

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Cristina Maria Araújo Sá

A calculadora gráfica e a comunicação escrita:
Experiência com alunos do 10.º ano

Cristina Maria Araújo Sá A calculadora gráfica e a comunicação escrita: Experiência com alunos do 10.º ano

UMinho | 2021

dezembro de 2021



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Cristina Maria Araújo Sá

A calculadora gráfica e a comunicação escrita: Experiência com alunos do 10.º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino
Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação de
Maria Helena Martinho

dezembro de 2021

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



Atribuição-NãoComercial-SemDerivações

CC BY-NC-ND

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer à minha família, em especial atenção ao meu pai por todo o apoio e motivação dado ao longo de toda a minha formação académica e à minha mãe por tentar procurar sempre o melhor para mim.

À minha orientadora, Doutora Maria Helena Martinho, pela sua disponibilidade, dedicação, sugestões e críticas durante toda a realização deste trabalho.

Ao melhor que esta Academia me trouxe, a minha família de praxe que eu tanto os amo. Agradeço ao meu padrinho, por ser “O Padrinho” e por toda a paciência que tem comigo. Às minhas irmãs, Elsa e Sara por todos os momentos passados e todo o amor incondicional. À minha afilhada, Rosinha, pelo apoio e por me acompanhar sempre sem hesitar. À minha avó Marta, por auxiliar em todo o meu percurso e carinho prestado. Ao meu primo Hulk pela amizade e por todas as vezes que deixei as chaves dentro do carro e veio comigo buscar as suplentes.

A todos os meus amigos, em particular, à Lúcia por ter sido a minha parceira nesta caminhada de luta e incerteza de conseguirmos realizar o proposto dentro do tempo limite.

À Ana Veiga e ao Carlos Martins pelas correções e sugestões feitas neste trabalho, assim como toda a disponibilidade para ajudar e todo o incentivo para concluir o mesmo.

A todos vocês, do fundo do meu coração, Obrigada.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

A CALCULADORA GRÁFICA E A COMUNICAÇÃO ESCRITA: EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 10.º ANO

Cristina Maria Araújo Sá

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2021

RESUMO

O presente estudo incide na calculadora gráfica e na comunicação escrita e resulta de uma intervenção pedagógica com alunos de uma turma do 10.º ano, durante a lecionação de conteúdos do tópico Funções. Este estudo teve como objetivo compreender em que medida os alunos conseguem tirar partido da calculadora gráfica para a resolução de tarefas e como registam a respetiva resolução por escrito. Assim, para a concretização deste objetivo, elaboraram-se questões de investigação: 1. Como utilizam os alunos a calculadora gráfica na resolução de tarefas sobre funções? 2. Como registam os alunos a resolução de tarefas sobre funções? Quais os contributos da calculadora gráfica para o registo de tarefas? 3. Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas com recurso à calculadora gráfica e no registo escrito da sua resolução?

Para conseguir dar resposta às questões propostas, recorreu-se a diferentes instrumentos de recolha de dados: uma ficha diagnóstica realizada no início da intervenção pedagógica no ensino à distância; dois questionários, um no início e outro no fim da intervenção; observação; análise documental, onde inclui tarefas realizadas em grupo ao longo do estudo, e uma questão de aula realizada no fim da mesma, sendo realizada individualmente.

Segundo as dimensões da comunicação escrita: *clareza*, *fundamentação*, *lógica* e *profundidade*, identificadas no enquadramento teórico, foram analisados e interpretados os dados recolhidos. A categoria em que os alunos tiveram melhor desempenho, apresentando representações adequadas recorrendo à calculadora gráfica, foi a *clareza*. Na categoria *lógica*, os alunos não obtiveram tão bons níveis com a predominância de níveis baixo e médio, sendo ainda pouco capazes de fazer conexões de ideias entre os resultados obtidos pela calculadora gráfica e o contexto da tarefa de forma clara e precisa.

Palavras-Chave: calculadora gráfica; comunicação escrita; funções.

THE GRAPHING CALCULATOR AND WRITTEN COMMUNICATION: EXPERIMENT WITH 10th YEAR CLASS

Cristina Maria Araújo Sá

Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic Education and High School

University of Minho, 2021

ABSTRACT

The present study focuses on the graphing calculator and written communication resulting from a pedagogical intervention with students from a 10th grade class, during the teaching of contents on the topic Functions. This study aimed to understand to what extent students are able to take advantage of the graphing calculator to solve tasks and how they record the respective resolution in writing. Thus, to achieve this objective, the following research questions were elaborated: 1. How do students use the graphing calculator in solving tasks about functions? 2. How do students register the resolution of tasks about functions? What are the contributions of the graphing calculator to the registration of tasks? 3. What are the difficulties felt by students in solving tasks using a graphing calculator and in recording their resolution in writing?

In order to be able to answer the proposed questions, different data collection instruments were used: a diagnostic form carried out at the beginning of the pedagogical intervention in distance learning; two questionnaires, one at the beginning and one at the end of the intervention; observation; document analysis, which includes tasks performed in groups throughout the study, and a class question held at the end of it, being performed individually.

According to the dimensions of written communication: clarity, reasoning, logic and depth, identified in the theoretical framework, the collected data were analyzed and interpreted. The category in which students performed better, presenting adequate representations using the graphic calculator, was clarity. In the logical category, students did not obtain such good levels, with a predominance of low and medium levels, and were still unable to make connections between the results obtained by the graphing calculator and the context of the task in a clear and precise manner

Keywords: graphing calculator; written communication; functions.

ÍNDICE

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS	ii
AGRADECIMENTOS	iii
DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE.....	iv
RESUMO	v
ABSTRACT.....	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Lista de Quadros	xi
Capítulo 1 Introdução	1
1.1 Tema, objetivo e questões de estudo.....	1
1.2 Pertinência do estudo	2
1.3 Organização do estudo.....	3
Capítulo 2 Enquadramento teórico	5
2.1 A comunicação matemática	5
2.1.1 Comunicação em Matemática	5
2.1.2 Comunicação escrita.....	8
2.1.3 Potencialidades e dificuldades na comunicação escrita	11
2.2 A calculadora gráfica.....	12
2.2.1 A história da calculadora gráfica	12
2.2.2 A calculadora gráfica na aprendizagem em matemática	14
2.2.3 Potencialidades e constrangimentos da calculadora gráfica.....	16
2.2.4 A calculadora gráfica e o ensino das funções.....	19
Capítulo 3 Enquadramento contextual	21
3.1 Contexto de intervenção.....	21
3.1.1 Caracterização da escola.....	21
3.1.2 Caracterização dos participantes	22
3.2 Plano geral de intervenção	24
3.2.1 Metodologia de ensino e de aprendizagem.....	25
3.2.2 Planificação da intervenção pedagógica	26
3.3 Estratégias de investigação e avaliação da ação	27
3.3.1 Instrumentos e procedimentos de recolha de dados	28
3.3.2 Análise dos dados	30
Capítulo 4 Apresentação dos resultados	32
4.1 Opinião dos alunos sobre a comunicação escrita e a calculadora gráfica.....	32
4.2 Conhecimentos dos alunos sobre funções.....	34
4.3 A calculadora gráfica e a comunicação escrita no estudo de funções	37
Capítulo 5 Conclusões	58

5.1	Como utilizam os alunos a calculadora gráfica na resolução de tarefas sobre funções?	58
5.2	Como registam a resolução de tarefas? Quais os contributos da calculadora gráfica para o registo de tarefas? ..	59
5.3	Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas com recurso à calculadora gráfica e no registo da sua resolução?	61
5.4	Reflexões e recomendações	61
Lista de Referências.....		63
Anexos		67
Anexo 1: Questionário inicial		68
Anexo 2: Questionário final		71
Anexo 3: Ficha de Diagnóstico		73
Anexo 4: Organização do estudo		75
Anexo 5: Tarefas exploratórias		78

Lista de Figuras

Figura 1: Resolução do aluno A8 à questão 1.....	35
Figura 2: Respostas dos alunos A5 e A13 à questão 1	35
Figura 3: Resolução do aluno A17 à questão 2.....	36
Figura 4: Resolução do aluno A11 à questão 2.....	37
Figura 5: Relatório escrito apresentado pelo G1.....	39
Figura 6: Relatório escrito apresentado pelo G5.....	41
Figura 7: Relatório escrito apresentado pelo G3.....	42
Figura 8: Resposta do G1 sem recurso à calculadora gráfica	44
Figura 9: Resposta do G4 sem recurso à calculadora gráfica	44
Figura 10: Resolução com recurso à calculadora gráfica G2	46
Figura 11: Representação gráfica com justificação dada pelo G6.....	48
Figura 12: Resolução gráfica e analítica do G1	49
Figura 13: Composição escrita do G4	51
Figura 14: Relatório escrito elaborado pelo G3	53
Figura 15: Resolução da alínea a) do aluno A25.....	55
Figura 16: Resolução da alínea a) do aluno A26.....	56
Figura 17: Resolução da alínea b) do aluno A21.....	56

Lista de Tabelas

Tabela 1: <i>Métodos através dos quais os alunos consideram aprender melhor.....</i>	22
Tabela 2: <i>Desvantagens apontadas pelos alunos no Ensino à Distância.....</i>	24
Tabela 3: <i>Vantagens apontadas pelos alunos no Ensino à Distância.....</i>	24
Tabela 4: <i>Categorias de análise de dados.....</i>	31
Tabela 5: <i>Importância depositada na comunicação escrita pelos alunos.....</i>	33
Tabela 6: <i>Vantagens apontadas pelos alunos à comunicação escrita.....</i>	33
Tabela 7: <i>Vantagens da calculadora gráfica.....</i>	34

Lista de Quadros

Quadro 1: <i>Dimensões e níveis de desempenho na comunicação escrita (Pires et al., 2018, p. 29)</i>	10
Quadro 2: <i>Estrutura da intervenção pedagógica</i>	27
Quadro 3: <i>Instrumentos de recolha de dados</i>	30

Capítulo 1

Introdução

Ao longo do presente capítulo será enunciado o tema, descritos os objetivos e apresentadas as questões de estudo realizadas a uma turma do 10.º ano de escolaridade, com o intuito de desenvolver a comunicação escrita com recurso à calculadora gráfica e perceber a sua importância no estudo dos alunos.

1.1 Tema, objetivo e questões de estudo

No contexto da sociedade atual, é impensável um mundo sem tecnologia. Apesar de existir uma enorme variedade de recursos didáticos, nem sempre é retirado o melhor proveito dos mesmos. Tendo em consideração esta lacuna no processo de aprendizagem dos alunos, o tema de estudo escolhido para a realização do presente relatório incide no uso da calculadora gráfica, e de que maneira os alunos conseguem identificar, processar e passar a informação relevante para o papel.

O uso obrigatório deste material didático, a calculadora gráfica, já é implementado desde o ano letivo 1997/1998, sendo no ensino secundário que os alunos têm o seu primeiro contacto. Neste sentido, o estudo apresentado incide na realização de tarefas com recurso à calculadora gráfica para desenvolver nos alunos a capacidade de interpretação e comunicação escrita dos resultados obtidos, sendo a comunicação um papel importante na aula de matemática. A comunicação é uma capacidade transversal, uma vez que, ajuda a compreender conceitos e a expressar ideias.

O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2017), apela para uma aprendizagem onde exista a capacidade de comunicação e interpretação da informação adquirida pelo aluno. Há quem considere a comunicação escrita mais forte, comparando com a comunicação oral, pois os registos acabam por ajudar “a vincar as ideias, servindo de apoio à reflexão e ao aprofundamento por parte dos alunos e privilegiando os momentos de retorno do conhecimento construído” (Ponte et al., 46). Neste sentido, obriga então, o aluno a ter uma maior reflexão das suas ideias, uma maior organização dos seus registos e uma aprendizagem mais significativa (Pires et al., 2018; Ponte et al., 2007).

O principal objetivo do estudo é compreender, em que medida, os alunos conseguem tirar partido da calculadora gráfica para a resolução de tarefas e como interpretam e registam a respetiva resolução por escrito. Assim, para a concretização deste objetivo, é pretendido responder às seguintes questões de investigação:

1. Como utilizam os alunos a calculadora gráfica na resolução de tarefas sobre funções?
2. Como registam os alunos a resolução de tarefas sobre funções? Quais os contributos da calculadora gráfica para o registo de tarefas?
3. Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas com recurso à calculadora gráfica e no registo escrito da sua resolução?

1.2 Pertinência do estudo

Com o enorme avanço tecnologia verificado ao longo das últimas décadas, é difícil imaginar um mundo sem tecnologia. De forma a dotar os jovens de uma maior capacidade para enfrentar os mais diversos desafios encontrados ao longo da sua escolaridade, é pedido às escolas que acompanhem os avanços da tecnologia com o intuito de melhorar a aprendizagem dos alunos. Com a introdução de novas tecnologias nas escolas, é possível cada vez mais criar novos ambientes de ensino e métodos de aprendizagem da Matemática. Deste modo, não só melhorar a qualidade e os equipamentos presentes numa sala de aula, mas também proporcionar uma melhor interação e perceção da utilização da calculadora gráfica, sendo considerada um instrumento indispensável no estudo dos alunos hoje em dia.

Através do uso da tecnologia orientada para o estudo, considera-se que a mesma apresenta benefícios no ensino e aprendizagem da Matemática (Rocha, 2012). Ao longo do tempo, foram realizadas várias mudanças pedagógicas, como a criação de documentos onde é recomendado e/ou mencionado o uso obrigatório da tecnologia no ensino. Alguns dos documentos levados em consideração na frase anterior são: “Programas de Matemática A. Ensino secundário” e “Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas curriculares”, publicados pelo Ministério da Educação em 2013 e 2016, respetivamente, “Princípios e normas para a matemática escolar” publicado em 2000 pelo NCTM e traduzido em 2007 pela APM.

Segundo o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, o saber científico, técnico e tecnológico é uma das dez áreas de competência. Para declarar esta competência como adquirida, o aluno deve ser capaz de “executar operações técnicas, segundo uma metodologia de trabalho adequada, para atingir um objetivo ou chegar a uma decisão ou conclusão fundamentada, adequando os meios materiais e técnicos à ideia ou intenção expressa” (Ministério da Educação, 2017, p. 29). É também, de

suma importante procurar saber como os alunos recorrem à calculadora gráfica, de forma a potencializar o seu uso e progredirem no seu processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Com o progredir do ensino, o interesse da comunicação matemática pela comunidade de investigação tem vindo a ser cada vez maior. A discussão, a explicitação, e a sistematização de conhecimentos origina uma avaliação dos aspetos nas diversas áreas ainda por explorar no funcionamento da comunicação no ensino da Matemática, levantando “questões transversais relativas à diversidade cultural, ao uso da tecnologia e aos recursos didáticos” (Menezes & Nacarato, 2020, p. 2). Segundo alguns autores, um contributo que auxiliou a reavivar um ensino direcionado para a comunicação matemática foi a publicação do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Ferreira, 2018; Menezes & Nacarato, 2020).

Os relatórios apresentados pelo *Programme for International Student Assessment* (PISA), reforçam a importância de desenvolver a literacia matemática no aluno. A comunicação e as ferramentas matemáticas são duas das sete capacidades matemáticas, consideradas no PISA, como fundamentais. Estas competências, de acordo com o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, vão ao encontro das novas exigências sociais, de forma a preparar os jovens a “reconhecer o papel da matemática no mundo e formular juízos e decisões, fundamentadamente, como se espera de cidadãos participativos, empenhados e reflexivos” (Lourenço et al., 2018, p. 39).

A tecnologia e a comunicação na Matemática são, ainda, temas de preocupação e de investigação, pelo que, na realização deste estudo foi levada em consideração a capacidade de comunicar por escrito, de aplicar conteúdos matemáticos adquiridos por escrito e qual o contributo da calculadora gráfica no desenvolvimento e aprendizagem de funções com alunos do 10º ano de escolaridade.

1.3 Organização do estudo

O presente estudo encontra-se dividido em 5 capítulos distintos.

No segundo capítulo é realizado um enquadramento teórico sobre as diversas formas de comunicação no ensino de matemática, e expostas as suas potencialidade e dificuldades. Por último é efetuado um enquadramento e descrição da importância da calculadora gráfica no estudo.

No terceiro capítulo é apresentado o enquadramento contextual dividido em três subcapítulos cruciais. Em 3.1 é feita uma caracterização da escola e dos participantes do estudo. Segue-se, em 3.2 uma descrição da metodologia de ensino e aprendizagem adotada, sendo em seguida apresentada a planificação realizada para a intervenção pedagógica. Por fim, em 3.3 são descritas as estratégias de

investigação e a avaliação da ação realizada no estudo, sendo enunciados os instrumentos e os procedimentos levados a cabo para a recolha e análise dos dados recolhidos ao longo do estudo.

No decorrer do quarto capítulo serão apresentados e escrutinados os resultados analisados que foram obtidos da realização do presente estudo. Numa primeira instância será abordada a opinião dos alunos relativamente à comunicação escrita em matemática com recurso à utilização da calculadora gráfica. Em seguida segue-se um estudo inicial na forma como os alunos apresentam as suas resoluções por escrito. Por último, apresenta-se uma secção que trata da calculadora gráfica na promoção da comunicação escrita de um problema.

Por fim, no quinto capítulo, são apresentadas as respostas às questões de investigação propostas pela professora investigadora e, por fim, é feita uma reflexão e são referidas algumas recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Enquadramento teórico

No *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, pressupõe-se que “o desenvolvimento de literacias múltiplas, tais como a leitura e a escrita, a numeracia e a utilização das tecnologias de informação e comunicação, são alicerces para aprender e continuar a aprender ao longo da vida” (Ministério da Educação, 2017, p. 19). Neste seguimento, e com o intuito de dar continuidade ao desenvolvimento da comunicação e da utilização das tecnologias na Matemática, este capítulo destina-se ao enquadramento teórico do tema do presente estudo realizado.

Este capítulo, encontra-se dividido em três subcapítulo. No primeiro subcapítulo, 2.1, é efetuada uma breve descrição da importância da comunicação Matemática. No subcapítulo seguinte, 2.2, é efetuada uma breve introdução da calculadora gráfica e a sua importância no estudo e desenvolvimento das capacidades dos alunos.

2.1 A comunicação matemática

A comunicação matemática é uma capacidade transversal que pode ser expressa oralmente ou por escrito, com o intuito de proporcionar ao aluno momentos de reflexão e partilha de conhecimentos e/ou ideias desenvolvidas no seu trabalho na disciplina de Matemática. Em seguida será abordada a comunicação em Matemática, dando destaque à comunicação escrita.

2.1.1 Comunicação em Matemática

No quotidiano, a comunicação encontra-se presente em todas as atividades que o ser humano possa praticar. Menezes (2000), atribui dois sentidos para a definição de comunicação: O primeiro sentido é referente à importância que a comunicação tem para a vida em comunidade e, o segundo sentido é a comunicação de informação entre interlocutores, sendo atribuído a cada um dos intervenientes o poder de argumentar. Boavida (2005) vai ao encontro do citado por Menezes (2000), destacando três características importantes de argumentação: a primeira é a sua importância na interação social, a

segunda o poder de influenciar pessoas e, por último, a relação que cria entre o raciocínio e a lógica quando se pretende defender a ideia em questão. Neste sentido, a comunicação pode ser vista como um processo de interação social ou como uma forma de transmissão de informação ou de defesa de uma ideia (Menezes et al., 2014; Ponte et al., 2007).

A comunicação no ensino da Matemática, ao longo dos últimos anos, tem vindo a ser constante objeto de várias investigações e, cada vez mais, essas investigações estão a reconhecer a importância que esta tem na aprendizagem dos alunos. Vários autores consideram fundamental que os alunos sejam capazes de explicar e fundamentar os seus raciocínios, vendo também a comunicação como um auxílio para a consolidação de conceitos. Ajuda a recordar conceitos antigos e na descoberta de novos, “surgindo, assim, como elemento estruturante do ensino” (Menezes et al., 2014, p. 135; Ponte et al., 2007).

Silva (2018), no seu estudo, conclui que para estarmos perante um bom currículo escolar de Matemática, este “deve contemplar de forma profunda e decidida a competência de comunicação em matemática” (p. 48). Com o reconhecimento de que a comunicação escrita na Matemática é importante na aprendizagem dos alunos, esta passou a ser uma aprendizagem essencial (DGE, 2018), inserida em todos os anos de escolaridade, tratando-se de uma capacidade transversal.

No *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, (Ministério da Educação, 2017), refere a comunicação como uma das dez áreas de competência a desenvolver. Esse desenvolvimento ocorre, na sua maioria, dentro da sala de aula. Há a troca de conhecimentos e pretende-se que o aluno seja capaz de selecionar e analisar informação, proveniente de diferentes fontes, para que transforme a informação em conhecimento de forma crítica e autónoma, “a comunicação é uma ferramenta (meio) e uma capacidade a desenvolver (fim)” (Menezes, 2021, p. 13). Serrazina (2018), considera também ser uma capacidade a desenvolver, vista como um processo mais significativo de aprendizagem e como uma orientação metodológica.

Através da comunicação, existe a oportunidade de os alunos refletirem e organizarem os seus pensamentos, de forma a serem “críticos no contexto matemático” (NCTM, 2007, p. 69). A criação de ambientes que promovam a discussão entre alunos acaba por se refletir numa aprendizagem mais ativa, uma vez que estes sentem-se mais à vontade em partilhar os seus raciocínios e expor as suas ideias. O mesmo já não acontece em ambientes de discussão onde envolva professor e alunos, já que os alunos ficam mais acanhados em participar e o professor, na sua maioria, acaba por controlar o discurso, como no caso da professora Maria, no estudo realizado por Martinho e Ponte (2005).

Quando o aluno está inserido numa discussão, leva os colegas a estarem atentos à sua argumentação para que depois possam concordar, ou contrapor, com o que o colega acabou de dizer. A incitação do professor nestas discussões leva a que, os alunos possam refletir sobre o que vão usar para argumentar e a estabelecer conexões, assim estas

atividades de argumentação matemática enquanto experiências particulares de aprendizagem em que a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático, a formulação e avaliação de conjecturas e a refutação ou prova dessas conjecturas assumem um papel preponderante. (Boavida et al., 2002, p. 18)

Ao professor, cabe assim, ter em atenção ao tipo de tarefas colocadas à turma para que estas sejam desafiantes e relevantes para discussão, de tal forma que qualquer aluno se sinta à vontade para participar e com contributos para dar (Ponte et al., 2007). A procura de estratégias que incentive o aluno a interagir e refletir, de forma a que o professor não seja um mero transmissor de conhecimento, mas um criador de ambientes para um desenvolvimento de competências comunicativas “adequadas aos exigentes desafios destes tempos” (Ministério da Educação, 2017, p. 12), de forma a promover momentos onde os alunos explicitem os seus raciocínios (Serrazina, 2018).

