se divide, originando duas bactérias idênticas a ela. Em condições ideais de temperatura e nutrientes, uma bactéria leva aproximadamente vinte minutos para completar todo o processo de divisão.

1. Completa a seguinte tabela.

[illegible]

2. Com recurso à calculadora gráfica, representa graficamente a nuvem de pontos do número de bactérias em função do tempo  $t$ .
3. Define o modelo matemático que melhor represente a situação.
4. Após um dia quantas bactérias constituem a população?
5. Quanto tempo é necessário para a população atingir 8000 bactérias?
6. Sendo o número de células bacterianas no corpo humano aproximadamente igual a  $40 \times 10^{12}$ , em quanto tempo a população de bactérias atingirá esse valor?

## Exploração

1. Na interpretação do enunciado da tarefa, visualizar um vídeo sobre o crescimento de uma população de bactérias.
2. Completar a tabela que representa o crescimento de bactérias em função do tempo.
3. Representar a nuvem de pontos que traduz a reprodução de bactérias em função do tempo.
4. Questionar os alunos sobre o modelo que melhor se ajusta aos dados que traduzem a reprodução de bactérias em função do tempo.
5. A partir do modelo obtido, solicitar os alunos a responder, com recurso à calculadora gráfica, às restantes questões.
6. Questionar os alunos de como resolver tais questões analiticamente? Efetuar o esboço gráfico da função inversa da função que modela a situação em estudo.



7. Estabelecer a noção de logaritmo de um número:  $x = a^y \Leftrightarrow \log_a x = y$ .
8. Determinar:

## Comentários

Turma 12º. Ano de Matemática A.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; e (iii) Discussão/Sistematização.

A resolução da tarefa é efetuada em pares

Verificar se os alunos têm dificuldades em usar a calculadora gráfica na resolução da tarefa.  
Duração: 40 minutos.

A visualização do vídeo no site <https://www.youtube.com/watch?v=yRoWhowutk> permite aos alunos perceber o crescimento de uma população de bactérias

Como os alunos ainda não têm conhecimento de logaritmo de um número numa dada base, introduzir esta noção.  
Duração: 15 minutos.

Determinar  $\log_2 16$  no quadro.  
Será pedido aos alunos para apresentarem as suas soluções corretas no quadro.  
Duração: 15 minutos.

- a)  $\log_3 9$ ; b)  $\log_4 64$ ; c)  $\log_5 625$ ; d)  $\log_2 \frac{1}{8}$ ; e)  $\log_{\sqrt{2}} 32$
9. Definir a função logarítmica de um número positivo  $x$  na base  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
10. Deduzir as primeiras propriedades a partir da bijetividade da função logarítmica:  $a^{\log_a x} = x$  e  $\log_a a^x = x$ .
11. Responder à última pergunta da tarefa.

Especificar que, quando a base é 10, falamos do logaritmo decimal  $\log$ . Quando a base é  $e$ , falamos do logaritmo neperiano  $\ln$ .  
Duração: 5 minutos.

Deixar um tempo para os alunos demonstrar essas duas igualdades.  
Duração: 10 minutos

**Tarefas adicionais:** Página 30 do manual, exercícios 33 e 34

33. Indica o valor de:

- a)  $\log_5 125$ ; b)  $\log_2(\frac{1}{32})$ ; c)  $\log_3 \sqrt{27}$ ; d)  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$ ; e)  $\log(0,000\ 01)$ ; f)

$$\ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$$

34. Copia para o teu caderno e completa:

- a)  $5 = 2^{\quad}$  ; b)  $5 = \log_2(\quad)$ ; c)  $\log_5(5^k) = \quad$  ; d)  $3^{\log_3 \quad} = k$

## Plano de aula 2

**Tópico:** Introdução à derivada da função logarítmica.

**Objetivo:** Definir a derivada da função logaritmo de base  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Conhecimento prévio:** Ter a noção das propriedades da função logaritmo.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

**Tarefa:** O que é um Decibel?

Nos seus primeiros estudos de acústica, Bell, inventor do telefone, percebeu que a variação de som que o ouvido humano pode sentir não acompanha uma escala linear. Se dobrarmos a amplitude de um sinal, o nosso ouvido não capta esta transformação. Com base nas suas experiências, Bell resolveu utilizar uma escala logarítmica para representar a amplificação ou a atenuação de um sistema. Para quantificar a redução ao nível acústico sobre um cabo telefónico padrão com 1 milha de comprimento, Bell criou a unidade de medida TU (Transmission Unit). Esta unidade de medida foi renomeada *Bel*. Com a prática, percebeu-se que a unidade era muito grande e decidiu-se então dividir a unidade *Bel* em dez, criando-se assim o *Decibel* (dB).

