Universidade do Minho
Instituto de Educação

Marta Azeredo Morais

As interações na sala de aula com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10º ano de escolaridade

outubro de 2023

As interações na sala de aula com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10º ano de escolaridade
Marta Azeredo Morais
UMinho|2023

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Marta Azeredo Morais

As interações na sala de aula com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10º ano de escolaridade

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

outubro de 2023

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos. Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada. Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



Atribuição

CC BY

https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

AGRADECIMENTOS

Ao Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, meu supervisor, por me orientar, amparar e até cuidar. Ao longo de todo o tempo em que este projeto ficou "parado" foi um apoio e acompanhou sempre os meus interesses e necessidades, tendo sido fulcral para que fechasse este grande capítulo.

À professor Emiliana por me ter acolhido na sua sala de aula, com os generosidade que poucos conseguem. Pragmática e otimista, ajudou-me a traçar objetivos claros e a adaptar o mundo académico ao mundo real das escolas.

Ao meu João, por estar e ser. Estar presente e ser amor. Somos equipa em tudo e para tudo. Está fechada mais uma etapa, que venha a seguinte. Seremos sempre um do outro, em todas as vertentes da vida. Agradeço-lhe também por entender a falta de disponibilidade e aceitar a turbulência que a fase de entrega de um trabalho destes causa.

Aos meus pais e irmã, por todo o apoio incondicional e até alguma pressão às vezes. Somos uma fortaleza, hoje e sempre, sem cobranças.

À minha querida avó, que me deixou a garra e a capacidade de lutar por aquilo que queremos. Sendo exemplo todos os dias da sua vida de resiliência, teimosia e determinação.

À minha querida amiga Anaís, com quem partilhei a jornada do estágio. Fomos colo uma da outra, suporte profissional e emocional. Desde muito antes do estágio e para a vida toda.

Aos alunos com quem partilhei a experiência do estágio, que foram pacientes e que se demonstraram sempre disponíveis a ajudar.

Ao Colégio João Paulo II que é uma nova casa para mim, onde ponho em prática aquilo que este mestrado me deu. É uma vocação para a vida e é aqui que estou a construir as minhas primeiras memórias.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

AS INTERAÇÕES NA SALA DE AULA COM RECURSO À TECNOLOGIA NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POR ALUNOS DO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE

RESUMO

As orientações metodológicas atuais para o ensino da Matemática apontam para a promoção de interações entre os diferentes intervenientes na sala de aula. Acredita-se que esta perspetiva interacionista determina a predisposição dos alunos para se envolverem no que se faz nas aulas de matemática, o que, consequentemente, tende a promover a construção de significados dos entes matemáticos em estudo. Atualmente, esta predisposição é reforçada quando é incluída a tecnologia. Atendendo à natureza abstrata dos entes matemáticos, este estudo pretende averiguar o contributo da tecnologia na promoção das interações na sala de aula na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. Com o intuito de concretizar este objetivo, formularam-se as seguintes questões de investigação: Que padrões de interação se estabelecem com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade?; Qual é a influência da inclusão da tecnologia nas interações estabelecidas durante aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade?; Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel das interações com recurso à tecnologia na resolução dessas dificuldades?; Que perceções têm os alunos sobre as interações com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções? Para dar resposta às questões delineadas, recolheram-se dados através dos seguintes métodos: gravações áudio e vídeo; questionários; produções dos alunos; reflexões das aulas e documentos oficiais.

Ao longo da minha intervenção pedagógica tive como principais preocupações a utilização de ferramentas tecnológicas que motivassem os alunos e os incentivassem a ter um papel ativo no seu processo de aprendizagem, aumentando as interações estabelecidas na sala de aula.

Neste estudo, verificou-se que quase todos os padrões de interação se verificaram durante a prática pedagógica uma vez que cada momento da aula, conforme a sua natureza, promoveu a existência de diferentes padrões. Nas aulas com mais tempo dedicado ao trabalho autónomo dos alunos, o padrão de focalização, o padrão de recitação e o padrão de extração foram os que mais se registaram.

A inclusão da tecnologia, tanto da calculadora gráfica como da aplicação *Pear Deck*, incrementou o interesse dos alunos e, consequentemente, as interações ocorridas na sala de aula. As maiores dificuldades dos alunos verificaram-se na representação gráfica, na utilização da calculadora gráfica e ainda no estudo de funções a partir da exploração de tarefas de contexto real. Tais resultados são consubstanciados pelas perceções dos alunos sobre o ensino ministrado, reforçando que a utilização das ferramentas tecnológicas que exploraram os motivou na realização das atividades propostas, tornando maior a sua participação nas aulas e contribuindo para um maior número de interações.

Palavras-chave: Alunos do 10.º ano; aprendizagem; funções; padrões de interação; tecnologia.

TECHNOLOGY ASSISTED CLASSROOM INTERACTIONS IN LEARNING OF MATHEMATICAL FUNCTIONS BY 10TH GRADE STUDENTS

ABSTRACT

Current methodological guidelines in teaching Mathematics recommend the promotion of interactions between the different actors in a classroom. It is believed that this interactionist perspective determines students' predisposition to get involved in Mathematics classes, which, consequently, promotes the construction of meaning between the different mathematical concepts at study. Currently, this predisposition is reinforced when technology takes part. Given the abstract nature of mathematical concepts, this study aims to investigate how technology can promote the classroom interactions in the learning of functions by 10th grade students. In order achieve this objective, the following research questions were formulated: What patterns of interaction can be established using technology in learning functions by 10th grade students?; How can the inclusion of technology influence the interactions during the learning of functions by 10th grade students?; What difficulties do students reveal in learning of functions?; What role do technology-assisted interactions take in resolving such difficulties?; What are the students' perceptions regarding the technology-assisted interactions in learning of functions? In order to respond to the proposed questions, data was gathered using the following methods: audio and video recordings; questionnaires; students' productions; classroom reflections and official documents.

Throughout my pedagogical intervention there was a concern about using technological tools that would not only motivate students and incentivize them to have an active role in their learning process, but also promote interactions in the classroom.

In this study it was found that nearly all the interaction patterns occurred during the pedagogical activities, since during classes, each moment, provided of its nature, promoted the existence of the different patterns. In classes where students were focusing on autonomous work the most observed patterns of interaction were the focusing pattern, the recitation pattern and the extraction pattern.

The inclusion of technology, such as a graphing calculator or the *Pear Deck* application, increased students' interest and, consequently, the amount of interactions that happened in the classroom. The biggest hardships shown by students' were related with overall usage of a graphing calculator, the graphical representation and also in the application of the functions' concepts in real context tasks. These results are substantiated by the students' perceptions of the taught subjects, reinforcing that the use of the technological tools referred motivated them to carry out the proposed activities, increasing their participation in classes and contributing to a greater number of interactions.

Keywords: 10th grade students; learning; functions; interaction patterns; technology

ÍNDICE

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS ii
AGRADECIMENTOS iii
DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE iv
RESUMO v
ABSTRACT vi
ÍNDICE vii
ÍNDICE DE FIGURAS x
ÍNDICE DE TABELAS xii
ÍNDICE DE QUADROS xiii
CAPÍTULO 1 1
INTRODUÇÃO 1
1.1. Tema, objetivo e questões de investigação 1
1.2. Pertinência do estudo 3
1.3. Estrutura do relatório 4
CAPÍTULO 2 6
ENQUADRAMENTO TEÓRICO 6
2.1. A construção histórica do conceito de função 6
2.2. As funções no currículo escolar 8
2.3. A aprendizagem de funções 11
2.4. As dificuldades na aprendizagem de funções 13
2.5. As interações e os padrões de interação na sala de aula 15
2.6. A tecnologia no ensino e na aprendizagem 20
2.6.1. A tecnologia na sala de aula 21
2.6.2. A tecnologia na promoção das interações 25
CAPÍTULO 3 29
ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL 29
3.1. Contexto da intervenção pedagógica 29
3.1.1. Caracterização da escola 29
3.1.2. Caracterização da turma 30
3.2. Estratégias de intervenção 35

3.2.1. Metodologia de ensino e aprendizagem 35
3.2.2. Estratégias de avaliação da ação pedagógica 40
CAPÍTULO 4 44
INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA 44
4.1. Problemas envolvendo a função quadrática 46
4.1.1. A tarefa 'As redes sociais' 46
4.1.2. Resoluções, dificuldades e potencialidades dos alunos 47
4.1.3. Tecnologia 52
4.1.4. Interações 53
4.1.5. Análise global 57
4.2. Introdução à função módulo 58
4.2.1. Tarefa 'Da função definida por ramos à função módulo' 58
4.2.2. Resoluções, dificuldades e potencialidades dos alunos 60
4.2.3. Tecnologia 65
4.2.4. Interações 67
4.2.5. Análise global 74
4.3. Resolução de problemas envolvendo a função módulo 75
4.3.1. Tarefa 'A mesa de bilhar' 75
4.3.2. Resoluções, dificuldades e potencialidades dos alunos 77
4.3.3. Tecnologia 81
4.3.4. Interações 82
4.3.5. Análise global 86
4.4. Perceção dos alunos sobre a intervenção pedagógica 88
CAPÍTULO 5 94
CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES 94
5.1. Conclusões 94
5.1.1. Que padrões de interação se estabelecem com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10º ano de escolaridade? 94
5.1.2. Qual é a influência da inclusão da tecnologia nas interações estabelecidas durante aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade? 95
5.1.3. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel das interações com recurso à tecnologia na resolução dessas dificuldades? 96

5.1.4. Que perceções têm os alunos sobre as interações com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções? 97
5.2. Limitações e Recomendações 98
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 99
ANEXOS 109
Anexo I – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação 110
Anexo II – Questionário inicial 111
Anexo III - Proposta de calendarização das aulas 114
Anexo IV – Planos de aula 116
Anexo V – Questionários de validação de conteúdo 126
Anexo VI – Questionários de recolha de opinião sobre as tarefas 129
Anexo VII – Questionário final 132

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Cronograma do conceito de função 8
Figura 2 – Conceitos associados à noção de função nos 1.º e 2.º ciclos 9
Figura 3 – Tópicos relacionados com funções no 3.º ciclo e no ensino secundário 11
Figura 4 – Motivos para utilizar tecnologias móveis na sala de aula (UNESCO, 2013) 23
Figura 5 – Nível obtido pelos alunos a Matemática no final do 3.º ciclo 31
Figura 6 – Classificações a Matemática A no final de cada um dos períodos escolares 32
Figura 7 – Tema da Matemática que os alunos menos gostam (%) 33
Figura 8 – Fases da intervenção pedagógica 44
Figura 9 – Anotações feitas por mim durante a intervenção de um aluno 48
Figura 10 – Resolução errada da questão 1 do grupo G3 48
Figura 11 – Resolução da questão 3 do grupo G6 com calculadora 49
Figura 12 – Resolução da questão 4 do grupo G6 com calculadora 49
Figura 13 – Resolução errada da questão 6 pelo grupo G6 50
Figura 14 – Resolução quase correta da questão 6 pelo grupo G7 50
Figura 15 – Resoluções erradas da questão 8 pelo grupo G1 e da questão 4 pelo grupo G4. 51
Figura 16 – Resolução I da questão 1 60
Figura 17 – Resolução II da questão 1 60
Figura 18 – Resolução III da questão 1 61
Figura 19 – Resolução I da questão 2 com imprecisões 61
Figura 20 – Resolução II da questão 2 com imprecisões 61
Figura 21 – Resolução III da questão 2 62
Figura 22 – Resolução IV da questão 2 62
Figura 23 – Resolução V da questão 2 62
Figura 24 – Resolução VI da questão 2 62
Figura 25 – Resolução I da questão 4 63
Figura 26 – Resolução II da questão 4 63
Figura 27 – Resolução III da questão 4 63
Figura 28 – Resolução IV da questão 4 63
Figura 29 – Resolução V da questão 4 63
Figura 30 – Resolução VI da questão 4 63

Figura 31 – Resolução VII da questão 4 incluindo o conceito de módulo 64
Figura 32 – Resolução VIII da questão 4 incluindo a palavra "módulo" 64
Figura 33 – Resolução IX da questão 4 utilizando linguagem simbólica 64
Figura 34 – Apontamento no quadro quando foi revisto o conceito de valor absoluto 65
Figura 35 – Resolução I da questão 1 78
Figura 36 – Resolução II da questão 1 78
Figura 37 – Resolução III da questão 1 78
Figura 38 – Resolução I da questão 2 79
Figura 39 – Resolução II da questão 2 79
Figura 40 – Resolução I da questão 3 79
Figura 41 – Resolução II da questão 3 80
Figura 42 – Resolução I da questão 4 80
Figura 43 – Resolução II da questão 4 80

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Opinião dos alunos sobre a finalidade da disciplina de Matemática 32
Tabela 2 - Tempo de estudo semanal dedicado a Matemática 33
Tabela 3 - Opinião dos alunos sobre o funcionamento das aulas de Matemática 34
Tabela 4 - Opinião dos alunos sobre a tarefa "As redes sociais" 52
Tabela 5 - Respostas dadas pelos alunos na tarefa com recurso aos slides interativos 67
Tabela 6 - Opinião dos alunos sobre a realização de *quizzes* nas aulas 82
Tabela 7 - Momento da aula preferido dos alunos 88
Tabela 8 - Perceção dos alunos sobre a utilização de materiais tecnológicos (n=24) 89
Tabela 9 - Perceção dos alunos sobre o desenvolvimento de interações nas aulas (n=24) 90
Tabela 10 - Perceção dos alunos sobre as interações promovidas pela tecnologia (n=24) 91

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 – Métodos de recolha de dados para a avaliação da estratégia pedagógica 40
Quadro 2 - Síntese dos conteúdos da intervenção pedagógica 45

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A comunicação é a base das relações sociais entre as pessoas, como tal essencial nas escolas e nas salas de aula. A sua importância e a forma como se desenvolve deve ser olhada com atenção. E foi nessa inquietação, enquanto futura professora, que as interações que se desenvolvem na sala de aula me inspiraram a trabalhar sobre elas. No processo de comunicação, as interações desenvolvem-se de duas formas: verbal e não verbal, ambas essenciais e complementares. A comunicação verbal, que pode ser escrita e oral, exige uma escolha dos meios de comunicação a utilizar dependendo do objetivo a atingir e do público a quem se quer transmitir a mensagem. Atualmente, com a constante evolução da sociedade, incluir meios tecnológicos na forma como nos comunicamos é essencial. Desta forma, a tecnologia assume um papel basilar na formação e aprendizagem da população estudantil, o que nos impele a mudanças urgentes nas salas de aula.

1.1. Tema, objetivo e questões de investigação

A escola tem como finalidade promover a formação dos alunos que a frequentam, o que se traduz no desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes. No que diz respeito aos conhecimentos, Guerreiro (2011) defende que emergem "de uma prática discursiva que se desenvolve na sala de aula, na instituição escolar e na sociedade, decorrente de processos coletivos de comunicação e interação" (p. 84). O contexto escolar e, em particular, a sala de aula são locais privilegiados ao desenvolvimento de interações, sendo, por isso, locais de extrema relevância para a construção de conhecimento. Aliada à importância das interações na sala de aula, o NCTM (2007) defende que a tecnologia é essencial no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Deste modo, o tema que escolhi para a minha prática pedagógica supervisionada – "As interações na sala de aula com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade" – revela ser pertinente e atual.

A tecnologia permite um aumento do envolvimento dos alunos de forma acentuada (NCTM, 2007), o que permite acreditar que pode também gerar um aumento das interações dentro da sala de aula. A inclusão da tecnologia na sala de aula prende-se com a intenção de motivar e entusiasmar os alunos a participar ativamente nas aulas de Matemática, promovendo um melhor acompanhamento e entendimento dos conteúdos de funções, tema em que incidiu a minha prática pedagógica. No contexto pandémico na altura da realização da prática pedagógica, a inclusão da tecnologia nas práticas

pedagógicas demonstrou-se ainda mais importante. A inclusão da tecnologia nos processos de ensino e de aprendizagem é cada vez mais essencial para que consigamos promover as interações em prol da aprendizagem dos alunos.

O tema das funções foi selecionado por motivos logísticos e pedagógicos. Pela calendarização escolar e seguindo a planificação da disciplina de Matemática A na escola onde decorreu a prática pedagógica supervisionada, o tema das funções foi abordado em maior parte das aulas do 2.º período letivo pelo que converge com a calendarização esperada para a supervisão. Para além disso, o tema das funções foi selecionado pela sua complexidade e porque "envolve um pensamento matemático avançado" (Domingos, 2008, p. 135). Domingos (2008) defende que as funções são uma ferramenta muito importante da Matemática e que "a representação mental torna-se fundamental para que a pessoa possa comunicar o seu pensamento acerca de um dado objeto ou processo" (p. 132), o que me leva a explorar, recorrendo à tecnologia, este tema.

A seleção desta temática teve como foco principal o desenvolvimento da minha capacidade de reflexão enquanto futura professora sobre o ensino da Matemática assim como da minha capacidade de inovação na sala de aula e tentando contornar aquilo a que hoje se denomina de 'ensino tradicional'. Adicionalmente, o tema das funções não costuma gerar consenso por parte dos alunos, sendo que muitos expressam dificuldades de compreensão nesta área da Matemática (Andrade & Saraiva, 2012).

Assim, no decorrer da minha prática pedagógica, pretendia averiguar o contributo da tecnologia na promoção das interações na sala de aula na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. Com o intuito de concretizar este objetivo, delineei as seguintes questões de investigação:

1) Que padrões de interação se estabelecem com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade?
2) Qual é a influência da inclusão da tecnologia nas interações estabelecidas durante aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade?
3) Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel das interações com recurso à tecnologia na resolução dessas dificuldades?
4) Que perceções têm os alunos sobre as interações com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções?

1.2. Pertinência do estudo

A comunicação na sala de aula pode ser vista como uma conjunção de dois processos diferentes: a transmissão de uma mensagem e a interação social (Guerreiro, 2011). Estas duas vertentes devem ser analisadas quando estudamos a comunicação na sala de aula. Em primeiro lugar, porque a sala de aula é um lugar de construção de conhecimentos e, em segundo lugar, porque a escola é o local onde inevitavelmente se estabelecem interações entre os sujeitos intervenientes. Assim, torna-se difícil dissociar estas duas componentes. No que respeita aos processos de ensino e de aprendizagem, o conhecimento surge de uma prática discursiva conjunta que se desenvolve na sala de aula, resultante da comunicação e interação entre alunos e professor e entre os próprios alunos (Menezes et al., 2014). Deste modo, a comunicação é elemento muito importante no ensino e no desenvolvimento da prática do professor, "deixando de ser vista como um mero instrumento ou técnica do professor para ensinar (Matemática), mas como algo inerente ao ensino e aos processos de construção e partilha do conhecimento (matemático)" (Menezes et al., 2014, p. 135).

Cada vez mais os próprios alunos dão mais importância à comunicação que os professores estabelecem com eles, desvalorizando visões mais tradicionais de comunicação na sala de aula (Ponte & Serrazina, 2004). Assim, torna-se necessário que o foco da comunicação na sala de aula seja o discurso partilhado e não o discurso unidirecional por parte do professor, sendo possível a construção de significados de um modo interativo (Ponte & Serrazina, 2004). A comunicação e as interações que se criam na sala de aula são, assim, um tema inesgotável no que respeita aos processos de ensino e de aprendizagem e deve-se continuar a explorá-lo como tem vindo a ser feito nos últimos anos, mas também o devemos fazer de uma forma complementar, considerando as alterações que a sociedade tem vindo a sofrer nas últimas décadas.

No mundo atual, as empresas procuram não apenas conhecimentos técnicos, mas colaboradores dotados de diferentes *soft skills* cada vez mais valorizadas no mercado de trabalho. A resolução de problemas, uma boa capacidade de comunicação e a capacidade de trabalhar em equipa são algumas das competências mais procuradas atualmente (Marné, 2021). Deste modo, trabalhar a capacidade de os alunos interagirem uns com os outros e com o professor é essencial, talhando-os para aquilo que o mercado de trabalho irá exigir. Para além disso, promover momentos de resolução de problemas em que os alunos tenham tempo para se deparar com as dificuldades e para traçar estratégias para as ultrapassar é bastante importante.

Adicionalmente a essas *soft skills*, o desenvolvimento da sociedade informatizada exige das pessoas novas competências adequadas aos novos recursos tecnológicos. Esta informatização nas

nossas vidas tem determinado novos tipos de interação social e, consequentemente, alterado as necessidades patentes nos processos de ensino e de aprendizagem (Joly, 2002). Perante estas novas necessidades, os currículos escolares têm vindo a ser reformulados e, no que à Matemática diz respeito, já existem orientações claras sobre a obrigatoriedade de incluir recursos tecnológicos nas salas de aula. O programa da disciplina de matemática sugere que a tecnologia seja usada de forma crítica, aliando novas competências a desenvolver nos alunos, incluindo na área de programação: "A tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e também um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar" (Ministério da Educação, 2018d, p.3).

É com esta urgência e também já alguma naturalidade que a tecnologia tem de fazer parte da sala de aula. A utilização de meios tecnológicos nas aulas de Matemática proporciona oportunidades para que os alunos sejam mais ativos no desenvolvimento da aula. Essa utilização promove o envolvimento dos alunos e permite um aumento da comunicação entre os alunos assim como da sua capacidade em construir conjeturas e explorar conceitos (Fonkert, 2010). Assim, a possibilidade de envolver os alunos em desafios matemáticos aumenta de forma acentuada com a utilização de tecnologias (NCTM, 2007), pelo que a sua inclusão nas aulas de Matemática é essencial para a motivação dos alunos, para a sua aprendizagem e para o aumento das interações na sala de aula.

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório encontra-se estruturado em cinco capítulos diferentes, tendo cada um deles a sua importância no desenvolvimento deste trabalho. No presente capítulo – Introdução – é apresentado o tema a estudar assim como o objetivo principal da prática pedagógica supervisionada e as questões investigativas às quais se pretende responder. Para além disso, é explicitada a pertinência do tema a estudar e ainda a organização deste projeto.

No capítulo seguinte – Enquadramento Teórico – é explorada a temática por via de outros trabalhos e investigações já realizados. Será analisada a importância do tema das funções assim como o seu papel no currículo da disciplina de Matemática. Neste segundo capítulo, estuda-se ainda a relevância da comunicação, das interações e dos padrões de interação que se podem verificar entre os agentes de ação de uma sala aula. Será ainda acrescentado o notável papel da tecnologia na educação e no ensino da Matemática assim como o seu potencial no que respeita às interações na sala de aula.

No terceiro capítulo – Enquadramento contextual – apresenta-se uma breve caracterização da escola onde decorreu a prática pedagógica assim como uma análise mais detalhada da turma com a

qual o estudo foi desenvolvido para que seja possível termos uma perceção do contexto em que a prática pedagógica se desenrolou. Numa segunda parte deste capítulo, abordam-se as estratégias de intervenção utilizadas, os ideais de ensino que balizaram a prática pedagógica e ainda os métodos escolhidos para incluir a tecnologia e promover as interações. Por fim, são espelhadas as diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados utilizados para que fosse possível fazer uma avaliação do trabalho desenvolvido.

O quarto capítulo – Intervenção Pedagógica – revela a prática desenvolvida com os alunos e uma reflexão sobre os resultados obtidos à luz dos padrões de interação e dos elementos tecnológicos utilizados. Para além disso, são explanados diversos momentos das aulas lecionadas assim como partes de trabalho realizado pelos alunos por forma a melhor analisar a minha prática pedagógica. Ainda neste capítulo, procede-se ao estudo das perceções dos alunos sobre o ensino ministrado, facilitando a leitura daquilo que efetivamente os alunos sentiram.

Por fim, no quinto capítulo – Conclusões, limitações e recomendações – faz-se uma análise global do trabalho realizado e dos resultados obtidos, percebendo se foi possível atingir o objetivo delineado através das questões de investigação a que me propus responder. Por último, procede-se à observação de alguns aspetos que se podem ter transformado em limitações ao longo do processo e projeta-se para o futuro aquilo que ainda se poderá fazer e desenvolver após esta intervenção.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Para que o planeamento e a realização da prática pedagógica supervisionada acontecessem de forma informada e consciente, foi necessário fazer um estudo sobre as temáticas que queria envolver durante o meu estágio de forma a tomar decisões ponderadas e seguras. Este estudo consistiu na análise de artigos, livros e de estudos de casos sobre o tema deste trabalho. Conjugando essa análise com o objetivo e as questões de investigação dos meus propósitos de investigação, optei por debater neste capítulo as seguintes temáticas: as funções; as interações; e a tecnologia. No âmbito das funções, abordo a evolução histórica do conceito no desenvolvimento da Matemática assim como a sua presença no currículo escolar português e a aprendizagem do tema por parte dos alunos. Sobre as interações considerei pertinente interligar a comunicação e as interações desenvolvidas na sala de aula, percebendo que padrões podem ser estabelecidos e em que circunstâncias são mais propícios de ocorrer. Por fim, analisei a importância da tecnologia na aprendizagem e tentei perceber em que medida poderiam ser um 'veículo' para a promoção das interações que ocorrem na sala de aula.

2.1. A construção histórica do conceito de função

O conceito de função como hoje conhecemos e como é amplamente utilizado sofreu inúmeras alterações ao longo dos tempos desde a antiguidade. Ao longo dos séculos o conceito de função foi evoluindo até que Leibniz, já no século XVII, escreveu pela primeira vez a palavra 'função' (Safuanov, 2015). Da antiguidade, longe de se usarem notações ou conceitos como hoje são conhecidos, reconhecem-se aos babilónios a construção de sequências numéricas em tabelas que representariam funções. Algumas destas informações estariam relacionadas com o estudo de elementos de astronomia como, por exemplo, o movimento dos planetas (Bueno & Viali, 2009). Também existem evidências sobre os estudos matemáticos e de ciências naturais que incluem relações entre diferentes quantidades feitas pelos gregos (Youschkevitch, 1976). No entanto, apesar de à luz do conhecimento de hoje se reconhecer o trabalho com alguns conceitos adjacentes ao conceito de função, na altura dos factos existia uma total ausência de notação na escrita matemática assim como de ideias relacionadas com o conceito de função (Bueno & Viali, 2009). As primeiras referências associadas ao conceito de função de uma forma mais geral e abstrata surgem na Idade Média, no século XIV (Bueno & Viali, 2009). Esta evolução deu-se sobretudo na zona europeia, destacando-se de forma mais proeminente cidades como Oxford e Paris. A Matemática é, desta forma, assumida como a base para o estudo dos fenómenos naturais, sendo cada

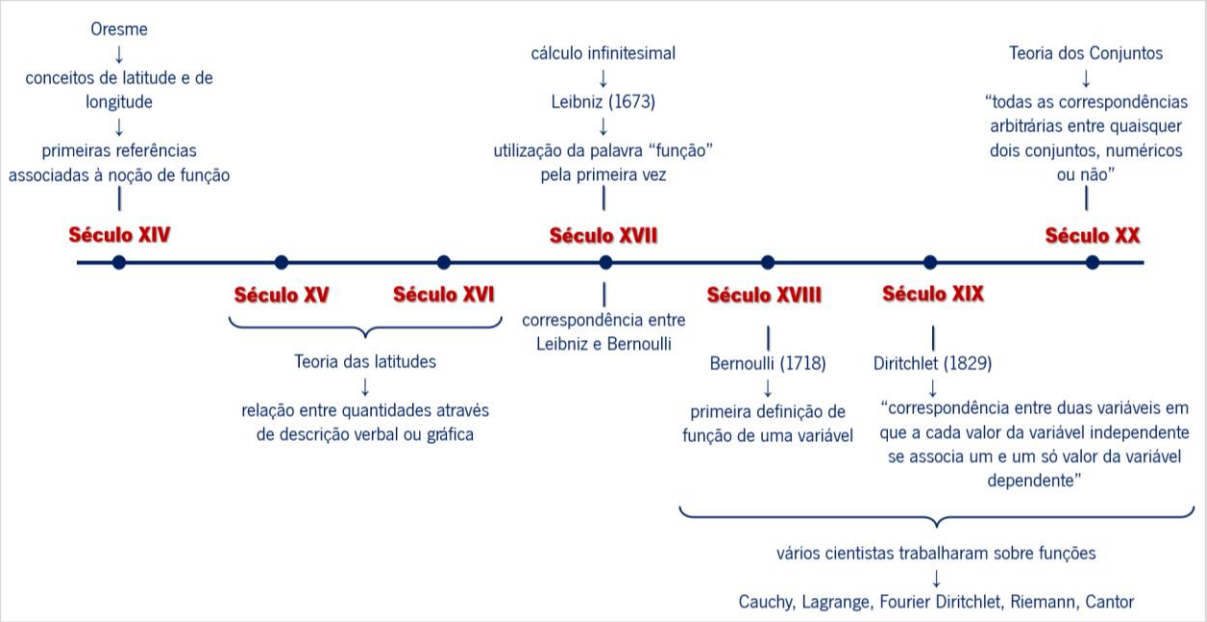
vez mais exploradas as relações entre duas quantidades. Em França, um dos maiores contributos para a evolução do conceito foi dado por Oresme no seu estudo sobre a intensidade das formas de uma visão geométrica. Nestes estudos eram incluídas formas como a luz, a distância ou a velocidade, fenómenos que se alteravam continuamente, dentro de determinados limites. Ao longo do seu trabalho, Oresme introduziu os termos latitude e longitude, podendo ser vistos como equivalentes aos conceitos de ordenada e abcissa atuais (Boyer & Merzbach, 2012).

Durante os séculos XV e XVI, a teoria das latitudes foi largamente difundida por vários países da Europa. Apesar de toda esta evolução, a dependência e relação entre estas quantidades era ainda definida através de uma descrição verbal ou gráfica, não estando ainda implementada a utilização de expressões analíticas para caracterizar essas relações (Bueno & Viali, 2009). Para Ponte (1990), o conceito de função individualizado e como o conhecemos atualmente aparece nos finais do século XVII estando associado ao desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal. O termo 'função' foi usado pela primeira vez em 1673 por Leibniz, mas apenas para se referir "a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais" (Ponte, 1990, p.3). Leibniz também introduziu termos como 'constante', 'variável' e 'parâmetro' (Safuanov, 2015).

Entre 1694 e 1698, o termo 'função' foi utilizado em correspondência entre os matemáticos Leibniz e Johann Bernoulli para simbolizar uma expressão analítica que relacionava quantidades dependentes de uma determinada variável (Kleiner, 2012). Mais tarde, em 1718, Bernoulli publicou um artigo contendo a primeira definição de função de uma variável como sendo "uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes" (Ponte, 1990, p. 3). Euler, aluno de Bernoulli, fez uma atualização dessa definição numa publicação de 1748, substituindo o termo 'quantidade' por 'expressão analítica'. Durante os séculos XVIII e XIX, esta definição de função prevaleceu, mas existindo algumas limitações identificadas. Nestes séculos, vários investigadores trabalharam sobre funções como foi o caso de Cauchy, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Riemann e Cantor (Bueno & Viali, 2009). Todos estes matemáticos foram desenvolvendo o conceito e tornando-o mais amplo. Fourier, que estudava a condução de calor em objetos, estudando a temperatura em função do tempo e espaço, conjeturou que todas as funções poderiam ser escritas como séries trigonométricas. No entanto, Fourier não chegou a provar este resultado que mais tarde foi explorado por Diritchlet, chegando às condições necessárias para estabelecer as hoje conhecidas séries de Fourier. Em 1829, Dirichlet definiu função como uma correspondência entre duas variáveis em que a cada valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente (Kleiner, 2012). Já no século XX, com o desenvolvimento da 'Teoria de

Conjuntos', a noção de função passa a incorporar todas as correspondências arbitrárias entre quaisquer dois conjuntos não vazios, numéricos ou não.

Figura 1 – Cronograma do conceito de função



O conceito de função evoluiu com bases em três elementos: a notação algébrica; a representação geométrica; e a ligação com problemas do mundo físico (Ponte, 1990). No entanto, o conceito foi evoluindo e separando-se desses três pilares. Hoje, a noção de função é aplicada em estudos das mais diversas áreas do saber e os modelos criados para esses estudos são, muitas vezes, modelos que recorrem a funções.

2.2. As funções no currículo escolar

Os programas escolares da disciplina de Matemática têm sofrido algumas alterações nos últimos anos. Em 2013 foi homologado o programa e metas curriculares para o ensino básico e, em 2015, ocorreu o mesmo para o ensino secundário. Pucos anos depois, em 2018, o Ministério da Educação publicou o documento oficial das aprendizagens essenciais de forma a dar novas diretrizes sobre o programa estabelecido poucos anos antes.

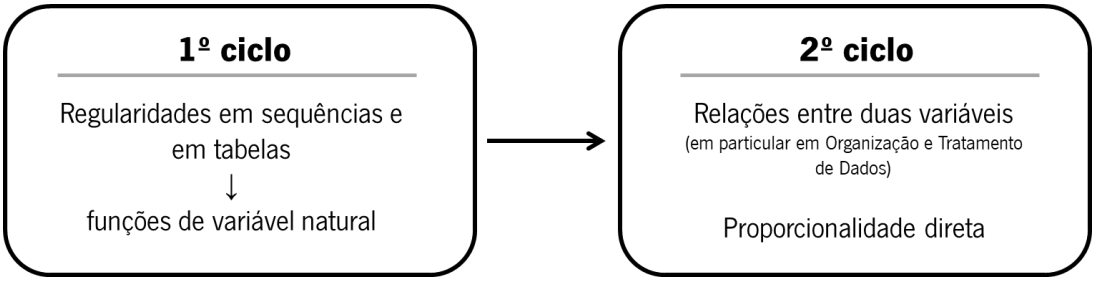
No que respeita ao conceito de função, este apenas aparece explicitamente no 7.º ano de escolaridade. No entanto, nos anos anteriores são trabalhados vários conceitos que envolvem a noção de função. Deste modo, passa-se a analisar esses mesmo tópicos ao longo dos primeiros seis anos de escolarização.

Logo no 1.º ano de escolaridade, no tema Números e Operações, os alunos devem "reconhecer e descrever regularidades em sequências e em tabelas numéricas, formular conjeturas e explicar como são geradas essas regularidades" (Ministério da Educação, 2018a, p. 8). Desde o início do 1.º ciclo estão intrínsecos vários conceitos e noções relacionados com as funções. O objetivo acima referido repete-se nos documentos curriculares de todos os anos do 1.º ciclo, sendo trabalhadas de forma inconsciente por parte dos alunos funções de variável natural. Ao longo do 1.º ciclo, o tema de Organização e Tratamento de Dados apresenta como objetivo "recolher, organizar e representar dados qualitativos e quantitativos discretos utilizando diferentes representações e interpretar a informação representada" (Ministério da Educação, 2018a, p. 11). As relações que podem ser estudadas pelos alunos são correspondências entre duas variáveis e, algumas delas, acabam também por fomentar o trabalho de noções relacionadas com o conceito de função.

No 2.º ciclo mantém-se a envolvência de diferentes representações de relações entre duas variáveis no tema de Organização e Tratamento de Dados. Assim, durante os 5.º e 6.º anos os alunos trabalham relações entre variáveis em diferentes representações como tabelas e gráficos. Para além disso, durante o 6.º ano de escolaridade surge, no tema Álgebra, uma ampla exploração de situações de proporcionalidade direta. Relacionados com a relação de proporcionalidade direta são apontados os seguintes objetivos a atingir pelos alunos (Ministério da Educação, 2018b, p. 11):

- Determinar uma lei de formação de uma sequência numérica ou não numérica e uma expressão algébrica que represente uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é constante.
- Reconhecer situações de proporcionalidade direta num enunciado verbal ou numa tabela e indicar uma das constantes de proporcionalidade, explicando o seu significado dado o contexto.
- Conceber e aplicar estratégias de resolução de problemas envolvendo regularidades, sequências ou proporcionalidade direta, em contextos matemáticos e não matemáticos.

Figura 2 – Conceitos associados à noção de função nos 1.º e 2.º ciclos



Desta forma, fica patente que no final do 6.º ano de escolaridade se pretende que os alunos sejam capazes de relacionar duas variáveis e interpretar essa relação. Apesar disso, apenas no início do 3.º ciclo do ensino básico surge de forma explícita o conceito de função no currículo da disciplina (Ministério da Educação, 2021).

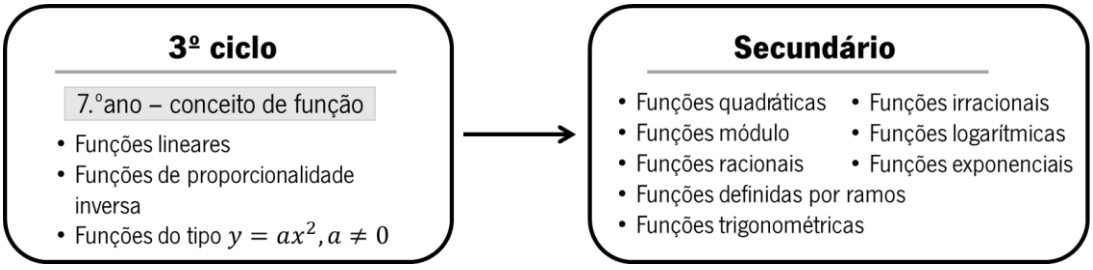
No 7.º ano de escolaridade, os alunos conhecem pela primeira vez o conceito de função e passam a ter de identificar que correspondências definem ou não uma função. Os alunos devem saber reconhecer uma função nas suas diversas representações e analisar situações, usando funções, em contextos matemáticos e não matemáticos. Durante este ano de escolaridade, o programa exige ainda o estudo de funções lineares e o reforço do estudo de proporcionalidade direta, incluindo a resolução de problemas em contextos variados.

Ainda durante o 3.º ciclo, é abrangido no programa da disciplina o estudo de funções afins (sem serem lineares), de funções de proporcionalidade inversa e de funções do tipo $y = ax^2, a \neq 0$. Durante os três anos do 3.º ciclo espera-se que sejam resolvidos problemas utilizando funções, em contextos matemáticos e não matemáticos, utilizando tecnologia e avaliando os resultados obtidos. Assim, de um modo global, no fim do ensino básico os alunos devem saber "analisar e representar funções e relacionar as suas diversas representações, e usá-las para resolver problemas em situações de contextos variados" (Ministério da Educação, 2018c, p. 2).

No ensino secundário, o estudo de funções aprofunda-se existindo mesmo uma unidade temática para este tema no programa do 10.º ano de escolaridade da disciplina. Durante o 10.º ano, os alunos estudam de forma abrangente funções reais de variável real, explorando as funções quadráticas, funções módulo e funções definidas por ramos. Pretende-se que os alunos sejam capazes de interpretar transformações gráficas de funções, os intervalos de monotonia, os extremos e os zeros e que consigam aplicar estes conceitos na resolução de problemas envolvendo funções.

No 11.º ano trabalham-se as funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}, a, b \; e \; c \in \mathbb{R}$ e $x \neq c$, as funções trigonométricas, as funções irracionais e faz-se uma abordagem às sucessões e à sua possível convergência. Neste ano escolar, estuda-se ainda que funções admitem inversa e como as mesmas podem ser caracterizadas. Já no 12.º ano estuda-se a continuidade de funções polinomiais, racionais e irracionais, levando a uma análise mais detalhada do conceito de assíntota ao gráfico de uma função que foi abordado no 11.º ano. É reforçado e completado o estudo já feito de funções trigonométricas com as novas abrangências do estudo de funções. Por fim, ainda no ensino secundário, os alunos devem aprender a trabalhar com funções exponenciais e logarítmicas.

Figura 3 – Tópicos relacionados com funções no 3.º ciclo e no ensino secundário



Apesar do conceito de função aparecer explicitamente apenas no 7.º ano, já desde o 1.º ciclo é feita a alusão a correspondências entre conjuntos, a variáveis e a sequências. A partir do 7.º ano e à medida que os anos escolares progridem, o conceito de função torna-se mais abrangente e os alunos estudam cada vez mais tipos de funções. No ensino secundário as funções estudadas assumem uma maior complexidade relativamente ao ensino básico, exigindo cada vez mais dos alunos o desenvolvimento de raciocínios abstratos. Deste modo, pretende-se que os alunos adquiram a capacidade de raciocinar de forma dedutiva e autónoma, principalmente em contexto de resolução de problemas (Ministério da Educação, 2023).