Os alunos, fora da sala de aula, não têm por hábito falar sobre Matemática, pelo que, a comunicação em Matemática não é tão natural como em Português. No entanto, não quer dizer que não o façam, quando falam, por exemplo, da evolução do número de casos da pandemia (COVID-19), onde sem se aperceberem falam da evolução da curva de uma função. A qualidade da comunicação depende do modo como o professor promove a mesma através de tarefas. Neste sentido, quanto mais diversificadas forem as tarefas, mais estas vão contribuir para a comunicação escrita. A diversidade de situações que é possível apresentar aos alunos, leva a que estes não mecanizem os processos de resolução, mas que raciocinem nos diversos casos, de forma a envolverem-se na procura de processos de resolução, para uma futura comparação e defesa de ideias (Boavida et al., 2002). A comunicação, a defesa e comparação de ideias advém do trabalho autónomo que posteriormente leva às discussões coletivas (Serrazina, 2018).

Dentro da sala de aula, as formas mais frequentes de comunicar são através do discurso oral ou através de redações escritas, onde há a partilha de conhecimento entre alunos ou aluno e professor (Menezes, 2000). Assim, vários autores, defendem que “ensinar e aprender são, inegavelmente, processos naturalmente comunicativos” (Faria & Rodrigues, 2020, p. 94).

2.1.2 Comunicação escrita

Grande parte da avaliação sumativa, realizada ao longo do ano letivo, está sujeita a aptidões de comunicação escrita, sendo esta pouco trabalhada na sala de aula (Pires et al., 2018).

Existem várias funcionalidades da comunicação escrita em Matemática, sendo elas o poder de explicar métodos de resolução, informar outros intervenientes do problema ou transcrever a argumentação de/e para terceiros. Esta aptidão é ainda pouco trabalhada na disciplina de Matemática, os alunos acabam por ter alguma resistência, pois consideram o discurso oral mais rápido e menos trabalhoso (Barbosa & Vale, 2019a; Boavida et al., 2002).

A capacidade de expressão escrita possui um maior impacto relativamente à capacidade de expressão oral, uma vez que, antes de escrever temos de refletir, sistematizar e organizar ideias (NCTM, 2007). Quando nos exprimimos oralmente, num curto espaço de tempo, são transmitidas várias informações, tal não se verifica na escrita. A forma e a ordem como escrevemos é essencial para a coerência e interpretação do texto escrito (Cândido, 2018), sendo que, através da escrita existe um maior esforço da parte dos alunos. A comunicação escrita “é valorizada como suporte do discurso oral, correção e formalização da linguagem matemática, pela sua natureza de registo e de permanência para além do momento da aula” (Guerreiro & Martins, 2020, p. 19). O facto de ficar algo registado, permite uma nova reflexão sobre o que escreveram e ajuda a clarificar/consolidar conceitos, podendo sempre ser consultados, os registos, em qualquer momento (Guerreiro & Martins, 2020; NCTM, 2007).

A comunicação escrita é “uma boa competência comunicativa” (Pires et al., 2018, p. 28) que potencializa as aprendizagens no ensino de Matemática sendo estas mais significativas, sólidas e consistentes (NCTM, 2007; Pires et al., 2018).

Barbosa e Vale (2019b) consideram a escrita como uma grande potencialidade no desenvolvimento de competências de comunicação e na proficiência em matemática. A criação de oportunidades para comunicar na matemática deve ser significativa para o aluno, de forma a incentivar o aluno a rever a resposta de forma a apresentar as suas conclusões de forma clara (DGE, 2018). É então, fundamental para a aprendizagem dos alunos, confrontá-los com tarefas que envolvam a justificação dos seus raciocínios de forma clara e com uma sequência lógica, com o intuito de desenvolver a comunicação escrita em matemática (Martinho & Rocha, 2018).

Vários autores, defendem que escrever sobre a Matemática pode ajudar os alunos a melhorar as competências na comunicação em matemática, contribuir para a construção de significados e uma organização das suas ideias para uma melhor justificação das suas opções, uma vez que, como já foi referido, obriga-os “a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca das noções

desenvolvidas na aula” (NCTM, 2007, p. 67). A argumentação, a favor ou contra, das opções dos colegas ajuda à compreensão dos seus conhecimentos pelo professor, onde através dos seus registos, fornecem também, informação ao professor que, de outra maneira, não conseguia. A sua explicitação ajuda, o aluno, a ter uma melhor perceção das suas dificuldades (Braun, 2014; Goma et al., 2020; Menezes, 2020; Ponte et al., 2007; Pugalee, 2004).

São vários os estudos onde se pode ver a influência da comunicação escrita na aprendizagem dos alunos. Num estudo realizado por Faria e Rodrigues (2020), a escrita ajudou os alunos na clareza da comunicação e na mobilidade dos conhecimentos, onde metade dos alunos envolvidos tiveram um desempenho positivo. Um terço das resoluções apresentadas revelaram dificuldades na linguagem, sem uma boa adequação do vocabulário utilizado, e os restantes, apesar de não terem um desempenho positivo ficaram perto de uma boa classificação concluindo, os autores, que os alunos mostraram ter “agilidade para clarificar as suas ideias matemáticas através da escrita” (p. 112).

Magalhães (2010) também realizou um estudo onde se pode verificar como a comunicação escrita trouxe uma aprendizagem bastante significativa aos alunos. Os alunos com dificuldades no raciocínio e na compreensão mostraram, ao longo do estudo, evoluções notórias. O facto de formularem e testarem as suas conjecturas ajudou na argumentação apresentada pelos mesmos, uma vez que tinham de refletir como expor os resultados de forma que estes fossem validados.

No estudo realizado por Guerreiro e Martins (2020), onde estiveram envolvidos investigadores e professores, observa-se uma preocupação da parte dos alunos apenas com o registo do resultado sem darem qualquer tipo de importância ao registo do processo, o que muitas vezes acaba por prejudicar na perceção da resolução do problema através da comunicação escrita da matemática.

Cabe ao professor criar situações diferentes de interação e de exploração de materiais que potencializem a comunicação escrita. No estudo realizado por Martinho e Ponte (2005) é chamada a atenção para a importância de diversificar situações e de como o recurso a materiais e às novas tecnologias podem contribuir significativamente para o trabalho do aluno.

Para uma argumentação mais completa e fiel, o uso de argumentos visuais pode auxiliar na escrita e perceção da matemática. Os alunos, nos seus registos podem fazer-se acompanhar de diferentes representações, tais como, tabelas, figuras, linguagem simbólica, entre outras (Pires et al., 2018; Serrazina, 2018). Ao incluir uma representação visual matemática, esta deve estar em conformidade com o texto de forma a transmitir informações pertinentes (Lee, 2010). Lee (2010) refere ainda vários aspetos a ter em conta no registo da escrita em Matemática, encontrando-se entre eles, a explicitação do problema em questão, supondo que o leitor não está familiarizado; as fórmulas e equações devem

estar no decorrer do texto, tendo sempre gramática, ortografia e a pontuação corretas de forma a ter um discurso escrito claro e fácil de entender e não usar uma linguagem vaga, não esquecendo de descrever cada variável que se utiliza.

A comunicação escrita pode ser analisada através de diferentes dimensões como a clareza, a lógica, entre outras. No Quadro 1, é apresentado o instrumento utilizado para a análise da comunicação escrita da Matemática numa investigação realizada por Pires, Costa e Leite (2018).

Quadro 1:

Dimensões e níveis de desempenho na comunicação escrita (Pires et al., 2018, p. 29)

Clareza		
O aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e representações adequadas.		
Nível baixo: o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas.	Nível médio: o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas.	Nível elevado: o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas.
Fundamentação		
O aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis.		
Nível baixo: o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa.	Nível médio: o aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias.	Nível elevado: o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias.
Lógica		
O aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas.		
Nível baixo: o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos escritos, não mostrando conexões entre as ideias.	Nível médio: o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.	Nível elevado: o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexões entre as ideias.
Profundidade		
O aluno revela, de forma escrita, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar.		
Nível baixo: o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos importantes sobre o assunto.	Nível médio: o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto.	Nível elevado: o aluno revela, frequentemente, o dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.

Estes autores, na sua investigação, concluem que os alunos têm melhor desempenho quando trabalham coletivamente. A dimensão onde os alunos sentiram mais à vontade, no estudo apresentado,

foi na *clareza* expressando-se de forma clara e precisa. Já nas dimensões *fundamentação* e *lógica* são as que acarretam mais dificuldades.

Do mesmo modo, Goma, Manrique e Martinho (2020) utilizaram as mesmas dimensões e níveis propostos por Pires et al. (2018) para estudar a comunicação matemática escrita de futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental em relação ao pensamento algébrico, onde verificaram, na dimensão *clareza* alguma coerência no raciocínio e na apresentação das ideias, mas com uso do vocabulário pouco rigoroso e representações inadequadas. Na dimensão *fundamentação* não apresentam ideias convenientemente, mas alguns registos com rigor. Na dimensão *lógica e profundidade* não constatarem nenhuma evidência de níveis elevados.

2.1.3 Potencialidades e dificuldades na comunicação escrita

A comunicação escrita, apesar de ser uma das dez áreas de competência do *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória*, é ainda pouco trabalhada na sala de aula. Lee (2010) refere que escrever sobre matemática não é a atividade mais fácil, no entanto, escrever bem matemática é uma boa prática para aprender. Esta pode ser usada também como meio para a avaliação (Lee, 2010, NCTM, 2007).

Como referido em 2.1.1 e 2.1.2, o registo escrito efetuado pelos alunos ajuda-os a auxiliar na sua aprendizagem, podendo ser consultados sempre que necessário (NCTM, 2007). Através dos registos são fornecidas informações ao professor que de outra forma seriam esquecidas e ajuda o aluno a perceber as suas dificuldades. Uma das outras potencialidade desta competência é do auxílio na construção da planificação do professor para a sua prática (Martinho & Rocha, 2018).

NCTM (2007) refere ainda que as tecnologias, onde dá o exemplo da calculadora, são considerados um meio potencializador para o auxílio da comunicação. O facto de o aluno registar o seu pensamento, aumenta o seu nível de reflexão sobre os seus pensamentos e melhora a sua compreensão e o seu processo de aprendizagem (Goma et al., 2020). Menezes (2021), sintetiza os contributos fundamentais da escrita para a aprendizagem, sendo eles: (i) O desenvolvimento da compreensão matemática; (ii) Promoção da reflexão; (iii) Desenvolvimento da autoconfiança ao comunicar oralmente; (iv) Registo para auxílio do estudo; (v) Proporciona atitudes positivas em relação à Matemática; (vi) Auxilia na avaliação da aprendizagem da matemática feito pelo aluno e pelo professor.

Os alunos não se encontram habituados a escrever sobre Matemática e quando lhes é pedido que o façam, não gostam de o fazer, considerando que não tem utilidade. Aqueles que escrevem com frequência ganham sensibilidade à forma como apresentam as suas ideias e reconhecem a sua evolução

nos conteúdos trabalhados, sendo “beneficiados duplamente, onde comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente” (Goma et al., 2020, NCTM, 2007, p. 66). O insucesso no registo escrito advém, em alguns momentos, dos alunos não conseguirem transformar o seu pensamento em palavras, sentindo dificuldades a “escrever, e na forma de apresentar a frase e encadear as ideias” (Martinho & Rocha, 2018, p. 34).

No estudo realizado por Guerreiro e Martins (2020) é notório como os professores tentam promover o diálogo, de forma que todos os alunos participem. No entanto, deparam-se que estes não têm conhecimento de como comunicar em geral, não tendo o conhecimento de algumas simbologias que acabam por dificultar a escrita dos registos.

2.2 A calculadora gráfica

No decorrer deste subcapítulo, será efetuada uma abordagem à história e evolução da máquina de calcular e uma contextualização da sua integração na aprendizagem da Matemática, sendo também enunciadas as suas potencialidades para auxílio no estudo e as dificuldades que este instrumento apresenta para o seu domínio.

2.2.1 A história da calculadora gráfica

Muito antes da invenção da máquina de calcular, a maioria dos matemáticos utilizava como instrumento de auxílio de estudo o ábaco, enquanto que os restantes matemáticos recorriam ao cálculo escrito.

Com a crescente evolução da matemática, a pesquisa, a evolução dos meios e as ferramentas de estudo que a sustentam, tem vindo a acompanhar as necessidades da ciência e da sociedade no seu desenvolvimento. Os primeiros homens a contribuir, de forma ativa, para o aparecimento da máquina de calcular foram Wilhelm Schickard (1592-1635) e Blaise Pascal (1623-1662). Decorria o ano 1623, quando Schickard construiu a primeira máquina de calcular mecânica. A máquina de calcular, muito eficiente para a altura, capaz de realizar operações de adição e subtração, não teve a sua devida aceitação e impacto na sociedade da altura (Teixeira et al., 1998).

Mais tarde, Blaise Pascal com o objetivo de ajudar o pai, que trabalhava nos impostos, em 1645 desenvolveu e construiu uma nova máquina de adição e subtração. Foram várias as tentativas realizadas sem sucesso até a máquina de calcular ser construída, acabando por produzir e até mesmo vender cerca de 30 exemplares. A máquina de calcular produzida por Pascal, já era capaz de realizar operações de

multiplicar através de adições sucessivas, e operação de dividir através de subtrações sucessivas, acabando por limitar o seu uso prático. Posteriormente, em 1671, Gottfried Leibniz (1626-1716) concedeu uma máquina de calcular, que realizava diretamente a multiplicação e a divisão, para além da adição e subtração. Contudo, só em 1810 chegaria ao mercado a primeira máquina de calcular comercial (Teixeira et al., 1998).

Em 1812, Charles Babbage (1792-1871) idealizou uma máquina de diferenças para calcular tabelas de funções trigonométricas e logarítmicas automaticamente, e, ao mesmo tempo, uma máquina analítica capaz de realizar operações arbitrárias e com armazenamento interno de dados. No entanto, só mais tarde com a ajuda de Ada Byron (1815-1852) foi possível desenvolver fisicamente as máquinas analíticas.

Decorria o ano de 1890, nos Estados Unidos, quando Herman Hollerith elaborou uma máquina de calcular comercial com a intenção de analisar os dados dos censos realizados naquele ano. Contudo, só no início dos anos 60 é que começaram a aparecer as primeiras máquinas eletrónicas. O seu impacto na sociedade foi de tal forma arrasador, que passados 10 anos aparecem os primeiros modelos em ponto pequeno, sendo alguns capazes de ser transportados no bolso. Desta forma, foram introduzidos no mercado os modelos mais simples, que executavam apenas as quatro operações aritméticas fundamentais, enquanto os modelos mais aprimorados realizavam, para além das operações acima descritas, funções matemáticas tais como exponenciais, trigonométricas, logarítmicas, entre outras (Teixeira et al., 1998).

Só mais tarde, em 1985, uma equipa da Casio do Japão, comandada por Hides Fukaya, lança uma máquina de calcular dotada de um ecrã monométrico de oito linhas de dezasseis caracteres. A juntar a estes atributos, era uma máquina de fácil mobilidade e de baixo custo. Com tais características, a máquina de calcular originou uma revolução em todo o ensino e aprendizagem da Matemática. Ao ser de fácil transporte e acessível a toda a gente, esta passou a ser utilizada pelos professores e alunos, tanto na sala de aula como em casa, acabando por ser implementada a sua utilização em vários cursos do ensino superior, e mais tarde, no ensino secundário (Magalhães, 2010).

A sua notória evolução ao longo dos anos ajudou a resolver tarefas, cada vez mais, dotadas de um maior grau de complexidade. No ano letivo 1995/1996 surgem então, as primeiras orientações no programa, recomendando a utilização das calculadoras gráficas, originando grandes mudanças no programa de ensino em vigor na altura. Com os autores Demana e Waits (1992), a calculadora gráfica passou a ser um objeto indispensável para os alunos, tanto para realizar trabalhos de forma autónoma ou para uso criativo em trabalhos de cariz pessoal (Ministério da Educação; DGE, 2016).

2.2.2 A calculadora gráfica na aprendizagem em matemática

O Centro Nacional de Educação (CNE, 2020), refere a tecnologia como a quarta revolução industrial e a necessidade de o programa de ensino acompanhar a sua evolução, com o intuito de proporcionar os melhores meios para o estudo da Matemática. Por outro lado, nas aprendizagens essenciais (DGE, 2018), referem a tecnologia como uma área de competências do perfil dos alunos. A aprendizagem em tecnologias prepara os jovens para o mundo digital, bem como consegue potencializar o rendimento de aprendizagem de cada aluno. Nos dias de hoje, é cada vez mais importante, ver a tecnologia como “ferramentas cognitivas que propiciam interação, cooperação entre pares, pesquisa, seleção, avaliação, trabalho em grupo, habilidades necessárias para a sociedade em que se vive hoje” (Lopes, 2018, p. 6), uma vez que, os alunos estão mais motivados para o uso da tecnologia e menos recetivos ao uso dos métodos tradicionais de ensino (Lopes, 2018; NCTM, 2007).

O uso da calculadora gráfica no ensino da Matemática é, desde 1997, de uso obrigatório no ensino secundário. Desta forma, é possível afirmar que, “a tecnologia gráfica deve estar presente, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto de avaliação externa” (DGE, 2018, p. 3). Para os autores do programa de matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2013), a tecnologia deve ser utilizada para a compreensão de conteúdos, acabando por priorizar-se a estratégia de resolução e a interpretação dos resultados da tarefa em detrimento dos cálculos a realizar.

Vários autores como Campos (2014), Ponte (1995) e Domingos (2017) referem que a tecnologia possibilita centrar as aprendizagens matemáticas nos alunos, onde estes conseguem desenvolver capacidades cognitivas mais elevadas, uma vez que “as novas tecnologias colocam desafios irrecusáveis à atividade educativa dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático e estender o alcance e a profundidade das aplicações desta ciência” (Ponte, 1995, p. 2). Com a introdução da tecnologia na aprendizagem de Matemática, passou a ser possível diversificar as tarefas a propor aos alunos e, ao mesmo tempo, permitir que executem “procedimentos rotineiros de forma rápida e precisa, o que deixa mais tempo para o desenvolvimento de conceitos” (NCTM, 2007, p. 27). A resolução apenas com recurso à calculadora gráfica, por si só não chega para concluir uma resolução da tarefa em questão, devendo os alunos ter a capacidade crítica de interpretar os resultados obtidos pela calculadora e descrever o seu raciocínio (Ministério da Educação, 2013).

Com recurso à calculadora gráfica, é possível criar ambientes de aprendizagem ricos e inovadores, cooperar na aprendizagem matemática e até mesmo usar com alunos com necessidades educativas especiais. O ambiente gerado pela presença da calculadora gráfica veio, e muito bem, contribuir para demonstrar os diferentes modos de pensar e raciocinar dos alunos (Domingos, 2017). A calculadora

deve ser vista como um auxílio enriquecedor na aprendizagem matemática dos alunos e não “como uma substituição para a compreensão e intuição elementar” (NCTM, 2007, p. 26).

Ao professor é atribuída a responsabilidade de proporcionar tarefas adequadas que envolvam o uso da calculadora gráfica com uma utilização correta e inteligente, de modo que sejam aproveitadas todas as suas potencialidades. Por outro lado, ao aluno, é atribuída a responsabilidade de determinar a adequação da utilização da calculadora gráfica (Consciência, 2013; Magalhães, 2010).

Com o passar dos anos, são cada vez mais os autores a referirem que esta ferramenta veio trazer uma nova interação entre professor-alunos e alunos-alunos, uma vez que pode ser utilizada para apresentar/justificar os resultados obtidos nos testes e previsões perante a turma. Desta forma, é possibilitada a criação de ambientes para a investigação matemática, pelo que, as calculadoras são “detentoras de um grande potencial no âmbito de uma aprendizagem centrada no aluno e na sua compreensão dos conceitos” (Magalhães, 2010, p. 45), sendo o resultado da aprendizagem notório (Magalhães & Martinho, 2011; Ponte, 1995; Ribeiro & Ponte, 2000; Rocha, 2012).

Para alguns autores, os alunos apenas utilizam a calculadora gráfica como ferramenta de confirmação de resultados (Rocha, 2000). No entanto, outros defendem que a máquina de calcular gráfica é vista como uma ferramenta que permite aos alunos aumentarem a sua autonomia e capacidade crítica na resolução de tarefas e na procura e consolidação de conceitos matemáticos. Permite também ao aluno formular as suas próprias hipóteses e dar a oportunidade de testar a sua credibilidade, de forma a focar nas respetivas aprendizagens (Campos, 2014; Magalhães & Martinho, 2011; Ministério da Educação, 2020). Consciência (2013) refere que a sua utilização será melhor quanto mais diversificada forem as situações matemáticas presentes aos alunos.

No estudo feito por Teixeira (2011), os alunos reconhecem que a visualização das representações gráficas é importante na compreensão de tarefas, identificando que os resultados conseguidos algebricamente podem ser obtidos através do que a máquina devolve. Este foi um dos aspetos positivos no combate às dificuldades da comunicação escrita, uma vez que eles utilizaram os dados fornecidos para sustentar as suas ideias. Conforme já mencionado pelos autores Demana e Waits (1996), a visualização é uma mais valia para os alunos, uma vez que ajuda na compreensão de conceitos.

Nas atividades de aprendizagem, Cavanagh e Mitchelmore (2003), através de um estudo com um conjunto de professores, atribuíram três fases de integração da calculadora gráfica no ensino da matemática. Na primeira fase, todo o trabalho realizado é através de papel e lápis, recorrendo à calculadora apenas para confirmar os resultados obtidos. Na segunda fase, a integração da calculadora é vista como um instrumento que possibilita fornecer informações de famílias de funções de forma

rápida, sem deixar de parte a aptidão de traçar gráficos de uma função com papel e lápis. Nestas duas primeiras fases, os autores referem que as aulas estão centradas no professor e na forma como ele utiliza a calculadora gráfica, enquanto que, os alunos apenas se limitam a fazer o que lhes é transmitido, onde posteriormente passam à resolução de tarefas envolvendo esta ferramenta. Por último, na terceira fase, a calculadora gráfica serve para despertar e melhorar a capacidade de antecipar as características do gráfico de uma função, acabando os alunos por terem um papel mais ativo na sua aprendizagem, onde podem explorar e consolidar conceitos.

A máquina de calcular gráfica possui um grande potencial no ensino e aprendizagem do aluno, conferindo-lhe o poder de tomar decisões e, ao mesmo tempo, permitir que este desenvolva um papel mais ativo no seu processo de aprendizagem sempre que, controlada e acompanhada de uma observação crítica. É também preciso ter em atenção que a calculadora não substitui algumas das capacidades matemáticas como a capacidade de resolver problemas e a proficiência (Magalhães & Martinho, 2011; Ministério da Educação, 2013; Rocha, 2015).