| Fonte sonora           | Intensidade sonora (dB) | Razão da intensidade sonora captada $I$ com o limiar da audibilidade $I_0$ |
|------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Murmúrios              | 10                      | 10                                                                         |
| Conversa normal        | 20                      | 100                                                                        |
| Quarto calmo           | 25                      | 316,2                                                                      |
| Biblioteca             | 30                      | 1000                                                                       |
| Rua residencial        | 40                      | 10000                                                                      |
| Máquina de lavar loiça | 45                      | 31622,8                                                                    |
| Escritório             | 50                      | 100 000                                                                    |
| Sala de aula           | 55                      | 316 227,8                                                                  |

Comentários

Turma 12º. Ano de Matemática A

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; e (iii) Discussão/Sistematização.

A resolução da tarefa é efetuada em pares.  
Verificar se os alunos têm dificuldades em usar a calculadora gráfica na resolução da tarefa.

|                        |    |             |
|------------------------|----|-------------|
| Motor de um carro      | 60 | 1 000 000   |
| Aspirador              | 65 | 3 162 277,7 |
| Trânsito congestionado | 70 | 10 000 000  |
| Cantina escolar        | 80 | 100 000 000 |

1. Com base nos valores da tabela, comenta a afirmação: “Bell percebeu que a variação de som que o ouvido humano pode sentir não acompanha uma escala linear”.
2. Recorrendo à calculadora gráfica, representa graficamente a nuvem de pontos da intensidade sonora (dB) em função da razão  $\frac{I}{I_0}$ . Que modelo matemático melhor representa esta situação?
3. Tendo como referência o modelo que definiste, compara a variação da intensidade sonora nos intervalos [10; 30] e [1010, 1030]. O que podes concluir?
4. Determina a taxa de variação instantânea da intensidade sonora para  $\frac{I}{I_0} = 15$
5. Determina a taxa de variação instantânea da intensidade sonora em função da razão  $\frac{I}{I_0}$ .
6. Descreve o comportamento da variação da função que modela a situação em estudo, referindo onde esse crescimento é mais acentuado.

### Exploração

1. Verificar que não há uma relação de proporcionalidade direta entre a razão  $\frac{I}{I_0}$  e a intensidade sonora em dB.
2. Representar a nuvem de pontos que traduz a intensidade sonora em dB em função da razão  $\frac{I}{I_0}$ .
3. Questionar os alunos sobre o modelo que melhor se ajusta aos dados que traduzem a intensidade sonora em dB em função da razão  $\frac{I}{I_0}$ .
4. Comparar a variação da intensidade sonora nos intervalos [10, 30] e [1010, 1030].
5. Questionar os alunos de como determinar a velocidade instantânea da intensidade sonora em  $\frac{I}{I_0} = 15$  (recorrer à calculadora gráfica e à definição de derivada).
6. Estabelecer a derivada de uma função logarítmica de uma base qualquer.

### Prática:

1. Recorre à definição de derivada de uma função num ponto para determinar:
  - a)  $f'(2)$ , sendo  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ;
  - b)  $f'(1)$ , sendo  $f(x) = x + \ln x$
2. Determina  $f'(x)$ , sendo:
  - a)  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ ;
  - b)  $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right)$ ;
  - c)  $f(x) = x \ln(x^2 - x)$ ;
  - d)  $f(x) = x \ln^2 x$ ;
  - e)  $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ ;
  - f)  $f(x) = \log_3(2x - 1)$ ;
  - g)  $f(x) = x \log_2\left(\frac{1}{x}\right) - 2x$

Relembrar aos alunos o limite:

$$\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, k \in \mathbb{R}$$

Correção da tarefa em grupo turma.

Envolver os alunos na determinação, por definição, da derivada de uma função logaritmo em qualquer base.

Pretende-se que os alunos estabeleçam a regra de derivação de uma função logaritmo de uma base qualquer a partir da definição de derivada de uma função num ponto.

Para os alunos praticar e aplicar a definição de derivada de uma função logaritmo em qualquer base, propõe os seguintes exercícios.

Estas tarefas integram o manual escolar do aluno (página 42, exercícios 60 e 61).