2.3. A aprendizagem de funções

O conceito de função tem sido, a nível internacional, um unificador dos programas da disciplina de matemática uma vez que o seu estudo está incluído nos programas de diferentes países (Steele et al., 2013). O conceito de função é um dos conceitos básicos da matemática, rico em interpretações e representações, mas nem sempre fácil de explorar e de ensinar (Sajka, 2003). Esta complexidade relaciona-se, sobretudo, segundo Vinner e Tall (1981), quando as estratégias de ensino não articulam devidamente o conceito definição e o conceito imagem, que estruturam o processo de formação de conceitos. O conceito imagem está associado à ideia que temos na nossa mente de um conceito, podendo incluir imagens mentais, propriedades e processos associados, resultado das experiências que cada pessoa teve com esse conceito. O conceito definição refere-se à definição verbal e exata do conceito a compreender (Steele et al., 2013). A formação dos conceitos depende, assim, de uma ação conjunta destas duas componentes, permitindo ao aluno a noção do próprio conceito e a determinação clara desse conceito na sua mente (Andrade & Saraiva, 2012). No caso das funções, para que seja possível associar o conceito definição e o conceito imagem, é necessário que os alunos trabalhem com diversas representações de uma função, promovendo o estabelecimento de relações entre elas. Deste modo, será possível aos alunos desenvolverem o conceito imagem de função, aproximando-o cada vez mais do conceito definição (Andrade & Saraiva, 2012).

Trabalhar o conceito imagem de função com inúmeras representações é essencial e algo muito rico de trabalhar uma vez que as funções têm uma diversidade de representações, tais como tabelas, gráficos, equações simbólicas ou mesmo a descrição da relação entre as duas variáveis (Sierpinska, 1992). No caso do conceito de função, mais do que trabalhar com as diferentes representações, é importante a compreensão do significado das mesmas e a sua relação e passagem de umas para as outras. As diferentes representações tornam-se uma ferramenta de entendimento profundo da definição de função, indo do conceito imagem ao conceito definição (Panaoura et al., 2015). O trabalho desenvolvido com diferentes representações permite explorar diferentes aspetos do conceito, permitindo que os alunos o entendam melhor, organizando as suas ideias mentais do mesmo e fazendo algumas construções (Mitchell et al., 2014).

No desenvolvimento do estudo das funções devem ser exploradas as diferentes representações de modo que os alunos percebam quando é que cada uma é mais adequada e quando pode ser mais inconveniente (Andrade & Saraiva, 2012). A inclusão de diferentes representações permite criar oportunidades aos alunos que pensem de forma diferente, proporcionando um espaço para diferentes raciocínios (Dreher et al., 2016). Adicionalmente, os professores devem preocupar-se com a seleção das tarefas de modo a explorar propriedades específicas de cada uma das representações bem como analisar a transferência entre as mesmas para que os alunos alcancem em plenitude o conceito de função (Andrade & Saraiva, 2012). Explorar situações de um grau de dificuldade superior é pertinente uma vez que, mesmo compreendendo os conceitos, os alunos têm dificuldades de os aplicar. Deste modo, a resolução de problemas envolvendo o conceito de função, assim como a interdisciplinaridade que este conceito permite, devem ser explorados, não deixando os alunos limitados a uma definição, mas dando-lhes oportunidade de construir o conceito de forma mais ampla e rica (Panaoura et al., 2015).

A aprendizagem do conceito de função exige o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações e a coordenação e comparação entre as mesmas que nem sempre são fáceis de conjugar. Desta forma, os alunos necessitam de ser acompanhados na sua aprendizagem, transformando o conceito imagem e o conceito definição numa aprendizagem significativa. A aprendizagem significativa é caracterizada pelo processo de associar novas informações a outras já existentes, tornando a informação antiga mais relevante e aportando-lhe um maior significado (Frasson et al., 2019). No caso do conceito de função, a exploração de diferentes representações na resolução de diferentes tarefas relacionadas com outras áreas de conhecimento (Panaoura et al., 2015) permite construir uma aprendizagem significativa, acumulando diversas características e vertentes do conceito.

O papel do professor na promoção da atividade matemática dos alunos é essencial e a variedade de tarefas dará oportunidade aos alunos de explorar de forma autónoma o conceito de função e ir construindo o seu próprio conceito imagem, assimilando o conteúdo que se quer estudar.

2.4. As dificuldades na aprendizagem de funções

A compreensão do conceito de função sofre imensos obstáculos por parte dos alunos (Sajka, 2003; Sierpinska, 1992). As dificuldades sentidas pelos alunos podem ter diferentes origens, podendo estar relacionadas com a forma como os conteúdos são ensinados, como os alunos abordam as tarefas sobre funções (Kieran, 1992) ou com a tipologia da tarefa a trabalhar (Saraiva & Teixeira, 2009).

Uma das dificuldades que os alunos revelam na compreensão do conceito de função decorre da sua dupla natureza, podendo ser compreendida de duas formas diferentes. De uma forma estrutural, a função é reconhecida como um objeto sendo um conjunto de pares ordenados. De uma forma operacional, é entendida como um processo, existindo um método definido para chegar de um sistema (objetos) para o outro (imagens) (Andrade & Saraiva, 2012). Estas duas formas deveriam ser combinadas e resultar numa conjunção coerente de ideias, sendo que, por vezes, são vistas pelos alunos como visões mutuamente exclusivas.

Quando trabalham com funções, os alunos têm também dificuldade no uso adequado dos símbolos algébricos (Kaput, 1999; Saraiva & Teixeira, 2009), confundindo, por exemplo, muitas vezes na escrita o símbolo f com $f(x)$ (Andrade & Saraiva, 2012). As dificuldades relacionadas com a simbologia podem ter diferentes origens, sendo que uma delas é o contexto restrito em que a simbologia é trabalhada em sala de aula (Sajka, 2003). Muitas vezes, para os alunos, o conceito de função está associado a uma fórmula, faltando-lhes capacidade na manipulação dos símbolos para trabalhar com eles e compreender totalmente a função representada por determinados símbolos (Andrade & Saraiva, 2012).

No estudo de funções, os alunos apresentam também dificuldades em fazer a passagem entre diferentes representações (Elia et al., 2007). Esta passagem é muitas vezes mais complexa para os alunos quando são incluídas uma representação gráfica e uma representação algébrica (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). Estas dificuldades também foram confirmadas por Even (1998) no estudo que realizou com alunos universitários, que expressaram a dificuldade em reconhecer a influência dos parâmetros das diferentes famílias de funções em diferentes representações. Outros estudos apontam para dificuldades no pensamento abstrato, levando os alunos a recorrer a estratégias e processos

numéricos para substituir o trabalho que teriam de desenvolver na análise de, por exemplo, gráficos cartesianos (Ponte, 1992).

A passagem entre diferentes representações de uma função pode ser complexa uma vez que os alunos demonstram dificuldades na interpretação e construção de gráficos, sendo esta uma das formas mais usuais de trabalhar com funções (Rocha, 2020). O reconhecimento de funções ocorre mais facilmente através de uma representação tabular do que através de uma representação gráfica ou algébrica (Viseu et al., 2019), o que pressupõe mais uma vez a ideia de exclusão mútua por parte dos alunos quando trabalham diferentes representações. Adicionalmente, quando é trabalhada a representação gráfica recorrendo à calculadora gráfica, acrescem desafios no que respeita à correta utilização do menu de construção de gráficos e à necessidade de serem os alunos a estabelecer propriedades, existindo a necessidade de estar alerta para aspetos mais formais do que aqueles que estão habituados a trabalhar (Viseu et al., 2022). O trabalho com a calculadora gráfica pode trazer dificuldades logo no que está relacionado com a definição da janela de visualização, debatendo-se os alunos com gráficos incompletos, valores fora do domínio da função a estudar ou até ausência total de gráfico (Rocha, 2020).

Outra das dificuldades associada ao estudo do conceito de função é a tendência à memorização, o que dificulta uma compreensão efetiva e uma aprendizagem significativa por parte do aluno. Em alguns casos, os alunos decoram até uma definição verbal do que é uma função, mas não a conseguem associar nem interligar a representações gráficas ou tabulares (Saraiva & Teixeira, 2009). Neste caso, estamos perante uma clara situação em que o conceito definição ficou aprendido por parte do aluno, mas o conceito imagem não, existindo assim um conflito na verdadeira conceção do conceito de função (Andrade & Saraiva, 2012). Esta adversidade pode ocorrer na aprendizagem de qualquer conceito, mas, no caso das funções, é uma situação bastante comum devido às diferentes representações que a informação pode assumir e a consequente interpretação que é exigida aos alunos.

Os alunos têm muitas vezes mais facilidade em dar o exemplo de uma função para explicar o conceito do que o definir verbalmente usando linguagem formal e/ou simbólica (Panaoura et al., 2015). Embora as definições formais estejam no programa da disciplina de Matemática em diferentes países, o ritmo mais acelerado que, por vezes, se faz sentir nas escolas pode promover a mecanização e a memorização de procedimentos na resolução de tarefas em detrimento de uma exploração mais abrangente e abstrata dos conceitos (Quaresma, 2010). No caso particular das funções, para a sua real aprendizagem é essencial o papel da definição assim como as múltiplas representações (Panaoura et

al., 2015), articulando o conceito definição e o conceito imagem na promoção de uma aprendizagem significativa.

2.5. As interações e os padrões de interação na sala de aula

Na dinamização das atividades de ensino e de aprendizagem muito contribui a comunicação entre os intervenientes na sala de aula. A comunicação constitui um processo social onde os alunos e professor interagem e trocam mensagens, tornando-se numa influência mútua. Assim, o processo de comunicação é um elemento essencial do processo educativo e das relações que se estabelecem na sala de aula (Sierpinska, 1998). As relações entre o professor, os alunos e o conhecimento matemático, assim como as interações entre si são um forte alicerce do processo de ensino e de aprendizagem da matemática (Sierpinska, 1998). A comunicação, enquanto interação social, permite que os sujeitos envolvidos no processo de comunicação partilhem experiências e tenham a possibilidade de se exprimir, dando sempre o seu contributo (Belchior, 2003). Esta vertente da comunicação como interação social assume uma negociação e troca de significados entre os emissores e recetores das mensagens, existindo interações entre as pessoas, culturas e realidades e promovendo novos significados e novas formas de compreender diferentes ideias (Ferin, 2002).

O processo de comunicação não deve ser reduzido à transmissão de experiências, mas sim à construção de conceitos, significados ou realidades com base em experiências comuns dos intervenientes (García, 2006). Esse mecanismo de interação social e de construção de significado transforma a comunicação num processo de socialização onde a ação recíproca dos elementos e sujeitos cria oportunidades de criação de novo conhecimento (García, 2006). Com o envolvimento dos indivíduos pretende-se abrir uma porta à modificação da sociedade através da influência mútua, gerando significado (Godino & Llinares, 2000). No contexto escolar, a comunicação como interação social é crucial, esperando que na sala de aula todos (professores e alunos) sejam capazes de ouvir, trocar experiências e construir novos conhecimentos e significados.

Nos últimos 30 anos, a comunicação ganhou um lugar de destaque e explícito nas orientações curriculares da disciplina de Matemática (Martinho & Ponte, 2005). A comunicação na sala de aula assume assim um papel menos direcionado aos professores e mais direcionado a um protagonismo partilhado com os alunos, onde os significados matemáticos são construídos de forma interativa na sala de aula (Ponte & Serrazina, 2004). Não só a comunicação que se estabelece na sala de aula se tornou alvo de preocupação como também a capacidade de comunicação que os alunos demonstram e que é necessária desenvolver, em particular, a capacidade de comunicação matemática.

Segundo as orientações curriculares para a disciplina de Matemática A, atualmente em vigor em Portugal, os alunos devem ter oportunidade de comunicar matemática, sendo para isso sugerido que os alunos sejam envolvidos em "discussões e atividades estimulantes" (Ministério da Educação, 2018d, p. 3). A comunicação matemática é uma capacidade que se pretende que seja desenvolvida no percurso escolar, sendo uma das competências transversais a todas as unidades temáticas da disciplina nos diferentes níveis de ensino. Importa que os alunos tenham a oportunidade de "comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões" (Ministério da Educação, 2018d, pp. 6-7). Segundo o NCTM (2007), a comunicação é essencial para a Matemática em si e para a educação matemática. Através da comunicação, as ideias tornam-se "objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção" (NCTM, 2007, p. 66), permitindo que o trabalho na aula de Matemática seja mais dinâmico. O conhecimento matemático dos alunos depende de inúmeros fatores, sendo a natureza da comunicação e das interações que se estabelecem na sala de aula um fator fundamental (Menezes et al., 2014). Nesta perspetiva da comunicação, como uma amálgama de todos os processos sociais associados às interações criadas entre os alunos e entre estes e o professor, é essencial que a comunicação na sala de aula se desenvolva num discurso partilhado entre professor e alunos sendo possível uma construção de significados de um modo mais interativo (Ponte & Serrazina, 2004).

No decorrer da comunicação na sala de aula estabelecem-se regularidades decorrentes das interações estabelecidas entre os alunos e entre os alunos e os professores. Estas regularidades foram intituladas por Voigt (1995) como padrões de interação. Estes padrões caracterizam as rotinas de comunicação e interação desenvolvidas na sala de aula. Os padrões de interação que se estabelecem caracterizam as práticas em sala de aula, permitindo ao professor detetar fragilidades e adaptar a sua postura para que permita aos alunos a assunção de um maior papel na construção do seu conhecimento (Wood, 1994). Os padrões de interação podem constituir uma validação dos conhecimentos dos alunos por parte do professor, um momento de partilha de ideias onde é feita uma discussão para construção de algum significado ou uma orientação por parte do professor para que o aluno consiga construir determinado raciocínio (Guerreiro, 2013). Os padrões de interação refletem uma diversidade de momentos em sala de aula como o esclarecimento de dúvidas dos alunos, dificuldades na resolução de alguma tarefa ou explicitação por parte dos alunos das estratégias que seguiram para resolver uma tarefa. Os padrões de interação descrevem diferentes abordagens quer do professor quer dos alunos e das posturas que os mesmos assumem na sala de aula (Guerreiro, 2013).

A identificação dos diferentes padrões de interação na sala de aula é essencial para que se possa perceber a natureza do discurso do professor assim como a sua intenção na comunicação a estabelecer na sala de aula. A perspetiva de uma análise externa permite uma análise mais imparcial sobre as intenções do professor, assim como sobre o tipo de ensino e de aprendizagem que este pretende implementar. Este tipo de análise pode permitir ainda detetar deficiências ou algumas situações que em sala de aula não se tornam percetíveis. Ao longo dos últimos anos, os estudos sobre os padrões de interação permitiram identificar cinco tipos de padrões de interação: padrão de recitação; padrão de funil; padrão de extração; padrão de focalização; e padrão de discussão.

Padrão de recitação

O padrão de recitação está associado a um ensino com características que comummente o designam de tradicional. Este padrão está associado à explicação da matéria seguida da colocação de questões sobre essa mesma matéria por parte do professor. Perante as questões, os alunos são chamados a intervir para responder e, de seguida, o professor procede à avaliação da informação que os alunos demonstraram saber (Menezes, 2005). Nos momentos em que se verifica este padrão de interação o produto final conseguido tem mais importância do que o processo para lá chegar. O padrão de recitação está muitas vezes associado a uma prática mais rotineira e repetitiva (Menezes, 2004). O professor assume um papel preponderante, sendo transmissor de informação e regulador das intervenções dos alunos (Frid & Malone, 1995).

Apesar de este ser o padrão de interação mais tradicional, permite ao professor o controlo do discurso assim como a possibilidade de contornar ou até ignorar algumas respostas dos alunos, orientando as aprendizagens dos alunos de uma forma mais seletiva (Wood, 1998). Mesmo sendo o padrão de interação que retrata um método de ensino mais tradicional, este padrão é um dos mais observados nas salas de aula (Martinho & Ponte, 2005). O padrão de recitação é, assim, um padrão bastante comum e cujo objetivo principal é a verificação dos conhecimentos matemáticos adquiridos pelos alunos. Em algumas situações, este padrão pode estar associado a um discurso quase unidirecional por parte do professor (Menezes, 2005).

Padrão de funil

O padrão de funil baseia-se num conjunto de questões, simples e direcionadas, que o professor coloca de forma a guiar os alunos. Por norma, este padrão ocorre numa situação em que é colocado um problema aos alunos pelo professor. Perante as dificuldades dos alunos em resolver o problema, o professor formula questões cujas respostas vão dirigindo os alunos para a solução do problema proposto (Menezes, 2004; Wood, 1998). Neste tipo de padrão, o raciocínio que prevalece é o do professor pois é

ele que, com as perguntas que vai colocando, orienta o aluno para a estratégia pré-definida. O professor controla o processo de tomada de decisão dos alunos, conduzindo-os para a solução (Tanner & Jones, 2007).

O padrão de funil surge na sala de aula quando o professor pretende auxiliar os alunos de forma mais imediata e direta, onde o pensamento dos alunos vai sendo afunilado pelo professor até que sejam encaminhados para a resposta final (Almeida & Fernandes, 2010). Deste modo, considera-se que na utilização deste padrão o professor está perante um esforço maior do que os próprios alunos, arranjando questões simples com respostas simples (Almeida, 2007).

Padrão de extração

O padrão de extração, assim como o padrão de funil, é caracterizado pela colocação de questões sucessivas por parte do professor aos alunos. No entanto, o padrão de extração ocorre de forma um pouco diferente. Este padrão ocorre também perante dificuldades dos alunos aquando da resolução de uma tarefa proposta pelo professor (Menezes, 2004). Perante as dificuldades, os alunos propõem processos de resolução, estratégias ou mesmo soluções e cabe ao professor gerir os diferentes *inputs* dados pelos alunos através de várias questões de forma que, pergunta a pergunta, consiga extrair um pouco mais do conhecimento dos alunos, levando-os a completar o seu raciocínio (Wood, 1998). Este padrão de interação é mais rico no que diz respeito à participação dos alunos porque é o seu raciocínio que é seguido e não o do professor, o qual se deve adaptar às diferentes estratégias apontadas pelos alunos. Adicionalmente, após resolução da tarefa, alunos e professor analisam os processos de resolução e os resultados obtidos (Menezes, 2004). Deste modo, o padrão de extração impele o professor a desempenhar um papel de questionador (Menezes et al., 2014) e o aluno a ter um papel ativo na dinâmica das atividades que se realizam na sala de aula. Quando esta regularidade de comunicação acontece na sala de aula estamos perante um maior grau de controlo na interação por parte do aluno, tornando-se mais ativo no seu processo de aprendizagem (Tanner & Jones, 2007).

Padrão de focalização

Quando a complexidade da tarefa proposta aos alunos é maior, existe maior propensão para a existência do padrão de focalização. Durante a resolução da tarefa, identificando algumas dificuldades, o professor formula questões de modo a focar a atenção dos alunos em determinados aspetos da tarefa (Menezes, 2004). Neste padrão verifica-se uma maior abertura por parte do professor para que sejam os alunos a resolver a tarefa, incentivando a discussão das ideias com os seus colegas (Wood, 1998). Neste padrão, o professor preocupa-se em integrar diferentes contribuições suas no trabalho desenvolvido pelos alunos (Guerreiro, 2013). O padrão de focalização permite uma troca dinâmica de

ideias entre o professor e os alunos, sendo ambos construtores do conhecimento (Tanner & Jones, 2007). Apesar disso, continua a ser o professor o gestor do discurso estabelecido, validando estratégias e focalizando o pensamento dos alunos em determinados pontos da tarefa (Tanner & Jones, 2007). A possibilidade de abrir a discussão de ideias e estratégias com os colegas permite aos alunos complementarem os seus raciocínios e obterem *feedback* por parte dos pares, podendo resultar em melhorias significativas no seu processo de resolução.

Padrão de discussão

O padrão de discussão tem como objetivo principal o processo e não a solução. Neste padrão de interação, os alunos resolvem uma tarefa proposta pelo professor (por norma em grupos), sendo posteriormente apresentadas várias resoluções e explicadas pelos alunos à restante turma. O professor acompanha o processo de explicação dos alunos caso seja necessário intervir, colocando questões para que o momento seja claro para todos. Por fim, espera-se que através da partilha de conhecimento se chegue a uma resolução o mais completa possível construída em conjunto nesse momento de discussão (Voigt, 1985). Neste padrão, os momentos de discussão ocorrem em duas circunstâncias: durante a resolução da tarefa com os colegas e na exposição e explicação da resolução à turma. O objetivo de propor o trabalho em grupo é fomentar a discussão entre os alunos, permitindo que exponham mais as ideias entre si, revelando o seu modo de pensar (Almeida, 2007). O padrão de discussão já denota uma envolvência maior dos alunos na construção do conhecimento, uma vez que lhes é dada a possibilidade de preparar as suas intervenções e de argumentar de forma mais eficaz as suas posições (Almeida, 2007).

Em síntese, os diferentes padrões de interação podem ocorrer numa mesma aula dependendo da sua natureza e dos momentos criados por alunos e professor. Podem identificar-se diferentes padrões em momentos consecutivos, dependendo do papel que o professor pretenda desempenhar. Para além disso, nenhum professor terá a sua atividade definida por apenas um padrão, independentemente da metodologia que desenvolve com os seus alunos (Almeida & Fernandes, 2010). O percurso de aprendizagem tem diferentes momentos possibilitando diferentes abordagens por parte do professor. No entanto, perante uma observação atenta será possível avaliar que padrões de interação prevalecem, ditando algumas características das práticas letivas de cada professor.

Ao longo dos anos tem sido defendido que o aluno deve ter um papel ativo no seu processo de aprendizagem (Brown & Campione, 1986; Fraser et al., 1988; Leikin & Zaslavsky, 1997), o que é corroborado pelas recomendações atuais para o ensino da Matemática (Ministério da Educação, 2020). Desta forma, as interações desenvolvidas na sala de aula ganham ainda mais importância e são

decisivas para o envolvimento dos alunos nas atividades realizadas e para o desenvolvimento da sua capacidade de comunicar matematicamente (Serrazina & Ribeiro, 2012). Nesta perspetiva, as interações que ocorrem na sala de aula (entre alunos, entre os alunos e o professor e entre o aluno e o material utilizado) tornam-se essenciais para uma efetiva aprendizagem por parte dos alunos (Jaworski, 1992; Leikin & Zaslavsky, 1997).

2.6. A tecnologia no ensino e na aprendizagem

A evolução da tecnologia representou nas últimas décadas uma mudança social enorme, sendo hoje base do mundo moderno. Esta nova sociedade vive na era do processamento e armazenamento de informação, no controlo e automatização de máquinas e processos e ainda da comunicação imediata (Coutinho & Lisbôa, 2011). A evolução da tecnologia tornou-se tão avassaladora que rapidamente surgiram diversos estudos sobre a tecnologia no âmbito da educação. O conceito de tecnologia subjacente nestes estudos refere-se, de um modo global, ao conjunto de ferramentas, sistemas e outras aplicações eletrónicas, informáticas ou telecomunicações que permitem a produção, armazenamento, transmissão e partilha de informação nos mais diversos formatos (Pedro, 2011).

No final dos anos 90, a geração que frequentava a escola (nos Estados Unidos da América) era já reconhecida como a primeira geração que se apresentava mais bem preparada do que os próprios pais para lidar com a tecnologia (Tapscott, 1998). Esta tendência foi, a partir dessa altura, cada vez mais uma realidade e essa geração e as que se seguiram nasceram num mundo saturado de informação, com as suas vidas repletas de tecnologia. Estas gerações foram apelidadas de "nativos digitais" (Prensky, 2001, 2006). Os nativos digitais revelam-se capazes de manipular computadores, trabalhar na internet, utilizar consolas e muitos outros aparelhos com bastante facilidade. Assim, a tecnologia faz parte da vida destas gerações de forma natural, sendo adotada facilmente pelas mesmas (Prensky, 2001). Estas gerações tornaram-se num novo tipo de alunos que exige, naturalmente, uma nova tipologia de escola, impondo também aos professores novas características (Davis & Roblyer, 2005).

Deste modo, o professor tem de assumir um novo papel, possuindo conhecimento técnico da sua disciplina e estando disposto a utilizar ferramentas de ensino diferentes de até então, mais tecnológicas e mais apelativas (Goodwin, 2017). A inclusão da tecnologia na disciplina de Matemática permite a construção de conhecimento envolvendo os alunos e tornando-os ativos no processo. Optar por este caminho permite desenvolver com os alunos um modelo de aprendizagem ativa onde eles próprios constroem o seu conhecimento (Javed & Odhabi, 2018; Silva & Vanini, 2019).

2.6.1. A tecnologia na sala de aula

As sucessivas reformulações dos programas de Matemática procuram acompanhar a evolução tecnológica que caracteriza a sociedade atual, apresentando nas suas recomendações metodológicas a utilização de materiais tecnológicos nas atividades de ensino e de aprendizagem. Por exemplo, desses materiais ganha especial destaque a calculadora gráfica e a utilização do computador. No entanto, a evolução tecnológica foi muito superior à evolução do ensino com tecnologia e a educação do século XXI não se pode estagnar numa atitude passiva, não indo ao encontro do conhecimento, competências e atitudes que os alunos de hoje (trabalhadores de amanhã) irão precisar no mercado de trabalho (Cunha, 2021). Numa mudança que parece urgente para a sociedade e para o ensino atuais é importante que não seja esquecida uma das partes mais importantes no processo – os professores. É certo que o ensino está desajustado para os alunos, mas também é certo que é necessária uma classe docente motivada e empenhada para a mudança que se exige (Davis & Roblyer, 2005). O mundo tecnológico assenta numa linguagem que não é natural a todos os professores (Prensky, 2001), sendo facilmente percetível as dificuldades e o desconforto que possam apresentar. Para além disso, apenas o facto de se exigir a mudança de um processo, mesmo que bem aceite pelos intervenientes, é um fator de ansiedade e falta de segurança (Caetano, 2001).

Apesar de a introdução da tecnologia no ensino representar um desafio para os professores, não deixa de ser uma mais-valia para a aprendizagem uma vez que é um meio privilegiado de acesso à informação, potencia o trabalho colaborativo e ainda é um suporte do desenvolvimento humano nas dimensões sociais, culturais e lúdicas (Ponte et al., 2002). Adicionalmente, a introdução da tecnologia no ensino permite um aumento da motivação por parte dos alunos assim como o desenvolvimento de diferentes competências, criando oportunidades no que respeita ao trabalho colaborativo entre alunos na realização de projetos (Balanskat et al., 2006).

Numa perspetiva de evolução e adaptação, é necessário unir esforços por parte dos professores e alunos de forma que as metodologias de ensino evoluam, introduzindo as inovações tecnológicas. Desta forma, será possível melhorar tanto a experiência por parte dos alunos como a experiência dos próprios professores, criando um ambiente de aprendizagem e evolução simbiótica. O que diferencia os sistemas tecnológicos de outros sistemas e metodologias utilizados no ensino é a sua capacidade de interação. O poder da interatividade promovido pela tecnologia nos processos de ensino e de aprendizagem deve, por si só, ser considerado estimulante no desenvolvimento deste mesmo processo, tanto na vertente do ensino como da aprendizagem (Duval et al., 2017).

Para que a integração da tecnologia seja um processo mais natural e menos custoso temos de olhar para o assunto com o enfoque naquilo que realmente é mais importante – a aprendizagem. Não importa ter o foco na tecnologia, mas sim na aprendizagem que se pode conseguir com a introdução da tecnologia – *Technology Enhanced Learning* (TEL) (podendo ser traduzido como Aprendizagem Enriquecida pela Tecnologia). A aprendizagem pode ser fomentada por todos e, independentemente da idade apresentada, todos podem ser construtores ativos do seu conhecimento. Esta construção pode ser facilitada pela utilização da tecnologia, permitindo conexões, representações, explorações e partilhas que, de outra forma, não seriam possíveis (Duval et al., 2017).

A aprendizagem enriquecida pela tecnologia pode abranger diversas visões, não estando fixada a nenhuma metodologia ou meios tecnológicos específicos e estando patente em todas as situações em que a aprendizagem dos alunos é influenciada de forma positiva pela tecnologia, assumindo um papel significativo na mesma (Goodyear & Retalis, 2010). A inclusão de tecnologia permite aos professores definir novos objetivos e até inovar nos modos de trabalho em sala de aula. Os materiais tecnológicos permitem apresentar informação de natureza diversa, criar momentos de maior envolvimento dos alunos e ainda criar oportunidades de reflexão que dificilmente surgem noutros contextos (Ponte, 2014).

As inúmeras possibilidades tecnológicas que o professor tem à sua disposição variam entre soluções de *hardware* e *software*, como também dispositivos móveis que permitem um decréscimo nos custos associados à inclusão da tecnologia na sua prática profissional, mas que aumentam as potencialidades educativas que apresentam (Goodyear & Retalis, 2010). A aprendizagem enriquecida pela tecnologia é uma vantagem tendo em conta as diversas oportunidades que permite, potenciando uma aprendizagem indutiva, com base na comunicação e colaboração, e o desenvolvimento nos alunos das suas capacidades digitais e multimédia (Goodyear & Retalis, 2010). No que respeita ao *hardware,* cada vez mais existem soluções simples e capazes de permitir igualdade no acesso às tecnologias para alunos e professores em ambiente escolar. A utilização de elementos tecnológicos portáteis e de uso simples tornou-se impactante nos contextos da aprendizagem enriquecida pela tecnologia. A utilização de tecnologia portátil nos processos de ensino e de aprendizagem (*Mobile Learning*) traz bastantes oportunidades, sendo recomendada pela Comissão Europeia (2019) e pela UNESCO (2013) (Figura 4).

Figura 4 – Motivos para utilizar tecnologias móveis na sala de aula (UNESCO, 2013)



A mobilidade de alguns aparelhos tecnológicos permite que a aprendizagem se estenda para além da sala de aula, sendo que cada aluno pode transportar consigo o contexto de aprendizagem, permitindo uma continuidade entre diferentes ambientes, formais e informais (UNESCO, 2013). A utilização destes aparelhos permite uma aprendizagem mais personalizada e social, onde o espaço e tempo podem divergir e, a partir dos quais, se podem implementar diferentes pedagogias (UNESCO, 2013). Ao permitir a implementação de diferentes abordagens pedagógicas, as tecnologias móveis fomentam abordagens mais ativas, mais centradas nos alunos e que potenciem as interações entre eles (Pregum et al., 2013).

A utilização de tecnologias que permitam alguma personalização permite uma melhoria na aprendizagem dos alunos, na sua autonomia no processo de aquisição de conhecimento e ainda nas competências sociais (Couvaneiro & Pedro, 2019; Gang et al., 2017). Assim, metodologias que apostam na utilização de tecnologia móvel são agentes de mudança na personalização do ensino e na construção do conhecimento de forma colaborativa (Bower, 2017).

A utilização da tecnologia para uma aprendizagem mais efetiva é, deste modo, quase inevitável. A dimensão incomensurável da tecnologia na sociedade e no ensino exige que as incorporemos de forma responsável e profissional de modo a garantir uma aprendizagem mais adequada aos dias de hoje. Sinal disso mesmo são as diretrizes emanadas pelo Ministério da Educação nas últimas décadas sobre a inclusão de tecnologias nas salas de aula e, em particular, na disciplina de Matemática (Ministério da Educação, 2018d). As ferramentas tecnológicas são "recursos incontornáveis e potentes para o ensino da Matemática" (Ministério da Educação, 2021, p. 6). Para que a tecnologia se torne uma verdadeira

ferramenta de trabalho é necessário que professores e alunos tenham à vontade e destreza no uso dessa mesma tecnologia.

No caso particular da disciplina de Matemática, a tecnologia trouxe uma relativização da importância atribuída às competências de cálculo visto que é possível executar esses processos de forma rápida e eficiente; uma panóplia de opções no que respeita às representações, abrindo novos caminhos para diferentes abordagens nas salas de aula; a possibilidade de explorar de forma mais profunda a análise de dados e alguns conceitos estatísticos e ainda um aumento da exploração de tarefas mais abrangentes como problemas de modelação ou tarefas de investigação (Ministério da Educação, 2021; Ponte, 1995). As inúmeras ferramentas de trabalho traduzem-se hoje, na disciplina de Matemática, num peso de inovação, de aprendizagem e de envolvência dos alunos, promovendo a ampliação dos contextos onde se desenvolve a ação do aluno (Ministério da Educação, 2021).

Em Portugal, a calculadora gráfica tornou-se um instrumento obrigatório no programa de Matemática no ensino secundário em 1997 (Domingos, 2017; Viseu & Rocha, 2018). A evolução das calculadoras gráficas fez com que assumissem um papel preponderante no ensino da disciplina, tornando-se uma das principais ferramentas computacionais em utilização do ensino secundário (Domingos, 2017). A calculadora gráfica é um grande suporte para a representação gráfica, sendo também utilizada para apoio ao desenvolvimento do cálculo algébrico – como, por exemplo, na resolução de equações e inequações –, para o tratamento e análise de dados e ainda possibilita explorações na resolução de problemas e análises de conjeturas (Domingos, 2017; Viseu & Rocha, 2018). As potencialidades da calculadora gráfica não se prendem apenas com as componentes técnicas que permitem explorar, mas também com a motivação e níveis de participação crescentes por parte dos alunos quando a mesma é utlizada em sala de aula (Domingos, 2017; Viseu & Rocha, 2018). Deste modo, a utilização da calculadora gráfica com os alunos do ensino secundário, principalmente no estudo das funções, é essencial para cativar os alunos e lhes permitir uma maior perceção entre as diferentes representações de funções.

No entanto, apesar da reconhecida necessidade da utilização e exploração da calculadora gráfica, a mesma não pode preencher todo o espaço da tecnologia na aula de Matemática. O número de ferramentas e aplicações de fácil acesso é enorme, cabendo assim ao docente procurar opções, conhecê-las e integrá-las na sala de aula. A utilização de *tablets* ou telemóveis na sala de aula permite a criação de dinâmicas diferentes conforme o *software* ou aplicação que se utiliza. Estas alternativas tecnológicas podem sobrepor-se às dinâmicas de diálogo na sala de aula na medida em que: pode ser difícil conseguir que todos os alunos participem numa aula; o tempo da aula pode ser limitado; os alunos

podem não estar à vontade para expressar as suas opiniões (Trindade, 2014). As dificuldades que se podem sentir poderão ser ultrapassadas recorrendo a elementos tecnológicos. Neste sentido, foi desenvolvido um sistema de *feedback* nos Estados Unidos na América, comumente conhecido como *clickers*. Os *clickers* são amplamente usados em algumas das universidades mais conceituadas dos Estados Unidos da América, onde com aparelhos próprios os alunos respondem a questões colocadas pelos professores permitindo uma participação de todos os alunos presentes na sala de aula de forma proeminente (*The New York Times*, 2010; Trindade, 2014; Venturino & Fernandes-Santos, 2020).

A metodologia utilizada na aplicação dos *clickers* é atualmente replicada com diferentes aplicações gratuitas e intuitivas. Em algumas delas possibilita que os alunos respondam às questões e tenham de forma automática acesso à resposta correta. Em alguns casos, ainda é possível ao professor ter acesso imediato também às respostas dos alunos tanto de forma individual como de forma global de modo a explorar com a própria turma as respostas dadas. Algumas destas soluções permitem ainda manter o anonimato dos alunos na exposição ao grupo turma o que se torna benéfico para combater as dificuldades de exposição que alguns alunos possam sentir. Assim, estas soluções constituem uma possibilidade de desenvolver formas de interação mais eficazes na sala de aula (Trindade, 2014).

A aplicação dos *clickers* vai ao encontro da utilização de 'Sistemas de Respostas Interativas' (SRI, Interactive Response Systems), como o *Pear Deck*, *Kahoot* e *Quizizz*. Os SRI são então sistemas que permitem a interatividade dentro e fora da sala de aula, encorajando os alunos a participar, direcionando o seu foco e oferecendo sempre *feedback* em tempo real (Anggoro & Pratiwi, 2023; Paul et al., 2020). As atividades desenvolvidas com base nestas aplicações têm uma base lúdica, unindo a tecnologia aos jogos digitais que estão muito presentes na vida dos jovens. Assim, a junção destes dois elementos como estratégia pedagógica promove o envolvimento e motivação dos alunos (Santos & Dias, 2020). Desta forma, o professor pode desenvolver metodologias ativas, tendo o aluno um papel fulcral no seu processo de aprendizagem, utilizando atividades que permitam o *feedback* imediato e uma interação mais forte entre aluno e professor (Azevedo et al., 2021).

2.6.2. A tecnologia na promoção das interações

A tecnologia exerce imensa influência nas interações humanas pelo que a existência de redes contínuas que permitem aos seres humanos, enquanto seres sociais, estarem envolvidos em diferentes planos simultaneamente são uma vantagem no desenvolvimento social. Estas ligações estabelecidas em rede assumem um papel estruturante no desenvolvimento cognitivo e social dos indivíduos (Ponte, 2000), demonstrando-se importante promovê-las e fomentá-las entre os mais jovens. A construção de

redes de comunicação potencia a interação entre os seres humanos e, consequentemente, a construção de significados, permitindo que esses mesmos significados sejam recriados através de futuras interações (Blumer, 1969; Carter & Fuller, 2015). Adicionalmente, o estabelecimento de redes permite a construção de novas oportunidades de comunicação, através da partilha e da participação dos seus membros (Silva, 1999). A produção de conhecimento em rede permite a junção de diferentes competências e experiências para a resolução de um mesmo problema (Ponte, 2000), o que, no que respeita ao ensino e, em particular, ao ensino da Matemática, pode ser uma enorme mais-valia. A utilização de tecnologia traz novas oportunidades no que respeita ao discurso desenvolvido na sala de aula, permitindo que aluno e professor possam partilhar, explicar, justificar e discutir usando diferentes meios e representações (Mercer et al., 2019).

Nos processos de ensino e de aprendizagem, a interatividade pode revelar-se um requisito importante, podendo levar a uma melhor aprendizagem e mais eficaz (Chou, 2003; Trindade, 2014). A criação de um ambiente interativo na sala de aula exige um contexto aberto e dinâmico, permitindo que o aluno tenha um papel ativo na sua aprendizagem (Evans & Sabry, 2003). A inclusão de tecnologia no apoio ao desenvolvimento cognitivo e social da aprendizagem proporciona condições muito particulares, suscitando uma maior envolvência e interesse por parte dos alunos (Trindade, 2014).

A utilização de ferramentas tecnológicas é um meio possível para desenvolver metodologias ativas com mais facilidade, promovendo a intervenção do aluno na dinamização das atividades de ensino e de aprendizagem. A inclusão da tecnologia permite que se estabeleça uma relação diferente entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos, não estando os mesmos presentes de forma passiva, mas sim participando ativamente nas atividades que estão a decorrer (Harper, 2018; Silva & Vanini, 2019). O papel que se pretende que o aluno assuma na implementação de metodologias ativas promove o desenvolvimento de interações na sala de aula, uma vez que lhe exige uma intervenção mais presente no desenrolar dos momentos de aprendizagem. Adicionalmente, o facto de o uso das tecnologias melhorar o desempenho dos alunos em metodologias ativas proporciona também um incremento das interações que ocorrem na sala de aula já que esta tipologia de metodologia proporciona naturalmente uma participação mais preponderante por parte dos alunos (Leite, 2018). A introdução da tecnologia provoca alterações importantes nas interações desenvolvidas na sala de aula, nomeadamente o surgimento mais natural de estratégias centradas no aluno (Harper, 2018).