2.2.3 Potencialidades e constrangimentos da calculadora gráfica

A integração da calculadora gráfica no ensino e na aprendizagem da Matemática, permitiu que novas práticas fossem implementadas, o que não seria possível sem a sua utilização (Doorman et al., 2007).

Com o conhecimento do funcionamento e as potencialidades da calculadora gráfica para o ensino da Matemática, é possível obter uma maior eficácia na atividade matemática. Hoje em dia, as máquinas são capazes de realizar cálculos de forma exata e eficaz, ajudar na organização e análise de dados, entre outros aspetos (NCTM, 2007), permitindo ao aluno adquirir novas estratégias de resolução nas diferentes tarefas. É também gerado um maior interesse pelos alunos em atividades de modelação, investigação e exploração e pela concretização de projetos. Com a calculadora gráfica a “matemática pode tornar-se mais experimental” e o aluno passa a ter um papel mais ativo e autónomo (Ponte, 1995, p. 7).

Existem defensores de que o uso da calculadora gráfica prejudica a capacidade de abstração, como Albuquerque (1998, citado em Campos, 2014):

seria interessante medir quanto a exagerada utilização e as concessões que se fazem às máquinas pelas suas limitações e resultados aproximados, no decorrer de uma aula, estão formando espíritos menos rigorosos, menos exigentes e mais preguiçosos, tanto da parte dos alunos como dos professores (p. 140).

Ao contrário do que pensa Albuquerque (1998), existem defensores de como a tecnologia, em particular a calculadora gráfica, pode potenciar e ajudar no ensino e aprendizagem dos alunos. NCTM (2007) aponta para o facto da oportunidade de captar atenção e o envolvimento dos alunos utilizando a tecnologia, onde passo a citar: “Aqueles que se distraem facilmente, poderão concentrar-se nas atividades realizadas no computador de forma mais intensa, e aqueles que possuem dificuldades de organização poderão beneficiar das restrições impostas pelo ambiente de trabalho informático” (p. 27).

Para Rocha (2012), entre outros autores, o facto da calculadora gráfica devolver um resultado, em pouco tempo, é uma das suas grandes potencialidades, aliada ao facto de ser possível simplificar um resultado, que de outra forma despenderia de mais tempo e mais cálculos, que por sua vez, pode conduzir a erros algébricos (Consciência, 2003; NCTM 2007; Rocha, 2012). Com a integração da calculadora gráfica a diversidade de tarefas pode ser aumentada, bem como o seu grau de dificuldade, uma vez que, a calculadora gráfica pode ser uma alternativa de resolução face à complexidade de resolver analiticamente (Semião & Canavarro, 2012; Doorman et al., 2007).

À medida que os alunos ficam familiarizados com o uso da calculadora gráfica, passam a recorrer a este instrumento, retirando partido das suas potencialidades gráficas e numéricas. Assim, um dos cuidados a desenvolver nos alunos é relativo à janela de visualização, uma vez que, fornece imagens de diferentes partes de um mesmo gráfico de uma função. A preocupação de ajustar corretamente a janela de visualização verificou-se no estudo feito por Almeida e Oliveira (2009) apelando “ao significado dos valores extremos das variáveis” (p.111) com chamada de atenção para a ligação entre as diferentes representações “para possíveis discrepâncias entre o gráfico esperado e a imagem produzida no visor da calculadora” (p. 111).

A possibilidade de a calculadora gráfica fornecer vários gráficos ao mesmo tempo permite ao aluno analisar/comparar diferentes funções em simultâneo, mesmo antes de o aluno ter adquirido conhecimentos suficientes para um estudo analítico, de forma a fazer uma abordagem às funções com mais ênfase nos gráficos e na sua interpretação (Consciência, 2013). No entanto, no programa do ensino secundário (Ministério da Educação, 2013) é referido que os conhecimentos adquiridos analiticamente sobre uma função podem contribuir para uma melhor adequação da utilização da calculadora gráfica no ensino e aprendizagem do aluno.

A visualização em Matemática traz a possibilidade de estabelecer uma melhor “compreensão dos conceitos matemáticos, visto completar a aprendizagem simbólica e visual” (Magalhães, 2010, p. 47). Já Lee (2010), refere que “uma imagem vale mais que mil palavras” (p. 13), podendo esta “imagem” transmitir informações importantes para o leitor.

Acrescentar ou modificar um dado parâmetro na expressão da função, pode ser identificado através da visualização dos gráficos (Doorman et al., 2007). Dá aos alunos a capacidade de desenvolver e explorar diferentes representações e construir vários exemplos (Campos et al., 2015; Cavanagh & Mitchelmore, 2003; Consciência, 2013; Ocak, 2008). A calculadora gráfica, pode ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos e, por isso, vários autores apontam um papel importante para a calculadora gráfica no estudo das funções, mais precisamente, nas relações entre a representação gráfica e a representação algébrica.

Num estudo, feito por Silva e Seixas (2010), é verificado que o uso da calculadora gráfica favorece o desenvolvimento de capacidades de comunicação, de pesquisa, da autonomia e do espírito crítico, salientando que revela ser uma poderosa ferramenta no auxílio da aprendizagem. O facto de os alunos estarem libertos do cálculo, têm espaço para se concentrarem nas variáveis das tarefas e “permite uma abordagem mais significativa e mais profunda dos conceitos bem como o facto de favorecer uma abordagem indutiva e experimental da Matemática” (Consciência, 2003, p. 34).

No ensino-aprendizagem com a influência da calculadora gráfica, Rocha (2012) refere três aspetos, sendo dois mais alusivos à aprendizagem e um ao ensino. O primeiro aspeto apontado pela autora, é a respeito das dúvidas que possam surgir aos alunos como, por exemplo, sobre a exatidão da máquina e a sua articulação nas diversas representações, originando assim dificuldades aos alunos. O segundo aspeto, centra-se no conhecimento que o professor tem dos alunos em relação ao uso que eles dão à calculadora gráfica, uma vez que, pode ser utilizada de diferentes formas, e por vezes, gerar falta de concordância matemática. O último aspeto prende-se com as potencialidades da calculadora perante uma diversidade de tarefas com que o professor confronta os seus alunos e como podem estas influenciar a dinâmica da aula e o processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com o programa (Ministério da Educação, 2013) é fundamental que os alunos tenham noção e conheçam as limitações da calculadora gráfica. Consciência (2013), salienta também alguns aspetos que se deve ter em conta na utilização da calculadora como: a precisão numérica, o modo de representação do gráfico de uma função, a exploração de vários *zooms*, a representação gráfica de famílias de funções e visualização de várias representações em simultâneo.

NCTM (2015), refere que o acesso à tecnologia potencializa o ensino e a aprendizagem da Matemática, com o aumento das informações e ideias. Quando usado estrategicamente ajuda o aluno na sua reflexão e comunicação, como se pode verificar no estudo de Magalhães (2010), em que a calculadora contribuiu para a discussão e partilha de raciocínios. Rocha (2002), refere que as calculadoras são, na sua maioria, utilizadas para fins de cálculo, levando o aluno a depender da

calculadora nos cálculos mais simples, que acabam por não treinar o cálculo mental e a confiar plenamente na calculadora sem um pensamento crítico. Além disso, é possível afirmar que o uso desajustado desta ferramenta pode levar o aluno a induzir em erro. Ribeiro e Ponte (2000) recomendam que o professor reflita sobre as suas aulas e a atividade dos alunos de forma a progredir no trabalho realizado dentro da sala de aula.

A utilização da calculadora gráfica, por parte do professor tem influência no aproveitamento feito pelos alunos, uma vez que, tendem a seguir os métodos trabalhados na sala de aula, por isso, é importante que o professor procure um uso correto e eficiente (Rocha, 2000; Semião & Canavarro, 2012). Na opinião de Consciência (2003), as limitações desta ferramenta, podem ser utilizadas pedagogicamente, através do confronto dos alunos e das limitações da máquina, explorando as diversas situações que daí possam ocorrer. O uso continuado da calculadora leva a uma melhor destreza da parte dos alunos, acabando por adquirir, cada vez mais, uma atitude mais crítica e reflexiva (Rocha, 2000).

No estudo feito por McCulloch, Keene e Kenney (2013), foi possível concluir que os alunos ao possuírem uma ferramenta que lhes permita confirmar os resultados, tornam-se mais confiantes na sua atividade, e através do uso da calculadora gráfica, as aulas tornam-se mais dinâmicas e menos tradicionais, onde as

atividades de classificação e registo podem levar a descobertas que, por meio de reflexão e generalização, resulta em teoremas interessantes. Isso contrasta com o método tradicional, em que as definições e teoremas são apresentados no início da aprendizagem, na expectativa de que a compreensão seja adquirida através da aplicação repetida (Doorman et al., 2007, p. 416).

O hábito de exploração e consolidação de conceitos, por parte dos alunos, pode ser implementado com o recurso à calculadora gráfica, bem como a oportunidade de conjecturar as suas próprias hipóteses e testá-las. Apesar de cada um ter a sua própria máquina, não restringe os momentos de partilha com os restantes colegas e com o professor, acabando por ter um apoio para a estruturação do pensamento, permitindo um melhor raciocínio e compreensão das ideias (Campos, 2014; Magalhães & Martinho, 2011; NCTM, 2007; Rocha, 2012; Semião & Canavarro, 2012).

2.2.4 A calculadora gráfica e o ensino das funções

Com o notório avanço tecnológico da sociedade, verificado ao longo dos últimos anos, as capacidades matemáticas que o sustentam encontram-se em constante evolução, de forma a proporcionar as mais diversas provas e meios da sua correta evolução. A “relação entre o ato de resolver

e o ato de exprimir torna-se mais robusta, e também mais notória, quando as tecnologias digitais estimulam o desenvolvimento de uma abordagem ao problema e suportam a expressão de pensamento matemático” (Jacinto, 2018, p. 78).

No contexto do atual Programa de Matemática do Ensino Básico, as funções são referidas pela primeira vez no 3.º Ciclo, no domínio das Funções, Sequências e Sucessões. Assim, os alunos abordam explicitamente o tema das funções no 7.º ano de escolaridade, onde estudam a sua definição e as operações com funções numéricas. No ano seguinte voltam a ouvir falar nas funções ficando a saber identificar os gráficos de funções afins e a representá-los, ao passo que, no 9.º ano de escolaridade abordam as funções algébricas.

Relativamente aos Programas de Matemática do Ensino Secundário para Cursos Científico-Humanísticos, os alunos não voltam a abordar o tema das funções de forma direta. Já os alunos que frequentam Matemática B abordam as generalidades acerca de funções reais de variável real e o estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e cúbicas, bem como dos seus gráficos.

Os alunos que estão inseridos nesta investigação frequentam a disciplina de Matemática A, assim, interessa saber mais detalhadamente o que é abordado nesta mesma disciplina. A turma inicia o estudo das funções com as generalidades de funções reais de variáveis reais, de seguida, estuda as funções quadráticas, módulo e funções definidas por ramos e, por último, os polinómios. Os alunos que participam nesta investigação, desde o seu 7.º ano de escolaridade, ouvem falar do termo “função”, pelo que, já devem ter um conhecimento prévio do conceito bem como as suas operações.

A aprendizagem dos alunos, depende também, das ferramentas utilizadas na sala de aula e como são usadas. O estudo de funções, através da calculadora gráfica, permite obter representações, que podem ajudar na compreensão do gráfico de uma função. Essas construções, são aproximações das representações dos gráficos de funções. O que a calculadora gráfica apresenta, é através de um ecrã reduzido, o que pode dificultar a procura de uma boa janela de visualização, sendo que, é necessário que haja um incentivo a experimentar vários *zooms* (Teixeira et al., 1998).

Consciência (2003), verificou uma maior facilidade no reconhecimento e identificação de funções através do uso da calculadora gráfica, onde os alunos tiveram sucesso na resolução de problemas verificando também um progresso no conceito de função de um nível operacional para um nível estrutural. Verificou também as dificuldades a estabelecer conexões entre representações de uma função, pelo que, “a calculadora gráfica pode desempenhar um papel bastante importante, em particular no estabelecimento de conexões entre a representação algébrica e a gráfica” (p. 514).

Capítulo 3

Enquadramento contextual

No decorrer do presente capítulo será efetuado um enquadramento contextual do estudo realizado. O capítulo 3 encontra-se então dividido em três partes. Na primeira é apresentada a caracterização da escola e da turma que participou neste estudo, seguindo-se o plano geral de intervenção e por último os métodos de recolha e tratamento de dados.

3.1 Contexto de intervenção

Para uma melhor perceção do meio onde o estudo foi realizado, no presente subcapítulo será efetuado uma contextualização do ambiente de intervenção. Desta forma, será apresentada a caracterização da escola e dos participantes escolhidos para o estudo realizado.

3.1.1 Caracterização da escola

O projeto de investigação foi implementado numa escola do concelho de Braga, no Curso Ciências e Tecnologias numa das turmas do 10.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática A. A escola tem como base os princípios orientadores da educação inclusiva, tendo especial atenção ao percurso realizado anteriormente pelo aluno proveniente de contextos sociais, culturais e económicos diferentes. É uma escola que ao longo dos anos se preocupa por garantir aprendizagem de qualidade a todos os alunos, bem como, a igualdade no acesso e no sucesso educativo dos alunos com necessidades educativas especiais, sendo esta representada por 4% da comunidade escolar.

O agrupamento é distinguido pela diversidade de modalidades de educação e formação, integra todos os níveis de ensino desde a educação pré-escolar ao ensino secundário (regular e profissional) e modalidades de educação de adultos. Dentro da população escolar, mais de 20% dos alunos são apoiados pelo serviço de ação social escolar, existem mais de 300 profissionais na função docente e cerca de 100 profissionais na função não docente (Assistentes Técnicos e Assistentes Operacionais).

O projeto do agrupamento está direcionado para a comunidade local e para a relevância social da ação educativa. Assim, no contexto apresentado, a sua missão é de desenvolver percursos formativos e

educativos de forma a dar a cada aluno os conhecimentos, as capacidades e as atitudes facilitadores de um projeto de vida individual e inserido na sociedade.

Promover o sucesso, a equidade social e prevenir o abandono escolar são alguns dos princípios deste agrupamento. Abarca com práticas pedagógicas no sentido de favorecer a comunicação, a reflexão e o trabalho de projeto. São criadas atividades artísticas, das ciências naturais e tecnologias, do desporto e das humanidades e da educação para a cidadania, com o intuito de desenvolver valores dos saberes.

3.1.2 Caracterização dos participantes

A turma onde foi implementado o projeto tem 25 alunos, dos quais 15 raparigas e 10 rapazes. A moda da idade da turma é de 15 anos. Destes vinte e cinco alunos, onze referem ter apoio no estudo de Matemática fora da escola, dois referem não ter qualquer tipo de ajuda e os restantes têm apoio dos familiares mais próximos.

Através de dois questionários realizados, um no início e outro no final da intervenção, possibilitou uma melhor caracterização da turma (Anexo1; Anexo 2). Três dos alunos indicaram estudar menos de uma hora para a disciplina. Há ainda um aluno a referir que não pretende ingressar no ensino superior, os restantes pretendem ingressar em cursos como Engenharia Informática, Aeronáutica Militar, Bioquímica, entre outros. Doze alunos classificaram o seu desempenho na disciplina de Matemática com “Muito bom” ou “Bom” e 5 alunos qualificaram o seu desempenho como “Fraco”. A turma, na sua maioria, considera que aprendem melhor quando resolvem exercícios e tentam resolver problemas, dados estes presentes na Tabela 1.

Tabela 1:

Métodos através dos quais os alunos consideram aprender melhor

Tipos de resposta	Frequência
Quando escreves no caderno o que o professor vai explicando	12
Quando fazes exercícios	24
Quando participas ativamente	6
Quando memorizas a matéria à medida que vais escutando	8
Quando transcreves do quadro/monitor a matéria	11
Quando trabalhas em grupo	7
Quando tentas resolver problemas ou desafios matemáticos	13

No início da intervenção pedagógica, dos vinte e cinco alunos, dois não sabiam se a comunicação escrita é importante para o seu processo de ensino-aprendizagem e dois consideraram que não é importante, referindo que na Matemática não deveria ser necessário escrever, apenas apresentar cálculos. Acrescentam ainda que escrever em matemática obriga ao uso “exclusivo” de linguagem simbólica. Estes alunos, no fim da intervenção pedagógica, acabaram por mudar de ideias considerando que a comunicação lhes pode trazer benefícios para a sua aprendizagem.

Todos os alunos consideraram, a disciplina de Matemática importante para o seu futuro profissional. No entanto, referem a falta de estudo como a principal causa de dificuldade na disciplina. Fora do contexto escolar, os alunos têm noção da importância da Matemática e referem situações do quotidiano como por exemplo, que envolvem dinheiro ou a escolha de um trajeto mais curto. Os alunos desta turma demonstram ser trabalhadores e bastante participativos, envolvendo-se nas atividades propostas e não se acanham em expor as suas dúvidas.

Devido à pandemia a intervenção realizou-se em dois contextos diferentes, inicialmente *on-line* e posteriormente presencial. A formação dos grupos no ensino à distância foi realizada pela professora investigadora de forma que não houvesse grupos desequilibrados. Contudo, com o voltar do ensino presencial estes grupos foram reorganizados de acordo com os lugares que ocupavam na disposição das mesas na sala de aula, com o intuito de evitar o maior contacto entre os alunos.

Contudo, apesar do avanço tecnológico permitir, em certa medida, a formação de crianças e jovens no sistema educativo através do ensino à distância, esta alternativa acarreta desvantagens. A desvantagem mais apontada pelos alunos foi a dificuldade em compreender a matéria, como se pode observar na Tabela 2.

Alguns alunos consideram também que existe um maior desgaste físico, pois passam demasiadas horas em frente ao computador e a maioria das aulas são síncronas e monótonas. O facto de o professor estar condicionado a ir à beira do aluno tirar dúvidas, faz com que este desmotive e o leve a distrair-se mais facilmente.

Tabela 2:*Desvantagens apontadas pelos alunos no Ensino à Distância*

Tipos de resposta	Frequência
Falta de convívio entre alunos	4
Dificuldade em compreender a matéria	11
Maior desgaste físico	5
Falta de condições	7
Dificuldade em expor dúvidas/falta de apoio	5
Distrações do exterior	5
Excesso de trabalhos	3
Falta de motivação	3
Métodos de avaliação	2

No entanto, existem algumas vantagens a ter em consideração pelos alunos. A maioria, como se pode observar na Tabela 3, refere que assistir às aulas no conforto de suas casas é a maior vantagem do ensino à distância. Referem ainda, que existe, uma maior organização e explicação dos conteúdos lecionados pelo professor, acabando por cativar uma maior atenção dos alunos. Com tais melhorias, o tempo, para retirarem apontamento e esclarecerem dúvidas acaba por ser maior, conferindo uma maior organização do estudo do aluno.

Tabela 3:*Vantagens apontadas pelos alunos no Ensino à Distância*

Tipos de resposta	Frequência
Maior organização	7
Menor pressão	3
Mais conforto	10
Maior autonomia	7
Maior participação	3

3.2 Plano geral de intervenção

No decorrer deste subcapítulo, irá ser efetuado um breve enquadramento sobre as metodologias de ensino e de aprendizagem adotadas, abordando os diversos métodos adotados. Em seguida, é

apresentada a planificação da intervenção pedagógica, sendo explanados os diversos momentos que a constituem.

3.2.1 Metodologia de ensino e de aprendizagem

Para o ser humano aprender ou ensinar algo, é necessário a implementação de diversas metodologias de ensino e aprendizagem, de acordo com os objetivos definidos para tal. O modelo mais comum de ensinar Matemática é centrado no professor, na exposição de tópicos e posteriormente na realização de exercícios por parte dos alunos a fim de verificar a absorção da matéria lecionada. Contudo, esta prática não se revela a mais adequada para todas as exigências curriculares (Canavarro et al., 2012).

O Ministério da Educação (2013), apresenta indicações metodológicas, cabendo a cada professor implementar a metodologia que melhor se enquadra em cada turma. Assim, a professora investigadora tendo em consideração o ano de escolaridade e as características dos alunos, recorreu ao ensino exploratório para ajudar os alunos a obter o melhor desempenho, de acordo com as Metas Curriculares estabelecidas.

O facto de a calculadora gráfica ter disponível um *software*, para o computador, facilitou a prática pedagógica da professora investigadora, pois os alunos puderam partilhar o ecrã do seu computador com os colegas e posteriormente com a turma na discussão das tarefas. Este recurso permitiu auxiliar o aluno durante a resolução de cada tarefa proposta, dando ao aluno a liberdade de explorar e construir novos conceitos sempre com as devidas justificações.

Vários autores, referem o grande potencial no desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita em ambientes de ensino-aprendizagem exploratório e no trabalho autónomo realizado pelos alunos individualmente ou em pequenos grupos (Ferreira, 2018; Serrazina 2018).

Ao professor, cabe procurar tarefas relevantes para uma aprendizagem significativa dos alunos através do trabalho realizado por eles, sendo o foco do processo de gestão curricular realizado à volta do aluno e, é à volta deste que se deve tomar todas as decisões (Nunes & Ponte, 2008). Assim, a escolha das tarefas, foi também uma preocupação, uma vez que, foi importante apresentar tarefas propícias a promover a construção de conceitos, a formulação de estratégias de resolução, a fundamentação dos seus raciocínios, criação de um ambiente propício para a comunicação na sala de aula e a utilização da calculadora gráfica no auxílio na realização das tarefas. Ponte (2010), refere que de uma aula de ensino exploratório é mais complexa de gerir, uma vez que é impossível antecipar todas as possíveis sugestões

e questões que os alunos possam expor. O discurso do professor vai depender do pensamento dos alunos onde a discussão/partilha de ideias ocupa um espaço importante da aula. Assim, é criado um ambiente favorável para o desenvolvimento da comunicação em Matemática “e a negociação de significados, recorrendo ao uso de linguagem e representações matemáticas” (Menezes et al., 2014, p. 155).

Um dos aspetos referidos no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* é o relacionamento interpessoal, sendo também esta uma das áreas de competência do perfil dos alunos. O aluno quando sai da escola, deve saber “interagir com tolerância, empatia e responsabilidade e argumentar, negociar e aceitar diferentes pontos de vista, desenvolvendo novas formas de estar, olhar e participar na sociedade” (p. 25). Assim, durante a intervenção, os alunos formaram grupos de quatro/cinco membros. Durante toda a intervenção pedagógica, houve sempre a preocupação de procurar orientar, ajudar e questionar os alunos e valorizar as aprendizagens que obtiveram, em cada uma das suas resoluções das tarefas propostas apresentadas.