### Plano de aula 3

**Tópico:** Função logaritmo

**Objetivo:** Aplicar conhecimentos adquiridos no estudo da função logarítmica.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

**Tarefa 1:** O pH de uma substância

A acidez de uma substância é medida pela concentração (em moles por litro) de íons de Hidrogénio ( $H^+$ ) na substância. O processo normalizado de descrever esta concentração é definir o pH (potencial Hidrogeniónico) de uma substância, o que indica se uma substância é ácida, neutra ou básica. A escala de pH varia entre 0 e 14 na temperatura de 25°C. Se o valor do pH for igual a 7, o meio da substância será neutro. Mas se o pH for menor que 7, será ácido, e se for maior que 7, básico. A seguinte tabela apresenta concentrações de íons  $H^+$  e os respetivos valores do pH de substâncias presente no nosso quotidiano.

| Substâncias     | Concentração de íons $H^+$ | pH   |
|-----------------|----------------------------|------|
| Sumo de limão   | $3,981 \times 10^{-3}$     | 2,4  |
| Vinagre         | $1,2589 \times 10^{-3}$    | 2,9  |
| Sumo de maçã    | $3,1623 \times 10^{-4}$    | 3,5  |
| Cerveja         | $3,1623 \times 10^{-5}$    | 4,5  |
| Café            | $1,0 \times 10^{-5}$       | 5,0  |
| Chá             | $3,1623 \times 10^{-6}$    | 5,5  |
| Leite           | $3,1623 \times 10^{-7}$    | 6,5  |
| Água pura       | $1,0 \times 10^{-7}$       | 7,0  |
| Sangue          | $3,981 \times 10^{-8}$     | 7,4  |
| Água do mar     | $1,0 \times 10^{-8}$       | 8,0  |
| Sabonete de mão | $6,3096 \times 10^{-10}$   | 9,2  |
| Amônia caseira  | $3,1623 \times 10^{-12}$   | 11,5 |
| Água sanitária  | $3,1623 \times 10^{-13}$   | 12,5 |

1. Da análise dos dados apresentados na tabela, que modelo te parece que melhor traduz o pH de uma substância qualquer em função da sua concentração de íons? Com recurso à calculadora gráfica, verifica se o modelo que idealizaste traduz essa representação.
2. Tendo como referência o modelo que definiste, determina a concentração de íons  $H^+$  de um sumo de uva cujo valor de pH é igual a 3,2.
3. Que valores traduzem as concentrações de íons  $H^+$  de forma que o meio de uma substância seja ácido?
4. Da análise do gráfico do modelo que estabeleceste, verificas que a função representada é estritamente decrescente no seu domínio de validade e que o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima. Comprova analiticamente tais resultados.
5. Formalmente, o pH é dado por  $pH = -\log[H^+]$ . Que diferença há entre o modelo que estabeleceste e este modelo formal do pH?

**Exploração**

Comentários

Turma 12º. Ano de Matemática A.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; e (iii) Discussão e Sistematização.

A resolução das tarefas é efetuada em grupos de 4, atendendo às seguintes regras: (i) Um grupo só chama o professor depois de atender as considerações dos seus colegas de grupo; (ii) Todos os elementos do grupo devem participar de modo que qualquer um deles seja capaz de representar o grupo na apresentação das suas atividades à turma.

Pedir a um aluno para ler o enunciado da tarefa em voz alta e clarificar os dados da tarefa.

Verificar se os alunos têm dificuldades em usar a calculadora gráfica na resolução da tarefa

Distinguir o domínio do modelo obtido do domínio que traduz o contexto da tarefa.

7. Questionar os alunos se conseguem visualizar o modelo que traduz o pH de uma substância qualquer em função da sua concentração de iões e verificar a sua conjectura com o modelo obtido através da calculadora gráfica.
8. A partir do modelo obtido, solicitar os alunos a responder às restantes questões da tarefa.
9. Discutir a diferença entre o modelo que definiram e o modelo formal do pH de uma substância.

Explorar as diversas propostas de resolução dos alunos de modo a envolvê-los na discussão da resolução da tarefa no grupo turma.

## Tarefa 2: A escala de Richter

No dia de Todos-os-Santos de 1755 aconteceu em Lisboa um dos maiores tremores de terra que há memória, gerando destruição e morte numa escala nunca vista: mais de 60 000 mortos. Todos os anos são detetados cerca de 6 000 sismos em todo o mundo. Destes sismos, cerca de 15 têm um efeito destruidor. Como estabelecer uma hierarquia na intensidade sísmica? Um dos métodos usados pelos cientistas é a escala de Richter, que se baseia na medida das ondas produzidas pelo sismo.

Pedir a um aluno para ler o enunciado da tarefa em voz alta e clarificar os dados da tarefa.

1. Completa a seguinte tabela com valores que obténs da pesquisa “Escala de Richter” no *Google*:

| Magnitude Richter aproximada | Equivalente TNT para a energia sísmica libertada (gramas) |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------|
|                              |                                                           |
|                              |                                                           |
|                              |                                                           |
|                              |                                                           |
|                              |                                                           |
|                              |                                                           |
|                              |                                                           |

Informar os alunos dos significados dos vários prefixos usados com as unidades SI:

1 kg de TNT=1000 g de TNT  
 1 t de TNT=10<sup>3</sup> kg de TNT  
 1 kt de TNT=10<sup>6</sup> kg de TNT  
 1 Mt de TNT=10<sup>9</sup> kg de TNT  
 1 Gt de TNT=10<sup>12</sup> kg de TNT  
 1 Tt de TNT=10<sup>15</sup> kg de TNT

2. Recorrendo à calculadora gráfica, determina o modelo que melhor se ajusta aos pontos que representam a magnitude de um sismo em função do equivalente TNT da energia sísmica libertada.
3. Qual a energia libertada (em gramas TNT) do sismo de Lisboa que atingiu uma magnitude de 8,7 na escala de Richter?
4. Cada acréscimo de uma unidade de magnitude, na escala de Richter, resulta da energia libertada ser multiplicada por um fator. Qual o valor desse fator?
5. Uma forma de representar o modelo de Richter é:  $M = \frac{2}{3} \log(x)$ .  
 Compara o modelo que definiste com o modelo de Richter. O que podes concluir?

## Exploração

1. Orientar os alunos na pesquisa de dados que lhes permite relacionar os valores da magnitude de um sismo com os valores do equivalente TNT da energia sísmica libertada.
2. Definir o modelo matemático que melhor se ajusta aos dados que traduzem a magnitude de um sismo em função do equivalente TNT da energia sísmica libertada.
3. A partir do modelo obtido, solicitar os alunos a responder às restantes questões da tarefa

Salientar a utilidade do que se aprende em Matemática na compreensão e

4. Discutir as diferenças entre o modelo que construíram e o modelo de Richter definido por  $M = \frac{2}{3} \log(x)$ .

#### Tarefas adicionais

- Calcula cada um dos seguintes limites:  
 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{x^2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + x^2}{e^x}$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{3x} - 1) \ln x}{x^2}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{3x} - 1) \ln x}{x^2}$
- Considera a função  $f$  definida por:  $f(x) = x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$   
 a) Determina, caso existam, as equações das assintotas ao gráfico de  $f$ .  
 b) Estuda  $f$  quanto à monotonia e extremos.  
 c) Mostra que o gráfico de  $f$  não tem pontos de inflexão.  
 d) Faz uma representação gráfica de  $f$ .

resolução de situações do quotidiano através do tratamento de dados.

As Tarefas Adicionais serão consideradas caso haja tempo útil da aula após a discussão na turma da resolução das tarefas anteriores.

As tarefas que integram as 'Tarefas Adicionais' fazem parte do manual escolar do aluno (página 43, tarefas 63 e 65).

### Plano de aula 4

**Tópico:** Função logaritmo

**Objetivo:** Aplicar conhecimentos adquiridos no estudo da função logarítmica.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

**Tarefa:** A escala de Richter

No dia de Todos-os-Santos de 1755 aconteceu em Lisboa um dos maiores tremores de terra que há memória, gerando destruição e morte numa escala nunca vista: mais de 60 000 mortos. Todos os anos são detetados cerca de 6 000 sismos em todo o mundo. Destes sismos, cerca de 15 têm um efeito destruidor. Como estabelecer uma hierarquia na intensidade sísmica? Um dos métodos usados pelos cientistas é a escala de Richter, que se baseia na medida das ondas produzidas pelo sismo.

- Numa pesquisa no Google sobre a “Escala de Richter” recolheram-se os seguintes valores:

| Magnitude Richter aproximada | Equivalente TNT para a energia sísmica libertada (gramas) |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 0                            | 15                                                        |
| 0,2                          | 30                                                        |
| 1,5                          | 2700                                                      |
| 2,1                          | 21000                                                     |
| 3                            | 480000                                                    |
| 3,5                          | $2,7 \times 10^6$                                         |
| 3,87                         | $9,5 \times 10^6$                                         |
| 3,91                         | $1,1 \times 10^7$                                         |

Recorrendo à calculadora gráfica, determina o modelo que melhor se ajusta aos pontos que representam a magnitude  $M$  de um sismo em função do equivalente TNT da energia sísmica libertada  $E$ .

#### Comentários

Turma 12º. Ano de Matemática A.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; e (iii) Discussão e Sistematização.

A resolução das tarefas é efetuada em grupos de 4, atendendo às seguintes regras: (i) Um grupo só chama o professor depois de atender as considerações dos seus colegas de grupo; (ii) Todos os elementos do grupo devem participar de modo que qualquer um deles seja capaz de representar o grupo na apresentação das suas atividades à turma.

- Qual a energia libertada  $E$  (em gramas TNT) do sismo de Lisboa que atingiu uma magnitude  $M$  de 8,7 na escala de Richter?
- Cada acréscimo de uma unidade de magnitude, na escala de Richter, resulta da energia libertada ser multiplicada por um fator. Qual o valor desse fator?

### Exploração

- Orientar os alunos na pesquisa de dados que lhes permite relacionar os valores da magnitude  $M$  de um sismo com os valores do equivalente TNT da energia sísmica libertada  $E$ .
- Definir o modelo matemático que melhor se ajusta aos dados que traduzem a magnitude  $M$  de um sismo em função do equivalente TNT da energia sísmica libertada  $E$ .
- A partir do modelo obtido, solicitar os alunos a responder às restantes questões da tarefa.

### Tarefa: A magnitude aparente

A magnitude aparente é uma medida da irradiância de um ‘corpo’ celeste observado da Terra, utilizada exclusivamente em astronomia. Historicamente a medida da magnitude corresponde a uma classificação de estrelas. O Sol, com magnitude aparente de  $-27$ , é o ‘objeto’ mais brilhante do céu. Por convenção, a magnitude zero é definida como sendo a magnitude da estrela Vega.

| Brilho em relação a Vega | Magnitude aparente | Visível para o olho humano |
|--------------------------|--------------------|----------------------------|
| 2,5                      | -1                 | Sim                        |
| 1,00                     | 0                  |                            |
| 0,4                      | 1                  |                            |
| 0,16                     | 2                  |                            |
| 0,063                    | 3                  |                            |
| 0,025                    | 4                  |                            |
| 0,01                     | 5                  |                            |
| $4,0 \times 10^{-3}$     | 6                  |                            |
| $2,5 \times 10^{-3}$     | 6,5                |                            |
| $1,6 \times 10^{-3}$     | 7                  | Não                        |
| $6,3 \times 10^{-4}$     | 8                  |                            |
| $2,5 \times 10^{-4}$     | 9                  |                            |
| $1,0 \times 10^{-4}$     | 10                 |                            |

- Define o modelo matemático que melhor traduz a magnitude aparente  $M$  de um ‘corpo celeste’ em função do seu brilho  $B$  relativamente à estrela Vega.
- Da análise do gráfico do modelo que definiste, o que constatas sobre a monotonia, o sentido da concavidade e existência de assíntotas? Comprova analiticamente estes resultados.
- Tendo em conta o teu modelo, comenta a afirmação: “Uma estrela de magnitude  $M$  é 2,512 vezes mais brilhante que uma estrela de magnitude  $M + 1$ ”.

Verificar se os alunos têm dificuldades em usar a calculadora gráfica na resolução da tarefa

Distinguir o domínio do modelo obtido do domínio que traduz o contexto da tarefa.

Explorar as diversas propostas de resolução dos alunos de modo a envolvê-los na discussão da resolução da tarefa no grupo turma.

Salientar a utilidade do que se aprende em Matemática na compreensão e resolução de situações do quotidiano através do tratamento de dados.

### Exploração

1. Questionar os alunos sobre o modelo que melhor se ajusta aos dados que traduzem a magnitude aparente  $M$  de um corpo celeste em função do seu brilho  $B$  em relação a Veja.
2. A partir do modelo obtido, solicitar os alunos a responder às restantes questões da tarefa

Explorar as diversas propostas de resolução dos alunos de modo a envolvê-los na discussão da resolução da tarefa no grupo turma.