A introdução da tecnologia no ensino permite um aumento no envolvimento dos alunos de forma acentuada e, desse modo, potencia as interações na sala de aula (Kim et al., 2011; NCTM, 2007). Nomeadamente, o NCTM (2007) defende que a tecnologia é essencial no processo de ensino e de

aprendizagem da Matemática, permitindo um aumento da motivação dos alunos e, consequentemente, da sua participação ativa nas aulas. A utilização da tecnologia deve ser permitida aos alunos, mas também explorada pelos professores para promover um maior número de interações (Kim et al., 2011). De modo a promover as interações na sala de aula, Ponte et al. (1997) defendem que o sucesso do processo de ensino e de aprendizagem depende da comunicação entre os diferentes sujeitos bem como da diversificação dos suportes utilizados. Partindo deste ponto de vista, incluir a tecnologia nas aulas de Matemática facilita a promoção da interação entre os alunos e entre os alunos e o professor, uma vez que "essa integração proporciona abordagens de ensino que valorizam a atividade do aluno, em detrimento de práticas individualizadas e de assimilação passiva do conhecimento" (Viseu & Rocha, 2018, p.114).

Segundo o NCTM (2007), a tecnologia é um bom apoio para a comunicação, pois à medida que os alunos criam e analisam 'objetos' matemáticos através dos meios tecnológicos, ficam com uma referência para as discussões a desenvolver em conjunto. A sala de aula continua, ainda hoje, a ser um espaço conservador, sendo, por esse mesmo motivo, pouco atrativa para os alunos que estão hoje em idade escolar (Gomes, 2014). Importa, assim, que os professores conheçam as tecnologias que têm ao seu dispor e que experimentem cada uma delas para que possam escolher aquela que consideram mais adequada para determinado momento, dependendo dos objetivos que desejam alcançar (Gomes, 2014).

A utilização da tecnologia nas aulas de Matemática, como, por exemplo, o computador, os telemóveis ou a calculadora, proporciona oportunidades para que os alunos sejam mais ativos no desenvolvimento da aula. Essa utilização permite um maior envolvimento por parte dos alunos, comunicando mais entre si e trabalhando as suas capacidades de conjeturar e explorar conceitos (Fonkert, 2010; Harper, 2018). Desta forma, a possibilidade de envolver os alunos em desafios matemáticos aumenta de forma significativa com a utilização de tecnologias (NCTM, 2007), pelo que a sua integração no ensino, nomeadamente nas aulas de Matemática, é de extrema importância para a motivação dos alunos e para a sua aprendizagem.

A tecnologia traz possibilidades acrescidas de um aumento de espaços para comunicação, interação e ajuda entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos (Kim et al., 2011), sendo um meio para desenvolver metodologias alternativas que promovam a criatividade e a reflexão crítica (Ponte, 2000). As ferramentas tecnológicas permitem que os alunos se envolvam mais nas aulas ou nas atividades a desenvolver, assim como a estabelecer um maior envolvimento com os outros alunos, quer por permitirem ultrapassar distâncias quer porque simplifica a exigência para um maior número de interações (Kim et al., 2011; Rogers & Cox, 2008). A tecnologia criou novas oportunidades no que

concerne às interações entre professor e alunos, dando oportunidade aos alunos que não encontravam lugar num modo de ensino mais tradicional de encontrar alternativas para se envolverem no seu processo de aprendizagem (Harper, 2018).

O uso da tecnologia pode ser um veículo para atribuição de *feedback* mais imediato, permitindo uma maior margem de melhoria e, muitas vezes, um *feedback* mais global que possibilita a troca de ideias e a análise conjunta no grupo turma (Kim et al., 2011). Adicionalmente, a utilização da tecnologia permite desenvolver a parte gráfica necessária durante as aulas, melhorando a diversidade e qualidade de diagramas ou figuras (Kim et al., 2011; Moser, 2007). A integração da tecnologia nos processos de ensino e de aprendizagem fomenta um incremento nas oportunidades que os alunos têm para colaborar com os seus professores (Harper, 2018), levando os professores a assumir um papel de facilitador neste processo assim como a envolver-se mais com os seus alunos (Falloon & Khoo, 2014). A implementação de ferramentas tecnológicas como ferramentas para o apoio à comunicação criou novos caminhos para o diálogo na sala de aula. Valorizando uma perspetiva de ensino que incentiva a participação dos alunos, estas ferramentas podem ser exploradas de forma a que seja estabelecida uma colaboração diferente entre professor e alunos, possibilitando um aumento das interações entre os próprios estudantes e com o professor, elevando o seu papel na sua aprendizagem (Harper, 2018).

Assim, a inclusão da tecnologia na sala de aula permite uma panóplia de abordagens diferenciadas que podem apostar numa atividade centrada no aluno, promovendo momentos de partilha, interação e discussão. A tecnologia tem em si todas as oportunidades, cabendo a cada professor utilizá-la da melhor forma, conseguindo criar alunos cada vez mais capazes de saber comunicar, saber interagir e saber se relacionar (Ministério da Educação, 2017). No entanto, é necessário salvaguardar que o papel dos elementos tecnológicos no mundo da educação está ainda no início do seu estudo e análise uma vez que só nos últimos anos se começou a aprofundar e normalizar a sua utilização. Deste modo, o real papel das tecnologias no ensino deverá ainda demorar a ser mais profundamente estudado, sendo necessária mais prática e consequente investigação da mesma, assim como o seu papel na promoção das interações sociais na aprendizagem da Matemática (Geiger, 2008).

CAPÍTULO 3

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Neste capítulo faz-se a análise do contexto de intervenção pedagógica, abordando a escola em que se realizou o estágio e, de forma mais detalhada, a turma onde decorreu a intervenção pedagógica. Aborda também as estratégias de ensino que foram postas em prática assim como os métodos utilizados para avaliar essas mesmas estratégias. Desta forma, torna-se possível perceber melhor como decorreu a organização e planificação do trabalho desenvolvido e que características foram tidas em consideração durante a intervenção pedagógica.

3.1. Contexto da intervenção pedagógica

A educação "para todos, consagrada como primeiro objetivo mundial da UNESCO, obriga à consideração da diversidade e da complexidade como fatores a ter em conta ao definir o que se pretende para a aprendizagem dos alunos" (Ministério da Educação, 2017, p. 5). As especificidades de cada contexto são essenciais para melhor adequarmos o plano de intervenção que pretendemos desenvolver às características do meio onde se irá inserir. O ambiente (escolar e familiar) em que cada aluno está inserido desempenha um papel fundamental no seu processo de aprendizagem e, consequentemente, no seu aproveitamento escolar (Harinarayanan & Pazhanivelu, 2018). Deste modo, é indispensável analisar o contexto escolar em que a intervenção pedagógica decorreu, assim como a turma com quem este trabalho foi desenvolvido.

3.1.1. Caracterização da escola

O estágio pedagógico decorreu numa escola secundária do distrito de Braga. Esta escola pertence a um agrupamento com o total de onze unidades orgânicas, onde existem três jardins de infância, duas escolas básicas do 1.º ciclo, quatro escolas básicas com 1.º ciclo e jardim de infância, uma escola básica do 2.º e 3.º ciclos e uma escola secundária com 3.º ciclo do ensino básico. As diferentes unidades orgânicas pertencentes ao agrupamento estão distribuídas por cinco uniões de freguesia num raio de cinco quilómetros. O agrupamento de escolas em análise tem uma oferta educativa alargada. No 1.º ciclo tem à disponibilização dos alunos AECs (Atividades de Enriquecimento Curricular), como, por exemplo, 'Estímulo Mental, Emocional e Criativo', 'Atividade Físico-desportiva' e 'Artes Performativas'. Ao nível dos 2.º e 3.º ciclos, o agrupamento dispõe da oferta complementar variando entre oficinas de música, matemática, ciências experimentais, línguas e complemento à educação artística. Estas opções

variam conforme cada uma das escolas do agrupamento. O agrupamento de escolas tem ainda à disposição ensino articulado, possibilitando um regime híbrido onde a música é parte muito importante na formação dos alunos. Para além disso, é possibilitada a frequência da disciplina de Português Língua de Acolhimento que permite à escola uma maior facilidade em acolher alunos que não falem português. A escola oferece também inúmeras possibilidades para adultos que não tenham concluído o ensino básico ou secundário.

A escola secundária onde decorreu o meu estágio situa-se numa zona urbana e possui umas boas instalações resultantes do processo de requalificação que ocorreu no ano letivo 2009/2010 no âmbito do 'Projeto de Modernização das Escolas Secundárias' levado a cabo pelo Ministério da Educação. A escola secundária é pautada por uma grande heterogeneidade no que respeita às características sociais, culturais e económicas dos seus alunos. A sua localização urbana permite responder às necessidades da cidade e à chegada de alunos de diversos países e culturas. Atualmente 8,3% dos alunos do agrupamento são estrangeiros, sendo que 6,1% (184 alunos) são provenientes do Brasil e 0,5% (14 alunos) vindos de Angola. Para além disso, existem 0,2% (cerca de 6 alunos) da Venezuela, de Espanha, de Itália, da Ucrânia, de Moçambique e da Zâmbia. Mais ainda, estão representados imensos outros países no agrupamento como os Estado Unidos da América, o Paquistão, a Mongólia, a Lituânia, o Suriname, entre outros.

No que respeita ao Ensino Secundário (apenas existente na escola onde decorreu a prática pedagógica), a escola tem à disposição cursos científico-humanísticos, ensino recorrente e cursos profissionais. Dos cursos científico-humanísticos a escola oferece quatro possibilidades: Ciências e Tecnologias; Ciências Socioeconómicas; Línguas e Humanidades; e Artes Visuais, sendo estas mesmas opções a funcionar em registo de ensino recorrente. A escola tem ao dispor seis cursos profissionais: Intérprete ator/atriz; Técnico de Eletrónica, Automação e Computadores; Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos; Técnico de Multimédia; Técnico de Turismo; e Técnico de Secretariado.

De modo a fomentar áreas de interesse dos diferentes alunos e a motivá-los à aprendizagem, a escola secundária tem diversos clubes e oficinas como o Clube do Ambiente, o Clube da Ciência Viva, o Clube de Rádio e Comunicação na Escola, a Oficina de Latim ou a Oficina da Música Moderna.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma onde decorreu a minha intervenção pedagógica supervisionada era do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias, frequentada por todos os alunos pela primeira vez. No

início do ano letivo a turma era composta por 28 alunos. No entanto, dois deles acabaram por sair pelo que a minha intervenção decorreu com 26 alunos. Todos os alunos residem no mesmo concelho da escola e são de nacionalidade portuguesa, à exceção de uma aluna natural de Moçambique. A turma era composta por 18 membros do sexo feminino (69,2%) e 8 do sexo masculino (30,8%). A média de idades dos alunos era de 15 anos, existindo apenas um aluno com 14 anos e cinco alunos com 16 anos. Relativamente às disciplinas preferidas, a Matemática era a preferida de 9 alunos da turma, enquanto para 8 alunos era a que tinham mais dificuldade. Na transição do 3.º ciclo para o ensino secundário, praticamente todos os alunos terminaram o 3.º ciclo com um nível positivo à disciplina de Matemática (Figura 5).

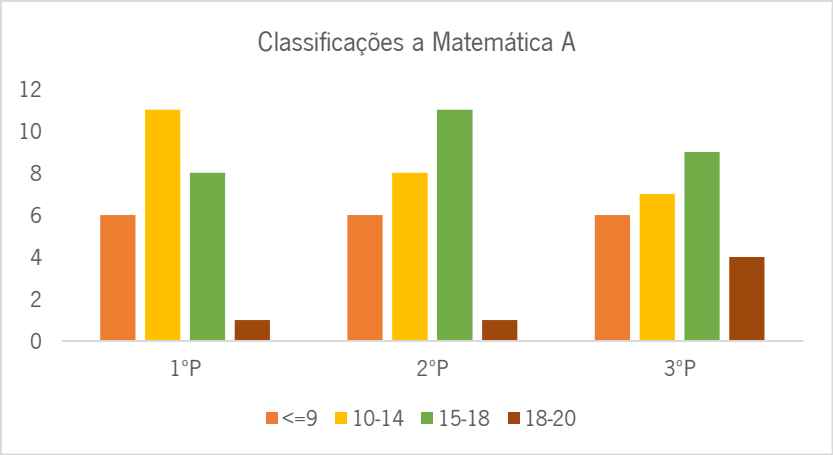
Figura 5 – Nível obtido pelos alunos a Matemática no final do 3.º ciclo



Relativamente ao seu contexto familiar, apenas 23,5% dos pais dos alunos da turma concluíram estudos no ensino superior e 39,2% completaram apenas o 3.º ciclo do ensino básico ou um ciclo de estudos inferior. Deste modo, pode-se concluir que a maioria dos pais poderiam ter algumas dificuldades em acompanhar os seus filhos no que diz respeito aos conteúdos programáticos. Apesar disso, os pais eram bastante participativos, acompanhando o percurso dos seus educandos. O facto de a turma ser heterogénea, quer do ponto de vista socioeconómico (tendo por base as profissões dos pais) quer do ponto de vista das habilitações literárias por parte dos encarregados de educação, fez emergir o papel da tecnologia em potenciar as interações na sala de aula durante o decorrer da prática pedagógica uma vez que alguns deles poderiam não estar familiarizados com as tecnologias como um objeto educativo, mas sim apenas enquanto elemento lúdico.

As classificações relativas à disciplina de Matemática A ao longo do ano letivo em que decorreu o estágio foram sofrendo algumas alterações. Quase todas as alterações corresponderam a uma melhoria no desempenho escolar dos alunos. No entanto, o número de classificações negativas manteve-se nos três períodos letivos, 6 negativas (23%), sendo os mesmos alunos com classificações desse nível (Figura 6).

Figura 6 – Classificações a Matemática A no final de cada um dos períodos escolares



Na análise das classificações referentes no final do 3.º ciclo e no 10.º ano deve-se atender ao facto de os dois anos letivos estarem perante fases com confinamento e isolamento profilático decorrentes da pandemia COVID-19. Assim, estes alunos tiveram metade do seu 9.º ano de escolaridade em ensino online assim como várias semanas do 10.º ano neste regime de ensino a distância.

De modo a conhecer um pouco melhor a turma em que a prática pedagógica supervisionada iria ocorrer, procurei perceber a sua visão sobre a disciplina assim como a sua relação com a mesma (Tabela 1).

Tabela 1 – Opinião dos alunos sobre a finalidade da disciplina de Matemática (%)

	D/DT	NDNC	C/CT
Aplico a Matemática na minha vida fora da escola.	8,33%	20,83%	70,84%
A Matemática é importante para o estudo das outras disciplinas.	0%	16,67%	83,33%
A Matemática prepara-me para o prosseguimento de estudos.	0%	8,33%	91,67%
A Matemática promove o desenvolvimento da minha capacidade de resolução de problemas.	4,17%	16,67%	79,16%
A Matemática promove o desenvolvimento da minha capacidade de raciocínio.	0%	4,17%	95,83%
A Matemática promove o desenvolvimento da minha capacidade de comunicação.	20,83%	41,67%	37,50%

Cerca de 71% dos alunos reconhece a utilidade da Matemática na sua vida quotidiana o que é significativo uma vez que alguns deles têm muitas vezes dificuldades em ver aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos na escola no seu dia-a-dia. A maioria dos alunos (83%) reconhece a importância que a Matemática tem para outras áreas do conhecimento e perto de 92% dos alunos destaca que a Matemática tem influência na sua preparação para o ensino superior.

No que diz respeito a capacidades que possam ser promovidas pela Matemática, a maior parte dos alunos considera que a disciplina os ajuda a ser capaz de resolver problemas (79%) e a desenvolver

o seu raciocínio (96%). No entanto, quando questionados sobre a capacidade de comunicação, as opiniões alteram-se significativamente, visto que cerca de 21% dos alunos discorda que a disciplina de Matemática promove o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação. Esta questão é bastante importante uma vez que me propus a estudar as interações na sala de aula e a forma como as mesmas podem ser promovidas com recurso à tecnologia. Muitos alunos não reconhecem a comunicação como uma das valências da disciplina, reiterando a importância que lhe devo atribuir.

Relativamente ao estudo dos alunos na disciplina de Matemática, a maioria dos alunos declarou ter um estudo regular, enquanto apenas 16,7% estudam menos de 2h semanais (Tabela 2).

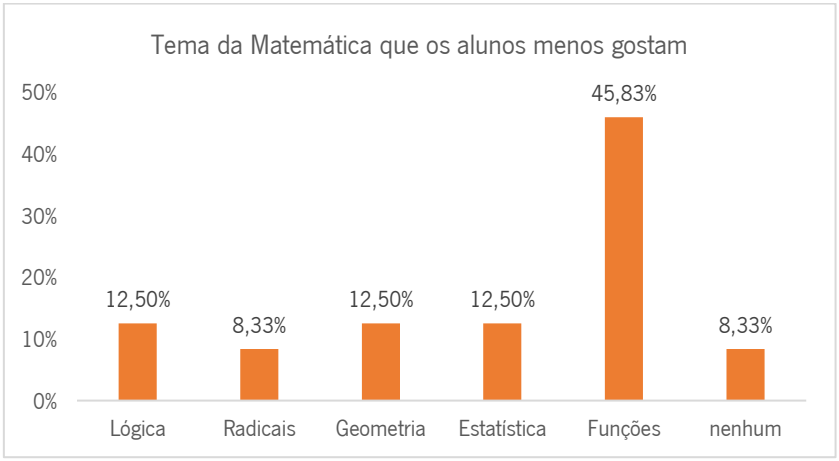
Tabela 2 – Tempo de estudo semanal dedicado a Matemática (%)

Até 2h	Entre 2h e 4h	Entre 4h e 6h	Mais de 6h
16,7%	41,7%	33,3%	8,3%

Nesse estudo, 91,6% dos alunos indicaram que estudavam sozinhos muitas vezes ou mesmo sempre para a disciplina, 20,8% dos alunos afirmou que nunca estudava Matemática com colegas e 62,5% que nunca estudavam com os familiares.

Quando questionados sobre que temas da disciplina gostavam menos, 45,83% dos alunos indicaram o tópico de funções (Figura 7).

Figura 7 – Tema da Matemática que os alunos menos gostam (%)



Entre as justificações apresentadas, os alunos indicam que consideram a matéria "complexa", que é a "menos interessante" e ainda, com presença em maior parte das respostas, que apresentam dificuldades acrescidas neste tema. Ou seja, os alunos identificam o tema como um dos que menos gostam porque simplesmente não o compreendem ou sentem dificuldades na sua aprendizagem. Deste

modo, o facto de os alunos transparecerem esta opinião tornou mais desafiadora a minha intervenção, mas, ao mesmo tempo, mais motivador para conseguir alterar um pouco esta opinião generalizada.

Para perceber a opinião dos alunos sobre várias dinâmicas do funcionamento da sala de aula, questionei-os antes da minha intervenção pedagógica sobre os modos de trabalho na sala de aula, a comunicação que é estabelecida e ainda a utilização de materiais tecnológicos. No que concerne à comunicação e às interações estabelecidas, os alunos demonstraram ter uma opinião muito positiva sobre as suas aulas de matemática (Tabela 3).

Tabela 3 – Opinião dos alunos sobre o funcionamento das aulas de Matemática (%)

	D/DT	NDNC	C/CT
Nas aulas de matemática costumo utilizar materiais tecnológicos para resolver tarefas.	16,67%	33,33%	50,00%
Nas aulas de matemática costumo utilizar materiais tecnológicos para discutir a resolução de tarefas.	16,67%	50,00%	33,33%
As aulas são mais motivadoras quando exploramos materiais tecnológicos na resolução de tarefas.	4,17%	41,67%	54,17%

No que diz respeito à utilização de materiais tecnológicos, as opiniões da turma não foram consensuais. Metade dos alunos concorda que costuma utilizar materiais tecnológicos para resolver tarefas, mas quando questionados sobre a utilização destes materiais para a discussão de resoluções de tarefas apenas 33% concordam. Assim, os alunos reconhecem a utilização destes materiais para resolverem algumas tarefas, mas não para a análise de resoluções ou momentos de discussão. Sobre o facto de os materiais tecnológicos incitarem a sua motivação nas aulas, 54% dos alunos indicou que as aulas se tornam mais motivadoras. Uma vez que pretendia utilizar materiais tecnológicos na minha intervenção pedagógica, esta perspetiva por parte dos alunos permitiu-me perceber que poderia ser um elemento atrativo e que alguns deles não consideravam que os utilizavam para a discussão e análise de tarefas.

Sobre os métodos de trabalho na aula de Matemática, os alunos referiram que preferem resolver tarefas do manual, trabalhar em grupo e discutir resoluções de tarefas em detrimento de atividades como participar na elaboração de definições/propriedades ou receber a matéria por parte do professor. Os alunos indicaram ainda que as aulas se poderiam tornar mais interessantes com a realização de trabalhos de grupo ou a pares, com maior utilização de materiais tecnológicos, com a realização de *quizzes* ou ainda com a diminuição da quantidade de teoria copiada pelos alunos, sendo substituída, por exemplo, por fichas informativas.

3.2. Estratégias de intervenção

O planeamento do ano letivo é um processo complexo e que tem de ter em consideração diferentes fatores como o calendário escolar, o contexto da escola e da turma, entre outros. Este processo de planificação é flexível, incluindo a elaboração numa primeira instância a longo prazo, sendo gerido dentro desse plano inicial. Assim, a planificação deve começar por ser a longo prazo (planificação anual), depois a médio prazo (planificação da unidade temática) e, por fim, a curto prazo (planificação de aula) (Almiro & Nunes, 2009). No planeamento da minha prática pedagógica foi essencial passar pelas três fases de planeamento referidas, mas também analisar fatores como o tipo de ensino a praticar, que tarefas trabalhar com os alunos e de que modo esse trabalho ia ser desenvolvido pelos alunos. Todos esses fatores são essenciais para proceder ao planeamento mais detalhado possível. A minha prática pedagógica supervisionada decorreu como previsto ao longo do domínio das funções e foi pautada por diferentes fases. Numa fase inicial existiu uma delineação global do trabalho a desenvolver para responder às questões definidas no plano de intervenção. Posteriormente, foram analisados os elementos já explicitados e, por fim, procedi a um planeamento detalhado das aulas a lecionar de modo a cumprir todos os objetivos a que me propus. Para além disso, foi necessário planear as estratégias que ia utilizar para avaliar o trabalho desenvolvido com os alunos. Após a análise de diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados, tentei por diversificar os instrumentos utilizados, sendo predominante elementos qualitativos.

3.2.1. Metodologia de ensino e aprendizagem

Durante a realização de um estágio é essencial ter conhecimento da calendarização global que o departamento da disciplina estabeleceu para organizar o calendário da minha intervenção. Assim, no início do ano letivo foi importante perceber quais as intenções da escola no que respeita à calendarização da disciplina de Matemática A para proceder à planificação da minha prática pedagógica supervisionada. Deste modo, num momento mais próximo da minha prática foi possível elaborar um calendário das aulas a lecionar (Anexo III). De modo a planear o trabalho a desenvolver durante o estágio foi necessário debruçar-me sobre quatro dimensões: o ensino exploratório (metodologia de ensino que decidi seguir), as interações, a tecnologia e as tarefas que pretendia trabalhar com os alunos.

Ensino exploratório

Após o processo de planificação global e da calendarização, procedi à elaboração dos planos de aula para as que iria lecionar. O processo de planificar incluiu uma reflexão sobre aquilo que pretendia realizar, de forma a organizar o tempo e o espaço para estruturar o trabalho que queria desenvolver.

Nessa reflexão, cada professor deve definir os conteúdos a abordar, os objetivos a atingir, as experiências de aprendizagem a desenvolver assim como a forma como pode avaliar a aprendizagem dos alunos (Santos et al., 2016). Esta fase de planificação foi muito importante para tomar algumas decisões sobre aquilo que iria desenvolver.

A minha prática pedagógica supervisionada decorreu durante o tema das funções como estava planeado e assentou num ensino com características de ensino exploratório (Ponte, 2005). Segui esta estratégia com a finalidade de os alunos terem um papel ativo no processo de aprendizagem e também que as aulas que preparei integrassem momentos de descoberta e construção de conhecimento para os alunos (Ponte, 2005). Optando por seguir um modelo de ensino exploratório, o discurso do professor passa a ter uma função reguladora e de suporte do discurso dos alunos, que, a par do seu pensamento, assumem um papel principal (Menezes et al., 2014). Uma estratégia de ensino exploratório é, por norma, estruturada em quatro fases: apresentação da tarefa à turma; exploração da tarefa por parte dos alunos; apresentação de resoluções e discussão das mesmas; e, por fim, um momento síntese (Canavarro, 2011).

Na primeira fase, apresentei a tarefa à turma e tentei assegurar que os alunos compreendiam aquilo que era pedido de forma que os mesmos tivessem capacidade de iniciar o seu trabalho sobre o desafio que lhes foi proposto (Menezes et al., 2014). Posteriormente, seguiu-se sempre uma fase de trabalho autónomo dos alunos, onde monitorizei o trabalho que os alunos estavam a desenvolver. Durante esta fase foi também importante ter o cuidado adicional para que as minhas intervenções junto dos alunos não validassem respostas ou raciocínios nem reduzissem o nível cognitivo da tarefa. Esta fase foi a mais exigente para mim uma vez que, para além de orientar os alunos, tentei também analisar e selecionar as resoluções mais pertinentes a ser apresentadas no momento seguinte da aula (Canavarro, 2011).

Na fase de discussão, a turma voltou a trabalhar de forma coletiva e tentei gerir as intervenções e interações dos alunos, primando pelo rigor matemático das exposições apresentadas sempre que possível (Ruthven et al., 2011). Nesta fase, tive como objetivo que os alunos conseguissem aprender conceitos e procedimentos, mas, principalmente, que desenvolvessem a sua capacidade de comunicação matemática (Canavarro, 2011). A fase de síntese foi incluída na fase de discussão, sempre que possível. No entanto, em algumas aulas, não foi possível realizar a síntese no mesmo dia, tendo sido feita no início da aula seguinte.

Interações

Durante a minha intervenção pedagógica tentei manter presentes os ideais do ensino exploratório, existindo sempre uma análise conjunta das tarefas propostas. Durante as aulas lecionadas geri o tempo de aula de forma a permitir que os alunos tivessem tempo suficiente para a fase de exploração da tarefa, criando oportunidade para que o padrão de focalização surgisse em várias intervenções diretas entre mim e os alunos (de forma individual).

Durante todas as fases da aula, desde a análise da tarefa ao momento de síntese, sempre que foi necessário fiz intervenções para que existissem momentos de exposição e sistematização, esclarecendo dúvidas. Estes momentos permitiram, em algumas situações, que surgissem os padrões de focalização e de funil, uma vez que estes momentos emergiram quase sempre de dúvidas dos alunos ou de erros que reparava serem persistentes nas resoluções que estavam a surgir entre os alunos. Conforme defende Ponte (2005), estes momentos não se separam do modo de ensino exploratório e podem, muitas vezes, ser necessários (desde que não sejam regra).

Ao longo da intervenção pedagógica esforcei-me por criar um ambiente na sala de aula que promovesse a aprendizagem de todos os alunos, gerindo as suas participações e interações. Esta gestão exigiu da minha parte a tomada de decisões consecutivas combinando os conhecimentos dos alunos com a sua atividade em aula (Franke et al., 2007). Com o objetivo de promover e explorar as interações na sala de aula, a fase de exploração da tarefa foi muitas vezes pautada por dúvidas dos alunos, dirigidas a mim ou mesmo a outros colegas. Desta forma, os padrões de focalização e funil foram-se repetindo da fase de exploração da tarefa. Sempre que possível, estes momentos foram aproveitados por mim para que se gerasse uma troca de ideias (padrão de discussão) e tentando, quando necessário, encaminhar os alunos sem que lhes fosse indicado diretamente o que deveriam fazer (padrão de focalização).

Na fase de discussão da tarefa procurei regular as interações entre os alunos, incentivando o questionamento dos mesmos para clarificação de alguma resolução apresentada ou para esclarecimento de dúvidas pontuais. Deste modo, foi possível que o padrão de discussão fosse surgindo de uma formal natural. Nesta fase da aula, quase todos os padrões foram surgindo uma vez que existiram questões colocadas pelos alunos mais específicas que foram, em algumas das vezes, esclarecidas de forma mais individual ao aluno em questão. Nestas situações, os padrões de recitação, de extração, de focalização e de funil verificaram-se de forma regular. O meu papel de professora estendeu-se ainda a incentivar a resposta por parte dos alunos a questões dos seus pares (Menezes et al., 2014), um processo mais complexo de implementar na sala de aula. A postura de incentivo ao

questionamento foi uma preocupação constante de modo a promover a participação de todos os alunos ao longo da minha intervenção supervisionada.

Tecnologia

Para adequar a minha prática à turma com a qual estagiei assim como às suas idades e perceções da sociedade atual, percebi desde o início que a exploração das interações na sala de aula não poderia ser dissociada da tecnologia. As tecnologias de informação e comunicação são uma forte ferramenta à disposição das escolas e dos professores, permitindo uma infinidade de possibilidades para a prática dos professores dentro da sala de aula. Estas diversas possibilidades permitiram-me adaptar os meus objetivos assim como os modos de trabalho que implementei com os alunos (Ponte, 2014).

A preocupação começou por tentar decidir que ferramenta tecnológica ia utilizar, mas rapidamente percebi que, mais importante do que as ferramentas escolhidas, era o modo como as ia utilizar na sala de aula (Sampaio & Coutinho, 2015). Por estar a abordar o tema de funções, tornou-se essencial incluir a calculadora gráfica, primeiro porque é um instrumento obrigatório da disciplina e, segundo, porque se torna num elemento extremamente útil no que respeita à representação gráfica e posterior interpretação por parte dos alunos. Como já referido, a calculadora gráfica permite uma exploração de diferentes representações, mas também a análise de situações menos lineares e construção de conjeturas por parte dos alunos (Domingos, 2017; Viseu & Rocha, 2018). Sendo assim, a calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta computacional imprescindível para o decorrer do estágio curricular.

Com o planeamento das minhas aulas percebi que seria importante algo que aliasse a tecnologia à participação dos alunos nas aulas, promovendo as interações ocorridas. Deste modo, optei por tentar aplicar uma metodologia que incluísse um SRI (Sistema de Respostas Interativas) referido anteriormente (secção 2.6.1). Para executar estes momentos em aula poderiam ser utilizadas inúmeras aplicações ou softwares, sendo que as mais utilizadas são as plataformas *Kahoot!*, *Quizizz*, *Socrative* e *Pear Deck* (Venturino & Fernandes-Santos, 2020). A plataforma escolhida for o *Pear Deck* por permitir ligação com o sistema em funcionamento no agrupamento onde decorreu o estágio, por não exigir que os alunos tivessem uma aplicação instalada e por ser uma plataforma intuitiva, onde me pareceu ser possível aprender o seu funcionamento de forma autónoma e aplicar durante as aulas. Esta opção apenas exigiu que todos os alunos tivessem um telemóvel com *internet*, garantindo assim que a atividade planeada podia ocorrer (Anggoro, 2021; Anggoro & Pratiwi, 2023; Liu et al., 2019). O *Pear Deck* permite observar, em tempo real, que alunos estão presentes na apresentação e em que diapositivo se encontram, aumentando assim a potencialidade de interação aluno-professor (Couto et al., 2023).

O *Pear Deck* combina slides com recursos interativos, permitindo explorar de forma imediata as respostas dos alunos, dando ainda um *feedback* imediato aos alunos (Anggoro, 2021). Alguns estudos nos últimos anos têm reforçado as potencialidades da plataforma, referindo que a mesma pode aumentar o envolvimento dos alunos e ainda melhorar o seu desempenho (Anggoro & Pratiwi, 2023; Javed & Odhabi, 2018; Liu et al., 2019). A utilização do *Pear Deck* permite ainda a possibilidade de existir uma aprendizagem ativa, tornando os alunos ainda mais centrais no seu processo de aprendizagem e sendo construtores do sue próprio conhecimento (Anggoro & Pratiwi, 2023; Javed & Odhabi, 2018; Silva & Vanini, 2019).

Motivada pela tipologia de conteúdo que os jovens consomem atualmente, preparei algumas tarefas para fora da sala de aula que consistiram em assistir a pequenos vídeos online e, posteriormente, responder a um conjunto de questões de validação de conhecimento. Estas tarefas foram propostas como momentos de avaliação formativa, permitindo que os alunos tomassem consciência dos seus conhecimentos.

Tarefas

Um outro elemento decisivo na abordagem que quis ter na sala de aula foi a natureza das tarefas que propus aos alunos e a atividade que se desenvolveu a partir das mesmas (Ponte, 2005). Assim, optei desde logo por criar tarefas de raiz, permitindo fomentar a minha criatividade, tornando as tarefas originais e potenciadoras da aprendizagem dos alunos, apropriando-me de forma mais acentuada das aulas que iria conduzir. Esta apropriação relaciona-se com o papel que quero ter enquanto futura professora. O currículo não é estanque nem totalmente planificado, tem uma componente flexível e a sua construção ocorre em função do contexto onde ocorre, assim como dos saberes e atitudes que os intervenientes do processo transportam nas suas ações (Pacheco, 2001). Assim, os professores são parte integral do currículo construído uma vez que o seu trabalho, a sua interpretação e o modo como decidem implementá-lo transforma o currículo que está prescrito no currículo transmitido aos alunos (Sampaio & Coutinho, 2015).

A seleção e criação de algumas tarefas teve como preocupação central desafiar os alunos e propor tarefas diferentes das do manual escolar adotado. De modo que as tarefas fossem mais desafiantes, tentei construir tarefas abertas e de um grau de exigência relativamente elevado (Ponte, 2005). Segundo Ponte (2005), as tarefas podem ser divididas em quatro tipologias: exercícios; problemas; explorações; e de investigação. Assim, as tarefas desenvolvidas tentaram aproximar-se da tipologia de problemas, pois apesar de apresentarem claramente o que é dado e o que é pedido tinham um grau de dificuldade elevado para os alunos.

A elaboração de planos de aula de forma detalhada permitiu-me antecipar dificuldades dos alunos e diferentes estratégias de resolução, decidir os modos de trabalho na sala de aula (Ponte, 2005), aprofundar o domínio dos conteúdos a abordar e ainda trabalhar sobre a dinâmica que queria estabelecer na sala de aula. Optei por variar entre trabalho individual e em grupo, permitindo ainda que, sempre que possível, nos momentos de exploração os alunos trocassem ideias com os seus pares.

Este processo de planificação e antecipação pode ser visto como um guia para as interações com os alunos, transmitindo ao professor uma maior segurança na sua ação pedagógica (Santos et al., 2016). Neste sentido, foi um processo muito vantajoso e traduziu-se numa enorme segurança e certeza daquilo que pretendia implementar.

3.2.2. Estratégias de avaliação da ação pedagógica

A educação é um contexto privilegiado para a avaliação em múltiplas vertentes (Nevo, 2006). Estas vertentes complementam-se e todas são essenciais para uma avaliação global do funcionamento dos processos de ensino e de aprendizagem. Desde a avaliação dos alunos à avaliação de desempenho dos professores, passando ainda pela avaliação das práticas, todas são componentes importantes no contexto educacional (Carvalho & Portugal, 2016). No âmbito da realização da minha prática pedagógica supervisionada, a avaliação da minha prática é de extrema importância para que seja possível fazer uma análise crítica ao trabalho desenvolvido e, com isso, definir prioridades no meu futuro profissional. Neste processo, o objetivo da avaliação é a melhoria das práticas e fazer essa avaliação através das experiências dos intervenientes traz claras vantagens (Carvalho & Portugal, 2016). Assim, para proceder à avaliação da minha prática pedagógica supervisionada optei por fazer recolha de dados através de três técnicas distintas: inquérito; observação; e análise documental.

Quadro 1 – Métodos de recolha de dados para a avaliação da estratégia pedagógica

Técnica	**Instrumento**	**Finalidade**
Inquérito	Questionário	– perceber o acompanhamento do conteúdo por parte dos alunos – recolher as perceções do alunos sobre as tarefas e o decorrer das aulas
Observação	Gravação áudio e vídeo	– recolher informação no exato momento da ação
Análise documental	Produções dos alunos, documentos oficiais e reflexões das aulas	– complementar os outros instrumentos de recolha de dados

Inquérito

A escolha do inquérito como técnica de recolha de dados esteve relacionada com diferentes objetivos a atingir. Dentro desta técnica de recolha de dados, selecionei o questionário como instrumento a aplicar uma vez que é possível aplicar a um grande número de pessoas num curto espaço de tempo (Quivy & Campenhoudt, 1998), permitindo recolher e analisar informação mais facilmente (Traqueia et al., 2021).

A realização de inquéritos por questionário ocorreu em três diferentes momentos: antes, durante e depois da minha intervenção pedagógica. No momento anterior à minha prática pedagógica foi aplicado um questionário para o conhecimento de características da turma (Anexo II) – este instrumento de recolha de dados é especialmente adequado para que se proceda ao conhecimento de uma determinada amostra (Quivy & Campenhoudt, 1998). Construí este questionário dividido em duas partes: numa primeira parte com questões que me permitissem recolher informações biográficas para fazer uma caracterização da turma; e numa segunda parte com questões relativas à opinião dos alunos sobre alguns temas relacionados com a disciplina de Matemática ou às aulas da mesma.

Durante a minha intervenção apliquei quatro questionários: dois com o objetivo de perceber em que medida os alunos estavam a acompanhar os conteúdos que estavam a aprender e outros dois de modo a recolher as suas perceções de determinados momentos em sala de aula (Anexos V e VI). Por fim, para recolher a opinião dos alunos sobre o ensino ministrado durante a minha prática pedagógica procedi a um último inquérito por questionário (Anexo VII).

A utilização do inquérito por questionário pode trazer alguns desafios como o facto de não permitir recolher interpretações muito profundas por parte dos inquiridos (Batista et al., 2021; Quivy & Campenhoudt, 1998) ou exigir um maior cuidado na tipologia de perguntas e na sua construção (Batista et al., 2021). No entanto, este instrumento de recolha de dados possibilita atingir um grande número de pessoas, mantendo o seu anonimato (Gil, 2008). O inquérito por questionário permite um maior controlo da informação uma vez que sendo aplicado indiretamente (sem intervenção do investigador) possibilita uma maior impessoalidade (Batista et al., 2021). O facto de manter o anonimato dos alunos na recolha das respostas aos questionários não permitiu que na avaliação da intervenção pedagógica fosse possível identificar as citações retiradas das respostas dos questionários.

Observação

O método de recolha de dados através da observação é a utilização dos sentidos para obtenção de determinada informação sobre algum aspeto da realidade (Gil, 2008). A observação pode ter diferentes classificações, mas quando o investigador faz parte ativa do processo a ser observado estamos

perante uma observação participante (Gil, 2008). Este tipo de observação consiste na observação da atuação dos participantes e interações entre os mesmos e o meio em que se inserem, sendo o investigador também participante (Traqueia et al., 2021).

No caso concreto da minha prática pedagógica, este método foi suportado pela recolha de gravações áudio e vídeo de todas as aulas ministradas. A escolha de gravação de áudio e vídeo como instrumento de recolha de dados prende-se com o facto de o registo dos comportamentos e acontecimentos ser no exato momento em que ocorrem, traduzindo-se numa maior autenticidade perante registos escritos (Quivy & Campenhoudt, 1998). Deste modo, as gravações traduzem-se em dados fiáveis para o desenvolvimento da análise da prática (Traqueia et al., 2021).

O facto de o método de observação se poder focar em eventos à medida que estes ocorrem, como por exemplo a quantidade de interações entre professor e alunos, a quantidade de interações fora da tarefa e a quantidade de interações em trabalho colaborativo (Cohen et al., 2007), é uma mais-valia para a análise sobre as interações que preciso de elaborar no âmbito do meu estágio. As gravações feitas permitiram rever momentos da prática e ilustrar no relatório alguns desses momentos o mais próximo da realidade possível.

Análise documental

A análise documental como método de recolha de dados implica a análise de dois diferentes tipos de documentos: documentos oficiais e documentos pessoais. Nos documentos oficiais podem estar incluídos documentos como legislação, atas de reuniões, planificações (Traqueia et al., 2021). No caso particular da avaliação da minha prática pedagógica foi necessário ter em consideração os documentos referentes ao programa escolar em vigor para o 10.º ano de escolaridade assim como documentos oficiais da escola como o regulamento interno, as planificações oficiais do ano letivo em que decorreu a prática pedagógica, entre outros.