3.2.2 Planificação da intervenção pedagógica

Antes de iniciar uma aula, esta precisa de ser bem preparada por parte do professor. A construção de um plano de aula envolve várias etapas, como a definição dos objetivos e o cumprimento das orientações curriculares estabelecidas (Ponte et al., 2015). A pré-reflexão de cada aula, permite ao professor pensar e tomar decisões prévias sobre as tarefas a colocar à turma, para que estas não sejam nem demasiado fáceis nem demasiado difíceis, antecipar dificuldades e o tempo de reação da “capacidade de improviso e de resposta a situações inesperadas” (Ponte et al., 2015, p. 25). A pós-reflexão permite refletir como decorreu a aula de forma a melhorar e progredir na prática pedagógica. No Quadro 2:

Estrutura da intervenção pedagógica, é apresentada a estrutura da intervenção pedagógica com as datas em que ocorreu cada intervenção, bem como o respetivo sumário.

Quadro 2:*Estrutura da intervenção pedagógica*

Data	Sumário	Regime
05/03/2021	- Ficha de Diagnóstico	Ensino à distância
06/04/2021	- Função par e função ímpar. - Resolução de exercícios	Ensino à distância
09/04/2021	- Translações do gráfico de uma função - Resolução de problemas	Ensino à distância
13/04/2021	- Dilação e contração do gráfico de uma função - Resolução de problemas	Ensino à distância
14/04/2021	- Reflexões do gráfico de uma função - Resolução de problemas	Ensino à distância
04/06/2021	- Resolução de problemas	Ensino presencial
16/06/2021	- Questão de aula	Ensino presencial

Após uma rápida observação do Quadro 2, é possível verificar que apenas as duas últimas aulas foram lecionadas no ensino presencial, com o foco na consolidação de conceitos e posteriormente avaliação dos mesmos. De acordo com a planificação estabelecida no início do ano, o estudo foi organizado em cinco aulas (Anexo 4) envolvendo tarefas de carácter exploratório sobre o tema de funções (Anexo 5).

As aulas, ou as partes de aulas, que foram objeto de análise para a realização do presente estudo são referentes à ficha de diagnóstico, às tarefas de exploração do dia nove e treze de abril, à resolução de problemas (aula presencial) e à questão de aula.

3.3 Estratégias de investigação e avaliação da ação

Para realizar uma investigação, é necessário haver um propósito ou um problema, uma vez que sem eles não há motivo para se realizar (Dalfovo, et al., 2008). Assim, este estudo foi realizado com a intenção de compreender em que medida os alunos tiram partido da calculadora gráfica para a resolução de tarefas e, de que forma registam a respetiva resolução por escrito, seguindo uma metodologia qualitativa de cunho interpretativo. Neste seguimento e com o intuito de dar resposta às questões de investigação este subcapítulo é dividido em duas partes, sendo que na primeira são apresentados os

instrumentos e procedimentos de recolha de dados e na segunda como se pretende realizar a análise dos mesmos.

3.3.1 Instrumentos e procedimentos de recolha de dados

Para dar resposta ao objeto de estudo, é fundamental definir os instrumentos de recolha de dados. Para tal, foram utilizadas diversas estratégias neste estudo, de forma a recolher a informação para poder dar resposta às questões de investigação. Foram utilizados dois questionários (um inicial e outro final), uma ficha diagnóstica, produções dos alunos e a observação.

Os *questionários* são compostos por questões abertas, fechadas e de escolha múltipla. O primeiro questionário foi implementado no início da intervenção pedagógica e o outro no final da mesma. No questionário inicial constaram questões sobre hábitos de estudo, preferências dos alunos e questões acerca de como veem e qual a importância que dão à comunicação escrita e à calculadora gráfica no seu estudo, na disciplina de Matemática. O questionário final contou também com perguntas à cerca de como os alunos veem a comunicação escrita e a calculadora e com afirmações sobre as aprendizagens adquiridas envolvendo a comunicação e a calculadora, onde podiam concordar e discordar. Algumas das questões são comuns aos dois questionários, para posteriormente fazer uma comparação acerca da opinião dos alunos. Com a realização dos questionários, foi possível analisar e caracterizar a turma, bem como definir as suas potencialidades e dificuldades nas estratégias utilizadas e no processo de ensino-aprendizagem. Estes questionários permitiram responder à questão um e três do estudo, com o expressar das dificuldades sentidas dos alunos na comunicação escrita e na utilização da calculadora gráfica assim como na forma como utilizam esta.

A *ficha diagnóstica*, Anexo 3, foi implementada antes da intervenção pedagógica realizada, com o intuito de fornecer informação de cada aluno sobre os seus conhecimentos matemáticos ao professor (Braun, 2014). Segundo o Decreto-lei nº 17/2016 de 4 de abril, é importante esta avaliação, pois ajuda a “fundamentar a definição de planos didáticos, de estratégias de diferenciação pedagógica, de superação de eventuais dificuldades dos alunos, de facilitação da sua integração escolar e de apoio à orientação escolar e vocacional” (p. 1125). A ficha diagnóstica permitiu perceber em que nível está a turma, para posteriormente ajudar na justificação de planos e para combater as dificuldades dos alunos. A ficha diagnóstica, serviu também para perceber o nível da redação escrita dos alunos com o recurso à calculadora gráfica e avaliar a evolução dos alunos até ao fim da intervenção, terminando com uma tarefa numa questão de aula.

A *observação* é estar atentos ao que nos rodeia. Segundo Correia (2009), é realizar “contacto direto, frequente e prolongado do investigador, com os atores sociais, nos seus contextos culturais, sendo o próprio investigador instrumento de pesquisa” (p. 31), ou seja, também nos permite ter informações do meio onde estamos inseridos. Ao longo do ano letivo, foram feitas anotações, sobretudo de momentos pontuais que foram ocorrendo, no diário de bordo. Contudo, este método, não foi aproveitado da melhor forma no ensino à distância, pois quando os alunos estavam reunidos em pequenos grupos não era possível ter uma visualização do comportamento geral da turma. No ensino presencial permitiu reparar nas estratégias de utilização da calculadora gráfica, assim como, os contributos e dificuldades que foram surgindo. A observação vai auxiliar a responder às três questões de investigação, através do *feedback* demonstrado pelos alunos.

A *análise documental*, foi também um dos métodos de recolha de dados. Os documentos analisados foram as produções dos alunos em tarefas de exploração e problemas, realizados em contexto de sala de aula, ao longo da intervenção, sendo uma colocada numa questão de aula. A recolha de dados foi feita pelos alunos através de capturas de imagens dos seus *smartphones* ou dos ficheiros enviados em formato *Word* para a plataforma *classroom* durante o ensino à distância e, pela professora investigadora, no ensino presencial e posteriormente digitalizadas. A recolha destes dados possibilitou uma segunda reflexão e avaliação da prática pedagógica.

No ensino à distância, antes de avançar para a discussão com a turma, os alunos tinham de colocar as suas resoluções na plataforma *classroom* para evitar a alteração de respostas após o debate, assim como no ensino presencial. Através do registo da resolução de tarefas é pretendido responder às três questões de investigação, uma vez que, nestes dados fica registado todo o processo de resolução, para uma posterior análise mais detalhada pelo professor.

A ficha diagnóstica e a tarefa, colocada numa questão de aula, foram realizadas individualmente, ao passo que todas as outras tarefas foram realizadas em grupo. No Quadro 3, pode ver-se de forma sintetizada os métodos de recolha de dados que foram utilizados para responder a cada uma das questões de investigação.

Quadro 3:*Instrumentos de recolha de dados*

	Observação	Ficha diagnóstica	Produção dos alunos	Questão de aula	Questionário
Q1	✓	✓	✓	✓	✓
Q2	✓	✓	✓	✓	
Q3	✓		✓	✓	✓

3.3.2 Análise dos dados

Uma análise qualitativa requer trabalho. Separar os dados significativos para o estudo daqueles que são comuns, “identificar padrões relevantes, encontrar sentido nos dados e construir uma forma de comunicar o essencial do que eles revelam face aos propósitos da investigação” (Boavida, 2005). A análise dos dados deste estudo começou desde logo com a observação. A partir desta, permitiu formular e ajustar todo o material de forma a ser possível realizar a investigação e posteriormente adquirir dados de forma a dar resposta às questões de investigação.

Para analisar a comunicação escrita com recurso à calculadora gráfica, após a exploração de cada uma das tarefas, foram utilizadas as dimensões e respetivos níveis propostos por Pires et al. (2018). A análise de cada uma das tarefas de exploração e dos problemas, foi feita através das categorias conforme presente na Tabela 4, com a apresentação de cada nível nas quatro dimensões e de como a calculadora gráfica auxiliou no registo da resolução de cada aluno.

Tabela 4:

Categorias de análise de dados

Tarefas	Comunicação escrita	Calculadora gráfica
Tarefa de exploração 1	Dimensões de Pires et al., 2018	-Contributos -Dificuldades
Tarefa de exploração 2	Dimensões de Pires et al., 2018	-Contributos -Dificuldades
Agência de aluguer de veículos	Dimensões de Pires et al., 2018	-Contributos -Dificuldades
Praga de moscas-da-fruta	Dimensões de Pires et al., 2018	-Contributos -Dificuldades
Concurso de aeromodelismo	Dimensões de Pires et al., 2018	-Contributos -Dificuldades
Questão de aula	Dimensões de Pires et al., 2018	-Contributos -Dificuldades

Capítulo 4

Apresentação dos resultados

No decorrer do presente capítulo serão apresentados os resultados obtidos na realização do estudo. Este capítulo encontra-se dividido em três partes. Na primeira parte, referente ao início da intervenção, é exposta e abordada a opinião dos alunos sobre comunicação escrita e a utilização da calculadora gráfica. Na segunda parte, são apresentadas algumas resoluções de tarefas sobre funções propostas aos alunos, com o intuito de averiguar a capacidade de comunicação escrita. Por último, são apresentadas algumas tarefas realizadas pelos alunos, em grupo, ou individualmente, onde o foco é o uso da calculadora gráfica e a comunicação escrita.

4.1 Opinião dos alunos sobre a comunicação escrita e a calculadora gráfica

Através do questionário realizado no início da intervenção pedagógica, foi possível averiguar qual a importância que os alunos atribuem à comunicação escrita em Matemática e ao uso da calculadora gráfica, bem como, as vantagens que veem em cada uma delas. Ao citar frases escritas pelos alunos, será feita uma numeração A#, onde # representa o número da chegada da resposta no *Google Forms*, uma vez que estes foram realizados anonimamente.

Em geral, a turma considera a comunicação escrita importante no seu processo de ensino-aprendizagem. A justificação mais usada pelos alunos foi de esta permitir uma compreensão de conteúdos mais rápida (Tabela 5). Lee (2010) considera que as fórmulas e as equações são aspetos importantes, entre outros, a ter em conta na redação escrita. Alguns alunos referem a utilização de símbolos importante na aprendizagem de novos conceitos, para no futuro poderem utilizar os respetivos símbolos e serem compreendidos pelos outros. Um aluno refere, por exemplo, caso existam e “que toda a gente conhece e percebe” A3.

Tabela 5:*Importância depositada na comunicação escrita pelos alunos*

Tipos de resposta	Frequência
Aprendem melhor	7
Compreensão mais rápida	8
Ajuda na justificação de raciocínios	5
Troca de ideias	2

Os alunos consideram importante a escrita em Matemática e afirmam aprender melhor, como refere, por exemplo, A₁ “ao escrevermos e anotarmos exercícios e matérias conseguimos aprender e memorizar os conteúdos”. Na sua maioria, todos souberam mencionar alguma vantagem relativamente à comunicação escrita na sua aprendizagem (Tabela6). Alguns dos contributos fundamentais da comunicação referidos por Menezes (2021) são mencionados pelos alunos como a promoção da reflexão, o facto de ficar registado para o auxílio do estudo e na avaliação da aprendizagem da Matemática, feita pelo aluno, dando-lhe informação de eventuais dúvidas que possa ter como refere o aluno A₂₅: “percebo se entendi ou não aquilo que eles (resultados) significavam” e o aluno A₁₃ “quando estou a explicar uma resolução por exemplo, ao escrever, tenho tempo para organizar o meu pensamento”.

Tabela 6:*Vantagens referidas pelos alunos da comunicação escrita*

Tipos de resposta	Frequência
Melhor compreensão dos conteúdos	12
Consulta de registos	3
Maior concentração	4
Facilidade em expressar o raciocínio	4
Maior organização	1
Auxilia na avaliação da aprendizagem pelo aluno	1

Relativamente à calculadora gráfica, apenas um aluno considera um entrave o seu uso no estudo da disciplina de Matemática, apresentando como motivo considerar haver menos exigência a nível do raciocínio e menos espírito crítico. Já aqueles que consideram a calculadora gráfica como um potencializador no seu processo ensino-aprendizagem, consideram como grande vantagem o seu auxílio na realização dos cálculos, Tabela 7.

Tabela 7:

Vantagens da calculadora gráfica

Tipos de resposta	Frequência
Auxílio nos cálculos	13
Mais funcionalidades	3
Melhora ritmo de trabalho	5
Ajuda na compreensão de conteúdos	3

Alguns alunos consideram existir uma maior facilidade de resolução e rapidez na realização das tarefas com recurso à calculadora gráfica. Reconhecem ainda que os ajuda na interpretação de gráficos e a tirar conclusões com mais confiança devido a poderem confirmar os seus próprios resultados. No entanto, existe algum receio na resolução de tarefas com o recurso à calculadora gráfica, uma vez que, esta tem várias funcionalidades e os alunos referem ter medo de desvalorizar o processo de justificação.

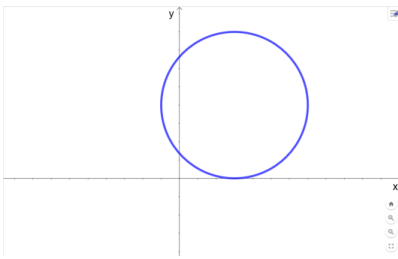
4.2 Conhecimentos dos alunos sobre funções

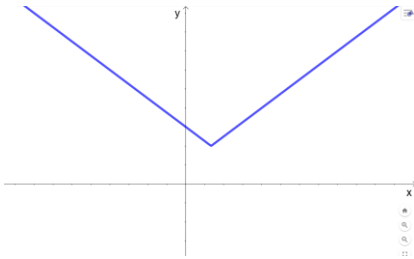
Antes de ser iniciado o capítulo *funções*, na turma de intervenção pedagógica, foram recolhidos dados sobre os conhecimentos da turma sobre o tema, através da ficha de diagnóstico para posteriormente analisar e apresentar como redigiam a resolução com recurso à calculadora gráfica.

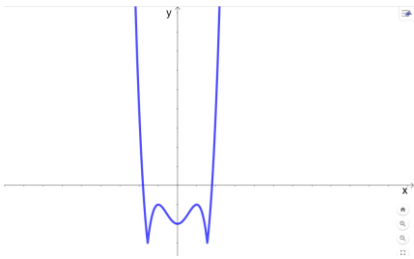
Na primeira questão, os alunos tinham de escolher entre quatro opções quais representam funções e justificar devidamente a sua escolha, como mostra a seguinte tarefa:

Quais dos seguintes gráficos representam funções? Justifica.

A) 

B) 

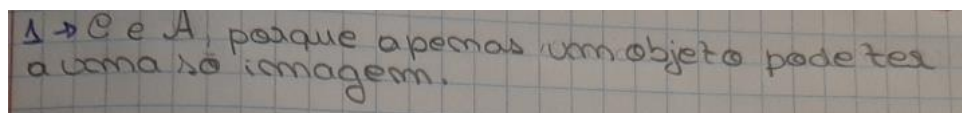
C) 

D) 

Não houve nenhum aluno a responder corretamente a esta questão. Vários alunos confundiram a função constante $y = a_1$ com a equação cartesiana da reta vertical de equação $x = a_2$. A resposta mais comum, dada pelos alunos, foi o gráfico A e C , com a justificação de que a cada objeto associa-se uma e uma só imagem como é o caso do aluno A8 (Figura 1):

Figura 1:

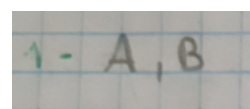
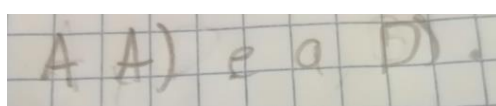
Resolução do aluno A8 à questão 1



É possível, através da análise das respostas obtidas, reparar que os alunos têm alguma noção do conceito de função, no entanto, não souberam escolher corretamente as opções. A maioria dos alunos confundiu o seu raciocínio e misturou conceitos de geometria analítica, abordada anteriormente, ao terem escolhido o gráfico B como uma representação de função, e este ser uma representação de uma circunferência. Das vinte e cinco respostas, apenas seis não apresentaram qualquer tipo de justificação para as escolhas feitas, como os alunos A5 e A13 (Figura 2). Assim, em geral, pode-se afirmar que a turma se mostra preocupada em justificar devidamente a sua escolha.

Figura 2:

Respostas dos alunos A5 e A13 à questão 1



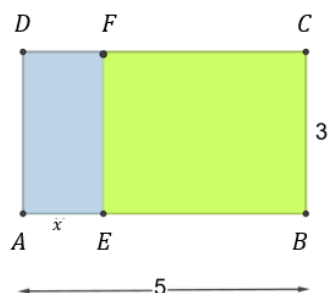
Relativamente à segunda tarefa, esta teve como objetivo definir uma função, indicar o domínio e esboçar o gráfico da função conhecidas algumas das suas propriedades. Houve respostas parcialmente corretas, no entanto, vários alunos mostraram dificuldades em encontrar a expressão da função do seguinte problema:

Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$.

Tem-se que $\overline{AB} = 5$ e $\overline{BC} = 3$.

Um ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A . Um ponto F desloca-se sobre o lado $[CD]$, acompanhando o movimento do ponto E , de tal forma que $[EF]$ permanece sempre paralelo a $[AD]$.

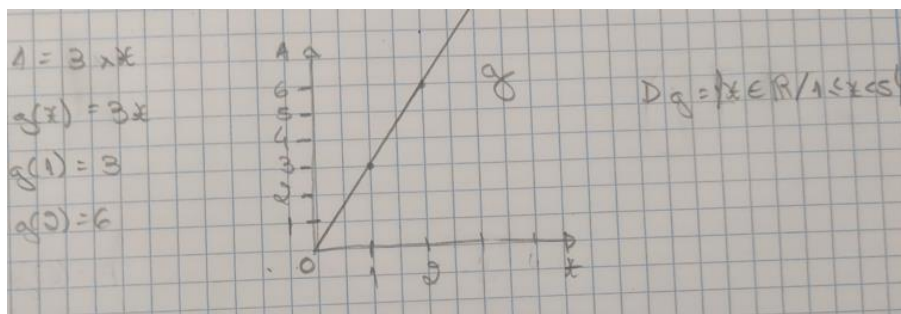
Seja g a função que, ao comprimento x do segmento $[AE]$, faz corresponder a área y do retângulo $[AEFD]$. Numa pequena composição explica como podes definir a função g , indicando domínio, e desenha o seu gráfico.



Dos alunos que conseguiram definir a função do problema podemos dividi-los em dois grupos: os que apenas apresentam cálculos e os que apresentam justificações de todas as etapas que incluíram na sua resolução. O aluno A17 (Figura 3) apenas apresenta o que é pedido no enunciado sem qualquer tipo de justificação, tendo o cuidado de desenhar corretamente o referencial ortonormado e de colocar as variáveis correspondentes, mas não apresenta o domínio de acordo com o enunciado da tarefa.

Figura 3:

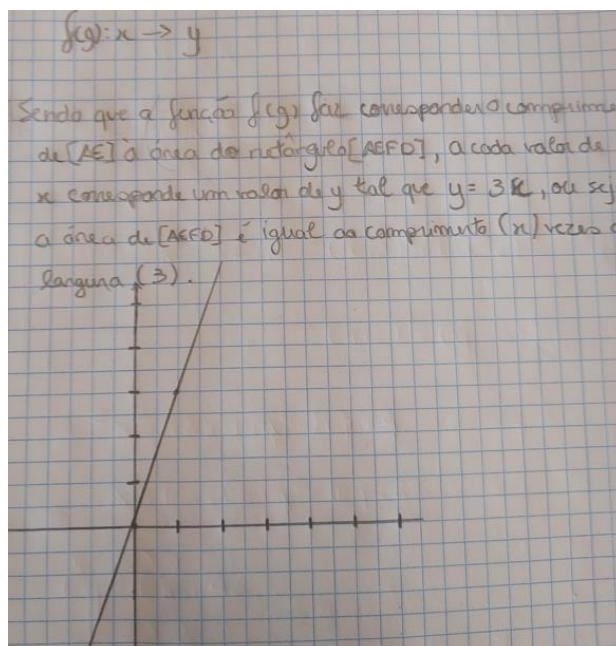
Resolução do aluno A17 à questão 2



A resolução do aluno A11 (Figura 4) está incompleta, pois não apresenta corretamente os valores da janela de visualização utilizada para representar o gráfico, sendo também perceptível as falhas em definir o domínio no contexto do problema. É visível também uma falta de rigor na construção do gráfico e não apresenta todos os elementos necessários, como por exemplo, a representação das variáveis nos eixos.

Figura 4:

Resolução do aluno A11 à questão 2



Através das várias resoluções, é notório como os alunos não estão habituados a utilizar as potencialidades da calculadora gráfica na resolução das tarefas. Para confirmar a resposta à primeira questão, os alunos, podiam definir funções arbitrárias e assim verificarem qual dos gráficos representava uma função. Em ambas as questões, a redação escrita está muito ausente e, como avaliação das tarefas propostas, é verificado que a turma mostra não estar habituada a transcrever o seu raciocínio para a folha de respostas, limitando-se apenas a apresentar esboços de gráficos e expressões algébricas.

4.3 A calculadora gráfica e a comunicação escrita no estudo de funções

Após a realização individual da ficha diagnóstica, seguiu-se o trabalho em grupo para a realização de tarefas de exploração e problemas. A apresentação da análise da comunicação escrita é feita na base das dimensões e níveis propostos por Pires et al. (2018). São também evidenciados os contributos e dificuldades sentidas na realização das tarefas com o recurso à calculadora gráfica.

Tarefa de exploração 2:

A seguinte tarefa, foi introduzida para iniciar o estudo das transformações do gráfico de uma função. Com o intuito de beneficiar das potencialidades da calculadora gráfica, os alunos tinham de inserir a função $f(x)$ com o seu domínio. No estudo da família de funções $g(x)$, os alunos tinham de atribuir

valores arbitrários a a e a b de forma a perceberem que alterações houve em relação ao gráfico da função inicial.

1. Usando a calculadora gráfica, representa graficamente a seguinte função $f(x) = x^4 - 4x^2$ de domínio $[-2,1]$. Indica o contradomínio da função $f(x)$.
2. Considera a família de funções $g(x) = f(x - a) + b$, a e $b \in \mathbb{R}$. O que observas ao alterar os parâmetros a e b ? Justifica todas as tuas conclusões através de um relatório escrito.