No que respeita aos documentos pessoais podem ser quaisquer registos, sugeridos ou não pelo investigador, que se revelem importantes para o estudo a realizar (Gil, 2008; Traqueia et al., 2021). Nesse sentido, durante a minha prática pedagógica recolhi várias produções dos alunos para que me fosse possível acompanhar o seu entendimento dos conteúdos que estávamos a abordar. Em situações específicas, essa recolha de informação foi essencial para organizar momentos de análise em grupo turma de tarefas. Os documentos pessoais, apesar de não deverem ser utilizados como fontes de dados para descrição estatística, apresentam um enorme valor para estudos exploratórios e como complemento a outros instrumentos recolhidos (Gil, 2008). Adicionalmente, analisei as reflexões de aula

(RA) realizadas logo após a realização de cada aula, mais à frente referenciadas no trabalho, para que me fosse possível ter um registo mais realista e fidedigno aquando da construção deste relatório.

A aplicação de técnicas e instrumentos de investigação variados permite alguma diversidade da informação recolhida e uma mais fácil adaptação ao contexto de investigação. A complementaridade entre várias técnicas e instrumentos permite ao investigador uma recolha de dados mais vantajosa, diminuindo situações de falta de imparcialidade que podiam surgir com menor diversidade de instrumentos (Traqueia et al., 2021). Ao longo deste relatório todas as informações recolhidas foram alvo de análise: no subcapítulo 3.1. – "Contexto da intervenção pedagógica" foi utilizada a documentação oficial da escola para a caracterização da mesma, assim como foi analisado o inquérito, feito através do questionário inicial, para caracterização da turma. Ao longo do capítulo 4 será utilizada a informação recolhida das outras formas: os questionários que permitiram aos alunos opinar sobre as aulas lecionadas, as produções dos alunos para análise do trabalho que foram desenvolvendo em aula e as gravações das aulas para que fosse possível exemplificar de forma rigorosa as interações desenvolvidas.

CAPÍTULO 4

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

A prática profissional é um elemento fundamental na formação do professor (Ponte, 2014). No caso da formação inicial, é essencial o contacto com a prática para que o futuro professor possa formar uma conceção mais concreta da realidade escolar. No meu caso, considero que foi deveras relevante vivenciar diferentes componentes da prática profissional de modo a uma preparação mais consistente com a realidade da profissão. Durante a intervenção pedagógica procurei ser metódica e planificar todas as aulas com detalhe, selecionando as tarefas que considerei mais adequadas assim como o formato de ensino a utilizar. Um planeamento detalhado com a antecipação das dificuldades dos alunos e a seleção das tarefas a propor traduz-se em segurança e profissionalismo dentro da sala de aula, principalmente no caso de um professor estagiário, tal como defendem Ponte et al. (2015): "Quanto mais detalhado for o plano de aula, quanto mais pensado e refletido for o trabalho de preparação, maior capacidade terá o professor de ajustar esse plano em função dos acontecimentos e mesmo de improvisar" (p. 34). Assim, elaborei planos de aula tendo como finalidade preparar-me o melhor possível para qualquer situação no momento da ação pedagógica. Adicionalmente, foi essencial após cada momento de ação fazer uma reflexão para identificar situações passíveis de melhorar a minha prática docente. Deste modo, os processos de tomada de decisão, planeamento, ação e reflexão foram cíclicos e essenciais para tentar evoluir (Figura 8).

Figura 8 – Fases da intervenção pedagógica



Com recurso a este conjunto de processos de forma cíclica foi possível preparar toda a intervenção pedagógica e gerir as 17 aulas de 90 minutos (Quadro 2) onde lecionei conteúdos do domínio de funções do 10.º de escolaridade – função quadrática, funções definidas por ramos e função módulo. Algumas aulas decorreram em regime online devido ao facto de nos encontrarmos ainda com algumas restrições devido à pandemia provocada pela COVID-19.

Quadro 2 - Síntese dos conteúdos da intervenção pedagógica

Aula	Conteúdos lecionados
1 (online)	Introdução ao estudo da função quadrática. Funções quadráticas definidas por $y = a(x-h)^2, a \neq 0$.
2 (online)	Resolução de tarefas sobre funções quadráticas definidas por $y = a(x-h)^2, a \neq 0$.
3	Função quadrática – forma completa: $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$.
4	Tarefas sobre função quadrática.
5	Função quadrática – forma canónica. Vértice de uma parábola.
6	Tarefas sobre função quadrática.
7	Inequações de 2.º grau.
8	Exercícios sobre inequações de 2.º grau. Problemas envolvendo a função quadrática.
9	Problemas envolvendo a função quadrática – atribuição da tarefa "As redes sociais"
10	Problemas envolvendo a função quadrática – tarefa "As redes sociais".
11	Problemas envolvendo a função quadrática. Função definida por ramos.
12	Resolução de tarefas sobre função por ramos.
13	Introdução à função módulo.
14	Funções do tipo $f(x) = a\|x-b\| + c, a \neq 0$.
15	Equações com módulo.
16	Problemas envolvendo a função módulo.
17	Inequações com módulos.

Durante estas aulas introduzi materiais tecnológicos conforme planeado, tanto em sala de aula (*slides* interativos através do *Pear Deck* e calculadora gráfica) como fora da sala de aula para complemento das aulas (visualização de vídeos e questionários online), de modo a concretizar o objetivo delineado. Das 17 aulas que lecionei, é apresentada e analisada a informação que ilustra os momentos mais relevantes da minha intervenção pedagógica de modo a averiguar o contributo da tecnologia na promoção das interações na sala de aula na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. Os momentos selecionados para análise são referentes aos tópicos: resolução de problemas envolvendo a função quadrática, a introdução da função módulo e ainda a resolução de problemas envolvendo a função módulo. Desta forma, este quarto capítulo está dividido em quatro secções, sendo as três primeiras referentes à análise e reflexão da minha intervenção pedagógica e a última uma análise da mesma à luz das considerações dos alunos da turma de estágio, analisando as suas perceções relativas ao contributo da tecnologia para as interações decorridas na sala de aula.

4.1. Problemas envolvendo a função quadrática

A aula aqui analisada incidiu sobre a resolução de problemas envolvendo a função quadrática em contexto real, tópico incluído no programa de Matemática A de 10.º ano (Ministério da Educação, 2018d). A tarefa criada para esta aula teve como finalidade a exploração de funções quadráticas e afins por parte dos alunos e consequente interpretação dos resultados obtidos no estudo dessas mesmas funções no contexto apresentado. Pretendi assim que os alunos fossem capazes de interpretar diferentes situações, com contextos distintos, atribuindo significado aos resultados encontrados.

4.1.1. A tarefa 'As redes sociais'

Para os alunos explorarem a função quadrática criei uma tarefa com uma temática que considerei de interesse dos alunos – as redes sociais – para os incentivar a empenharem-se na resolução da mesma. Uma vez que a tarefa construída era trabalhosa optei por entregar e ler juntamente com os alunos a tarefa proposta na aula anterior à exploração em aula:

As redes sociais

A Filomena é uma fã de redes sociais e tem conta nas redes sociais principais. A partir do momento em que cada perfil é criado, o número de seguidores, em milhares, da Filomena nas redes sociais *Facebook*, *Instagram* e *Tiktok*, num determinado mês, coincide, respetivamente, com o valor das funções f, i e k definidas por:

$$f(t) = -0{,}1t^2 + 4{,}4t + 389;\ i(t) = 0{,}06t^2 - 5;\ k(t) = 13t - 626.$$

Considera que t varia de 0 a 75, sendo dado em meses desde janeiro de 2015. Por exemplo:

- $t = 1$ corresponde a janeiro de 2015
- $t = 24$ corresponde a dezembro de 2016
- $t = 75$ corresponde a março de 2021.

No contexto do problema, considera que o domínio de cada função é um subconjunto de 0 a 75.
Resolve as questões seguintes da forma que consideres mais adequada. Sempre que necessário, o número de seguidores (em milhares) deve ser arredondado às décimas.

1. Qual o máximo de seguidores que a Filomena teve no *Facebook* entre 2015 e 2021?
2. Quando é que a Filomena criou conta no Instagram e no Tiktok? Indiquem o mês e o ano.
3. Em que mês (e ano) o número de seguidores no *Instagram* da Filomena ultrapassou os seguidores do *Facebook*?
4. Atualmente qual é a rede social em que a Filomena tem mais seguidores? Desde quando é que isso ocorre?
5. Determina quando é que o número de seguidores do Facebook da Filomena foi superior a 400 mil seguidores.
6. Considera a função constante n definida pelo número de seguidores que a Filomena tinha no dia em que o número de seguidores do *Facebook* e do *Tiktok* se igualaram.
   Os gráficos das funções n e k delimitam uma figura geométrica no plano, contida no 1.º quadrante. Identifica-a e define-a por uma condição, incluindo a fronteira.
7. Quando é que a soma dos seguidores do *Instagram* e do *Tiktok* ultrapassou o número de seguidores que a Filomena tinha no *Facebook*?
8. A marca XPTO fez uma proposta à Filomena para um patrocínio. Para ela ter acesso a esse contrato terá de ter, no total, 500 mil seguidores em todas as suas redes sociais. A Filomena conseguiu fechar esse contrato com a marca XPTO? Justifica.

Depois da leitura da tarefa em conjunto os alunos resolveram-na em grupos de trabalho, com as devidas restrições que a pandemia exigia. A tarefa construída tinha como objetivo despertar a necessidade e a curiosidade dos alunos em utilizar a calculadora gráfica. No entanto, apesar de ser essa a intenção, deixei ao critério dos alunos o método de resolução utilizado, possibilitando uma maior diversidade de resoluções. Assim, em aula foi possível confrontar as diferentes resoluções dos grupos, promovendo momentos de discussão coletiva e fomentando a comunicação entre os alunos.

No fim de resolvermos e analisarmos todas as questões, já numa aula seguinte, procedemos a um momento de síntese onde os alunos puderam apontar quais as características mais comuns do estudo de uma função que são necessárias para a resolução de problemas que modelam situações de contextos reais (por exemplo os extremos, os zeros da função, etc.). Posteriormente, os alunos responderam a um questionário sobre a realização da tarefa "As redes sociais" de forma a perceber se a mesma lhes tinha suscitado interesse e se se tinha revelado importante para a aquisição e reforço de conceitos sobre funções, em particular sobre as funções quadráticas.

4.1.2. Resoluções, dificuldades e potencialidades dos alunos

Para os alunos realizarem esta tarefa, propus-lhes a resolução em grupos. Os alunos realizaram a tarefa e enviaram-me as suas resoluções para que eu as analisasse antes da aula em que iríamos explorar a tarefa. Pelas resoluções apresentadas, considero que a resolução em grupo foi uma opção adequada uma vez que dentro de cada grupo os alunos com mais dificuldades foram apoiados pelos restantes. Isto confirmou-se através da opinião de alguns alunos sobre a tarefa realizada, como exemplificam as seguintes afirmações de diferentes alunos: "Confusa, difícil, mas muito desafiante"; "Ao princípio achei difícil, mas com o desenrolar das alíneas tornou-se fácil, e o facto de ser em grupo ajudou".

A temática das redes sociais na tarefa é atual e muito presente na vida dos alunos pelo que os motivou. Esta situação confirma-se através da opinião de alguns alunos sobre a tarefa: "Gostei bastante, misturou as redes sociais que são bastante utilizadas no dia a dia com a matéria das funções o que também ajudou na motivação na sua resolução e ajudou no melhoramento de resolução de problemas"; "Foi um trabalho que nos permitiu melhorar as nossas capacidades nas funções abordando um tema bastante atual nas nossas vidas".

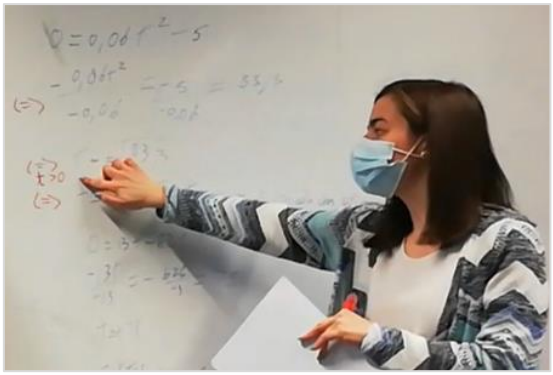
Na aula analisada, foi feita uma nova leitura da tarefa para toda a turma e foram recolhidas as informações essenciais do enunciado. Posteriormente, os grupos selecionados apresentaram à turma as suas resoluções. Em cada momento fez-se uma análise em grupo turma das diferentes resoluções

apresentadas assim como a possível resolução com a calculadora gráfica. Durante as participações dos alunos intervim sempre que considerei necessário para fazer alguma correção ou esclarecer alguma dúvida. Na resolução da questão 7 da tarefa, um aluno teve dificuldades em perceber porque é que identificamos o momento em que as funções eram iguais, quando queríamos perceber quando é que uma delas passou a ser superior à outra.

Aluno A21: 'Stora?
Professora: Sim...
Aluno A21: Mas no $t = 65$ as funções... o Instagram e o Facebook têm o mesmo número de seguidores.
Professora: Verdade! Neste ponto têm o mesmo número, mas aqui pergunta quando é que ultrapassa e foi neste dia que o Instagram passou a ser superior ao Facebook.
Aluno A21: Ah!

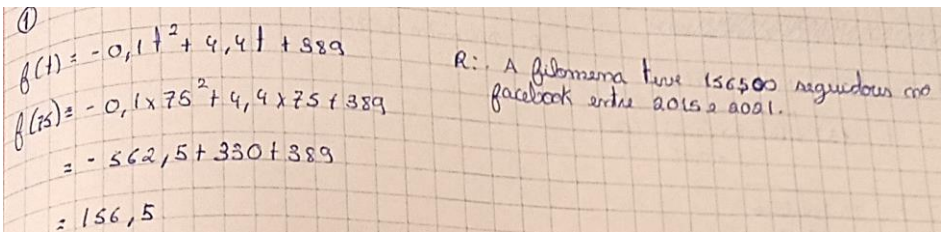
Outro exemplo em que intervim, para fazer ajustes na resolução de um aluno, está explícito na Figura 9 uma vez que na resolução exposta no quadro o aluno não teve rigor na escrita matemática pelo que foi necessária a minha intervenção para fazer pequenas correções, mas que considero essenciais estarem presentes numa resolução escrita.

Figura 9 – Anotações feitas por mim durante a intervenção de um aluno



Das várias resoluções entregues destaco as mais relevantes. Na primeira questão em que os alunos tinham de obter o número máximo de seguidores do *Facebook*, dois grupos calcularam o máximo de seguidores tendo em conta o maior valor do domínio da função, como exemplifica a resolução do grupo G3 (Figura 10).

Figura 10 – Resolução errada da questão 1 do grupo G3



O grupo G3 não teve em consideração o facto da função não ser sempre crescente, considerando que o número de seguidores é maior no momento final. Deste modo, optei que um dos grupos que apresentou este raciocínio apresentasse a sua resolução no momento de discussão.

Na proposta de resolução do grupo G6, as questões "Em que mês (e ano) o número de seguidores no *Instagram* da Filomena ultrapassou os seguidores do *Facebook*?" e "Atualmente qual é a rede social em que a Filomena tem mais seguidores? Desde quando é que isso ocorre?" foram respondidas utilizando a calculadora gráfica. Esta opção surpreendeu-me pela positiva uma vez que o trabalho com a calculadora gráfica estava ainda a ser iniciado com os alunos nesta fase. No entanto, na resposta do grupo não existia qualquer representação gráfica, apenas uma descrição do processo.

Figura 11 – Resolução da questão 3 do grupo G6 com calculadora

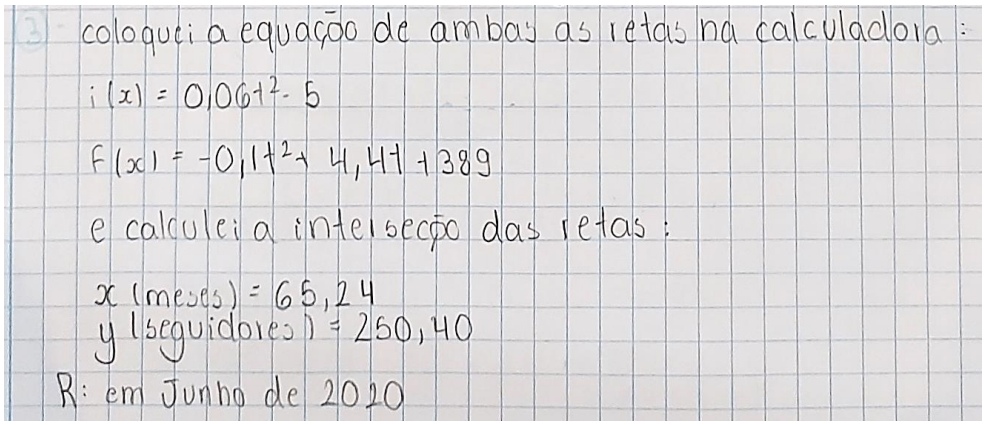
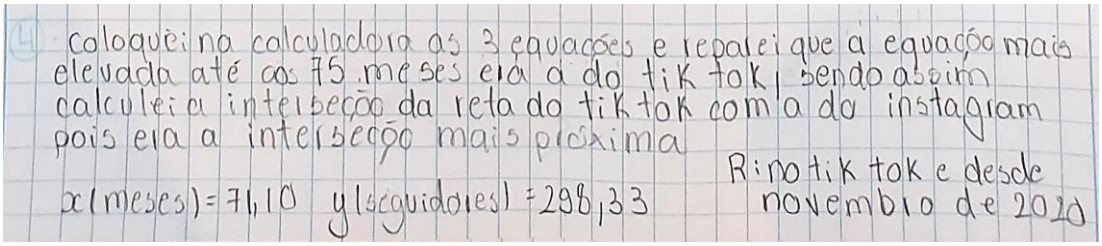


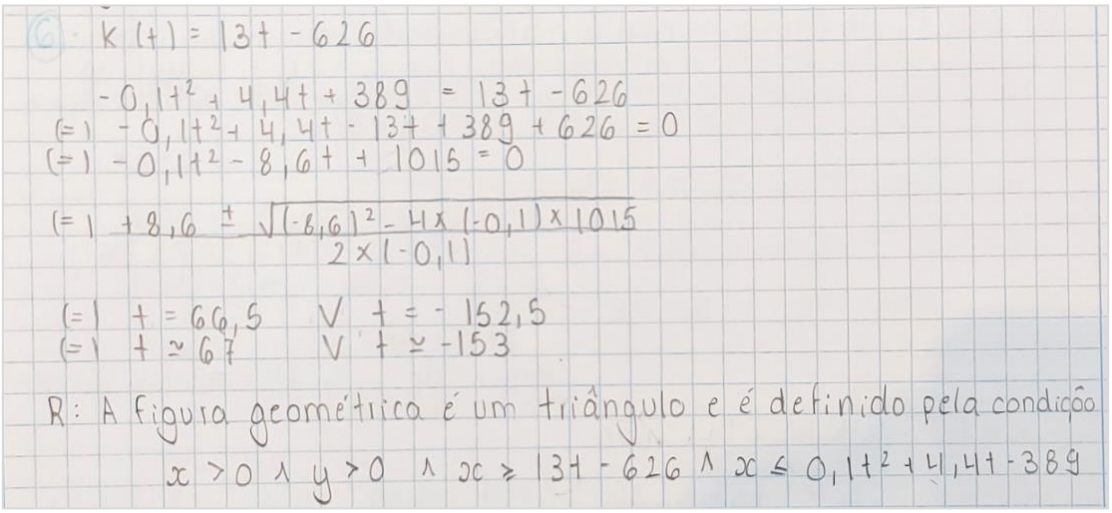
Figura 12 – Resolução da questão 4 do grupo G6 com calculadora



Apesar de não terem apresentado a representação gráfica que encontraram na calculadora gráfica, o grupo foi desafiado a fazer essa representação na aula para que os restantes alunos pudessem perceber de que forma poderiam ter resolvido usando a calculadora gráfica. A resolução apresentada pelo grupo G6 (Figura 11) para a questão 3 refere que os dois gráficos são "retas", apesar de não o serem. No entanto, os alunos procederam à interseção dos gráficos na calculadora, indicando a abcissa e a ordenada do ponto de interseção. A resolução da questão 4 apresentada também pelo grupo G6 refere a palavra "equações" em vez de "funções" e demonstra uma resolução bastante intuitiva pela observação dos gráficos que obtiveram na calculadora.

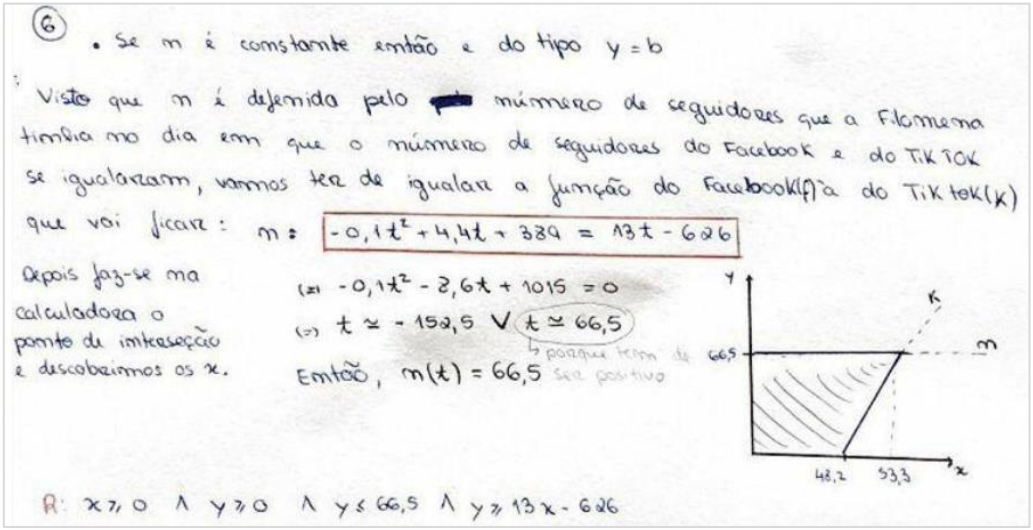
Interligando com o domínio de geometria, os alunos tinham de responder a uma questão sobre uma região definida no plano. Vários grupos apresentaram respostas erradas. Um dos grupos identificou uma região delimitada numa das suas fronteiras por parte do gráfico de uma função quadrática como um triângulo (Figura 13).

Figura 13 – Resolução errada da questão 6 pelo grupo G6



Outros grupos consideraram a condição exigida no enunciado para definir a função constante necessária, mas depois de obterem o valor da variável independente (tempo) não calcularam o valor correspondente da variável dependente que seria o valor que definiria a função constante, como exemplifica a resolução do grupo G7 (Figura 14).

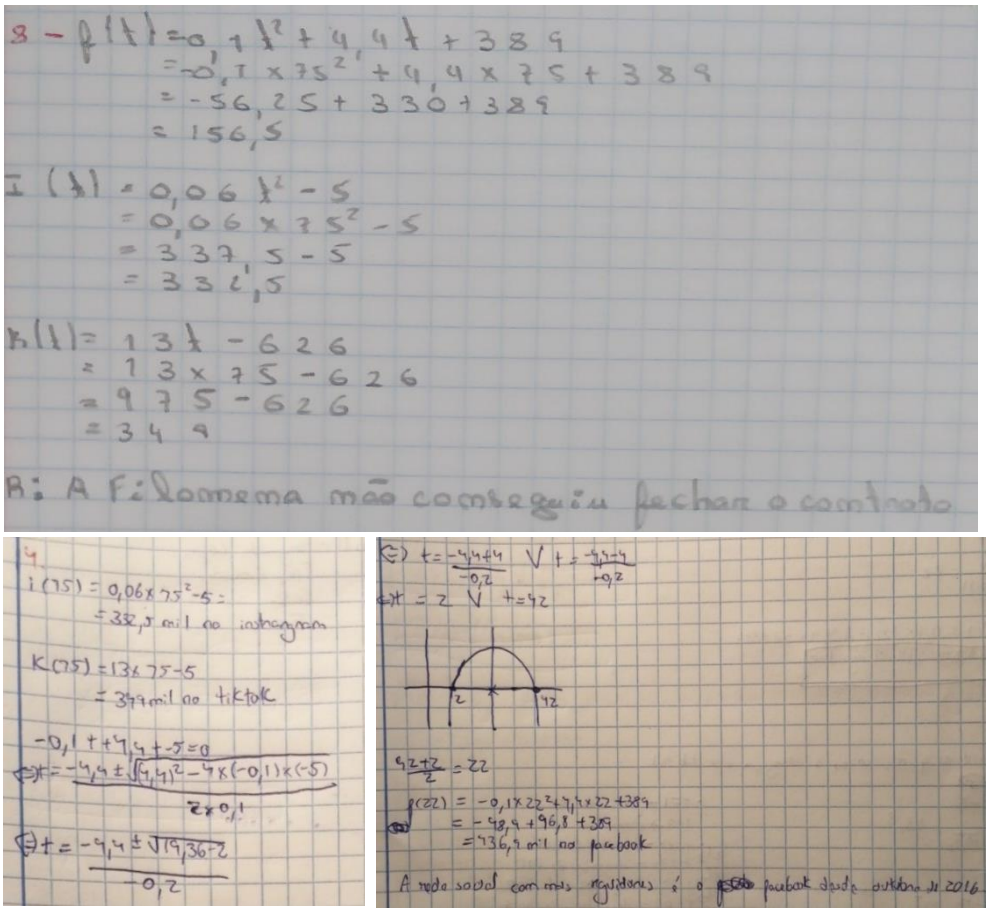
Figura 14 – Resolução quase correta da questão 6 pelo grupo G7



Todas as situações menos bem conseguidas pelos alunos (por exemplo, as resoluções expostas na Figura 10, Figura 13 e Figura 14) foram exploradas no momento de discussão para que os alunos se fossem apercebendo dos seus erros e fossem corrigindo a informação nos seus registos.

Relativamente às dificuldades dos alunos, algumas delas deveram-se à interpretação e à relação da informação retirada do contexto do problema com a análise analítica necessária para conseguir responder às questões, como exemplificam as resoluções do grupo G1 e do grupo G4 (Figura 15).

Figura 15 – Resoluções erradas da questão 8 pelo grupo G1 e da questão 4 pelo grupo G4.



Na resolução do grupo G1, os alunos não conseguiram perceber que para responder à questão 8 era necessário recorrer à função soma das três funções dadas. Pela interpretação que os alunos fizeram teriam apenas de avaliar o número de seguidores de cada uma das redes sociais no instante correspondente ao último mês do domínio. Na resolução do grupo G4, os alunos assumiram que a rede social que tinha mais seguidores era o *Facebook* porque consideraram que o número de seguidores máximo atingido era igual a número de seguidores atual. As duas situações apresentadas traduzem a má interpretação da informação e consequente aplicação no contexto apresentado.

Considerando que as respostas dadas pelos alunos recorreram quase na totalidade a uma representação algébrica, é possível inferir que, na maioria, os alunos não utilizaram a calculadora gráfica

para resolver a tarefa. Deste facto depreende-se que muitos alunos ainda não estavam confortáveis com a sua utilização tendo ainda bastantes dificuldades até esta aula. Como estas dificuldades tinham já sido previstas aquando da identificação de possíveis constrangimentos, foram delineadas estratégias de forma antecipada a explorar essas situações em aula.

4.1.3. Tecnologia

Ponte et al. (1997) defendem que o sucesso do processo de ensino e de aprendizagem depende da comunicação entre os diferentes sujeitos bem como da diversificação dos suportes utilizados. Deste modo, a tarefa foi construída com o objetivo de os alunos sentirem necessidade de utilizar a calculadora gráfica. Apesar de os alunos ainda não terem o hábito da utilização frequente da calculadora, alguns reconheceram que depois desta aula se sentiam mais à vontade com a sua utilização como exemplificam as afirmações seguintes: "Consegui aprofundar os meus conhecimentos sobre como utilizar a calculadora gráfica"; "Estou mais à vontade para resolver exercícios com a calculadora gráfica". A calculadora gráfica é um material didático tecnológico obrigatório na disciplina de Matemática A do ensino secundário. Assim, a sua utilização na sala de aula é essencial, proporcionando um maior envolvimento por parte dos alunos (NCTM, 2007), um dos maiores objetivos para que se construa uma aula dinâmica e com as suas intervenções.

Do questionário realizado sobre a tarefa "As redes sociais", foi possível perceber, apesar de maior parte dos alunos ainda não se sentir muito familiarizada com a calculadora gráfica, a maioria dos alunos (75%) reconheceu que a resolução gráfica (através da calculadora gráfica) era melhor do que a resolução analítica. Os alunos reconheceram na resolução gráfica características como a facilidade, a rapidez e a simplicidade. Quando questionados sobre o facto desta aula ter potenciado melhorias no manuseamento da calculadora, a maior parte dos alunos (83%) reconheceu que o desenrolar na análise da tarefa permitiu melhorias na utilização da calculadora gráfica.

Tabela 4 - Opinião dos alunos sobre a tarefa "As redes sociais"

Resolução analítica vs resolução gráfica		Melhorias na utilização da calculadora?	
Analítica	Gráfica	Sim	Não
25%	75%	83%	17%

Apesar de apenas um grupo ter apresentado algumas resoluções com a calculadora gráfica, a mesma foi explorada ao longo de toda a aula para que os alunos pudessem relacionar a resolução analítica com a resolução gráfica, promovendo uma maior atividade e envolvimento dos alunos. No

questionário realizado sobre a realização desta tarefa alguns alunos reconheceram que a resolução da calculadora era mais rápida – "É mais fácil resolver na calculadora gráfica porque ao visualizarmos o gráfico o nosso raciocínio é mais rápido", e mais práticas – "As estratégias utilizando a calculadora gráfica são muito mais práticas". Existiu ainda um aluno que reconheceu uma função muito importante à calculadora: a de confirmação, ou seja, muitas vezes as tarefas exigem que os alunos as resolvam de forma analítica e, caso os alunos trabalhem bem com a calculadora podem tirar grande proveito para a confirmação de resultados – "Para já prefiro fazer analiticamente, mas com a prática pode ser que me habitue a fazer pela calculadora. Mas uma boa estratégia é fazer analiticamente e depois confirmar na calculadora gráfica".

4.1.4. Interações

A comunicação é essencial para a Matemática em si e para a educação matemática (NCTM, 2007). Para além da comunicação em si, é necessário que o foco da mesma na sala de aula seja o discurso partilhado e não o discurso unidirecional por parte do professor, sendo possível a construção de significados de um modo interativo (Ponte & Serrazina, 2004). Deste modo, a discussão em grupo turma das diferentes resoluções e exploração da calculadora gráfica teve como objetivo fomentar a intervenção dos alunos e permitir um maior número de interações entre os próprios alunos.

Para analisar de forma mais objetiva as interações desenvolvidas durante a aula, torna-se essencial tentar identificar padrões de interação – regularidades que são interactivamente constituídas pelo professor e pelos alunos (Voigt, 1995). De um modo geral, na aula encontram-se retratados momentos de interação de discurso bidirecional, não existindo apenas discurso no sentido professor-aluno.

Segundo Voigt (1995), o padrão de discussão contempla as seguintes fases: (i) os alunos resolvem uma tarefa proposta pelo professor; (ii) um aluno apresenta e explica o processo e a solução obtida a toda a turma; (iii) o professor questiona os alunos de forma a clarificar a explicação do aluno e a esclarecer melhor determinados aspetos, para que surja uma explicação aceite por todos; (iv) o professor questiona os restantes acerca de soluções alternativas, recomeçando o processo de discussão. Este padrão foi o que geriu a base da aula, onde os alunos foram chamados a expor o seu processo de resolução, sendo depois estendido aos restantes alunos e confrontado com outros processos. No entanto, apesar de este ser o padrão de interação base de toda a aula, existiu pouca participação por parte dos alunos, não tornando a discussão tão rica como seria de desejar. Importa perceber que

padrões prevalecem nas interações mais curtas que decorrem ao longo de toda a aula. Logo no início da aula surgiu o padrão de recitação (Menezes, 2005):

Professora: Quando fizeram a leitura deste enunciado, quais foram os dados mais importantes que vocês recolheram ou fixaram para depois vos ajudar a fazer as perguntas todas que eu vos propus?
Aluno A4: As equações.
Aluno A16: As funções.
Professora: Ok, as funções... (enquanto escreve no quadro as expressões algébricas)
Professora: E para além das funções o que tínhamos mais?
Aluno A21: As datas.
Professora: O que é que queres dizer com isso das datas?
Aluno A21: Por exemplo o $t = 1$ significa janeiro de 2015.
Professora: Estás a falar da variável t certo?
Aluno A21: Sim.
Professora: Então podemos pôr aqui a variável t... A variável t variava entre que valores?
Aluno A21: 0 e 75.

Neste diálogo percebe-se que optei por ignorar a intervenção em que um aluno referiu "as equações" por não ser a informação importante para aquele momento. Neste padrão, uma das características prende-se com controlar o discurso, contornar e ignorar algumas respostas, orientando o discurso, pois o produto tem mais importância do que o processo.

Ao longo da aula existiram momentos que refletem os diferentes padrões de interação. Assim, selecionei dois momentos em que está presente o padrão de extração (Menezes et al., 2014; Voigt, 1985), onde, perante dificuldades dos alunos, orientei as respostas dos alunos com questões simples, extraindo pequenas parcelas de conhecimento.

Professora: Deixa ver se percebo o que estás a dizer. Consideraste que a nossa variável t era de 0 a 75 e o número de seguidores máximo seria $f(75)$.
Aluno A10: Sim...
Professora: Concordam com este pensamento?
Vários alunos: Não.
Professora: Porquê?
Vários alunos respondem, mas uma aluna diz:
Aluno A4: Porque o gráfico é uma parábola.
Professora: O aluno A4 está a dizer que o gráfico desta função é uma parábola e, se é uma parábola... Tem a concavidade quê?
Vários alunos: Para baixo.

Neste trecho, tentei que a turma reagisse a um pensamento errado transmitido na resolução exposta de um grupo. Com a reação dos alunos, foi possível tentar extrair alguma informação que justificasse a posição deles perante a resposta errada.

Outro momento em que o padrão de extração se verifica está relacionado com uma resolução não exposta no quadro. Assim, quando exploramos essa questão aproveitei para questionar o grupo para que transmitisse aos restantes alunos a opção que tinham tomado e porque tinha sido vantajosa:

Professora: O grupo G5 fez a comparação... fez exatamente o mesmo processo inicial, mas depois aqui só comparou com o *Instagram*. Porquê?
Aluno A23: Porque já sabíamos que o *Facebook* não ia ser maior.
Professora: E porque é que sabíamos isso?
Aluno A16: Nós no exercício anterior já tínhamos calculado quando é que ultrapassava o *Facebook*.

Para além dos padrões já identificados, durante a aula surgem vários momentos onde se pode identificar o padrão de funil (Menezes, 2005; Menezes et al., 2014; Voigt, 1985) onde, perante algumas dificuldades dos alunos em responder às minhas questões, os ajudei passo-a-passo a chegar à resposta pretendida. Uma das situações onde este padrão esteve presente está relacionada com a utilização da calculadora gráfica:

Aluno A8: Nós na função temos de pôr a primeira ou a de baixo? Com menos 11 ou mais 389?
Professora: Depende como é que vais fazer. O que é que queres ir fazer na calculadora? O que quero descobrir quando é que o $f(t) > 400$. Isto é o problema que eu quero resolver, certo?
Aluno A8: Sim.
Professora: E agora tu tens de arranjar uma estratégia na calculadora para resolver isto. Como é que vais fazer?
Aluno A8: Não sei.
Professora: Bora lá pensar! Já tenho a função inserida?
Aluno A8: Já está.
Professora: E agora como é que eu vou ver quais são os valores que estão acima de 400?
Aluno A8: Tenho que inserir outra função certo?
Professora: Que outra função?
Aluno A8: $y = 400$.
Professora: Inserir uma função $y = 400$ é uma opção sim senhora.
Aluno A8: Ah... E agora é só ver as interseções?

Outro episódio em que surgiu o padrão de funil foi na exploração de uma questão relacionada com uma região no plano. No momento da exploração da resolução desta questão selecionei um grupo que tinha um erro cometido por vários grupos para ir resolver ao quadro. Em determinado momento, foi necessário "afunilar" o raciocínio da turma para contornar o entendimento errado de muitos alunos.

Professora:	Depende como é que vais fazer. O que é que queres ir fazer na calculadora? O que quero descobrir quando é que o $f(t) > 400$. Isto é o problema que eu quero resolver, certo?
(Vários alunos dizem "bem" e vários alunos dizem "mal")	
(...)	
Professora:	Aluno A21 qual é a tua função n? Já chegamos a essa conclusão?
Aluno A21:	Não podíamos usar este valor porque era negativo, tínhamos de usar este que arredondado era 67 e a função constante era $y = 67$.
Professora:	Então $n(t) = 67$, escreve lá aí... Vejam lá se toda a gente concorda com esta função constante?
(...)	
Professora:	O 67 é o valor do quê?
Aluno A8:	Do gráfico.
Aluno A3:	Do x.
Professora:	Do x. E a função constante é definida por quê?
Aluno A3:	y igual a qualquer coisa
Professora:	Considera a função constante n definida pelo número de seguidores que a Filomena tinha no dia em que eles se igualaram. Então? Isto é o momento em que elas se igualaram, é o número de seguidores?
Vários alunos:	Não, é o mês...
Aluno A4:	Podemos substituir isso numa das funções acima.

Durante a aula analisada, o padrão de interação que menos ocorre é o padrão de focalização. Este padrão resulta de respostas por parte do professor perante dificuldades evidenciadas pelos alunos, implicando que, após a superação da dificuldade, o aluno prossiga autonomamente com o seu processo de resolução (Menezes et al., 2014). No entanto, como a tarefa já tinha sido resolvida previamente, este padrão só poderia surgir em situações muito específicas da aula.

Da análise desta aula fica patente que os diferentes padrões de interação vão surgindo naturalmente no decorrer da aula. No entanto, o padrão de interação mais comum foi o padrão de funil que teve como objetivo encaminhar os alunos para determinada resposta sendo eu, enquanto professora, a orientar o raciocínio a seguir. Pela análise das minhas ações (RA1), constata-se que procurei promover este padrão quando nenhum aluno na turma manifestou saber como construir o raciocínio naquele momento.

4.1.5. Análise global

De um modo geral, a aula decorreu dentro das minhas expectativas (RA1). O objetivo principal da aula foi atingido, isto é, os alunos foram capazes de fazer a interpretação da tarefa que trabalharam em grupo e utilizar o estudo de funções quadráticas para analisar a situação em contexto real apresentada. O atingimento deste objetivo pode ser validado pelo facto de todos os grupos terem realizado a tarefa de forma consistente e, apesar de apresentarem algumas resoluções com erros, apresentaram raciocínios bem explorados e justificados. Reforçando esta minha perceção, no questionário sobre esta tarefa e esta aula dois alunos referiram que "Foi um trabalho que nos permitiu melhorar as nossas capacidades nas funções (...)." e que "(...) ajudou no melhoramento de resolução de problemas".

No entanto, existiu uma situação que não correspondeu ao esperado: a participação dos alunos. Apesar de a aula ter decorrido de forma tranquila e com a participação dos alunos a expor as suas resoluções, a maior parte dos alunos demonstrou muitas dificuldades em expressar oralmente as suas ideias. Dos diálogos que ocorreram durante a aula é possível detetar diferentes padrões de interação, mas se a participação dos alunos fosse superior, poderia ser bem mais abundante em situações interessantes de analisar. Apesar disso, para tentar melhorar a participação por parte dos alunos, vou tentar trabalhar a colocação de perguntas mais abertas para construir com os alunos momentos mais ativos na aula.

A gestão do tempo durante esta aula foi muito bem conseguida, apesar de não ter terminado a exploração da tarefa, o que já estava planeado acontecer. Uma das coisas mais bem conseguidas da aula foi a forte exploração da calculadora gráfica, o que gerou uma diversidade de representações muito interessante. O incentivo à utilização da calculadora gráfica promoveu um pouco a interação entre os alunos para conseguirem executar os comandos necessários para resolver as questões. Esta sensação foi confirmada por alguns alunos no questionário feito após esta aula: "a calculadora gráfica influenciou bem a aula pois deu para interagir uns com os outros sobre a sua utilização e a resolução de exercícios" e "Alguns alunos ainda têm dificuldades a usá-la por isso acho que os alunos com mais facilidade ajudam mais os alunos com dificuldades na utilização da calculadora.".

A utilização de elementos tecnológicos, neste caso a calculadora, transporta a propensão de efetivamente promover as interações na sala de aula e penso que em parte isso foi conseguido – "Houve uma colaboração acrescentada entre o aluno e o professor e uma entreajuda entre os colegas para conseguirmos resolver os exercícios". No questionário realizado, cerca de 67% dos alunos indicou que a calculadora gráfica tinha dinamizado a aula, promovendo as interações na sala de aula. Desta forma,

apesar de a participação dos alunos ter sido menor do que aquela que seria de esperar, podemos concluir que a calculadora permitiu melhorar um pouco esta situação.

No entanto, nas aulas seguintes tentei que existissem diferentes momentos para que as aulas fossem mais dinâmicas com o propósito de os alunos se envolverem mais no desenvolvimento da própria aula e das atividades que realizam (RA1). Desta forma, o recurso a outros elementos tecnológicos foi essencial para planear as aulas seguintes de modo a promover um maior número de interações.

4.2. Introdução à função módulo

Na aula analisada nesta secção introduzi o conceito de função módulo, conceito incluído no programa de Matemática A de 10.º ano (Ministério da Educação, 2018d), através da função definida por ramos já estudada pelos alunos. Através da exploração da tarefa que lhes propus pretendi que fossem capazes de inferir o conceito de função módulo através da interligação de conhecimentos anteriores. Em seguida, com o estudo da função módulo, pretendi que os alunos fossem capazes de reconhecer, interpretar e representar graficamente a função módulo.

4.2.1. Tarefa 'Da função definida por ramos à função módulo'

A aula conduzida teve como objetivo introduzir o conceito da função módulo e o mesmo foi introduzido aos alunos a partir do conceito de função definida por ramos estudada em aulas anteriores. Para isso, criei uma ficha orientada onde fosse possível ir construindo o novo conceito de forma faseada e direcionada. A ficha orientada "Da função definida por ramos à função módulo", dividida em duas partes, foi construída para que os alunos fossem identificando características das funções apresentadas e, ao longo da aula, atribuíssem significado ao que estavam a realizar, construindo novo conhecimento.

A introdução da tarefa foi feita no início da aula aquando da entrega da primeira parte da tarefa para os alunos preencherem. De seguida, passámos ao momento de exploração onde os alunos trabalharam de forma autónoma na resolução desta parte da tarefa:

Da função definida por ramos à função módulo – parte I

Considera as funções reais de variável real f e h definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

1. Representa graficamente cada uma das funções. Da análise dos gráficos desenhados, o que observas? Que características têm em comum?
2. Calcula:
   a. $f(1)$ e $f(-1)$ c. $h(-2)$ e $h(6)$

b. $f(7)$ e $f(-7)$ d. $h\left(\frac{3}{2}\right)$ e $h\left(\frac{5}{2}\right)$

3. A partir das imagens calculadas, o que podes concluir sobre as funções?

Após o momento de trabalho autónomo, foi promovido na sala de aula um momento de discussão e síntese da primeira parte da tarefa, onde foram analisadas as duas funções da tarefa, promovendo a participação dos alunos. O momento de discussão foi promovido com base nas diferentes respostas dos alunos, pedindo-lhes que as apresentassem e justificassem.

Na segunda parte da aula, instituiu-se a definição de função módulo com base na discussão feita e foi explorada a segunda parte da tarefa onde foram utilizados *slides* interativos através da plataforma *Pear Deck* para que os alunos pudessem participar no momento da construção da definição da função módulo.

Da função definida por ramos à função módulo – parte II

As funções f e h podem ser escritas de uma forma mais simples utilizando o símbolo de módulo!

Recorda:

- $|3| =$ _____
- $|-4| =$ _____
- $|2| =$ _____
- $|0| =$ _____
- $\left|-\frac{1}{2}\right| =$ _____

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} = |x| \qquad h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases} = |x-2|$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = |x|$$

$$\downarrow$$

Função módulo

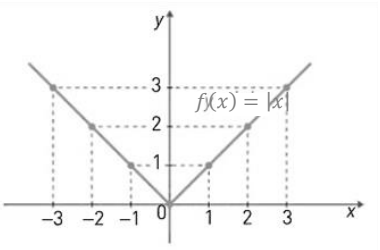
A correspondência que a cada número real associa o seu valor absoluto ou _____ é uma função, pois todo o número real tem _____ valor absoluto.

A essa função dá-se o nome de _____, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$, podendo ser definida por _____ da seguinte forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Gráfico da função módulo

O gráfico da função módulo é formado por duas _____ perpendiculares com origem no ponto $(0, 0)$.



A função f é uma função _____ porque o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.

4.2.2. Resoluções, dificuldades e potencialidades dos alunos

A tarefa construída tinha perguntas diretas e que, aquando da realização do plano de aula, tive algum receio de terem um grau de dificuldade reduzido. No entanto, a tarefa demonstrou-se adequada à aula planeada uma vez que foi ao encontro da intenção de motivar a participação dos alunos. Para além disso, os alunos apresentaram algumas dificuldades na fase inicial da tarefa pelo que ter uma tarefa com um grau de dificuldade superior poderia ser um entrave à introdução do conceito que queria fazer.

A primeira parte da tarefa exigia que os alunos tivessem presente a noção de função por ramos e como podiam trabalhar com ela. No entanto, os alunos demonstraram dificuldades em iniciar a representação gráfica das funções. Após algum tempo de trabalho autónomo foi possível perceber que essas dificuldades eram gerais pelo que fiz uma intervenção para toda a turma de forma a colmatar alguma falta de conhecimento que pudesse estar a impedir a fluidez do trabalho autónomo (RA2).

Nesse momento de intervenção, aproveitei para instigar a participação dos alunos para me ajudarem a explicar como poderiam desenvolver essa primeira parte da tarefa. Este momento de esclarecimento foi crucial uma vez que muitos alunos não tinham conseguido iniciar a representação e aquando da recolha das resoluções todos eles tinham conseguido realizar os gráficos pretendidos (Figura 16, Figura 17, Figura 18).

Figura 16 – Resolução I da questão 1

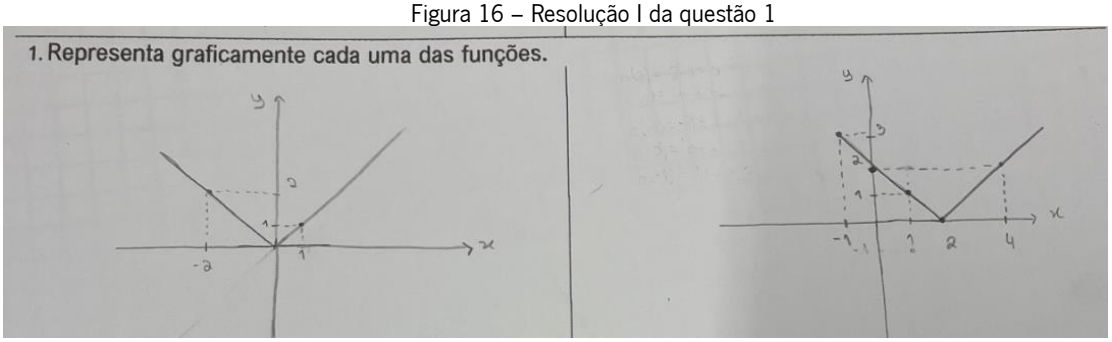


Figura 17 – Resolução II da questão 1

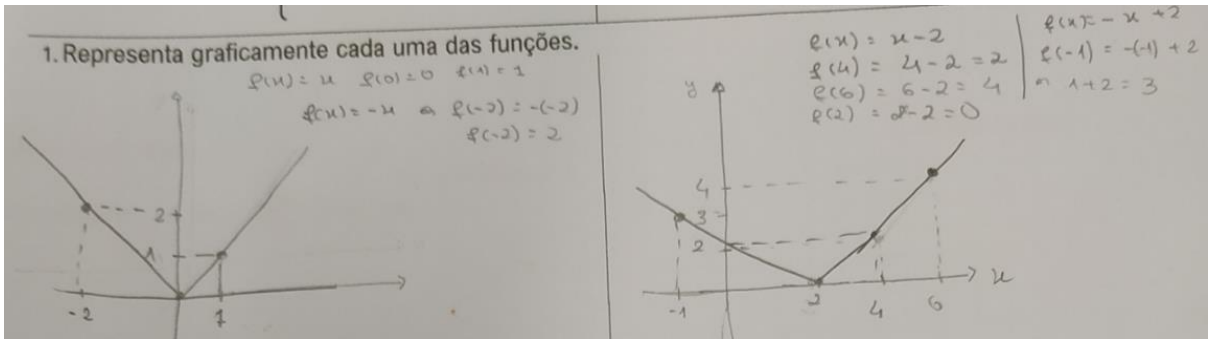
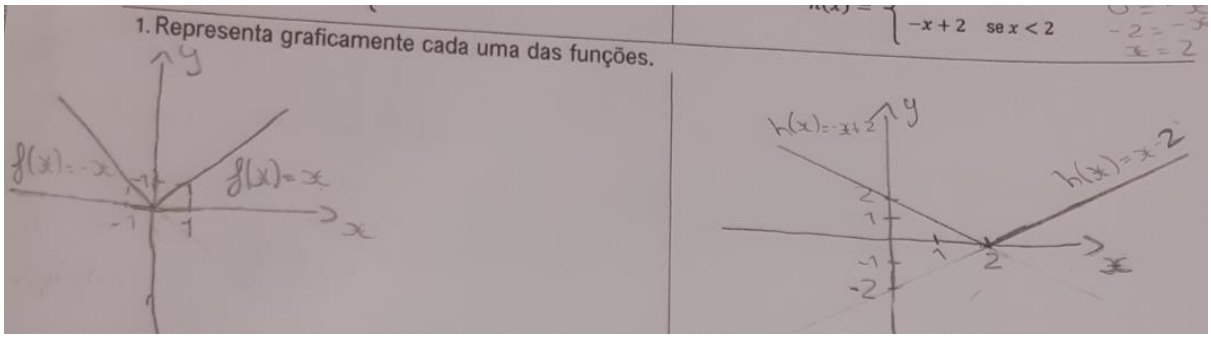


Figura 18 – Resolução III da questão 1



Nestes exemplos apresentados, existem três resoluções diferentes. Na Figura 16 o aluno, apesar de parecer ter substituído valores nos diferentes ramos não apresenta esses cálculos e marca diretamente pontos no referencial cartesiano. Na segunda resolução (Figura 17), o aluno expressa de forma clara o cálculo de imagens de diferentes objetos para conseguir fazer depois a representação gráfica. Na terceira resolução (Figura 18) o aluno considera os ramos em separado até porque se nota que desenhou as retas correspondentes à expressão de cada um dos ramos e depois terá apagado para considerar as semirretas de interesse no domínio das funções apresentadas.

A segunda questão da tarefa suscitou algumas dúvidas nos alunos uma vez que lhes pedia uma resposta mais descritiva. Assim, dos 26 alunos da turma, 5 não apresentaram qualquer resposta a esta questão. No entanto, das respostas dos restantes alunos é possível apontar várias situações. Em primeiro lugar, apesar de a pergunta se reportar ao gráfico das funções, muitos alunos respondem sobre as funções em si ou utilizam uma linguagem onde confundem os dois conceitos (Figura 19 e Figura 20). Esta dificuldade entre a distinção de uma função e a sua representação gráfica é muito comum nos alunos pelo que durante a minha intervenção pedagógica fui sempre insistindo na diferença entre ambos.

Figura 19 – Resolução I da questão 2 com imprecisões

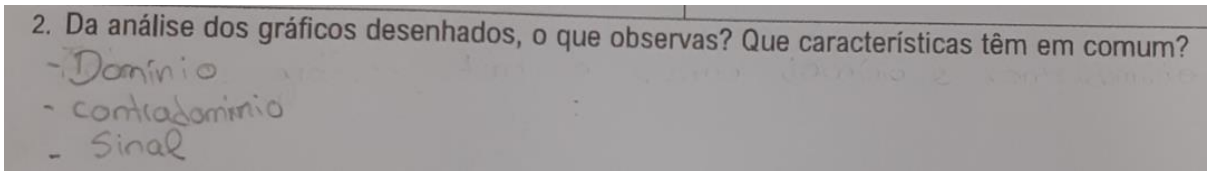
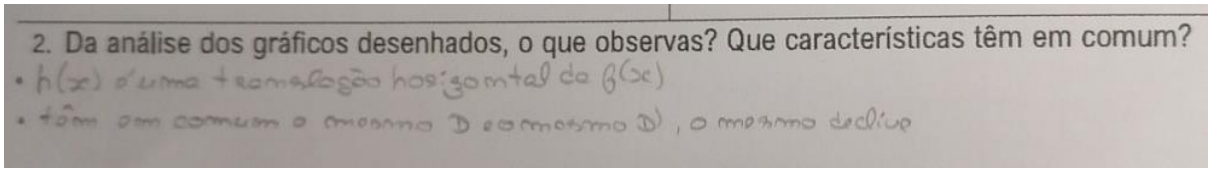


Figura 20 – Resolução II da questão 2 com imprecisões



No entanto, apesar dessas imprecisões, os alunos escreveram características muito pertinentes como "qualquer ordenada corresponde a dois objetos diferentes", existindo ainda um aluno que escreve "para cada imagem, exceto o zero, existem dois objetos" (

Figura 21 e Figura 22).

Figura 21 – Resolução III da questão 2

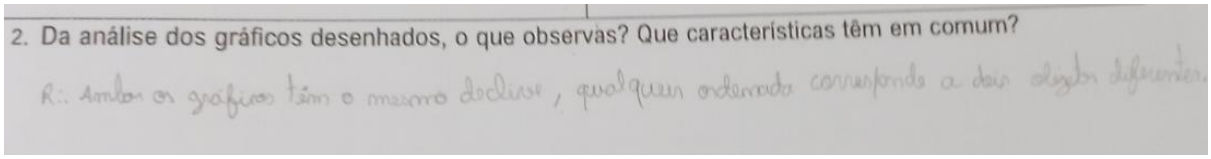
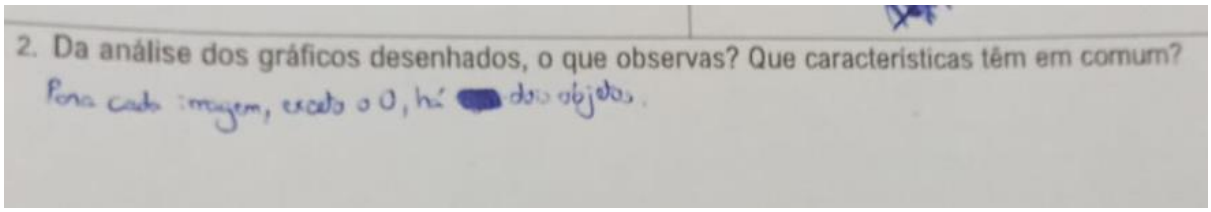


Figura 22 – Resolução IV da questão 2



Vários alunos identificam a simetria dos gráficos, como exemplificam os dois exemplos seguintes:

Figura 23 – Resolução V da questão 2

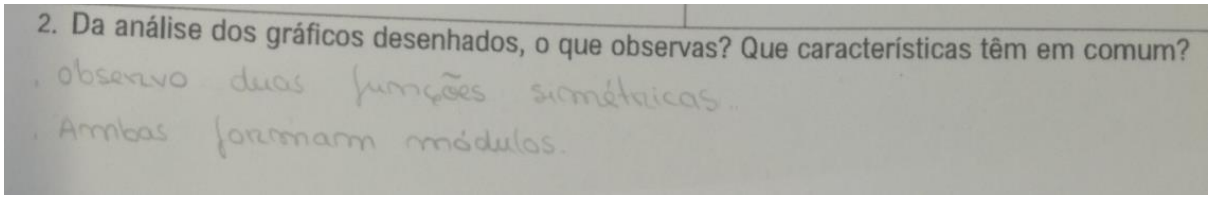
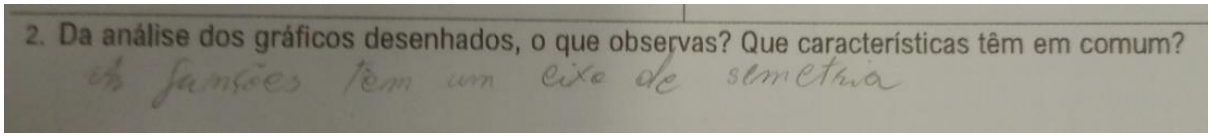


Figura 24 – Resolução VI da questão 2



Apesar de em ambas as respostas (Figura 23 e Figura 24) os alunos se referirem às funções e não aos seus gráficos como seria o correto, a ideia por eles escrita é bastante importante para a construção da definição da função módulo.

Na terceira questão pedi aos alunos o cálculo da imagem de diferentes objetos escolhidos estrategicamente para que tivessem a mesma imagem. A partir destes valores queria perceber que informações os alunos conseguiam inferir. Assim, na questão 4 os alunos surpreenderam-me e conseguiram chegar a ideias bastante interessantes. A ideia mais comum e percetível é o facto de objetos diferentes terem a mesma imagem. Esta ideia foi escrita por vários alunos de diferentes formas (Figura 25, Figura 26, Figura 27 e Figura 28).

Figura 25 – Resolução I da questão 4

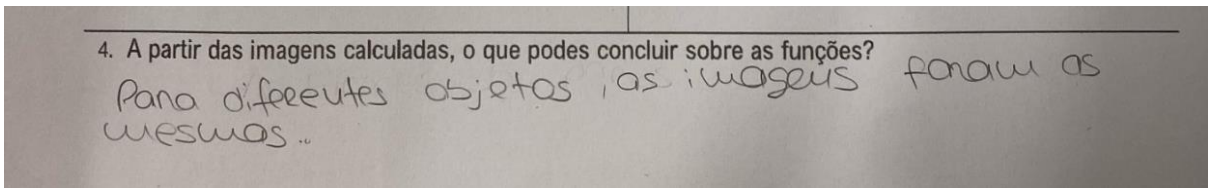


Figura 26 – Resolução II da questão 4

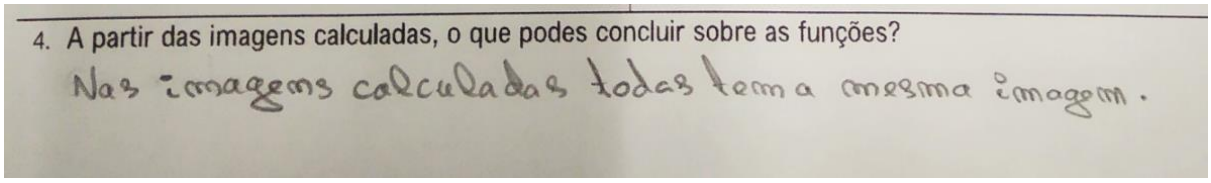


Figura 27 – Resolução III da questão 4

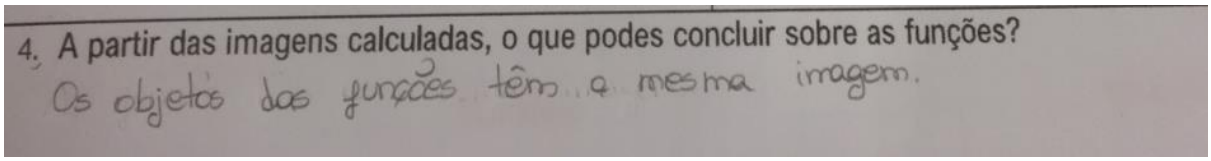
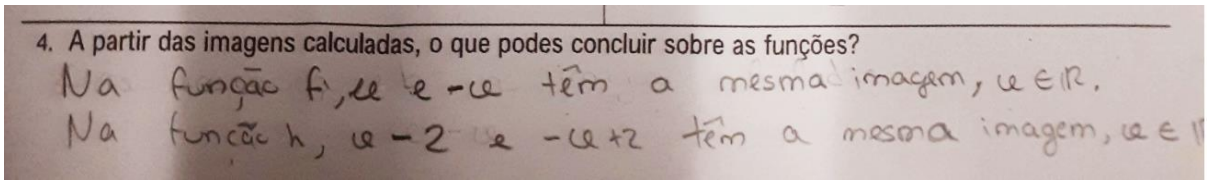


Figura 28 – Resolução IV da questão 4



Ainda nesta questão alguns alunos voltaram a referir a identificação de uma simetria (Figura 29 e Figura 30), o que será uma característica de facto muito evidente do gráfico de uma função com módulo.

Figura 29 – Resolução V da questão 4

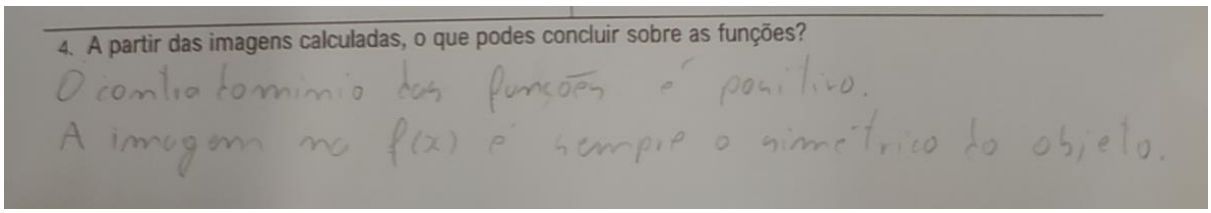
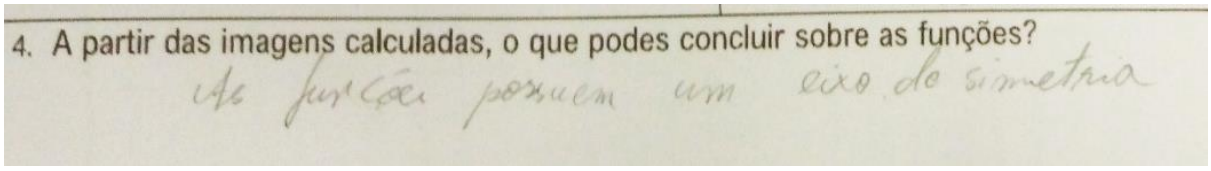


Figura 30 – Resolução VI da questão 4



Vários alunos conseguiram associar a função f ao conceito de módulo, nem que fosse apenas por uma explicação sem conter o próprio conceito (

Figura 31, Figura 32 e Figura 33). Estas respostas foram de facto surpreendentes e permitiram depois um momento de discussão muito interessante. Ressalto ainda o facto de um aluno ter recorrido à linguagem simbólica e ter escrito "$|x|$" na sua resposta.

Figura 31 – Resolução VII da questão 4 incluindo o conceito de módulo

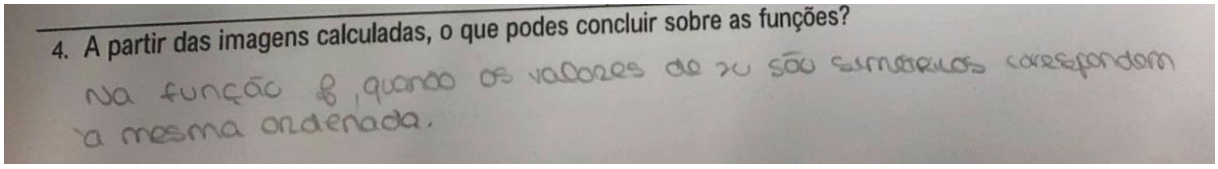


Figura 32 – Resolução VIII da questão 4 incluindo a palavra "módulo"

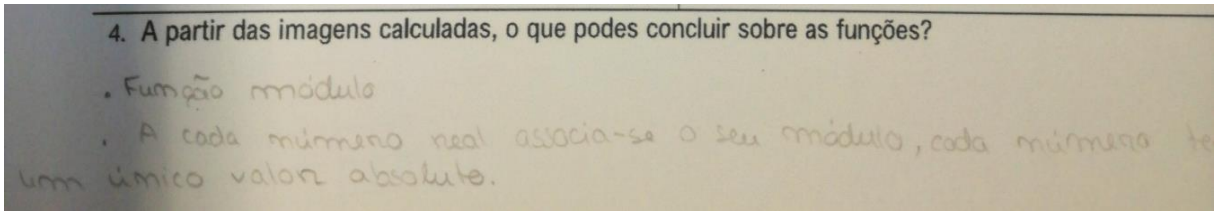
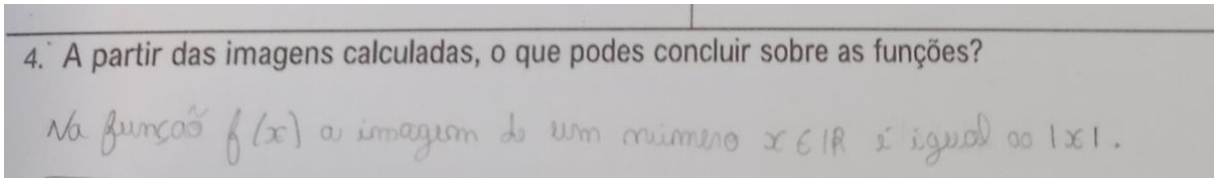


Figura 33 – Resolução IX da questão 4 utilizando linguagem simbólica



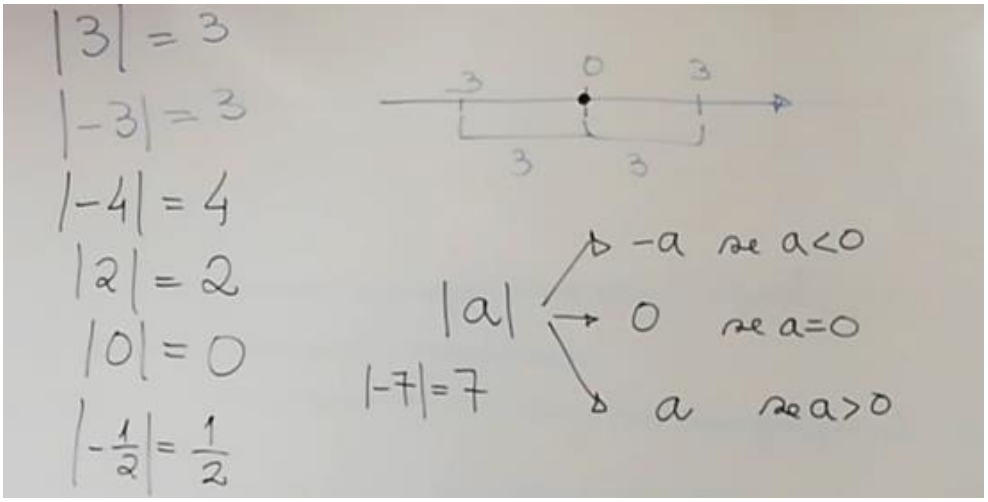
Após o momento de discussão sobre a resolução das questões já referidas, foi entregue a segunda parte da tarefa e revisto com os alunos o conceito do módulo de um número. Este momento da aula foi bastante dinâmico porque a maior parte das intervenções dos alunos surgiu em consequência das características levantadas na fase de discussão da primeira parte da tarefa. Deste modo, registei no quadro o que os alunos me foram indicando que deveria escrever, como ilustra a participação dos alunos na construção deste momento da aula:

Professora:	Então o que é que é o valor absoluto de um número? (Nome do aluno), ajude aí...
Aluno A21:	Valor absoluto de um número é esse número só que positivo, se estiver negativo, é positivo, passa a ser positivo. Se estiver positivo deixa-se estar.
Professora:	E porque é que se é positivo... Nem sei qual é o primeiro número aí, podemos pegar nesse. Três.
Aluno A21:	Não sei muito bem com é que devo explicar. Mas...
Professora:	Estava a dizer muito bem. O módulo, o valor absoluto de três é quanto?
Aluno A21:	Três.
Professora:	Ok. E se eu quiser o valor absoluto de menos três?
Aluno A21:	É três.

Professora: Porquê?
Aluno A15: Não pode ser negativo.
Dois alunos: Porque é a distância...
Professora: Porque é a distância, estamos a falar de distâncias sempre. A distância aqui é três, a distância à origem também é três. Certo ou não? (apontando para a reta numérica desenhada no quadro – Figura 34)

Desta forma, foi possível ir analisando o valor absoluto de diferentes números reais, associando ainda o conceito de distância que já tinha surgido também na parte de discussão anterior. Para além disso, construí com os alunos uma generalização para o valor absoluto de a, sendo a um número real (Figura 34).

Figura 34 – Apontamento no quadro quando foi revisto o conceito de valor absoluto



Assim, foi possível aos alunos perceberem o que é a função módulo e associarem o conceito à representação gráfica que trabalharam na primeira parte da tarefa. A utilização de uma tarefa mais simples e contida numa ficha orientada para os alunos foi uma opção que resultou para esta aula. Desta forma foi possível construir o conceito de função módulo em conjunto com os alunos ao longo da aula, tendo eles contribuído ativamente para este momento da aula. Apesar de os alunos terem necessitado de bastante mais tempo do que tinha planeado para a resolução da primeira parte da tarefa, penso que depois foi possível compensar a gestão do tempo no resto da aula e que foram criadas condições para que os alunos tenham conseguido entender as características principais da função módulo.

4.2.3. Tecnologia

A tecnologia deve ser utilizada nas aulas de Matemática de modo a enriquecer a aprendizagem dos alunos. A sua utilização permite um aumento do envolvimento dos alunos nas atividades realizadas

(NCTM, 2007) o que, por si só, é uma vantagem. Assim, de modo a promover o envolvimento e as interações dos alunos durante esta aula, decidi incluir a utilização de *slides* interativos. A utilização deste material tecnológico permitiu que existisse em aula um momento com uma dinâmica bastante diferente no que respeita ao entusiasmo e envolvimento dos alunos (RA2). A aplicação selecionada para a construção destes *slides* interativos foi o *Pear Deck*, permitindo que os alunos respondessem de forma anónima, não sendo necessário que os mesmos escolham uma alcunha, evitando possíveis situações abusivas. O facto de as respostas serem anónimas permite que todos os alunos respondam sem receio de que as outras pessoas percebam que eles não sabem determinado conteúdo (Trindade, 2014). O anonimato no momento da resposta permite que as respostas de todos os alunos possam ser projetadas para o momento de análise conjunta, não deixando nenhum aluno desconfortável.

Recorrendo ao *Pear Deck* os alunos realizaram um exercício de completamento de espaços sobre a função módulo para que, com posterior análise conjunta das respostas, percebessem melhor as características da função módulo. A parte da tarefa que os alunos responderam com recurso aos *slides* interativos através do telemóvel foi a seguinte:

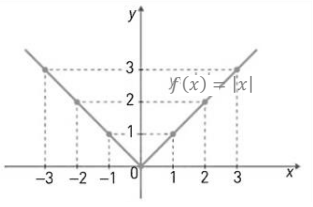
A correspondência que a cada número real associa o seu valor absoluto ou _____1_____ é uma função, pois todo o número real tem _____2_____ valor absoluto.

A essa função dá-se o nome de _____3_____, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$, podendo ser definida por _____4_____ da seguinte forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Gráfico da função módulo

O gráfico da função módulo é formado por duas _____5_____ perpendiculares com origem no ponto $(0, 0)$.



A função f é uma função _____6_____ porque o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.

Os dados recolhidos durante a realização da tarefa através dos *slides* interativos permitiram fazer uma análise das diferentes respostas dadas pelos alunos. Note-se que nem todos os alunos responderam a todas as questões, podendo existir *slides* em que os alunos não submeteram resposta.

Tabela 5 - Respostas dadas pelos alunos na tarefa com recurso aos slides interativos

	1	2	3	4	5	6
Resposta certa	módulo	um e um só	função módulo	ramos	semirretas	par
Respostas dos alunos	Módulo – 19 Negativo – 1 Simétrico – 2 Norma – 1	Um – 16 O mesmo – 2 O seu – 1 Um único – 5	Módulo ou função módulo: todos os alunos	Ramos: todos os alunos	Retas – 11 Funções – 9 Semirretas – 2	Absoluta – 1 Linear – 2 Módulo – 17

Desta forma, após a resposta por parte dos alunos passámos à visualização das respostas dadas pelos diferentes alunos, o que provocou um momento de discussão e permitiu perceber qual seria a resposta correta em cada um dos espaços a completar. A inclusão deste material permitiu que os alunos se entusiasmassem no momento da sua utilização e até que tenham partilhado ideias entre si enquanto tentavam responder da forma o mais correta possível (RA2). A utilização destes *slides* interativos permitiu ainda criar um momento de discussão onde vários alunos foram intervindo para partilhar a sua opinião.

Os próprios alunos reconhecem que a utilização destes *slides* "dinamiza bastante as aulas" e permite "discutir vários pontos de vista para cada pergunta". Estas perceções de diferentes alunos no que respeita à utilização destes *slides* interativos nas aulas de Matemática permitem perceber que a utilização de materiais tecnológicos é algo importante para eles e se traduz em momentos de aprendizagem – "cativa-nos mais e ajuda-nos a interiorizar melhor a matéria".

4.2.4. Interações

As interações na sala de aula devem desenvolver-se em duas direções: do professor para os alunos e dos alunos para o professor. Para além disso, é importante que o professor fomente a existência de momentos em que os alunos possam trocar ideias entre si (Ponte et al., 1997). A análise das interações estabelecidas durante a aula permite de uma forma global perceber que existem diversos padrões de interação (Voigt, 1995) e que os alunos intervieram ativamente durante vários momentos da aula. O padrão de recitação é caracterizado pela sequência iniciação – resposta – avaliação, onde o professor inicia o discurso, os alunos intervêm para responder e o professor avalia a resposta (Menezes, 2005). Quando este padrão se verifica estamos, por norma, perante pequenas contribuições que podem muitas vezes ser constituídas por apenas uma palavra (Menezes, 2005). Este padrão é comum na maioria das aulas, existindo muitas vezes associado a perguntas de confirmação feitas pelo professor. Assim, um exemplo deste padrão durante esta aula é o seguinte:

Aluno A21: Mas por exemplo se houver um ponto que pertence aos dois...

Professora: Não há.

Aluno A21: Não há?

Professora: O domínio tem que estar partido senão tu tinhas um objeto com duas imagens diferentes isso não pode acontecer.

Aluno A21: Mas por exemplo, se x for igual ou maior que zero ou x menor ou igual a zero?

Professora: Não pode ser.

Aluno A21: Não pode?

Professora: Não podes ter a mesma imagem, repara neste caso o gráfico das funções [de cada ramo] cruzam-se aqui, mas os ramos podem não...

Aluno A21: Sim, sim.

Professora: Certo? E se eles não se unirem eu não posso ter o objeto zero com duas imagens distintas nos dois ramos, certo?

Aluno A21: Ok.

Professora: Nunca vai estar, estes conjuntos têm de ser sempre disjuntos não podem ter nada em comum.

Aluno A21: Ok.

O padrão de recitação surge muitas vezes com o propósito de verificar conhecimentos adquiridos (Guerreiro, 2014). Dessa forma também acaba por permitir controlar o discurso e orientar as aprendizagens dos alunos (Martinho & Ponte, 2005). No diálogo que se segue pode-se verificar um momento em que o padrão de recitação surgiu para verificar os conhecimentos do aluno referentes ao cálculo de imagens numa função definida por ramos.

Aluno A21: No primeiro.

Professora: No primeiro. Então vou substituir, para calcular o $f(4)$, vou substituir no primeiro ramo.

Aluno A21: Ah, é sempre assim...

Professora: Sim, porque é que esta a abcissa quatro? Vai estar aqui à frente. Certo ou não?

Aluno A21: Certo.

No decorrer da aula existiram diferentes padrões de interação. No padrão de extração o professor é um questionador com o objetivo de validar o conhecimento do aluno (Menezes et al., 2014). Nesta aula, em dois momentos diferentes, para conseguir perceber como dois alunos tinham pensado, fiz diversas questões tentando que eles expusessem o seu conhecimento.

Aluno A21: Mais ou menos assim.

Professora: Ok, o que é que é mais ou menos assim? Vá lá.

Aluno A21: Porque isto é uma função linear, ou seja, passa na origem.

Professora: O que é que uma função linear? O primeiro ramo, certo?

Aluno A21: Certo.

Professora: Ou seja, a função está dividida em dois ramos.

Aluno A21: As duas são.

Professora: Ok.

Aluno A21: Pronto. Só que esta é linear quando x é igual ou maior que zero, então pus aqui o declive é um. Então pus aqui o declive um.

Professora: Ok.

Aluno A21: Pus a reta.

Professora: Fez pelo declive. Ok. E o outro ramo?

Aluno A21: E aqui igual. Sei que aqui o declive é -1. Ela é linear com o declive -1, x menor que 0. Pus aqui.

Após este momento, foi uma segunda aluna ao quadro para fazer a representação gráfica da segunda função da tarefa. No entanto, foi necessário novamente reforçar a minha intervenção para que, através de várias perguntas, a aluna explicasse que conhecimentos teria utilizado para conseguir fazer a sua representação.

Professora: Ok. E fizeste o quê para conseguir desenhar?

Aluno A16: Ora bem, primeiro fiz o ponto em que a função cruza o eixo do x, que vai ser dois.

Professora: Ok. Mudança de ramo. Sim...

Aluno A16: Exato. E depois olhei para a expressão e vi que então esta vai ser o x maior ou igual a dois, por isso vai ficar assim, e esta vai ser menor por isso vai ficar assim.

Professora: E porque é que vai ficar assim?

Aluno A16: Isto eu vi porque esta tem o mesmo declive que aquela [função por ramos anterior].

Professora: Ok, fizeste as duas pelo declive aproximado, por o declive ser um?

Aluno A16: Certo.

Professora: E se eu não tivesse o declive um ou não tivesse esta [a função anterior], por exemplo, como é que eu ia ter que fazer? O que é que é uma hipótese?

Aluno A16: Eu também pensei que isto aqui é a ordenada da origem e esta também é, então fiz aqui faz de conta que é 2 e depois de desenhar vai dar mais ou menos isto.

A aluna tinha pensado na hipótese de desenhar o gráfico da função utilizando a expressão da função afim que era definida em cada ramo, sem considerar as restrições contidas no domínio. E, de seguida, podia proceder à análise da partição do domínio.

Durante o trabalho autónomo, vários alunos demonstraram dificuldades em fazer a representação gráfica das duas funções fornecidas na tarefa. Assim, criei um momento de esclarecimento onde fui

pedindo ajuda aos alunos para perceber como podiam fazer a leitura da função definida por ramos. Neste momento, fui fazendo questões específicas para que, através do raciocínio que eu estava a traçar, fosse possível levar os alunos a perceber o que a tarefa pedia, criando assim um momento onde esteve presente o padrão de funil (Menezes et al., 2014; Voigt, 1985):

Professora: Onde é que eu vou calcular a imagem do zero, no primeiro ramo ou no segundo ramo?

Aluno A13: No primeiro.

Professora: Porquê no primeiro? Porque é que estavam a dizer que vou substituir aqui?

Aluna A9: Porque x maior ou igual a zero.

Professora: Ok. Porque é x maior ou igual a zero. Então quer dizer quando o x é zero, também calculo aqui. E, então, como é que vai ficar? Quanto é que fica $f(0)$? Se eu vou substituir nesta expressão, a expressão do primeiro ramo.

Aluno A13: Zero.

Professora: Dá zero. Isso quer dizer que este ponto vai pertencer ao meu primeiro ramo. Certo? Ou não? Então agora vou escolher outro ponto, esta função é uma função quê, de que tipo?

Aluno A13: Linear.

Professora: Linear. É uma função linear. Isso quer dizer que vai ser uma reta, que vai passar onde?

Aluno A13: No zero.

Professora: Na origem. Essa parte nós já temos. Então, temos de encontrar outro ponto para conseguir desenhar a nossa reta. Por exemplo, se eu pensar no ponto de abcissa 1, quanto é que vai ser a imagem desse ponto?