Como as aulas estavam a ser lecionadas à distância, e de forma a facilitar o trabalho dos grupos, foi pedido que todos os alunos instalassem no seu computador o emulador da calculadora gráfica. Como os alunos até ao momento não tinham utilizado as potencialidades da calculadora gráfica, a professora investigadora exemplificou como poderiam inserir a função $f(x)$. Contudo, não se revelou suficiente.

Na segunda questão, os alunos não tinham a certeza de como resolver e acabaram por recorrer a uma função afim para retirarem resultados, como podemos ver no seguinte diálogo do G1:

Aluno 1: Eu não faço a menor ideia de como se faz o outro. Olha tenta escrever $f(x - a) + b$ a ver se aparece alguma coisa.

Aluno 2: Onde?

Aluno 1: Num gráfico, faz aí um gráfico com isso. Nem sei se isso se pode fazer.

Aluno 2: O quê? Não podes fazer isso... não dá para fazer, nem vou experimentar!

Quando nós mudamos o b nós estamos a mudar a interseção com o eixo O_y e quando nós mudamos o a nós estamos a mudar... a... estamos a mudar na mesma o eixo O_y . Estamos a mudar o x e o y . Quando nós alteramos o parâmetro b nós estamos a restringir o domínio. O contradomínio!

Aluno 1: Porquê? Não é por causa da inclinação?

Aluno 2: Nós não estamos a mudar o contradomínio, estamos a mudar o domínio.

Aluno 1: Não estamos nada.

Aluno 2: Estamos sim!

Aluno 1: Se for uma linha contínua que vá passar em todos os pontos.

Aluno 2: Podes fazer, mas a inclinação é diferente.

Aluno 1: Mudamos o contradomínio!

Aluno 2: Mas então o que estás a dizer é que também o contradomínio vai ser $\mathbb{R}$ à vontade. O declive dela (da reta) não vai mudar, porque o b não tem um x ,

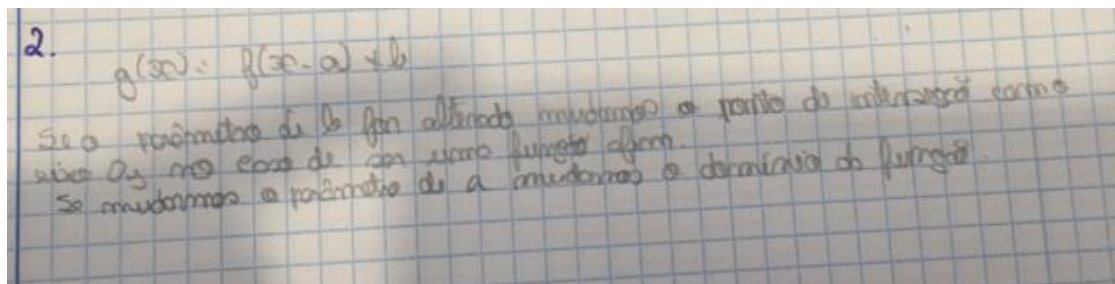
a variável independente é o b , por isso, a única coisa que vai mudar no nosso gráfico vai ser o sítio onde ele interseja o eixo O_y .

O grupo apesar de ter conseguido inserir corretamente a função na calculadora gráfica, acabou por estar um pouco indeciso sobre a influência na variação dos parâmetros.

Os alunos não estavam habituados a este tipo de tarefas, nem a recorrer às capacidades da calculadora gráfica para a exploração das mesmas. Eles assumem que não é possível e, por isso, limitam-se a escrever a função $f(x)$ na calculadora, não explorando as suas potencialidades. Como verificado no grupo em análise (Figura 5), os alunos utilizam a função afim, mas sem a introduzir na máquina, apenas imaginam o que poderia acontecer ao alterar cada um dos parâmetros.

Figura 5:

Relatório escrito apresentado pelo G1



A comunicação escrita observada tem um nível baixo na dimensão *clareza*, uma vez que não utilizou um vocabulário correto, ao referir que é o domínio que muda e sem qualquer tipo de representação. Em *fundamentação*, também foi considerado um nível baixo, pois o grupo apresentou as suas ideias de forma imprecisa restringindo-se apenas no caso da função afim. Na categoria *lógica*, o potencial do grupo também é de nível baixo, demonstrando pouco raciocínio nos registos efetuados e apenas revelando a conclusão a que chegaram. Em *profundidade*, apresentam um nível médio, pois apesar de não utilizarem as funções dadas, utilizaram uma outra em que demonstram ter algum domínio sobre o assunto, ao mencionarem que ao mudar o parâmetro b vai alterar no eixo das ordenadas.

Na calculadora gráfica, foram sentidas dificuldades logo no início ao inserir a função $f(x)$. Contudo, os alunos que não colocaram o domínio conseguiram retirar as suas conclusões através da visualização do gráfico da função.

Tarefa de exploração 3:

Na tarefa de exploração seguinte, com o intuito de estudar a dilatação e contração do gráfico de uma função, foi pedido aos alunos que estudassem a influência dos parâmetros a e b .

1. Usando a calculadora gráfica, representa graficamente a seguinte função $f(x) = x^4 - 4x^2$ de domínio $[-2,1]$. Indica o contradomínio da função $f(x)$.
2. Considera a família de funções $g(x) = af(bx)$, a e $b \in \mathbb{R}^+$. O que observas ao alterar os parâmetros a e b ? Justifica todas as tuas conclusões através de um relatório escrito.

Após explorar as potencialidades da calculadora gráfica com a turma, na tarefa de exploração 2, nesta, os alunos já formularam e testaram as suas próprias conjecturas, como é o caso do G5:

Aluno 1: Agora vou alterar o a para ver o que acontece.

Aluno 2: Tu só alteraste o parâmetro b que é 2. Antes de alterares o a , o domínio alterou-se, mas o contradomínio continuou o mesmo!

Aluno 1: Sim.

Aluno 2: Ai no a , para $a = 2$, basicamente, o contradomínio muda e o domínio não. É ao contrário.

Aluno 1: Exato! Ok, então, basicamente, se multiplicarmos a...

Aluno 2: Sim, se mudarmos o a e o b vão mudar os dois, logicamente, certo?

Aluno 1: Exato, vou fazer isso!

Aluno 2: Eu acho que a dilatação acontece quando alteras o a e a contração acontece quando alteras o b ...não é?

Aluno 1: É que eu mudei as duas e contraiu o domínio e aumentou o contradomínio.

Aluno 2: Se calhar pode acontecer dilatação só em relação ao eixo O_y e contração só em relação ao eixo O_x , acho que é isso que temos de ver. Vai primeiro à função que só alteraste um parâmetro. Quando alteras o a houve uma dilatação do contradomínio.

Professora: O que significa dilatação do contradomínio?

Aluno 1: Fica com mais números, abrange mais números.

Professora: Tentem não só números inteiros, tentem números fracionários.

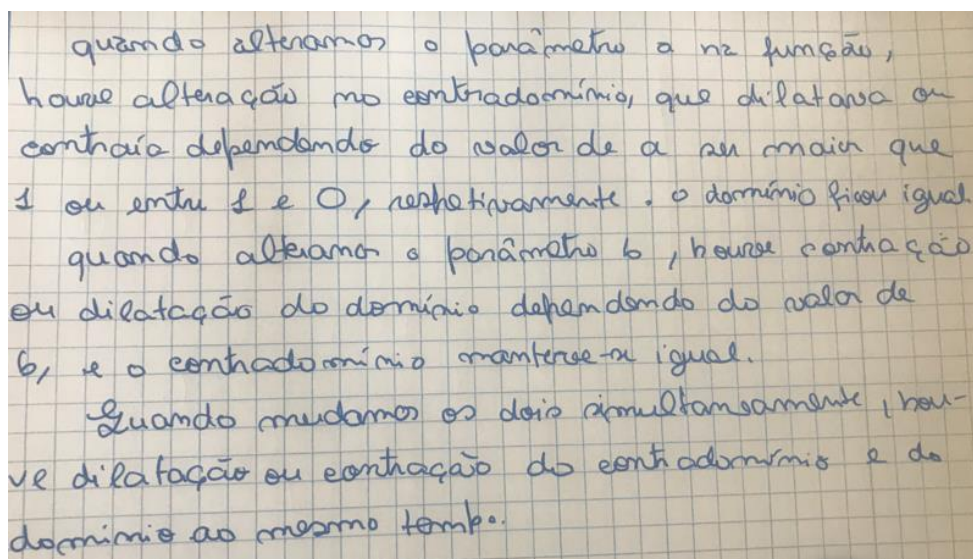
Aluno 1: O que acontece com um número menor, será que também há diferença, se eu substituir o a por 2 e depois por $\frac{1}{2}$, será que a dilatação será maior ou menor?

Aluno 2: Não. Se substituíres o a por 2 será dilatação do contradomínio se substituíres por $\frac{1}{2}$ será contração do contradomínio, foi o que aconteceu quando meteste $\frac{1}{2}$.

Durante o diálogo apresentado, é notório que o diálogo se estabeleceu apenas entre dois elementos. Os alunos começaram o seu estudo a atribuir valores aos parâmetros a e b , isoladamente. Verificaram que houve alterações no domínio e no contradomínio, pelo que, erradamente referiram que o domínio e/ou contradomínio dilatava ou contraía e não referiram que era o esboço do gráfico da nova função obtida. Os alunos utilizavam a calculadora gráfica para testar as conjecturas, no entanto, nunca alteravam a janela de visualização e não transcreveram para a sua folha de respostas o que visualizaram, Figura 6.

Figura 6:

Relatório escrito apresentado pelo G5



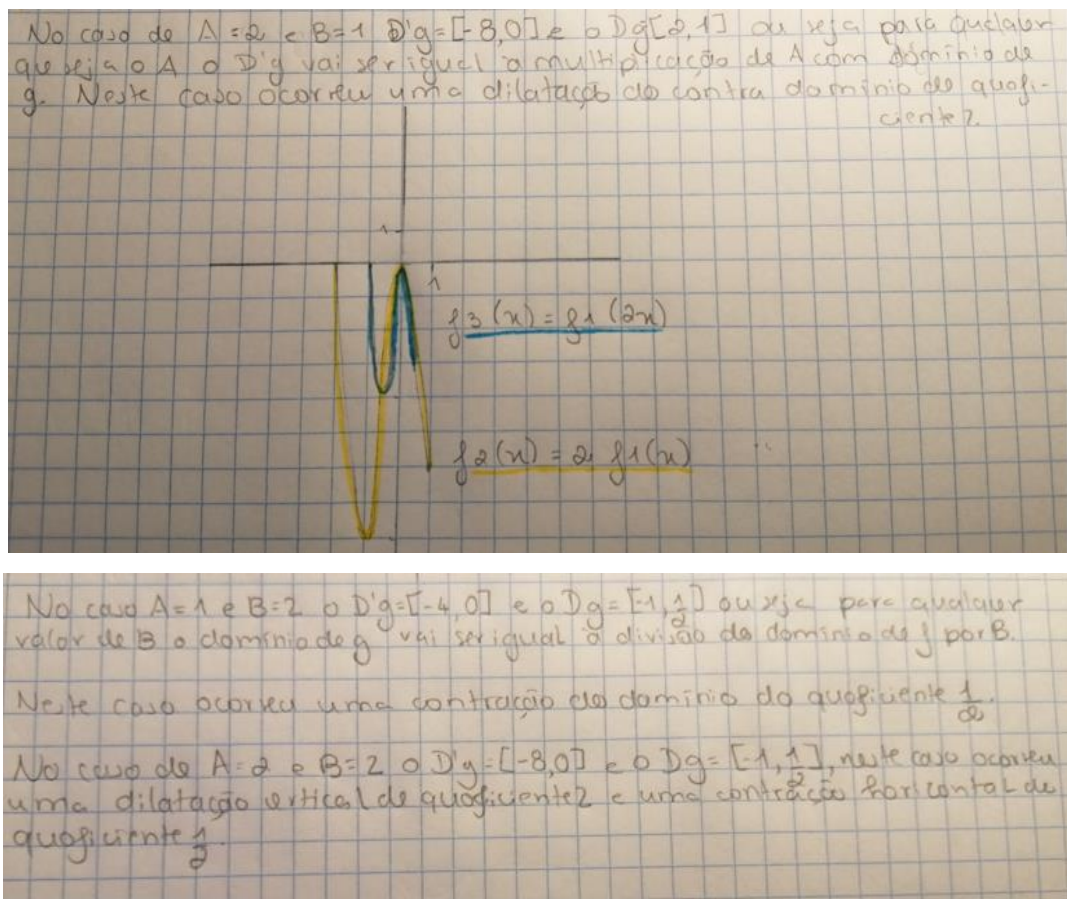
A comunicação escrita, do grupo em causa, na dimensão *clareza* está num nível médio, apresentando as suas ideias recorrendo a um vocabulário compreensível e específico do tema que está a ser trabalhado. No que diz respeito à dimensão *fundamentação*, foi considerado um nível médio, pois o grupo justifica razoavelmente que tipo de alteração acontece na variação de cada parâmetro, indicando para que valores acontece uma dilatação ou contração. Demonstram também algum raciocínio, sendo atribuída na dimensão *lógica* um nível médio. Existe coerência no seu registo faltando apenas mencionar que a alteração verificada no gráfico de uma função está associada a um coeficiente. Na dimensão *profundidade* apresentam um nível baixo, pois revelaram não dominar aspetos importantes onde mencionam apenas que o domínio e/ou o contradomínio a dilata ou contrai. Este erro foi comum a vários

grupos, como o grupo G3 (Figura 7). Na comunicação escrita, tem um nível médio na dimensão *clareza*, pois apesar de apresentarem ideias precisas o esboço da janela de visualização está incompleto, uma vez que, não representam os eixos coordenados. No entanto, estes alunos mostram ter algum sentido crítico com a alteração da janela de visualização *standard*, ficando a faltar o registo dos valores da janela utilizada.

O G3 justifica corretamente as suas ideias através de exemplos, apresentando uma *fundamentação* de nível elevado, no entanto não generaliza para todos os casos, *lógica* com nível médio. É visível a existência de raciocínio e coerência no seu registo, mas nem sempre mostraram dominar aspetos importantes, *profundidade* nível médio, como por exemplo, se $0 < b < 1$ há uma dilatação do gráfico de coeficiente $\frac{1}{b}$.

Figura 7:

Relatório escrito apresentado pelo G3



A calculadora gráfica para a resolução desta tarefa contribuiu, em ambos os grupos, no auxílio da observação da alteração dos parâmetros a e b . Não se verificando grandes dificuldades em utilizar e alterar a janela de visualização. Em todas as discussões, de cada grupo, é notório a influência que a

calculadora gráfica teve para comprovarem as suas suposições e, na maioria, todos os relatórios escritos fazem-se acompanhar de uma representação do esboço da janela de visualização, para um relatório escrito mais completo.

Para a discussão envolvendo todos os alunos da turma, foi eleito, aleatoriamente, um grupo para partilhar ecrã com a resolução e explicar como resolveram a tarefa. Esta estratégia fez com que na sua maioria todos os elementos contribuíssem para a resolução da tarefa e tivessem mais cuidado nas justificações que apresentavam. Vários alunos, na discussão, cometeram o mesmo erro em concluir que era o domínio e/ou o contradomínio que dilatava ou contraia, pelo que houve alguma discussão, bem como em obter o novo domínio e contradomínio da nova função. Um dos aspetos que nenhum dos grupos abordou e foi alvo de discussão, foram as raízes para um estudo mais completo da nova função.

Globalmente, os alunos apresentaram uma melhor prestação nesta tarefa com as notórias evidências nos relatórios, como a inserção de gráficos, e no maior cuidado em fundamentar todas as suas ideias.

Agência de aluguer de veículos

O casal Martins deslocou-se, de comboio, no período de férias a uma localidade. Para melhor conhecerem a região, decidiram alugar um automóvel. Consultaram duas agências de aluguer de veículos que lhes apresentaram as seguintes condições:

Agência A: Taxa fixa de 400 € e 1,20 € por cada quilómetro percorrido.

Agência B: Taxa fixa de 80 € e 2 € por cada quilómetro percorrido.

O casal Martins pensou em dois tipos de ocupações nas férias. Numa das hipóteses, estimam percorrer cerca de 500 km. Na outra alternativa, preveem percorrer cerca de 320 km, reservando mais tempo para aproveitarem a praia local.

Atendendo a cada alternativa, como aconselharias o casal na escolha da agência?

Em outras situações, os alunos, tendem a usar a resolução analítica, uma vez que lhes foi sempre incutido que em Matemática A, os alunos devem resolver qualquer tarefa analiticamente sem necessitar de recorrer à calculadora gráfica. Na resolução desta tarefa alguns grupos apenas recorreram à resolução exclusivamente analítica, que é o caso dos grupos G1 (Figura 8) e G4 (Figura 9). No entanto o intuito desta tarefa era que os alunos recorressem à calculadora gráfica e rapidamente determinassem a interseção dos dois gráficos. Dessa forma optavam pela melhor agência de acordo com o número de quilómetros a percorrer.

A resolução dos grupos G1 e G4 são semelhantes, sendo atribuídos os mesmos níveis nas dimensões à exceção da dimensão *fundamentação*, onde G1 tem um nível médio, pois apresenta o

significado de cada uma das variáveis escolhidas ao contrário do grupo G4, nível baixo, que não apresenta qualquer tipo de justificação. Na dimensão *clareza* ambos os grupos estão num nível médio, apresentando estratégias de resolução, mas não utilizam um vocabulário preciso. Manifestam raciocínio sem nunca demonstrar conexão entre as ideias, retirando todas as conclusões no contexto do problema, e por isso, a *lógica* estar classificada no nível baixo. Por fim, em *profundidade*, foi atribuído um nível médio, demonstrando saber como resolver a tarefa, mas sem evidência de cálculos ou do uso da calculadora gráfica para a determinação do valor do custo a pagar pela agência escolhida.

Figura 8:

Resposta do G1 sem recurso à calculadora gráfica

A) Sendo x o número de quilómetros e tendo as funções f e g a correspondência entre o número de quilómetros e o preço das funções f e g , respectivamente.

$$f(x) = 1,50x + 400$$

$$g(x) = 2,00x + 80$$

1.ª hipótese: fazer com 500 km

$$f(500) = 1000€$$

$$g(500) = 1080€$$

2.ª hipótese: fazer com 320 km

$$f(320) = 760€$$

$$g(320) = 720€$$

Assimilamos a agência A na primeira alternativa / hipótese e escolhemos a agência B na segunda alternativa.

Figura 9:

Resposta do G4 sem recurso à calculadora gráfica

① $A(x) = 1,20x + 400$
 $B(x) = 2x + 80$

$$A(320) = 1,20 \times 320 + 400$$

$$= 784$$

$$B(320) = 2 \times 320 + 80$$

$$= 1040$$

$$A(500) = 1,20 \times 500 + 400$$

$$= 1000$$

$$B(500) = 2 \times 500 + 80$$

$$= 1080$$

R: É melhor a opção B com 320 km.

Através do diálogo que se segue, na discussão com a turma, é apresentada a percepção de duas resoluções, uma analítica e outra gráfica.

Professora: O que estás a fazer A1?

Aluno 1: Estou a substituir o número de quilómetros e ver qual é o preço.

Professora: Este foi o método utilizado por vários de vocês.

Aluno 1: Mas também podia ser pelo gráfico... tem lá a interseção...

Aluno 2: Fazemos dois gráficos, a interseção dos dois gráficos e descobrimos imediatamente quando ele pode estar a menos e quando é que pode estar a mais.

Professora: Então Aluno 2, aproxima-te do quadro e explica à turma o que estás a dizer.

Já no quadro,

Aluno 2: Primeiro os esboços do gráfico das funções estão em cima, porque não se pode andar com tempo negativo nem com distâncias negativas, ou seja, não vai haver nem o 2º, 3º e 4º quadrante. Intersectando, (marca o ponto de interseção $P(400;800)$ no quadro) para todas as distâncias inferiores a 400 quilómetros é preferível a segunda agência e para distâncias superiores a 400 quilómetros é preferível a primeira agência.

Professora: Exato. E digam-me, alguém sabe o que falta aqui no esboço do gráfico?

Aluno 3: Falta aí o x e o y nos eixos.

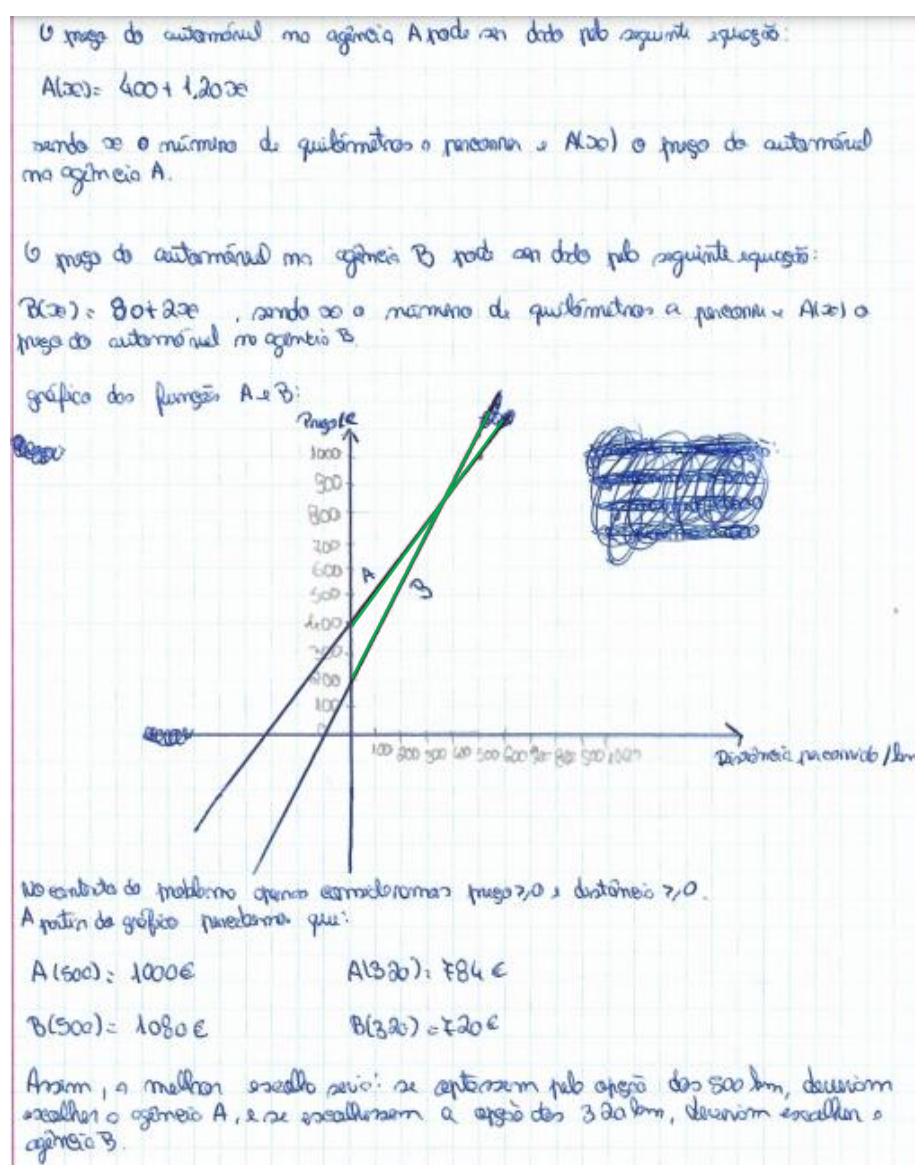
O aluno que optou por processos analíticos sabia que poderia recorrer à calculadora gráfica, no entanto, mostrou-se pouco confiante em utilizá-la. Um outro elemento do mesmo grupo interveio, com confiança, mostrando como se resolvia recorrendo à calculadora gráfica. Apesar dos alunos não utilizarem exclusivamente a calculadora gráfica, existe evidências do uso da mesma por parte de alguns grupos. Um outro grupo que utilizou a calculadora foi o G2, evidenciando sentido crítico, uma vez que através da Figura 10, o grupo salienta parte do gráfico das funções com outra cor de acordo com o contexto apresentado.

A comunicação escrita do G2 tem um nível médio na dimensão *clareza*, expressando as suas ideias de forma explícita, mas nem sempre com um vocabulário adequado, como por exemplo, terem escrito logo na primeira frase “dado pela seguinte equação” em vez de dado pela seguinte função. Fazem-se acompanhar de representações adequadas, mas um aspeto que faltou foi a indicação dos valores da janela de visualização. A *fundamentação* encontra-se também no nível médio. Referem ainda o

significado de cada variável, apenas com o erro, quando falam da função $B(x)$. Evidenciam um pouco de desatenção ao escreverem a função $A(x)$. O grupo nem sempre justificava os processos de resolução, como exemplo, não está evidente como chegaram até ao preço de acordo com a distância e agência. Ao nível de *lógica*, o grupo G2 enquadra-se num nível médio, demonstrando ter conexão entre ideias, salvo quando não fazem ligação com os valores obtidos. Por fim, na dimensão *profundidade* o grupo mostra estar num nível elevado com domínio de aspetos, como por exemplo, o facto do preço e a distância serem variáveis positivas.

Figura 10:

Resolução com recurso à calculadora gráfica G2



Com o recurso à calculadora gráfica, esta auxiliou nos valores apresentados pelos alunos, aparentemente obtidos à custa da mesma. Através da função *Shift-G-Solv-ycal*, no caso da calculadora

Casio, colocavam o número de quilómetros devolvendo-lhes o custo a pagar. Na calculadora Texas teriam de recorrer a capacidade *Traçado do gráfico* para obter os mesmos valores. Houve grupos a utilizar uma outra potencialidade da calculadora gráfica, a interseção de dois gráficos, onde conseguiram argumentar qual a agência mais adequada para cada trajeto. A representação do esboço, por parte de alguns alunos, está mais completa fazendo-se acompanhar das variáveis nos eixos. Uma dificuldade sentida, por parte de alguns grupos, foi encontrar uma boa janela de visualização. A resolução com e sem calculadora gráfica teve impacto na classificação de cada nível, tendo os grupos com melhor desempenho usufruído do recurso didático.

Praga de moscas-da-fruta

Na tarefa “Praga de moscas-da-fruta” foi visível o uso da calculadora gráfica. Os alunos demonstram alguma habilidade com a calculadora gráfica, contudo, o seu registo restringe-se à resposta à tarefa sem qualquer tipo de informação sobre os comandos utilizados na calculadora gráfica. Esta tarefa apresenta algum texto, no entanto, a informação relevante é a questão do período de tempo em que o número de moscas-da-fruta foi superior a 57 000.

É difícil imaginar uma alimentação saudável que não seja rica em fruta. Esta tem geralmente poucas calorias e é rica em vitaminas, minerais e fitoquímicos que usualmente têm uma função antioxidante, entre outros efeitos benéficos para a saúde.

Todavia, e por vezes, a aplicação inadequada de produtos químicos leva a desequilíbrios; esta situação faz com que a fruta seja atacada, por exemplo, pela mosca-da-fruta. No passado dia 10 de maio de 2019, uma plantação de macieiras foi invadida por uma praga de moscas-da-fruta. Verificou-se que o número N de moscas-da-fruta, em milhares, evoluiu com o tempo t , em dias, até a praga de moscas-da-fruta ser totalmente exterminada de acordo com a seguinte lei:

$$N(t) = -t^2 + 18t + 40$$

Utilizando as capacidades gráficas da tua calculadora responde à seguinte questão:

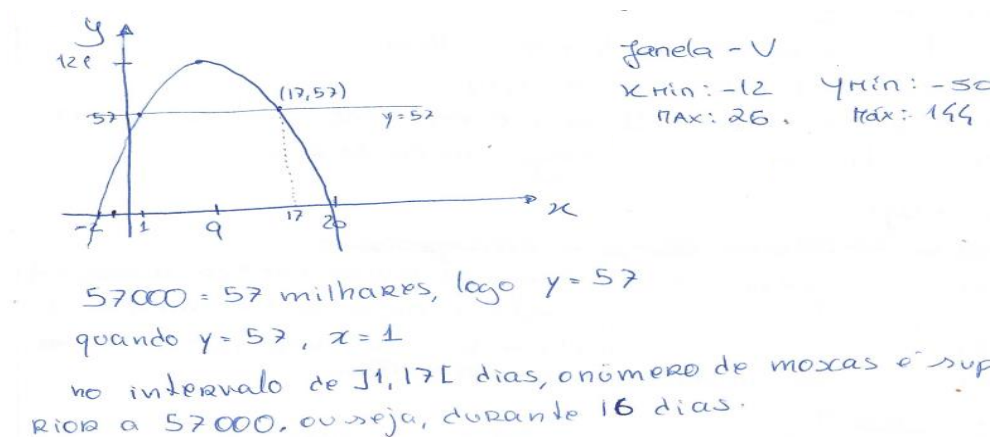
Durante quanto tempo o número de moscas-da-fruta foi superior a 57 000? Explica como procedeste, incluindo na tua resposta o gráfico obtido na tua calculadora, bem como as coordenadas de alguns pontos que consideraste relevantes.

O grupo G6 (Figura 11) fez uma representação do gráfico da função de acordo com a sua janela de visualização, no entanto, parte do gráfico não seria necessário, uma vez que, as variáveis tempo e número de moscas são positivas. Através do esboço percebemos que, apesar de não ser necessário, o grupo foi determinar o máximo da função através da calculadora gráfica. O G6 expõe ainda as suas ideias de forma

clara, mas a representação que faz acompanhar o registo não é o mais adequado ao contexto do problema, *clareza* nível médio, pois esboça parte do gráfico que não pertence à tarefa. Na dimensão *fundamentação*, nível médio, o grupo nem sempre fundamenta o seu raciocínio, exemplo disso é a falta de referência no seu registo das funções utilizadas com a devida justificação. Demonstram ainda algum raciocínio, mas ao colocarem as variáveis x e y nos eixos coordenados revelam pouca conexão entre o enunciado e o ecrã da calculadora gráfica, assim a *lógica* tem um nível médio. Relativamente à *profundidade*, está também num nível médio, pois nem sempre revelaram, de forma escrita, dominar aspetos que permitissem a resolução da tarefa, exemplo disso, é de o registo não incluir a forma de como obtiveram os pontos de interseção das duas funções.

Figura 11:

Representação gráfica com justificação dada pelo G6



A calculadora gráfica, neste grupo, contribuiu de forma eficiente para a visualização dos gráficos das funções, no entanto, a dificuldade de ajustar uma boa janela de visualização persistiu. Os alunos do grupo representaram as variáveis nos eixos coordenados com as letras x e y e não as variáveis de acordo com a tarefa. Este fator pode estar influenciado pelo facto de a calculadora gráfica estar pré-definida com a representação das variáveis x para o eixo das abcissas e o y para o eixo das ordenadas. É da responsabilidade do aluno fazer essa conversão de acordo com a tarefa proposta.

Um outro grupo, G1, resolveu a tarefa através do método analítico e gráfico, sendo a primeira opção a resolução analítica (Figura 12). Na resolução gráfica, esboçaram o gráfico correspondente à expressão da função $N(t) > 57$, onde posteriormente recorreram ao *menu* da calculadora para determinar os zeros da função. O grupo revelou ainda sentido crítico, embora não tenha registado a janela de visualização.

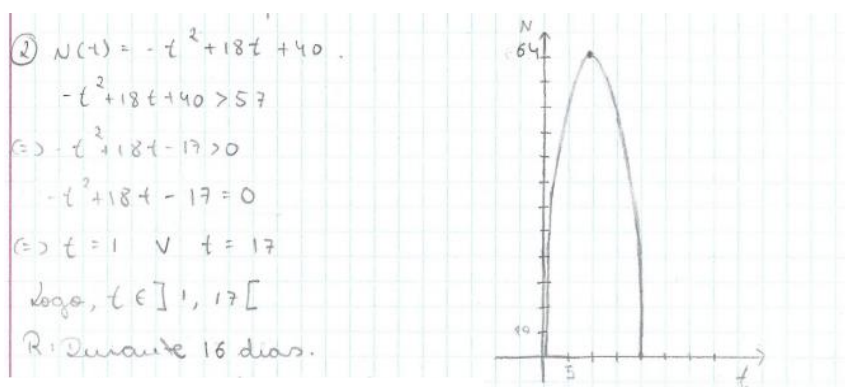
Quanto ao desempenho da comunicação escrita, o G1 encontra-se no nível médio na dimensão *clareza*, expressando as suas ideias através do método analítico e gráfico, mas sem qualquer tipo

justificação das etapas incluídas na sua resposta, apresentando uma *fundamentação* de nível baixo. No nível baixo encontra-se também a dimensão *lógica*, pois revelam pouco raciocínio e sem conexão entre o método analítico e gráfico. É possível verificar alguma destreza sobre o assunto analítico, porém graficamente não evidenciam aspetos importantes, como os zeros da função e marcam um ponto no gráfico referente ao vértice, onde no contexto do problema não dá informação relevante para a resolução, *profundidade* com nível médio.

Apesar dos alunos não marcarem os pontos importantes da função, representam o esboço do gráfico no primeiro quadrante o que mostra terem noção de que não existe tempo negativo, bem como o número de moscas-da-fruta. Na resolução apresentada pelo G1 já é visível a inserção das variáveis correspondentes ao problema nos eixos coordenados. Contudo, faltou rigor na escala usada, como podemos observar através da Figura 12. O grupo, no eixo das ordenadas começa por considerar uma quadrícula a equivaler 10 000 moscas-da-fruta e onze quadrículas corresponde a 54 000 moscas-da-fruta. A obtenção de uma boa janela de visualização na calculadora gráfica, por parte deste grupo pareceu não expor dificuldades.

Figura 12:

Resolução gráfica e analítica do G1



Concurso de aeromodelismo

Na seguinte tarefa, é explícito o uso da calculadora gráfica para averiguar cada um dos critérios estabelecidos pelo júri no concurso de aeromodelismo. Os alunos nesta tarefa tinham de ter a sensibilidade de usar o *menu – analisar gráfico* para determinar vários pontos da função e assim conseguir atribuir uma classificação ao avião.

Num dado concurso de aeromodelismo participaram vários aviões, sendo um deles observado desde o instante em que levantou voo até ao momento da aterragem.

A altura H medida desde o solo até ao avião, t minutos após a decolagem, é dada em função do tempo t pela expressão:

$$H(t) = -0,01t^3 + 0,06t^2 + 0,16t$$

H em hectómetros e t em minutos.

(1 hm corresponde a 100 m)

Segundo os critérios estabelecidos pelo júri do concurso, são observados os seguintes objetivos:

- Estar no ar menos de 8 min e 30 s;
- Atingir a altura de, pelo menos, 105 m;
- Estar, pelo menos, durante 1 minuto consecutivo a, pelo menos, 100 m de altura;
- Meio minuto antes de aterrar, estar a uma altura superior a metade da altura máxima atingida.

Classificação:

Muito bom – cumpre todos os objetivos;

Bom – falha um só objetivo;

Suficiente – falha dois objetivos;

Não classificado – falha mais que dois objetivos.

Numa composição matemática, indica a classificação atribuída ao avião.

Utiliza a calculadora para verificar se cada um dos objetivos foi cumprido.

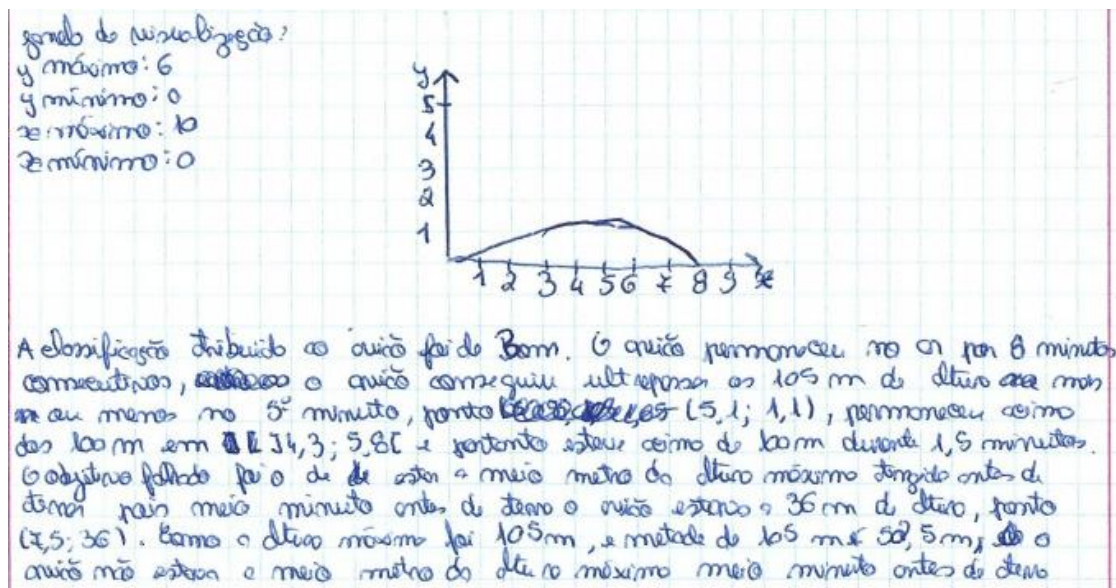
Inclui, na composição, gráfico(s), assim como coordenadas de pontos de interesse para as conclusões.

As coordenadas dos pontos indicados devem ser arredondadas às décimas.

De um modo geral, a turma esboçou corretamente o gráfico da função, no entanto, foi mais notório nesta tarefa, de como os alunos transcreveram literalmente o que viam na sua janela de visualização sem converter para o contexto do problema, como por exemplo, a representação das variáveis x e y nos eixos coordenados (Figura 13).

Figura 13:

Composição escrita do G4



Ao longo das aulas foram referidos quatro elementos que não devem faltar no registo da resolução de uma tarefa que envolva a calculadora gráfica, são eles: as funções utilizadas, a janela de visualização, o esboço dos gráficos das funções utilizadas e a resposta à tarefa, o que nem sempre se pode verificar, como exemplificado na Figura 13 onde falta as funções utilizadas.

No seguinte diálogo, do mesmo grupo, é evidente que entenderam o que era pedido e como deveriam recorrer à calculadora gráfica para responder ao problema.

Aluno 1: O que eu pensei foi: 1 é a altura, uma função constante, e fui ver os pontos de interseção. Percebeste o que eu fiz?

Aluno 2: Eu não estou a ouvir, eu estou a fazer sozinha.

Aluno 1: Colega2, primeiro começa por fazer uma coisa e faz uma restrição do domínio, porque é impossível tempos negativos. Põe uma restrição do domínio de 0 a $+\infty$. Agora na janela de visualização mete também o y zero, porque não há alturas negativas, certo!? No máximo preciso de 1, por isso, põe 6, o x máximo também não e preciso tanto. O máximo é 1,05 passando para metros é 105 que deu (a segunda condição é satisfeita). A seguinte o $y = 1...$

Aluno 2: $y = 1$?

Aluno 1: Sim, $y = 1$. 1 hectómetro são 100 metros. Fomos ver a interseção entre esses dois pontos e dá 1,3 minutos para aí, ou mais, já não sei.

O grupo demonstrou entreaajuda e sabiam como resolver a tarefa. Contudo, não tiveram atenção à forma como apresentaram a resolução da tarefa, *clareza* nível médio. Recorreram a uma representação do esboço do gráfico da função e todos os critérios estabelecidos pelo júri são justificados adequadamente, incluindo informação do gráfico e o respetivo significado no contexto, assim, o G4 tem *fundamentação* no nível elevado. Na dimensão *lógica*, o grupo enquadra-se no nível médio, uma vez que, revelaram ter raciocínio, mas nem sempre houve conexão entre os resultados obtidos pela máquina com as etapas do concurso. O grupo, revelou ainda, de forma escrita, dominar aspetos importantes sobre o assunto, pois em todas as etapas do concurso sabiam qual a propriedade da função que tinham de analisar, *profundidade* nível elevado.

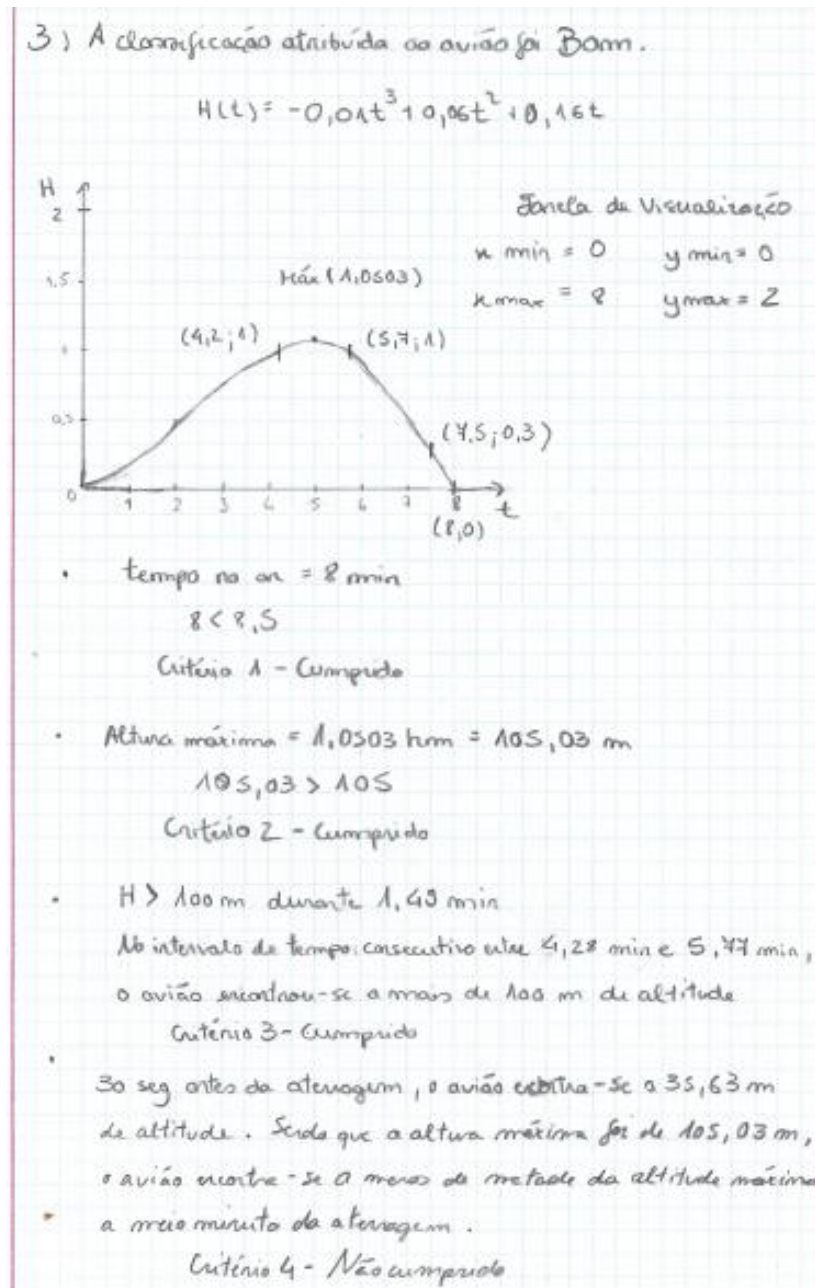
Neste grupo verificou-se que a calculadora contribuiu para a comunicação escrita. Os alunos utilizaram várias funcionalidades do *menu* como, por exemplo, para a determinação do máximo e do zero da função. Este grupo representou as variáveis nos eixos coordenados com as letras x e y e não as variáveis de acordo com a tarefa, tal como o G6 na tarefa “Praga de moscas-da-fruta”. Este aspeto não foi muito usual de encontrar nos registos escritos, mas revela que existe alunos que apenas se limitam a transcrever o que veem no ecrã da calculadora sem conexão de ideias.

Através desta tarefa, verificou-se uma melhoria por parte de alguns grupos na comunicação escrita. Exemplo disso é o G3 (Figura 14), que iniciou a resolução da tarefa utilizando a calculadora para saber qual a classificação do avião e posteriormente escrever uma composição matemática. Por esse motivo, este grupo começou pela resposta final.

Na composição matemática, o G3 apresenta um nível elevado na dimensão *clareza*, apresentado rigor na representação do esboço do gráfico, onde é visível claramente a janela de visualização. Para uma leitura mais clara dos pontos utilizados para responder a cada um dos critérios estabelecidos pelo júri, o grupo podia atribuir letras. No que diz respeito à *fundamentação*, nível elevado, esta apresenta a justificação de todas as etapas de resolução. Para uma justificação mais completa, podiam ainda, referir qual a propriedade utilizada para responder a cada critério. Por exemplo, no primeiro critério referir que determinaram o zero da função que corresponde ao tempo de voo do avião. Revelaram raciocínio ao longo do registo escrito e fazem a conversão da altura dada em metros para hectómetros sempre com a ligação do pensamento e os resultados da calculadora com o enunciado da tarefa, assim, a dimensão *lógica* estar no nível elevado. Este grupo revelou também dominar aspetos importantes sobre o assunto, uma vez que em todas as etapas do concurso sabiam qual a propriedade da função que tinham de analisar, demonstrando um nível de *profundidade* elevado, e qual a sua interpretação.

Figura 14:

Relatório escrito elaborado pelo G3



No grupo G3, não se verificou dificuldades no manuseamento da calculadora gráfica. Utilizaram-na para o auxílio da representação do esboço do gráfico assim como para a verificação do cumprimento de cada critério, permitindo explorar e interpretar as propriedades da função da tarefa e, assim, contribuir para a organização de ideias e para a construção de resposta.

Questão de aula

Um outro exemplo, onde se verifica a justificação elaborada por alguns alunos, proveniente da informação que a calculadora gráfica lhes fornece é a seguinte tarefa, colocada na questão de aula:

Num laboratório foi estudada a evolução de uma colónia de bactérias. Às 8 h, fez-se a primeira contagem e as seguintes realizaram-se em cada hora decorrida. Verificou-se que o número N de bactérias, em milhares, h horas após o início da contagem, é dado por $N(h) = -h^2 + 4h + 9$.

- a) Em que período do dia o número de bactérias foi superior a 9000?
- b) Descreve a evolução da colónia desde as 8 horas até às 13 horas.

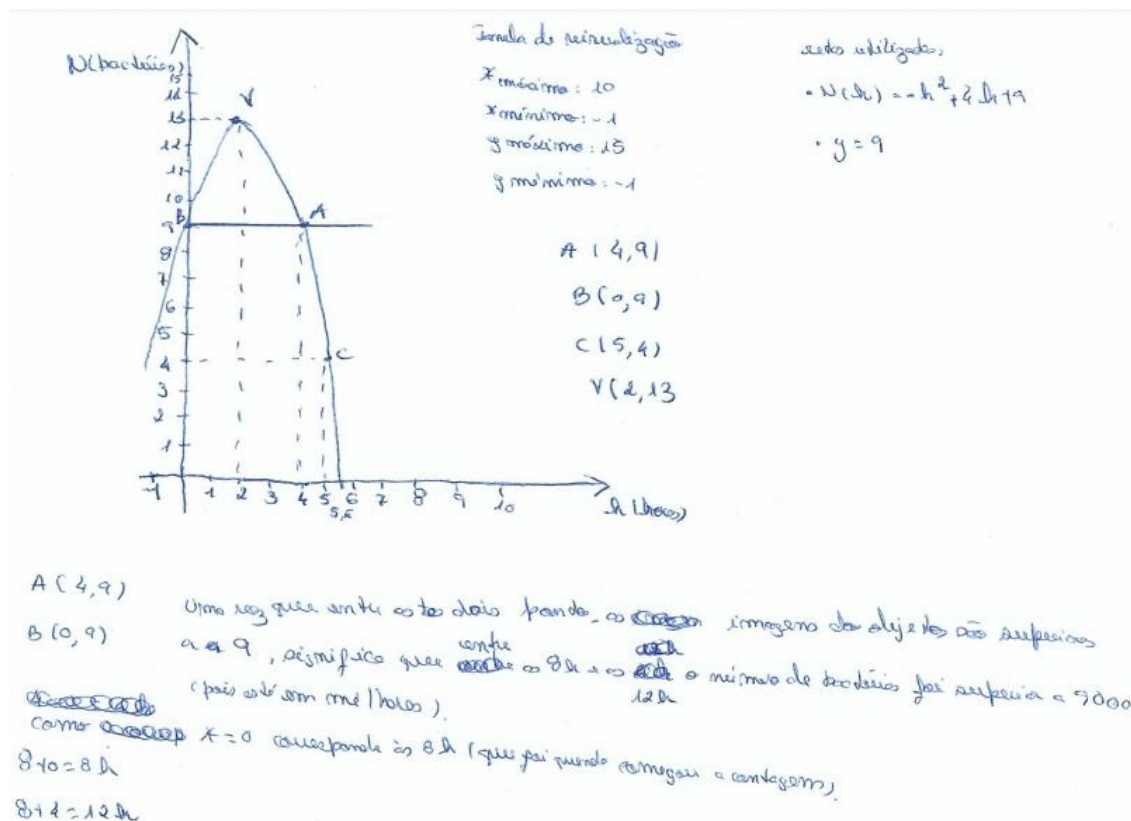
Uma vez mais, os alunos tinham de efetuar várias conversões, uma vez que as 8 h, quando se iniciou a contagem das bactérias, correspondia a $h = 0$, na representação do gráfico da função. Os alunos seguiram todos o mesmo método de resolução na primeira alínea (Figura 15). Representaram os esboços dos gráficos das funções $N(h) = -x^2 + 4x + 9$ e $N(h) = 9$, onde posteriormente determinaram o ponto de interseção das duas funções, com a ajuda da calculadora gráfica.

A comunicação escrita do aluno A25, na dimensão *clareza*, está num nível médio, pois apesar do seu registo ter uma representação adequada e a resolução apresentar ideias claras, estas nem sempre foram registadas na ordem correta, como a explicação das horas, que está depois da resposta ao problema. O vocabulário nem sempre foi o mais correto como por exemplo, quando se refere às funções utilizadas como “retas”. Apresenta ideias claras, é objetivo e tem o cuidado de justificar devidamente todas as etapas presentes na resolução, e por isso, a sua *fundamentação* enquadra-se no nível elevado. O aluno, na dimensão *lógica*, está num nível elevado, revelando raciocínio e coerência nos registos ao longo da resolução com a apresentação de todas as conversões necessárias, assim como, a representação do referencial de acordo com as variáveis da tarefa. Por fim, na dimensão *profundidade*, o aluno apresenta num nível elevado, uma vez que demonstrou dominar e aplicar adequadamente os conceitos que estavam sobre avaliação.

A calculadora gráfica, aparentemente, ajudou na organização de ideias, na representação do gráfico da função e na obtenção de valores dos pontos que permitiram responder à questão. A forma como o aluno A25 representou o referencial e o gráfico da função não revela dificuldades em obter uma boa janela de visualização e de utilizar as potencialidades da calculadora. Revela assim, um sentido crítico ao uso que lhe deu, pois de acordo com o enunciado do problema apenas dá importância ao primeiro quadrante.

Figura 15:

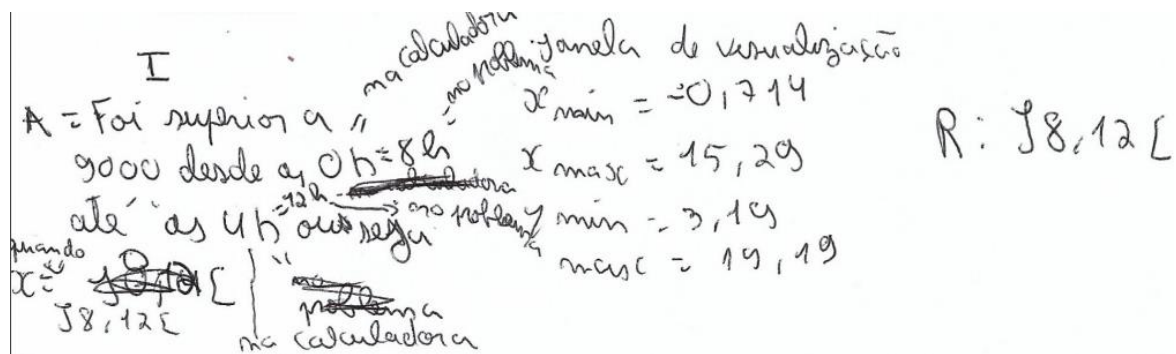
Resolução da alínea a) do aluno A25



Na resolução da primeira alínea, já foi notória, por parte de alguns alunos, alguma evolução na forma como apresentam a sua resposta, e na forma como recorrem ao uso da calculadora gráfica na sua resolução. Os alunos mostram já dominar algumas das capacidades da calculadora gráfica, mas, por vezes, não registam o seu pensamento e a justificação das ideias de forma clara, apresentando um nível baixo nas dimensões *clareza* e *fundamentação*, como se pode observar na Figura 16. Revelam ter algum raciocínio ao evidenciar a conversão dos valores obtidos pela calculadora gráfica para o contexto da tarefa. Mostram já saber aplicar os conceitos abordados, como a determinação dos pontos de interseção, aparentemente, recorrendo à calculadora gráfica e, por isso, a *lógica* e *profundidade* enquadram-se num nível médio.

Figura 16:

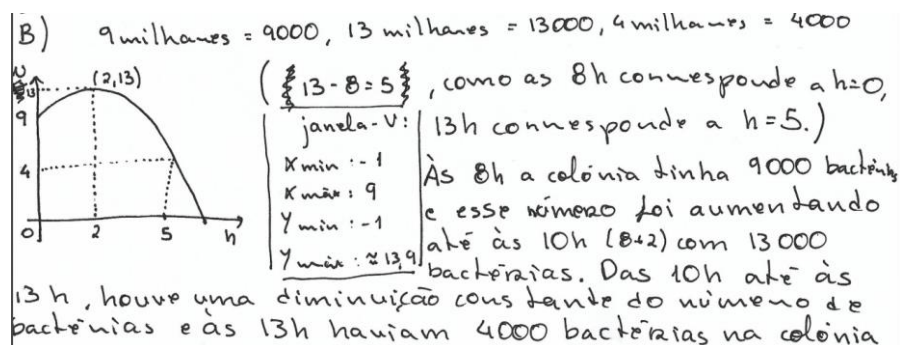
Resolução da alínea a) do aluno A26



Relativamente à segunda alínea da questão de aula, os alunos tinham de descrever a evolução da colónia desde as 8 horas até às 13 horas. Na resolução, houve quem representasse novamente o gráfico da função (Figura 17). Os alunos, no geral, no seu registo apresentaram sempre o gráfico, a janela de visualização e a resposta ao problema, mas não incluíram as expressões das funções utilizadas como, por exemplo, o aluno A21.

Figura 17:

Resolução da alínea b) do aluno A21



A comunicação escrita do aluno A21, na dimensão *clareza*, apresenta um nível elevado. O aluno explicita as suas ideias de forma precisa com uma representação do gráfico adequada, salientando pontos do gráfico que utilizou. Justifica toda a evolução da colónia adequadamente e apresenta coerência na ligação correta entre a informação proveniente da calculadora gráfica com o contexto do problema, assim, em *fundamentação* e *lógica* o aluno A21 está num nível elevado. Por último, na dimensão *profundidade*, revela, de forma escrita, conhecer os conceitos e aplicá-los corretamente como, por exemplo, na determinação do máximo da função ou a representação do esboço do gráfico apenas no primeiro quadrante.

A calculadora nesta alínea, aparentemente, ajudou o aluno A21 na interpretação da evolução das bactérias e, através das potencialidades que esta acarreta, possibilitou analisar a função de uma forma mais rápida e menos morosa.

Ao longo do estudo realizado foi possível apurar que a maior dificuldade sentida pelos alunos, na utilização da calculadora gráfica, foi a de encontrar uma janela de visualização adequada para a tarefa que se encontravam a realizar. Outra das dificuldades verificadas, foi a de selecionar e converter devidamente a informação proveniente da calculadora gráfica para o contexto do problema. Contudo, a realização das tarefas em grupo teve um papel preponderante, para um melhor desempenho na forma com os alunos interagem com a calculadora gráfica, potenciando a discussão de ideias entre eles e com a professora investigadora sobre o correto uso das suas potencialidades e como fazer a transcrição dos resultados obtidos.

Capítulo 5

Conclusões

Na realização da presente dissertação de mestrado foi apresentado e explanado um estudo realizado numa turma do 10.º ano de escolaridade, no âmbito da disciplina de Matemática A. As conclusões desta investigação vão procurar responder a cada uma das questões formuladas no início do estudo. Assim, o presente capítulo encontra-se dividido em quatro subcapítulos. Nos primeiros três subcapítulos são apresentadas as respostas obtidas a cada uma das questões de investigação. No último subcapítulo é realizada uma breve reflexão sobre o presente estudo e são apresentadas sugestões para trabalho futuro.

5.1 Como utilizam os alunos a calculadora gráfica na resolução de tarefas sobre funções?

Habitualmente, os alunos começam a utilizar a calculadora no 5.º ano de escolaridade, contudo, apenas no 10.º ano, no tópico de funções, é que utilizam a calculadora gráfica. Ao longo do estudo realizado, a máquina de calcular gráfica passou a ter um papel preponderante no auxílio da confirmação de resultados, aspeto também constatado no estudo de Semião e Canavarro (2012). Os alunos, também passaram a utilizá-la para criar e testar as suas próprias conjecturas, bem como para a visualização de gráficos de funções, dando mais ênfase à resolução analítica a ser apresentada.

Os alunos, por vezes, não percebem quando é que a calculadora gráfica pode ser um recurso valioso. A sua utilização, no auxílio da resolução de tarefas pelos alunos ainda não é intuitiva, acabando algumas vezes por ser usada desnecessariamente ou nem demonstrar evidências do seu uso. Por exemplo, os alunos não usaram a calculadora e poderia ser muito útil na tarefa “Praga de moscas-da-fruta”. Quando foi pedido aos alunos que efetuassem o registo dos dados obtidos pela calculadora gráfica, quer os esboços dos gráficos como cálculos que efetuavam, verificou-se um melhoramento progressivo na categoria *fundamentação*. Durante a resolução das tarefas, os alunos recorriam aos diferentes *menus* constituintes da calculadora gráfica para determinar pontos pertencentes à função de forma a obter uma resposta mais rápida, sem ter que realizar cálculos analíticos. O facto de ser possível obter um gráfico de uma determinada função, num curto espaço de tempo, possibilitou o seu registo, bem como completá-lo com a averiguação e representação de algumas das suas propriedades (máximo,

zeros, domínio...). Tal como refere Lee (2010), também neste estudo, a utilização da calculadora gráfica deu a possibilidade de uma melhor compreensão sobre os conceitos já abordados. Contudo, a representação gráfica nem sempre correspondia corretamente ao domínio de acordo com o contexto da tarefa pois, a maioria dos registos eram efetuados sem uma correta seleção da janela de visualização pelos alunos. No entanto, houve grupos a utilizarem corretamente o *zoom* da calculadora gráfica mostrando espírito crítico.

Num panorama geral, o uso da calculadora gráfica, na resolução das tarefas, permitiu que os alunos utilizassem as suas potencialidades de forma a encontrar uma solução para a tarefa e, assim, redigir uma resposta de forma mais clara e organizada, incluindo um esboço do gráfico mais preciso, apresentando na categoria *clareza* um melhor desempenho. Os alunos fazem um manuseamento da calculadora gráfica adequado, mas ainda um pouco reticentes, devido a lhes ser incutido que devem saber como resolver todas as tarefas analiticamente.

5.2 Como registam a resolução de tarefas? Quais os contributos da calculadora gráfica para o registo de tarefas?

No primeiro contacto realizado entre a professora investigadora e os alunos, estes apenas registavam as resoluções, em resposta às tarefas propostas, sem qualquer tipo de referência a dados obtidos através da calculadora gráfica. Os alunos não evidenciaram raciocínio nem conhecimento dos tópicos aprendidos na sala de aula. Vários alunos apresentaram níveis baixos nas dimensões *lógica* e *profundidade*. Ao longo do estudo, foi possível presenciar uma evolução nos registos apresentados pelos alunos, mais completos e com informações provenientes da calculadora gráfica, levando de facto, a um aumento de nível na dimensão *fundamentação*. Exemplo disso, foi a representação do esboço do gráfico da função e uma justificação mais detalhada de todas as etapas presentes na resolução. Uma das justificações, encontrada pela professora investigadora, para esta mudança na apresentação dos resultados, deve-se à alteração da opinião de alguns alunos em relação à comunicação escrita em Matemática, que veio a mudar ao longo da intervenção. No início da intervenção, aquando da realização do questionário inicial à turma, dois alunos desvalorizavam a comunicação escrita em Matemática. Com a realização do questionário final, todos os alunos passaram a ter uma opinião positiva sobre os benefícios da comunicação escrita em Matemática. A turma considera que a comunicação escrita lhes pode trazer benefícios na explicitação de raciocínios e na organização de ideias, sendo a *clareza* o domínio com a melhor classificação.

O registo, na maior parte das vezes, era incompleto, uma vez que, os alunos não colocavam nas suas redações todas as informações pertinentes para a tarefa, como por exemplo, as funções utilizadas para obter o esboço do gráfico e, até mesmo, como obtiveram determinados valores a partir da calculadora gráfica, tendo assim a dimensão *fundamentação* um nível médio.

Os alunos, em geral, começavam o registo da resolução das tarefas através do esboço do gráfico das funções correspondentes. Junto à representação do gráfico era explicitado o intervalo da janela de visualização utilizado, bem como eram salientados alguns dos pontos da função fundamentais para obter uma conclusão, sendo estes posteriormente mencionados ao longo da resposta. O facto de iniciar a resolução recorrendo à calculadora gráfica e, em seguida, apresentarem o esboço do gráfico, permitiu-lhes organizar o seu pensamento de forma a conseguirem explicar os passos seguidos na resolução com recurso a esta ferramenta. Contudo, existe ainda um pequeno grupo de alunos que não conseguem expor e fundamentar as suas ideias de forma clara e precisa. Houve também grupos de alunos a iniciar o seu registo com a resposta à tarefa e só depois apresentar todo o seu raciocínio. Como os alunos resolvem a tarefa com a calculadora gráfica e só depois passam para o papel o que fizeram explicitando o caminho seguido, daí que o registo seja invertido. Mais precisamente a possibilidade de rapidamente chegarem a uma resposta, apenas com o recurso a este material didático, e só depois registarem as suas ideias foi um dos contributos mencionados pelos alunos.

Através do uso da calculadora gráfica, pode verificar-se nas respostas escritas dos alunos dois métodos distintos de resolver a mesma tarefa, através da análise gráfica e analiticamente, sendo o último método mencionado como uma forma mais demorada de chegar à resposta.

Ao longo do estudo realizado, foi verificada uma evolução por parte de alguns alunos nas diferentes dimensões propostas por Pires et al. (2018), na forma como redigem as suas ideias, assim como, nas estratégias utilizadas. Na tarefa da “Agência de aluguer de veículos”, houve grupos de alunos a resolver apenas pelo processo analítico e grupos a utilizar a calculadora gráfica. Verificou-se que os alunos que recorreram às capacidades da calculadora gráfica tiveram melhor desempenho nos seus registos escritos relativamente aos alunos que usaram apenas o método analítico. Este desempenho pode estar relacionado com o uso da calculadora gráfica, uma vez que, podem confirmar os seus resultados. A possibilidade de assegurar a validade da resolução, também foi referida pelos alunos como uma mais valia para o seu registo escrito e ganho de confiança durante o processo de resolução.

5.3 Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas com recurso à calculadora gráfica e no registo da sua resolução?

Aquando da utilização da calculadora gráfica na resolução de tarefas e no registo da escrita matemática dos resultados obtidos, os alunos apresentaram algumas dificuldades. Uma das dificuldades verificadas no início do estudo foi inserir uma função cujo domínio pertencia a um intervalo, sendo esta dificuldade ultrapassada após a professora investigadora demonstrar como se procedia. A escolha de uma janela de visualização adequada ao contexto da tarefa foi outra das dificuldades sentidas pelos alunos, tendo vários deles apresentado um esboço do gráfico da função com domínio desajustado ao contexto da tarefa. Obter uma boa janela de visualização é já uma preocupação em várias investigações que envolvam a calculadora gráfica, como nos estudos realizados por Almeida e Oliveira (2009) e Consciência (2013).

A dimensão com a classificação mais baixa foi a *lógica*, uma vez que, os alunos revelaram pouco raciocínio e não conseguiram interligar os processos de resolução com o contexto do problema. Existiu quem se limitasse apenas a apresentar a resposta à tarefa e a transcrever a sua janela de visualização. Uma outra dificuldade sentida, foi de como explicar os resultados obtidos através da janela de visualização. Algumas das respostas obtidas representam as variáveis x e y nos eixos cartesianos sem fazerem a ponte com a tarefa, tendo este aspeto melhorado ao longo do estudo, assim como, a escala utilizada em cada eixo cartesiano.

O registo escrito, por vezes, não era o mais claro devido à falta de organização e conexão de ideias. Por vezes, não tinham a sensibilidade de selecionar quais as características da função que deviam estudar, de forma a não perderem tempo e revelarem sentido crítico face à tarefa. Um dos exemplos onde se pode verificar tais falhas foi em “Praga de moscas-da-fruta”, ao determinar o vértice da função quando não era necessário para a resolução.

5.4 Reflexões e recomendações

O presente estudo centrou-se na interação entre os alunos do 10.º ano e calculadora gráfica e a comunicação escrita. A escolha do tema do estudo, relativamente à calculadora gráfica, deveu-se ao facto de esta ser de uso obrigatório no ensino secundário e a professora investigadora ser apologista do uso da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem. Estando mais familiarizada com as calculadoras gráficas da marca Texas, considerando estas mais intuitivas, a utilização da calculadora gráfica da Casio por parte de alunos foi um desafio para a investigadora. Um outro desafio colocado aos

alunos e à investigadora, talvez o maior, foi a comunicação escrita. Expressar da forma correta nem sempre é fácil, por isso, de forma a combater lacunas e melhorar para projetos futuros, foi trabalhado a comunicação escrita neste estudo.

Durante todo o ano letivo vivíamos na incerteza de voltar ao confinamento. O certo é que voltamos ao confinamento e a intervenção foi preparada de forma diferente. As aulas à distância foi uma das limitações do presente estudo, levando a que a recolha de dados não tenha ocorrido da forma desejada. Na minha opinião, considero que o ensino presencial seria mais enriquecedor para a formação e ter mais contributos para o ganho de experiência na prática pedagógica, levando a um aumento da destreza do professor. Uma das dificuldades deste estudo foi a gestão do tempo, por vezes, era curto para a resolução das tarefas e os planos de aula nem sempre foram cumpridos. A organização dos grupos, no ensino à distância, foi efetuada de forma a não haver desequilíbrios entre eles. Com o regresso ao ensino presencial houve a reorganização dos grupos, que fez com que, no geral, os alunos ficassem reorganizados com colegas do mesmo nível, pois por coincidência a ordem com que se sentaram na sala de aula, desde o início do ano letivo, coincidiu com o mesmo nível de desempenho.

Para estudos futuros recomendo que sejam logo, desde o início, os alunos a partilhar as suas resoluções de forma a gerar um debate/discussão de ideias entre eles. A criação de tarefas de exploração mais diversificadas também pode levar ao enriquecimento do seu conhecimento, onde neste estudo os alunos mostraram não estar familiarizados com este tipo de tarefas, e obriga-os de certa forma a escrever o seu raciocínio. Uma outra sugestão é de não evidenciar interesse por qualquer tipo de método de resolução e deixar o aluno escolher, de forma a gerar uma discussão e partilha de diferentes caminhos de resolução de uma mesma tarefa e assim enriquecer o debate e os conhecimentos dos alunos.

Lista de Referências

- Almeida, A. C., & Oliveira, H. (2009). O processo de gênese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, 18, 87–118.
- Barbosa, A., & Vale, I. (2019a). Tens correio! A comunicação escrita e o *feedback* na aula de matemática. In B. Cavadas, E. Linhares, M. C. Martins, M. Correia, N. Mestrinho, N. Branco, R. Santos & S. Colaço (Orgs.) *Inovação no Ensino da Matemática e das Ciências* (pp. 109–123). Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém.
- Barbosa, A., & Vale, I. (2019b). A troca de correspondência como estratégia para evidenciar a comunicação matemática escrita. In B. Cavadas, E. Linhares, M. C. Martins, M. Correia, N. Mestrinho, N. Branco, R. Santos & S. Colaço (Orgs.) *Inovação no Ensino da Matemática e das Ciências*, (pp. 145–151). Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém.
- Boavida, A. M. R. (2005). A argumentação em Matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração [dissertação de doutoramento]. Universidade de Lisboa.
- Boavida, A. M. R., Gomes, A., & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de matemática. Olhares sobre um projeto de investigação colaborativo. *Educação e Matemática*, 70, 18–26.
- Braun, B. (2014). Personal, expository, critical and creative: Using writing in mathematics courses. *Primus*, 24(6), 447–464.
- Campos, S. G. (2014). A calculadora gráfica na promoção da escrita matemática na aprendizagem de modelos contínuos não lineares: Um estudo com alunos do 11.º ano de Matemática B [dissertação de mestrado]. Universidade do Minho.
- Campos, S., Viseu, F., Rocha, H., & Fernandes, J. A. (2015). A calculadora gráfica na promoção da escrita matemática. *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching-ICTMT12*, 590–598.
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012) Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: O caso de Célia. In Canavarro, P., Santos, L., Boavida, A., Oliveira, H., Menezes, L. & Carreira, S. (Orgs), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. 255–266.
- Cândido, P. (2018). Comunicação em Matemática. In K. Smole & M. Diniz (Orgs), *Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades básicas para aprender matemática*, (pp. 15–28).
- Carvalho, P. C. D. & Carvalho, J. C. (2006). Preparar os Testes. Ensino Secundário | 10.º ano. *Areal Editores*.
- Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: Teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3–18.
- CNE (2020). Estado da Educação 2019. (Centro Nacional de Educação, Ed.).
- Consciência, M. M. (2003). Calculadoras Gráficas: Algumas limitações. *Gazeta da Matemática*, 145, 34–42.

- Consciência, M. M. (2013). *A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário* [dissertação de doutoramento]. Universidade de Lisboa.
- Correia, M. C. B. (2009). A observação participante enquanto técnica de investigação. *Pensar Enfermagem*, 13(2), 30–36.
- Dalfovo, M. S., Lana, R. A. & Silveira, A. (2008). Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. *Revista Intercalar Científica Aplicada*, 2(4), 1–13.
- Decreto-lei nº 17/2016 do Ministério de Educação. (2016). Diário da República: I Série, nº 65/2016.
- Demana, F., & Waits, B. K. (1992). Soundoff: A computer for all students. *The Mathematics Teacher*, 85(2), 94-95. <https://doi.org/10.5951/MT.85.2.0094>
- DGE. (2018). *Aprendizagens Essenciais*. DGE.
- Domingos, A. (2017). Tecnologias na Educação Matemática: O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática: Contributos da investigação. *Educação e Matemática*, (144 e 145), 59–64.
- Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Heuvel-Panhuizen, M., Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39(5), 405–418.
- Faria, F., & Rodrigues, M. (2020). A comunicação matemática escrita. *Da Investigação às Práticas*, 10(2), 90–116. <https://doi.org/10.25757/invep.v10i2.220>.
- Ferreira, A. T. (2018). Comunicação matemática no processo de ensino–aprendizagem: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, (149 e 150), 1.
- Goma, J. L. S., Manrique, A. L., & Martinho, M. H. (2020). A comunicação matemática escrita de futuras professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental envolvendo o pensamento algébrico. *Quadrante*, 29(2), 47–67. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22571>.
- Guerreiro, A., & Martins, C. (2020). Avaliação e comunicação na aula de matemática: concepções e práticas de professores do 2.º ciclo do ensino básico. *Quadrante*, 29(2), 6–23. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22570>
- Jacinto, H. Carreira, S., & Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!" Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática*, (149 e 150), 76–80.
- Lee, K. P. (2010). A guide to writing mathematics. Disponível em: <http://cc.kangwon.ac.kr/~kimoon/me/me-132/math-writing.pdf>.
- Lopes, N. (2018). A sociedade digital: A redefinição da escola, do papel do professor e do aluno. *Revista Saber e Educar*, 25, 3–9.
- Lourenço, V., Duarte, A., Nunes, A., Amaral, A., Gonçalves, C., Mota, M., & Mendes, R. (2018). PISA 2018 – PORTUGAL. Relatório Nacional.
- Magalhães, M. G. (2010). A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11.º ano [dissertação de mestrado]. Universidade do Minho.
- Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2011). A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática. *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 791–805). Associação de Professores de Matemática.
- Martinho, M., & Ponte, J. (2005). A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de

- desenvolvimento profissional do professor. In H. M. Guimarães & M. L. Serrazina, Atas do V CIBEM: Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. Associação de Professores de Matemática.
- Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, (149 e 150), 34–38.
- McCulloch, A. W., Keene, K. A., & Kenney, R. H. (2013). What to trust: Reconciling mathematical work done by hand with conflicting graphing calculator solutions. *School Science and Mathematics*, 113(4), 201–210. <https://doi.org/10.1111/ssm.12016>
- Menezes, L. (2000). Matemática, linguagem e comunicação. *Millenium*, 20, 179–196.
- Menezes, L. (2021). Oportunidades para a comunicação escrita na aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, 160, 13–16.
- Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte, *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, (pp. 135–161). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.
- Menezes, L., & Nacarato, A. M. (2020). Comunicação no ensino e na aprendizagem da Matemática. *Quadrante*, 29(2), 1–5.
- Ministério da Educação. (2013). Programa de Matemática A. Ensino Secundário. Ministério da Educação.
- Ministério da Educação. (2017). *Perfil Dos Alunos À Saída Perfil Dos Alunos*. ME–DES. 1–30.
- Ministério da Educação. (2020). Orientações para a recuperação e consolidação das aprendizagens ao longo do ano letivo de 2020/2021.
- Ministério da Educação; DGE. (2016). Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A.
- NCTM. (2007). Princípios e normas para a matemática escolar. APM.
- NCTM. (2015). Strategic use of technology in teaching and learning mathematics. A position of the National Council of Teachers of Mathematics.
- Neves, M. A. F., Guerreiro, L., Leite, A. & Silva, J. N. (2012). Matemática A 10.º ano. *Porto Editora*.
- Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). A gestão curricular em Matemática. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L.B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII*, 619–627. SEIEM.
- Ocak, M. (2008). The effect of using graphing calculators in complex function graphs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 4(4), 337–346. <https://doi.org/10.12973/ejmste/75360>
- Pereira, M. & Saraiva, M. J. (n. d.) Tarefas de Investigação sobre Funções.
- Pires, M. V., Costa, E., & Leite, C. (2018). Contributos para a análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos. *Educação e Matemática*, (149 e 150), 28–33.
- Ponte, J. P (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2–7.
- Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, 21, 13–30.
- Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Marinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação na prática de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39–74.

- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2015). É necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, 155, 26–34.
- Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Education Studies in Mathematics*, 55(1), 27–47.
- Ribeiro, M. J., & Ponte, J. P. (2000). A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de Matemática. *Quadrante*, 9(2), 3–26.
- Rocha, H. (2000). A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário. Universidade Aberta.
- Rocha, H. (2012). A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: Estudo sobre as Práticas Curriculares de Professores do Ensino Secundário [tese de doutoramento]. Universidade de Lisboa.
- Rocha, H. (2015). O formalismo matemático num contexto de utilização da tecnologia. *Atas XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 22–35).
- Semião, M. J., & Canavarro, A. P. (2012). A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: Um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das funções. In O. Magalhães, & A. Folque (org), *Práticas de investigação em Educação*.
- Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, (149 e 150), 13–18.
- Silva, J. C. (2018). Comunicação matemática, uma das 7 competências matemáticas fundamentais no PISA. *Educação e Matemática*, (149 e 150), 45–48.
- Silva, D., & Seixas, S. R. (2010). As competências que a calculadora gráfica promove no ensino/aprendizagem da matemática: Um estudo de caso numa turma do 11.º ano. *Interações*, 15, 141–172.
- Sousa, H. D. (2013). Matemática A. Questões de Exames Nacionais e de Testes Intermédios do 12.º ano. *IAVE*.
- Teixeira, M. M. (2011). A Comunicação escrita na aula de matemática com tecnologias [dissertação de mestrado]. Universidade do Algarve.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). Funções: Matemática – 10.º ano de escolaridade. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Anexos

Anexo 1: Questionário inicial

Este questionário é respondido de forma anónima. É realizado no âmbito do estágio Profissional do Mestrado em Ensino de Matemática no Ensino Básico e Secundário da Universidade do Minho, onde se pretende recolher informação sobre as preferências, hábitos e escolhas feitas pelos alunos do 10.º ano referentes à disciplina de Matemática.

Idade: _____

Sexo: Masculino ☐ Feminino ☐

1. Quanto tempo, por semana, dedicas ao estudo de Matemática?

☐ Menos de 1 hora ☐ 1 a 3 horas ☐ 3 a 5 horas ☐ Mais de 5 horas

2. Gostas de Matemática?

☐ Gosto muito ☐ Gosto ☐ Gosto pouco ☐ Não gosto

3. Como classificas a disciplina de Matemática?

☐ Muito difícil ☐ Difícil ☐ Aceitável ☐ Fácil ☐ Muito fácil

4. Como classificas o teu desempenho a Matemática?

☐ Fraco ☐ Razoável ☐ Bom ☐ Muito bom

5. Em relação a cada uma das afirmações, indica a que se devem as tuas dificuldades a Matemática, caso existam

	Nunca	Raramente	Às vezes	Muitas vezes	Sempre
Falta de estudo	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de bases	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de interesse pela disciplina	☐	☐	☐	☐	☐
Métodos de ensino utilizados pelos professores	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de apoio fora da aula	☐	☐	☐	☐	☐
Outro	_____				

6. Fora da escola, tens ajuda na resolução das tarefas da disciplina de Matemática? Se sim, quem te ajuda? (explicador, pais, internet, etc.)

7. Pretendes ingressar no ensino superior? Se sim, que curso(s) pretendes frequentar?

8. Em que medida te parece que a Matemática poderá ser importante para o teu futuro profissional?

- ☐ Nada;
- ☐ Pouco;
- ☐ Bastante;
- ☐ Imensamente importante.

9. No teu dia a dia, fora das aulas de matemática, já tiveste situações em que a Matemática te foi útil? Podes dar alguns exemplos?

10. Os métodos que te permitem aprender melhor na aula são [assinala apenas três opções]:

- ☐ Quando escreves no caderno o que o professor vai explicando
- ☐ Quando fazes exercícios
- ☐ Quando memorizas a matéria à medida que vais escutando
- ☐ Quando transcreves do quadro a matéria
- ☐ Quando trabalhas em grupo
- ☐ Quando tentas resolver problemas ou desafios matemáticos
- ☐ Outro: _____

11. Achas importante a comunicação escrita na tua aprendizagem em matemática? Porquê?

12. Refere três vantagens da comunicação escrita na tua aprendizagem em matemática.

13. Qual o modelo da tua calculadora gráfica?

14. Para que fins utilizas a calculadora gráfica no teu estudo da disciplina de matemática?

15. Consideras um entrave ou uma mais valia o uso da calculadora no teu estudo na disciplina de matemática? Porquê?

Obrigada pela colaboração!

Anexo 2: Questionário final

Este questionário é respondido de forma anónima. É realizado no âmbito do estágio Profissional do Mestrado em Ensino de Matemática no Ensino Básico e Secundário da Universidade do Minho, sobre o tema "A calculadora gráfica e a comunicação escrita" onde se pretende recolher informação sobre as preferências matemáticas dos alunos e em que medida a calculadora e a comunicação escrita ajudaram os alunos na disciplina de Matemática.

	Concordo	Não Concordo	Sem Opinião
A utilização da calculadora gráfica motivou-me para a aprendizagem de funções.	☐	☐	☐
A calculadora gráfica ajudou-me a organizar o pensamento.	☐	☐	☐
Através da escrita consolidei melhor os conceitos.	☐	☐	☐
Expliquei melhor o meu raciocínio com o auxílio da calculadora gráfica.	☐	☐	☐
Prefiro expressar-me oralmente do que por escrito.	☐	☐	☐

1. Em que medida consideras importante a comunicação escrita na tua aprendizagem em matemática?

2. Em que medida consideras importante a utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem em matemática?

3. Para que fins utilizas a calculadora gráfica no teu estudo na disciplina de matemática?

4. Consideras que a calculadora gráfica contribuiu para o registo de tarefas? Porquê?

5. Quais foram as dificuldades sentidas na escrita da resolução de tarefas com recurso à calculadora gráfica?

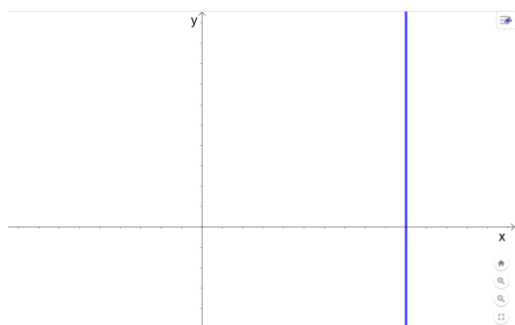
6. O trabalho de grupo ajudou-te a compreender melhor os conteúdos? Em que aspetos?

Obrigada pela colaboração!

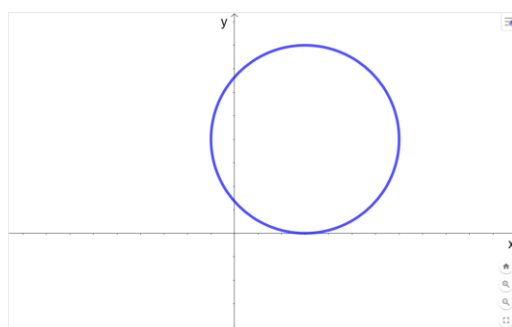
Anexo 3: Ficha de Diagnóstico

1. Quais dos seguintes gráficos representam funções? Justifica.

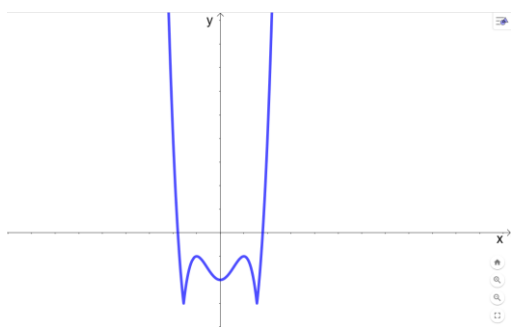
A)



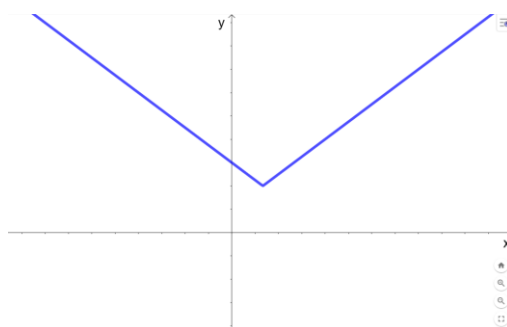
B)



C)



D)



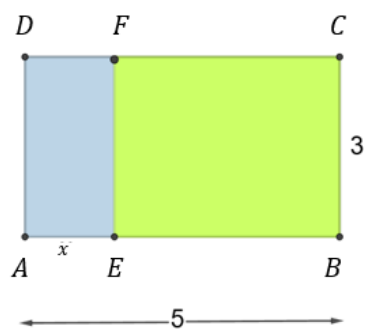
Nota 1: Adaptado de Carvalho & Carvalho (2006, p. 106)

2. Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$.

Tem-se que $\overline{AB} = 5$ e $\overline{BC} = 3$.

Um ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A . Um ponto F desloca-se sobre o lado $[CD]$, acompanhando o movimento do ponto E , de tal forma que $[EF]$ permanece sempre paralelo a $[AD]$.

Seja g a função que, ao comprimento x do segmento $[AE]$, faz corresponder a área y do retângulo $[AEFD]$. Numa pequena composição explica como podes definir a função g , indicando domínio e desenha o seu gráfico.



Nota 2: Adaptado de Sousa (2013, p. 11)

Anexo 4: Organização do estudo

Aula	Tópicos	Objetivos	Materiais
Aula 1 Dia: 06/04/2021	- Função par - Função ímpar	-Identificar uma função real de variável real f como sendo par se $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$; -Identificar uma função real de variável real f como sendo ímpar se $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$; -Dada f ímpar, função real de variável real, justificar que se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$; -Aplicação de conhecimentos.	-Calculadora gráfica; -Ficha de trabalho; -Caderno diário; -Computador
Aula 2 Dia: 09/04/2021	-Translações do gráfico de uma função	-Representar, na calculadora gráfica, o gráfico de uma função e o seu transformado por meio de uma translação; -Identificar o domínio, o contradomínio e as coordenadas dos zeros de uma função e da função obtida, por meio de uma translação do seu gráfico; -Reconhecer que o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x - c)$ é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u} = (c, 0)$, sendo c um número real e f uma função real de variável real; -Reconhecer que no caso da translação vertical, em que $g(x) = f(x) + h$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação segundo o vetor $\vec{u} = (0, h)$, o $D_g = D_f$; -Dado um gráfico e o seu transformado reconhecer se ocorreu uma translação vertical ou horizontal. -Reconhecer que o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x - c) + h$ é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u} = (c, h)$, sendo c e h números reais e f uma função real de variável real; -Representar e reconhecer os gráficos obtidos por reflexão;	-Calculadora gráfica; -Ficha de trabalho; -Caderno diário; -Computador

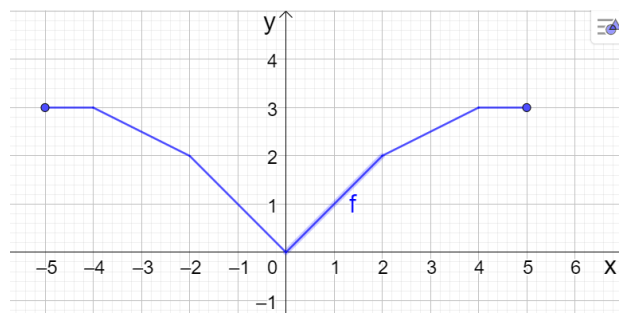
		-Aplicação de conhecimentos	
Aula 3 Dia: 13/04/2021	-Dilatação e contração do gráfico de uma função	-Reconhecer que o gráfico de $g(x) = af(x)$, com $0 < a < 1$ e f função $r.v.r.$ é a imagem do gráfico de f pela contração vertical; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = af(x)$, com $a > 1$ e f função $r.v.r.$ é a imagem do gráfico de f pela dilatação vertical; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = f(ax)$, com $0 < a < 1$ e f função $r.v.r.$ é a imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = f(ax)$, com $a > 1$ e f função $r.v.r.$ é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$; -Representar, na calculadora gráfica, o gráfico de uma função; -Reconhecer os gráficos obtidos por contração e dilatação horizontal e vertical; -Aplicação de conhecimentos	-Calculadora gráfica; -Ficha de trabalho; -Caderno diário; -Computador
Aula 4 Dia: 14/04/2021	-Reflexão	-Reconhecer que o gráfico de $g(x) = -f(x)$, definido em $D_g = D_f$, é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_x; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = f(-x)$, definido em $D_g = \{-x: x \in D_f\}$, é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_y; -Representar e reconhecer os gráficos obtidos por reflexão; -Aplicação de conhecimentos sobre a contração e dilatação vertical e horizontal em tarefas	-Calculadora gráfica; -Ficha de trabalho; -Caderno diário; -Computador
Aula 5 Dia: 04/06/2021	-Função par; -Função ímpar; -Translação do gráfico de uma função;	-Aplicação de conhecimentos envolvendo todos os tópicos sobre transformações de gráficos de uma função num relatório a realizar-se em grupos com o auxílio da calculadora gráfica.	-Calculadora gráfica; -Ficha de trabalho -Caderno diário; -Computador; -Projektor; -Marcadores; -Quadro.

	-Dilatação e contração do gráfico de uma função; -Reflexão		
--	---	--	--

Anexo 5: Tarefas exploratórias

Tarefa 1 (06/04/2021):

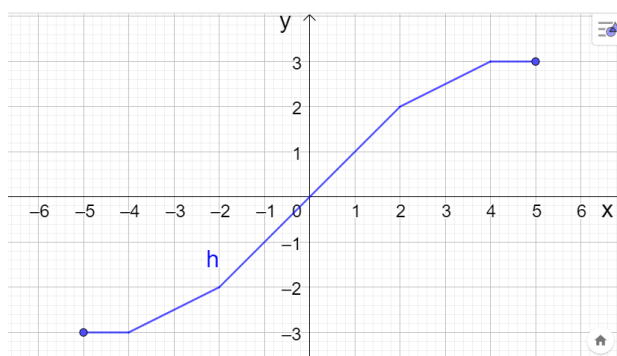
Na figura a baixo está representada graficamente a função f de domínio $[-5,5]$.



1.1. Completa a seguinte tabela. O que observas?

x	$f(x)$	$f(-x)$
-5	$f(-5) = 3$	$f(5) = 3$
-4		
-2		
-1		
0		
1		
2		
4		
5		

2. Na figura ao lado está representada graficamente a função h de domínio $[-5,5]$.



2.1. Completa a seguinte tabela. O que observas?

x	$h(x)$	$h(-x)$	$-h(x)$
-5	$h(-5) = -3$	$h(5) = 3$	$-h(-5) = 3$
-4			
-2			
-1			
0			
1			
2			
4			
5			

Adaptado de Neves et al. (2012, p. 116)

Tarefa 2 (09/04/2021):

1. Usando a calculadora gráfica, representa graficamente a seguinte função $f(x) = x^4 - 4x^2$ de domínio $[-2,1]$. Indica o contradomínio da função $f(x)$.
2. Considera a família de funções $g(x) = f(x - a) + b$, a e $b \in \mathbb{R}$. O que observas ao alterar os parâmetros a e b . Justifica todas as tuas conclusões através de um relatório escrito.

Adaptado de Pereira & Saraiva (n. d., p. 1)

Tarefa 3 (13/04/2021):

1. Usando a calculadora gráfica, representa graficamente a seguinte função $f(x) = x^4 - 4x^2$ de domínio $[-2,1]$. Indica o contradomínio da função $f(x)$.
 - 1.1. Considera a família de funções $g(x) = af(bx)$, a e $b \in \mathbb{R}^+$. O que observas ao alterar os parâmetros a e b . Justifica todas as tuas conclusões através de um relatório escrito.

Adaptado de Pereira & Saraiva (n. d., p. 1)