Vários alunos: Um.

Professora: Vai ser um. Certo ou não? Então isso quer dizer que eu já tenho o gráfico do primeiro ramo desenhado. (...) Agora, vou fazer o mesmo procedimento para as abcissas negativas. Então quando as abcissas são negativas, a minha função vai ser igual a quê? Em vez de ser $f(x) = x$, vai ser $f(x)$ igual a quanto?

Vários alunos: Menos x.

Professora: Ok, $f(x) = -x$. E então posso escolher, por exemplo, menos dois, agora. Se eu calcular o $f(-2)$, isto vai dar quanto?

Aluno A13: Vai dar dois.

Outro momento em que se pode verificar a existência do padrão de funil, foi quando, em grupo turma, fizemos a passagem do conceito do valor absoluto de um número específico para a generalização do valor absoluto de um número real qualquer.

Professora: Ok. Depois há muita gente que associa isto ao simétrico, certo? O valor absoluto de um número não é o seu simétrico. Se eu vos pedir agora relacionado com o que o

(nome do aluno) tinha dito, para me descreverem como é que se comporta o valor absoluto de um número qualquer. O que é que vocês me dizem?

Aluna A8: É positivo.

Professora: Diga, (nome da aluna).

Aluna A8: Eu disse que é positivo, mas... não.

Professora: Ok, mas imagine que é "a" que eu quero calcular. Ele vai ser sempre igual a quanto? Vai ser sempre igual a "a"? Estás a dizer que ele é positivo, certo? Imagina ele vai ser sempre igual a "a"?

Aluna A7: Sim. Não, não, vai ser menos "a".

Professora: Quando é que vai ser menos "a"?

Aluna A7: Oh, 'stora, vai ser menos "a" se o "a" for um número negativo.

Durante o trabalho autónomo, o padrão de interação mais comum foi o padrão de focalização uma vez que foram muitas vezes momentos de interação onde o ponto de partida foi o raciocínio que os alunos já estavam a desenvolver de forma autónoma, mas no qual se depararam com alguma dificuldade. Assim, nesses casos, existiu uma intervenção da minha parte, mas prosseguiram de forma autónoma (Menezes et al., 2014).

Professora: A forma mais fácil é substituindo por pontos. Quando o x é zero quanto é que é o $f(x)$?

Aluno A13: Não sei...

Professora: Quando o x é zero em que ramo vais substituir?

Aluno A13: Tenho de ver onde está.

Professora: Certo! O $x = 0$ está em que ramo? E depois quando o x é 1 quanto é que é o y?

Neste trecho é possível perceber que o aluno estava com dificuldades em calcular imagens numa função definida por ramos. Dessa forma, optei por orientar o aluno a localizar em que ramo se situava cada abcissa para depois o deixar a resolver sozinho. Outra situação semelhante foi a que apresento a seguir, onde uma aluna já tinha selecionado uma abcissa específica, mas não sabia como prosseguir para conseguir representar o gráfico da função.

Professora: Agora o que é que acontece, isto é uma função afim, certo? Tu já tens estes dois pontos e este 2 é onde muda. Quanto é que é a imagem de 2? Já temos aí?

Aluno A9: Eu só calculei o $f(3)$.

Professora: Ok, agora calcula imagem de 2, por ser a mudança de ramo convém sempre calcular para sabermos nesse ponto o que é que acontece.

Aluno A9: Vai ser zero.

Durante esta aula existiram dois momentos de maior duração pautados pelo padrão de discussão (Voigt, 1985). Estes momentos foram despoletados pelas questões 2 e 4 da tarefa onde os alunos eram convidados a escrever características dos dois gráficos desenhados e conclusões que poderiam retirar sobre as funções apresentadas. O momento em que foram analisadas as respostas foi possível ouvir respostas de diferentes alunos e completar as respostas de uns alunos com as de outros e, deste modo, os alunos foram observando as características apresentadas pela observação dos gráficos ainda no quadro.

Professora:	E então o que é que vocês analisaram aqui dos gráficos que coisas que é que escreveram?
Aluno A21:	Que o declive nas duas funções é igual.
Professora:	Mas o declive em cada um dos ramos?
Vários alunos:	Sim.
Professora:	Ok. Vamos pôr no fundo... E mais?
Aluna A26:	Que não têm imagens negativas.
Aluna A16:	O gráfico da função h é uma translação horizontal do gráfico da função f.
Professora:	Ok. Então, não existem imagens negativas. Toda a gente concorda?
Alguns alunos:	Sim.
Professora:	E estava a dizer a (nome da aluna), e muito bem, que o gráfico da função h... (a professora escreve no quadro a ideia da aluna)
Aluna A5:	Não são simétricas?
Professora:	...é uma translação do gráfico da função f, certo ou não? Estamos a falar de transformações gráficas na mesma.
Aluno A21:	Oh, 'stora.
Professora:	Sim?
Aluno A21:	E qualquer ordenada corresponde a dois objetos diferentes.
Professora:	Espera aí, falta-me aí alguma coisa. (Professora escreve no quadro). O que é que tinham dito mais antes do (nome do aluno)?
Aluna A5:	Funções simétricas. Não sei se está certo.
Professora:	E relativamente ao quê? Ou seja, o gráfico da função f é simétrica...
Aluna A5:	À origem.
Professora:	Esta é relativamente à origem. E esta?
Aluna A5:	Relativamente ao x igual a 2.
Aluna A17:	Relativamente ao eixo de simetria.
Professora:	Ok. Então, quem é que falou aí? Eixo de simetria, certo ou não? Então, o que tu estás a dizer é que tanto esta como esta têm um eixo de simetria. Certo? (Professora escreve no quadro) Vão escrevendo aí quem não escreveu, tentem arranjar espaço para ir escrevendo alguns dos tópicos. Ambas os gráficos das

funções têm um eixo de simetria. E o que é que tinhas dito (nome do aluno A21)?

Aluno A21: Que qualquer ordenada corresponde a dois objetos diferentes.

Professora: Ok. Então, se eu escolher aqui um ponto por aqui fora, o que o aluno A21 está a dizer é que eu vou ter sempre dois objetos, um x_1 um e um x_2, quaisquer que tenham...

Aluno: A mesma ordenada.

Professora: A mesma ordenada. Qualquer ordenada, corresponde...

Este momento transcrito permite perceber que vários alunos participaram neste momento de modo a completarem as resoluções uns dos outros, sendo possível eu ir questionando os alunos para clarificar algumas ideias, existindo assim uma explicação aceite por todos eles. O outro momento em que se verificou o padrão de discussão foi o seguinte:

Professora: E a partir daqui o que é que vocês concluíram para o quatro?

Aluno A21: Eu só concluí para a função f.

Professora: E o que é que concluiu para a função f?

Aluno A21: Que na função f a imagem do número x pertencente a $\mathbb{R}$ é igual ao valor absoluto desse número.

Professora: Ok. Então, vamos lá.

(Professora escreve no quadro)

Professora: Mais, aluna A4 o que é que escreveu? Alguma coisinha? E não quer dizer nada do que é que escreveu?

(Aluna responde negativamente com a cabeça)

Professora: Aluna A26, sim.

Aluna A26: Eu pus que os objetos das funções têm a mesma imagem.

Professora: Estes objetos em particular, que nós calculamos, têm a mesma imagem. Em cada uma das duas funções. Mais alguma coisa?

Aluna A5: Cada número tem um valor absoluto.

Professora: Ok. Isso até se liga aqui ao aluno A26.

Aluno A13: E o x não é sempre positivo?

Professora: Diz aluno A13.

Aluno A13: O x não é sempre positivo.

Professora: O x?

Aluno A13: Ao calcular.

Professora: Então, tu não vês aqui um x negativo, por exemplo?

Alguns alunos: O y.

Aluno A13: As imagens.

Professora: Ok, então as imagens de todos os pontos, as imagens sim. Os que nós calculamos, não era nula, pois não?

Aluno A21: Oh, stora.

Professora: Sim.

Aluno A21: Ainda vi mais uma agora.

Professora: Diz.

Aluno A21: Que em cada alínea a distância dos dois pontos ao eixo de simetria é igual.

Professora: Vamos escrever aqui.

Neste momento voltamos a ter a intervenção de vários alunos, onde todos os alunos que intervêm vão acrescentando ideias à discussão do grupo turma. Assim, registámos no quadro as diferentes ideias que os alunos foram dando para que fosse possível fazer um apanhado das várias ideias que quisessem partilhar.

O momento em que foram utilizados os *slides* interativos, as interações entre os alunos aumentaram de imediato e foi possível observar que se preocuparam em trocar ideias para conseguir ter as respostas corretas (RA2). A utilização de um material tecnológico de facto alterou a postura dos alunos em sala, tornando-os mais ativos e mais atentos, resultando, consequentemente, num maior número de interações com os colegas.

4.2.5. Análise global

A aula analisada teve diferentes momentos – trabalho autónomo dos alunos, confrontação de respostas em grupo turma, momento de instituição do conceito da função módulo juntamente com os alunos, utilização dos *slides* interativos para um exercício de completamento, exploração das respostas dos alunos e análise de um exemplo –, sendo, por isso, uma aula bastante dinâmica. Esta aula tinha como objetivo introduzir a função módulo e considero que o mesmo foi atingido com sucesso uma vez que os alunos tiveram oportunidade para ver a expressão algébrica da função módulo assim como a sua representação gráfica. Para além disso, durante a aula foram criadas condições para que os alunos percebessem a generalização do valor absoluto de um número real concreto para o valor absoluto de um qualquer número real.

Na primeira parte da aula, os alunos revelaram mais dificuldades do que as que tinha previsto. No entanto, acredito que estas dificuldades poderiam ter sido colmatadas com um reforço do momento de introdução da tarefa. No momento inicial em que foi distribuída a tarefa talvez pudesse ter visto com os alunos aquilo que era pedido e como o poderiam fazer. Apesar dessas dificuldades não antecipadas, penso que a situação foi bem resolvida através de um esclarecimento feito no quadro para toda a turma.

Nesta aula foi possível verificar um aumento das interações relativamente a aulas anteriores, o que se revelou bastante positivo (RA2). Para além disso, penso que a tarefa assim como a utilização dos *slides* interativos contribuíram para este aumento. O aumento verificado era um dos principais pontos que tinha a melhorar de aulas anteriores, o que significa que as opções tomadas permitiram colmatar essa falha e melhorar. De entre todas as interações estabelecidas, existiram intervenções muito pertinentes por parte dos alunos relacionadas com o conceito de valor absoluto, como por exemplo quando utilizaram a linguagem simbólica para falar do valor absoluto e também quando referiram a distância em relação ao eixo de simetria. No que concerne aos padrões de interação, o padrão menos registado foi o padrão de focalização, uma vez que este padrão ocorre com maior frequência durante o trabalho autónomo dos alunos e exige que os alunos retomem o seu próprio raciocínio. Em algumas situações de interação durante o trabalho autónomo entre mim e os alunos, o padrão desenvolvido é o de funil onde encaminho os alunos segundo o meu raciocínio através de perguntas que direcionam o pensamento do aluno.

Nas aulas seguintes foi importante conseguir fomentar ainda mais as interações na sala de aula, quer entre mim e os alunos, quer entre os próprios alunos. Para conseguir melhorar a este nível, foi importante planear aulas com um momento em que os alunos possam trabalhar de forma autónoma, trocando ideias com os colegas, mais duradouro. Para além disso, manter a inclusão dos materiais tecnológicos foi imprescindível uma vez que tinha verificado o entusiasmo dos alunos assim como um aumento da sua participação.

4.3. Resolução de problemas envolvendo a função módulo

A aula analisada nesta secção incidiu sobre o estudo da função módulo e sobre a resolução de problemas envolvendo a função módulo, tópicos incluídos no programa de Matemática A de 10.º ano (Ministério da Educação, 2018d). Utilizar a função módulo em contextos de modelação é um tópico que deve ser trabalhado no 10.º ano de escolaridade. No entanto, vários manuais escolares não exploram a função módulo associada a contextos de modelação. Deste modo, considerei importante planear uma aula dedicada a este tópico.

4.3.1. Tarefa 'A mesa de bilhar'

O plano de aula que tinha sido elaborado continha duas tarefas diferentes com a função módulo associada a determinados contextos. No entanto, pela gestão de tempo em sala de aula não foi possível resolver as duas tarefas, tendo optado por explorar apenas a primeira. A possibilidade da falta de tempo

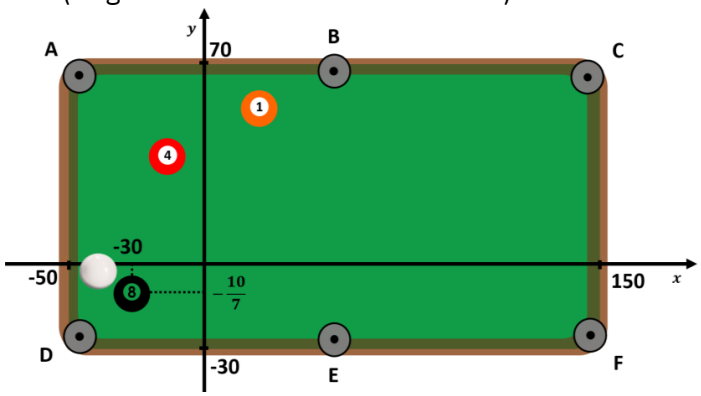
para a realização da segunda tarefa já tinha sido equacionada aquando da realização do plano de aula, onde tinha sido planeada uma atividade recorrendo à plataforma *Pear Deck* para o final da aula caso não fosse possível iniciar a segunda tarefa. A tarefa realizada intitulava-se "A mesa de bilhar" e foi criada para que os alunos tivessem contacto com a função módulo aplicada a uma situação real que lhes fosse conhecida. Assim, os alunos foram confrontados com uma situação onde era necessário interpretarem o contexto associado à função para conseguirem resolver as questões colocadas.

A mesa de bilhar

O jogo de bilhar é jogado em mesas retangulares com seis buracos. Um jogo de bilhar é ganho quando um jogador/equipa já conseguiu colocar todas as suas bolas nos buracos e, por fim, coloca a bola preta com o n.º 8 num buraco.

O Joaquim tem uma mesa de bilhar em casa cujas dimensões são 1 metro por 2 metros. O Joaquim e o seu filho António estão a jogar e o António está a ganhar. Neste momento, falta-lhe apenas colocar a bola n.º 8 num dos buracos.

Considera a imagem abaixo (a figura não está desenhada à escala).



Antes da tacada final do António, a bola n.º 8 está no ponto G cujas coordenadas são $\left(-30, -\frac{10}{7}\right)$.

Na tacada feita pelo António a bola percorreu uma trajetória definida pela função dada pela expressão:

$$b(x) = \frac{5}{7}|x - 10| - 30\,.$$

Considera a função b restrita ao domínio correspondente ao espaço ocupado pela mesa de bilhar.

1. O António tinha o telemóvel pousado exatamente no meio dos buracos D e E. Terá o telemóvel caído durante a jogada? Considera desprezável a largura da parte exterior da mesa de bilhar.
2. O António conseguiu vencer o jogo nesta jogada?
3. Que distância percorreu no total a bola n.º 8 nesta jogada? Apresenta o resultado, em metros, arredondado às centésimas.
4. Sabendo que durante esta jogada a bola n.º 8 esteve alinhada na horizontal com o ponto médio dos pontos C e F, indica as coordenadas da bola nesse momento.

A aula foi iniciada com a introdução da tarefa onde foi feita a leitura da mesma e a identificação dos dados que eram fornecidos no enunciado. Num momento seguinte, os alunos trabalharam de forma

autónoma, tendo tido tempo para explorar a tarefa. De seguida, foram resolvidas e analisadas todas as questões no quadro por diferentes alunos.

Após o término da tarefa e não existindo tempo para iniciar a segunda tarefa, os alunos realizaram um questionário (Anexo V) através de *slides* interativos no seu telemóvel sobre as características da função módulo e, por fim, analisámos quais seriam as respostas corretas. Desta forma foi possível reforçar o estudo da função módulo e algumas das suas características mais elementares.

4.3.2. Resoluções, dificuldades e potencialidades dos alunos

A tarefa construída para esta aula revelou-se adequada, uma vez que o seu grau de exigência ao nível da interpretação resultou num maior número de interações entre os alunos durante o trabalho autónomo (RA3). Apesar disso, o desafio sentido pelos alunos fez com que o tempo dedicado ao trabalho autónomo fosse bastante superior ao planeado. Assim, futuramente penso que esta tarefa poderia contemplar mais tempo para a sua exploração pelos alunos, pois, apesar de ter ajustado bastante o tempo inicialmente atribuído, vários alunos não conseguiram terminar a tarefa a tempo do momento de exploração. Destaco ainda a necessidade de fazer um momento de introdução da tarefa mais detalhado onde talvez fossem lidas também as questões na turma para que fosse possível os alunos perceberem o que era pedido.

No geral, os alunos gostaram da tarefa proposta, sendo que um aluno indicou "achei interessante pelo facto da função modulo pode ser adaptada para situações reais" e ainda outro escreveu

> "no início achei complicado, mas conforme fui fazendo comecei a perceber melhor e acabei por conseguir fazer tudo sem grandes dificuldades. Ver que podemos adaptar a função módulo a situações reais e do dia a dia foi interessante e ajuda a perceber melhor como funciona".

Estas afirmações permitem perceber que o teor da tarefa foi ao encontro do interesse dos alunos, o que considero bastante importante para que se motivem e se envolvam na aula.

No que respeita à primeira questão da tarefa, existiram vários processos de resolução diferentes, sendo alguns deles abordados na discussão da tarefa em aula. Alguns alunos fizeram a comparação direta entre as coordenadas da bola e as coordenadas do ponto de mudança de direção do gráfico da função (Figura 35), enquanto outros em vez de indicarem as coordenadas desse ponto diretamente foram obtê-las (

Figura 36). Existiram ainda alunos que substituíram as coordenadas do telemóvel na expressão da função para ver se obtinham uma proposição verdadeira (Figura 37).

Figura 35 – Resolução I da questão 1

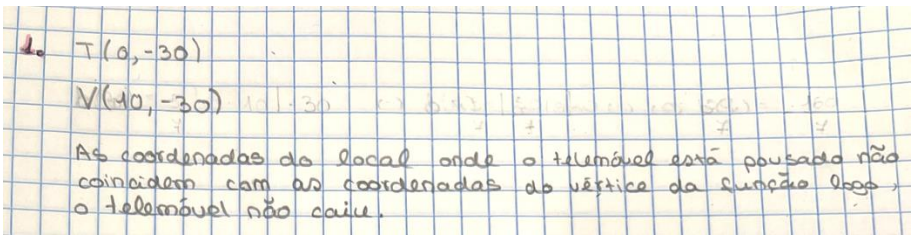


Figura 36 – Resolução II da questão 1

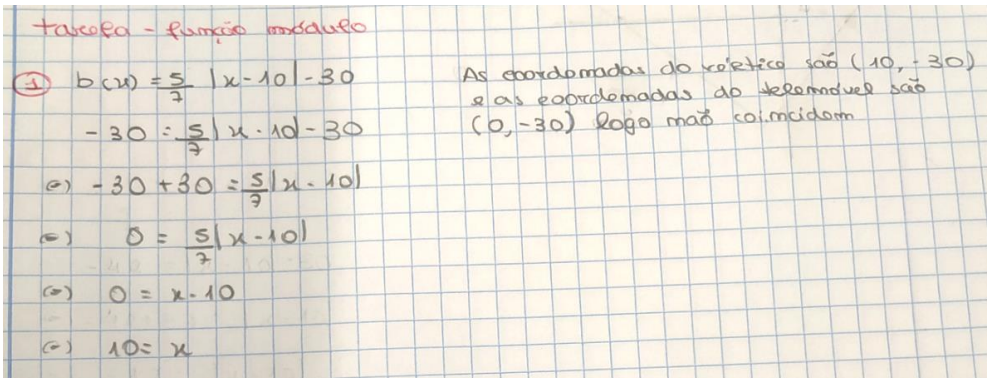
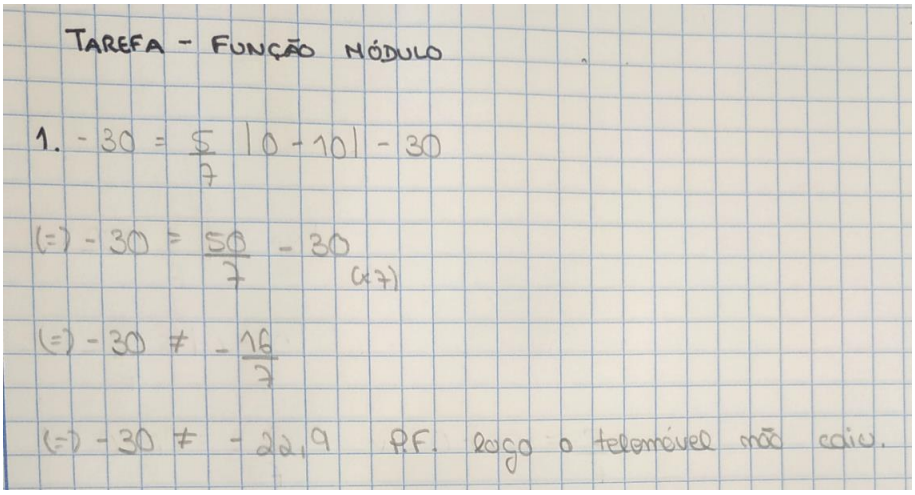


Figura 37 – Resolução III da questão 1



Na resolução da questão 2 apareceram praticamente apenas duas resoluções distintas: uma em que os alunos substituíram logo pelo ponto C para verificar se o ponto C pertencia ao gráfico da função (

Figura 39) e outra em que os alunos experimentaram vários pontos para ver se algum deles pertencia à função (Figura 38).

Figura 38 – Resolução I da questão 2

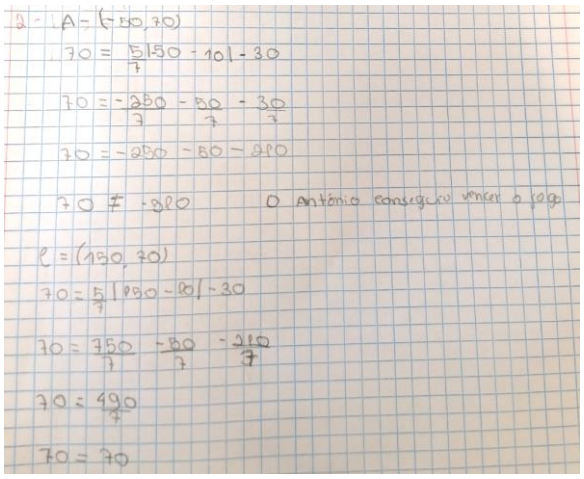
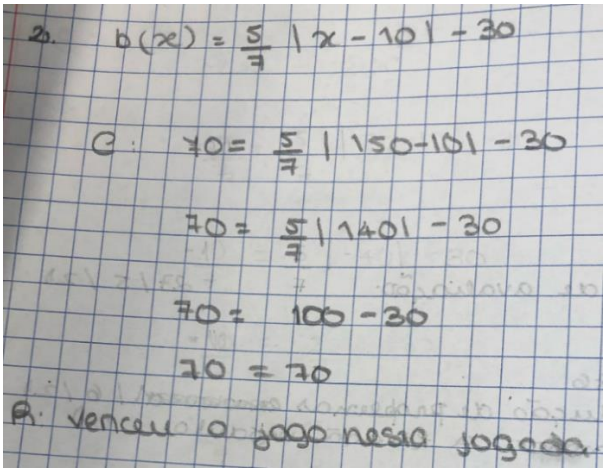


Figura 39 – Resolução II da questão 2



A questão 3 exigia que os alunos aplicassem o cálculo da distância entre dois pontos do domínio de Geometria. Na generalidade, os alunos conseguiram realizar a questão (Figura 40), existindo alguns que se esqueceram de colocar a resposta nas unidades solicitadas no enunciado (

Figura 41). Pelas dificuldades de interpretação já referidas, vários alunos não tiveram tempo para resolver esta questão autonomamente.

Figura 40 – Resolução I da questão 3

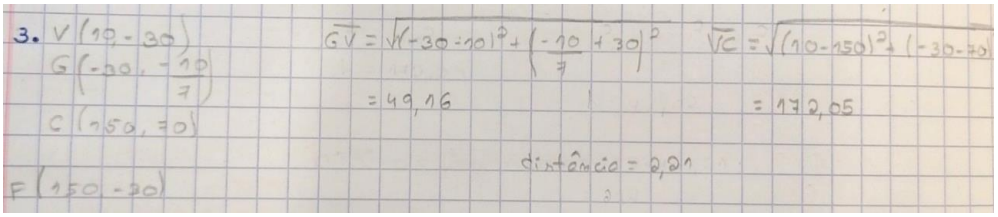
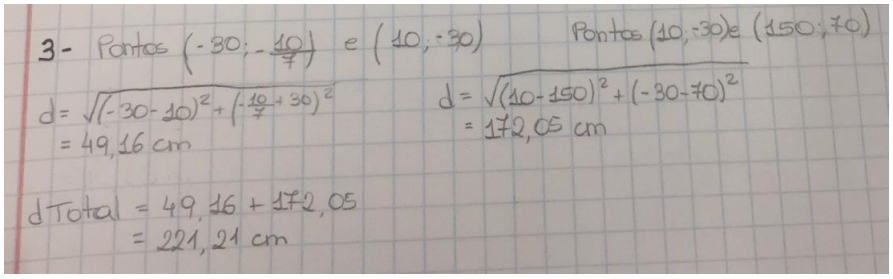


Figura 41 – Resolução II da questão 3



No que respeita à questão 4, poucos alunos apresentaram uma resposta: vários alunos não tiveram tempo de a realizar e outros não a souberam fazer. No entanto, alguns alunos resolveram-na de forma correta, validando até o domínio (

Figura 42) e outros que, apesar de conseguirem interpretar o que era pedido, resolveram a questão com erros analíticos como foi o caso da resolução apresentada na Figura 43 onde o aluno não resolveu corretamente a equação com módulo.

Figura 42 – Resolução I da questão 4

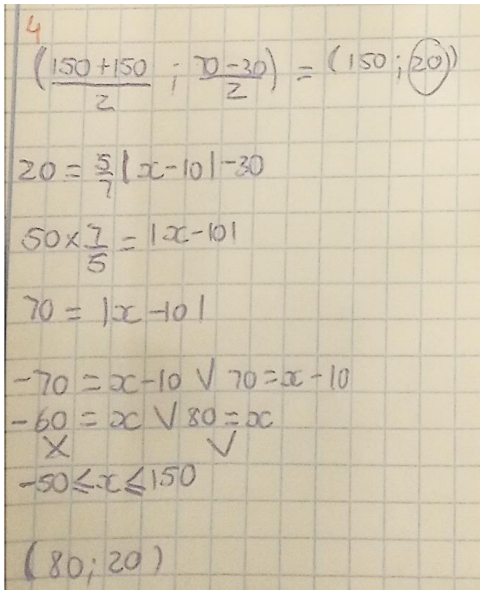
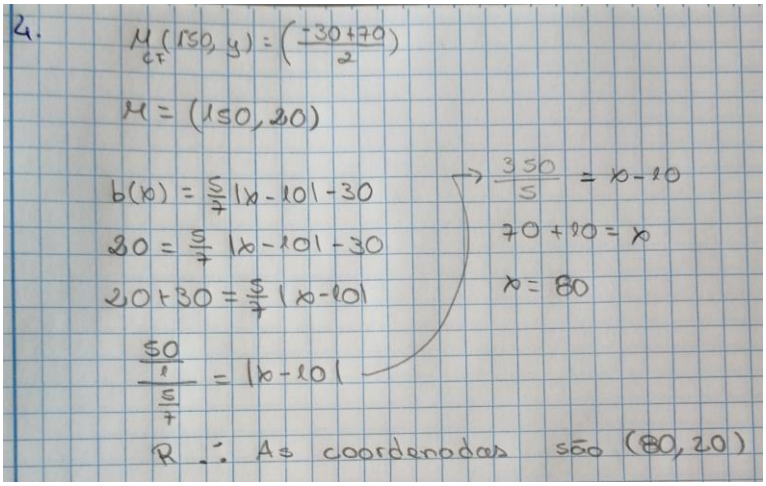


Figura 43 – Resolução II da questão 4



Para além das dificuldades específicas já referidas, penso que os alunos poderão ter tido numa fase inicial da tarefa algumas dúvidas na interpretação, sendo difícil associar o comportamento da função ao contexto em que está inserida (RA3). De resto, penso que a tarefa não trouxe muitas dificuldades. Em contrapartida, alguns alunos conseguiram associar a função ao contexto e resolver com alguma facilidade a tarefa proposta.

Quando planeei a aula tinha feito uns *slides* interativos para que durante a resolução da tarefa os alunos pudessem ir colocando as suas respostas. No entanto, perante as dificuldades demonstradas na fase inicial da aula e o facto de ter dedicado bastante mais tempo do que estava destinado ao trabalho autónomo dos alunos, optei por não aplicar esses *slides* para não atrapalhar o trabalho que os alunos estavam a desenvolver uns com os outros. Esta decisão tomada no momento, parece-me ter sido a mais adequada para compensar o tempo investido na parte inicial da aula que não era previsto.

O questionário preparado para a segunda parte da aula teve de ser ajustado durante a própria aula, isto é, perante a diferença de tempo que restava e o planeado para o realizar, optei por eliminar alguns dos *slides* interativos para que ainda fosse possível realizar o questionário. Apesar dessa decisão, que considero ter sido uma mais-valia, não foi totalmente eficaz uma vez que, mesmo assim, não foi possível explorar as respostas do questionário tão detalhadamente como era desejável.

4.3.3. Tecnologia

Durante o trabalho autónomo, vários alunos utilizaram a calculadora para poderem visualizar o gráfico da função dada, o que demonstra que, relativamente à aula em que foi explorada a tarefa "As redes sociais" os alunos já se sentem mais confortáveis em utilizar a calculadora gráfica sem que lhes seja sugerido. O recurso à calculadora gráfica permite que os alunos obtenham de forma correta e imediata a representação gráfica da função, o que melhora as oportunidades de aprendizagem dos

alunos (NCTM, 2007). A utilização da calculadora para esta tarefa em específico permitiu a alguns alunos responder com mais facilidade à questão 2 por perceberem de forma mais inequívoca a trajetória da bola.

O questionário preparado para depois da tarefa "A mesa de bilhar" tinha como objetivo motivar os alunos e a sua participação assim como verificar e reforçar os seus conhecimentos no que diz respeito à função módulo. Apesar de não ter dedicado o tempo em aula que desejava ao questionário e à sua exploração, penso que a sua realização atingiu os objetivos com ilustra a declaração de um aluno: "é uma maneira diferente de testar o que nós sabemos e até mesmo aprender e tornam as aulas mais interessantes". Adicionalmente, outro aluno referiu que "assim as aulas são mais dinâmicas e é uma maneira moderna/atual e interessante de aprendermos".

Do questionário realizado para avaliar a aula realizada, foi pedido aos alunos que dessem a sua opinião sobre a realização dos *quizzes* com o *Pear Deck* e dos dados recolhidos pode-se concluir que a opinião dos alunos é positiva (Tabela 6).

Tabela 6 - Opinião dos alunos sobre a realização de *quizzes* nas aulas

Questão	**Respostas**
Gostas da realização de *quizzes* nas aulas?	Sim – 88% Não – 12%
A realização do *quizz* influenciou as tuas interações na aula?	Sim – 64,7% Não – 23,5% Sem resposta – 11,8%

A utilização dos *slides* interativos durante as aulas foi-se tornando num elemento que os alunos se habituaram e gostaram bastante. Na Tabela 6 podemos ver que 88% dos alunos gosta da realização deste tipo de atividades em aula e que 64,7% reconhece ainda que a realização do *quizz* influenciou as suas interações na aula. A realização desta atividade permitiu aumentar a atividade dos alunos em aula, traduzindo-se num aumento das interações estabelecidas. Um aluno reconheceu que a realização de questionários através dos *slides* interativos "dá para discutir vários pontos de vista para cada pergunta", o que demonstra uma vertente de inclusão de diferentes alunos e respostas. Para além disso, "é uma parte da aula mais interativa" (referiu outro aluno) o que "cria também uma certa competição entre a turma o que é sempre interessante", reforçou outro aluno com o seu *feedback* sobre a aula.

As opiniões recolhidas sobre esta aula permitem reforçar que a inclusão de tecnologia na sala de aula se torna cada vez mais necessária para motivar os alunos e lhes mostrar que o ensino pode ser adaptado à evolução tecnológica a que a geração deles assiste. Na minha opinião, a utilização de materiais tecnológicos dentro da sala de aula tem de ir sendo reforçada com o passar do tempo,

arranjando opções diferentes de envolver os alunos e os tornar efetivamente a 'personagem principal' do processo de ensino e de aprendizagem.

4.3.4. Interações

A dinâmica desta aula foi bastante diferente das aulas analisadas anteriormente uma vez que foi proposto um problema aos alunos para resolverem em aula. Assim, ao contrário das outras aulas, existiu um tempo considerável da aula dedicado ao trabalho autónomo dos alunos onde foi possível acompanhá--los ao longo do seu trabalho (RA3).

A importância da comunicação na sala de aula foi sendo reforçada ao longo de todo o estágio e permitiu-me perceber que os próprios alunos valorizam as aulas em que podem estar à vontade para intervir. Nem todos os alunos se sentem confiantes para expor as suas ideias ou dúvidas, como por exemplo: "Eu nunca me sinto confortável para partilhar as minhas resoluções e ideias. Apenas não gosto de correr o risco de estar errada". Esta declaração demonstra o quanto é necessário trabalharmos em sala de aula a vertente da comunicação e fomentar as interações. Vários alunos referiram o facto de se sentirem mais confortáveis a participar quando sabem que os seus raciocínios ou resoluções estão corretas. Esta sensação foi transmitida pelos alunos em respostas como "Só não me sinto tão confortável quando não tenho a certeza se o meu pensamento está certo" e "nos momentos em que tenho a certeza da resposta".

Ao longo desta aula, os padrões de interação foram bastante diferentes dos verificados em outras aulas. Esta situação ocorreu porque a maior parte das interações decorreram durante o trabalho autónomo, entre os próprios alunos ou dos alunos comigo.

Nesta aula, o padrão de extração decorreu várias vezes por estar a tentar perceber aquilo que os alunos já tinham compreendido da tarefa ou tentar mobilizar outros conhecimentos necessários para a resolução da mesma. No trecho seguinte temos um momento em que quis esclarecer como é que os alunos podiam resolver uma equação com módulo.

Professora:	Oh meninos, vamos só... Para quem está a fazer por equações: como é que eu resolvo esta equação?
Aluno A3:	Passo o dois que está fora do módulo a dividir para o outro lado.
Professora:	Está a ouvir (nome de uma aluna)? O dois passa a dividir e dá zero. E depois já fica o módulo isolado e já consigo resolver, certo ou não?
Vários alunos:	Certo.

Outro momento em que verifiquei que se estabeleceu o padrão de extração esteve relacionado com tentar que uma aluna expusesse o seu raciocínio:

Aluna A8: Eu só descobri o vértice.
Professora: O vértice? Ok, o ponto onde a função módulo muda de direção, certo? Foi isso?
Aluna A8: Sim.
Professora: E como é que descobriste?
Aluna A8: Porque tem a expressão dada e então o vértice era dez menos 30 e sendo que a coordenada da bola era $(0, -30)$ como não coincidia, não caiu.

Estes momentos muitas vezes são curtos na sala de aula e pode existir uma tendência por parte do professor em tentar explicar pelos alunos uma vez que muitas vezes conseguimos perceber o que os alunos pensaram. No entanto, devemos fazer o esforço por contornar essa situação e fazer com que sejam os alunos a expressar oralmente aquilo em que pensaram.

Outro padrão muito comum na sala de aula é o padrão de recitação, também caracterizado por momentos curtos, onde o professor questiona o aluno e o mesmo responde de forma imediata, sendo mais importante o produto resultante do que o processo em si. Um exemplo deste padrão nesta aula foi o seguinte:

Professora: E tu estás a calcular o quê?
Aluna A9: O x.
Professora: Quando o y é...
Aluna A9: -30.

Apesar de mais curtos do que em outras aulas, nesta aula existiram dois momentos em que se verificou o padrão de discussão. Um desses momentos foi nos minutos finais da aula, na análise das respostas do questionário feito com recurso aos *slides* interativos. O outro momento foi na resolução em grupo turma da tarefa 'A mesa de bilhar' onde vários alunos foram chamados a participar para analisarmos diferentes resoluções:

Professora: Porque é que a bola não batia nesse ponto?
Aluno A21: Porque não pertence à expressão.
Professora: Ok. Como o ponto onde está o telemóvel não pertence à função... E agora também pode responder, se faz favor. Quem é que fez de outra forma? Diga aluna A26.
Aluna A26: Eu só substituí o y por -30 e fui ver o ponto em que ele batia nessa ordenada.
Professora: Ok.
Aluno A21: Ponho só que o telemóvel não caiu ao chão?

Professora: Como o ponto $(0, -30)$ não pertence à função b, o telemóvel não caiu. Diz aluna A26. Substituíste só o -30 e foste calcular a abcissa, foi isso?

Aluna A26: Sim.

Professora: Ou seja, foste calcular diretamente o ponto... Houve mais gente a fazer assim?

Aluno A21: Oh, 'stora, assim?

Aluna A16: Oh, 'stora, eu fiz praticamente o mesmo que a aluna A26 só que em vez de substituir o y por -30, substitui o x por 0.

O padrão de focalização foi bastante evidente no decorrer do trabalho autónomo dos alunos uma vez que tentei sempre que fossem os alunos a construir o raciocínio a seguir. Nesse sentido, tentei focar a atenção deles num determinado aspeto para que pudesse, a partir do mesmo, prosseguir a resolução.

Aluno A3: Na questão dois para descobrir se ele venceu o jogo temos de substituir aqui na função por um dos pontos certo?

Professora: Sim, se já tiveres assim um palpite.

Aluno A3: Porque ele para ganhar o jogo tem de acertar num dos buracos por isso nós podemos substituir por qualquer um...

Professora: Agora tens de perceber se queres substituir por todos, para perceber qual é... Ou se consegues descobrir aí uma forma para não estar a substituir pelos seis.

(Professora deixa aluno a fazer sozinho).

Apresento mais dois exemplos onde emergiu o padrão de focalização como estratégia de promover a autonomia dos alunos na resolução da tarefa. Analisando com eles o primeiro ponto de bloqueio da resolução autónoma, mas que pudessem continuar sozinhos. Neste exemplo, numa fase inicial utilizei perguntas diretas para validar o raciocínio até onde o aluno já tinha feito e depois terminei com uma questão para que ele apenas se focasse na parte que lhe faltava.

Aluno A3: Mas a mim este ponto não me deu 50. Deu-me 10.

Professora: O que é que te deu dez?

Aluno A3: O x...

Professora: Quando o y é -30. E onde é que vai ser esse ponto? Ora, marca o ponto aí na imagem.

Aluno A3: O y é -30... é isto.

Professora: Quando o y é... tu acabaste de dizer que aqui era 50.

Aluno A3: Ah, sim.

Professora: Certo. Ok, então $(-30, 10)$ estará mais ou menos localizado aqui.

Aluno A3: Era fácil.

Professora: Então tu acabaste de dizer que este ponto pertence à função e agora preciso de perceber se deitou a abaixo o telemóvel ou não. Onde é que estava o telemóvel?

Aluno A3: Estava no ponto médio.
Professora: E já sabemos as coordenadas do ponto médio?
Aluno A3: Mas se não bater certo é porque não caiu.

Neste último exemplo, a aluna estava a pensar de forma errada e foi necessário reajustar as conclusões que tinha até ao momento e direcioná-la para um novo aspeto para o qual ainda não tinha olhado. Como nas outras situações, deixo uma dica à aluna de forma que ela possa refletir e trabalhar de forma independente.

Aluna A9: As coordenadas são só isto, porque as coordenadas da bola é o ponto médio. Ou não?
Professora: Então tu não disseste que ele acertava aqui [no ponto C]?
Aluna A9: Espere, espere. Durante a jogada da bola número oito... Tem de haver uma linha assim, não é?
Professora: Exatamente. O gráfico vem daqui, de onde tu disseste até ali. Certo ou não?
Aluna A9: Sim.
Professora: Depois temos este ponto médio e eu quero saber onde é que eles estiveram alinhados.

Os padrões de interação desenvolvidos nesta aula refletiram muito a aula conduzida. Os padrões estabelecidos foram bastante mais reduzidos e os padrões de recitação, extração e focalização foram os que se repetiram mais vezes em consequência das minhas intervenções juntas dos alunos de forma individual. Durante esta aula, não verifiquei nenhuma ocorrência do padrão de funil uma vez que nas intervenções com os alunos fiz um esforço para não lhes indicar de forma detalhada o caminho para a resposta correta. A verificação da existência do padrão de focalização muitas vezes é um fator positivo uma vez que este padrão se baseia no raciocínio dos alunos e onde apenas encaminhei os alunos para que os mesmos ficassem focados num determinado aspeto e tentassem prosseguir a resolução sozinhos (Menezes et al., 2014).

4.3.5. Análise global

O objetivo que delineei para esta aula – resolver problemas com a função módulo – foi atingido uma vez que foi possível os alunos terem tempo para tentar resolver de forma autónoma o problema proposto e depois fazermos a análise da resolução conjunta (RA3). Para além disso, no questionário de *feedback* sobre a aula um aluno referiu que "a tarefa foi bem construída e bastante interessante, pois conseguimos perceber que a função módulo está discretamente presente em que fazemos", o que ainda

realça o facto de, para além de terem resolvido o problema, alguns alunos perceberam que a função módulo pode ser aplicada em contextos reais. De um modo geral vários alunos referiram que a tarefa tinha sido "bastante interessante" e "adaptada a situações reais".

Apesar de a aula se ter revelado muito interessante no que respeita aos padrões de interação estabelecidos, o facto de o trabalho autónomo dos alunos se ter estendido no tempo, não permitiu que o questionário final fosse explorado em grupo turma com tanto tempo quanto desejado. Assim, uma possibilidade para trabalhar com esta tarefa no futuro poderia ser dedicar bastante mais tempo à introdução da tarefa, reduzindo assim as dificuldades dos alunos posteriormente. Talvez prolongar o tempo dedicado à introdução da tarefa pudesse resultar num maior entendimento por parte dos alunos. Por outro lado, tenho receio que este momento inicial mais alargado se pudesse traduzir numa diminuição do grau de dificuldade da tarefa.

O momento de discussão em grupo turma foi mais reduzido devido à gestão de tempo após a fase inicial da aula, mas não deixou de ser muito produtivo onde foram referidas várias formas de pensar em algumas das questões, algo muito importante e valorizado por um aluno no questionário referindo que

> "cada um de nós pode interpretar de formas diferentes, realizado também de várias formas, dando na mesma os mesmos resultados e assim ficamos a saber mais possibilidades de resolver um único exercício. Por exemplo se alguém realizou um exercício de uma certa forma e depois o colega realizou de outra forma mais fácil, essa pessoa ficou a saber que era escusado ter tido aquele trabalho todo enquanto podia ter feito mais rápido, usando então depois essa forma mais simples noutros exercícios".

Um ponto muito positivo e de evolução que destaco é as vantagens trazidas pela utilização da tecnologia na aula. A utilização dos *slides* para o questionário do final da aula permite aumentar a atenção e motivação dos alunos como confirmaram dois alunos: "cativa-nos mais e ajuda-nos a interiorizar melhor a matéria" e "dinamiza bastante as aulas". O facto de cativar mais os alunos e os permitir manter uma maior atenção, faz com que a turma se envolva, confronte formas de pensar e respostas, tal como exemplifica a afirmação de um aluno da turma:

> "o *quizz* faz com que a interação seja maior, pelo menos participamos mais em grupos e acho que é um dos melhores aspetos, porque estamos a aprender e a desenvolver as nossas capacidades, mas também a comunicar e a ter um momento mais descontraído".

Do *feedback* recolhido dos alunos, cerca de 29% dos alunos indicaram ter preferido o tempo dedicado ao trabalho autónomo uma vez que gostam de "estar a resolver os exercícios" como referiu um aluno. No entanto, vários alunos preferiram o momento da resolução da tarefa em conjunto com a

discussão em grupo já que "conseguimos apresentar diferentes propostas de solução dos exercícios e comunicar entre todos" e que "se consegue tirar mais dúvidas", conforme ilustrado por estes dois alunos. Os alunos reconheceram neste momento da aula uma oportunidade de analisar os diferentes pontos de vista e resoluções e ainda partilhar esse momento em grupo turma. No que diz respeito à realização do *quizz* apenas 18% indicaram preferir este momento da aula. Nesta aula em particular, esta situação deve-se ao facto de não termos tido o tempo desejável e de termos ocupado um pouco depois da aula acabar, o que se percebe influenciar a opinião dos alunos.

Tabela 7 - Momento da aula preferido dos alunos

Trabalho autónomo	29%
Resolução da tarefa/discussão em grupo	41%
Realização do *quizz*	18%
Todas	12%

De um modo geral, os alunos gostaram da aula referindo que "houve bastante interação" e que a mesma foi "bastante produtiva e divertida". Nesta aula, a turma demonstrou que evoluiu de forma positiva no que à participação diz respeito, transmitindo a sensação que a sua motivação tem aumentado e que está mais confortável em partilhar as suas ideias comigo e com os colegas.

4.4. Perceção dos alunos sobre a intervenção pedagógica

Uma das questões de investigação às quais me propus responder estava relacionada com a perceção dos alunos sobre as interações com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções. Nesse sentido, após terminar a minha intervenção pedagógica com a turma, foi solicitado que os alunos respondessem a um inquérito final sobre as aulas em que trabalhamos juntos. O questionário foi dividido em duas partes: uma primeira parte composta por questões de resposta fechada, onde os alunos tinham de escolher uma opção segundo o seu grau de concordância (escala tipo Likert) para cada uma das afirmações apresentadas; e uma segunda composta por questões abertas, dando aos alunos uma maior liberdade de se expressarem e de acrescentarem alguma informação que considerassem relevante.

Relativamente à minha postura perante as intervenções dos alunos, a totalidade dos alunos que respondeu ao inquérito (24 dos 26 alunos da turma) foram da opinião que durante todo o tempo em que lecionei tive em consideração as suas intervenções assim como incentivei à participação dos mesmos durante as aulas.

Quando questionados sobre alterações que pudessem ter sentido nas aulas ministradas por mim relativamente às aulas de Matemática que tinham tido até então, os alunos destacaram que "existiu um

maior número de intervenção por parte dos alunos", que "a utilização de materiais tecnológicos aumentou" tornando as "aulas mais dinâmicas" e que a relação criada entre alunos e professora ajudou a que "as aulas se tornem mais interativas". Globalmente, os alunos destacaram a utilização do telemóvel como elemento mais presente, permitindo a utilização do *Pear Deck* para a realização dos *quizzes*, tornando as aulas "bastante divertidas", "cativantes" e "dinâmicas" e também o aumento da participação dos alunos.

Tecnologia

Ao longo da intervenção pedagógica foram utilizados de forma constante elementos tecnológicos com o objetivo de motivar os alunos. Para recolher o *feedback* dos alunos sobre a aplicação desses mesmos elementos, coloquei algumas afirmações para que os alunos pudessem avaliar.

Tabela 8 - Perceção dos alunos (%) sobre a utilização de materiais tecnológicos ($n = 24$)

Afirmação	DT/D	NCND	C/CT
Nas aulas sobre funções utilizei materiais tecnológicos para resolver tarefas.	4%	4%	92%
A inclusão de vídeos e questionários online em alguns trabalhos de casa aumentou a minha motivação para os realizar.	0%	17%	83%
Nas aulas de matemática sobre funções utilizei materiais tecnológicos na análise da resolução de tarefas.	4%	4%	92%
A utilização de materiais tecnológicos nas aulas de matemática desafia o pensamento.	4%	13%	83%
As aulas sobre funções em que utilizamos materiais tecnológicos na resolução de tarefas foram mais motivadoras.	0%	12%	88%

A maioria dos alunos (92%) confirmou a utilização de materiais tecnológicos no domínio das funções tanto na resolução de tarefas como, posteriormente, na análise da resolução das mesmas. Um aluno referiu que este tipo de recursos o auxiliou a "assimilar o que aprendeu". Outro aluno afirmou que a utilização destes materiais "pareceram simplificar o tópico (das funções)" ajudando na sua compreensão. A utilização da calculadora gráfica foi também uma mais-valia uma vez que "ao ver os gráficos das funções ajudou a perceber o que acontecia graficamente quando tínhamos uma função escrita analiticamente".

Os alunos consideraram ainda que as aulas em que foram utilizados esses materiais foram mais motivadoras (88%), assim como os trabalhos de casa realizados com incorporação da tecnologia (83%). Um aluno escreveu que o "facto de os materiais tecnológicos serem uma coisa nova trouxe-me mais motivação para aprender e isso tornou um pouco mais fácil a aprendizagem", enquanto outro aluno

corroborou esta ideia considerando que "mesmo sendo um tema difícil, foi interessante". No que diz respeito ao apoio extra-aula os alunos consideraram que os "vídeos ajudaram a consolidar a matéria em casa" ressalvando a possibilidade de voltar a ver o vídeo de novo perante alguma dúvida. Para além disso, grande parte dos alunos (83%) defende que a utilização da tecnologia permite desafiar o pensamento.

Interações

A turma onde decorreu a prática pedagógica era pouco participativa, apesar de ser muito solícita e bem-disposta. Neste sentido, acredito que grande parte dos alunos não intervinha muito nas aulas devido às suas dificuldades e pouca certeza no conhecimento que detinham. No entanto, a turma sempre demonstrou vontade em fazer parte das aulas de forma ativa, sendo um foco durante a minha intervenção tentar promover momentos em que isso se verificasse. De forma a perceber qual a opinião dos alunos sobre as interações desenvolvidas ao longo da intervenção pedagógica, uma parte do questionário final dizia respeito a este tema.

Tabela 9 - Perceção dos alunos (%) sobre o desenvolvimento de interações nas aulas ($n = 24$)

Afirmação	DT/D	NCND	C/CT
Nas aulas sobre funções surgiram frequentemente momentos de interação entre os alunos e a professora.	0%	0%	100%
Nas aulas sobre funções existiram momentos de discussão coletiva sobre a resolução de tarefas.	0%	0%	100%
Nas aulas sobre funções existiram momentos de interação nos dois sentidos: da professora para os alunos e dos alunos para a professora.	0%	0%	100%
Nas aulas sobre funções senti-me sempre à vontade para partilhar as minhas opiniões e ideias com a professora.	0%	12%	88%
Sempre que intervim nas aulas, a professora interagiu comigo de modo a esclarecer as minhas dúvidas.	0%	8%	92%
Durante as aulas sobre funções, a quantidade de interações existente foi adequada para a aprendizagem ser bem conseguida.	0%	17%	83%
Nas aulas sobre funções os alunos tiveram poucas oportunidades para participar de forma ativa nas aulas.	92%	4%	4%

Todos os alunos concordaram com o facto de terem existido frequentemente momentos de interação entre os alunos e a professora. A totalidade dos alunos corroborou ainda que as interações se desenvolveram nos dois sentidos: da professora para os alunos e dos alunos para a professora. Os alunos reconheceram inúmeras vantagens nas interações estabelecidas como a possibilidade de "ouvir diferentes opiniões" e de "falarmos sobre diferentes resoluções de exercícios", permitindo a "partilha

de ideias e ajuda". Acrescentando a esses factos, alguns alunos referiram ainda que a fomentação das interações "tornou as aulas diferentes e mais dinâmicas" e permitiu que mantivessem "o interessa na matéria" e que fossem "mais ativos".

Os alunos corroboraram todos a existência dos momentos de discussão coletiva para resolução de tarefas durante a minha intervenção. Apesar desta prática ser muito produtiva e benéfica para a construção de conhecimento dos alunos nem sempre é possível que exista em aula por causa da gestão de tempo na sala de aula. A maioria dos alunos (92%) considerou que sempre que interagi com os alunos esclareci as suas dúvidas. A vertente do esclarecimento de dúvidas foi também uma das mais referidas pelos alunos como uma vantagem das interações na sala de aula: "ajuda muitas vezes a esclarecer as minhas dúvidas" e "tiramos dúvidas entre todos".

A tentativa de explorar o melhor possível as interações na sala de aula fez-me estar atenta aos alunos e às suas dificuldades, sendo esse facto também identificado pelos alunos: "Achei que a professora estava sempre a ajudar-nos, sempre disposta a ouvir-nos"; "A professora sempre foi atenciosa comigo e em todas as minhas dúvidas, sempre que até fazia uma cara de que não está a entender a professora rapidamente via pela minha expressão e me questionava logo". Daí quase a totalidade dos alunos (92%) discordar de terem tido poucas oportunidades para participar de forma ativa nas aulas.

Alguns alunos apontaram algumas desvantagens para o aumento de interações como o facto de poder "haver muito barulho, distração e desatenção" por parte dos alunos e ainda a possibilidade de alguns alunos "mais calados sintam pressão para participar nas aulas". No entanto, não estando os alunos habituados a aulas que permitam momentos de discussão em grupo e de trabalho autónomo com os seus colegas, é normal que sintam alguma confusão acrescida na sala de aula. O facto de podermos causar algum desconforto a alunos um pouco mais tímidos é sempre algo que se verifica quando tentamos explorar a comunicação na sala de aula, recordando que é uma competência essencial a ser trabalhada.

Tecnologia na promoção das interações

De forma a perceber de que modo, na opinião dos alunos, a inclusão da tecnologia promoveu a existência de interações na sala de aula, foi criado no questionário final uma pequena parte dedicada à relação entre estas duas temáticas: tecnologia e interações.

Tabela 10 - Perceção dos alunos sobre as interações promovidas pela tecnologia ($n = 24$)

Afirmação	DT/D	NCND	C/CT

A utilização de *slides* interativos nas aulas promoveu a participação dos alunos nas aulas de matemática.	0%	8%	92%
A utilização da calculadora gráfica nas aulas proporciona uma maior interação com a professora.	4%	17%	79%
Durante as aulas sobre funções, em momentos com a utilização de materiais tecnológicos a quantidade de interações foi superior aos outros momentos.	8%	29%	63%
A utilização de materiais tecnológicos ajudou-me a estar mais ativo nas aulas sobre funções.	4%	17%	79%
A utilização da calculadora gráfica nas aulas proporciona uma maior troca de ideias com os meus colegas.	4%	17%	79%

A maioria dos alunos da turma (92%) é da opinião que a utilização dos *slides* interativos através da plataforma *Pear Deck* promoveu a participação dos alunos nas aulas. Um aluno referiu que "é bastante benéfico pois ajuda os alunos a aprenderem a matéria de uma forma mais divertida e descontraída e aumenta a participação na sala de aula". Vários alunos indicam que o aumento da sua participação nas aulas se deve ao facto de as aulas se tornarem mais divertidas e dinâmicas, como exemplifica a seguinte afirmação: "Com estes elementos tive uma melhor participação na aula, pois estas tornaram se mais interessantes".

Relativamente à calculadora gráfica, grande parte dos alunos (79%) considera que a sua utilização proporcionou uma maior interação com a professora assim como um aumento nas interações com os colegas. Vários alunos referiram que as interações resultantes da utilização da calculadora se prendem a maioria das vezes para o esclarecimento de dúvidas sobre a sua utilização uma vez que é o primeiro ano de escolaridade em que os alunos trabalham com este elemento: "Também interagimos mais com a professora colocando as nossas dúvidas, pois a calculadora gráfica, por exemplo, é um dispositivo que começamos a usar no 10.° ano e temos sempre algumas dúvidas".

De um modo geral, na opinião de uma parte significativa dos alunos (63%) os momentos com utilização de materiais tecnológicos tiveram um maior número de interações que os restantes. O aumento das interações com recurso à tecnologia é, na maioria das vezes, justificado pelos alunos com o maior envolvimento dos mesmos no decorrer da aula. Um dos alunos referiu que "com a utilização de materiais tecnológicos a aula ficou mais dinâmica e interessante, logo houve uma maior interação pois com os materiais de tecnológicos há uma maior troca de opiniões". É também referida algumas vezes a possibilidade de trocas de ideias entre os pares: "a utilização desses elementos tecnológicos, ajudou-me a compreender a matéria de uma forma diferente, e permitiu-me a ouvir diferentes opiniões dos meus colegas".

A maioria dos alunos (79%) considerou que esteve mais ativo durante as aulas de funções devido à inclusão da tecnologia no decorrer das mesmas, uma vez que com a sua utilização "a professora conseguiu interagir com a turma toda". Para além disso, os alunos consideram que a utilização de materiais tecnológicos torna as aulas "mais interessantes" o que faz com que se envolvam "muito mais nas atividades".

De uma forma geral, os alunos consideraram a utilização de materiais tecnológicos muito positiva. Para um dos alunos, "as aulas com elementos tecnológicos foram as que correram melhor, pois existe mais interação direta entre a professora e os alunos, existindo mais troca de ideias (...)", o que demonstra que foi possível, mesmo a turma se revelando um pouco difícil no domínio da participação, fomentar as interações com a inclusão de alguns apontamentos tecnológicos. Um outro aluno indicou que, na sua opinião, "a utilização de elementos tecnológicos ajuda na aprendizagem e aumentam as interações entre os alunos e a professora, e entre os alunos entre si".

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

O presente estudo procurou averiguar o contributo da tecnologia na promoção das interações na sala de aula na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. Nesse sentido, apresentam-se neste capítulo as principais conclusões assim como as limitações encontradas e ainda recomendações para trabalhos futuros.

5.1. Conclusões

As conclusões do estudo surgem como resposta às questões de investigação delineadas, tendo como referência os dados recolhidos durante a intervenção pedagógica e também a literatura estudada para a realização deste trabalho.

5.1.1. Que padrões de interação se estabelecem com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções por alunos do 10º ano de escolaridade?

Os padrões de interação foram surgindo com diferentes prevalências conforme a aula. Na aula dedicada à resolução de problema envolvendo a função quadrática, o padrão de funil foi o que ocorreu mais vezes uma vez que os alunos foram impelidos por mim a participar. Como existiu alguma resistência dos alunos em participar, prevaleceu o meu raciocínio, uma vez que com perguntas sucessivas fui orientando os alunos para uma linha de pensamento já definida, conforme constatado por Tanner e Jones (2007). No entanto, nesta aula também se verificou com ênfase o padrão de discussão uma vez que praticamente toda a aula foi dedicada à análise conjunta da resolução da tarefa proposta. Como referido por Almeida (2007), o trabalho de grupo tem como objetivo fomentar a discussão entre os alunos, permitindo que exponham a sua resolução da tarefa. Nesta primeira aula, o padrão que menos se verificou foi o padrão de focalização, uma vez que os alunos já tinham realizado a tarefa anteriormente e, por isso, explorei em vários momentos raciocínios alternativos e não apenas o raciocínio momentâneo dos alunos.

Na segunda aula, o tempo dedicado ao trabalho autónomo definiu o tipo de padrão de interação que mais se verificou – padrão de focalização, exatamente aquele que menos se tinha verificado na primeira aula. Nesta segunda aula, o facto de os alunos trabalharem bastante tempo de forma autónoma permitiu que me colocassem questões e que os pudesse guiar segundo a sua linha de raciocínio, permitindo que os alunos prosseguissem de forma autónoma (Menezes et al., 2014). Na segunda aula,

foram também identificados com frequência os padrões de extração e de recitação. O padrão de recitação verificou-se em momentos de verificação de conhecimentos, procurando nas minhas ações de professora controlar o discurso, como é indicado por Menezes (2005). O padrão de extração está, muitas vezes, associado a dificuldades demonstradas pelos alunos (Menezes, 2004), o que ocorreu com frequência durante o seu tempo de trabalho autónomo. Neste padrão de interação os alunos assumiram também um papel ativo na aula uma vez que iam respondendo às questões sucessivas colocadas por mim (Tanner & Jones, 2007).

Na terceira aula, os padrões de interação resultantes de intervenções mais curtas – padrão de extração e padrão de recitação – foram os mais comuns (Martinho & Ponte, 2005). A frequência mais elevada destes padrões ocorreu já que uma parte significativa da aula foi dedicada à resolução do problema por parte dos alunos. Apesar disso, existiu uma redução do padrão de funil (que se guia pelo raciocínio do professor) e um aumento do padrão de focalização (que se guia pelo raciocínio do aluno). Tanto na segunda como na terceira aula, apesar de mais reduzido o padrão de discussão surgiu ainda durante algum tempo com a troca de ideias em grupo turma sobre as tarefas propostas.

5.1.2. Qual é a influência da inclusão da tecnologia nas interações estabelecidas durante aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade?

O recurso à tecnologia permitiu uma maior motivação e um maior interesse por parte dos alunos, promovendo a sua aprendizagem sobre funções e reforçando, de forma sistemática em cada aula, conceitos elementares no estudo das funções.

Durante a primeira aula, em que foi utilizada como ferramenta tecnológica a calculadora gráfica, os alunos foram levados a "interagir uns com os outros sobre a sua utilização" como afirmou um aluno, com a finalidade de acompanhar a resolução da tarefa proposta com a calculadora e saberem que comandos deviam executar. A utilização da calculadora gráfica desafiou os alunos a darem sentido aos factos e procedimentos em estudo, impelindo-os a participar na realização das atividades da aula (Leite, 2018). Para a maior parte dos alunos, a utilização da calculadora gráfica em tais atividades incrementou uma maior dinamização das aulas em relação às que não exigiram tal utilização. A calculadora permitiu um aumento do envolvimento e participação dos alunos aquando a sua utilização (Kim et al., 2011).

Para incrementar as interações dos alunos durante as aulas, incluí *slides* interativos através da aplicação *Pear Deck* o que se revelou uma ferramenta facilitadora da promoção da participação dos alunos uma vez que eles reconheceram que a sua utilização "dinamiza bastante as aulas" conforme referiu um aluno, possibilitando "discutir vários pontos de vista para cada pergunta" como referiu um

aluno, indo de encontro a Trindade (2014). A utilização dos *slides* interativos indiciou ter aumentado a motivação e o interesse dos alunos na realização das atividades da aula – tal como refere, por exemplo, o aluno: "cativa-nos mais" –, tendo como consequência direta um maior envolvimento no desenvolvimento da aula e uma maior participação conforme defendido por Harper (2018).

5.1.3. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel das interações com recurso à tecnologia na resolução dessas dificuldades?

No que respeita às dificuldades dos alunos, destaca-se a utilização da calculadora gráfica, a representação gráfica de uma função e ainda a interpretação de um contexto real onde esteja inserida uma função.

A aula em que se explorou a tarefa 'As redes socias' possibilitou durante a discussão da sua resolução a utilização da calculadora pelos alunos para poderem confrontar a sua resolução com a resolução gráfica que estava a acontecer no quadro. Os alunos revelaram dificuldades em manusear o menu dos gráficos devido à falta de prática até ao momento da minha prática pedagógica (Viseu et al., 2022). Depois dessa aula, a maioria dos alunos começou a considerar uma melhor exploração da calculadora gráfica. Durante a análise das diferentes resoluções da tarefa, foi possível verificar que os alunos testavam as resoluções gráficas na calculadora e, através da partilha de ideias com colegas e com a professora, foram ultrapassando as dificuldades do seu manuseamento.

Os alunos demonstraram dificuldades em fazer a interpretação dos contextos das tarefas com que se depararam e fazer a transição dessas mesmas situações para a resolução analítica que foi necessária fazer, particularmente na transição entre representações, tal como é referido por Elia et al. (2007). As dificuldades que os alunos mostraram em relacionar as funções com um contexto real foram sendo mitigadas através do trabalho autónomo, onde, na maioria das vezes, através de diálogos com os alunos, foi possível encaminhá-los tirando partido da sua própria linha de pensamento.

Os alunos revelaram ainda dificuldades em expressar oralmente as suas ideias e, de forma mais concreta, em utilizar linguagem formal. Esta dificuldade foi também identificada no estudo realizado por Panaoura et al. (2015), onde os alunos revelaram ter mais facilidade em apresentar exemplos de funções do que em explicar o conceito subjacente. Com a utilização dos *slides* interativos foi possível fomentar as intervenções orais dos alunos uma vez que num primeiro momento já tinham escrito o que pensavam pelo telemóvel, sendo mais fácil surgirem depois as participações de forma oral por iniciativa própria.

5.1.4. Que perceções têm os alunos sobre as interações com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções?

No final da prática pedagógica os alunos apresentaram as suas perceções sobre o ensino ministrado, em particular, sobre o desenvolvimento das interações decorridas durante as aulas com recurso à tecnologia na aprendizagem de funções.

A utilização da calculadora como ferramenta tecnológica revelou-se essencial uma vez que os alunos reconheceram ter pouca prática com a calculadora gráfica, mas a maior parte deles admitiu considerar que a resolução gráfica com recurso à calculadora gráfica era mais simples e mais rápida do que a resolução analítica. Adicionalmente, alguns alunos referiram que a utilização da calculadora permitiu "perceber o que acontecia graficamente" quando era facultada a expressão algébrica da função, tal como é defendido por Viseu e Rocha (2018).

A introdução dos *slides* interativos nas aulas através do *Pear Deck* permitiu um aumento imediato nas interações entre os alunos, tornando-os mais participativos nas aulas. A utilização do *Pear Deck* possibilitou que todos os alunos (sem exceção) se sentissem confortáveis a interagir, mesmo que não verbalmente, mantendo o seu anonimato, o que é uma grande vantagem para alunos mais tímidos ou com mais dificuldades que tenham receio de errar quando participam na aula (Trindade, 2014). Este tipo de ferramentas incentiva que todos os alunos participem nas aulas, permitindo uma maior evolução no decorrer do tempo.

No que diz respeito à utilização do *Pear Deck*, a maioria da turma defendeu que a aplicação incrementou a sua participação, tal como defendem Anggoro e Pratiwi (2023). Do mesmo modo, a turma considerou que a utilização da calculadora gráfica permitiu uma maior motivação e um maior envolvimento, o que é corroborado por Domingos (2017) e por Viseu e Rocha (2018). Desta forma, foi verificado que, na intervenção pedagógica realizada, a utilização de tecnologia promoveu as interações dos alunos.

De um modo geral, os alunos consideraram que as suas interações na sala de aula foram influenciadas pela utilização de tecnologia. A maioria dos alunos afirmou que as aulas sobre funções com materiais tecnológicos eram mais motivadoras e permitiram construir uma ligação mental entre a representação analítica e gráfica de uma função, ultrapassando algumas das suas dificuldades.

5.2. Limitações e Recomendações

Na realização deste estudo, onde se pretendia averiguar o contributo da tecnologia na promoção das interações na sala de aula na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade surgiram algumas limitações. Relativamente às interações na sala de aula, a turma na qual decorreu a minha prática pedagógica demonstrou-se mais inibida a participar do que seria de esperar inicialmente, o que se tornou um desafio constante perante o tema que me propus estudar.

A turma na qual realizei o meu estágio era muito simpática e agradável, tendo construído a imagem que seria uma turma ideal para estudar os padrões de interação. No entanto, com o decorrer do ano e também perante a presença dos intervenientes no processo supervisivo na sala de aula, os alunos retraíram-se um pouco na fase inicial. Desta forma, foi necessário ir adaptando o método de trabalho e a abordagem aos alunos de forma a conseguir uma maior intervenção da parte deles.

Outra questão que pode ser considerada uma limitação deste trabalho é a exigência da recolha de dados para posterior análise. A recolha das produções dos alunos exige que ou os alunos fiquem sem as suas produções ou que as enviem em formato digital o que se traduz numa maior perda de tempo em aula. Este tipo de dinâmicas é normal quando é necessário fazer uma recolha de dados. No entanto, pode resultar num pequeno atraso que exige uma compensação em qualquer momento da aula. A recolha de dados pode ainda ser comprometida pela qualidade das gravações áudio/vídeo uma vez que na fase de exploração de tarefas, por exemplo, os alunos conversam entre si, não sendo possível ter registadas todas essas conversas que se mantêm em simultâneo.

Futuramente, para aprofundar o tema aqui estudado seria importante selecionar uma maior variedade de ferramentas e/ou aplicações tecnológicas (desde que haja tempo para se dedicar a cada uma delas) de forma a comparar as interações que surgem com a utilização de cada ferramenta diferente. Para além disso, considero que seria importante fazer este estudo de forma mais prolongada no tempo para que os alunos se familiarizem com as ferramentas e com os momentos de discussão e de partilha de ideias, não tendo receio de se expressar e contribuir para a construção da aula.

Uma outra melhoria que se pode implementar por quem pretenda estudar as interações na sala de aula passa por dedicar mais tempo à leitura das tarefas propostas, explorando bem aquilo que é solicitado sem que nunca se desça o grau de dificuldade da tarefa. De forma semelhante, pode dedicar-se mais tempo ao trabalho autónomo, promovendo um maior entendimento por parte dos alunos. Assim, será mais provável que os alunos se sintam mais confiantes a intervir no momento de resolução da tarefa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, M. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Dois estudos de caso com futuros professores*. [Tese de mestrado, Universidade do Minho]. RepositóriUM.

Almeida, M., & Fernandes, J. (2010). A comunicação promovida por futuros professores na aula de Matemática. *Zetetiké*, *18*(34), 109–154.

Almiro, J., & Nunes, C. (2009). Os Desafios da Gestão Curricular com o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *105*, 67–72. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1820

Andrade, J., & Saraiva, M. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(2), 137–169.

Anggoro, K. (2021). Pear Deck. *RELC Journal*, *52*(3), 645–647. https://doi.org/https://doi.org/10.1177/0033688220936735

Anggoro, K., & Pratiwi, D. (2023). University students' perceptions of interactive response system in an English language course: a case of Pear Deck. *Research in Learning Technology*, *31*. https://doi.org/https://doi.org/10.25304/rlt.v31.2944

Azevedo, M., Vieira, D., Hager, A., Vieira, J., Vieira, A., Sousa, E., Vieira, L., & Pereira, R. (2021). Kahoot como estratégia lúdica no ensino-aprendizagem da Biologia Celular. *Research, Society and Development*, *10*(12), 1–9.

Balanskat, A., Blamire, R., & Kefala, S. (2006). The ICT Impact Report: A review of studies of ICT impact on schools in Europe. *European Schoolnet.*

Batista, B., Rodrigues, D., Moreira, E., & Silva, F. (2021). Técnicas de recolha de dados em investigação: inquirir por questionário e/ou inquirir por entrevista? In A. Moreira, P. Sá, & A. Costa (Eds.), *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação – recolha de dados* (pp. 13–36). Universidade de Aveiro.

Belchior, F. (2003). Pedagogia, comunicação e existência. *Revista Portuguesa de Peda-Gogia*, *37*(3), 197–230.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Prentice-Hall.

Bower, M. (2017). *Design of Technology-Enhanced Learning: Integrating Research and Practice*. Emerald Group Publishing.

Boyer, C., & Merzbach, U. C. (2012). *História da Matemática*. Blucher.

Brown, A., & Campione, J. (1986). Psychological theory and the study of learning disabilities. *American Psychologist*, *14*, 1059–1068.

Bueno, R., & Viali, L. (2009). A Construção Histórica do Conceito de Função. *Educação Matemática em Revista*, *10*, 37–46. https://www.researchgate.net/publication/280446315

Caetano, A. (2001). Mudança e intervenção organizacional. In J. M. C. Ferreira, J. Neves, & A. Caetano (Eds.), *Manual de Psicossociologia das Organizações* (pp. 531–565). McGraw-Hill.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 11–17.

Carter, M. J., & Fuller, C. (2015). Symbolic interactionism. *International Sociological Association*, *January*. https://doi.org/10.1177/205684601561

Carvalho, C. M., & Portugal, M. G. (2016). O papel da avaliação na melhoria das práticas: Contributos para um projeto de investigação na área da educação de infância. *Educação, Socieade & Culturas*, *47*, 95–113.

Chou, C. (2003). Interactivity and interactive functions in web-based learning systems: A technical framework for designers. *British Journal of Educational Technology*, *34*(3), 265–279.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (5th Ed). Routledge.

Comissão Europeia. (2019). *Key Competences for Lifelong Learning*. Publications Office of the European Union,

Coutinho, C., & Lisbôa, E. (2011). Sociedade da informação, do conhecimento e da aprendizagem: desafios para educação no século XXI. *Revista de Educação*, *XVIII*(1), 5–22.

Couto, A., Aboim, S., Mesquita Dias, B., & Maia-Lima, C. (2023). Potencialidades e limitações de diferentes ferramentas digitais para o ensino remoto das Ciências Naturais e da Matemática. *Sensos-E*, *X*(2), 3–10. https://doi.org/https://doi.org/10.34630/sensos-e.v10i2.4600

Couvaneiro, S., & Pedro, N. (2019). Aprendizagem da língua inglesa com tablets: um estudo com alunos com necessidades educativas especiais. *Journal of Education*, *7*(1), 83–102.

Cunha, E. (2021). Aprendizagens, competências e tecnologias – Um caminho para o ensino do século XXI. *Educação e Matemática*, *162*, 65–68.

Davis, N. E., & Roblyer, M. D. (2005). Preparing teachers for the schools that technology built: evaluation of a program to train teachers for virtual schooling. *Journal of Research on Technology in Education*, *37*(4), 399–408.

Domingos, A. (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino aprendizagem. In *20 anos de temas na EeM* (pp. 126–136). APM.

Domingos, A. (2017). O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática: contributos da investigação. *Educação e Matemática*, *144* e *145*, 59–64.

Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and*

Mathematics Education, *14*, 363–382.

Duval, E., Sharples, M., & Sutherland, R. (Eds.). (2017). *Technology Enhanced Learning – Research Themes*. Springer.

Elia, I., Panaoura, A., & Eracleous, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*, 533–556.

Evans, C., & Sabry, K. (2003). Evaluation of the interactivity of Web-based learning systems: Principles and process. *Innovations in Education and Teaching International*, *40*(1), 89–99.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*, 105–121.

Falloon, G., & Khoo, E. (2014). Exploring young students' talk in iPad-supported collaborative learning environments. *Computers and Education*, *77*(August), 13–28. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.04.008

Ferin, I. (2002). *Comunicação e cultura do quotidiano*. Quimera.

Fonkert, K. L. (2010). Student Interactions in Technology-Rich Classrooms. *The Mathematics Teacher*, *104*(4), 302–307. https://doi.org/10.5951/MT.104.4.0302

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–356). Information Age. https://www.researchgate.net/publication/285328217

Fraser, R., Burkhardt, H., Coupland, J., Philips, R., Pimm, D., & Ridgway, J. (1988). Learning activities and classroom roles with and without computers. *Journal of Mathematics Behavior*, *6*, 305–338.

Frasson, F., Laburú, C., & Zompero, A. (2019). Aprendizagem significativa conceitual, procedimental e atitudinal: Uma releitura da teoria ausubeliana. *Revista Contexto & Educação*, *34*, 303–318.

Frid, S., & Malone, J. (1995). Negotiation of meaning in mathematics classrooms: a study of two year 5 classes. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(2), 132–147.

Gang, B., Zainudin, S., Ibrahim, H., & Chun, L. (2017). A speech-language therapy tool using interactive book app in bahasa Malaysia for special needs children. *Journal of Theoretical & Applied Information Technology*, *95*(13), 3041–3061.

García, M. (2006). La psicologia social como fuente teórica de la comunicología. Breves reflexiones para explorar un espácio conceptual común. *Andamios*, *3*(5), 163–184.

Geiger, V. (2008). The emergence of social perspectives on the use of technology in mathematics education. *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI*. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/GEIGER.pdf

Gil, C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. Editora Atlas.

Godino, J., & Llinares, S. (2000). El Interaccionismo Simbólico en Educación Matemá-tica. *Revista Educación Matemática*, *12*(1), 70–92.

Gomes, J. (2014). A tecnologia na sala de aula. In F. Vieira & M. Restivo (Eds.), *Novas Tecnologias e Educação: Ensinar a Aprender, Aprender a Ensinar* (pp. 17–44). Faculdade de Letras da Universidade do Porto.

Goodwin, F. C. (2017). A utilização do software geogebra no tablet para o estudo das funções. *Formação Docente*, *9*(3), 46–55.

Goodyear, P., & Retalis, S. (2010). Learning, technology and design. In P. Goodyear, & S. Retalis (Eds.), *Design Patterns and Pattern Languages, Technology- Enhanced Learning* (pp. 1–27). Sense Publishers.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.

Guerreiro, A. (2013). Negociação de significados no 1.º ano de escolaridade: Conceitos e processos matemáticos. In A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Eds.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 451–465). APM & CIEd.

Guerreiro, A. (2014). Comunicação matemática na sala de aula: Conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normais sociais e sociomatemáticas. In *Práticas profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 237–260). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Harinarayanan, S., & Pazhanivelu, G. (2018). Impact of School Environment on Academic Achievement of Secondary School Students at Vellore Educational District. *International Journal of Education*, *7*(1), 13–19. https://doi.org/10.5281/zenodo.2529402

Harper, B. (2018). Technology and Teacher–Student Interactions: A Review of Empirical Research. *Journal of Research on Technology in Education*, *50*(3), 214–225. https://doi.org/10.1080/15391523.2018.1450690

Javed, Y., & Odhabi, H. (2018). Active learning in classrooms using online tools: evaluating pear-deck for students' engagement. *Fifth HCT Information Technology Trends (ITT)*, 126–131. https://doi.org/10.1109/CTIT.2018.8649515

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? .*For the Learning of Mathematics*, *12*, 8–14.

Joly, M. (2002). *A Tecnologia no Ensino: Implicações para a Aprendizagem*. Casa do Psicólogo.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of Mathematics: The Case of graphic representations of functions. In H. Steinbring, M. G. B. Buss, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (p.

271-288). NCTM.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classroms that Promote Understanding* (pp. 133–155). Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co.

Kim, K., Horton, L. M., & Amelink, C. T. (2011). Promoting interactions with technology: Review of a college-wide Tablet PC program. *Proceedings of the Human Factors and Ergonomics Society*, 550–554. https://doi.org/10.1177/1071181311551112

Kleiner, I. (2012). A brief history of the function concept. In I. Kleiner (Ed.), *Excursions in the history of mathematics* (pp. 103–124). Springer.

Leikin, R., & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 331–354.

Leite, B. (2018). Aprendizagem tecnológica ativa. *Revista Internacional de Educação Superior*, *4*(3), 580–609. https://doi.org/10.20396/riesup.v4i3.8652160

Liu, C., Sands-Meyer, S., & Audran, J. (2019). The effectiveness of the student response system (SRS) in English grammar learning in a flipped English as a foreign language (EFL) class. *Interactive Learning Environments*, *27*(8), 1178–1191. https://doi.org/10.1080/10494820.2018.1528283

Marné, P. (2021). *Este é o "top 5" das competências que as empresas procuram nos candidatos em 2021*. Forbes Portugal.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática. *Atas Do XVI Seminário de Investigação Em Educação Matemática*, 273–293.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*.

Menezes, L. (2005). Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1.º ciclo no contexto de um projeto de investigação colaborativa. In A. Boavida (Ed.), *Actas do XVI SIEM* (pp. 349–365). APM.

Menezes, L., Ferreira, R., Martinho, M., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135–161). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mercer, N., Hennessy, S., & Warwick, P. (2019). Dialogue, thinking together and digital technology in the classroom: Some educational implications of a continuing line of inquiry. *International Journal of Educational Research*, *97*(March 2017), 187–199. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.08.007

Ministério da Educação. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Direção Geral da

Educação.

Ministério da Educação. (2018a). *Aprendizagens essenciais – Articulação com o perfil dos alunos*. Direção Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2018b). *Aprendizagens essenciais – Articulação com o perfil dos alunos – 6.º ano*. Direção Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2018c). *Aprendizagens essenciais – Articulação com o perfil dos alunos – 9.º ano*. Direção Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2018d). *Aprendizagens essenciais – Articulação com o perfil dos alunos – 10.º ano*. Direção Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. Direção Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2021). *Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 7.º ano*. Direção Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2023). *Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 10.º ano*. Direção Geral da Educação.

Mitchell, R., Charalambous, C., & Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 37–60.

Moser, F. Z. (2007). Faculty Adoption of Educational Technology. *Educause Quarterly*, *30*(1), 66–69.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM

Nevo, D. (2006). Evaluation in education. In I. F. Shaw, J. C. Greene, & M. M. Mark (Eds.), *Handbook of evaluation: Policies, programs and practices* (pp. 441–460). Sage.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: teoria e práxis.* (2ª Ed.). Porto Editora.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., & Philippou, A. (2015). Teaching the concept of function: Definition and problem solving. *Ninth Congress of the European Societyfor Researchin Mathematics Education*, 440–445. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286927

Paul, M., Torgerson, C., Tracz, S., Coy, K., & Wahleithner, J. (2020). Engaging the control-value theory: a new era of student response systems and formative assessment to improve student achievement. *Research in Learning Technology*, *28*(1063519), 1–16. https://doi.org/https://doi.org/10.25304/rlt.v28.2454

Pedro, N. (2011). *Utilização educativa das tecnologias, acesso, formação e auto-eficácia dos professores*. [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *15*, 3–9.

Ponte, J. P. (1992). The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. *The*

Mathematics, *3*, 3–8.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática*, *34*, 2–7.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Ibero Americana de Educação*, *24*, 63–90.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM. https://www.researchgate.net/publication/242643133

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 343–358). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática Matemática*. Direção Geral da Educação.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. (2002). As novas tecnologias na formação inicial de professores: Análise de uma experiência. In M. Fernandes, J. A. Gonçalves, M. Bolina, T. Salvado, & T. Vitorino (Eds.), *O particular e o global no virar do milénio: Atas V Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*. Edições Colibri e SPCE.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação Matemática*, *133*, 26–35.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, *13*(2), 51–74.

Pregum, M., Oakley, G., & Faulkner, R. (2013). Schools going mobile: A study of the adoption of mobile handheld technologies in Western Australian independent schools. *Australasian Journal of Educational Technology*, *29*(1), 66–81.

Prensky, M. (2001). Digital Natives, digital Immigrants: a new way to look at ourselves and our kids. *On the Horizon*, *9*(5), 1–6.

Prensky, M. (2006). Listen to the Natives. *Educational Leadership*, *64*(4), 8–13.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino*. Instituto de Educação - Universidade de Lisboa.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. v. (1998). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Gradiva.

Rocha, H. (2020). Graphical representation of functions using technology: A window to teacher knowledge. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *39*(2), 105–126. https://doi.org/10.1093/teamat/hrz011

Rogers, J. W., & Cox, J. R. (2008). Integrating a single Tablet PC in Chemistry, Engineering, and Physics Courses. *Journal of College Science Teaching*, *37*, 34–39.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B.

Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81–88). PME.

Safuanov, I. (2015). The history of the concept of a function and its teaching in Russia. In K. Krainer & N. Vondravá (Eds.), *Proceedings of the ninth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 1866–1872). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 229–254. https://doi.org/10.1023/A:1026033415747

Sampaio, P., & Coutinho, C. (2015). O professor como construtor do currículo: Integração da tecnologia em atividades de aprendizagem de matemática. *Revista Brasileira de Educacao*, *20*(62), 635–661. https://doi.org/10.1590/S1413-24782015206205

Santos, C., & Dias, C. (2020). Kahoot! Em Ensino à Distância: Uma Experiência em Tempos de Pandemia por CoViD-19. *Interacções*, *16*(55), 123–139.

Santos, S., Cardoso, A., & Lacerda, C. (2016). A planificação na perspetiva dos professores do 1.º ciclo do ensino básico. *Atas Do XIII Congresso SPCE: Fronteiras, Diálogos e Transições Na Educação*, 1045–1053.

Saraiva, M., & Teixeira, A. (2009). Secondary school students understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni Di Ricerca in Didattica (Matematica)*.

Serrazina, M., & Ribeiro, D. (2012). As Interações na Atividade de Resolução de Problemas e o Desenvolvimento da Capacidade de Comunicar no Ensino Básico. *Bolema*, *26*, 1367–1393.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 25–58). Matematical Association of America.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three styles of classroom communication: constructivism, socio-cultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, A. Sierpinska, & M. Bartolini-Bussi (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30–63). NCTM.

Silva, A., & Vanini, L. (2019). Investigação nos processos de ensino e de aprendizagem de funções polinomiais do 1.° grau por meio do software GeoGebra. *RBECM*, *2*(2), 277–293.

Silva, L. (1999). Globalização das redes de comunicação: Uma reflexão sobre as implicações cognitivas e sociais. In A. Alves, P. Campos, & P. Q. Brito (Eds.), *O futuro da Internet* (pp. 53–63). Centro Atlântico.

Steele, M. D., Hillen, A. F., & Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: The case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(6), 451–482.

https://doi.org/10.1007/S10857-013-9243-6

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tanner, H., & Jones, S. (2007). How interactive is your whiteboard? *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, 37–41.

Tapscott, D. (1998). *Growing up digital: the rise of the net generation*. McGraw-Hil.

The New York Times. (2010). *More Professors Give Out Hand-Held Devices to Monitor Students and Engage*.

Traqueia, A., Pacheco, E., & Taveira, E. (2021). Reflexão crítica sobre métodos e técnicas de recolha de dados: investigação-ação. In A. Moreira, P. Sá, & A. Costa (Eds.), *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação – métodos* (pp. 33–50). Universidade de Aveiro.

Trindade, J. (2014). Promoção da interatividade na sala de aula com Socrative: estudo de caso. *Indagatio Didactica*, *6*(1), 254–268.

UNESCO. (2013). *Policy guidelines for mobile learning*.

Venturino, P., & Fernandes-Santos, C. (2020). Quiz mediado por Sistemas de Respostas dos Estudantes como estratégia de ensino-aprendizagem. In *Coletânea Rede de Educação para Práticas Inovadoras, Lúdicas e Inclusivas: contribuições para o ensino de graduação*. EdUFF.

Viseu, F., Martins, P. M., & Rocha, H. (2019). The notion of function held by basic education pre-service teachers. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & M. Martinho (Eds.), *Proceedings of ATEE Winter Conference 'Science and mathematics education in the 21st century'* (pp. 26–37). ATEE and CIEd.

Viseu, F., Silva, A., Rocha, H., & Mendes Martins, P. (2022). A representação gráfica na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. *Educación Matemática*, *34*(1), 186–213. https://doi.org/10.24844/em3401.07

Viseu, F., & Rocha, H. (2018). Percepções de professores de Matemática sobre o ensino de funções e sobre o uso de materiais tecnológicos. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*, 113–139.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *6*(1), 69–118.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp.

163–202). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 149–168). Kluwer Academic Pub.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: funneling or focusing? In H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167–178). NCTM.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(1), 37–85.

ANEXOS

Anexo I – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver uma experiência de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática A.

O desenvolvimento dessa experiência implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e/ou vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e/ou vídeo dos dados necessários à concretização da experiência de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a repensar e a melhorar as minhas estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos.

Agradeço desde já a sua colaboração. Para qualquer esclarecimento adicional pode contactar-me diretamente.

Braga, 18 de novembro de 2020

A estagiária de Matemática,

_____

(Marta Azeredo Morais)

Eu, encarregado de educação do aluno _____, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O encarregado de educação

_____

Anexo II – Questionário inicial

No âmbito do mestrado em ensino de matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário, pretendo dinamizar nas aulas que vou lecionar as interações entre os intervenientes na aula com o intuito de envolver os alunos nas atividades de aprendizagem de tópicos matemáticos que vão ser estudados. Nesta fase inicial, pretendo recolher informação que me permita conhecer características dos alunos da turma onde se realiza a minha prática pedagógica de modo a tê-las em consideração quer nos momentos de planificação das aulas que vou lecionar quer durante a sua concretização.

Os dados recolhidos através deste questionário, preenchido de forma anónima, apenas serão utilizados para fins académicos.

Parte I – dados biográficos

Nome: _____ Nº: _____

Turma: _____ Idade:_____ E-mail da escola: _____

Concelho onde moram: _____ Nacionalidade: _____

Disciplina preferida: _____ Disciplina com mais dificuldades: _____

Nota a matemática no final do ano letivo anterior: _____ Estás a repetir o 10ºano? _____

Informações sobre os pais:

	Nome (1º e último)	Profissão	Habilitações literárias (1)
Mãe			
Pai			

(1) 1ºciclo, 2ºciclo, 3ºciclo, Ensino Secundário, Licenciatura, Mestrado ou Doutoramento.

Agregado familiar (pessoas com quem vivem. Se viverem com algum dos pais apenas escrever o grau de parentesco.):

Grau de parentesco	Nome (1º e último)	Profissão

Encarregado de educação: _____

Hobbys: _____

Pretendes frequentar o ensino superior? _____

Que profissão gostarias de ter no futuro? _____

Tens computador para assistir às aulas à distância? _____

Tens telemóvel com capacidade para videochamadas? _____ E para instalação de aplicações? _____

Se achares que devo saber mais alguma coisa sobre ti, escreve aqui:

_____

Parte II – As aulas de Matemática

1. Quanto tempo, em média, estudas Matemática por semana?

Opções: 0-2h, 2-4h, 4h-6h, mais de 6h

2. Como costumas estudar em Matemática?

	Nunca	Raramente	Algumas vezes	Muitas vezes	Sempre
Estudo Matemática sozinho.					
Estudo Matemática com os meus colegas.					
Estudo Matemática com os meus familiares.					
Estudo Matemática com outras pessoas.					

3. Que temas de Matemática (funções, geometria, estatística, números e operações....) gostas mais? Porquê?

4. Que temas de Matemática (funções, geometria, estatística, números e operações....) gostas menos? Porquê?

5. Quais as tuas maiores dificuldades na disciplina de matemática?

DT: Discordo totalmente; D: Discordo; NDNC: Nem discordo Nem concordo; C: Concordo; CT: Concordo totalmente

6. Interações e tecnologia	**DT**	**D**	**NDNC**	**C**	**CT**
Nas aulas de matemática prevalece o que o professor diz e faz.					
Nas aulas de matemática é considerado o que os alunos dizem e fazem.					
Nas aulas de matemática os alunos têm oportunidade de partilhar ideias com os colegas.					
Nas aulas de matemática costumo utilizar materiais tecnológicos para resolver tarefas.					
Nas aulas de matemática costumo utilizar materiais tecnológicos para discutir a resolução de tarefas.					
Nas aulas de matemática são criados momentos de interação entre os alunos e o professor.					
Nas aulas de matemática são criados momentos de interação entre os alunos.					
As aulas são mais motivadoras quando exploramos materiais tecnológicos na resolução de tarefas.					
As aulas são mais motivadoras quando interagimos com os colegas e com o professor.					
A natureza dos conteúdos matemáticos desafia os alunos a participação na sala de aula.					
A utilização de materiais tecnológicos nas aulas de matemática desafia a pensar.					

7. Finalidade da Matemática					
Aplico a Matemática na minha vida fora da escola					
A Matemática é importante para o estudo das outras disciplinas.					
A Matemática prepara-me para o prosseguimento de estudos.					
A Matemática promove o desenvolvimento da minha capacidade de resolução de problemas.					
A Matemática promove o desenvolvimento da minha capacidade de raciocínio.					
A Matemática promove o desenvolvimento da minha capacidade de comunicação.					
8. Ensino a distância					
Durante as aulas online, a concentração mantém-se igual ao regime presencial.					
As interações que decorrem durante a aula aumentam em regime online.					
Nas aulas online, os alunos participam mais nas aulas.					
A motivação é maior quando temos aulas online.					
As aulas online rendem mais do que as aulas presenciais.					
Os conteúdos que aprendi online ficaram tão bem assimilados como os conteúdos que aprendi presencialmente.					

9. Dos seguintes métodos de trabalho nas aulas de Matemática, assinala três da tua preferência:

□ Resolver tarefas do manual
□ Receber a matéria pelo professor
□ Trabalhar em grupo
□ Passar para o caderno o que é realizado pelo professor
□ Resolver problemas que traduzem situações do dia a dia
□ Discutir as resoluções das tarefas
□ Participar na elaboração de definições/propriedades
□ Explorar materiais tecnológicos na resolução das tarefas propostas pelo professor
□ Trabalhar individualmente

10. Existe alguma aula de matemática que recordes até hoje? Por que motivo te lembras dessa aula?

11. Que alterações achas que podiam ser feitas às aulas de matemática para que se tornassem mais interessantes para ti?

Anexo III - Proposta de calendarização das aulas

12 abril Transformações	Terminar transformações gráficas.
14 abril Quadrática 1	Introdução da quadrática $(y = ax^2)$. Funções quadráticas definidas por $y = a(x-h)^2,\ a \neq 0$.
15 abril Quadrática 2	Resolução de tarefas sobre funções quadráticas definidas por $y = a(x-h)^2,\ a \neq 0$.
20 abril Quadrática 3	Funções quadráticas definidas por $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$. Resolução de tarefas.
21 abril Quadrática 4	Resolução de tarefas sobre a função quadrática
22 abril Dúvidas Geometria	Esclarecimento de dúvidas sobre Geometria.
27 abril Aula de teste	Teste sobre Geometria.
28 abril Quadrática 5	Função quadrática – forma canónica. Resolução de tarefas
29 abril Quadrática 6	Função quadrática – vértice de uma parábola.
4 maio Quadrática 7	Inequações de 2° grau.
5 maio Quadrática 8	Resolução de problemas com a função quadrática.
6 maio Quadrática 9	Questão-aula (generalidades sobre funções e função quadrática) Apresentação da tarefa "As redes sociais"
11 maio Quadrática 10	Resolução de problemas com a função quadrática – tarefa "As redes sociais".
12 maio Quadrática 11/Ramos 1	Se necessário terminar a tarefa "As redes sociais". Introdução à função definida por ramos.
13 maio Ramos 2	Resolução de tarefas sobre a função definida por ramos.
18 maio Módulo 1	Introdução à função módulo.
19 maio Módulo 2	Função definida por $f(x) = a\|x-b\| + c$. Resolução de tarefas sobre função módulo.
20 maio Módulo 3	Equações com módulo.

25 maio Módulo 4	Resolução de problemas com a função módulo.
26 maio Dúvidas Funções	Esclarecimento de dúvidas sobre Funções.
27 maio Aula de teste	Teste sobre Funções.
1 junho Módulo 5	Inequações com módulo.

Anexo IV – Planos de aula

Plano de aula nº10	Comentários
Tópico Funções quadráticas em contexto real	
Objetivo Estudar funções quadráticas que modelem situações reais.	Pretende-se que os alunos sejam capazes de estudar funções quadráticas assim como realizar operações algébricas sobre funções.
Conhecimento prévio Noções sobre o estudo de funções afins; a função quadrática e as suas propriedades e sobre regiões do plano.	Conteúdos referentes ao 3.º ciclo e ao 10.º ano
Formato de Ensino Ensino exploratório	O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão/Sistematização de conhecimento
Tarefa – "As redes sociais" A Filomena é uma fã de redes sociais e tem conta nas redes sociais principais. A partir do momento em que cada perfil é criado, o número de seguidores, em milhares, da Filomena nas redes sociais *Facebook, Instagram* e *Tiktok,* num determinado mês, coincide, respetivamente, com o valor das funções f, i e k definidas por: $f(t) = -0{,}1t^2 + 4{,}4t + 389$ $i(t) = 0{,}06t^2 - 5$ $k(t) = 13t - 626.$ Considera que t varia de 0 a 75, sendo dado em meses desde janeiro de 2015. Por exemplo: • $t = 1$ corresponde a janeiro de 2015 • $t = 24$ corresponde a dezembro de 2016 • $t = 75$ corresponde a março de 2021. No contexto do problema, considera que o domínio de cada função é um subconjunto de 0 a 75. Resolvam as questões seguintes da forma que considerarem mais adequada. Sempre que necessário, o número de seguidores (em milhares) deve ser arredondado às décimas. 1. Qual o máximo de seguidores que a Filomena teve no *Facebook* entre 2015 e 2021?	

2. Quando é que a Filomena criou conta no *Instagram* e no *Tiktok*? Indiquem o mês e o ano. 3. Em que mês (e ano) o número de seguidores no *Instagram* da Filomena ultrapassou os seguidores do *Facebook*? 4. Atualmente qual é a rede social em que a Filomena tem mais seguidores? Desde quando é que isso ocorre? 5. Determina quando é que o número de seguidores do *Facebook* da Filomena foi superior a 400 mil seguidores. 6. Considera a função constante n definida pelo número de seguidores que a Filomena tinha no dia em que o número de seguidores do *Facebook* e do *Tiktok* se igualaram. 7. Os gráficos das funções n e k delimitam uma figura geométrica no plano, contida no $1.^{o}$ quadrante. Identifica-a e define-a por uma condição, incluindo a fronteira. 8. Quando é que a soma dos seguidores do *Instagram* e do *Tiktok* ultrapassou o número de seguidores que a Filomena tinha no *Facebook*? 9. A marca XPTO fez uma proposta à Filomena para um patrocínio. Para ela ter acesso a esse contrato terá de ter, no total, 500 mil seguidores em todas as suas redes sociais. A Filomena conseguiu fechar esse contrato com a marca XPTO? Justifica.	
Exploração 1) Reler a tarefa proposta na aula anterior e relembrar em conjunto com os alunos o contexto da tarefa proposta. 2) Apresentação por parte dos grupos das resoluções que fizeram assim como a sua sustentação. 3) Análise e discussão conjunta por parte da professora e dos alunos das diferentes estratégias de resolução apresentadas.	Relativamente à distribuição do tempo da aula, espera-se que a fase inicial dure cerca de 10min. Assim, serão 80min para as resoluções dos alunos, pelo que teremos 10min para cada questão. As resoluções serão selecionadas num momento anterior à aula.
Síntese final Quais as características do estudo de uma função quadrática mais comuns em problemas que envolvem a função quadrática? Apresenta um exemplo da utilidade da função quadrática em situações do dia-a-dia. O que podem dizer sobre as estratégias de resolução analíticas em comparação com as estratégias utilizando a calculadora gráfica?	
Trabalho de casa – parte 1 da tarefa 9 (pág. 77) do manual adotado **1.** Para vedar um canteiro de relva, com a forma de retângulo, encostado a uma casa, como sugere a figura, são necessários $40\ m$ de rede. **1.1.** Seja x a medida, em metros, do lado do canteiro perpendicular à casa. A função que a cada x faz corresponder a área do canteiro é designada por f. Mostra que $f(x) = -2x^2 + 40x$. **1.2.** Calcula a medida do lado do canteiro encostado à casa para que a sua área seja máxima. **1.3.** Representa graficamente a função f.	Esta tarefa tem como objetivo que os alunos consolidem os conceitos e estratégias trabalhados durante a aula.

1.4. Determina para que valores de x o canteiro tem, pelo menos, $128\ m^2$ de área. **1.5.** O conjunto-solução da inequação $f(x) < 140$ é um conjunto do tipo $]0, a[\ \cup\ ]b, 20[$. Recorre à calculadora gráfica e determina a e b. Apresenta os valores arredondados às décimas.	(tarefa retirada no manual Novo Espaço 10.ºano)
Materiais Manual escolar, caderno diário, marcadores, quadro e calculadora gráfica.	Os alunos podem optar por não utilizar a calculadora.

Plano de aula nº13	Comentários
Tópico Função módulo	
Objetivos Introduzir o conceito de função módulo	
Conhecimento prévio Noção de função afim e de função definida por ramos	Conteúdos referentes ao 3.º ciclo e ao 10.º ano
Formato de Ensino Ensino exploratório	O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão/Sistematização de conhecimento
Da função definida por ramos à função módulo – parte I Considera as funções reais de variável real f e h definidas por: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\quad h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ 1. Representa graficamente cada uma das funções. 2. Da análise dos gráficos desenhados, o que observas? Que características têm em comum? 3. Calcula: a. $f(1)$ e $f(-1)$ b. $f(7)$ e $f(-7)$ c. $h(-2)$ e $h(6)$ d. $h\left(\frac{3}{2}\right)$ e $h\left(\frac{5}{2}\right)$ 4. A partir das imagens calculadas, o que podes concluir sobre as funções?	
Exploração 1) Distribuir a tarefa "Da função definida por ramos à função módulo – parte I" e fazer uma análise geral oral da tarefa com os alunos. 2) Propor aos alunos que respondam às questões da tarefa. 3) Colocar a resolução no Google Classroom. 4) Selecionar dois alunos para irem ao quadro fazer a representação gráfica das funções e analisar com o grupo turma as características que identificaram. 5) Selecionar outros dois alunos para irem calcular as imagens pedida na questão 3 e analisar com o grupo turma que conclusões podemos retirar das imagens calculadas.	Início da aula e distribuição – 5min Trabalho autónomo – 15min Colocar resolução na plataforma – 5min Discussão em grupo – 30min

Da função definida por ramos à função módulo – parte II

As funções f e h podem ser escritas de uma forma mais simples utilizando o símbolo de módulo!

Recorda:

- $|3| =$ _____
- $|-4| =$ _____
- $|2| =$ _____
- $|0| =$ _____
- $\left|-\frac{1}{2}\right| =$ _____

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} = |x| \qquad h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases} = |x-2|$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = |x|$$

$$\downarrow$$

Função módulo

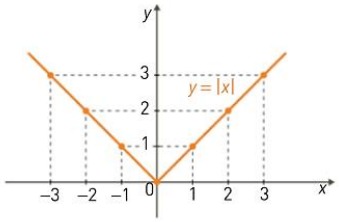
A correspondência que a cada número real associa o seu valor absoluto ou _____ é uma função, pois todo o número real tem _____ valor absoluto.

A essa função dá-se o nome de _____, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$, podendo ser definida por _____ da seguinte forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Gráfico da função módulo

O gráfico da função módulo é formado por duas _____ perpendiculares com origem no ponto $(0, 0)$.



A função f é uma função _____ porque o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.

Exemplos

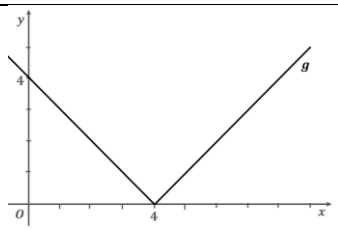
1. $g(x) = |x-4|$

A função g pode ser escrita através de uma função definida por ramos da seguinte forma:

A representação gráfica de g é

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & \text{se } x-4 \geq 0 \\ -x+4 & \text{se } x-4 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$



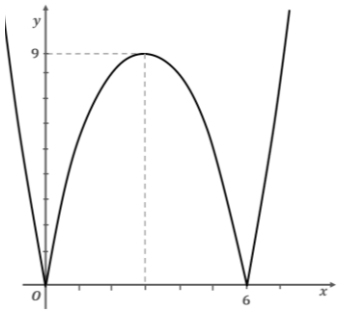
2. $h(x) = |x^2 - 6x|$

A função h pode ser escrita através de uma função definida por ramos da seguinte forma:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{se } x^2 - 6x \geq 0 \\ -x^2 + 6x & \text{se } x^2 - 6x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x & \text{se } x \in]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[\\ -x^2 + 6x & \text{se } x \in]0, 6[\end{cases}$$

A representação gráfica de h é



Prática

Considera as funções reais de variável real f e g definidas por:

$$f(x) = |x-5| \qquad g(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right|$$

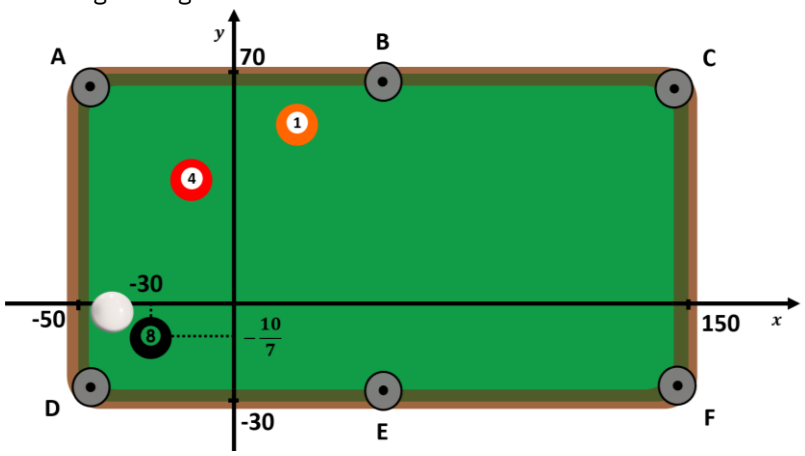
1) Define analiticamente as funções f e g sem utilizar o símbolo de valor absoluto.
2) Representa graficamente ambas as funções.
3) Indica os zeros da função f.
4) Indica o contradomínio da função g.
5) Indica o número de soluções da equação $f(x) = 3$.
6) Indica os valores de k de modo que a equação $g(x) = k$ seja impossível.

Exploração

1) Distribuir a tarefa "Da função definida por ramos à função módulo – parte II" e fazer uma análise geral oral da tarefa com os alunos.
2) Recordar com os alunos o conceito de valor absoluto de um número e fazer a correspondência entre as funções por ramos anteriores e as funções utilizando o símbolo de módulo.
3) Propor que os alunos preencham os espaços em branco na folha através do telemóvel com recurso a *slides* interativos.
4) Analisar das respostas dadas em grupo turma.
5) Analisar os dois exemplos presentes na ficha informativa (se der tempo).
6) Propor aos alunos que resolvam a tarefa disponível no documento entregue (se der tempo).

Recordar conceito e fazer associação – 10min
Completar os espaços – 10min (este templo contabiliza o tempo de tirar o telemóvel e entrar na aplicação)
Análise das respostas – 15min

Trabalho de casa - ver um vídeo disponível no YouTube e responder a um questionário criado através do Google Forms. Vídeo - https://youtu.be/a32hM1aTFKc	
Materiais Manual escolar, caderno diário, marcadores, quadro e calculadora gráfica.	Os alunos podem optar por não utilizar a calculadora.

Plano de aula nº16	Comentários
Tópico Função módulo	Aula de 90 minutos
Objetivo Resolver problemas com a função módulo	Pretende-se que os alunos sejam capazes de estudar a função módulo assim como contextos associados à mesma.
Conhecimentos prévios Noções sobre generalidades de funções, sobre a função módulo e sobre a resolução de equações com módulo e noção de ponto médio e distância entre dois pontos	Conteúdos referentes às aulas lecionadas anteriormente.
Formato de Ensino Ensino exploratório	O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão/Sistematização de conhecimento
Tarefa – A mesa de bilhar O jogo de bilhar é jogado em mesas retangulares com seis buracos. Um jogo de bilhar é ganho quando um jogador/equipa já conseguiu colocar todas as suas bolas nos buracos e, por fim, coloca a bola preta com o n.º 8 num buraco. O Joaquim tem uma mesa de bilhar em casa cujas dimensões são 2 metros por 1 metro. O Joaquim e o seu filho António estão a jogar e o António está a ganhar. Neste momento, falta-lhe apenas colocar a bola n.º 8 num dos buracos, como ilustra a seguinte figura.  (a figura não está desenhada à escala) Antes da tacada final do António, a bola n.º 8 está no ponto G cujas coordenadas são $\left(-30, -\frac{10}{7}\right)$. Na tacada feita pelo António a bola percorreu uma trajetória definida pela função dada pela expressão:	Os alunos selecionados para a resolução da tarefa no quadro serão alunos de diferentes níveis de desempenho. Caso haja dúvidas durante o trabalho autónomo irei sugerir aos alunos que tentem fazer uma representação gráfica da trajetória da bola no desenho disponível da mesa de bilhar.

$$b(x) = \frac{5}{7}\lvert x - 10\rvert - 30\,.$$ Considera a função b restrita ao domínio correspondente ao espaço ocupado pela mesa de bilhar. 1. O António tinha o telemóvel pousado exatamente no meio dos buracos D e E. Terá o telemóvel caído durante a jogada? Considera desprezável a largura da parte exterior da mesa de bilhar. 2. O António conseguiu vencer o jogo nesta jogada? 3. Que distância percorreu no total a bola n.º 8 nesta jogada? Apresenta o resultado, em metros, arredondado às centésimas. 4. Sabendo que durante esta jogada a bola n.º 8 esteve alinhada na horizontal com o ponto médio dos pontos C e F, indica as coordenadas da bola nesse momento.	
Exploração 1) Ler a tarefa proposta juntamente com os alunos, clarificar possíveis dúvidas e verificar a compreensão pelos alunos do que é dado e pedido. 2) Propor aos alunos que explorem e resolvam a tarefa. 3) Resolução das questões por parte de diferentes alunos no quadro ao mesmo tempo que visualizamos as diferentes respostas dadas pelos alunos. 4) Análise e discussão conjunta por parte da professora e dos alunos das resoluções apresentadas e exploração de diferentes resoluções caso existam.	Introdução da tarefa: 10 minutos Exploração da tarefa: 20 minutos (indicar 15 minutos aos alunos) Colocar na *Classroom* e registar as respostas nos *slides* interativos: 10 minutos Discussão/Sistematização: 30 minutos Duração total: 70 minutos
Tarefa – Vaivém Na aula de Educação Física da turma da Rita, o professor decidiu realizar uma prova de Vaivém no pavilhão da escola para avaliar o tempo que cada aluno demorava a fazer o percurso. A prova consistia em percorrer o pavilhão de uma parede à outra e regressar à inicial, em corrida. A função d traduz a evolução da distância (em metros) a que a Rita se encontrava da parede inicial até ao final da prova em função do tempo decorrido (em segundos): $$d(t) = -\frac{3}{4}\lvert t - 20\rvert + 15, t \in [0{,}40]$$ 1. Indica a distância entre as duas paredes que definiam o percurso da prova. Qual a distância total percorrida na realização da prova? 2. Durante a prova existem dois momentos em que a Rita se encontra a 12 metros da parede inicial. Determina esses momentos. 3. Indica um intervalo em que a função seja injetiva e decrescente. 4. Indica um intervalo onde a função não seja injetiva. 5. Indica o(s) valor(es) de k para os quais a equação $d(t) = k$ tem uma e uma só solução.	Caso não seja possível realizar esta tarefa por uma gestão de tempo, irei em alternativa fazer um questionário recorrendo a *slides* interativos.

Exploração 1) Ler a tarefa proposta juntamente com os alunos, clarificar possíveis dúvidas e verificar a compreensão pelos alunos do que é dado e pedido. 2) Propor aos alunos que explorem e resolvam a tarefa. 3) Resolução por parte de diferentes alunos no quadro. 4) Análise e discussão conjunta por parte da professora e dos alunos das resoluções apresentadas e exploração de diferentes resoluções caso existam	Do tempo da aula disponível (20 minutos), espero distribuir a tarefa e conseguir introduzi-la (10 minutos) e dispor de algum tempo para trabalho autónomo (10 minutos). No entanto, penso que não será possível fazer a sua discussão nesta aula.
Materiais Manual escolar, caderno diário, marcadores, quadro e calculadora gráfica.	Os alunos podem optar por não utilizar a calculadora.

Anexo V – Questionários de validação de conteúdo

Questionário associado à tarefa "Da função definida por ramos à função módulo"

DA FUNÇÃO DEFINIDA POR RAMOS À FUNÇÃO MÓDULO

PARTE II

A correspondência que a cada número real associa o seu valor absoluto ou _____ (1) é uma função, pois todo o número real tem _____ valor absoluto.

Students, write your response!

A correspondência que a cada número real associa o seu valor absoluto ou _____ é uma função, pois todo o número real tem _____ (2) valor absoluto.

Students, write your response!

A essa função dá-se o nome de _____ (3), definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$, podendo ser definida por _____ da seguinte forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x > 0 \\ -x & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Students, write your response!

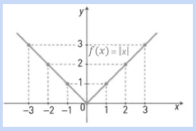
A essa função dá-se o nome de _____, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$, podendo ser definida por _____ (4) da seguinte forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x > 0 \\ -x & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Students, write your response!

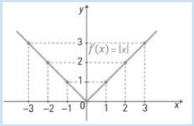
Gráfico da função módulo

O gráfico da função módulo é formado por duas _____ (5) perpendiculares com origem no ponto (0, 0).



Students, write your response!

Gráfico da função módulo



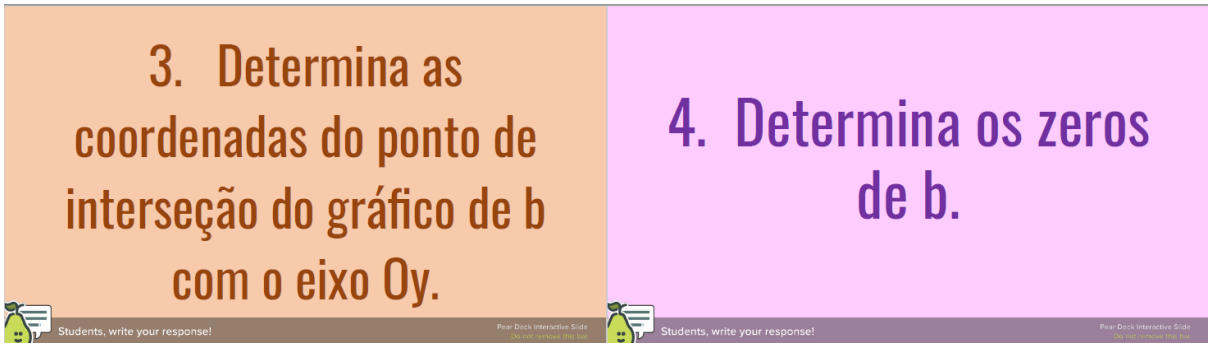
A função f é uma função _____ (6) porque o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.

Students, write your response!

Questionário associado à tarefa "A mesa de bilhar" – função módulo









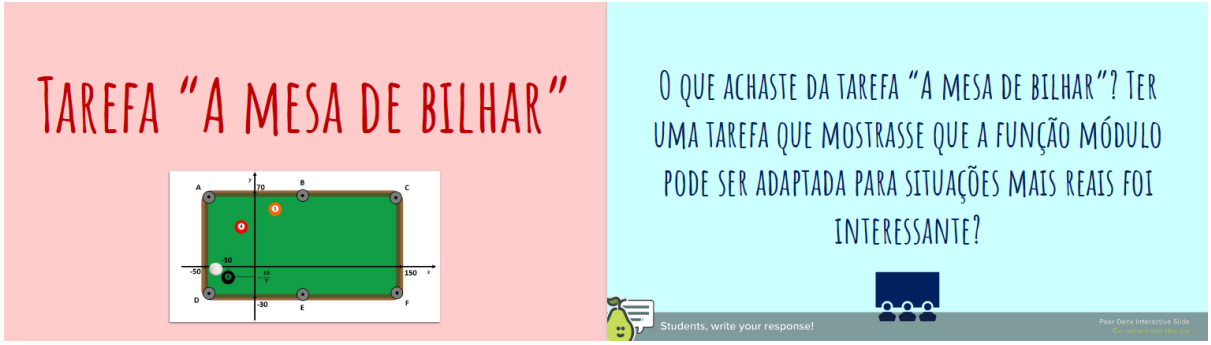

7. Qual das funções seguintes é sempre negativa ou nula?
Students choose an option
Pear Deck Interactive Slide
Do not remove this bar
8. Que transformação gráfica podemos aplicar à função b para ter uma função par?
Students choose an option
Pear Deck Interactive Slide
Do not remove this bar

Anexo VI – Questionários de recolha de opinião sobre as tarefas

Questionário de recolha de opinião sobre a tarefa "As redes sociais"



Questionário de recolha de opinião sobre a tarefa "A mesa de bilhar"




No geral, qual a tua opinião sobre a aula de hoje onde resolvemos a tarefa "A mesa de bilhar"?
A
B
C
D
E
F
70
-50
150
-30
Students, write your response!
Pear Deck Interactive Slide
Do not remove this bar

Anexo VII – Questionário final

No âmbito do mestrado em ensino de matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário, lecionei aulas sobre funções com a finalidade de promover interações entre os intervenientes na aula de modo a envolver os alunos nas atividades de aprendizagem. Com este questionário, pretendo obter as tuas perceções sobre o contributo das interações dinamizadas na sala de aula para a tua aprendizagem de tópicos de funções e sobre a utilização de materiais tecnológicos na promoção dessas interações.

Os dados recolhidos através deste questionário, preenchido de forma anónima, serão utilizados apenas para fins académicos.

1. A cada uma das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz (**X**) a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: **DT**: Discordo totalmente; **D**: Discordo; **NDNC**: Nem discordo Nem concordo; **C**: Concordo; **CT**: Concordo totalmente

	T		**N DNC**		**T**
Atividade da professora					
Nas aulas sobre funções prevaleceu o que a professora disse e fez.					
Nas aulas sobre funções a professora teve em atenção as intervenções dos alunos.					
Nas aulas sobre funções a professora incentivou a intervenção dos alunos durante as aulas.					
Atividade dos alunos					
Nas aulas sobre funções utilizei materiais tecnológicos para resolver tarefas.					
A utilização da calculadora gráfica nas aulas limitou a minha atividade nas aulas de matemática.					
A inclusão de vídeos e questionários online em alguns trabalhos de casa aumentou a minha motivação para os realizar.					
Nas aulas de matemática sobre funções utilizei materiais tecnológicos na análise da resolução de tarefas.					
A utilização de materiais tecnológicos nas aulas de matemática desafia a pensar.					
As aulas sobre funções em que utilizamos materiais tecnológicos na resolução de tarefas foram mais motivadoras.					
Interações (sem tecnologia)					
Nas aulas sobre funções surgiram momentos de interação entre os alunos e a professora.					

Nas aulas sobre funções existiram momentos de discussão coletiva sobre a resolução de tarefas.					
Nas aulas sobre funções a professora interagiu frequentemente com os diferentes alunos.					
Nas aulas sobre funções existiram momentos de interação nos dois sentidos: da professora para os alunos e dos alunos para a professora.					
Nas aulas sobre funções senti-me sempre à vontade para partilhar as minhas opiniões e ideias com a professora.					
Sempre que intervim nas aulas, a professora interagiu comigo de modo a esclarecer as minhas dúvidas.					
Durante as aulas sobre funções, a quantidade de interações existente foi adequada para a aprendizagem ser bem conseguida.					
Nas aulas sobre funções os alunos tiveram poucas oportunidades para participar de forma ativa nas aulas.					
Interações (com tecnologia)					
A utilização de slides interativos nas aulas promoveu a participação dos alunos nas aulas de matemática.					
A utilização da calculadora gráfica nas aulas proporciona uma maior interação com a professora.					
Durante as aulas sobre funções, em momentos com a utilização de materiais tecnológicos a quantidade de interações foi superior aos outros momentos.					
A utilização de materiais tecnológicos ajudou-me a estar mais ativo nas aulas sobre funções.					
A utilização da calculadora gráfica nas aulas proporciona uma maior troca de ideias com os meus colegas.					

2. Durante as aulas de funções que lecionei existiu alguma alteração comparativamente a aulas anteriores que tivesses reparado? Se sim, quais foram as alterações? Essas alterações foram benéficas? Porquê?

3. Qual a tua opinião sobre a utilização de elementos tecnológicos (calculadora gráfica, *quizzes* nas aulas, TPC com base em vídeos e questionários online) durante o tema de funções?

4. Como é que a utilização desses elementos tecnológicos influenciou a tua participação nas aulas sobre funções?

5. Qual a tua opinião sobre as interações que existiram (entre ti e a professora e entre ti e os teus colegas) durante as aulas de matemática sobre funções? Aponta algumas vantagens e algumas desvantagens dessas interações.

6. Por norma, os alunos têm bastantes dificuldades na aprendizagem do tópico de funções. De que forma as interações com recurso a materiais tecnológicos te permitiram ultrapassar essas dificuldades?

7. Comenta a seguinte afirmação: A utilização de materiais tecnológicos permite um maior envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem e promove interações entre os alunos e entre os alunos e a professora.

8. Caso queiras deixar algum comentário/opinião adicional sobre estas aulas podes fazê-lo aqui: