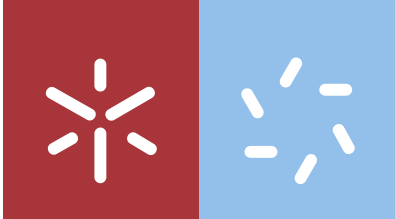




Carlos Filipe da Silva Freitas

**Semigrupos de Transformações (Lineares)
com um Conjunto Invariante**

Universidade do Minho
Escola de Ciências





Universidade do Minho
Escola de Ciências

Carlos Filipe da Silva Freitas

Semigrupos de Tranformações (Lineares) com um Conjunto Invariante

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Matemática e Computação
Área de especialização em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Suzana Mendes Gonçalves

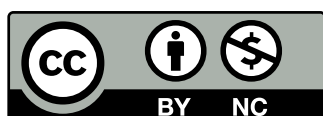
DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional

CC BY-NC 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.pt>

Agradecimentos

Este trabalho contou com a paciência e apoio de muitos, a quem devo os meus mais sinceros agradecimentos.

À minha caríssima orientadora, Professora Suzana Mendes Gonçalves, pela serenidade, perseverança, ajuda, compreensão, orientação, expertise. Esta lista podia continuar, já que é mais que merecido o reconhecimento.

Aos restantes professores com quem me cruzei, não só ao longo do Mestrado, mas também da Licenciatura. Foram muitos os que deixaram a sua marca.

Ao Centro de Matemática da Universidade do Minho e à Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia, pelo financiamento desta dissertação, através da Bolsa de Investigação CMAT - 37/ECUM/CMAT/2023-UIDB/00013/2020.

Ao Ricardo, por todo o apoio, disponibilidade, presença e viagens de volta à terra nos momentos em que nos esquecemos de confirmar o que é a realidade.

À Catarina, às Carolina's, à Bruna, à Beatriz, à Sara e à Rita, pelas palavras motivadoras e por lembrarem que o caminho estava quase, quase a chegar ao fim (mesmo quando ainda estava a começar).

À minha colega de mestrado, Sofia, pela partilha nas lutas ao longo deste curso.

À família, em particular, à Érica, à “família do Rope Skipping” e a todos os amigos que não ficaram nomeados, por saberem que ia chegar a bom porto, até quando a dúvida afligia.

A todas estas pessoas, o meu muitíssimo obrigado!

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Resumo

Semigrupos de transformações (lineares) com um conjunto invariante

O estudo da teoria de semigrupos é significativamente facilitado pelo desenvolvimento da teoria de semigrupos de transformações, uma vez que se sabe que todo o semigrupo pode ser mergulhado num semigrupo de transformações. Nesta dissertação, apresentamos e analisamos os resultados de quatro semigrupos de transformações totais, a saber, $T(X, Y)$, $S(X, Y)$, $T(V, W)$ e $S(V, W)$.

Em cada um desses semigrupos, identificamos os elementos regulares, caracterizamos as relações de Green e, em alguns casos, examinamos subsemigrupos maximais e ideais. O objetivo principal é consolidar e comparar as diferentes técnicas de demonstração aplicadas a semigrupos de transformações de conjuntos e de espaços vetoriais. Notavelmente, embora muitos dos resultados sejam análogos, as técnicas variam consideravelmente entre esses dois tipos de semigrupos.

Assim, esta dissertação contribui para o entendimento aprofundado das estruturas dos semigrupos de transformação e de transformações lineares, compilando resultados essenciais da área e facilitando o avanço dos estudos nesse campo. Além disso, explora as semelhanças e contrastes entre as técnicas de demonstração utilizadas em cada uma dessas áreas.

Palavras-chave: Semigrupos de transformações, Semigrupos de transformações lineares, Conjuntos invariantes, Regularidade, Relações de Green, Ideais.

Abstract

Semigroups of (linear) transformations with an invariant set

The theory of semigroups is significantly facilitated by the development of the theory of semigroups of transformations, since it is known that every semigroup can be embedded in a semigroup of transformations. In this paper, we present and analyze the results of four semigroups of total transformation, namely $T(X, Y)$, $S(X, Y)$, $T(V, W)$ and $S(V, W)$.

In each of these semigroups, we identify regular elements, characterize Green's relations and, in some cases, examine maximal subsemigroups and ideals. The primary objective is to consolidate and compare the different proof techniques applied to semigroups of transformation of sets and vector spaces. Notably, although many results are analogous, the techniques vary considerably between these two types of semigroup.

Thus, this dissertation contributes to a deeper understanding of the structures of transformation semigroups and of linear transformation semigroups, compiling essential results in the field and facilitating further study in this area. In addition, it explores the similarities and contrasts between the proof techniques used in each of these areas.

Keywords: Semigroups of transformations, Semigroups of linear transformations, Invariant sets, Regularity, Green's Relations, Ideals.

Índice

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	Conceitos iniciais	3
2.2	Relações de Green	8
2.3	Semigrupos de transformações	12
2.4	Semigrupos de transformações lineares	14
3	Semigrupos de transformações com imagem contida num certo conjunto	16
3.1	Regularidade	17
3.2	Relações de Green	20
3.3	Subsemigrupos Inversos Maximais	28
4	Semigrupos de transformações com um conjunto invariante	35
4.1	Regularidade, isomorfismos e mergulhos	36
4.2	Relações de Green	40
4.3	Ideais	49
4.4	Elementos regulares	52
5	Semigrupos de transformações lineares com imagem contida num certo subespaço	66
5.1	Relações de Green	67
5.2	Ideais	76
5.3	Subsemigrupo regular maximal	84
6	Semigrupos de transformações lineares com um espaço invariante	98
6.1	Isomorfismos	99

6.2	Relações de Green	101
6.3	Ideais	109
7	Conclusões	113
	Bibliografia	115

Capítulo 1

Introdução

Com o desenvolvimento do conhecimento da álgebra, a teoria de semigrupos emergiu como uma área de grande interesse. Os semigrupos de transformações, em particular, têm-se mostrado fundamentais para compreender estruturas de aplicações que preservam certas operações dentro de conjuntos ou espaços vetoriais. Segundo Sullivan em [14], “a teoria dos semigrupos de transformações, hoje em dia, constitui, por si só, um corpo substancial de conhecimento”. Estes semigrupos oferecem uma base importante para a generalização de conceitos tradicionalmente estudados na teoria de grupos, ampliando a possibilidade de aplicações e de propriedades algébricas que podem vir a surgir.

Esta dissertação centra-se especificamente no estudo de dois semigrupos de transformações e de dois semigrupos de transformações lineares.

No Capítulo 2, apresentam-se resultados gerais sobre Teoria de Semigrupos. São apresentadas algumas definições e caracterizações que serão úteis para o decorrer do trabalho presente nesta dissertação.

Ao longo do Capítulo 3, estudamos alguns resultados sobre o semigrupo $T(X, Y)$ de transformações de X com imagem contida num certo subconjunto Y de X . Começamos por encontrar uma condição necessária e suficiente para $T(X, Y)$ ser regular e determinamos também o maior subsemigrupo regular de $T(X, Y)$. De seguida, caracterizamos as relações de Green neste semigrupo e são, ainda, encontrados alguns resultados sobre os subsemigrupos inversos maximais de $T(X, Y)$.

No Capítulo 4, o semigrupo em estudo é o semigrupo $S(X, Y)$ de todas as transformações de X que deixam Y invariante. São apresentados alguns resultados sobre diversos tipos de regularidade. Posteriormente, mostramos que qualquer semigrupo pode ser mergulhado num semigrupo da forma $S(X, Y)$. Para além disso, estudamos as relações de Green no semigrupo e, usando estes resultados, caracterizamos

todos os ideais de $S(X, Y)$.

De seguida, iniciamos o estudo do semigrupo $T(V, W)$ de todas as transformações lineares de V com imagem contida no subespaço W de V . Começamos por caracterizar as relações de Green em $T(V, W)$ e por descrever os elementos regulares de $T(V, W)$. São, também, descritos os ideais do conjunto de todos os elementos regulares e, com base nesses resultados, são descritos os ideais de $T(V, W)$. Por fim, estudam-se os subsemigrupos regulares maximais do subsemigrupo regular maximal de $T(V, W)$.

O capítulo que se segue é sobre o semigrupo de transformações lineares com um espaço invariante, $S(V, W)$, onde começam por ser caracterizados os elementos regulares do semigrupo. Aqui, encontramos uma condição necessária e suficiente para $S(V, W)$ ser regular. Caracterizamos, ainda, as relações de Green e todos os ideais do semigrupo.

Por último, apresentamos algumas conclusões sobre a dissertação e são apresentadas algumas questões que se encontram em aberto e que poderão ser parte de um trabalho a desenvolver no futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Conceitos iniciais

Designa-se por **grupóide** um par (S, μ) em que S é um conjunto não vazio e $\mu : S \times S \rightarrow S$ é uma operação binária definida em S . Dizemos que (S, μ) é um **semigrupo** se a operação μ for associativa.

Se $(S, \cdot)$ é um grupóide e a, b dois elementos de S , representamos $\cdot(a, b)$ por $a \cdot b$ ou, caso não seja ambíguo, por ab . Não sendo necessário clarificar a operação binária definida no conjunto S , representamos o grupóide $(S, \cdot)$ por S .

Seja S um semigrupo. Um elemento u de S diz-se um **elemento identidade** ou, simplesmente, uma **identidade** se, para todo o $x \in S$, $xu = x = ux$. Um semigrupo com um elemento identidade diz-se um **monóide**.

Não é difícil verificar que, se S é um semigrupo com identidade, então esse elemento é único. Por outro lado, se um semigrupo S não tiver identidade, facilmente construímos um monóide estendendo a operação binária definida em S , como passamos a descrever de seguida.

Definimos S^1 como

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{se } S \text{ tem identidade} \\ S \cup \{1\} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e, neste último caso, estendemos a operação em S definindo, para todo o $s \in S$, $s1 = s = 1s$ e $11 = 1$.

O conjunto S^1 é o monóide obtido de S adicionando o elemento identidade caso necessário.

Se a é um elemento de um semigrupo S sem identidade, então Sa não contém necessariamente o elemento a . Vejamos a seguinte notação:

$$S^1a = Sa \cup \{a\};$$

$$aS^1 = aS \cup \{a\};$$

$$S^1aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\}.$$

Notemos que S^1a , aS^1 e S^1aS^1 são subconjuntos de S , pois não contém o elemento 1.

Seja S um semigrupo com pelo menos dois elementos. Um elemento v de S diz-se um **elemento zero** ou, simplesmente, um **zero** se, para todo o $x \in S$, $xv = v = vx$.

À semelhança do elemento identidade, num semigrupo, um elemento zero, caso exista, é único. Se um semigrupo não tiver zero, podemos construir um semigrupo com zero acrescentando um elemento 0 e estendendo a operação definida em S .

Definimos S^0 como

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{se } S \text{ tem elemento nulo} \\ S \cup \{0\} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e, neste último caso, estendemos a operação definida em S por $s0 = 0 = 0s$, para todo o $s \in S$ e $00 = 0$.

Analogamente ao que temos com S^1 , o conjunto S^0 é o semigrupo com zero obtido de S adicionando um elemento nulo caso necessário. De entre os semigrupos com zero, temos os chamados **semigrupos nulos**, onde o produto de quaisquer dois elementos é igual a zero.

Se X é um conjunto não vazio e definirmos uma multiplicação em X tal que

$$xy = y, \quad \text{para quaisquer } x, y \in X,$$

então X diz-se um **semigrupo zero à direita**. Do mesmo modo, definimos **semigrupos zero à esquerda**.

Sejam S um semigrupo e T um subconjunto não vazio de S . Dizemos que T é um **subsemigrupo de S** se T é fechado para a multiplicação, isto é,

$$\forall x, y \in T, \quad xy \in T.$$

É claro que a associatividade da operação definida em S se mantém quando nos restringimos a um subsemigrupo T de S . Logo, um subsemigrupo T de S é, em particular, um semigrupo.

Dado um semigrupo S , o próprio conjunto S é um subsemigrupo de S . Se S contiver um elemento zero v , então $\{v\}$ também é um subsemigrupo de S . De modo análogo, se S tiver uma identidade u , então $\{u\}$ é um subsemigrupo de S . Sendo e um elemento idempotente de S , ou seja, se $e \in S$ é tal que $e^2 = e$, também $\{e\}$ é um subsemigrupo de S .

Sejam S um semigrupo e I um subconjunto não vazio de S . Dizemos que I é um **ideal esquerdo de S** se $SI \subseteq I$, é **ideal direito de S** se $IS \subseteq I$, e é **ideal de S** se I é, simultaneamente, ideal esquerdo e direito de S .

Se I é um ideal de S tal que $\{0\} \subsetneq I \subsetneq S$, então dizemos que I é um **ideal próprio de S** .

É claro que um ideal esquerdo ou direito I de um semigrupo S é um subsemigrupo de S . Contudo, o recíproco não é verdade. Por exemplo, $\mathbb{N}$ é um subsemigrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. No entanto, $\mathbb{N}$ não é um ideal de $\mathbb{Z}$, uma vez que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $-n \notin \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\mathbb{Z}\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{N}.$$

Proposição 1. *Sejam S um semigrupo e $a \in S$. O menor ideal direito [resp.: esquerdo] de S que contém o elemento a é o conjunto aS^1 [resp., S^1a]. O menor ideal de S que contém a é S^1aS^1 .*

Sejam S um semigrupo e $a \in S$. A aS^1 [resp.: S^1a] chamamos **ideal direito** [resp.: **esquerdo**] **principal gerado por a** . Designamos por **ideal principal de S gerado por a** o ideal S^1aS^1 .

Observemos que, como na definição abaixo, usamos a escrita de aplicações com os objetos à esquerda. Ou seja, se $\alpha : A \rightarrow B$ é uma aplicação e $x \in A$, então a imagem de x é dada por $x\alpha$. Mais, se $\beta : B \rightarrow C$ é uma aplicação, denotamos a composição $\beta \circ \alpha$ por $\alpha\beta$ e a imagem de x por $\beta \circ \alpha$ é denotada por $x(\alpha\beta)$, ou seja, $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$.

Sejam $(S, \cdot)$ e $(T, *)$ semigrupos. Uma aplicação $\phi : S \rightarrow T$ diz-se um **morfismo** (ou **homomorfismo**) se

$$\forall x, y \in S, \quad (x \cdot y)\phi = x\phi * y\phi.$$

Se a aplicação ϕ é injetiva [resp., sobrejetiva, bijetiva], então dizemos que ϕ é um **monomorfismo** [resp., **epimorfismo**, **isomorfismo**]. Mais, se existe um isomorfismo entre S e T , dizemos que S e T são isomorfos e escrevemos $S \cong T$.

Não é difícil verificar que a intersecção de uma família de subsemigrupos de um semigrupo S ou é vazia ou é um subsemigrupo de S . Dado um subconjunto não vazio A de S , existe pelo menos um subsemigrupo de S que contém A : a saber, o próprio S . Logo, a intersecção de todos os subsemigrupos de S que contém A é um subsemigrupo de S que contém A e que representamos por $\langle A \rangle$.

O subsemigrupo $\langle A \rangle$ fica definido pelas seguintes duas propriedades:

1. $A \subseteq \langle A \rangle$;
2. se U é um subsemigrupo de S que contém A , então $\langle A \rangle \subseteq U$.

O subsemigrupo $\langle A \rangle$ diz-se o **subsemigrupo de S gerado por A** . Não é difícil provar que $\langle A \rangle$ é exatamente o conjunto de todos os produtos finitos de elementos de A . Se $\langle A \rangle = S$, dizemos que A é um **conjunto de geradores de S** . Se $A = \{a\}$, escrevemos $\langle a \rangle$ em vez de $\langle \{a\} \rangle$, e temos

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sejam S um semigrupo e $a \in S$. O subsemigrupo $\langle a \rangle$ diz-se o **subsemigrupo monogénico de S gerado por a** . A **ordem de a** é a ordem do subsemigrupo $\langle a \rangle$.

Dados um semigrupo S e um elemento a em S , se não existir nenhuma repetição nas potências de a , então $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ é isomorfo ao semigrupo $(\mathbb{N}, +)$. Neste caso, dizemos que a tem **ordem infinita em S** .

Por outro lado, se existirem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \neq n$, mas $a^m = a^n$, então o conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} \mid \exists r \in \mathbb{N} \setminus \{k\} : a^k = a^r\}$$

é não vazio e tem um elemento mínimo. Este mínimo é o menor dos expoentes cuja potência de a associada se repete, e diz-se o **índice de a** . Se m é o índice de a , então o conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} : a^{m+k} = a^m\}$$

é não vazio e, como tal, tem elemento mínimo p , que designamos por **período de a** .

Se $a \in S$ tem índice m e período p , as potências $a, a^2, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+p-1}$ são todas distintas, pela minimalidade de m e de p . Mais, prova-se que

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+p-1}\},$$

pelo que $|\langle a \rangle| = m + p - 1$. Neste caso, dizemos que a tem **ordem finita**. Note-se que a ordem de a é o antecessor da soma do índice de a com o seu período.

Prova-se que o conjunto $K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+p-1}\}$ é um subgrupo cíclico do subsemigrupo monogénico $\langle a \rangle$.

Um semigrupo S diz-se **periódico** se todos os seus elementos tiverem ordem finita.

Observemos que todo o semigrupo finito é necessariamente periódico. A proposição que se segue permite-nos concluir que, em todo o semigrupo periódico, existe, pelo menos, um idempotente.

Proposição 2. *Num semigrupo periódico todo o elemento tem uma potência que é idempotente.*

Dado um semigrupo S , dizemos que $a \in S$ é **regular** se existe $x \in S$ tal que $axa = a$. Se todos os elementos de S são regulares, S diz-se um **semigrupo regular**.

Existem outros tipos de regularidade. Dado um semigrupo S , dizemos que $a \in S$ é **regular à esquerda** se existe $b \in S$ tal que $a = ba^2$ e é **regular à direita** se existe $c \in S$ tal que $a = a^2c$. O elemento a diz-se **completamente regular** se existe $d \in S$ tal que $a = ada$ e $ad = da$ e **intrarregular** se existem $f, g \in S$ tal que $a = fa^2g$. Dizemos que a é **corregular** se existe $h \in S$ tal que $a = hah = aha$.

Proposição 3. *Sejam S um semigrupo e $a \in S$. O elemento a é completamente regular se e só se a é regular à esquerda e regular à direita.*

Demonstração. Suponhamos que a é completamente regular. Então, existe $d \in S$ tal que $a = ada$ e $ad = da$. Portanto,

$$a = ada = (ad)a = (da)a = da^2,$$

com $d \in S$. Portanto, por definição, a é regular à esquerda. De modo análogo, temos

$$a = ada = a(da) = a(ad) = a^2d,$$

com $d \in S$. Logo, a é regular à direita.

Reciprocamente, suponhamos que a é regular à direita e à esquerda. Então existem $b, c \in S$ tais que $a = ba^2 = a^2c$. Então, $ba = b(a^2c) = (ba^2)c = ac$. Por outro lado, $aba = a(ac) = a^2c = a$ e $aca = (ba)a = ba^2 = a$.

Assim, tomando $d = bac$, temos $ad = a(bac) = (aba)c = ac = ba = b(aca) = da$ e, por fim, $ada = a(bac)a = (aba)ca = aca = a$.

□

O semigrupo S diz-se regular à esquerda [resp. regular à direita, completamente regular, intrarregular, corregular] se todo o elemento de S é regular à esquerda [resp. regular à direita, completamente regular, intrarregular, corregular].

Grupos são, obviamente, semigrupos regulares, uma vez que, para todo o $a \in G$, com G grupo, se tem $a = 1_G a = aa^{-1}a$.

É fácil perceber que um elemento idempotente e de um semigrupo S satisfaz todos os tipos de regularidade (basta notar que $e^2 = e$, pelo que $e^4 = e^3 = e$).

2.2 Relações de Green

Os conceitos de ideais principais (laterais e bilateral) de S , apresentados na secção anterior, vão permitir-nos definir as chamadas **relações de Green** em S , que são relações de equivalência em S que assumem uma relevante importância no estudo da estrutura de um semigrupo.

Seja S um semigrupo. Definimos uma relação binária $\mathcal{L}$ em S da seguinte forma:

$$a \mathcal{L} b \Leftrightarrow S^1 a = S^1 b \quad (a, b \in S).$$

Observemos que, dados dois elementos em S , eles estão $\mathcal{L}$ -relacionados se geram o mesmo ideal esquerdo principal. De um modo dual, definimos a relação $\mathcal{R}$: dois elementos de S estão $\mathcal{R}$ -relacionados se geram o mesmo ideal direito principal.

Seja S um semigrupo. Definimos uma relação binária $\mathcal{R}$ em S da seguinte forma:

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1 \quad (a, b \in S).$$

Como a relação de igualdade de conjuntos é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(S)$, o conjunto das partes de S , facilmente concluímos que as relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são relações de equivalência em S . O resultado que se segue oferece-nos uma caracterização alternativa de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, que torna mais evidente o modo como expressam um tipo de *divisibilidade mútua*.

Proposição 4. *Sejam S um semigrupo e $a, b \in S$. Então,*

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists u, v \in S^1 : au = b \text{ e } bv = a;$$

$$a \mathcal{L} b \Leftrightarrow \exists x, y \in S^1 : xa = b \text{ e } yb = a.$$

Demonstração. Vamos provar que $a \mathcal{R} b$ se e só se existem $u, v \in S^1$ tais que $au = b$ e $bv = a$. A demonstração da outra equivalência é obtida de forma análoga.

Começemos por considerar $a, b \in S$ tais que $a \mathcal{R} b$. Então, $aS^1 = bS^1$. Ora, temos $a \in aS \cup \{a\} = aS^1$, pelo que $a \in bS^1$. Logo, existe $v \in S^1$ tal que $a = bv$. De modo análogo, $b \in bS \cup \{b\} = bS^1$ e, portanto, $b \in aS^1$. Assim, existe $u \in S^1$ tal que $b = au$.

Reciprocamente, se $a, b \in S$ são tais que $au = b$ e $bv = a$ para certos $u, v \in S^1$, então

$$aS^1 = (bv)S^1 = b(vS^1) \subseteq bS^1 = (au)S^1 = a(uS^1) \subseteq aS^1,$$

pelo que $aS^1 = bS^1$, ou seja, $a \mathcal{R} b$. □

Uma vez que a interseção de duas relações de equivalência é ainda uma relação de equivalência, $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em S , que denotamos por $\mathcal{H}$. É claro que $\mathcal{H}$ é o ínfimo de $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$. A união de duas relações de equivalência não é necessariamente uma relação de equivalência. No entanto, existe sempre o supremo de $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$, que representamos por $\mathcal{D}$, isto é, $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

A descrição do supremo de duas relações de equivalência não é, normalmente, tarefa fácil. No entanto, como iremos verificar na proposição que se segue, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ comutam e, portanto, a caracterização de $\mathcal{D}$ torna-se bem menos complexa do que seria de esperar.

Proposição 5. *As relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ comutam, ou seja, $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Demonstração. Seja S um semigrupo. Vamos ver que $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Para isso, tomemos $a, b \in S$ tais que $(a, b) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Então, existe $c \in S$ tal que $a \mathcal{L} c$ e $c \mathcal{R} b$. Pela Proposição 4, existem $u, v, x, y \in S^1$ tais que $ua = c$, $vc = a$ e $cx = b$, $by = c$. Ora, $ax = vcx$ e $vcxy = vby = vc = a$.

Se denotarmos vcx por d , temos que $ax = d$ e $dy = a$. Novamente pela Proposição 4, podemos concluir que $a \mathcal{R} d$.

Analogamente, $vb = vcx = d$ e $ud = uvcx = uax = cx = b$, e, portanto, $d \mathcal{L} b$ (também pela Proposição 4). Assim, existe $d \in S$ tal que $a \mathcal{R} d$ e $d \mathcal{L} b$, pelo que $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Ou seja, provamos que $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

A outra inclusão é provada usando um raciocínio análogo. $\square$

Sabe-se que $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R} = (\mathcal{L} \circ \mathcal{R})^\infty$, ou seja, dados $a, b \in S$, $a \mathcal{D} b$ se e só se existem $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \in S$ tais que

$$a \mathcal{L} x_1, x_1 \mathcal{R} x_2, x_2 \mathcal{L} x_3, \dots, x_{2n-1} \mathcal{R} b.$$

Mas, pela proposição anterior, podemos concluir que $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

As relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ são definidas através dos ideais laterais principais. É, pois, natural considerar uma relação binária em que dois elementos estão relacionados se e só se geram o mesmo ideal (bilateral) principal.

Seja S um semigrupo. Definimos em S uma relação binária $\mathcal{J}$ da seguinte forma:

$$a \mathcal{J} b \Leftrightarrow S^1 a S^1 = S^1 b S^1 \quad (a, b \in S).$$

De forma análoga a $\mathcal{R}$ e a $\mathcal{L}$, concluímos que a relação $\mathcal{J}$ é uma relação de equivalência, que pode ser caracterizada como se segue.

Proposição 6. *Seja S um semigrupo. Então,*

$$a \mathcal{J} b \Leftrightarrow \exists x, y, u, v \in S^1 : xay = b, ubv = a \quad (a, b \in S).$$

As relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}$ foram primeiro estudadas por J. A. Green, em 1951, e, de acordo com J. Howie, em [5], p. 45, contribuíram de um modo muito significativo para o desenvolvimento da Teoria de Semigrupos. São conhecidas como as **relações de Green**.

É óbvio que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$. De facto, dados $a, b \in S$ tais que $S^1 a = S^1 b$, temos

$$S^1 a S^1 = (S^1 a) S^1 = (S^1 b) S^1 = S^1 b S^1.$$

Por outro lado, se $a S^1 = b S^1$, também $S^1 a S^1 = S^1 b S^1$. Como $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$, podemos concluir, pela definição de supremo, que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Em muitos casos, temos $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{J}$. No entanto, é possível ter $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, como veremos mais à frente.

Para tornar a notação mais simples, vamos usar L_a [resp.: R_a, H_a, J_a, D_a] para denotarmos a $\mathcal{L}$ -classe [resp.: $\mathcal{R}$ -classe, $\mathcal{H}$ -classe, $\mathcal{J}$ -classe, $\mathcal{D}$ -classe] que contém um certo elemento a de um semigrupo S .

Tendo em consideração que as relações de Green $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{J}$ estão definidas à custa de ideais principais, a inclusão de conjuntos induz uma ordem nas classes de equivalência. Assim, é natural definirmos as seguintes relações de ordem entre as $\mathcal{L}$ -classes [resp.: $\mathcal{R}$ -classes, $\mathcal{J}$ -classes]:

$$[L] \quad L_a \leq L_b \text{ se e só se } S^1 a \subseteq S^1 b;$$

$$[R] \quad R_a \leq R_b \text{ se e só se } aS^1 \subseteq bS^1;$$

$$[J] \quad J_a \leq J_b \text{ se e só se } S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1.$$

Note-se que, se S é regular, então $a = axa$, pelo que $a \in aS$ e $a \in Sa$. Logo, $a \in SaS$. Desta forma, quando nos referimos às equivalências de Green num semigrupo regular S , não necessitamos de S^1 e simplificamos como se segue.

1. $a\mathcal{L}b$ se e só se $Sa = Sb$.
2. $a\mathcal{R}b$ se e só se $aS = bS$.
3. $a\mathcal{J}b$ se e só se $SaS = SbS$.

Sejam S um semigrupo e U um subsemigrupo de S . Dados $a, b \in U$, pode haver ambiguidade sobre o significado de $a\mathcal{L}b$, uma vez que podemos ter a relação $\mathcal{L}$ em U ou em S . De modo a clarificar a notação, escrevemos

1. $a\mathcal{L}^U b$ se existirem $u, v \in U^1$ tais que $ua = b$ e $vb = a$;
2. $a\mathcal{L}^S b$ se existirem $s, t \in S^1$ tais que $sa = b$ e $tb = a$.

Relativamente às $\mathcal{L}$ -classes, usamos a seguinte notação.

$$L_a^U = \{u \in U : u\mathcal{L}^U a\} \quad \text{e} \quad L_a^S = \{s \in S : s\mathcal{L}^S a\}.$$

É imediato que $\mathcal{L}^U \subseteq \mathcal{L}^S \cap (U \times U)$. Com a notação correspondente, saem analogamente os resultados $\mathcal{R}^U \subseteq \mathcal{R}^S \cap (U \times U)$, $\mathcal{H}^U \subseteq \mathcal{H}^S \cap (U \times U)$, $\mathcal{D}^U \subseteq \mathcal{D}^S \cap (U \times U)$ e $\mathcal{J}^U \subseteq \mathcal{J}^S \cap (U \times U)$. Estas inclusões podem ser próprias: por exemplo, é possível termos dois elementos de U que estão $\mathcal{L}$ -relacionados em S , mas não estão $\mathcal{L}$ -relacionados em U . O resultado que se segue permite-nos concluir que todo o subsemigrupo regular de um semigrupo S herda as caracterizações das relações de Green $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{H}$ em S .

Teorema 1. *Sejam U um subsemigrupo regular de um semigrupo S . Então, as seguintes igualdades são válidas.*

$$1. \mathcal{L}^U = \mathcal{L}^S \cap (U \times U)$$

$$2. \mathcal{R}^U = \mathcal{R}^S \cap (U \times U)$$

$$3. \mathcal{H}^U = \mathcal{H}^S \cap (U \times U)$$

Temos ainda o chamado Teorema de Green

Teorema 2 (Teorema de Green). *Se H é uma $\mathcal{H}$ -classe num semigrupo S , então ou $H^2 \cap H = \emptyset$ ou $H^2 = H$ e, neste caso, H é um subgrupo de S .*

Tendo em conta o Teorema de Green, se considerarmos um elemento idempotente e num semigrupo S , temos $e^2 = e$. Assim, $e \in H_e$ e $e = e^2 \in H_e^2$, pelo que $H_e^2 \cap H_e \neq \emptyset$. Portanto, H_e é um grupo e, como tal, tem apenas um idempotente, que é o seu elemento identidade.

Corolário 1. *Se e é um idempotente num semigrupo S , então H_e é um subgrupo de S . Para além disso, nenhuma classe $\mathcal{H}$ tem mais do que um idempotente. $\square$*

2.3 Semigrupos de transformações

Dado X um conjunto não vazio, seja $T(X)$ o conjunto de todas as transformações totais em X . É sabido que $(T(X), \circ)$ é um semigrupo, e todo o semigrupo pode ser mergulhado em algum $T(X)$. Para além disso, tal como observado por Sullivan em [14], os semigrupos de transformações são para a teoria de semigrupos o que os grupos de permutações são para a teoria de grupos, no sentido em que os semigrupos de transformações oferecem uma forma concreta de entender a teoria de semigrupos.

Iremos introduzir algumas notações específicas de semigrupos de transformações. Dado $\alpha \in T(X)$, representamos o conjunto imagem por $\text{im } \alpha$, ou simplesmente, por $X\alpha$. Recordamos que, como já referimos, iremos usar a notação à esquerda para representar imagens de objetos por aplicações. Assim, escrevemos $x\alpha$ em vez de $\alpha(x)$ e $\beta \circ \alpha$ como $\alpha\beta$.

Iremos optar pela notação introduzida por Clifford e Preston em [2], Vol. 2, p.241: dado $\alpha \in T(X)$, podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix},$$

onde se assume que i pertence a um conjunto não mencionado de índices I , que $\{x_i\}$ denota o conjunto $\{x_i : i \in I\}$ e que $X\alpha = \{x_i\}$, enquanto que $x_i\alpha^{-1} = A_i$, para cada $i \in I$. Se existir um $a \in X$ tal que, para todo $x \in X$, $x\alpha = a$, então α é uma transformação constante e escrevemos $\alpha = X_a$.

Quando escrevermos $X = A \dot{\cup} B$ queremos denotar que X é uma união disjunta dos conjuntos A e B .

Começemos por verificar que todos os elementos de $T(X)$ são regulares.

Proposição 7. *O semigrupo $T(X)$ é regular.*

Demonstração. Seja $\alpha \in T(X)$. Escrevamos $X\alpha = \{x_i : i \in I\}$. Para cada $i \in I$, seja $x_i\alpha^{-1} = A_i$. Então, podemos escrever α como

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}.$$

Escrevamos $X = \{x_i\} \cup \{y_j\}$, fixemos $i_0 \in I$ e definamos β em $T(X)$ por

$$\beta = \begin{pmatrix} x_i & y_j \\ a_i & a_{i_0} \end{pmatrix},$$

onde $a_i \in A_i$, para cada i . Ora,

$$\alpha\beta\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & y_j \\ a_i & a_{i_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} = \alpha.$$

Logo, α é um elemento regular em $T(X)$ e, portanto, $T(X)$ é um semigrupo regular. $\square$

Em 1952, Malcev mostrou que, dado um conjunto não vazio X , os ideais de $T(X)$ são precisamente os conjuntos:

$$T_r = \{\alpha \in T(X) : |X\alpha| < r\},$$

onde $2 \leq r \leq |X|'$ (onde k' denota o sucessor de um cardinal k , ou seja, o menor cardinal maior que k).

Para cada $\alpha \in T(X)$, definimos a seguinte relação de equivalência em X :

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : x\alpha = y\alpha\}.$$

Representamos o conjunto quociente de X em relação a $\alpha \circ \alpha^{-1}$ por π_α .

Como afirmam Clifford e Preston em [2], p. 51, em 1955, Miller e Doss caracterizaram as relações de Green em $T(X)$: nomeadamente, dados $\alpha, \beta \in T(X)$,

- (a) $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só se $X\alpha = X\beta$;
- (b) $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$;
- (c) $\alpha \mathcal{D} \beta$ se e só se $|X\alpha| = |X\beta|$;

e $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $T(X)$.

Prova-se que $T(X)$ é isomorfo a $T(Y)$ se e só se $|X| = |Y|$. Este resultado segue do facto de todos os elementos zero à direita de $T(X)$ serem precisamente as transformações constantes de X (ver [2], Vol 1, p. 6, Exercício 7). Mais, cada isomorfismo $\phi : T(X) \rightarrow T(Y)$ é induzido por uma bijeção $g : X \rightarrow Y$ tal que para todo $\alpha \in T(X)$, $\alpha\phi = g^{-1}\alpha g$.

2.4 Semigrupos de transformações lineares

Sullivan observou em [13] que há uma correspondência entre semigrupos de transformações e semigrupos de transformações lineares e que, apesar da similaridade dos resultados, as ideias e técnicas de demonstração são bastante diferentes.

Dado um espaço vetorial V sobre um corpo K , se W e U são subespaços de V tais que $W \cap U = \{0_V\}$, então $W \oplus U$ representa a soma direta dos dois subespaços. Dizemos que U é complementar de W em V se $V = W \oplus U$. Prova-se que o complementar de um subespaço vetorial não é único. No entanto, todos os complementares têm a mesma dimensão. Mais, $\dim U = \dim V/W$.

Seja $T(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares totais em V . Prova-se que $(T(V), \circ)$ é semigrupo. Analogamente ao que acontece com $T(X)$, sabemos que $T(V)$ é semigrupo regular e não é difícil provar que a aplicação nula, que representamos por V_0 , está em $T(V)$ e é, de facto, o seu elemento zero.

Introduziremos, agora, alguma notação. O subespaço de V gerado pelo subconjunto $\{v_i\}$ de V é denotado por $\langle v_i \rangle$. Em grande parte dos casos, escrevemos $W = \langle w_i \rangle$ e assumimos, sem o escrever, que o conjunto $\{w_i\}$ é, efetivamente, base do subespaço W .

Para a construção de uma aplicação α em $T(V)$, começamos por escolher uma base $\{v_i\}$ de V e um conjunto $\{w_i\} \subseteq V$, e definimos $v_i\alpha = w_i$ para cada i . Depois, estendemos a aplicação a todo o V , por linearidade. De um modo geral, apenas dizemos que, dados $\{v_i\}$ e $\{w_i\}$ no contexto, definimos α por

$$\alpha = \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix}.$$

Por vezes, é necessário começar por escolher uma base para um subespaço de V e depois estender essa base para V , mas o argumento de construção segue passos similares.

Como já referimos, as relações de Green assumem um papel importante no estudo de um semigrupo. À semelhança do que temos para $T(X)$, a caracterização das relações de Green em $T(V)$ é bem conhecida: dados $\alpha, \beta \in T(V)$,

- (a) $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só se $V\alpha = V\beta$;
- (b) $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\ker \alpha = \ker \beta$;
- (c) $\alpha \mathcal{D} \beta$ se e só se $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$;

e $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $T(V)$.

Mais, tal como Clifford e Preston observaram em [2], dado um espaço vetorial V qualquer sobre um corpo K , os ideais de $T(V)$ são precisamente os conjuntos

$$T_r = \{\alpha \in T(V) : \dim V\alpha < r\},$$

onde $1 \leq r \leq \dim V'$.

Capítulo 3

Semigrupos de transformações com imagem contida num certo conjunto

Neste capítulo, iremos explorar o conjunto de todas as transformações totais de X cujo conjunto imagem está contido num subconjunto fixo Y de X , não vazio, como descrevemos em seguida.

Seja Y um subconjunto não vazio de X e denotemos por $T(X, Y)$ o conjunto de todas as transformações $\alpha : X \rightarrow X$ tais que $\text{im } \alpha = X\alpha \subseteq Y$, ou seja,

$$T(X, Y) = \{\alpha \in T(X) : X\alpha \subseteq Y\}.$$

Não é difícil de verificar que $T(X, Y)$, munido da operação de composição, é um semigrupo (ver Proposição 8). Note-se que, quando $Y = X$, temos $T(X, Y) = T(X)$, pelo que $T(X, Y)$ é uma generalização de $T(X)$.

O semigrupo $T(X, Y)$ foi inicialmente estudado por Symons, em 1975. Em [15], o autor descreveu os automorfismos de $T(X, Y)$ e mostrou que, se $T(X, Y)$ é isomorfo a $T(A, B)$, então $|Y| = |B|$. Mais, se $|Y| = |B| > 2$, então $T(X, Y)$ é isomorfo a $T(A, B)$ se e só se $|Y| = |B|$ e $|X \setminus Y| = |A \setminus B|$. Surpreendentemente, as condições para a existência de um isomorfismo nos restantes casos também envolvem apenas os cardinais de Y , B , $X \setminus Y$ e $A \setminus B$, e não os cardinais de X e A .

A maioria dos resultados presentes neste capítulo foram obtidos por Sanwong e Sommanee e publicados em [6].

Começamos por verificar que $T(X, Y)$ é, de facto, um semigrupo, quando munido da operação de composição.

Proposição 8. *Dado $Y \subseteq X$, com $Y \neq \emptyset$, $T(X, Y)$ é um subsemigrupo de $T(X)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Então,

$$X\alpha\beta = (X\alpha)\beta \subseteq Y\beta \subseteq X\beta \subseteq Y.$$

Assim, $\alpha\beta \in T(X, Y)$, pelo que $T(X, Y)$ é um subsemigrupo de $T(X)$. □

Observemos que, quando Y é um conjunto singular, o semigrupo $T(X, Y)$ também o é. De facto, se $Y = \{y\}$, então a aplicação constante que transforma todos os elementos de X em y , que denotamos por X_y , é um elemento de $T(X, Y)$, visto que $\text{im } X_y = \{y\} = Y$. Mais, dados $\alpha, \beta \in T(X, Y)$, de $X\alpha \subseteq Y = \{y\}$ e $X\beta \subseteq Y = \{y\}$ podemos concluir que $\alpha = X_y = \beta$. Logo, $T(X, Y) = \{X_y\}$.

3.1 Regularidade

O objetivo desta secção é definirmos uma condição necessária e suficiente para $T(X, Y)$ ser um semigrupo regular.

Como observámos antes, se $|Y| = 1$, digamos $Y = \{y\}$, então $T(X, Y)$ contém exatamente 1 elemento, nomeadamente a aplicação constante X_y com contradomínio $\{y\}$. Neste caso, o semigrupo $T(X, Y)$ é regular, uma vez que $X_y X_y X_y = X_y$.

Por outro lado, se $Y = X$, então $T(X, Y) = T(X)$. Sabemos que $T(X)$ é regular, pelo que concluímos que $T(X, Y)$ também é regular neste caso.

Observemos que, se $|X| \leq 2$, então $|Y| = 1$ ou $X = Y$ e, portanto, $T(X, Y)$ é regular quando $|X| \leq 2$.

O resultado que se segue indica-nos exatamente quando é que $T(X, Y)$ é regular.

Teorema 3. *O semigrupo $T(X, Y)$ é regular se e só se $|Y| = 1$ ou $Y = X$.*

Demonstração. Já vimos acima que, se $|Y| = 1$ ou $Y = X$, então $T(X, Y)$ é regular. Suponhamos agora, por contrarrecíproco, que $|Y| \neq 1$ e $Y \neq X$.

Sejam $a, b \in Y$ tais que $a \neq b$ e tomemos $c \in X \setminus Y$. Seja γ um qualquer elemento de $T(X, Y)$ e escrevamos

$$\gamma = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix},$$

onde $X\gamma = \{y_i\} \subseteq Y$ e $X_i = y_i\gamma^{-1}$. Tomemos

$$\lambda = \begin{pmatrix} c & X \setminus \{c\} \\ a & b \end{pmatrix}.$$

É claro que $\lambda \in T(X, Y)$. Como $c \notin Y$, sabemos que $y_i \neq c$, para todo $i \in I$. Assim,

$$\gamma\lambda = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & X \setminus \{c\} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i \\ b \end{pmatrix} \neq \lambda.$$

Por outras palavras, vimos que $\gamma\lambda \neq \lambda$ para todo $\gamma \in T(X, Y)$. Se λ fosse regular, existiria $\delta \in T(X, Y)$ tal que $\lambda\delta\lambda = \lambda$. Ora, como $T(X, Y)$ é semigrupo e $\lambda, \delta \in T(X, Y)$, concluímos que $\lambda\delta \in T(X, Y)$ é tal que $(\lambda\delta)\lambda = \lambda$, o que contradiz o que acabámos de mostrar. Logo, λ não é regular em $T(X, Y)$, pelo que $T(X, Y)$ não é um semigrupo regular quando $|Y| > 1$ e $Y \neq X$. $\square$

Observemos que, de um modo geral, $T(X, Y)$ não é um semigrupo regular. É pois, importante, determinarmos quais os elementos de $T(X, Y)$ que são regulares. Os resultados que se seguem permitem-nos afirmar que $\alpha \in T(X, Y)$ é regular se e só se $X\alpha \subseteq Y\alpha$.

Consideremos o conjunto

$$F = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\}.$$

Notemos que $F = \{\alpha \in T(X, Y) : (X \setminus Y)\alpha \subseteq Y\alpha\} = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha = Y\alpha\}$. Basta reparar que, se $X\alpha \subseteq Y\alpha$ e $Y \subseteq X$, então $Y\alpha \subseteq X\alpha$, de onde resulta a igualdade. Por outro lado, se tivermos a igualdade $X\alpha = Y\alpha$, como $X \setminus Y \subseteq X$, segue que $(X \setminus Y)\alpha \subseteq X\alpha = Y\alpha$. Por último, se $(X \setminus Y)\alpha \subseteq Y\alpha$, como naturalmente temos $Y\alpha \subseteq Y\alpha$, então a união de ambos os conjuntos, $X\alpha$, estará também contida na imagem de Y por α .

Por Y ser não vazio, existe $a \in Y$. Assim, a aplicação constante X_a com contradomínio $\{a\}$ satisfaz as condições que definem F e, portanto, $F \neq \emptyset$.

Mais, para $\alpha \in F$ e $\beta \in T(X, Y)$, segue que $X\alpha\beta = (X\alpha)\beta \subseteq (Y\alpha)\beta = Y\alpha\beta$. Portanto, $\alpha\beta \in F$. Temos, assim, o resultado seguinte.

Lema 1. F é ideal direito de $T(X, Y)$.

Não é difícil de verificar que, no geral, F não é um ideal esquerdo. Tomemos, por exemplo, $X = \mathbb{N}$ e seja Y o conjunto de todos os números pares.

Definamos α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2n & 2n-1 \\ 2n & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $X\alpha = X\beta = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = Y$, concluímos que $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Observemos que $2 \in X\alpha$, mas $2 \notin Y\alpha$, pelo que $\alpha \notin F$. Por outro lado, $\beta \in F$, pois $Y\beta = Y = X\beta$. Uma vez que $\alpha\beta = \alpha \notin F$, concluímos que F não é ideal esquerdo de $T(X, Y)$.

De seguida, mostramos que F é, na verdade, o conjunto de todos os elementos regulares de $T(X, Y)$.

Teorema 4. F é o maior subsemigrupo regular de $T(X, Y)$.

Demonstração. Vimos no Lema 1 que F é ideal direito de $T(X, Y)$, pelo que segue que F é subsemigrupo de $T(X, Y)$. Vejamos que F é, de facto, o maior subsemigrupo regular de $T(X, Y)$. Seja $\alpha \in F$. Escrevemos

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix},$$

onde $\bigcup_{i \in I} A_i = X$, $X\alpha = \{x_i : i \in I\} = Y\alpha$ e, para cada $i \in I$, $A_i = x_i\alpha^{-1}$. Para cada $i \in I$, seja $B_i = A_i \cap Y$. Observemos que $B_i \neq \emptyset$, já que $Y\alpha = X\alpha$ e, portanto, para cada i , $x_i \in Y\alpha$. Assim, existe $y_i \in Y$ tal que $y_i\alpha = x_i$. Temos que $y_i \in Y \cap A_i$, ou seja, $y_i \in B_i$ e $B_i \neq \emptyset$.

Fixemos $i_0 \in I$ e, para cada $i \in I$, tomemos $b_i \in B_i$. Seja $X = \{x_i : i \in I\} \dot{\cup} \{z_j : j \in J\}$. Definamos β em $T(X)$ por

$$\beta = \begin{pmatrix} x_i & z_j \\ b_i & b_{i_0} \end{pmatrix}.$$

Temos $X\beta = \{b_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq Y$. Logo, $\beta \in T(X, Y)$. Uma vez que $\alpha \in T(X, Y)$, temos que, para todo $i \in I$, $x_i \in Y$. Desta forma, segue que $X\beta = \{b_i : i \in I\} = (\{x_i : i \in I\})\beta \subseteq Y\beta$. Conclui-se, assim, que $\beta \in F$. Mais, como $\alpha\beta\alpha = \alpha$, temos que α é regular em F .

Falta ver que todo o elemento regular de $T(X, Y)$ está em F . Tomemos $\alpha \in T(X, Y)$ e suponhamos que α é regular. Então, existe $\beta \in T(X, Y)$ tal que $\alpha = \alpha\beta\alpha$. Assim,

$$X\alpha = (X\alpha)\beta\alpha \subseteq Y\beta\alpha \subseteq (X\beta)\alpha \subseteq Y\alpha,$$

pelo que $\alpha \in F$. Então, todo o elemento regular de $T(X, Y)$ está em F . Na verdade, vimos que F é exactamente o conjunto de todos os elementos regulares de $T(X, Y)$. Como F é fechado para a composição, concluímos que F é o maior subsemigrupo regular de $T(X, Y)$. $\square$

3.2 Relações de Green

Como referimos no capítulo anterior, são bem conhecidas as relações de Green no semigrupo $T(X)$ de todas as transformações totais de X , com X conjunto arbitrário não vazio. Em particular, dados $\alpha, \beta \in T(X)$, temos

$$\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow X\alpha = X\beta \quad \text{e} \quad \alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}.$$

Para obtermos caracterizações das relações de Green em $T(X, Y)$, temos de nos auxiliar do conjunto F , definido na secção anterior.

Lema 2. *Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Se $\beta \in F$, então $\alpha = \gamma\beta$, para algum $\gamma \in T(X, Y)$ se e só se $X\alpha \subseteq X\beta$.*

Demonstração. Seja $\beta \in F$. Então, $\beta \in T(X, Y)$ e $X\beta = Y\beta$. Suponhamos que $\alpha = \gamma\beta$, para algum $\gamma \in T(X, Y)$. Temos

$$X\alpha = (X\gamma)\beta \subseteq Y\beta = X\beta.$$

Logo, $X\alpha \subseteq X\beta$.

Reciprocamente, suponhamos que $X\alpha \subseteq X\beta$. Seja $X\alpha = \{a_i : i \in I\}$ e, para cada $i \in I$, seja $A_i = a_i\alpha^{-1}$. Escrevemos

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}.$$

Como, por hipótese, $X\alpha = \{a_i : i \in I\} \subseteq X\beta$, podemos escrever $X\beta = \{a_i : i \in I\} \dot{\cup} \{b_j : j \in J\}$.

Para cada $i \in I$, seja $B_i = a_i\beta^{-1}$ e, para cada $j \in J$, seja $B_j = b_j\beta^{-1}$. Temos

$$\beta = \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ a_i & b_j \end{pmatrix}.$$

Por hipótese, $\beta \in F$, pelo que $X\beta = Y\beta = \{a_i : i \in I\} \dot{\cup} \{b_j : j \in J\}$. Em particular, para todo $i \in I$, existe $y_i \in Y$ tal que $y_i\beta = a_i$. Portanto, $y_i \in B_i$.

Definamos γ em $T(X)$ por

$$\gamma = \begin{pmatrix} A_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Como $X\gamma = \{y_i : i \in I\} \subseteq Y$, segue que $\gamma \in T(X, Y)$. Mais,

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i \\ y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ a_i & b_j \end{pmatrix} = \gamma\beta.$$

□

Recordemos que, dado $\alpha \in T(X, Y)$, denotamos por L_α (resp., R_α , H_α , D_α) o conjunto de todos os elementos de $T(X, Y)$ que estão $\mathcal{L}$ -relacionados (resp., $\mathcal{R}$ -relacionados, $\mathcal{H}$ -relacionados, $\mathcal{D}$ -relacionados) com α em $T(X, Y)$.

Pelo Lema anterior, não é difícil descrever as $\mathcal{L}$ -classes em $T(X, Y)$.

Teorema 5. *Seja $\alpha \in T(X, Y)$.*

1. *Se $\alpha \in F$, então $L_\alpha = \{\beta \in F : X\alpha = X\beta\}$.*
2. *Se $\alpha \notin F$, então $L_\alpha = \{\alpha\}$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in T(X, Y)$ e suponhamos que $\alpha \in F$, isto é, $X\alpha = Y\alpha$. Tomemos $\beta \in L_\alpha$. É claro que, se $\beta = \alpha$, então $\beta \in F$ e $X\alpha = X\beta$, concluindo-se trivialmente o pretendido. Por outro lado, se $\beta \neq \alpha$, então existem $\gamma, \delta \in T(X, Y)$ tais que $\alpha = \gamma\beta$ e $\beta = \delta\alpha$.

Pelo Lema 2, como $\alpha \in F$ e $\beta = \delta\alpha$, concluímos que $X\beta \subseteq X\alpha$. Mais, $X\alpha = X(\gamma\beta) = (X\gamma)\beta \subseteq Y\beta \subseteq X\beta$. Portanto, $X\alpha = X\beta$. Por $Y \subseteq X$, temos sempre que $Y\beta \subseteq X\beta$. Desta forma, falta ver que $X\beta \subseteq Y\beta$, para concluir que $\beta \in F$. Ora, $X\beta = (X\delta)\alpha \subseteq Y\alpha = (Y\gamma)\beta \subseteq Y\beta$. Logo, $\beta \in F$ e

$$L_\alpha \subseteq \{\beta \in T(X, Y) : X\beta = X\alpha\}.$$

Para provar a inclusão recíproca, tomemos $\beta \in F$ e suponhamos que $X\alpha = X\beta$. Pelo Lema 2 e pela igualdade, podemos concluir que existem $\gamma, \delta \in T(X, Y)$ ¹ tais que $\alpha = \gamma\beta$ e $\beta = \delta\alpha$. Portanto, $\alpha \mathcal{L} \beta$, ou seja, $\beta \in L_\alpha$, como pretendido.

Admitamos agora que $\alpha \notin F$, isto é, $X\alpha \neq Y\alpha$, e suponhamos, por absurdo, que existe $\beta \in T(X, Y)$ tal que $\beta \neq \alpha$ e $\beta \in L_\alpha$. Então, existem $\gamma, \delta \in T(X, Y)$ tais que $\alpha = \gamma\beta$ e $\beta = \delta\alpha$. Desta forma, $X\alpha = (X\gamma)\beta \subseteq Y\beta \subseteq X\beta = (X\delta)\alpha \subseteq Y\alpha$, pelo que $X\alpha = Y\alpha$, o que contradiz o facto de $\alpha \notin F$. Logo, $\gamma = 1$ ou $\delta = 1$ e, consequentemente, $\beta = \alpha$. □

De seguida, caracterizaremos a relação $\mathcal{R}$ em $T(X, Y)$. Recordemos que, dado $\alpha \in T(X, Y)$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \pi_\alpha$ é uma relação de equivalência em X , usualmente denominada núcleo de α , e que $|X/\pi_\alpha| = |X\alpha|$.

Teorema 6. *Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Então, $\alpha = \beta\gamma$, para algum $\gamma \in T(X, Y)$, se e só se $\pi_\beta \subseteq \pi_\alpha$. Mais, $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\pi_\beta = \pi_\alpha$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = \beta\gamma$, para algum $\gamma \in T(X, Y)$. Seja $(a, b) \in X \times X$ tal que $a\beta = b\beta$. Então, $a\alpha = (a\beta)\gamma = (b\beta)\gamma = b\alpha$, pelo que $(a, b) \in \pi_\alpha$. Logo, $\pi_\beta \subseteq \pi_\alpha$.

Reciprocamente, sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ tais que $\pi_\beta \subseteq \pi_\alpha$. Escrevemos

$$\beta = \begin{pmatrix} B_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

onde $X\beta = \{y_i\}$ e, para cada $i \in I$, $y_i\beta^{-1} = B_i$. Como $\beta \in T(X, Y)$, $\{y_i : i \in I\} \subseteq Y$. Para todo $i \in I$, se $a, b \in B_i$, então $a\beta = b\beta = y_i$, pelo que $(a, b) \in \pi_\beta$. Portanto $(a, b) \in \pi_\alpha$, pelo que $a\alpha = b\alpha$.

Seja $\{x_j : j \in J\} = X\alpha \subseteq Y$ e seja $x_j\alpha^{-1} = A_j$, para cada $j \in J$. Acabámos de ver que, para todo $i \in I$, existe $j \in J$ tal que $B_i \subseteq A_j$. Para cada $j \in J$, consideremos $I_j = \{i \in I : B_i \subseteq A_j\}$. É claro que $\bigcup_{i \in I_j} B_i \subseteq A_j$. Suponhamos que existe $a \in A_j \setminus \bigcup_{i \in I_j} B_i$. Então, existe $i_0 \in I \setminus I_j$ tal que $a \in B_{i_0}$. Como $a \in A_j$, sabemos que $a\alpha = x_j$. Ora, para cada $b \in B_{i_0}$, $b\beta = y_{i_0} = a\beta$. Assim, $(a, b) \in \pi_\beta \subseteq \pi_\alpha$, pelo que $b\alpha = a\alpha = x_j$ e, consequentemente, $B_{i_0} \subseteq A_j$. Portanto, $i_0 \in I_j$, uma contradição. Logo, $A_j = \bigcup_{i \in I_j} B_i$.

Escrevamos $C_j = \{y_i : i \in I_j\}$, para cada $j \in J$, e seja $X = \bigcup_{j \in J} C_j \dot{\cup} Z$. Fixemos $j_0 \in J$ e consideremos $\gamma \in T(X)$ definida por

$$\gamma = \begin{pmatrix} C_j & Z \\ x_j & x_{j_0} \end{pmatrix}.$$

Como $X\gamma \subseteq X\alpha \subseteq Y$, temos $\gamma \in T(X, Y)$. Mais, dados $j \in J$ e $a \in A_j$, existe $i \in I_j$ tal que $a \in B_i$ e

$$a(\beta\gamma) = (a\beta)\gamma = y_i\gamma = x_j = a\alpha.$$

Assim, para todo $j \in J$ e todo $a \in A_j$, $a\alpha = a\beta\gamma$. Portanto, $\alpha = \beta\gamma$.

Desta forma, segue naturalmente que

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{R} \beta &\Leftrightarrow \exists \gamma, \delta \in T(X, Y)^1 : \alpha = \beta\gamma \text{ e } \beta = \alpha\delta \\ &\Leftrightarrow \pi_\beta \subseteq \pi_\alpha \text{ e } \pi_\alpha \subseteq \pi_\beta \\ &\Leftrightarrow \pi_\alpha = \pi_\beta. \end{aligned}$$

□

Como vimos, a caracterização da $\mathcal{L}$ -classe de um elemento α em $T(X, Y)$ depende do facto de α ser ou não regular. Do resultado que se segue, podemos concluir que dois elementos $\mathcal{R}$ -relacionados ou são ambos regulares ou ambos não regulares.

Teorema 7. *Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Se $\pi_\alpha = \pi_\beta$, então ou $\alpha, \beta \in F$ ou $\alpha, \beta \notin F$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ são tais que $\pi_\alpha = \pi_\beta$ e $(\alpha \notin F$ ou $\beta \notin F)$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $\alpha \notin F$. Então,

$$(X \setminus Y)\alpha \not\subseteq Y\alpha,$$

ou seja, existe $a \in X \setminus Y$ tal que $a\alpha \notin Y\alpha$. Desta forma, $a\alpha \neq y\alpha$, para todo $y \in Y$, pelo que $(a, y) \notin \pi_\alpha$, para todo $y \in Y$. Como $\pi_\alpha = \pi_\beta$, sabemos que $(a, y) \notin \pi_\beta$, para todo $y \in Y$, ou seja, $a\beta \neq y\beta$, para todo $y \in Y$. Logo, $a \in X \setminus Y$ e $a\beta \notin Y\beta$, pelo que $(X \setminus Y)\beta \not\subseteq Y\beta$ e $\beta \notin F$. □

Corolário 2. *Dado $\alpha \in T(X, Y)$, as afirmações seguintes são verdadeiras.*

1. *Se $\alpha \in F$, então $R_\alpha = \{\beta \in F : \pi_\alpha = \pi_\beta\}$.*
2. *Se $\alpha \notin F$, então $R_\alpha = \{\beta \in T(X, Y) : \beta \notin F \text{ e } \pi_\alpha = \pi_\beta\}$.*

Demonstração. A demonstração segue trivialmente aplicando os Teoremas 6 e 7. □

Observemos que a $\mathcal{L}$ -classe de um elemento não regular $\alpha \in T(X, Y)$ é sempre singular. Por outro lado, a $\mathcal{R}$ -classe de α é formada por todos os elementos não regulares com núcleo igual ao núcleo de α .

Teorema 8. *Dado $\alpha \in T(X, Y)$, as afirmações seguintes são verdadeiras.*

1. *Se $\alpha \in F$, então $H_\alpha = \{\beta \in F : X\alpha = X\beta \text{ e } \pi_\alpha = \pi_\beta\}$.*
2. *Se $\alpha \notin F$, então $H_\alpha = \{\alpha\}$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Então, pelo Teorema 6, $\alpha \mathcal{H} \beta$ se e só se $\alpha \mathcal{L} \beta$ e $\pi_\alpha = \pi_\beta$. Pelo Teorema 7, se $\alpha \mathcal{H} \beta$ então $(\alpha, \beta \in F)$ ou $(\alpha, \beta \notin F)$. Logo, pelos Teoremas 5 e 6,

$$\begin{aligned}
 \alpha \mathcal{H} \beta &\Leftrightarrow (\alpha, \beta \in F \wedge \alpha \mathcal{L} \beta \wedge \pi_\alpha = \pi_\beta) \text{ ou } (\alpha, \beta \notin F \wedge \alpha \mathcal{L} \beta \wedge \pi_\alpha = \pi_\beta) \\
 &\Leftrightarrow (\alpha, \beta \in F \wedge X\alpha = X\beta \wedge \pi_\alpha = \pi_\beta) \text{ ou } (\alpha, \beta \notin F \wedge \alpha = \beta \wedge \pi_\alpha = \pi_\beta) \\
 &\Leftrightarrow (\alpha, \beta \in F \wedge X\alpha = X\beta \wedge \pi_\alpha = \pi_\beta) \text{ ou } (\alpha, \beta \notin F \wedge \alpha = \beta).
 \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha \in F$, então $H_\alpha = \{\beta \in F : X\alpha = X\beta \text{ e } \pi_\alpha = \pi_\beta\}$. Por outro lado, se $\alpha \notin F$, então $H_\alpha = \{\alpha\}$. $\square$

O resultado que se segue permite-nos caracterizar a relação $\mathcal{D}$ em $T(X, Y)$.

Teorema 9. *Dado $\alpha \in T(X, Y)$, as afirmações seguintes são verdadeiras.*

1. Se $\alpha \in F$, então $D_\alpha = \{\beta \in F : |X\beta| = |X\alpha|\}$.
2. Se $\alpha \notin F$, então $D_\alpha = \{\beta \in T(X, Y) : \beta \notin F \text{ e } \pi_\beta = \pi_\alpha\}$.

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ tais que $\alpha \in F$ e $\alpha \mathcal{D} \beta$. Então, existe $\gamma \in T(X, Y)$ tal que $\alpha \mathcal{L} \gamma$ e $\gamma \mathcal{R} \beta$. Como $\alpha \in F$ e $\alpha \mathcal{L} \gamma$, podemos concluir que $\gamma \in F$ e $X\alpha = X\gamma$. Por outro lado, como $\gamma \mathcal{R} \beta$ e $\gamma \in F$, concluímos que $\beta \in F$ e $\pi_\gamma = \pi_\beta$. Ora,

$$|X\beta| = |X/\pi_\beta| = |X/\pi_\gamma| = |X\gamma| = |X\alpha|.$$

Reciprocamente, se $\beta \in F$ é tal que $|X\alpha| = |X\beta|$, podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B_i \\ y_i \end{pmatrix},$$

com $X\alpha = \{x_i : i \in I\}$, $X\beta = \{y_i : i \in I\}$ e, para cada $i \in I$, $x_i\alpha^{-1} = A_i$ e $y_i\beta^{-1} = B_i$.

Consideremos γ em $T(X)$ definido por

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_i \\ x_i \end{pmatrix}.$$

Como $X\gamma = \{x_i : i \in I\} = X\alpha \subseteq Y$, temos $\gamma \in T(X, Y)$. Uma vez que $\beta \in F$, temos que $X\beta \subseteq Y\beta$. Assim, para todo $a \in X$, $a\beta \in Y\beta$, pelo que existe $y \in Y$ tal que $a\beta = y\beta$. Como $X\beta = \{y_i : i \in I\}$, existe $i \in I$ tal que $a\beta = y\beta = y_i$ e, por isso, $a, y \in y_i\beta^{-1} = B_i$. Por definição de γ , $a\gamma = x_i = y\gamma$. Logo, $X\gamma \subseteq Y\gamma$ e, portanto, $\gamma \in F$. Logo, podemos concluir que $\alpha \mathcal{L} \gamma$.

Por outro lado, $X/\pi_\gamma = \{B_i : i \in I\} = X/\pi_\beta$, pelo que $\pi_\gamma = \pi_\beta$. Assim, $\gamma \mathcal{R} \beta$. Logo, $\alpha \mathcal{D} \beta$ em $T(X, Y)$. Portanto, $D_\alpha = \{\beta \in F : |X\alpha| = |X\beta|\}$.

Consideremos, agora, $\alpha \in T(X, Y) \setminus F$ e tomemos β tal que $\alpha \mathcal{D} \beta$. Então, existe $\gamma \in T(X, Y)$ tal que $\alpha \mathcal{L} \gamma$ e $\gamma \mathcal{R} \beta$. Como $\alpha \notin F$ e $\alpha \mathcal{L} \gamma$, concluímos que $\alpha = \gamma$. Assim, $\alpha \mathcal{R} \beta$ em $T(X, Y)$, pelo que $\beta \notin F$ e $\pi_\alpha = \pi_\beta$.

Reciprocamente, tomemos $\beta \notin F$ tal que $\pi_\alpha = \pi_\beta$. Pelo Teorema 6, $\alpha \mathcal{R} \beta$. Logo, $\alpha \mathcal{D} \beta$, uma vez que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$. Portanto, $D_\alpha = \{\beta \in T(X, Y) : \beta \notin F \text{ e } \pi_\alpha = \pi_\beta\}$. $\square$

Resta-nos caracterizar a relação $\mathcal{J}$. Para o fazer, necessitaremos do seguinte lema.

Lema 3. *Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Se existem $\lambda \in T(X, Y)$ e $\mu \in T(X, Y)^1$ tais que $\alpha = \lambda\beta\mu$, então $|X\alpha| \leq |Y\beta|$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = \lambda\beta\mu$, para certos $\lambda \in T(X, Y)$ e $\mu \in T(X, Y)^1$. Como $\lambda \in T(X, Y)$, temos $X\lambda \subseteq Y$. Logo, $X\lambda\beta = (X\lambda)\beta \subseteq Y\beta$, pelo que $|X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$. Assim, $|X\alpha| = |X(\lambda\beta\mu)| = |(X\lambda\beta)\mu| \leq |X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$. Logo, $|X\alpha| \leq |Y\beta|$, como pretendíamos mostrar. $\square$

O resultado que se segue descreve-nos a relação $\mathcal{J}$ em $T(X, Y)$

Teorema 10. *Sejam $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Então, $\alpha \mathcal{J} \beta$ se e só se $\pi_\alpha = \pi_\beta$ ou $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Então, existem $\gamma, \delta, \gamma', \delta' \in T(X, Y)^1$ tais que $\alpha = \gamma\beta\delta$ e $\beta = \gamma'\alpha\delta'$. Se $\gamma = \gamma' = 1$, então $\alpha = \beta\delta$ e $\beta = \alpha\delta'$ e, conseqüentemente, $\alpha \mathcal{R} \beta$. Pelo Teorema 6, $\pi_\alpha = \pi_\beta$.

Suponhamos agora que $\gamma \neq 1$ ou $\gamma' \neq 1$, ou seja, que $\gamma \in T(X, Y)$ ou $\gamma' \in T(X, Y)$. Não é difícil de concluir que, neste caso, existem $\sigma, \sigma' \in T(X, Y)$ e $\lambda, \lambda' \in T(X, Y)^1$ tais que $\alpha = \sigma\beta\lambda$ e $\beta = \sigma'\alpha\lambda'$. Começemos por observar que, quando $\gamma \neq 1$ e $\gamma' \neq 1$, este facto é trivial. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\gamma \in T(X, Y)$ mas $\gamma' = 1$. Então $\beta = \alpha\delta' = (\gamma\beta\delta)\delta' = \gamma(\alpha\delta')\delta\delta' = \gamma\alpha(\delta\delta'\delta)$. Neste caso, basta tomar $\sigma = \sigma' = \gamma \in T(X, Y)$, $\lambda = \delta, \lambda' = \delta\delta'\delta \in T(X, Y)^1$. Como $\sigma, \sigma' \in T(X, Y)$ e $\lambda, \lambda' \in T(X, Y)^1$, segue do Lema 3 que $|X\alpha| \leq |Y\beta|$ e $|X\beta| \leq |Y\alpha|$. Assim, $|Y\alpha| \leq |X\alpha| \leq |Y\beta| \leq |X\beta| \leq |Y\alpha|$. Logo, $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$, como pretendido.

Reciprocamente, pelo Teorema 6, se $\pi_\alpha = \pi_\beta$ então $\alpha \mathcal{R} \beta$. Como $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$, podemos concluir que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Suponhamos, assim, que $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$. Observemos que $|X/\pi_\alpha| = |X\alpha| = |Y\beta|$ e

$|X/\pi_\beta| = |X\beta| = |Y\alpha|$. Escrevamos $Y\beta = \{y_i : i \in I\}$ e $X\beta = \{y_i : i \in I\} \dot{\cup} \{y_j : j \in J\}$. Para cada $i \in I$, seja $y_i\beta^{-1} = B_i$ e, para cada $j \in J$, seja $y_j\beta^{-1} = B_j$. Temos

$$\beta = \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}.$$

De forma análoga (e porque $|Y\alpha| = |Y\beta|$), escrevamos $Y\alpha = \{x_i : i \in I\}$ e $X\alpha = \{x_i : i \in I\} \dot{\cup} \{x_k : k \in K\}$. Para cada $i \in I$, seja $x_i\alpha^{-1} = A_i$ e, para cada $k \in K$, seja $x_k\alpha^{-1} = A_k$. Assim,

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i & A_k \\ x_i & x_k \end{pmatrix}.$$

Notemos que $|I| = |I| + |J|$, uma vez que $|Y\beta| = |X\beta|$, e $|I| = |I| + |K|$, pois $|Y\alpha| = |X\alpha|$. Deste modo, podemos escrever $Y\beta = \{c_i : i \in I\} \dot{\cup} \{c_k : k \in K\}$ e $Y\alpha = \{d_i : i \in I\} \dot{\cup} \{d_j : j \in J\}$.

Definamos γ, λ em $T(X)$ como

$$\gamma = \begin{pmatrix} A_i & A_k \\ c_i & c_k \end{pmatrix} \text{ e } \lambda = \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ d_i & d_j \end{pmatrix}.$$

É importante reparar que $X\gamma = Y\beta \subseteq X\beta \subseteq Y$ e $X\lambda = Y\alpha \subseteq X\alpha \subseteq Y$, pelo que podemos concluir que $\gamma, \lambda \in T(X, Y)$. Mais, como $\pi_\alpha = \pi_\gamma$ e $\pi_\beta = \pi_\lambda$, sabemos que $\alpha \mathcal{R} \gamma$ e $\beta \mathcal{R} \lambda$, pelo que existem $\gamma', \lambda' \in T(X, Y)^1$ tais que $\alpha = \gamma\gamma'$ e $\beta = \lambda\lambda'$.

Para cada $i \in I$, temos que $y_i \in Y\beta = \{y\beta : y \in Y\}$, pelo que existe $y \in Y$ tal que $y\beta = y_i$. Por outras palavras, temos $y_i\beta^{-1} \cap Y \neq \emptyset$, donde podemos tomar $a_i \in y_i\beta^{-1} \cap Y$, para cada $i \in I$. Por outro lado, como $X\gamma = Y\beta = \{y_i : i \in I\}$, temos que $X/\pi_\gamma = \{E_i : i \in I\}$, onde, para cada i , $E_i = y_i\gamma^{-1}$. Ou seja, podemos escrever γ como

$$\gamma = \begin{pmatrix} E_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Definamos, então, $\beta' \in T(X)$ como

$$\beta' = \begin{pmatrix} E_i \\ a_i \end{pmatrix}.$$

Como, para cada $i \in I$, se tem $a_i \in Y$, concluímos que $\beta' \in T(X, Y)$. Pelo que observámos acima, é fácil verificar que $\gamma = \beta'\beta$. Analogamente, podemos definir $\alpha' \in T(X, Y)$ tal que $\lambda = \alpha'\alpha$. Portanto, $\alpha = \gamma\gamma' = \beta'\beta\gamma'$ e $\beta = \lambda\lambda' = \alpha'\alpha\lambda'$, pelo que $\alpha \mathcal{J} \beta$, como desejado. $\square$

Em qualquer semigrupo S , temos $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. No caso particular de $T(X)$, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. No entanto, em $T(X, Y)$, esta igualdade não se verifica necessariamente. Atentemos o exemplo que se segue.

Exemplo 1. Seja X o conjunto dos números naturais e seja Y o conjunto de todos os números pares. Escrevamos $X = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ e consideremos as transformações α, β definidas em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2n & 2n-1 \\ 4n & 2 \end{pmatrix}.$$

Como as imagens de qualquer número natural por α e por β são sempre números pares, sabemos que $\alpha, \beta \in T(X, Y)$. Mais, uma vez que as imagens de qualquer número par por α e por β são sempre múltiplos de 4 e, por outro lado, $2 \in X\alpha \cap X\beta$, podemos afirmar que $\alpha, \beta \notin F$. É claro que $\alpha \mathcal{J} \beta$, pois $|X\alpha| = |Y\alpha| = \aleph_0 = |Y\beta| = |X\beta|$. No entanto, $\pi_\alpha \neq \pi_\beta$ (pois os números ímpares pertencem todos à mesma classe de equivalência definida por π_β , o que não acontece em relação a π_α). Logo, α não está $\mathcal{D}$ -relacionado com β em $T(X, Y)$, e $\mathcal{D} \neq \mathcal{J}$.

No exemplo anterior, definimos duas aplicações α e β em $T(X, Y)$, para certos conjuntos X e Y , tais que $\alpha \mathcal{J} \beta$ mas $\alpha \not\mathcal{D} \beta$. Na verdade, tal foi possível apenas porque as aplicações definidas não são regulares.

Corolário 3. Sejam $\alpha, \beta \in F$. Então, $\alpha \mathcal{J} \beta$ em $T(X, Y)$ se e só se $\alpha \mathcal{D} \beta$ em $T(X, Y)$.

Demonstração. É claro que, se $\alpha \mathcal{D} \beta$, então $\alpha \mathcal{J} \beta$. Suponhamos agora que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Então, $\pi_\alpha = \pi_\beta$ ou $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$. Se $\pi_\alpha = \pi_\beta$, é claro que $|X\alpha| = |X/\pi_\alpha| = |X/\pi_\beta| = |X\beta|$. Logo, $|X\alpha| = |X\beta|$ em ambos os casos, e, portanto, pelo Teorema 9, sabemos que $\alpha \mathcal{D} \beta$. $\square$

No teorema que se segue, vemos que as relações $\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}$ coincidem em $T(X, Y)$ sempre que Y é um conjunto finito.

Teorema 11. Se Y é um subconjunto finito de X , então $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $T(X, Y)$.

Demonstração. Suponhamos que Y é um subconjunto finito de X . Sabemos que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Tomemos $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ tais que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Então,

$$\pi_\alpha = \pi_\beta \text{ ou } |X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|. \quad (1)$$

Se $\alpha, \beta \in F$ então, pelo Corolário 3, temos que $\alpha \mathcal{D} \beta$. Por outro lado, se $\alpha, \beta \notin F$, então, em particular, $Y\alpha \subsetneq X\alpha$. Sendo Y finito, $Y\alpha$ também o é e, portanto, $|Y\alpha| < |X\alpha|$. Por (1), concluímos que $\pi_\alpha = \pi_\beta$, pelo que $\alpha \mathcal{D} \beta$.

Suponhamos, agora, que $\alpha \in F$ e $\beta \notin F$. Então, $|X\alpha| = |Y\alpha|$, mas $|Y\beta| < |X\beta|$. De (1), segue que $\pi_\alpha = \pi_\beta$, o que contradiz Teorema 7, pois $\alpha \in F$ e $\beta \notin F$. De modo semelhante, concluímos que não é possível ter $\alpha \notin F$ e $\beta \in F$. Assim, podemos afirmar que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$, pelo que a igualdade segue. $\square$

3.3 Subsemigrupos Inversos Maximais

Começamos por recordar que um semigrupo S se diz inverso se é regular e se quaisquer dois idempotentes comutam entre si. Notemos que, se $|Y| = 1$, então existe um e um só elemento em $T(X, Y)$: a saber, a aplicação constante Xy , onde $Y = \{y\}$. Neste caso, é óbvio que não existem subsemigrupos inversos maximais em $T(X, Y)$. Por isso, daqui em diante, assumimos que $|Y| \geq 2$.

Para prosseguir o estudo desta secção, auxiliar-nos-emos de certos subconjuntos de $T(X, Y)$, que definimos em seguida. Para cada $a \in Y$, seja

$$F_a = \{\alpha \in F : a\alpha = a \text{ e } \alpha \text{ é injetiva em } X \setminus a\alpha^{-1}\}.$$

Não é difícil concluir que F_a é não vazio, para cada $a \in Y$. De facto, a aplicação constante X_a fixa a e é regular em $T(X, Y)$ (por ser idempotente). Logo, $X_a \in F_a$, uma vez que $X \setminus aX_a^{-1} = X \setminus X = \emptyset$.

Observemos que F_a é formado por todo o elemento regular α de $T(X, Y)$ que fixa a e tal que, se dois objetos distintos têm a mesma imagem por α , então essa imagem é a .

Teorema 12. *Sejam $\alpha \in T(X, Y)$ e $a \in Y$. Então, $\alpha \in F_a$ se e só se $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$ e α é injetiva em $Y \setminus a\alpha^{-1}$.*

Demonstração. Se $Y = X$, nada há a provar. Suponhamos, então, que $Y \subsetneq X$ e tomemos $\alpha \in F_a$. Então, $\alpha \in F$, $a\alpha = a$ e α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$. Uma vez que $Y \subseteq X$, é claro que α é injetiva em $Y \setminus a\alpha^{-1}$. Como α fixa a , temos que $a \in a\alpha^{-1}$. Sabemos também que $(X \setminus Y)\alpha \subseteq Y\alpha$, pois $\alpha \in F$. Assim, dado $x \in X \setminus Y$, temos $x\alpha \in Y\alpha$, donde existe $y \in Y$ tal que $x\alpha = y\alpha$. Mais, uma vez que $X\alpha \subseteq Y$, sabemos que $x\alpha = b = y\alpha$, para algum $b \in Y$. Logo, $x, y \in b\alpha^{-1}$. Mas $x \in X \setminus Y$ e $y \in Y$, e, portanto, $x \neq y$. Ora, por hipótese, α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$, pelo que $b = a$. Portanto, $x \in a\alpha^{-1}$ e, desta forma, $(X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$, como pretendíamos mostrar.

Reciprocamente, suponhamos que $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$ e α é injetiva em $Y \setminus a\alpha^{-1}$. Então, $a \in a\alpha^{-1}$, donde segue que $a\alpha = a$. Para mostrarmos que $\alpha \in F_a$, falta ver que $(X \setminus Y)\alpha \subseteq Y\alpha$ e que α é injetiva

em $X \setminus a\alpha^{-1}$. De $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$, segue que $(X \setminus Y)\alpha \subseteq \{a\} = \{a\alpha\} \subseteq Y\alpha$, pois $a \in Y$. Logo, $\alpha \in F$.

Para terminar, vejamos que α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$. Por $\alpha \in F$, $X\alpha = Y\alpha$ e, por $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$, temos $(X \setminus Y) \setminus a\alpha^{-1} = \emptyset$. Desta forma, temos $X \setminus a\alpha^{-1} = ((Y \cup (X \setminus Y)) \setminus a\alpha^{-1} = Y \setminus a\alpha^{-1} \cup (X \setminus Y) \setminus a\alpha^{-1} = Y \setminus a\alpha^{-1}$. Como α é injetiva em $Y \setminus a\alpha^{-1}$, concluímos que α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$. Portanto, $\alpha \in F_a$. $\square$

Observemos que $\alpha \in T(X, Y)$ é idempotente se e só se, para todo $x \in X\alpha$, $x\alpha = x$. De facto, tomando $\alpha \in T(X, Y)$, se α é idempotente, então $\alpha^2 = \alpha$. Dado $x \in X\alpha$, existe $a \in X$ tal que $a\alpha = x$. Logo, $x = a\alpha = a\alpha^2 = (a\alpha)\alpha = x\alpha$. Reciprocamente, admitamos que $x\alpha = x$, para todo $x \in X\alpha$, e tomemos $a \in X$. Então, $x = a\alpha \in X\alpha$. Assim,

$$x\alpha = x \Leftrightarrow (a\alpha)\alpha = a\alpha \Leftrightarrow a\alpha^2 = a\alpha,$$

concluindo o pretendido.

Lema 4. *Sejam $\alpha \in F$ e $a \in Y$. Se α é idempotente em F_a , então $x\alpha = x$, para todo $x \in Y \setminus a\alpha^{-1}$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in F_a$. Suponhamos que α é idempotente e tomemos $x \in Y \setminus a\alpha^{-1}$. Temos $x\alpha^2 = x\alpha$, por α ser idempotente. Como $x \in Y \setminus a\alpha^{-1}$ e $x\alpha \in X\alpha \subseteq Y$, resta observar que $x\alpha \notin a\alpha^{-1}$. De facto, temos $(x\alpha)\alpha = x\alpha^2 = x\alpha \neq a$. Como α é injetiva em $Y \setminus a\alpha^{-1}$, de $x\alpha^2 = x\alpha$ segue que $x\alpha = x$. $\square$

Lema 5. *Seja $a \in Y$ e seja L um subsemigrupo regular de $T(X, Y)$ tal que $F_a \subsetneq L$. Dado $\alpha \in L \setminus F_a$ tal que $a\alpha^{-1} \neq \emptyset$, são verdadeiras as seguintes afirmações.*

1. $\alpha \mathcal{L} \beta$ em L , para algum idempotente $\beta \in F_a$.
2. se $a\alpha = a$, então α não está $\mathcal{R}$ -relacionado em L com qualquer elemento de F_a .

Demonstração. Como L é um semigrupo regular e $\alpha \in L$, sabemos que α é regular. Pelo que observámos imediatamente antes do Teorema 4, F é o conjunto de todos os elementos regulares de $T(X, Y)$. Logo, $L \subseteq F$ e, em particular, $\alpha \in F$. Assim, $\alpha \notin F_a$ se e só se $a\alpha \neq a$ ou α não é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$. Por hipótese, $a \in X\alpha$. Escrevamos, então,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a\alpha^{-1} & A_i \\ a & a_i \end{pmatrix},$$

com $X\alpha = \{a\} \dot{\cup} \{a_i : i \in I\}$ e, para cada $i \in I$, $a_i\alpha^{-1} = A_i$. Podemos escrever $X = \{a_i : i \in I\} \dot{\cup} \{b_j : j \in J\}$. Definamos $\beta \in T(X)$ por

$$\beta = \begin{pmatrix} b_j & a_i \\ a & a_i \end{pmatrix}.$$

É claro que $X\beta = X\alpha \subseteq Y$, pelo que $\beta \in T(X, Y)$. Mais, como $a \notin \{a_i : i \in I\}$, sabemos que $a \in \{b_j : j \in J\}$. Logo,

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} b_j & a_i \\ a & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & a_i \\ a & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_j & a_i \\ a & a_i \end{pmatrix} = \beta,$$

e β é idempotente. Sendo idempotente, β é regular (pois $\beta = \beta\beta\beta$). Logo, $\beta \in F$. Vejamos que, na verdade, $\beta \in F_a$. Temos que $a\beta = a$. Além disso, em $X \setminus a\beta^{-1} = \{a_i : i \in I\}$, β é injetiva. Portanto, $\beta \in F_a$ e, como $F_a \subsetneq L$, $\beta \in L$.

Pelo Teorema 5, uma vez que $\alpha \in F$, $\beta \mathcal{L} \alpha$ em $T(X, Y)$ se e só se $\beta \in F$ e $X\beta = X\alpha$. Ora, ambas as condições são satisfeitas e, portanto, $\beta \mathcal{L} \alpha$ em $T(X, Y)$. Mas L é um subsemigrupo regular de $T(X, Y)$. Pelo Teorema de Hall (ver [5, Proposição 2.4.2]), $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}^{T(X, Y)} \cap (L \times L)$. Assim, podemos concluir que $\alpha \mathcal{L} \beta$ em L , como pretendíamos.

Assumamos agora que $a\alpha = a$ e suponhamos que $\alpha \mathcal{R} \beta$, para algum $\beta \in F_a$. Então, pelo Teorema 6, $\pi\alpha = \pi\beta$. Logo, podemos escrever α, β como

$$\alpha = \begin{pmatrix} a\alpha^{-1} & A_i \\ a & a_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a\alpha^{-1} & A_i \\ b & b_i \end{pmatrix},$$

onde $\bigcup_{i \in I} A_i = X \setminus a\alpha^{-1}$. Sabemos que $a \in X\beta$, porque $a\beta = a$. Assim, $a = b$ ou $a = b_i$, para algum $i \in I$. Se $a = b_i$, para algum i , temos $a \in a\beta^{-1} = b_i\beta^{-1} = A_i$. Contudo, $a \in a\alpha^{-1}$, pelo que $A_i \cap a\alpha^{-1} \neq \emptyset$, que sabemos ser uma contradição. Logo, $a = b$ e $a\beta^{-1} = b\beta^{-1} = a\alpha^{-1}$.

Tomemos, agora $x_1, x_2 \in X \setminus a\alpha^{-1}$ tais que $x_1\alpha = x_2\alpha$. Então, $(x_1, x_2) \in \pi\alpha$ e, consequentemente, $(x_1, x_2) \in \pi\beta$. Logo, $x_1\beta = x_2\beta$. Como β é injetiva em $X \setminus a\beta^{-1}$, concluímos que $x_1 = x_2$. Por outras palavras, vimos que α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$. Mas, $\alpha \notin F_a$. Obtemos, assim, uma contradição, que vem do facto de supormos que $\alpha \mathcal{R} \beta$, para algum $\beta \in F_a$. $\square$

Já vimos que F é o maior subsemigrupo regular de $T(X, Y)$. No resultado que se segue, iremos determinar uma família de subsemigrupos inversos maximais de $T(X, Y)$.

Teorema 13. Para cada $a \in Y$, o conjunto F_a é um subsemigrupo inverso maximal de $T(X, Y)$.

Demonstração. Seja $a \in Y$. Começemos por verificar que F_a é um subsemigrupo de $T(X, Y)$. Vimos anteriormente que $F_a \neq \emptyset$. Por definição, $F_a \subseteq F \subseteq T(X, Y)$. Sejam $\alpha, \beta \in F_a$. Então, $a\alpha = a\beta = a$, α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$ e β é injetiva em $X \setminus a\beta^{-1}$. É imediato que, como $\alpha, \beta \in F$ e F é ideal direito de $T(X, Y)$ (pelo Lema 1), $\alpha\beta \in F$. Mais, $(a\alpha)\beta = a\beta = a$. Logo, $a(\alpha\beta) = a$. Vejamos que $\alpha\beta$ é injetiva em $X \setminus a(\alpha\beta)^{-1}$. Para isso, tomemos $x, y \in X \setminus a(\alpha\beta)^{-1}$ tais que $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$. Como $x \notin a(\alpha\beta)^{-1}$, segue que $x(\alpha\beta) \neq a$. Logo, $(x\alpha)\beta \neq a$ e, portanto, $x\alpha \in X \setminus a\beta^{-1}$. De modo análogo, concluímos que $y\alpha \in X \setminus a\beta^{-1}$. Sendo β injetiva em $X \setminus a\beta^{-1}$, de $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$ segue que $x\alpha = y\alpha$. Se $x\alpha = a$, então $x(\alpha\beta) = a\beta = a$, um absurdo. Logo, $x, y \in X \setminus a\alpha^{-1}$. Como α é injetiva em $X \setminus a\alpha^{-1}$ e $x\alpha = y\alpha$, concluímos que $x = y$. Portanto, $\alpha\beta$ é injetiva em $X \setminus (\alpha\beta)^{-1}$. Desta forma, $\alpha\beta \in F_a$, e F_a é um subsemigrupo de $T(X, Y)$.

Queremos provar, agora, que F_a é semigrupo inverso, isto é, F_a é regular e todos os seus idempotentes comutam. Seja $\alpha \in F_a$. Pelo Teorema 12, qualquer que seja $x \in Y\alpha \setminus \{a\}$, $|x\alpha^{-1}| = 1$, já que α é injetiva neste conjunto. Assim, seja $Y\alpha \setminus \{a\} = \{y_i : i \in I\}$ e, para cada $i \in I$, seja $x_i \in Y$ tal que $x_i\alpha = y_i$. Temos

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_i & a\alpha^{-1} \\ y_i & a \end{pmatrix},$$

com $Y = \{x_i : i \in I\} \dot{\cup} \{a\}$ e $X = Y \cup a\alpha^{-1}$. Podemos escrever X como $\{y_i : i \in I\} \dot{\cup} \{a_j : j \in J\}$. É claro que $a \in \{a_j : j \in J\}$. Definamos $\delta \in T(X)$ por

$$\delta = \begin{pmatrix} y_i & a_j \\ x_i & a \end{pmatrix}.$$

Como $X\delta = Y$, temos que $\delta \in T(X, Y)$. Vejamos que $\delta \in F_a$. É fácil ver que $\delta \in F$, já que $(X \setminus Y)\delta = \{a\} = \{a\delta\} \subseteq Y\delta$. Temos $a \in a\delta^{-1}$, isto é, $a\delta = a$. Mais, δ é injetiva em $\{y_i : i \in I\} = X \setminus a\delta^{-1}$, pelo que $\delta \in F_a$. Como

$$\alpha\delta\alpha = \begin{pmatrix} x_i & a\alpha^{-1} \\ y_i & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i & a_j \\ x_i & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & a\alpha^{-1} \\ y_i & a \end{pmatrix} = \alpha,$$

podemos concluir que F_a é regular.

Provemos, agora, que os idempotentes de F_a comutam. Sejam α, β idempotentes de F_a . Então, $x\alpha = x$, para todo $x \in X \setminus a\alpha^{-1}$, e $x\beta = x$, para todo $x \in X \setminus a\beta^{-1}$. Mais, como $\alpha, \beta \in F_a$, temos $a\alpha = a$ e $a\beta = a$.

Seja $x \in X$. Se $x \in X \setminus a\alpha^{-1} \cap X \setminus a\beta^{-1}$, então

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = x = x\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha).$$

Se $x \in X \setminus a\alpha^{-1} \cap a\beta^{-1}$, então

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = a = a\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha).$$

Se $x \in a\alpha^{-1} \cap X \setminus a\beta^{-1}$, então

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = a\beta = a = x\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha).$$

Por último, se $x \in a\alpha^{-1} \cap a\beta^{-1}$, então

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = a\beta = a = a\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha).$$

Portanto, $\alpha\beta = \beta\alpha$, e quaisquer dois idempotentes de F_a comutam. Assim, F_a é um subsemigrupo inverso de $T(X, Y)$.

Falta, agora verificar a maximalidade de F_a . Suponhamos que $F_a \subsetneq L$, onde L é um subsemigrupo inverso de $T(X, Y)$. Notemos que $L \subseteq F \subseteq T(X, Y)$. Seja $\alpha \in L \setminus F_a$. Tomemos, ainda, $\beta = X_a$, a aplicação constante com contradomínio $\{a\}$. É claro que β é idempotente de F_a . Também $\beta\alpha$ é idempotente de L : basta notar que $\beta \in F_a \subsetneq L$ e $\alpha \in L \setminus F_a$, pelo que $\beta\alpha \in L$ e, dado $x \in X$, $x(\beta\alpha)^2 = (x\beta)(\alpha\beta\alpha) = (a\alpha)(\beta\alpha) = a\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha)$.

Para todo $x \in X$, $x\beta\alpha\beta = a = x\beta$. Logo, $\beta\alpha\beta = \beta$. Mais, como quaisquer dois idempotentes de L comutam, $\beta = (\beta\alpha)\beta = \beta(\beta\alpha) = (\beta\beta)\alpha = \beta\alpha$. Assim, $a\alpha = (a\beta)\alpha = a(\beta\alpha) = a\beta = a$.

Sabemos que L é regular, pelo que $\alpha = \alpha\alpha'\alpha$, para algum $\alpha' \in L$. Mais, $\alpha \mathcal{R} \alpha\alpha'$ em L , com $\alpha\alpha'$ idempotente em L . Pelo Lema 5, α não está $\mathcal{R}$ -relacionado com qualquer elemento de F_a , pelo que $\alpha\alpha' \in L \setminus F_a$. Ora, o argumento atrás usado para concluir que $\beta\alpha$ é idempotente de L , $\beta = \beta\alpha$ e, finalmente, $a\alpha = a$ também pode ser usado para concluir que $\beta(\alpha\alpha')$ é idempotente de L , $\beta = \beta(\alpha\alpha')$ e, finalmente, $a(\alpha\alpha') = a$. Portanto, $a(\alpha\alpha')^{-1} \neq \emptyset$ e, pelo Lema 5, $\alpha\alpha' \mathcal{L} \sigma$, para algum idempotente $\sigma \in F_a$.

Como todo o idempotente e de um semigrupo é identidade à direita na $\mathcal{L}$ -classe L_e e como os idempotentes no semigrupo L comutam, temos $\alpha\alpha' = (\alpha\alpha')\sigma = \sigma(\alpha\alpha') = \sigma$, o que é uma contradição, já que $\alpha\alpha' \notin F_a$, mas $\sigma \in F_a$. Portanto, $L = F_a$, e temos a maximalidade de F_a como subsemigrupo inverso. $\square$

No resultado acima, se tomarmos $X = Y$, obtemos uma família de subsemigrupos inversos maximais de $T(X)$, determinados em [9] por Nichols em 1976.

Corolário 4. Para cada $a \in X$, o conjunto F_a definido por

$$F_a = \{\alpha \in T(X) : a\alpha = a \text{ e } \alpha \text{ é injetiva em } X \setminus a\alpha^{-1}\}$$

é um subsemigrupo inverso maximal de $T(X)$.

No resultado seguinte, iremos determinar o número de elementos de F_a , para cada $a \in Y$, quando Y é um subconjunto finito de X .

Teorema 14. Se Y é um subconjunto finito de X , com $|Y| = n$, então, para cada $a \in Y$,

$$|F_a| = \sum_{r=0}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2.$$

Demonstração. Sejam $a \in Y$ e $\alpha \in F_a$. Então, pelo Teorema 12, temos

$$\alpha = \begin{pmatrix} (X \setminus Y) \cup Y_1 & Y_2 \\ a & Y_3 \end{pmatrix},$$

onde $Y = Y_1 \dot{\cup} Y_2$, $a \in Y_1$, $Y_3 \subseteq Y \setminus \{a\}$ e $|Y_2| = |Y_3|$. Se $Y_2 = \emptyset$, então α é a transformação constante X_a .

Se Y_2 tem t elementos, onde $1 \leq t \leq n-1$, então existem $\binom{n-1}{t}$ hipóteses possíveis para Y_2 e, para cada escolha de Y_2 , existem $\binom{n-1}{t}$ escolhas para Y_3 . Portanto, existem $\binom{n-1}{t}^2$ maneiras possíveis de escolher Y_2 e Y_3 . Como a restrição de α a Y_2 é uma permutação, para cada escolha de Y_2 e Y_3 , a aplicação α tem $t!$ possibilidades. Assim, α tem $t! \binom{n-1}{t}^2$ possibilidades de ser definida. Fazendo-se variar t pelos valores possíveis, obtemos

$$|F_a| = 1 + \sum_{r=1}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2 = \sum_{r=0}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2.$$

□

Observemos que o cardinal do conjunto F_a não depende do número de elementos de X . De facto, $|F_a|$ depende apenas do número de elementos de Y .

Quando tomamos $Y = X$ no resultado anterior, obtemos o corolário que se segue, obtido originalmente por Nichols em [9].

Corolário 5. Se X é um conjunto finito com $|X| = n$, então o número de elementos de $F_a = \{\alpha \in T(X) : a\alpha = a \text{ e } \alpha \text{ é injetiva em } X \setminus a\alpha^{-1}\}$ é $\sum_{r=0}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2$.

Capítulo 4

Semigrupos de transformações com um conjunto invariante

No decorrer deste capítulo, estudaremos outra generalização de $T(X)$. Para este caso, consideramos um subconjunto não vazio Y de X e consideramos todas as aplicações que deixam Y invariante. O conjunto destas aplicações é representado por

$$S(X, Y) = \{\alpha \in T(X) : Y\alpha \subseteq Y\}.$$

Veremos que $(S(X, Y), \circ)$, onde $\circ$ representa a composição de aplicações, é um semigrupo (ver Proposição 9).

A maioria dos resultados apresentados neste capítulo pode ser encontrada em [4] e [10].

Começemos por observar que, quando $X = Y$, temos $S(X, Y) = T(X)$, pelo que podemos ver $S(X, Y)$ como uma generalização de $T(X)$. De um modo geral, temos que $S(X, Y)$ é um subsemigrupo de $T(X)$.

Proposição 9. *Dado $Y \subseteq X$, com $Y \neq \emptyset$, $S(X, Y)$ é subsemigrupo de $T(X)$.*

Demonstração. Começemos por reparar que id_X , a aplicação identidade em X , está em $S(X, Y)$, já que $Y id_X = Y$, pelo que, trivialmente, $Y id_X \subseteq Y$. Logo, $id_X \in S(X, Y)$ e $S(X, Y) \neq \emptyset$.

Sejam, agora, $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Então,

$$Y\alpha\beta = (Y\alpha)\beta \subseteq Y\beta \subseteq Y.$$

Logo, $\alpha\beta \in S(X, Y)$, e $S(X, Y)$ é subsemigrupo de $T(X)$. □

O objetivo final da próxima secção será vermos que todo o semigrupo pode ser mergulhado num semigrupo de transformações da forma $S(X, Y)$.

4.1 Regularidade, isomorfismos e mergulhos

Nesta secção, descreveremos os elementos regulares de $S(X, Y)$. Usando essa caracterização, iremos determinar quando é que o semigrupo $S(X, Y)$ é isomorfo a algum semigrupo total de transformações. Por último, veremos que todo o semigrupo A é mergulhável num semigrupo de transformações totais que deixam um determinado conjunto invariante.

Consideremos o conjunto

$$E = \{\alpha \in S(X, Y) : X\alpha \cap Y = Y\alpha\}.$$

Na proposição que se segue, vemos que E é o conjunto de todos os elementos regulares de $S(X, Y)$.

Proposição 10. *Dado $\alpha \in S(X, Y)$, α é regular se e só se $X\alpha \cap Y = Y\alpha$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha \in S(X, Y)$ é regular, isto é, existe $\gamma \in S(X, Y)$ tal que $\alpha\gamma\alpha = \alpha$. Como $Y \subseteq X$, temos $Y\alpha \subseteq X\alpha$ e, por $\alpha \in S(X, Y)$, $Y\alpha \subseteq Y$. Logo, $Y\alpha \subseteq X\alpha \cap Y$. Falta ver que $X\alpha \cap Y \subseteq Y\alpha$. Tomemos $y \in X\alpha \cap Y$. Então, $y = a\alpha$, para algum $a \in X$. Ora, $y = a\alpha = a(\alpha\gamma\alpha) = (a\alpha\gamma)\alpha$. Como $a\alpha = y \in Y$ e $\gamma \in S(X, Y)$, temos que $(a\alpha)\gamma \in Y$. Logo, $y = (a\alpha\gamma)\alpha \in Y\alpha$, e segue a igualdade pretendida.

Consideremos, agora, $\alpha \in S(X, Y)$ tal que $X\alpha \cap Y = Y\alpha$. Queremos ver que α é regular em $S(X, Y)$. Escrevamos $Y\alpha = \{y_i : i \in I\}$, $Y = \{y_i : i \in I\} \dot{\cup} \{y_j : j \in J\}$, $X\alpha \setminus Y = \{x_k : k \in K\}$ e $X\alpha = \{y_i : i \in I\} \dot{\cup} \{x_k : k \in K\}$. Temos

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_k & B_i \\ x_k & y_i \end{pmatrix},$$

onde, para cada $i \in I$, $B_i \cap Y \neq \emptyset$ e, para cada $k \in K$, $A_k \subseteq X \setminus Y$.

Fixemos $b_i \in B_i \cap Y$, para cada $i \in I$, e $a_k \in A_k$, para cada $k \in K$. Como $X\alpha \cap Y = Y\alpha$, sabemos que $a_k \in X \setminus Y$, para todo k . Definamos

$$\gamma = \begin{pmatrix} x_k & y_i & y_j & z_l \\ a_k & b_i & y_j & z_l \end{pmatrix},$$

com $X = X\alpha \setminus Y \dot{\cup} Y \dot{\cup} \{z_l : l \in L\}$. Observemos que $\gamma \in T(X)$, já que $\text{dom } \gamma = X$ e $X\gamma \subseteq X$. Além disso, como $Y\gamma = (\{y_j\} \dot{\cup} \{y_i\})\gamma = \{y_j\} \dot{\cup} \{b_i\} \subseteq Y$, podemos concluir que $\gamma \in S(X, Y)$. Mais,

$$\alpha\gamma\alpha = \begin{pmatrix} A_k & B_i \\ x_k & y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & y_i & y_j & z_l \\ a_k & b_i & y_j & z_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_i \\ x_k & y_i \end{pmatrix} = \alpha,$$

pelo que α é regular em $S(X, Y)$. □

Vimos, portanto, que E é o conjunto de todos os elementos regulares de $S(X, Y)$. Não é difícil de ver que, apesar de ser o conjunto de todos os elementos regulares, E , em geral, não é subsemigrupo de $S(X, Y)$. Tomemos o seguinte exemplo que retrata esta questão.

Exemplo 2. Sejam $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2\}$. Definam-se α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & \{2, 3\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, $X\alpha \cap Y = \{1\} = Y\alpha$ e $X\beta \cap Y = \{1, 2\} = Y\beta$, pelo que $\alpha, \beta \in E$. No entanto,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \{2, 3\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin E,$$

pois $(X\alpha\beta) \cap Y = \{1, 2\} \neq \{1\} = Y\alpha\beta$.

No exemplo anterior, tanto o conjunto X como o conjunto Y são conjuntos finitos. Ora, mesmo tomando um conjunto infinito X , como, por exemplo, o conjunto dos números naturais, conseguimos ter um contra-exemplo que mostra que E não é um subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Exemplo 3. Sejam $X = \mathbb{N}$ e $Y = \{1, 2\}$. Definam-se α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & X \setminus \{1, 2\} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & X \setminus \{1\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, $X\alpha \cap Y = \{1\} = Y\alpha$ e $X\beta \cap Y = \{1, 2\} = Y\beta$, pelo que $\alpha, \beta \in E$. Porém,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & X \setminus \{1, 2\} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \setminus \{1\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & X \setminus \{1, 2\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin E,$$

já que, à semelhança do exemplo anterior, $(X\alpha\beta) \cap Y = \{1, 2\} \neq \{1\} = Y\alpha\beta$.

De seguida, encontramos uma condição necessária e suficiente para E ser subsemigrupo regular de $S(X, Y)$. Observemos primeiro que, sendo E o conjunto de todos os elementos regulares, o semigrupo $S(X, Y)$ é regular se e só se $E = S(X, Y)$ e, neste caso, E é fechado para a composição. Também é fácil perceber que, quando $X = Y$, temos $E = S(X, Y)$ e, nessas mesmas condições, $S(X, Y) = T(X)$, que sabemos ser regular. Ou seja, se $X = Y$, então $E = S(X, Y) = T(X)$ é um semigrupo regular. Por outro lado, se $|Y| = 1$, todos os elementos de $S(X, Y)$ são regulares, isto é, pertencem a E . Desta forma, obtemos novamente a igualdade $E = S(X, Y)$ e concluímos que $E = S(X, Y)$ é um semigrupo regular. Notemos ainda que, como ilustram os exemplos acima e como mostraremos no seguinte lema, quando $X \neq Y$ e $|Y| > 1$, o conjunto E não é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Lema 6. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. E é subsemigrupo regular de $S(X, Y)$.
2. $S(X, Y)$ é semigrupo regular.
3. $X = Y$ ou $|Y| = 1$.

Demonstração. Como observámos acima, se $X = Y$ ou $|Y| = 1$, então $E = S(X, Y)$ é um semigrupo regular. Suponhamos, por contrarrecíproco, que $X \neq Y$ e $|Y| \neq 1$. Podemos, então, tomar $a, b \in Y$ tais que $a \neq b$ e $c \in X \setminus Y$. Definamos α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ a & c \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a & X \setminus \{a\} \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Temos $\alpha, \beta \in S(X, Y)$, uma vez que $Y\alpha = \{a\} \subseteq Y$ e $Y\beta = \{a, b\} \subseteq Y$. Além disso, $X\alpha \cap Y = \{a\} = Y\alpha$ e $X\beta \cap Y = \{a, b\} = Y\beta$, pelo que $\alpha, \beta \in E$. No entanto,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & X \setminus \{a\} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ a & b \end{pmatrix},$$

pelo que $\alpha\beta \in S(X, Y)$ mas $X\alpha\beta \cap Y = \{a, b\} \neq \{a\} = Y\alpha\beta$. Logo, $\alpha\beta \notin E$, donde concluímos que E não é um subsemigrupo de $S(X, Y)$. Para além disso, como $\alpha\beta$ é um elemento não regular de $S(X, Y)$, podemos concluir que $S(X, Y)$ não é um semigrupo regular. $\square$

Trivialmente, se X é conjunto infinito e Y é subconjunto finito de X , então $X \neq Y$. Do lema anterior, segue, assim, o seguinte corolário.

Corolário 6. Se X é um conjunto infinito e Y é um subconjunto finito de X , então $E = S(X, Y)$ é regular se e só se $|Y| = 1$.

No Teorema que se segue, vemos que $S(X, Y)$ e $T(Z)$ raramente são isomorfos.

Teorema 15. O semigrupo $S(X, Y)$ é isomorfo a $T(Z)$, para algum conjunto Z , se e só se $X = Y$ e $|Y| = |Z|$.

Demonstração. Suponhamos que $X = Y$. Se Z é um conjunto tal que $|Z| = |Y|$, temos

$$S(X, Y) = S(Y, Y) = \{\alpha \in T(Y) : Y\alpha \subseteq Y\} = T(Y) \cong T(Z).$$

Reciprocamente, suponhamos que $S(X, Y) \cong T(Z)$, para algum conjunto Z , e admitamos, por absurdo, que $Y \subsetneq X$. Temos, desta forma, que $|X| > 1$, e vamos analisar dois casos: quando $|Y| = 1$ e quando $|Y| > 1$.

Se $|Y| = 1$, então $Y = \{a\}$, para algum $a \in X$, e $a\beta = a$, para todo $\beta \in S(X, Y)$. Pelo Lema 6, $S(X, Y)$ é regular (pois $|Y| = 1$). Como $|X| > 1$, podemos tomar $b \in X \setminus \{a\}$. Definamos α_1, α_2 em $T(X)$ por

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & X \setminus \{a\} \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Temos $\alpha_1, \alpha_2 \in S(X, Y)$. Logo, $S(X, Y)$ tem mais do que um elemento, pelo que $T(Z)$ também terá (pois são isomorfos). Consequentemente, $|Z| > 1$ (caso contrário, não conseguiríamos definir, pelo menos, duas aplicações distintas).

Começemos por reparar que X_a é elemento zero de $S(X, Y)$ nestas condições. Suponhamos, então, que γ é elemento zero de $T(Z)$. Assim, para todo $\alpha \in T(Z)$, $\alpha\gamma = \gamma\alpha = \gamma$. Em particular, se $\alpha = Z_c$, para algum $c \in Z$, temos

$$\gamma\alpha = \gamma \Leftrightarrow \gamma \begin{pmatrix} Z \\ c \end{pmatrix} = \gamma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ c \end{pmatrix} = \gamma.$$

Porém, pelo observado acima, $|Z| \geq 2$, pelo que existe $d \in Z \setminus \{c\}$. Assim, $\gamma = Z_c = Z_d$, com $c \neq d$, o que é uma contradição. Logo, $T(Z)$ não tem elemento zero. Como X_a é elemento zero de $S(X, Y)$, concluímos que $T(Z) \not\cong S(X, Y)$.

Se, por outro lado, $|Y| > 1$, então, pelo Lema 6, $S(X, Y)$ não é regular. Porém, $T(Z)$ é regular para qualquer $Z \neq \emptyset$, pelo que $T(Z) \not\cong S(X, Y)$, e assim concluímos a prova. $\square$

Vimos no Corolário 6 que, nas condições de X ser infinito e Y ser finito, $S(X, Y)$ é regular se $|Y| = 1$. Também vimos no Teorema 15 que, se $|Y| = 1$ e $Y \subsetneq X$, então $S(X, Y) \not\cong T(Z)$, para qualquer Z . Desta forma, segue o resultado abaixo.

Corolário 7. *Se X é um conjunto infinito e Y é um subconjunto finito de X , então $S(X, Y)$ nunca é isomorfo a $T(Z)$, para qualquer conjunto Z .*

Em [5] Teorema 1.1.2, prova-se que todo o semigrupo A pode ser mergulhado no semigrupo de transformações totais da seguinte forma: para cada $a \in A$, seja $\rho_a : A^1 \rightarrow A^1$ tal que, para todo $x \in A^1$, $x\rho_a = xa$. Então, $\rho_a \in T(A^1)$, já que ρ_a é uma transformação total cujo domínio é A^1 . Mais, se tomarmos $\phi : A \rightarrow T(A^1)$ definido por $a\phi = \rho_a$, não é difícil de verificar que ϕ é um monomorfismo. Falta apenas ver que $\rho_a \in S(A^1, A)$. Ora, se $x = 1$, então $x\rho_a = xa = 1a = a \in A$. Se $x \neq 1$, como A é semigrupo, qualquer que seja $x \in A$, $x\rho_a = xa \in A$. Logo, $\rho_a \in S(A^1, A)$, ficando, desta forma, demonstrado o teorema que se segue.

Teorema 16. *Todo o semigrupo A pode ser mergulhado em $S(A^1, A)$.*

Observemos o seguinte: sabemos que $S(A^1, A)$ é subsemigrupo de $T(A^1)$ e que $S(A^1, A)$ é regular se e só se $|A| = 1$ ou $A^1 = A$. Se A for um semigrupo sem identidade, então $A^1 \neq A$. Suponhamos que $|A| = 1$. Então, $A = \{a\}$, para algum a . Mas A é semigrupo, donde $aa = a$ e, conseqüentemente, a é uma identidade de A , uma contradição. Portanto, $|A| \neq 1$. Por outras palavras, se A não tem identidade, então $S(A^1, A)$ é um subsemigrupo próprio não regular de $T(A^1)$.

Assim, o mergulho apresentado por Howie mergulha A num semigrupo regular, ao passo que este mergulho o faz num semigrupo não regular.

4.2 Relações de Green

Na secção anterior, vimos que $S(X, Y)$ quase nunca é subsemigrupo regular de $T(X)$ (ver Lema 6). Desta forma, as relações de Green $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ em $S(X, Y)$ não herdam as caracterizações de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ em $T(X)$.

Começemos pela caracterização da relação $\mathcal{L}$ em $S(X, Y)$. Recordemos que, dados $\alpha, \beta \in T(X)$, $X\alpha \subseteq X\beta$ se e só se existe γ em $T(X)$ tal que $\alpha = \gamma\beta$.

Lema 7. *Sejam $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Então, $\alpha = \gamma\beta$, para algum $\gamma \in S(X, Y)$, se e só se $X\alpha \subseteq X\beta$ e $Y\alpha \subseteq Y\beta$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só se $X\alpha = X\beta$ e $Y\alpha = Y\beta$.*

Demonstração. Supondo que existe $\gamma \in S(X, Y)$ tal que $\alpha = \gamma\beta$, então $X\alpha = X(\gamma\beta) = (X\gamma)\beta \subseteq X\beta$. Analogamente, $Y\alpha \subseteq Y\beta$.

Reciprocamente, suponhamos que $X\alpha \subseteq X\beta$ e $Y\alpha \subseteq Y\beta$. Notemos que $Y(\alpha|_Y) \subseteq Y(\beta|_Y)$, onde $\alpha|_Y, \beta|_Y \in T(Y)$. Portanto, da observação anterior segue que $\alpha|_Y = \delta\beta|_Y$, para algum $\delta \in T(Y)$.

Para todo $x \notin Y$, existe $x' \in X$ tal que $x\alpha = x'\beta$, já que $X\alpha \subseteq X\beta$. Logo, para cada $x \notin Y$, fixa-se $x' \in X$. Estenda-se $\delta \in T(Y)$ para $\gamma \in T(X)$ por:

$$x\gamma = \begin{cases} x\delta & \text{se } x \in Y \\ x' & \text{se } x \notin Y \end{cases}$$

É claro que $\gamma \in S(X, Y)$, pois $Y\gamma = Y\delta$ e $\delta \in T(Y)$. Mais, dado $x \in X$,

$$(x\gamma)\beta = \begin{cases} x\delta\beta & \text{se } x \in Y \\ x'\beta & \text{se } x \notin Y \end{cases} = \begin{cases} x\delta\beta|_Y & \text{se } x \in Y \\ x\alpha & \text{se } x \notin Y \end{cases} = \begin{cases} x\alpha|_Y & \text{se } x \in Y \\ x\alpha & \text{se } x \notin Y \end{cases} = x\alpha.$$

Logo, $\alpha = \gamma\beta$.

Sabemos que, dados $\alpha, \beta \in S(X, Y)$, $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só se existem $\gamma, \mu \in S(X, Y)$ tais que $\alpha = \gamma\beta$ e $\beta = \mu\alpha$. Ora, acabámos de ver que $\alpha = \gamma\beta$ para algum $\gamma \in S(X, Y)$ se e só se $X\alpha \subseteq X\beta$ e $Y\alpha \subseteq Y\beta$. Logo, $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só $X\alpha \subseteq X\beta$ e $Y\alpha \subseteq Y\beta$ e $X\beta \subseteq X\alpha$ e $Y\beta \subseteq Y\alpha$. Ou seja, $\alpha \mathcal{L} \beta$ em $S(X, Y)$ se e só $X\alpha = X\beta$ e $Y\alpha = Y\beta$. $\square$

Na descrição da relação $\mathcal{R}$, auxiliar-nos-emos, tal como é habitual, de partições. Para o efeito, dado $\alpha \in S(X, Y)$, consideramos a partição $\pi_\alpha = \{x\alpha^{-1} : x \in X\alpha\}$ de X , e um seu subconjunto, relacionado com Y , a saber: $\pi_\alpha(Y) = \{y\alpha^{-1} : y \in X\alpha \cap Y\}$.

Usaremos, ainda, o conceito de refinamento de uma família de classes de equivalência. Dados $\alpha, \beta \in S(X, Y)$, $\mathcal{A} \subseteq \pi_\alpha$ e $\mathcal{B} \subseteq \pi_\beta$, dizemos que $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{B}$ se, para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$.

Lema 8. *Sejam $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Então, $\alpha = \beta\gamma$, para algum $\gamma \in S(X, Y)$, se e só se π_β refina π_α e $\pi_\beta(Y)$ refina $\pi_\alpha(Y)$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\pi_\alpha = \pi_\beta$ e $\pi_\alpha(Y) = \pi_\beta(Y)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = \beta\gamma$, para algum $\gamma \in S(X, Y)$. Pretendemos mostrar que π_β refina π_α , ou seja, para cada $A \in \pi_\beta$, existe $B \in \pi_\alpha$ tal que $A \subseteq B$. Tomemos, então, $A \in \pi_\beta$. Por definição de π_β , existe $x \in X\beta$ tal que $A = x\beta^{-1}$. Para cada $a \in A$, temos $a\beta = x$. Logo, $x\gamma = (a\beta)\gamma = a\alpha$, qualquer que seja $a \in A$. Podemos, então, concluir que, para todo $a \in A$, se tem $a \in (x\gamma)\alpha^{-1}$. Como $B = (x\gamma)\alpha^{-1} \in \pi_\alpha$, segue que existe $B \in \pi_\alpha$ tal que $A \subseteq B$. Assim, π_β refina π_α .

Vejam agora que $\pi_\beta(Y)$ refina $\pi_\alpha(Y)$. Para isso, tomemos $y \in X\beta \cap Y$ e consideremos $A = y\beta^{-1}$. Como $y \in Y$ e $\gamma \in S(X, Y)$, sabemos que $y\gamma \in Y$. Para todo $a \in A$, temos $a\beta = y$. Assim, $a\alpha = a(\beta\gamma) = (a\beta)\gamma = y\gamma$ e, portanto, $a \in (y\gamma)\alpha^{-1}$. Mas $y\gamma \in X\alpha$ pois $y\gamma = a\alpha$, com $a \in X$, pelo que $y\gamma \in X\alpha \cap Y$ e $(y\gamma)\alpha^{-1} \in \pi_\alpha(Y)$. Se tomarmos $B = (y\gamma)\alpha^{-1}$, temos que $A \subseteq B$. Por outras palavras, $\pi_\beta(Y)$ refina $\pi_\alpha(Y)$.

Reciprocamente, admitamos que π_β refina π_α e $\pi_\beta(Y)$ refina $\pi_\alpha(Y)$. Ora, para cada $x \in X\beta$, existe $z \in X$ tal que $x = z\beta$. Definamos γ em $T(X)$ tal que

$$x\gamma = \begin{cases} z\alpha & \text{se } x \in X\beta \\ x\beta & \text{se } x \in X \setminus X\beta \end{cases}$$

Notemos que γ está bem definida, já que π_β refina π_α . De facto, se $x \in X\beta$ é tal que $x = z_1\beta = z_2\beta$, então $z_1, z_2 \in x\beta^{-1}$. Como $x\beta^{-1} \in \pi_\beta$ e π_β refina π_α , sabemos que existe $B \in \pi_\alpha$ tal que $x\beta^{-1} \subseteq B$. Portanto, $z_1, z_2 \in B$. Mas $B \in \pi_\alpha$, pelo que existe $u \in X\alpha$ tal que $B = u\alpha^{-1}$. Assim, $z_1\alpha = u = z_2\alpha$, ou seja, γ está bem definida em $X\beta$. Como β está bem definida, γ também está bem definida em $X \setminus X\beta$.

Vejam que $\gamma \in S(X, Y)$. Para cada $y \in Y$, temos $y \in X \setminus X\beta$ ou $y \in X\beta \cap Y$. Se $y \in X \setminus X\beta$, então $y\gamma = y\beta \in Y$, pois $\beta \in S(X, Y)$. Por outro lado, se $y \in X\beta \cap Y$, então existe $x \in X$ tal que $x\beta = y$. Como $\pi_\beta(Y)$ refina $\pi_\alpha(Y)$, temos que $x \in y\beta^{-1} \subseteq y'\alpha^{-1}$, para algum $y' \in X\alpha \cap Y$. Portanto, $y\gamma = x\beta\gamma = x\alpha = y' \in Y$. Logo, $Y\gamma \subseteq Y$ e $\gamma \in S(X, Y)$. Para além disso, por definição de γ , temos $x(\beta\gamma) = (x\beta)\gamma = x\alpha$, para todo $x \in X$, uma vez que $x\beta \in X\beta$. Ou seja, $\gamma \in S(X, Y)$ é tal que $\alpha = \beta\gamma$.

Falta observar que, se π_β refina π_α e, por outro lado, π_α refina π_β , então $\pi_\beta = \pi_\alpha$. Na verdade, dado $A \in \pi_\beta$, existe $B \in \pi_\alpha$ tal que $A \subseteq B$. Mas, como $B \in \pi_\alpha$, sabemos que existe $C \in \pi_\beta$ tal que $B \subseteq C$. Portanto, $A \subseteq C$. No entanto, A e C são classes de equivalência, pelo que $A = C$. Assim, podemos concluir que $A = B$. Ou seja, todo o elemento de π_β está em π_α . De modo análogo, concluímos que todo o elemento de π_α está em π_β , donde segue que $\pi_\beta = \pi_\alpha$.

Usando um argumento análogo, concluímos que, se $\pi_\beta(Y)$ refina $\pi_\alpha(Y)$ e $\pi_\alpha(Y)$ refina $\pi_\beta(Y)$, então $\pi_\beta(Y) = \pi_\alpha(Y)$. Desta forma, é imediato que, dados $\alpha, \beta \in S(X, Y)$, se tem $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\pi_\alpha = \pi_\beta$ e $\pi_\alpha(Y) = \pi_\beta(Y)$. $\square$

É sabido que, em $T(X)$, cada $\mathcal{H}$ -classe que é um grupo é um grupo isomorfo a um grupo $G(A)$ de permutações de A , para algum $A \subseteq X$. Em $S(X, Y)$, temos um resultado análogo. Iremos ver que toda a $\mathcal{H}$ -classe que é um grupo é um grupo isomorfo a

$$G(A, B) = \{\rho \in G(A) : \rho|_B \in G(B)\},$$

para certos subconjuntos A e B de X e de Y , respetivamente, tais que $B \subseteq A$.

Teorema 17. *Seja ε um idempotente de $S(X, Y)$. Então o grupo H_ε é isomorfo a $G(A, B)$, para certos subconjuntos A e B de X e de Y , respetivamente, tais que $B \subseteq A$ e A é um conjunto de representantes de π_ε .*

Demonstração. Como ε é um idempotente, podemos escrever

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} C_i & D_j \\ c_i & d_j \end{pmatrix},$$

com $c_i \in C_i \cap Y$ e $d_j \in D_j \subseteq X \setminus Y$. Temos $\pi_\varepsilon = \{C_i : i \in I\} \dot{\cup} \{D_j : j \in J\}$ e $\pi_\varepsilon(Y) = \{C_i : i \in I\}$. Sejam $B = \{c_i : i \in I\}$ e $A = \{c_i : i \in I\} \dot{\cup} \{d_j : j \in J\}$. Então, $B \subseteq Y$ e $A \subseteq X$. Mais, como $c_i \in C_i$ e $d_j \in D_j$, para cada i e cada j , temos que A é um conjunto de representantes para a partição π_ε .

Dado $\alpha \in S(X, Y)$, pelos Lemas 7 e 8, $\alpha \mathcal{H} \varepsilon$ se e só se $X\alpha = X\varepsilon$, $Y\alpha = Y\varepsilon$, $\pi_\alpha = \pi_\varepsilon$ e $\pi_\alpha(Y) = \pi_\varepsilon(Y)$. Assim, existem $\sigma \in G(B)$ e $\delta \in G(A \setminus B)$ tais que

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_i & D_j \\ c_i\sigma & d_j\delta \end{pmatrix}.$$

Se considerarmos $\rho = \sigma \cup \delta$, então ρ é uma permutação de A e, uma vez que $\rho|_B = \sigma$, temos que $\rho \in G(A, B)$. Mais,

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_i & D_j \\ c_i\rho & d_j\rho \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$H_\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} C_i & D_j \\ c_i\rho & d_j\rho \end{pmatrix} : \rho \in G(A, B) \right\}$$

e H_ε é isomorfo a $G(A, B)$, onde $G(A, B)$ é subgrupo do grupo de permutações $G(A)$. $\square$

Depois de caracterizadas as relações $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{H}$, segue a relação $\mathcal{D}$. Clifford e Preston provaram que, em $T(X)$, $\alpha \mathcal{D} \beta$ se e só se $|X\alpha| = |X\beta|$. Em $S(X, Y)$, temos a necessidade de mais restrições, seguindo desta forma o próximo teorema.

Teorema 18. *Sejam $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Então $\alpha \mathcal{D} \beta$ se e só se $|Y\alpha| = |Y\beta|$, $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$ e $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$.*

Demonstração. Começemos por assumir que existe $\gamma \in S(X, Y)$ tal que $\alpha \mathcal{L} \gamma$ e $\gamma \mathcal{R} \beta$. Então, pelo Lema 8, temos $\pi_\gamma = \pi_\beta$ e $\pi_\gamma(Y) = \pi_\beta(Y)$. Logo, podemos escrever

$$\beta = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ a_i & b_j & c_k \end{pmatrix} \text{ e } \gamma = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ x_i & y_j & z_k \end{pmatrix},$$

onde $A_i \cap Y \neq \emptyset$, para cada i , $B_j, C_k \subseteq X \setminus Y$, para cada j e cada k , $\{a_i\} \dot{\cup} \{b_j\} \subseteq Y$, $\{x_i\} \dot{\cup} \{y_j\} \subseteq Y$ e, ainda, $\{c_k\}, \{z_k\} \subseteq X \setminus Y$. Pelo Lema 7, $X\alpha = X\gamma$ e $Y\alpha = Y\gamma$. Assim, podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} L_i & M_j & N_k \\ x_i & y_j & z_k \end{pmatrix},$$

com $L_i \cap Y \neq \emptyset$ e $M_j, N_k \subseteq X \setminus Y$. Desta forma, $|Y\alpha| = |I| = |Y\beta|$, $|X\alpha \setminus Y| = |K| = |X\beta \setminus Y|$ e $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |J| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$, como pretendido.

Reciprocamente, suponhamos que $|Y\alpha| = |Y\beta|$, $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$ e $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$. Então, podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ a_i & b_j & c_k \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} U_i & V_j & W_k \\ u_i & v_j & w_k \end{pmatrix},$$

onde $A_i \cap Y \neq \emptyset$, $U_i \cap Y \neq \emptyset$, $B_j, C_k, V_j, W_k \subseteq X \setminus Y$, $\{a_i\} \dot{\cup} \{b_j\} \subseteq Y$, $\{u_i\} \dot{\cup} \{v_j\} \subseteq Y$, $\{c_k\}, \{w_k\} \subseteq X \setminus Y$. Definamos $\mu \in T(X)$ por

$$\mu = \begin{pmatrix} U_i & V_j & W_k \\ a_i & b_j & c_k \end{pmatrix}.$$

Notemos que $Y\mu = \{a_i\} \subseteq Y$, pelo que $\mu \in S(X, Y)$. Mais, $Y\mu = \{a_i : i \in I\} = Y\alpha$ e $X\mu = \{a_i : i \in I\} \cup \{b_j : j \in J\} \cup \{c_k : k \in K\} = X\alpha$. Portanto, pelo Lema 7, $\alpha \mathcal{L} \mu$. É imediato concluir que $\pi_\mu = \pi_\beta$ e $\pi_\mu(Y) = \pi_\beta(Y)$. Assim, pelo Lema 8, $\mu \mathcal{R} \beta$. Desta forma, temos $\mu \in S(X, Y)$ tal que $\alpha \mathcal{L} \mu$ e $\mu \mathcal{R} \beta$, ou seja, $\alpha \mathcal{D} \beta$. $\square$

É claro que, seguindo a linha de ideias da secção anterior, surge a questão do que é que acontece quando X é um conjunto infinito e Y é um subconjunto finito e não vazio de X . Nas relações anteriores é fácil perceber que não há qualquer implicação com esta restrição. O mesmo já não acontece na relação $\mathcal{D}$. Atentemos o corolário que se segue, que tem o propósito de explorar essa mesma ideia.

Corolário 8. *Sejam $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Se Y é um subconjunto finito de X , então $\alpha \mathcal{D} \beta$ se e só se $|X\alpha| = |X\beta|$, $|Y\alpha| = |Y\beta|$ e $|X\alpha \cap Y| = |X\beta \cap Y|$.*

Demonstração. Suponhamos que Y é um subconjunto finito de X . Se $\alpha \mathcal{D} \beta$, então $|Y\alpha| = |Y\beta|$, $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$ e $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$, pelo Teorema 18. De $X\alpha \cap Y = Y\alpha \dot{\cup} [(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha]$, segue que $|X\alpha \cap Y| = |Y\alpha| + |(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha|$. Analogamente, $|X\beta \cap Y| = |Y\beta| + |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$. Logo,

$$|X\alpha \cap Y| = |Y\alpha| + |(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |Y\beta| + |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta| = |X\beta \cap Y|.$$

De modo análogo,

$$|X\alpha| = |X\alpha \cap Y| + |X\alpha \setminus Y| = |X\beta \cap Y| + |X\beta \setminus Y| = |X\beta|.$$

Reciprocamente, admitamos que $|X\alpha| = |X\beta|$, $|Y\alpha| = |Y\beta|$ e $|X\alpha \cap Y| = |X\beta \cap Y|$. Por hipótese, Y é finito, pelo que também os conjuntos $Y\alpha$, $Y\beta$, $X\alpha \cap Y$ e $X\beta \cap Y$ são finitos. Resta-nos ver que $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$ e $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$.

Como $X\alpha = (X\alpha \cap Y) \dot{\cup} (X\alpha \setminus Y)$, sabemos que $|X\alpha| = |X\alpha \cap Y| + |X\alpha \setminus Y|$. De modo semelhante, $|X\beta| = |X\beta \cap Y| + |X\beta \setminus Y|$. Logo, $|X\alpha \cap Y| + |X\alpha \setminus Y| = |X\beta \cap Y| + |X\beta \setminus Y|$. Temos, por hipótese, que $|X\alpha \cap Y| = |X\beta \cap Y|$ e vimos, ainda, que estes dois conjuntos são finitos. Portanto, podemos concluir que $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$.

Por último, observemos que $|X\alpha \cap Y| = |(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| + |Y\alpha|$ e, de modo análogo, $|X\beta \cap Y| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta| + |Y\beta|$, com $|Y\alpha| = |Y\beta|$ e $Y\alpha, Y\beta$ finitos. Portanto, $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$, como pretendíamos demonstrar. $\square$

Vejamos agora a caracterização da relação $\mathcal{J}$ em $S(X, Y)$.

Teorema 19. *Sejam $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Então $\alpha = \lambda\beta\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in S(X, Y)$, se e só se $|X\alpha| \leq |X\beta|$, $|Y\alpha| \leq |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{J} \beta$ se e só se $|X\alpha| = |X\beta|$, $|Y\alpha| = |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$.*

Demonstração. Assumamos que existem $\lambda, \mu \in S(X, Y)$ tais que $\alpha = \lambda\beta\mu$. Então, $|X\alpha| = |X\lambda\beta\mu| \leq |(X\lambda)\beta| \leq |X\beta|$. Analogamente, temos $|Y\alpha| = |Y\lambda\beta\mu| \leq |(Y\lambda)\beta| \leq |Y\beta|$. Por outro lado, $|X\alpha \setminus Y| = |(X\lambda\beta\mu) \setminus Y| \leq |X\beta\mu \setminus Y|$. Ora, $X\beta\mu \setminus Y = [(X\beta \setminus Y) \dot{\cup} (X\beta \cap Y)]\mu \setminus Y = [(X\beta \setminus Y)\mu \dot{\cup} (X\beta \cap Y)\mu] \setminus Y$. Mas $Y\mu \subseteq Y$, pelo que $(X\beta \cap Y)\mu \setminus Y = \emptyset$. Logo, $|X\beta\mu \setminus Y| = |(X\beta \setminus Y)\mu \setminus Y| \leq |(X\beta \setminus Y)\mu| \leq |X\beta \setminus Y|$. Portanto, $|X\alpha \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|$.

Reciprocamente, suponhamos que $|X\alpha| \leq |X\beta|$, $|Y\alpha| \leq |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|$. Escrevamos

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ a_i & b_j & c_k \end{pmatrix},$$

onde $A_i \cap Y \neq \emptyset$, $B_j, C_k \subseteq X \setminus Y$, $\{a_i\} \dot{\cup} \{b_j\} \subseteq Y$ e $\{c_k\} \subseteq X \setminus Y$. Por hipótese, podemos escrever

$$\beta = \begin{pmatrix} U_i & U_l & V_m & W_n & W_k \\ u_i & u_l & v_m & w_n & w_k \end{pmatrix},$$

onde $U_i \cap Y \neq \emptyset$, $U_l \cap Y \neq \emptyset$, $V_m, W_n, W_k \subseteq X \setminus Y$, $\{u_i\} \dot{\cup} \{u_l\} \dot{\cup} \{v_m\} \subseteq Y$, $\{w_n\} \dot{\cup} \{w_k\} \subseteq X \setminus Y$ e $|I| + |J| + |K| \leq |I| + |L| + |M| + |N| + |K|$.

São possíveis dois casos: $|J| \leq |L| + |M| + |N|$ e $|J| > |L| + |M| + |N|$.

Começemos por supôr que $|J| \leq |L| + |M| + |N|$. Então, podemos escrever $L \cup M \cup N$ como $P \dot{\cup} Q$, com $|P| = |J|$. Assim, podemos escrever $\{U_l\} \cup \{V_m\} \cup \{W_n\}$ como $\{S_p\} \cup \{S_q\}$ e reescrevemos β como

$$\beta = \begin{pmatrix} U_i & S_p & S_q & W_k \\ u_i & s_p & s_q & w_k \end{pmatrix}.$$

Como $|J| = |P|$, existe uma bijeção $\varphi : J \rightarrow P$. Seja

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ x_i & y_{j\varphi} & z_k \end{pmatrix},$$

onde $x_i \in U_i \cap Y$, $y_{j\varphi} \in S_{j\varphi}$ e $z_k \in W_k$. Temos, então, $\lambda \in S(X, Y)$. Escolha-se $i_0 \in I$ e seja $I' = I \setminus \{i_0\}$. Defina-se

$$\mu = \begin{pmatrix} u_{i'} & s_{j\varphi} & w_k & X \setminus \{u_{i'}, s_{j\varphi}, w_k\} \\ a_{i'} & b_j & c_k & a_{i_0} \end{pmatrix}.$$

Assim, $\mu \in S(X, Y)$ e

$$\lambda\beta\mu = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ x_i & y_{j\varphi} & z_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i & S_p & S_q & W_k \\ u_i & s_p & s_q & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i'} & s_{j\varphi} & w_k & X \setminus \{u_{i'}, s_{j\varphi}, w_k\} \\ a_{i'} & b_j & c_k & a_{i_0} \end{pmatrix} = \alpha.$$

Por último, suponhamos que $|J| > |L| + |M| + |N|$. É importante repararmos que, neste caso, $X\beta$ é infinito. Caso contrário, como $|I| + |J| + |K| = |X\alpha| = |X\beta| = |I| + |L| + |M| + |N| + |K|$, concluímos que $|J| = |L| + |M| + |N|$ e chegamos a uma contradição. Logo, $X\beta$ é infinito e temos um de dois casos: $|J| \leq |I|$ ou $|J| \leq |K|$, com $|J|$, $|I|$ e $|K|$ cardinais infinitos.

Se $|J| \leq |I|$, então escrevemos $I = P \dot{\cup} Q$, com $|P| = |I|$ e $|Q| = |J|$. Podemos escrever $\{U_i\}$ como $\{S_p\} \cup \{S_q\}$ e reescrevemos β como

$$\beta = \begin{pmatrix} S_p & S_q & U_l & V_m & W_n & W_k \\ s_p & s_q & u_l & v_m & w_n & w_k \end{pmatrix}.$$

Como $|I| = |P|$ e $|J| = |Q|$, existem bijeções $\varphi : I \rightarrow P$ e $\psi : J \rightarrow Q$. Definamos λ, μ em $T(X)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_i & B_j & C_k \\ x_{i\varphi} & y_{j\psi} & z_k \end{pmatrix} \text{ e } \mu = \begin{pmatrix} s_{i'\varphi} & s_{j\psi} & w_k & X \setminus \{s_{i'\varphi}, s_{j\psi}, w_k\} \\ a_{i'} & b_j & c_k & a_{i_0} \end{pmatrix},$$

onde $x_{i\varphi} \in S_{i\varphi} \cap Y$, $y_{j\psi} \in S_{j\psi}$, $z_k \in W_k$ e $I' = I \setminus \{i_0\}$, para algum $i_0 \in I$. Não é difícil de verificar que $\lambda, \mu \in S(X, Y)$ e $\lambda\beta\mu = \alpha$, como pretendido. O caso em que $|J| \leq |K|$ é análogo. $\square$

Tal como em $T(X, Y)$, nem sempre temos $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $S(X, Y)$. Atenhamos os exemplos, onde vemos um caso em que Y é infinito e outro em que Y é finito. Relembremos que, em qualquer semigrupo, temos $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$, pelo que pretendemos encontrar duas aplicações em $S(X, Y)$ que estejam $\mathcal{J}$ -relacionadas, mas não $\mathcal{D}$ -relacionadas.

Exemplo 4. Seja $X = \mathbb{N}$ e seja Y o conjunto dos números pares naturais. Consideremos as seguintes transformações $\alpha, \beta \in T(X)$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2n & X \setminus Y \\ 4n & 2 \end{pmatrix}.$$

É claro que as imagens de todos os números pares naturais, tanto por α como por β , são números pares e, portanto, $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Mais, $|X\alpha| = \aleph_0 = |X\beta|$, $|Y\alpha| = \aleph_0 = |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| = 0 = |X\beta \setminus Y|$, donde $\alpha \mathcal{J} \beta$, pelo Teorema 19. No entanto, $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = \aleph_0 \neq 1 = |(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$, pelo que $\alpha \not\mathcal{D} \beta$.

Exemplo 5. Tomemos, agora, $X = \mathbb{N}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Definamos α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{3, 4\} & n+4 \\ 3 & 1 & n+4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \{1, 2, 4\} & 3 & \{5, 6\} & n+6 \\ 1 & 2 & 3 & n+6 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil de constatar que $\alpha, \beta \in S(X, Y)$ e, como $|X\alpha| = \aleph_0 = |X\beta|$, $|Y\alpha| = 2 = |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| = \aleph_0 = |X\beta \setminus Y|$, temos, pelo Teorema 19, que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Porém, $|X\alpha \cap Y| = 2 \neq 3 = |X\beta \cap Y|$. Logo, $\alpha \not\mathcal{D} \beta$.

Torna-se, assim, natural questionar quais os casos em que $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. No Teorema que se segue encontramos uma condição necessária e suficiente para a igualdade das duas relações de equivalência.

Teorema 20. *A igualdade $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ é válida em $S(X, Y)$ se e só se X é um conjunto finito ou $X = Y$ ou $|Y| = 1$.*

Demonstração. Começemos por supor que X é finito. Então, $S(X, Y)$ é um semigrupo finito e, em particular, é periódico. Por [5], Proposição 2.1.4, podemos concluir que $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. Por outro lado, se $X = Y$, então $S(X, Y) = T(X)$ e, por [2], Teorema 2.9, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $T(X)$. Por último, se $|Y| = 1$, então $S(X, Y) = E$. Sejam $\alpha, \beta \in E$ tais que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Ora, pelo Teorema 19, $|X\alpha| = |X\beta|$, $|Y\alpha| = |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$. Portanto, pelo Corolário 8, falta-nos provar que $|X\alpha \cap Y| = |X\beta \cap Y|$. Ora, $|X\alpha \cap Y| = 1 = |X\beta \cap Y|$. Logo, $\alpha \mathcal{D} \beta$. Por outras palavras, vimos que $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Reciprocamente, suponhamos que X é infinito, $Y \subsetneq X$ e $|Y| \geq 2$. Assim, existem $a, b \in Y$ tais que $a \neq b$ e $c \in X \setminus Y$ e surgem dois casos: Y finito ou Y infinito.

Se Y é um subconjunto finito de X , então temos $|X \setminus Y| = |X|$ (pois X é infinito). Escrevamos $X \setminus Y = \{c\} \dot{\cup} \{x_i : i \in I\}$, com $|I| = |X|$, e definamos α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} Y & c & x_i \\ a & b & x_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} Y & c & x_i \\ a & c & x_i \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha, \beta \in S(X, Y)$ e, como $|X\alpha| = |X \setminus Y| = |X\beta|$, $|Y\alpha| = 1 = |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| = |X \setminus Y| = |X\beta \setminus Y|$, concluímos que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Porém, $|X\alpha \cap Y| = 2 \neq 1 = |X\beta \cap Y|$ e, pelo Corolário 8, $\alpha \not\mathcal{D} \beta$. Logo $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{J}$.

Por outro lado, se Y é um conjunto infinito, escrevamos $Y = \{a, b\} \dot{\cup} \{y_j : j \in J\}$ e definamos α, β em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} y_j & \{a, b\} & X \setminus Y \\ y_j & a & b \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_j & b & (X \setminus Y) \cup \{a\} \\ y_j & b & a \end{pmatrix}.$$

Uma vez mais, $\alpha, \beta \in S(X, Y)$ e $|X\alpha| = |Y| = |X\beta|$, $|Y\alpha| = |Y| = |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| = 0 = |X\beta \setminus Y|$. Assim, pelo Teorema 19, podemos concluir que $\alpha \mathcal{J} \beta$. No entanto, como $|(X\alpha \cap Y) \setminus Y\alpha| = 1 \neq 0 =$

$|(X\beta \cap Y) \setminus Y\beta|$, podemos concluir, pelo Teorema 18, que $\alpha \not\mathcal{D} \beta$. Portanto, $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{J}$. Vimos que, se X é infinito, $X \neq Y$ e $|Y| \neq 1$, então $\mathcal{D} \neq \mathcal{J}$, e o resultado segue por contrarrecíproco. $\square$

Uma consequência imediata e trivial do Teorema 20 é o corolário que se segue.

Corolário 9. *Se X é infinito e Y é finito, então $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $S(X, Y)$ se e só se $|Y| = 1$.*

4.3 Ideais

Nesta secção, dedicamo-nos ao estudo dos ideais de $S(X, Y)$. Para a descrição destes, necessitamos de conceitos e resultados sobre cardinais. Em particular, consideramos o sucessor k' de um cardinal k , definido por $k' = \min\{r : r > k\}$. É importante reparar que k' existe sempre, já que os cardinais são bem ordenados. Mais, quando k é finito, temos $k' = k + 1$.

Em 1952, Malcev mostrou em [7] que, dado um qualquer conjunto X , os ideais de $T(X)$ são precisamente os conjuntos:

$$T_r = \{\alpha \in T(X) : |X\alpha| < r\},$$

onde $2 \leq r \leq |X|'$. Na descrição dos ideais de $S(X, Y)$, recorreremos, naturalmente, a mais cardinais. Assim, sejam $|X| = a$, $|Y| = b$ e $|X \setminus Y| = c$. Para todos os cardinais r, s e t , tais que $2 \leq r \leq a'$, $2 \leq s \leq b'$ e $1 \leq t \leq c'$, definamos

$$S(r, s, t) = \{\alpha \in S(X, Y) : |X\alpha| < r, |Y\alpha| < s, |X\alpha \setminus Y| < t\}.$$

No caso extremo em que $r = a'$, $s = b'$ e $t = c'$, o conjunto $S(r, s, t)$ pode ser escrito de forma simplificada, já que $S(r, s, t) = S(X, Y)$. Basta notar que todo o elemento α de $S(X, Y)$ satisfaz $|X\alpha| \leq |X| = a < a'$, $|Y\alpha| \leq |Y| = b < b'$ e $|X\alpha \setminus Y| \leq |X \setminus Y| = c < c'$. Por outro lado, se $X = Y$, sabemos já que $S(X, Y) = T(X)$. Ora, $|X| = a = |Y|$ e $|X \setminus Y| = 0$, pelo que todo o conjunto $S(r, s, t)$ será igual a algum $S(k, k, 1) = \{\alpha \in T(X) : |X\alpha| < k\} = T_k$. De facto, se $X = Y$, então

$$\begin{aligned} S(r, s, t) &= \{\alpha \in S(X, Y) : |X\alpha| < r, |X\alpha| < s, |X\alpha \setminus X| < t\} \\ &= \{\alpha \in S(X, Y) : |X\alpha| < \min\{r, s\}, |\emptyset| < t\} \\ &= \{\alpha \in S(X, Y) : |X\alpha| < \min\{r, s\}, |\emptyset| < 1\} \\ &= S(k, k, 1), \end{aligned}$$

com $k = \min\{r, s\}$.

Consideremos, agora, o caso geral, com Y subconjunto não vazio de X , e vejamos que, para quaisquer cardinais r, s, t nas condições acima referidas, $S(r, s, t)$ é, efetivamente, um ideal de $S(X, Y)$.

Teorema 21. *O conjunto*

$$S(r, s, t) = \{\alpha \in S(X, Y) : |X\alpha| < r, |Y\alpha| < s, |X\alpha \setminus Y| < t\},$$

com $2 \leq r \leq |X|'$, $2 \leq s \leq |Y|'$ e $1 \leq t \leq |X \setminus Y|'$, é um ideal de $S(X, Y)$.

Demonstração. Sejam r, s, t tais que $2 \leq r \leq |X|'$, $2 \leq s \leq |Y|'$ e $1 \leq t \leq |X \setminus Y|'$. Dados $\alpha \in S(r, s, t)$ e $\lambda, \mu \in S(X, Y)$, sabemos que $|X\alpha| < r$, $|Y\alpha| < s$ e $|X\alpha \setminus Y| < t$. Logo, $|X(\lambda\alpha\mu)| \leq |(X\lambda)\alpha| \leq |X\alpha| < r$, $|Y(\lambda\alpha\mu)| \leq |(Y\lambda)\alpha| \leq |Y\alpha| < s$ e $|X(\lambda\alpha\mu) \setminus Y| \leq |(X\lambda)\alpha \setminus Y| \leq |X\alpha \setminus Y| < t$. Portanto, $\lambda\alpha\mu \in S(r, s, t)$ e, consequentemente, $S(r, s, t)$ é ideal de $S(X, Y)$. $\square$

É fácil verificar que, se $r \leq u$, $s \leq v$ e $t \leq w$, então $S(r, s, t) \subseteq S(u, v, w)$, pelo que poderíamos pensar que o conjunto dos ideais de $S(X, Y)$ forma uma cadeia. No entanto, no exemplo que se segue, vemos que há ideais de $S(X, Y)$ que não são da forma $S(r, s, t)$ e que, na verdade, a ordem de inclusão não é total no conjunto dos ideais.

Exemplo 6. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{1, 2\}$. Temos $|X| = 4$, $|Y| = 2$ e $|X \setminus Y| = 2$, pelo que $S(3, 3, 1)$ e $S(4, 2, 2)$ são ideais de $S(X, Y)$. Como a união de dois ideais é ainda um ideal, segue que $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2)$ é ideal de $S(X, Y)$.

Suponhamos que $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2) = S(\ell, m, n)$, para ℓ, m, n tais que $2 \leq \ell \leq 5$, $2 \leq m \leq 3$ e $1 \leq n \leq 3$. Se $\ell < 4$ ou $n < 2$, então

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

é tal que $\alpha \in S(4, 2, 2) \setminus S(\ell, m, n)$. De facto, $|X\alpha| = 3$ e $|X\alpha \setminus Y| = 1$, pelo que $|X\alpha| \geq \ell$ ou $|X\alpha \setminus Y| \geq n$. Por outro lado, se $m < 3$, então

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \{2, 3, 4\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é um elemento de $S(3, 3, 1)$ que não pertence a $S(\ell, m, n)$, uma vez que $|Y\beta| = 2 \geq m$. Admitamos que $\ell \geq 4$, $m \geq 3$ e $n \geq 2$. Então, sabemos que $S(4, 3, 2) \subseteq S(\ell, m, n)$. Consideremos

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \{3, 4\} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil verificar que $\delta \in S(4, 3, 2) \subseteq S(\ell, m, n)$ mas $\delta \notin S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2)$, pois $|X\delta \setminus Y| = 1 \not\leq 1$ e $|Y\delta| = 2 \not\leq 2$. Por outras palavras, vimos que $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2) \neq S(\ell, m, n)$, para quaisquer ℓ, m, n tais que $2 \leq \ell \leq 5$, $2 \leq m \leq 3$ e $1 \leq n \leq 3$. Mais, podemos concluir que $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2) \neq S(r, s, t)$ para quaisquer r, s, t tais que $r \geq 4$, $s \geq 3$ e $t \geq 2$, uma vez que $\delta \in S(r, s, t) \setminus (S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2))$.

Como, na verdade, $\alpha \in S(4, 2, 2) \setminus S(3, 3, 1)$ e $\beta \in S(3, 3, 1) \setminus S(4, 2, 2)$, estes dois ideais não estão relacionados pela relação de ordem de inclusão. Logo, concluímos que os ideais de $S(X, Y)$ não formam uma cadeia sob a inclusão.

Como já referimos, o Teorema 21 não descreve todos os ideais de $S(X, Y)$, quando $Y \subsetneq X$. De modo a concluir o estudo dos ideais de $S(X, Y)$, precisaremos de definir um novo conjunto para cada subconjunto não vazio de $S(X, Y)$. Seja, então, Z um subconjunto não vazio de $S(X, Y)$ e denotemos por $K(Z)$ o conjunto

$$K(Z) = \{\alpha \in S(X, Y) : |X\alpha| \leq |X\beta|, |Y\alpha| \leq |Y\beta| \text{ e } |X\alpha \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|, \text{ para algum } \beta \in Z\}.$$

Obviamente, $Z \subseteq K(Z)$ e, se $Z_1 \subseteq Z_2$, então $K(Z_1) \subseteq K(Z_2)$. Com estes conjuntos, conseguimos caracterizar todos os ideais de $S(X, Y)$.

Teorema 22. *Os ideais de $S(X, Y)$ são exatamente os conjuntos $K(Z)$ para todos os subconjuntos não vazios Z de $S(X, Y)$.*

Demonstração. Seja I um ideal de $S(X, Y)$. Iremos ver que $I = K(I)$. Se $\alpha \in K(I)$, então $|X\alpha| \leq |X\beta|$, $|Y\alpha| \leq |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|$, para algum $\beta \in I$. Pelo Teorema 19, temos $\alpha = \lambda\beta\mu$, para certos $\lambda, \mu \in S(X, Y)$. Ora, $\beta \in I$, e I é um ideal de $S(X, Y)$, donde segue que $\alpha = \lambda\beta\mu \in I$. Consequentemente, $K(I) \subseteq I$. Por definição de $K(I)$, temos $I \subseteq K(I)$. Assim, $I = K(I)$. Ou seja, tomamos um ideal I e vimos que ele é da forma $K(I)$.

Vejamos agora que, para todo o subconjunto não vazio Z de $S(X, Y)$, $K(Z)$ é ideal de $S(X, Y)$. Sejam $\alpha \in K(Z)$ e $\lambda, \mu \in S(X, Y)$. Para um certo $\beta \in Z$, temos $|X\alpha| \leq |X\beta|$, $|Y\alpha| \leq |Y\beta|$ e $|X\alpha \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|$. Pelo Teorema 19, $|X(\lambda\alpha\mu)| \leq |X\alpha|$, $|Y(\lambda\alpha\mu)| \leq |Y\alpha|$ e $|X(\lambda\alpha\mu) \setminus Y| \leq |X\alpha \setminus Y|$. Logo, $|X(\lambda\alpha\mu)| \leq |X\beta|$, $|Y(\lambda\alpha\mu)| \leq |Y\beta|$ e $|X(\lambda\alpha\mu) \setminus Y| \leq |X\beta \setminus Y|$, com $\beta \in Z$, pelo que $\lambda\alpha\mu \in K(Z)$. Assim, $K(Z)$ é ideal de $S(X, Y)$. $\square$

Pelo teorema anterior, se tomarmos $X = Y$, concluímos que os ideais de $S(X, X) = T(X)$ são precisamente os conjuntos $K(Z)$, onde Z é um subconjunto não vazio de $T(X)$. Vejamos que, de facto, esse é o resultado acima referido, obtido por Malcev em 1952 (ver [7]).

Corolário 10. *Os ideais de $T(X)$ são precisamente os conjuntos $T_r = \{\alpha \in T(X) : |X\alpha| < r\}$, onde $2 \leq r \leq |X|'$.*

Demonstração. Seja Z um subconjunto não vazio de $T(X)$. Consideremos o conjunto $A = \{s : s > |X\beta|, \text{ para todo } \beta \in Z\}$. Sabemos que $A \neq \emptyset$, já que $|X|' \in A$. Assim, podemos tomar o menor cardinal r de A . Dado $\alpha \in K(Z)$, existe $\beta \in Z$ tal que $|X\alpha| \leq |X\beta|$. Como $r \in A$ e $\beta \in Z$, sabemos que $|X\beta| < r$. Logo $|X\alpha| < r$ e, portanto, $\alpha \in T_r$. Assim, $K(Z) \subseteq T_r$.

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha \notin K(Z)$. Então, $|X\alpha| > |X\beta|$, para todo $\beta \in Z$. Portanto, $|X\alpha| \in A$ e, pela escolha de r , $|X\alpha| \geq r$ (pois r é o menor cardinal de A). Logo, $\alpha \notin T_r$. Vimos, por contrarrecíproco, que $T_r \subseteq K(Z)$ e, assim, $T_r = K(Z)$.

Pelo Teorema 22, os ideais de $T(X) = S(X, X)$ são exactamente os conjuntos $K(Z)$, com Z subconjunto não vazio de $T(X)$. Acabámos de ver que, para cada Z , existe um cardinal r tal que $K(Z) = T_r$. Pela escolha de r , temos $2 \leq r \leq |X|'$, pois $1 \leq |X\alpha| \leq |X|$ para todo $\alpha \in Z \subseteq T(X)$.

Por outro lado, para cada cardinal r tal que $2 \leq r \leq |X|'$, temos $T_r = K(T_r)$, onde T_r é um subconjunto não vazio de $T(X)$. $\square$

4.4 Elementos regulares

Na secção 4.1, caracterizamos os elementos regulares de $S(X, Y)$. Nesta secção, iremos estudar outros tipos de regularidades, procurando descrever elementos regulares à esquerda e à direita, elementos corregulares e elementos intrarregulares.

Recordemos que $\alpha \in S(X, Y)$ se diz regular à esquerda se existir $\beta \in S(X, Y)$ tal que $\alpha = \beta\alpha^2$. Dualmente, α é regular à direita se $\alpha = \alpha^2\beta$ para algum $\beta \in S(X, Y)$. Dizemos que α é completamente regular se $\alpha = \alpha\beta\alpha$ e $\alpha\beta = \beta\alpha$, para algum $\beta \in S(X, Y)$. Se existirem $\beta, \gamma \in S(X, Y)$ tais que $\alpha = \beta\alpha^2\gamma$, então dizemos que α é intrarregular.

Como $\alpha^2 = \alpha\alpha$, temos que α é regular à esquerda se e só se $\alpha \mathcal{L} \alpha^2$. Analogamente, α é regular à direita se e só se $\alpha \mathcal{R} \alpha^2$. Mais, como $\text{id}_X \in S(X, Y)$, temos $\alpha^2 = \alpha\alpha \text{id}_X$ e, portanto, α é intrarregular se e só se $\alpha \mathcal{J} \alpha^2$. Assim, as caracterizações de elementos regulares à esquerda e à direita e de elementos intrarregulares seguem trivialmente da definição da regularidade em questão e da caracterização das relações de Green (ver secção 4.2).

Teorema 23. *Seja $\alpha \in S(X, Y)$. Então,*

1. *α é regular à esquerda se e só se $X\alpha = X\alpha^2$ e $Y\alpha = Y\alpha^2$;*
2. *α é regular à direita se e só se $\pi_\alpha = \pi_{\alpha^2}$ e $\pi_\alpha(Y) = \pi_{\alpha^2}(Y)$;*
3. *α é intrarregular se e só se $|X\alpha| = |X\alpha^2|$, $|Y\alpha| = |Y\alpha^2|$ e $|X\alpha \setminus Y| = |X\alpha^2 \setminus Y|$.*

Em [1], os autores mostram que, dado $\alpha \in S(X, Y)$ tal que $X\alpha$ é finito, ou α satisfaz estes três tipos de regularidade ou não satisfaz nenhum.

Teorema 24. *Seja $\alpha \in S(X, Y)$. Se $X\alpha$ é finito, então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *α é regular à esquerda;*
2. *α é regular à direita;*
3. *α é intrarregular.*

É claro que, se X é um conjunto finito, então todos os elementos de $S(X, Y)$ satisfazem a condição do teorema anterior. Assim, os conceitos de regularidade à esquerda, regularidade à direita e intrarregularidade coincidem em $S(X, Y)$, para X finito. No resultado seguinte, indica-se o número de elementos de $S(X, Y)$ que são regulares à esquerda (ou equivalentemente, regulares à direita ou intrarregulares), para X finito. A demonstração deste teorema e do teorema anterior podem ser encontradas em [1].

Teorema 25. *O número de elementos regulares à esquerda em $S(X, Y)$ é*

$$\sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} k! k^{r-k} \binom{n-r}{m} m! (k+m)^{n-r-m},$$

onde $|X| = n$ e $|Y| = r$.

Pretendemos, de seguida, descrever os elementos corregulares de $S(X, Y)$. Mas comecemos por observar que, se $|X| = 1$, então $S(X, Y) = T(X)$ contém exatamente um elemento e, portanto, é um semigrupo regular, corregular, regular à direita, regular à esquerda, completamente regular e intrarregular. Mais, temos um resultado análogo quando $|X| = 2$, como podemos verificar no lema que se segue.

Lema 9. *Se $|X| = 2$, então $S(X, Y)$ é regular, corregular, regular à esquerda, regular à direita, completamente regular e intrarregular.*

Demonstração. Suponhamos que $|X| = 2$. Como $\emptyset \neq Y \subseteq X$, temos dois possíveis casos: $|Y| = 1$ ou $|Y| = 2$. Se $|Y| = 1$, tomemos $X = \{a, b\}$ e $Y = \{a\}$. Então,

$$S(X, Y) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix} \right\}.$$

É fácil observar que os dois elementos de $S(X, Y)$ são idempotentes, pelo que, trivialmente, cada elemento é regular, corregular, regular à esquerda, regular à direita, completamente regular e intrarregular.

Por outro lado, se $|Y| = 2$, então $X = Y$, $S(X, Y) = T(X)$ e

$$S(X, Y) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \right\}.$$

Ora, as primeira, terceira e quarta aplicações indicadas são idempotentes e, consequentemente, regulares. Denotemos por α_2 a segunda aplicação indicada no conjunto acima. Não é difícil verificar que $\alpha_2^3 = \alpha_2$. Logo, α_2 é corregular e, por isso, todos os elementos de $S(X, Y)$ são regulares, corregulares, regulares à esquerda, regulares à direita, completamente regulares e intrarregulares, isto é, $S(X, Y)$ é um semigrupo regular, corregular, regular à esquerda, regular à direita, completamente regular e intrarregular, tal como pretendíamos mostrar. $\square$

Na secção 4.1, vimos que $S(X, Y)$ não é, em geral, um semigrupo regular. De modo análogo, $S(X, Y)$ não é, em geral, corregular. Não é difícil verificar que todo o elemento idempotente de $S(X, Y)$ é corregular.

Em particular, as transformações constantes em $S(X, Y)$, da forma X_a com $a \in Y$, são elementos corregulares. Assim, o conjunto dos elementos corregulares de $S(X, Y)$ nunca é vazio. Porém, a maior parte das vezes, é um subconjunto próprio de $S(X, Y)$. Atentemos o próximo exemplo.

Exemplo 7. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$. Consideremos

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

em $T(X)$. Temos $Y\alpha = \{1, 2\} \subseteq Y$, pelo que $\alpha \in S(X, Y)$. Ora,

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \alpha,$$

pelo que α não é corregular.

O próximo resultado dá-nos condições necessárias e suficientes para que um elemento de $S(X, Y)$ seja corregular.

Teorema 26. Seja $\alpha \in S(X, Y)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. α é corregular.
2. $x\alpha \in x\alpha^{-1}$, para todo $x \in X\alpha$.
3. $\alpha^2|_{X\alpha} = \text{id}_{X\alpha}$.

Demonstração. Suponhamos que α é corregular, isto é, $\alpha^3 = \alpha$. Dado $x \in X\alpha$, existe $z \in X$ tal que $x = z\alpha$. Assim, $x = z\alpha = z\alpha^3$. Pela associatividade da composição de aplicações, $z\alpha^3 = (z\alpha)\alpha^2 = x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha$. Logo, $x = (x\alpha)\alpha$, pelo que $x\alpha \in x\alpha^{-1}$.

Admitamos, agora, que para todo $x \in X\alpha$, $x\alpha \in x\alpha^{-1}$. Então, para cada $x \in X\alpha$, temos

$$x\alpha^2|_{X\alpha} = x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x = x \text{id}_{X\alpha}$$

e, portanto, $\alpha^2|_{X\alpha} = \text{id}_{X\alpha}$.

Por último, suponhamos que $\alpha^2|_{X\alpha} = \text{id}_{X\alpha}$ e tomemos $x \in X$. Temos

$$x\alpha^3 = (x\alpha)\alpha^2 = (x\alpha)\alpha^2|_{X\alpha} = (x\alpha) \text{id}_{X\alpha} = x\alpha.$$

Logo, $\alpha^3 = \alpha$, pelo que α é corregular. □

Iremos ver que, quando $|X| > 2$, o conjunto dos elementos corregulares de $S(X, Y)$ não é, efetivamente, todo o conjunto $S(X, Y)$. No exemplo anterior, consideramos um conjunto X finito. No exemplo que se segue, consideramos um conjunto X infinito e verificamos a existência de um elemento corregular não idempotente e um elemento não corregular de $S(X, Y)$.

Exemplo 8. Tomemos $X = \mathbb{N}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Consideremos $\alpha, \beta \in T(X)$ definidas por

$$\alpha = \left(\begin{array}{cccccc} \{1, 2\} & 3 & \{4, 5\} & \{6, 7\} & 2n & 2n+1 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 2n+1 & 2n \end{array} \right)_{n \geq 4},$$

$$\beta = \left(\begin{array}{cccc} \{1, 2\} & \{3, 4, 5\} & \{6, 7\} & n \\ 3 & 1 & 6 & n+1 \end{array} \right)_{n \geq 8}.$$

Como $Y\alpha = \{1, 3, 4, 6\} \subseteq Y$ e $Y\beta = \{1, 3, 6\} \subseteq Y$, temos $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Mais,

$$\alpha^2 = \left(\begin{array}{cccccc} \{1, 2\} & 3 & \{4, 5\} & \{6, 7\} & 2n & 2n+1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2n & 2n+1 \end{array} \right)_{n \geq 4},$$

pelo que $\alpha^2|_{X\alpha} = \text{id}_{X\alpha}$ e, pelo Teorema 26, α é corregular. Por outro lado,

$$\beta^2 = \left(\begin{array}{cccc} \{1, 2\} & \{3, 4, 5\} & \{6, 7\} & n \\ 1 & 3 & 6 & n+2 \end{array} \right)_{n \geq 8}.$$

Temos que $9 \in X\beta$, mas $9\beta^2 = 11 \neq 9 = 9\text{id}_{X\beta}$. Logo, $\beta^2|_{X\beta} \neq \text{id}_{X\beta}$ e, pelo Teorema 26, β não é corregular.

Depois de caracterizarmos os elementos corregulares de $S(X, Y)$ no Teorema 26, surge a questão da existência de condições necessárias e suficientes que nos permitam facilmente verificar se este semigrupo é corregular. Temos, de facto, o Teorema que se segue.

Teorema 27. O semigrupo $S(X, Y)$ é corregular se e só se $|X| \leq 2$.

Demonstração. Pelo Lema 9 e a observação feita antes desse resultado, se $|X| \leq 2$, então $S(X, Y)$ é um semigrupo corregular. Suponhamos, por contrarrecíproco, que $|X| \geq 3$ e consideremos os dois casos que se seguem.

Se $|Y| = 1$, então $|X \setminus Y| \geq 2$. Escrevamos $Y = \{y\}$ e tomemos $z \in X \setminus Y$. Como $|X \setminus Y| \geq 2$, temos $X \setminus \{y, z\} \neq \emptyset$. Definamos α em $S(X, Y)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{y, z\} & X \setminus \{y, z\} \\ y & z \end{pmatrix}.$$

É claro que $z \in X\alpha$ e $z\alpha = y \notin X \setminus \{y, z\} = z\alpha^{-1}$. Logo, pelo Teorema 26, α não é corregular.

Se $|Y| > 1$, então podemos considerar $a, b \in Y$ tais que $a \neq b$. É claro que $X \setminus \{a, b\} \neq \emptyset$, uma vez que $|X| \geq 3$.

Definamos α em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{a, b\} & X \setminus \{a, b\} \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Obviamente, por $X\alpha = \{a, b\} \subseteq Y$, $\alpha \in S(X, Y)$. Temos, ainda, que $b \in X\alpha$ e $b\alpha = a \notin X \setminus \{a, b\} = b\alpha^{-1}$. Logo, pelo Teorema 26, α não é corregular. Concluimos, assim, que quando $|X| \geq 3$, $S(X, Y)$ não é corregular, tal como pretendido. $\square$

Denotamos o conjunto dos elementos corregulares de $S(X, Y)$ por $CoReg(S(X, Y))$. Pelo Teorema 26,

$$\begin{aligned} CoReg(S(X, Y)) &= \{\alpha \in S(X, Y) : x\alpha \in x\alpha^{-1}, \text{ para todo } x \in X\alpha\} \\ &= \{\alpha \in S(X, Y) : \alpha^2|_{X\alpha} = id_{X\alpha}\}. \end{aligned}$$

Já observámos que, na maioria dos casos, $S(X, Y)$ não é um semigrupo corregular. Na verdade, em geral, $CoReg(S(X, Y))$ não é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Exemplo 9. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$. Consideremos $\alpha, \beta \in T(X)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2, 3\} & \{4, 5\} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{3, 4, 5\} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos $Y\alpha = \{1\} \subseteq Y$ e $Y\beta = \{2, 3\} \subseteq Y$. Logo, $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Facilmente se verifica que α é idempotente e, portanto, é corregular. Por outro lado,

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{3, 4, 5\} \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

pelo que $\beta^2|_{X\beta} = id_{X\beta}$, ou seja, β é corregular. No entanto,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} \{1, 2, 3\} & \{4, 5\} \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{3, 4, 5\} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1, 2, 3\} & \{4, 5\} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora, $2(\alpha\beta) = 3 \notin \{4, 5\} = 2(\alpha\beta)^{-1}$. Portanto, pelo Teorema 26, $\alpha\beta$ não é correregular e $\text{CoReg}(S(X, Y))$ não é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Na verdade, o que o exemplo acima ilustra pode ser generalizado da seguinte forma.

Lema 10. Se $|X| \geq 3$, então $\text{CoReg}(S(X, Y))$ não é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Demonstração. Seja X tal que $|X| \geq 3$. Começemos por ver o caso em que $X = Y$. Tomemos $x, y, z \in X$, todos distintos, e definamos $\alpha, \beta \in T(X) = S(X, Y)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{x, y\} & X \setminus \{x, y\} \\ y & z \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y & X \setminus \{y\} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que α e β são ambos idempotentes e, portanto, são correculares. Porém,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} \{x, y\} & X \setminus \{x, y\} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Ora, $x \in X\alpha\beta$ e $x(\alpha\beta) = y \notin X \setminus \{x, y\} = x(\alpha\beta)^{-1}$. Logo, $\alpha\beta$ não é correregular, pelo que $\text{CoReg}(S(X, Y))$ não é semigrupo, neste caso.

Vejamos, agora, o caso em que $Y \subsetneq X$. Sejam $y \in Y$ e $z \in X \setminus Y$. Se $|Y| = 1$, então $Y = \{y\}$ e existe $x \in X \setminus \{y, z\}$. Tomando α e β como no caso anterior, temos $Y\alpha = \{y\} \subseteq Y$ e $Y\beta = \{y\} \subseteq Y$, pelo que $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Assim, temos α, β elementos correculares de $S(X, Y)$ tais que $\alpha\beta$ não é correregular.

Para terminar, se $|Y| \geq 2$, existe $x \in Y \setminus \{y\}$. Sejam $\alpha, \beta \in T(X)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ y & z \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} Y \setminus \{x\} & (X \setminus Y) \cup \{x\} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Mais, α e β são idempotentes e, consequentemente, correculares. No entanto,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Como $x(\alpha\beta) = y \notin X \setminus Y = x(\alpha\beta)^{-1}$, concluímos que $\alpha\beta \notin \text{CoReg}(S(X, Y))$. Desta forma, concluímos que $\text{CoReg}(S(X, Y))$ não é subsemigrupo de $S(X, Y)$ para $|X| \geq 3$. $\square$

O próximo teorema é um corolário imediato do Teorema 27 e do Lema 10.

Teorema 28. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $|X| \leq 2$.
2. $S(X, Y)$ é corregular.
3. $CoReg(S(X, Y))$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

De seguida, alargaremos este estudo aos outros tipos de regularidade em $S(X, Y)$, isto é, iremos determinar quando é que $S(X, Y)$ é um semigrupo regular à esquerda, regular à direita, completamente regular e intrarregular. Denotamos o conjunto de todos os elementos regulares à esquerda (respetivamente: regulares à direita, completamente regulares, intrarregulares) de $S(X, Y)$ por $LReg(S(X, Y))$ (respetivamente: $RReg(S(X, Y))$, $CReg(S(X, Y))$, $IReg(S(X, Y))$).

Teorema 29. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $|X| \leq 2$.
2. $S(X, Y)$ é regular à esquerda.
3. $LReg(S(X, Y))$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Demonstração. Se $|X| \leq 2$, pelo Lema 9 e pelo que foi observado imediatamente antes deste lema, $S(X, Y)$ é regular à esquerda. Por outro lado, se $S(X, Y)$ é regular à esquerda, então todos os elementos de $S(X, Y)$ são regulares à esquerda, pelo que $S(X, Y) = LReg(S(X, Y))$. É claro que $S(X, Y)$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Suponhamos, agora, que $|X| \geq 3$. Queremos mostrar que $LReg(S(X, Y))$ não é fechado para a composição de aplicações. Se $X = Y$, então tomamos $x, y, z \in X$, todos distintos, e definimos α, β em $S(X, Y)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{x, y\} & X \setminus \{x, y\} \\ y & z \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y & X \setminus \{y\} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Temos α e β idempotentes, pelo que ambos são regulares à esquerda, mas

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} \{x, y\} & X \setminus \{x, y\} \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}.$$

Como $X(\alpha\beta) \neq X(\alpha\beta)^2$, concluímos, pelo Teorema 23, que $\alpha\beta$ não é regular à esquerda.

Admitamos, agora, que $Y \subsetneq X$, e comecemos por supor que $|Y| = 1$. Sejam $Y = \{y\}$ e $x, z \in X \setminus \{y\}$, distintos. Tomando α e β definidas como no caso anterior, já sabemos que $\alpha, \beta \in LReg(S(X, Y))$ e $\alpha\beta \notin LReg(S(X, Y))$.

Por último, se $|Y| \geq 2$, tomemos $x, y \in Y$, distintos, e $z \in X \setminus Y$. Consideremos $\alpha, \beta \in T(X)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ y & z \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} Y \setminus \{x\} & (X \setminus Y) \cup \{x\} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha, \beta \in S(X, Y)$. Mais, α e β são idempotentes e, portanto, $\alpha, \beta \in LReg(S(X, Y))$. No entanto,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} Y & X \setminus Y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix},$$

donde segue que $X\alpha\beta \neq X(\alpha\beta)^2$ e $\alpha\beta \notin LReg(S(X, Y))$. Concluimos, assim, que se $LReg(S(X, Y))$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$, então $|X| \leq 2$. $\square$

Observemos que, nos diferentes casos em que $X = Y$ ou $(Y \subseteq X \text{ e } |Y| = 1)$ ou $(Y \subseteq X \text{ e } |Y| \geq 2)$, as aplicações α e β definidas na demonstração deste resultado, quando $|X| \geq 3$, são sempre idempotentes e, como tal, são elementos regulares à esquerda e à direita, completamente regulares e intrarregulares. Não é difícil verificar que, também em todos os casos, $\alpha\beta$ não é nem regular à direita, nem completamente regular ou intrarregular.

Desta forma, pelo Lema 9 e pela observação que o antecede, obtemos, de modo análogo à demonstração do Teorema 29, a demonstração dos três resultados que se seguem.

Teorema 30. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $|X| \leq 2$.
2. $S(X, Y)$ é regular à direita.
3. $RReg(S(X, Y))$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Teorema 31. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $|X| \leq 2$.

2. $S(X, Y)$ é completamente regular.
3. $CReg(S(X, Y))$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Teorema 32. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $|X| \leq 2$.
2. $S(X, Y)$ é intrarregular.
3. $IReg(S(X, Y))$ é subsemigrupo de $S(X, Y)$.

Uma consequência direta destes últimos teoremas é o corolário que se segue.

Corolário 11. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $|X| \leq 2$.
2. $S(X, Y)$ é corregular.
3. $S(X, Y)$ é regular à esquerda.
4. $S(X, Y)$ é regular à direita.
5. $S(X, Y)$ é completamente regular.
6. $S(X, Y)$ é intrarregular.

Todo o elemento corregular é regular à esquerda e à direita e, portanto, é completamente regular. No entanto, de um modo geral, nem todo o elemento completamente regular de $S(X, Y)$ é corregular.

Lema 11. *Se $|Y| \geq 3$ ou $|X \setminus Y| \geq 3$, então existe $\alpha \in CReg(S(X, Y))$ tal que $\alpha \notin CoReg(S(X, Y))$.*

Demonstração. Suponhamos, em primeiro lugar, que $|Y| \geq 3$. Sejam $a, b, c \in Y$, todos distintos, e escrevamos $X \setminus \{a, b, c\} = \{x_i : i \in I\}$. Definamos $\alpha \in T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & x_i \\ b & c & a & x_i \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha \in S(X, Y)$ e

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} a & b & c & x_i \\ c & a & b & x_i \end{pmatrix}.$$

Temos $X\alpha = X = X\alpha^2$ e $Y\alpha = Y = Y\alpha^2$, ou seja, $\alpha \in LReg(S(X, Y))$. Para além disso, $\pi_\alpha = \pi_{\alpha^2}$ e $\pi_\alpha(Y) = \pi_{\alpha^2}(Y)$, isto é, $\alpha \in RReg(S(X, Y))$. Logo, $\alpha \in CReg(S(X, Y))$. No entanto, $c\alpha = a \notin \{b\} = c\alpha^{-1}$ e, pelo Teorema 26, $\alpha \notin CoReg(S(X, Y))$.

Admitamos, agora, que $|X \setminus Y| \geq 3$. Sejam $a, b, c \in X \setminus Y$, distintos, e definamos α como no caso anterior. Então, α é um elemento de $S(X, Y)$ regular à esquerda e à direita, mas não é correregular. $\square$

Pelo Corolário 11, se $|X| \leq 2$, então os conjuntos $CoReg(S(X, Y))$, $LReg(S(X, Y))$, $RReg(S(X, Y))$, $CReg(S(X, Y))$ e $IReg(S(X, Y))$ são todos iguais. O próximo Teorema indica-nos que há mais casos em que isto acontece.

Teorema 33. Se $(|X|, |Y|) \in \{(3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, então

$$\begin{aligned} CoReg(S(X, Y)) &= LReg(S(X, Y)) = RReg(S(X, Y)) \\ &= CReg(S(X, Y)) = IReg(S(X, Y)). \end{aligned}$$

Demonstração. Sabemos que todo o idempotente é correregular e que todo o elemento correregular é regular à esquerda. Logo, para quaisquer X e Y ,

$$E(S(X, Y)) \subseteq CoReg(S(X, Y)) \subseteq LReg(S(X, Y)).$$

Começemos por supor que $|X| = 3$ e $|Y| = 1$, e escrevamos $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{a\}$. Então,

$$E(S(X, Y)) = \left\{ id_X, \begin{pmatrix} a & \{b, c\} \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \{b, c\} \\ a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & c \\ a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, c\} & b \\ a & b \end{pmatrix}, X_a \right\}.$$

Tomemos

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \in S(X, Y).$$

Como $\alpha^2|_{X\alpha} = id_{X\alpha}$, sabemos, pelo Teorema 26, que α é correregular. Logo, $E(S(X, Y)) \cup \{\alpha\} \subseteq CoReg(S(X, Y)) \subseteq LReg(S(X, Y))$.

Pelo Teorema 25, como $n = |X| = 3$ e $r = |Y| = 1$, vem que

$$|LReg(S(X, Y))| = \sum_{m=0}^2 \binom{2}{m} m!(m+1)^{2-m} = 7.$$

Ora, $|E(S(X, Y)) \cup \{\alpha\}| = 7 = |LReg(S(X, Y))|$, pelo que

$$CoReg(S(X, Y)) = LReg(S(X, Y)).$$

De seguida, assumamos que $|X| = 3$ e $|Y| = 2$, e escrevamos $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{a, b\}$. Então,

$$E(S(X, Y)) = \left\{ id_X, \begin{pmatrix} a & \{b, c\} \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & c \\ a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & c \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, c\} & b \\ a & b \end{pmatrix}, X_a, X_b \right\}.$$

Definamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S(X, Y)$ por

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \{a, c\} & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} a & \{b, c\} \\ b & a \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que $\alpha_i^2|_{X\alpha_i} = id_{X\alpha_i}$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Logo, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, a aplicação α_i pertence a $CoReg(S(X, Y))$. Assim,

$$E(S(X, Y)) \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subseteq CoReg(S(X, Y)) \subseteq LReg(S(X, Y)).$$

Uma vez mais, pelo Teorema 25, como $|X| = 3$ e $|Y| = 2$, sabemos que

$$|LReg(S(X, Y))| = \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^2 \binom{2}{k} k! k^{2-k} (m+k)^{1-m} = 10.$$

Como, $|E(S(X, Y)) \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}| = 10 = |LReg(S(X, Y))|$, temos que

$$CoReg(S(X, Y)) = LReg(S(X, Y)).$$

Admitamos, por último, que $|X| = 4$ e $|Y| = 2$. Sejam $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{a, b\}$. Ora,

$$\begin{aligned} E(S(X, Y)) = & \left\{ id_X, \begin{pmatrix} \{a, b\} & c & d \\ a & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & c & d \\ b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, c\} & b & d \\ a & b & d \end{pmatrix}, \right. \\ & \begin{pmatrix} \{a, d\} & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \{b, c\} & d \\ a & b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \{b, d\} & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & \{c, d\} \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & \{c, d\} \\ a & b & d \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} \{a, b\} & \{c, d\} \\ a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & \{c, d\} \\ a & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & \{c, d\} \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b\} & \{c, d\} \\ b & d \end{pmatrix}, \\ & \left. \begin{pmatrix} \{a, c\} & \{b, d\} \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, d\} & \{b, c\} \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b, c\} & d \\ a & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b, c\} & d \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, b, d\} & c \\ a & c \end{pmatrix}, \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \{a, b, d\} & c \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{a, c, d\} & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \{b, c, d\} \\ a & b \end{pmatrix}, X_a, X_b \right\}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, & \alpha_3 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}, \\ \alpha_4 &= \begin{pmatrix} \{a, b\} & c & d \\ a & d & c \end{pmatrix}, & \alpha_5 &= \begin{pmatrix} \{a, b\} & c & d \\ b & d & c \end{pmatrix}, & \alpha_6 &= \begin{pmatrix} \{a, c\} & b & d \\ b & a & d \end{pmatrix}, \\ \alpha_7 &= \begin{pmatrix} \{a, d\} & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, & \alpha_8 &= \begin{pmatrix} a & \{b, c\} & d \\ b & a & d \end{pmatrix}, & \alpha_9 &= \begin{pmatrix} a & \{b, d\} & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \\ \alpha_{10} &= \begin{pmatrix} a & b & \{c, d\} \\ b & a & c \end{pmatrix}, & \alpha_{11} &= \begin{pmatrix} a & b & \{c, d\} \\ b & a & d \end{pmatrix}, & \alpha_{12} &= \begin{pmatrix} \{a, c\} & \{b, d\} \\ b & d \end{pmatrix}, \\ \alpha_{13} &= \begin{pmatrix} \{a, d\} & \{b, c\} \\ b & a \end{pmatrix}, & \alpha_{14} &= \begin{pmatrix} \{a, c, d\} & b \\ b & a \end{pmatrix}, & \alpha_{15} &= \begin{pmatrix} a & \{b, c, d\} \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para todo $i \in \{1, \dots, 15\}$, $\alpha_i \in S(X, Y)$. Além disso, $\alpha_i^2|_{X\alpha_i} = \text{id}_{X\alpha_i}$, pelo que $\alpha_i \in \text{CoReg}(S(X, Y))$, para todo i . Assim,

$$E(S(X, Y)) \cup \{\alpha_i : i \in \{1, \dots, 15\}\} \subseteq \text{CoReg}(S(X, Y)) \subseteq \text{LReg}(S(X, Y)).$$

Para $|X| = 4$ e $|Y| = 2$, temos, pelo Teorema 25, que

$$|\text{LReg}(S(X, Y))| = \sum_{m=0}^2 \sum_{k=1}^2 \binom{2}{k} k! k^{2-k} \binom{2}{m} m! (m+k)^{2-m} = 38.$$

Assim, $|E(S(X, Y)) \cup \{\alpha_i : i \in \{1, \dots, 15\}\}| = 38 = |\text{LReg}(S(X, Y))|$ e, portanto,

$$\text{CoReg}(S(X, Y)) = \text{LReg}(S(X, Y)).$$

Como X é finito, segue, pelo Teorema 24, que

$$\text{LReg}(S(X, Y)) = \text{RReg}(S(X, Y)) = \text{IReg}(S(X, Y)).$$

Como $\text{CReg}(S(X, Y)) = \text{LReg}(S(X, Y)) \cap \text{RReg}(S(X, Y))$, concluímos que

$$\text{CReg}(S(X, Y)) = \text{LReg}(S(X, Y)) = \text{RReg}(S(X, Y)).$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} CoReg(S(X, Y)) &= LReg(S(X, Y)) = RReg(S(X, Y)) \\ &= CReg(S(X, Y)) = IReg(S(X, Y)), \end{aligned}$$

como pretendíamos. □

Do Lema 9, da observação imediatamente anterior a esse lema, do Lema 11 e do Teorema 33, segue o próximo resultado.

Teorema 34. $CoReg(S(X, Y)) = LReg(S(X, Y)) = RReg(S(X, Y))$ se e só se $|X| \leq 2$ ou $(|X|, |Y|) \in \{(3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$.

Capítulo 5

Semigrupos de transformações lineares com imagem contida num certo subespaço

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W um subespaço vetorial de V . Se considerarmos todas as aplicações de $T(V)$ cujas imagens são subespaços de W , obtemos uma “versão linear” de $T(X, Y)$, a saber:

$$T(V, W) = \{\alpha \in T(V) : V\alpha \subseteq W\}.$$

Não é difícil verificar que $T(V, W)$ é subsemigrupo de $T(V)$. De facto, se $\alpha, \beta \in T(V)$ são tais que $V\alpha \subseteq W$ e $V\beta \subseteq W$, então

$$V(\alpha\beta) = (V\alpha)\beta \subseteq W\beta \subseteq V\beta \subseteq W$$

pelo que $\alpha\beta \in T(V, W)$.

Observemos que, se $W = \{0\}$, então $T(V, W)$ tem apenas um elemento: a transformação linear nula. Assim, salvo quando mencionado o contrário, assumimos que W é não nulo.

Ao longo deste capítulo, descreveremos as relações de Green em $T(V, W)$, assim como os seus ideais. Veremos que o conjunto Q de todos os elementos regulares de $T(V, W)$ tem um papel importante neste estudo. Este conjunto Q é, na verdade, subsemigrupo de $T(V, W)$ e, para alguns espaços vetoriais V e W , descreveremos os seus subsemigrupos regulares maximais. Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se em [12] e em [11].

5.1 Relações de Green

De modo a caracterizarmos as relações de Green em $T(V, W)$, será necessário começar por descrever os seus elementos regulares. Consideremos, assim, o conjunto

$$Q = \{\alpha \in T(V, W) : V\alpha \subseteq W\alpha\}.$$

Lema 12. *O conjunto Q é o conjunto de todos os elementos regulares de $T(V, W)$ e, munido com a operação de composição, é um semigrupo.*

Demonstração. Dado $\alpha \in Q$ e $\beta \in T(V)$, sabemos que $V\alpha \subseteq W\alpha$ e, portanto, $V\alpha\beta \subseteq W\alpha\beta$. Logo, $\alpha\beta \in Q$ e Q é ideal direito de $T(V)$. Consequentemente, Q é subsemigrupo de $T(V)$.

Vamos agora mostrar que os elementos de Q são exatamente os elementos regulares de $T(V, W)$. Começemos por supor que $\alpha = \alpha\beta\alpha$, para algum $\beta \in T(V, W)$. Então, qualquer que seja $u \in V$, $u\alpha = (u\alpha\beta)\alpha$. Ora, $u\alpha\beta = (u\alpha)\beta \in V\beta \subseteq W$. Assim, $u\alpha = (u\alpha\beta)\alpha$, com $u\alpha\beta \in W$. Ou seja, $u\alpha \in W\alpha$. Portanto, $V\alpha \subseteq W\alpha$ e, por isso, $\alpha \in Q$.

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha \in T(V, W)$ e $V\alpha \subseteq W\alpha = \langle w_j\alpha \rangle$, onde, para cada $j \in J$, $w_j \in W$. Começemos por ver que $\{w_j : j \in J\}$ é linearmente independente. Para isso, consideremos os escalares x_j , com $j \in J$, tais que

$$\sum_{j \in J} x_j w_j = 0.$$

Então, $\sum x_j (w_j\alpha) = 0\alpha = 0$. Mas, $\{w_j\alpha : j \in J\}$ é linearmente independente, pelo que podemos concluir que $x_j = 0$, para todo j . Logo, $\{w_j : j \in J\}$ é, também, linearmente independente. Desta forma, podemos escrever $V = \ker \alpha \oplus \langle w_j \rangle$. Vejamos. Se $\ker \alpha = \langle u_i \rangle$, então $\{w_j : j \in J\} \dot{\cup} \{u_i : i \in I\}$ é linearmente independente. De facto, se tivermos, para certos escalares x_j e y_i , a combinação linear nula

$$\sum_{j \in J} x_j w_j + \sum_{i \in I} y_i u_i = 0,$$

da sua imagem por α segue que

$$\sum_{j \in J} x_j (w_j\alpha) = 0,$$

pois $u_i\alpha = 0$ para todo i . Mas, como $\{w_j\alpha : j \in J\}$ é linearmente independente, concluímos que $x_j = 0$, para todo $j \in J$. Assim,

$$\sum_{j \in J} 0 w_j + \sum_{i \in I} y_i u_i = 0.$$

No entanto, por escolha, $\{u_i : i \in I\}$ também é linearmente independente, pelo que $y_i = 0$, para todo $i \in I$. Tomemos, agora, $u \in \langle u_i \rangle \cap \langle w_j \rangle$. Então existem escalares x_i, z_j tais que

$$u = \sum_{i \in I} x_i u_i = \sum_{j \in J} z_j w_j.$$

Desta forma,

$$\sum_{i \in I} x_i u_i - \sum_{j \in J} z_j w_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} x_i u_i + \sum_{j \in J} (-z_j) w_j = 0.$$

Como $\{u_i\} \dot{\cup} \{w_j\}$ é linearmente independente, concluímos que $x_i = 0$, para todo $i \in I$, e $-z_j = 0$, para todo $j \in J$. Assim, $u = 0$. Podemos, então, considerar a soma direta $\langle u_i \rangle \oplus \langle w_j \rangle$, que é um subespaço vetorial de V .

Dado $v \in V$, temos $v\alpha \in V\alpha \subseteq W\alpha = \langle w_j\alpha \rangle$ e, para alguns escalares x_j ,

$$v\alpha = \sum_{j \in J} x_j (w_j\alpha)$$

Assim,

$$\begin{aligned} v\alpha - (\sum_{j \in J} x_j w_j)\alpha &= 0 \Leftrightarrow (v - \sum_{j \in J} x_j w_j)\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow v - \sum_{j \in J} x_j w_j \in \ker \alpha \\ &\Leftrightarrow v - \sum_{j \in J} x_j w_j = \sum_{i \in I} z_i u_i, \text{ para certos escalares } z_i \\ &\Leftrightarrow v = \sum_{j \in J} x_j w_j + \sum_{i \in I} z_i u_i \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w_j \rangle \oplus \langle u_i \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $V = \ker \alpha \oplus \langle w_j \rangle = W\alpha \oplus \langle v_k \rangle$ e podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_i & w_j \\ 0 & w_j\alpha \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} v_k & w_j\alpha \\ 0 & w_j \end{pmatrix}.$$

Temos $V\beta = \langle w_j \rangle \subseteq W$ e, por isso, $\beta \in T(V, W)$. Não é difícil verificar que $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Logo, α é regular em $T(V, W)$. $\square$

É importante repararmos que Q nunca é vazio. Se $W = V$, então $Q = T(V)$, que sabemos ser regular para todo o espaço vetorial V . Por outro lado, se $W = \{0_V\}$, então Q só contém a aplicação nula em $T(V)$, que é trivialmente regular. Por último, se $W = \langle w_j \rangle$ e $V = \langle u_i \rangle \oplus W$, então

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_i & w_j \\ 0 & w_j \end{pmatrix} \in Q,$$

já que $\alpha \in T(V, W)$ e $V\alpha \subseteq W\alpha$. Notemos, ainda, que apesar de Q ser ideal à direita de $T(V)$ e, consequentemente, de $T(V, W)$, não é ideal esquerdo. Tomemos o seguinte exemplo.

Exemplo 10. Sejam $W = \langle w \rangle$ e $V = \langle v, w \rangle$. Consideremos $\alpha, \lambda \in T(V)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} v & w \\ 0 & w \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} w & v \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha, \lambda \in T(V, W)$, pois $V\alpha = W = V\lambda$. Mais, como $V\alpha = \langle w \rangle = W\alpha$, concluímos que $\alpha \in Q$. Porém, $\lambda\alpha = \lambda \notin Q$, pois $V\lambda = \langle v \rangle \not\subseteq \{0\} = W\lambda$. Logo, Q não é ideal esquerdo.

De seguida, avançamos para a caracterização das relações de Green em $T(V, W)$. Começamos pela relação $\mathcal{L}$.

Lema 13. Sejam $\gamma \in Q$ e $\beta \in T(V, W)$. Então existe $\lambda \in T(V, W)$ tal que $\beta = \lambda\gamma$ se e só se $V\beta \subseteq V\gamma$. Consequentemente, se $\alpha, \beta \in T(V, W)$, então $\alpha \mathcal{L} \beta$ em $T(V, W)$ se e só se $\alpha = \beta$ ou $(V\alpha = V\beta \text{ e } \alpha, \beta \in Q)$.

Demonstração. Suponhamos que $\beta = \lambda\gamma$, para algum $\lambda \in T(V, W)$. Então, segue de imediato que $V\beta = (V\lambda)\gamma \subseteq W\gamma \subseteq V\gamma$.

Reciprocamente, suponhamos que $V\beta \subseteq V\gamma$. Escrevamos $V\beta = \langle v_i\beta \rangle$. Para cada $i \in I$, existe $w_i \in W$ tal que $v_i\beta = w_i\gamma$, já que $V\gamma \subseteq W\gamma$. Como $\langle w_i\gamma \rangle \subseteq V\gamma$, podemos escrever $V\gamma = \langle w_i\gamma \rangle \oplus \langle w_j\gamma \rangle$. Note-se que, se $\ker \beta = \langle u_r \rangle$ e $\ker \gamma = \langle u_s \rangle$, então, de forma análoga à demonstração anterior, os conjuntos $\{u_r\} \cup \{v_i\}$ e $\{u_s\} \cup \{w_i\} \cup \{w_j\}$ são ambos linearmente independentes.

Para além disso, podemos tomar $V = \ker \beta \oplus \langle v_i \rangle$ e $V = \ker \gamma \oplus \langle w_i \rangle \oplus \langle w_j \rangle$, pelo que podemos escrever

$$\beta = \begin{pmatrix} u_r & v_i \\ 0 & w_i\gamma \end{pmatrix} \text{ e } \gamma = \begin{pmatrix} u_s & w_i & w_j \\ 0 & w_i\gamma & w_j\gamma \end{pmatrix}.$$

Definamos $\lambda \in T(V, W)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} u_r & v_i \\ 0 & w_i \end{pmatrix}.$$

Temos, portanto,

$$\lambda\gamma = \begin{pmatrix} u_r & v_i \\ 0 & w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & w_i & w_j \\ 0 & w_i\gamma & w_j\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r & v_i \\ 0 & w_i\gamma \end{pmatrix} = \beta.$$

Suponhamos, agora, que $\alpha \mathcal{L} \beta$ em $T(V, W)$. Então, temos $\alpha = \lambda\beta$ e $\beta = \lambda'\alpha$, para alguns $\lambda, \lambda' \in T(V, W)$ ¹. É claro que, se $\lambda = 1$ ou $\lambda' = 1$, então $\alpha = \beta$. Por outro lado, se $\lambda \neq 1$ e $\lambda' \neq 1$, então $\lambda, \lambda' \in T(V, W)$ e

$$\alpha = \lambda\lambda'\alpha \quad \text{e} \quad \beta = \lambda'\lambda\beta.$$

Desta forma, $V\alpha = (V\lambda\lambda')\alpha \subseteq W\alpha$ e, analogamente, $V\beta \subseteq W\beta$. Ou seja, $\alpha, \beta \in Q$. Mais, $V\alpha = V\lambda\beta \subseteq V\beta$ e $V\beta = V\lambda'\alpha \subseteq V\alpha$, donde segue a igualdade. O recíproco segue trivialmente da primeira parte deste lema. $\square$

Depois de descrevermos a relação esquerda, caracterizemos a relação direita. Esta relação, tal como veremos, depende dos núcleos das transformações lineares.

Lema 14. *Se $\alpha, \beta \in T(V, W)$, então $\beta = \alpha\mu$, para algum $\mu \in T(V, W)$, se e só se $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{R} \beta$ em $T(V, W)$ se e só se $\ker \alpha = \ker \beta$.*

Demonstração. Suponhamos que existe $\mu \in T(V, W)$ tal que $\beta = \alpha\mu$. Dado $v \in \ker \alpha$, temos $v\alpha = 0$. Logo, $v\beta = (v\alpha)\mu = 0\mu = 0$ e, portanto, $v \in \ker \beta$. Assim, $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$.

Reciprocamente, suponhamos que $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$ e escrevamos $\ker \alpha = \langle u_i \rangle$ e $\ker \beta = \langle u_i \rangle \oplus \langle u_j \rangle$. Mais, escrevamos $V = \ker \beta \oplus \langle v_k \rangle$.

Assim,

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_i & u_j & v_k \\ 0 & w_j & w_k \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} u_i & u_j & v_k \\ 0 & 0 & w'_k \end{pmatrix},$$

para alguns $w_j, w_k, w'_k \in W$.

Tomemos, ainda, $V = V\alpha \oplus \langle v_l \rangle$ e definamos $\mu \in T(V, W)$ por

$$\mu = \begin{pmatrix} v_l & w_j & w_k \\ 0 & 0 & w'_k \end{pmatrix}.$$

Ora,

$$\alpha\mu = \begin{pmatrix} u_i & u_j & v_k \\ 0 & w_j & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_l & w_j & w_k \\ 0 & 0 & w'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i & u_j & v_k \\ 0 & 0 & w'_k \end{pmatrix} = \beta.$$

O restante segue trivialmente. $\square$

É claro que, depois de caracterizadas as relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$, segue de imediato a caracterização da relação $\mathcal{H}$.

Lema 15. Dados $\alpha, \beta \in T(V, W)$, $\alpha \mathcal{H} \beta$ se e só se $\alpha = \beta$ ou $(V\alpha = V\beta \text{ e } \ker \alpha = \ker \beta \text{ e } \alpha, \beta \in Q)$.

Dada uma qualquer transformação $\alpha \in T(V, W)$, é óbvio que $\dim(W\alpha) \leq \dim(V\alpha)$, já que $W \subseteq V$. Para cada $\pi \in T(V)$, é possível definir um isomorfismo de espaços vetoriais $\phi_\pi : V/\ker \pi \rightarrow V/\ker \pi$, donde segue o Teorema das Dimensões para espaços vetoriais (ou seja, a dimensão de V é igual à soma das dimensões do núcleo e da imagem de π). Mais, se $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$, então $\dim(V\alpha) \geq \dim(V\beta)$.

Também é importante observar que, dado $\alpha \in T(V, W)$, se escrevermos $W \cap \ker \alpha = \langle u_i \rangle$ e $W = \langle u_i \rangle \oplus \langle u_j \rangle$, então $\dim(W\alpha) = |J|$. Isto segue pelo facto de $\{u_j\alpha\}$ ser uma base de $W\alpha$ e a restrição $\alpha|_{\langle u_j \rangle}$ ser um isomorfismo de espaços vetoriais de $\langle u_j \rangle$ em $W\alpha$. Esta observação dá-nos uma ferramenta necessária para podermos abordar a relação $\mathcal{J}$ em $T(V, W)$.

Lema 16. Se $\alpha, \beta \in T(V, W)$, então existem $\lambda, \mu \in T(V, W)$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$ se e só se $\dim(V\beta) \leq \dim(W\alpha)$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{J} \beta$ se e só se $\ker \alpha = \ker \beta$ ou $\dim(V\alpha) = \dim(W\alpha) = \dim(W\beta) = \dim(V\beta)$.

Demonstração. Supondo que $\beta = \lambda\alpha\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in T(V, W)$, temos que $V\beta = V(\lambda\alpha\mu) = (V\lambda)\alpha\mu \subseteq W\alpha\mu$. Logo, $\dim V\beta \leq \dim W\alpha\mu \leq \dim W\alpha$.

Suponhamos, agora, que $\dim(V\beta) \leq \dim(W\alpha)$ e escrevamos

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_j & w'_k & v_l \\ 0 & w'_k\alpha & w_l \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} u_i & v_k \\ 0 & w_k \end{pmatrix},$$

onde $\ker \alpha = \langle u_j \rangle$, $\ker \beta = \langle u_i \rangle$, $V\beta = \langle w_k \rangle \subseteq W$, $\langle w'_k \rangle \subseteq W$ e $V\alpha = \langle w'_k\alpha \rangle \oplus \langle w_l \rangle \subseteq W$. Temos, então, $\alpha, \beta \in T(V, W)$. Escrevamos $V = \langle w'_k\alpha \rangle \oplus \langle v_m \rangle$ e definamos $\lambda, \mu \in T(V, W)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} u_i & v_k \\ 0 & w'_k \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} v_m & w'_k\alpha \\ 0 & w_k \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$\lambda\alpha\mu = \begin{pmatrix} u_i & v_k \\ 0 & w'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j & w'_k & v_l \\ 0 & w'_k\alpha & w_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_m & w'_k\alpha \\ 0 & w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i & v_k \\ 0 & w_k \end{pmatrix} = \beta,$$

o que conclui a demonstração da primeira parte do Lema.

Suponhamos, agora, que existem $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in T(V, W)$ ¹ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$ e $\alpha = \lambda'\beta\mu'$. Ora, se $\lambda = 1$, então $\beta = \alpha\mu$ e $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$. Por outro lado, se $\lambda \neq 1$, então $\dim(V\beta) = \dim(V\lambda\alpha\mu) \leq$

$\dim(W\alpha)$. É claro que temos algo idêntico para λ' , pelo que concluímos o seguinte: $(\ker \alpha \subseteq \ker \beta$ ou $\dim V\beta \leq \dim W\alpha)$ e $(\ker \beta \subseteq \ker \alpha$ ou $\dim V\alpha \leq \dim W\beta)$. Daqui, decorrem quatro casos:

- (i) $\ker \alpha = \ker \beta$;
- (ii) $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$ e $\dim V\alpha \leq \dim W\beta$;
- (iii) $\dim V\beta \leq \dim W\alpha$ e $\ker \beta \subseteq \ker \alpha$;
- (iv) $\dim V\beta \leq \dim W\alpha$ e $\dim V\alpha \leq \dim W\beta$.

Tendo $W \subseteq V$, o caso (iv) traduz-se nas igualdades $\dim V\beta = \dim W\alpha = \dim V\alpha = \dim W\beta$.

Se $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$ e $\dim(V\alpha) \leq \dim(W\beta)$, então $W \cap \ker \alpha \subseteq W \cap \ker \beta$ e $\dim(V\alpha) \geq \dim(V\beta)$.

Assim, podemos escrever

$$W \cap \ker \beta = (W \cap \ker \alpha) \oplus U_1, \quad W = (W \cap \ker \beta) \oplus U_2,$$

para certos subespaços U_1 e U_2 de W , e temos $W\alpha = U_1\alpha \oplus U_2\alpha$ e $W\beta = U_2\beta$. Consequentemente,

$$\dim(W\beta) = \dim(U_2) = \dim(U_2\alpha) \leq \dim(W\alpha) \leq \dim(V\alpha) \leq \dim(W\beta).$$

Logo, $\dim(W\beta) = \dim(W\alpha) = \dim(V\alpha)$. Por outro lado,

$$\dim V\beta \leq \dim V\alpha \leq \dim W\beta \leq \dim V\beta,$$

pelo que temos as igualdades pretendidas.

De forma análoga, de $\ker \beta \subseteq \ker \alpha$ e $\dim(V\beta) \leq \dim(W\alpha)$ seguem, novamente, as igualdades pretendidas.

Reciprocamente, se $\ker \alpha = \ker \beta$, então $\alpha \mathcal{R} \beta$, pelo Lema 14, e, como $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$, concluímos que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Por outro lado, se $\dim(V\alpha) = \dim(W\alpha) = \dim(W\beta) = \dim(V\beta)$, então, pela primeira parte deste lema, existem $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ em $T(V, W)$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$ e $\alpha = \lambda'\beta\mu'$. Portanto, $\alpha \mathcal{J} \beta$. $\square$

Sabemos que $\alpha \mathcal{J} \beta$ em $T(V)$ se e só se $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$. Pelo Lema 16, temos que, se $\alpha \mathcal{J} \beta$ em $T(V, W)$, então $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$. No entanto, o recíproco é falso, mesmo quando a dimensão de V é finita. Atentemos o próximo exemplo.

Exemplo 11. Sejam $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e $W = \langle e_1, e_2 \rangle$. Definam-se $\alpha, \beta \in T(V)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & e_2 & e_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Ora, $\alpha, \beta \in T(V, W)$ pois $V\alpha = W = V\beta$. Mais, desta igualdade segue que $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta) = \dim W = 2$. Como $\ker \alpha = \langle e_1 \rangle \neq \langle e_2 \rangle = \ker \beta$ e $\dim W\alpha = 1 = \dim W\beta$, sabemos que $\alpha \not\mathcal{J} \beta$.

Debruçando-nos um pouco mais sobre este exemplo, verificamos que $V\alpha \not\subseteq W\alpha$ e $V\beta \not\subseteq W\beta$, pelo que $\alpha, \beta \notin Q$. É claro que $\alpha \neq \beta$. Portanto, α e β não estão $\mathcal{L}$ -relacionados em $T(V, W)$, apesar de $V\alpha = V\beta$.

Mais, apesar de termos $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$ e $\dim(W\alpha) = \dim(W\beta)$, temos $\beta \neq \lambda\alpha\mu$, para quaisquer $\lambda, \mu \in T(V, W)$, algo que não acontece em $T(V)$.

Porém, se nos restringirmos a Q , isto é, tomando apenas os elementos regulares de $T(V, W)$, os resultados seguem análogos aos de $T(V)$.

Lema 17. Se $\alpha, \beta \in Q$, então $\beta = \lambda\alpha\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in Q$ se e só se $\dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha)$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{J} \beta$ em Q se e só se $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$ e, portanto, $\mathcal{J} = \mathcal{D}$ em Q .

Demonstração. Se $\alpha, \beta \in Q$ e $\beta = \lambda\alpha\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in Q$, então, pelo Lema 16, temos $\dim(V\beta) \leq \dim(W\alpha)$. Ora, sendo α um elemento de Q , temos $W\alpha = V\alpha$, pelo que $\dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha, \beta \in Q$ e $\dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha)$. Ora, podemos escrever

$$\beta = \begin{pmatrix} u_r & w_i \\ 0 & w_i\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} u_s & w'_i & w_j \\ 0 & w'_i\alpha & w_j\alpha \end{pmatrix},$$

onde $\langle w_i \rangle \subseteq W$, $\langle w'_i \rangle \oplus \langle w_j \rangle \subseteq W$. Escrevamos $V = \langle u_t \rangle \oplus \langle w'_i\alpha \rangle$ e definamos $\lambda, \mu \in T(V)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} u_r & w_i \\ 0 & w'_i \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} u_t & w'_i\alpha \\ 0 & w_i\beta \end{pmatrix}.$$

Como $V\lambda = W\lambda = \langle w'_i \rangle \subseteq W$ e $V\mu = W\mu = \langle w_i\beta \rangle = V\beta \subseteq W$, concluímos que $\lambda, \mu \in Q$. Assim, basta reparar que

$$\lambda\alpha\mu = \begin{pmatrix} u_r & w_i \\ 0 & w'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & w'_i & w_j \\ 0 & w'_i\alpha & w_j\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t & w'_i\alpha \\ 0 & w_i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r & w_i \\ 0 & w_i\beta \end{pmatrix} = \beta.$$

Para a segunda parte do Lema, suponhamos que $\alpha \mathcal{J} \beta$ em Q . Então, existem $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in Q^1$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$ e $\alpha = \lambda'\beta\mu'$, pelo que

$$\dim(V\beta) = \dim(V\lambda\alpha\mu) \leq \dim(V\alpha\mu) \leq \dim(V\alpha)$$

e, de forma análoga, $\dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta)$. Pela primeira parte do Lema, se $\dim V\alpha = \dim V\beta$, então existem $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ em Q tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$ e $\alpha = \lambda'\beta\mu'$. Portanto, $\alpha \mathcal{J} \beta$.

Por último, sabemos que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Para provar a igualdade entre $\mathcal{J}$ e $\mathcal{D}$, falta mostrar que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$. Começemos por reparar que Q é subsemigrupo regular de $T(V, W)$, pelo que as relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ em Q são restrições das relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ em $T(V, W)$. Pelos Lemas 13 e 14, se $\alpha, \beta \in Q$, então $\alpha \mathcal{L} \beta$ em Q se e só se $V\alpha = V\beta$ e $\alpha \mathcal{R} \beta$ em Q se e só se $\ker \alpha = \ker \beta$.

Dados $\alpha, \beta \in Q$ tais que $\alpha \mathcal{J} \beta$, temos $\dim V\alpha = \dim V\beta$. Suponhamos que $W \cap \ker \alpha = \langle u_j \rangle$, $\ker \alpha = \langle u_j \rangle \oplus \langle u_k \rangle$ e $V\alpha = \langle v_i \rangle$. Como $\alpha \in Q$, temos $V\alpha = W\alpha$, pelo que existe $w_i \in W$ tal que $v_i = w_i\alpha$, para cada $i \in I$. Mais, prova-se que $V = \langle u_j \rangle \oplus \langle u_k \rangle \oplus \langle w_i \rangle$. Assim, podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_j & u_k & w_i \\ 0 & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix}.$$

De modo análogo, podemos escrever

$$\beta = \begin{pmatrix} v_r & v_s & w'_i \\ 0 & 0 & w'_i\beta \end{pmatrix},$$

onde $|J| + |K| + |I| = \dim V = |R| + |S| + |I|$ (recordemos que $|I| = \dim V\alpha = \dim V\beta$). Consideremos $\gamma \in T(V)$ definida por

$$\gamma = \begin{pmatrix} u_j & u_k & w_i \\ 0 & 0 & w'_i\beta \end{pmatrix}.$$

É claro que $\gamma \in T(V, W)$ pois $V\gamma = V\beta \subseteq W$. Mais, $W\gamma = (\langle u_k \rangle \oplus \langle w_i \rangle)\gamma = \langle w_i\gamma \rangle = \langle w'_i\beta \rangle = V\gamma$. Assim, $\gamma \in Q$. É fácil verificar que $\ker \alpha = \ker \gamma$ e $V\gamma = V\beta$, pelo que $\alpha \mathcal{R} \gamma$ e $\gamma \mathcal{L} \beta$ em Q . Por outras palavras, vimos que $\alpha \mathcal{D} \beta$ em Q , e podemos concluir que $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em Q . $\square$

Depois de analisada a relação $\mathcal{D}$ no semigrupo Q , vejamos o que acontece em $T(V, W)$.

Lema 18. Se $\alpha, \beta \in T(V, W)$, então $\alpha \mathcal{D} \beta$ em $T(V, W)$ se e só se ou $\ker \alpha = \ker \beta$ ou $(\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$ e $\alpha, \beta \in Q)$.

Demonstração. Suponhamos que $\alpha \mathcal{D} \beta$ em $T(V, W)$. Então, $\alpha \mathcal{R} \gamma \mathcal{L} \beta$, para algum $\gamma \in T(V, W)$. Assim, pelo Lema 14, temos $\ker \alpha = \ker \gamma$ e, pelo Lema 13, temos $\gamma = \beta$ ou $(V\gamma = V\beta$ e $\gamma, \beta \in Q)$. Analisemos, assim, cada um dos dois casos. Se $\ker \alpha = \ker \gamma$ e $\gamma = \beta$, então $\ker \alpha = \ker \beta$. Por outro lado, se $\ker \alpha = \ker \gamma$ e $V\gamma = V\beta$, com $\gamma, \beta \in Q$, então, pelo Lema 14, existe $\mu \in T(V, W)$ tal que $\alpha = \gamma\mu$. Como $\gamma \in Q$, temos $V\gamma = W\gamma$, o que implica $V\alpha = V\gamma\mu = W\gamma\mu = W\alpha$. Desta forma, conclui-se que $\alpha \in Q$. Para além disso, temos

$$\dim(V\beta) = \dim(V\gamma) = \dim(V/\ker \gamma) = \dim(V/\ker \alpha) = \dim(V\alpha).$$

Reciprocamente, suponhamos que $\ker \alpha = \ker \beta$. Então, pelo Lema 14, $\alpha \mathcal{R} \beta$. Como $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$, temos $\alpha \mathcal{D} \beta$.

Por último, suponhamos que $\alpha, \beta \in Q$ e $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$. Pelo Lema 17, concluímos que $\alpha \mathcal{D} \beta$ em Q . Mas $Q \subseteq T(V, W)$, pelo que $\alpha \mathcal{D} \beta$ em $T(V, W)$. $\square$

Sabemos que, num semigrupo S , se tem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Apesar de termos a igualdade $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $T(V)$ e em Q , o mesmo já não acontece necessariamente em $T(V, W)$. Atentemos o próximo exemplo.

Exemplo 12. Sejam $V = \langle u_1, u_2, u_3, w_1 \rangle \oplus \langle w_k \rangle$ e $W = \langle w_1 \rangle \oplus \langle w_k \rangle$, onde K é infinito. Fixemos $k_0 \in K$ e definamos $\alpha, \beta \in T(V, W)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \{u_3, w_1\} & w_k \\ 0 & w_1 & w_{k_0} & w_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & w_1 & w_k \\ 0 & 0 & w_1 & w_{k_0} & w_k \end{pmatrix}.$$

Começamos por reparar que $u_2 \in \ker \beta$ mas $u_2 \notin \ker \alpha$. Logo, $\ker \alpha \neq \ker \beta$. Por outro lado, temos $\dim(V\alpha) = \dim(W\alpha) = |K| = \dim(W\beta) = \dim(V\beta)$, pelo que $\alpha \mathcal{J} \beta$.

Em contrapartida, $W\alpha = \langle w_k \rangle \subsetneq W = V\alpha$ e, analogamente, $W\beta = \langle w_k \rangle \subsetneq W = V\beta$. Portanto, $\alpha, \beta \notin Q$ e, pelo Lema 18, $\alpha \not\mathcal{D} \beta$. Assim, neste caso, $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{J}$.

Não é difícil constatar que, no exemplo acima, o facto de W ter dimensão infinita é a ideia chave para definir as aplicações α e β tais que $\alpha \mathcal{J} \beta$ mas $\alpha \not\mathcal{D} \beta$. De facto, no resultado que se segue, vemos que, para W finitamente gerado, as relações $\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}$ coincidem.

Corolário 12. Se $\dim W < \aleph_0$, então $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em $T(V, W)$.

Demonstração. Suponhamos que $\alpha, \beta \in T(V, W)$ e $\alpha \mathcal{J} \beta$. Se $\ker \alpha = \ker \beta$, então $\alpha \mathcal{D} \beta$, pelo Lema 18. Por outro lado, se $\ker \alpha \neq \ker \beta$, então, pelo Lema 16, $\dim(V\alpha) = \dim(W\alpha) = \dim(W\beta) = \dim(V\beta)$. Como, por hipótese, W é finitamente gerado, também $V\alpha$, $W\alpha$, $W\beta$ e $V\beta$ são finitamente gerados. Assim, de $W\alpha \subseteq V\alpha \subseteq W$ e $W\beta \subseteq V\beta \subseteq W$, concluímos que

$$W\alpha = V\alpha = W = W\beta = V\beta.$$

Em particular, $\alpha, \beta \in Q$ e, como $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$, temos $\alpha \mathcal{D} \beta$, pelo Lema 18. Portanto, temos $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$, e a igualdade segue. $\square$

5.2 Ideais

Vimos, na secção anterior, que Q é um subsemigrupo regular do semigrupo $T(V, W)$, ao qual nos referiremos, para simplificação da escrita, por T . Aqui, começamos por tomar o conjunto Q de todos os elementos regulares de $T(V, W)$ e estudamos os seus ideais. Posteriormente, tal como seria de esperar, procuramos os ideais de $T(V, W)$.

A descrição dos ideais de Q é idêntica à descrição dos ideais de $T(V)$, como podemos verificar com o seguinte teorema.

Teorema 35. *Os ideais de Q são precisamente os conjuntos*

$$Q_r = \{\alpha \in Q : \dim(V\alpha) < r\},$$

onde $1 \leq r \leq \dim(W)'$. Mais, Q_r é ideal principal de Q se e só se $r = s'$, onde $1 \leq s \leq \dim(W)$.

Demonstração. Dados $\alpha \in Q_r$ e $\beta \in Q$, temos $V\alpha = W\alpha$, $V\beta = W\beta$ e $\dim V\alpha < r$. Logo, $\alpha\beta, \beta\alpha \in Q$ e $\dim(V\alpha\beta) \leq \dim(V\alpha) < r$ e $V\beta\alpha \subseteq V\alpha$, donde $\dim(V\beta\alpha) \leq \dim(V\alpha) < r$. Assim, $\alpha\beta, \beta\alpha \in Q_r$, pelo que Q_r é ideal de Q .

Reciprocamente, suponhamos que I é ideal de Q e seja r o menor cardinal maior que $\dim(V\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. Como $V\alpha$ é um subespaço de W , temos $0 \leq \dim V\alpha \leq \dim W$. Portanto, $1 \leq r \leq \dim W'$. Ora, é claro que, por escolha de r , temos $I \subseteq Q_r$. Procuramos a igualdade, pelo que tomemos $\beta \in Q_r$ e suponhamos que $\dim(V\beta) = s < r$. Notemos que existe $\alpha \in I$ tal que $\dim(V\alpha) \geq s$: se não existisse, $\dim(V\alpha) < s$, para todo $\alpha \in I$, e a escolha de r estaria comprometida (pois $s < r$).

Desta forma, $\dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha)$ e, pelo Lema 17, existem $\lambda, \mu \in Q$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$. Como $\alpha \in I$ e I é ideal de Q , concluímos que $\lambda\alpha\mu = \beta \in I$, ou seja, temos $Q_r \subseteq I$, de onde se conclui que os ideais de Q são, precisamente, os conjuntos Q_r , com $1 \leq r \leq \dim W'$.

Relativamente à segunda parte do Lema, comecemos, agora, por supor que $r = s'$, para algum s tal que $0 \leq s \leq \dim(W)$. Pretendemos provar que Q_r é ideal principal de Q , ou seja, queremos mostrar que Q_r é um ideal (α) gerado por um elemento $\alpha \in Q$. Portanto, queremos concluir que $Q_r = Q^1\alpha Q^1$, para algum $\alpha \in Q$. Tomemos $\alpha \in Q$ tal que $\dim(V\alpha) = s < s' = r$ (basta tomar um subespaço U de W com dimensão s e definir α em Q com espaço imagem igual a U : por exemplo, se $s = 0$ então $\alpha = V_0$). Como $\alpha \in Q$ e $\dim V\alpha < r$, temos $\alpha \in Q_r$.

Acabamos de ver que Q_r é ideal de Q e $\alpha \in Q_r$, pelo que $Q^1\alpha Q^1 \subseteq Q_r$. Por outro lado, dado $\beta \in Q_r$, sabemos que $\dim(V\beta) < r = s'$, pelo que $\dim(V\beta) \leq s = \dim(V\alpha)$. Pelo Lema 17, existem $\lambda, \mu \in Q$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$, isto é, $\beta \in Q^1\alpha Q^1$. Assim, $Q_r \subseteq Q^1\alpha Q^1$, e obtemos a igualdade, como pretendido.

Reciprocamente, suponhamos que Q_r é ideal principal de Q . Então, existe $\alpha \in Q_r$ tal que $Q_r = Q^1\alpha Q^1$. Pretendemos mostrar que existe um cardinal s tal que $r = s'$. Como $\alpha \in Q_r$, temos $\dim(V\alpha) < r$. Seja $s = \dim(V\alpha)$. Então, $s < r$. Suponhamos que existe t tal que $s < t < r$. Como referimos atrás, existe $\beta \in Q$ tal que $\dim(V\beta) = t$, pelo que $\beta \in Q_r = Q^1\alpha Q^1$. Assim, $\beta = \lambda\alpha\mu$, para certos $\lambda, \mu \in Q^1$. Ora, se $\lambda = 1$, então $V\beta = V\alpha\mu$, o que implica que $\dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha)$. Por outro lado, se $\mu = 1$, $V\beta = V\lambda\alpha \subseteq V\alpha$, concluindo-se o mesmo. Por último, se $\lambda \neq 1$ e $\mu \neq 1$, então, pelo Lema 17, voltamos a ter $\dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha)$. Assim, concluímos que

$$t = \dim(V\beta) \leq \dim(V\alpha) = s < t,$$

uma contradição. Portanto, não existe t tal que $s < t < r$, donde $r = s'$. □

Encontrados os ideais de Q , pretendemos agora caracterizar os ideais de $T(V, W)$. Comecemos por definir T_r , de modo análogo ao que temos em Q . Se $1 \leq r \leq \dim W'$, escrevemos

$$T_r = \{\alpha \in T : \dim(V\alpha) < r\}.$$

É fácil perceber que, se $\alpha \in T_r$ e $\lambda, \mu \in T$, então $V\lambda\alpha \subseteq V\alpha$ e $\dim(V\alpha\mu) \leq \dim(V\alpha)$ e, consequentemente, $\lambda\alpha, \alpha\mu \in T_r$. Logo, T_r é um ideal de T .

No entanto, veremos que, em $T = T(V, W)$, os ideais não são todos da forma T_r se W é um subespaço próprio de V . No que se segue, restringimo-nos a este caso: ou seja, assumimos que $W \neq V$. Para caracterizarmos todos os ideais de T , precisamos de considerar certos conjuntos associados a subconjuntos não vazios de T , como passamos a descrever.

Seja Y um conjunto não vazio de T . Consideremos o cardinal

$$r(Y) = \min\{r : r > \dim(W\alpha), \text{ para todo } \alpha \in Y\}$$

e o conjunto

$$K(Y) = \{\beta \in T : \ker \beta \supseteq \ker \alpha, \text{ para algum } \alpha \in Y\}.$$

É importante notar que $r(Y)$ existe sempre, já que os cardinais são bem ordenados.

Lema 19. *Dado um subconjunto não vazio Y de $T(V, W)$, os conjuntos $T_{r(Y)} \cup K(Y)$ e $T_{r(Y)'} \cup K(Y)$ são ideais de T .*

Demonstração. Seja Y um subconjunto não vazio de $T = T(V, W)$. Para mostrarmos que $T_{r(Y)} \cup K(Y)$ é ideal de T , vamos tomar $\beta \in T_{r(Y)} \cup K(Y)$ e $\lambda, \mu \in T$ e vamos mostrar que $\lambda\beta, \beta\mu \in T_{r(Y)} \cup K(Y)$.

Sejam, então, $\beta \in T_{r(Y)} \cup K(Y)$ e $\lambda, \mu \in T$. Então, $\beta \in T_{r(Y)}$ ou $\beta \in K(Y)$. Se $\beta \in T_{r(Y)}$, sabemos já, pelo visto acima, que $\lambda\beta, \beta\mu \in T_{r(Y)}$, pois $T_{r(Y)}$ é um ideal de T . Logo, $\lambda\beta, \beta\mu \in T_{r(Y)} \subseteq T_{r(Y)} \cup K(Y)$.

Por outro lado, se $\beta \in K(Y)$, por definição, temos que existe $\alpha \in Y \subseteq T$ tal que $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$ e, pelo Lema 14, $\beta = \alpha\gamma$, para algum $\gamma \in T$. Assim, $\beta\mu = (\alpha\gamma)\mu = \alpha(\gamma\mu)$. Pelo Lema 14 e por $\gamma\mu \in T$, concluímos que $\ker \alpha \subseteq \ker(\beta\mu)$, com $\alpha \in Y$. Portanto, $\beta\mu \in K(Y) \subseteq T_{r(Y)} \cup K(Y)$. Resta ver que, neste caso, também $\lambda\beta \in T_{r(Y)} \cup K(Y)$. Ora, $\dim(V\lambda\beta) \leq \dim(W\beta) = \dim(W\alpha\gamma) \leq \dim(W\alpha) < r(Y)$. Portanto, $\lambda\beta \in T_{r(Y)} \subseteq T_{r(Y)} \cup K(Y)$. Logo, $T_{r(Y)} \cup K(Y)$ é um ideal de T .

Para o conjunto $T_{r(Y)'} \cup K(Y)$, a demonstração segue de modo análogo. Basta apenas notar que $\dim(V\lambda\beta) < r(Y) < r(Y)'$. $\square$

Provamos, de seguida, um resultado que nos ajudará a mostrar que os ideais de T são exatamente os conjuntos da forma $T_{r(Y)} \cup K(Y)$ e $T_{r(Y)'} \cup K(Y)$, com Y subconjunto não vazio de T .

Lema 20. *Se $\beta \in T$ e $r < \dim(W\beta) = \dim(V\beta) = s$, então existe $\lambda \in T$ tal que $\dim(W\lambda\beta) = r$ e $\dim(V\lambda\beta) = s$.*

Demonstração. Começemos por ver o caso em que s é finito. Nestas condições, por hipótese, $W\beta = V\beta$ e podemos escrever

$$\beta = \begin{pmatrix} u_p & w_1 & \dots & w_r & w_{r+1} & \dots & w_s \\ 0 & w'_1 & \dots & w'_r & w'_{r+1} & \dots & w'_s \end{pmatrix},$$

com $\langle w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s \rangle \subseteq W$. Tomemos $u \in V \setminus W$. Como $u \notin W$, $u + w_j \notin W$, para cada $j = r+1, \dots, s$. Vejamos que $\{w_1, \dots, w_r, u + w_{r+1}, \dots, u + w_s\}$ é linearmente independente. Se existem escalares x_i e y_j tais que

$$\sum_{i=1}^r x_i w_i + \sum_{j=r+1}^s y_j (u + w_j) = 0,$$

então obtemos

$$\sum_{i=1}^r x_i w_i + \sum_{j=r+1}^s y_j w_j \in \langle u \rangle.$$

No entanto, $u \notin W$, ou seja, $W \cap \langle u \rangle = \{0\}$. Queremos, com isto, dizer que $x_i = y_j = 0$, para todos i e j . Portanto, o conjunto $\{w_1, \dots, w_r, u + w_{r+1}, \dots, u + w_s\}$ é linearmente independente. Logo, podemos estender este conjunto para uma base de V , pelo que escrevemos $V = \langle u_\ell \rangle \oplus \langle w_1, \dots, w_r, u + w_{r+1}, \dots, u + w_s \rangle$. Definamos

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} u_\ell & w_1 & \dots & w_r & u + w_{r+1} & \dots & u + w_s \\ 0 & w_1 & \dots & w_r & w_{r+1} & \dots & w_s \end{pmatrix}.$$

Temos $\lambda_1 \in T(V)$ e $V\lambda_1 \subseteq W$, pelo que $\lambda \in T$. Mais,

$$\lambda_1 \beta = \begin{pmatrix} u_\ell & w_1 & \dots & w_r & u + w_{r+1} & \dots & u + w_s \\ 0 & w'_1 & \dots & w'_r & w'_{r+1} & \dots & w'_s \end{pmatrix},$$

com $\dim(W\lambda_1\beta) = r$ e $\dim(V\lambda_1\beta) = s$, tal como pretendido.

Suponhamos agora que s é infinito, e escrevamos $V = \langle u_p \rangle \oplus \langle w_j \rangle \oplus \langle v_k \rangle$ e

$$\beta = \begin{pmatrix} u_p & w_j & v_k \\ 0 & w_j \beta & v_k \beta \end{pmatrix},$$

onde $|J| + |K| = |J| = s \geq \aleph_0$. Ora, isto implica que $|K| \leq |J|$. Podemos, assim, definir

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} u_q & w_j \\ 0 & w_j \end{pmatrix},$$

onde $u_q \in V$. É claro, que $\lambda_2 \in T$, e temos

$$\lambda_2\beta = \begin{pmatrix} u_q & w_j \\ 0 & w_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p & w_j & v_k \\ 0 & w_j\beta & v_k\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q & w_j \\ 0 & w_j\beta \end{pmatrix}.$$

Mais, $\lambda_2\beta \in Q$, já que $V\lambda_2\beta = \langle w_j\beta \rangle = W\lambda_2\beta$. Por hipótese, $r < |J|$. Escrevamos $J = M \dot{\cup} N$, onde $|M| = r$ e $|N| = |J| = s$. Podemos, assim, escrever $\{w_j\} = \{w_m\} \dot{\cup} \{w_n\}$ e, tal como anteriormente, se $u \in V \setminus W$, então $\{w_m\} \dot{\cup} \{u + w_n\}$ é linearmente independente. Tomemos

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} u_q & w_m & u + w_n \\ 0 & w_m & w_n \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\lambda_3\lambda_2\beta = \begin{pmatrix} u_q & w_m & u + w_n \\ 0 & w_m & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_q & w_j \\ 0 & w_j\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q & w_m & u + w_n \\ 0 & w_m\beta & w_n\beta \end{pmatrix}.$$

Segue, como pretendido, que $\dim(W\lambda_3\lambda_2\beta) = |M| = r$ e $\dim(V\lambda_3\lambda_2\beta) = |M| + |N| = s$. □

Descrevemos, no Lema 35, todos os ideais de Q . Entretanto, encontramos, no Lema 19, alguns ideais de T . Com o seguinte teorema, caracterizaremos todos os ideais de T .

Teorema 36. *Os ideais de T são precisamente os conjuntos $T_r \cup K(Y)$ e $T_{r'} \cup K(Y)$, onde $r = r(Y)$ e Y é um subconjunto não vazio de T .*

Demonstração. No Lema 19, vimos que $T_r \cup K(Y)$ e $T_{r'} \cup K(Y)$ são ideais de T , para cada Y subconjunto não vazio de T . Tomemos, então, um qualquer ideal I de T e vejamos que este é de uma das formas referidas. Se $I = \{V_0\}$, então consideremos $Y = I$. É claro que $r(Y) = 1$ e $T_{r(Y)} = T_1 = \{V_0\}$. Tomando $\beta \in K(Y) = K(\{V_0\})$, temos, por definição, que $\ker V_0 \subseteq \ker \beta$. Portanto, $\ker \beta = V$, ou seja, $\beta = V_0$. Consequentemente, $K(Y) = K(\{V_0\}) = \{V_0\}$. Logo, $T_{r(Y)} \cup K(Y) = T_1 \cup K(\{V_0\}) = \{V_0\} = I$, ficando este caso concluído.

Suponhamos, então, que $I \neq \{V_0\}$ e tomemos $\alpha \in I \setminus \{V_0\}$. Escrevamos

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_p & w_j & v_\ell \\ 0 & w'_j & w''_\ell \end{pmatrix},$$

onde $v_\ell \notin W$, para todo $\ell \in L$. Se $J = \emptyset$, então $L \neq \emptyset$ (caso contrário, teríamos $\alpha = V_0$). Neste caso, $0 = \dim(W\alpha) < \dim(V\alpha)$. Por outro lado, se $J \neq \emptyset$, escolhendo $j_1 \in J$ e $u \in V \setminus W$, escrevemos

$V = \langle u \rangle \oplus \langle v_q \rangle$, onde $W \subseteq \langle v_q \rangle$. Definamos $\lambda \in T(V, W)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} v_q & u \\ 0 & w_{j_1} \end{pmatrix}.$$

Temos $\lambda\alpha \in I$ e $\dim(W\lambda\alpha) = 0 < 1 = \dim(V\lambda\alpha)$. Portanto, se tomarmos $Y = \{\alpha \in I : \dim(W\alpha) < \dim(V\alpha)\}$, sabemos que Y é subconjunto não vazio de T . Vamos, de seguida, mostrar que $I = T_r(Y) \cup K(Y)$ ou $I = T_{r(Y)'} \cup K(Y)$.

Seja $r = r(Y)$. Suponhamos, em primeiro lugar, que, para todo $\beta \in I$, se tem $\dim(W\beta) < r$. Se $\dim(V\beta) < r$, é claro que $\beta \in T_r$. Por outro lado, se $\dim(W\beta) < r \leq \dim(V\beta)$, temos $\beta \in Y$ e, consequentemente, $\beta \in K(Y)$. Portanto, neste caso, $I \subseteq T_r \cup K(Y)$.

Para o recíproco, suponhamos que $\beta \in T_r$. Se $\dim(W\alpha) < \dim(V\beta) < r$, para todo $\alpha \in Y$, contradizemos a escolha de $r = r(Y)$, já que $\dim(V\beta)$ seria menor que $\min\{s : s > \dim(W\alpha), \text{ para todo } \alpha \in Y\}$. Logo, existe $\alpha \in Y$ tal que $\dim(V\beta) \leq \dim(W\alpha) < r$. Desta forma, pelo Lema 16, $\beta = \lambda\alpha\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in T$. Ora, $\alpha \in Y \subseteq I$ e I é ideal de T , donde segue que $\beta \in I$. Se $\beta \in K(Y)$, por definição, $\beta \in T$ e existe $\alpha \in Y$ tal que $\ker \beta \supseteq \ker \alpha$. Pelo Lema 14, existe $\mu \in T$ tal que $\beta = \alpha\mu$. Ora, por I ser ideal, $\alpha \in I$ e $\mu \in T$, concluímos que $\alpha\mu = \beta \in I$. Assim, temos $T_r \cup K(Y) \subseteq I$, pelo que, neste caso, $I = T_r \cup K(Y)$.

Falta, ainda, ver o caso em que existe $\gamma \in I$ tal que $\dim(W\gamma) \geq r$. Uma vez mais, se $\dim(W\gamma) < \dim(V\gamma)$, é claro que $\gamma \in Y$, e contradizemos a escolha de r . Portanto, $\dim(W\gamma) = \dim(V\gamma)$ e, pelo Lema 20, se $r < \dim(W\gamma) = \dim(V\gamma) = s$, sabemos que existe $\lambda \in T$ tal que $\dim(W\lambda\gamma) = r < s = \dim(V\lambda\gamma)$. Ora, isto contraria uma vez mais a escolha de r , já que $\lambda\gamma \in I$ (pois I é ideal e $\gamma \in I$) e, como $\dim(W\lambda\gamma) < \dim(V\lambda\gamma)$, temos $\lambda\gamma \in Y$. A contradição resulta de supormos que $r < \dim(W\gamma)$. Ficamos, desta forma, apenas com o caso em que $r = \dim(W\gamma) = \dim(V\gamma)$, pelo que $\gamma \in T_{r'}$. Assim, se tomarmos um qualquer $\beta \in I$ tal que $r \leq \dim(W\beta)$, concluímos que $\beta \in T_{r'}$. Já vimos que, se $\beta \in I$ é tal que $\dim(W\beta) < r$, então $\beta \in T_r \cup K(Y)$. Ora, $T_r \subseteq T_{r'}$ e, portanto, $T_r \cup K(Y) \subseteq T_{r'} \cup K(Y)$. Segue, então, que $I \subseteq T_{r'} \cup K(Y)$.

Para a inclusão contrária, se tomarmos $\beta \in T_{r'}$, então $\dim(V\beta) \leq r = \dim(W\gamma) = \dim(V\gamma)$, onde γ é o elemento de I acima mencionado. Pelo Lema 16, concluímos que $\beta \in I$. Por definição, $K(Y) \subseteq I$, pelo que concluímos que $T_{r'} \cup K(Y) \subseteq I$ e, assim, $I = T_{r'} \cup K(Y)$. $\square$

Relembremos que, para qualquer espaço vetorial U , os ideais de $T(U)$ formam uma cadeia sob a ordem induzida pela inclusão. Iremos agora ver que T quase nunca é isomorfo a $T(U)$, com U espaço vetorial,

pois conseguimos definir ideais de T que não estão relacionados pela inclusão. Começamos por descrever uma família de ideais de T .

Lema 21. *Seja $1 \leq r \leq \dim W$. Então, $J_r = \{\alpha \in T : \dim(W\alpha) < r\}$ é ideal de $T = T(V, W)$.*

Demonstração. Tomando $\alpha \in J_r$ e $\lambda, \mu \in T$, então $W\lambda\alpha \subseteq W\alpha$, pelo que $\lambda\alpha \in J_r$. Por outro lado, $\dim(W\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha)$, donde se conclui que $\alpha\mu \in J_r$ e, consequentemente, J_r é ideal de T . $\square$

Corolário 13. *Se $\dim V \geq 3$, então $T = T(V, W)$ não é isomorfo a $T(U)$, qualquer que seja o espaço vetorial U .*

Demonstração. Suponhamos que $\dim(V) \geq 3$ e tomemos em consideração que, como W é subespaço próprio não nulo de V , $\dim(W) \geq 1$ e $W \neq V$.

Começamos por supor que $\dim W = 1$. Podemos, assim, escrever $V = \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \langle v_m \rangle \oplus \langle w_1 \rangle$, com $W = \langle w_1 \rangle$ e M eventualmente vazio. Definamos $\pi_1, \pi_2 \in T$ como se seguem.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} v_2 & v_m & w_1 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_m & w_1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 \end{pmatrix}.$$

Sejam $Y_1 = \{\pi_1\}$ e $Y_2 = \{\pi_2\}$. É claro que, tomando qualquer $\beta \in K(Y_1)$ temos, por definição, que $\ker \beta \supseteq \ker \pi_1$ e, como $\ker \pi_1 \supseteq W$, temos $W \subseteq \ker \beta$. Reparemos que $K(Y_1)$ é ideal de T . Tomando um qualquer $\lambda \in T$ e $\beta \in K(Y_1)$, temos $V\lambda\beta \subseteq W\beta = \{0_V\}$, isto é, $\ker(\lambda\beta) = V \supseteq \ker \pi_1$, pelo que $\lambda\beta \in K(Y_1)$. É claro que, dado $\mu \in T$, $\ker \mu\beta \supseteq \ker \beta \supseteq \ker \pi_1$, ou seja, $\beta\mu \in K(Y_1)$. Assim, $K(Y_1)$ é, efetivamente, ideal de T . Analogamente, provamos que $K(Y_2)$ também é ideal de T . No entanto, $\pi_1 \in K(Y_1) \setminus K(Y_2)$ e $\pi_2 \in K(Y_2) \setminus K(Y_1)$, pois $\ker \pi_1 \not\supseteq \ker \pi_2$ e $\ker \pi_2 \not\supseteq \ker \pi_1$. Portanto, os ideais de T não formam uma cadeia quando $\dim W = 1$.

Suponhamos, agora, que $\dim W \geq 2$. Tomemos $w_1, w_2 \in W$, linearmente independentes. Seja, ainda, $u \in V \setminus W$. Então, $v_1 = u + w_1$ e $v_2 = u + w_2$ são, também, linearmente independentes. Mais, $v_1, v_2 \in V \setminus W$. Escrevamos

$$W = \langle w_1, w_2 \rangle \oplus \langle w_n \rangle \quad \text{e} \quad V = \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \langle v_m \rangle \oplus \langle w_1, w_2 \rangle \oplus \langle w_n \rangle$$

e sejam $\alpha, \beta \in T$ aplicações não nulas definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} v_m & w_1 & w_2 & w_n & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_m & w_2 & w_n & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\dim(W\alpha) = 0$ e $\dim(W\beta) = 1$, pelo que $\alpha \in J_1$ e $\beta \notin J_1$. Por outro lado, $\dim(V\alpha) = 2$ e $\dim(V\beta) = 1$, o que nos faz concluir que $\alpha \notin T_2$ e $\beta \in T_2$. Ora, J_1 e T_2 são ideais de T , e $\alpha \in J_1 \setminus T_2$, $\beta \in T_2 \setminus J_1$. Portanto, também neste caso, os ideais de T não formam uma cadeia. Desta forma, para $\dim V \geq 3$, T não é isomorfo a $T(U)$, qualquer que seja U espaço vetorial. $\square$

No resultado que se segue, vemos como escrever qualquer ideal principal do semigrupo $T(V, W)$ na forma $T_{r(Y)} \cup K(Y)$, para algum Y . Parece, no entanto, pouco provável que consigamos definir condições para determinar quando um ideal $T_{r(Y)} \cup K(Y)$ de T é principal, ao contrário do que fizemos para os ideais de Q .

Teorema 37. *Sejam $\alpha \in T = T(V, W)$ e $s = \dim(W\alpha)$. Então,*

$$T\alpha T = T_r \cup K(Y_1),$$

com $Y_1 = T\alpha T$ e $r = r(Y_1) = s'$, e

$$T^1\alpha T^1 = T_r \cup K(Y_2),$$

com $Y_2 = \{\alpha\}$ e $r = r(Y_2) = s'$.

Demonstração. Escrevamos, com as nossas habituais escolhas de bases,

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_i & w_j & v_k \\ 0 & w'_j & w'_k \end{pmatrix}$$

e $V = \langle u'_\ell \rangle \oplus \langle w'_j \rangle \oplus \langle w'_k \rangle$. Definamos δ, ε em $T(V)$ por

$$\delta = \begin{pmatrix} u_i & v_k & w_j \\ 0 & 0 & w_j \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} u'_\ell & w'_k & w'_j \\ 0 & 0 & w'_j \end{pmatrix}.$$

É claro que $\delta, \varepsilon \in T$ e, tomando $\pi = \delta\alpha\varepsilon$ temos

$$\pi = \begin{pmatrix} u_i & v_k & w_j \\ 0 & 0 & w_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i & w_j & v_k \\ 0 & w'_j & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_\ell & w'_k & w'_j \\ 0 & 0 & w'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i & v_k & w_j \\ 0 & 0 & w_j \end{pmatrix},$$

pelo que $\pi \in T$ e $\dim(W\pi) = \dim(V\pi) = |J| = s$. Observemos que, tomando quaisquer $\lambda, \mu \in T$, temos $\dim(W\lambda\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha) = s$. Ou seja, para todo $\beta \in T\alpha T$, $\dim(W\beta) \leq s$.

Tomemos $Y_1 = T\alpha T$ e seja $r = r(Y_1)$. Suponhamos que $r > s'$. Pela definição de $r(Y_1)$ e por $Y_1 = T\alpha T$, existem $\lambda, \mu \in T$ tais que $s' \leq \dim(W\lambda\alpha\mu)$. Ora, $\dim(W\lambda\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha) = s$, o que é uma contradição. Logo, $r \leq s'$. Por outro lado, como $\pi \in T\alpha T = Y_1$ e $\dim(W\pi) = s$, segue, pela escolha de r , que $r > s$, ou seja $r \geq s'$. Assim, concluímos que $r = s'$.

Vamos mostrar que $T\alpha T = T_r \cup K(Y_1)$. Como, por definição, $Y_1 \subseteq K(Y_1)$, temos

$$T\alpha T = Y_1 \subseteq K(Y_1) \subseteq T_r \cup K(Y_1).$$

Vejam, então, se $T_r \cup K(Y_1) \subseteq T\alpha T$. Ora, dado $\beta \in K(Y_1)$, existe $\xi \in Y_1$ tal que $\ker \beta \supseteq \ker \xi$. Pelo Lema 14, existe $\mu' \in T$ tal que $\beta = \xi\mu'$. Mas $\xi \in Y_1 = T\alpha T$, pelo que podemos escrever $\beta = \lambda\alpha\mu\mu'$, com $\lambda, \mu \in T$, ou seja, $\beta \in T\alpha T$. Por outro lado, dado $\beta \in T_r$, temos $\dim(V\beta) < r = s'$. Logo, $\dim(V\beta) \leq s = \dim(W\alpha)$. Pelo Lema 16, existem $\lambda, \mu \in T$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$, ou seja, $\beta \in T\alpha T$. Portanto, $T_r \cup K(Y_1) \subseteq T\alpha T$, e obtemos a igualdade pretendida.

De seguida, mostramos que $T^1\alpha T^1 = T'_{r(Y_2)} \cup K(Y_2)$, para $Y_2 = \{\alpha\}$. Consideremos, então, $Y_2 = \{\alpha\}$ e seja $r = r(Y_2)$. Como $\dim(W\alpha) = s$ e $Y_2 = \{\alpha\}$, temos $r = s'$.

Começemos por mostrar que $T^1\alpha T^1 \subseteq T_r \cup K(Y_2)$. Dado $\beta \in T^1\alpha T^1$, existem $\lambda, \mu \in T^1$ tais que $\beta = \lambda\alpha\mu$. Se $\lambda = 1$, então $\beta = \alpha\mu$ e, portanto, $\ker \beta = \ker(\alpha\mu) \supseteq \ker \alpha$, com $\alpha \in Y_2$. Ou seja, $\beta \in K(Y_2)$. Se $\lambda \neq 1$, então $\dim(V\beta) = \dim(V\lambda\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha) = s$, pelo que $\beta \in T_r$. Portanto, em ambos os casos, $\beta \in T_r \cup K(Y_2)$, pelo que $T^1\alpha T^1 \subseteq T_r \cup K(Y_2)$.

Mostremos, agora, que $T_r \cup K(Y_2) \subseteq T^1\alpha T^1$. Se $\beta \in T_r$, então $\dim(V\beta) < r = s'$, pelo que $\dim(V\beta) \leq s = \dim(W\alpha)$. Pelo Lema 16, concluímos que $\beta \in T\alpha T \subseteq T^1\alpha T^1$. Por outro lado, se $\beta \in K(Y_2)$, então $\ker \beta \supseteq \ker \alpha$ (recordemos que o único elemento de Y_2 é α). Assim, pelo Lema 14, existe $\mu \in T$ tal que $\beta = \alpha\mu$. Portanto, $\beta = \lambda\alpha\mu$, com $\lambda = 1$ e $\mu \in T$. Em particular, $\beta \in T^1\alpha T^1$. Desta forma, $T^1\alpha T^1 = T_r \cup K(Y_2)$. $\square$

5.3 Subsemigrupo regular maximal

Na secção 5.1, provamos que o conjunto Q de todos os elementos regulares de $T(V, W)$ é, de facto, um semigrupo, pelo que Q é o maior subsemigrupo regular de $T(V, W)$. Caracterizamos as relações de

Green em Q e, na secção seguinte, descrevemos todos os seus ideais. Ao longo desta secção, iremos estudar com mais detalhe este subsemigrupo de $T(V, W)$, em particular quando W é finitamente gerado.

Os resultados apresentados nesta secção devem-se, na sua maioria, a Sommanee e Sangkhanan e foram publicados em [11].

Se W for finitamente gerado, com $\dim W = n < \aleph_0$, definimos, para cada k tal que $0 \leq k \leq n$, o conjunto

$$J(k) = \{\alpha \in Q : \dim(V\alpha) = k\}.$$

Pelo Lema 17, $J(k)$ é uma $\mathcal{J}$ -classe de Q , para cada k . Não é difícil verificar que cada $J(k)$ contém, pelo menos, um idempotente. De facto, se $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle$, podemos escrever $V = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle \oplus \langle v_\ell \rangle$. Então,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_k & w_{k+1} & \dots & w_n & v_\ell \\ w_1 & \dots & w_k & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um idempotente de Q e $\dim(V\varepsilon) = k$, pelo que ε é um idempotente de $J(k)$.

O único elemento de $J(0)$ é a transformação linear nula V_0 . Por outro lado, se $\alpha \in J(n)$, então $\dim(V\alpha) = n = \dim W$. Como $V\alpha \subseteq W$ e n é finito, concluímos que $V\alpha = W$. Logo, todos os elementos de $J(n)$ têm espaço imagem igual a W , pelo que $J(n)$ consiste numa só $\mathcal{L}$ -classe.

Pelo Teorema 35, sabemos que os ideais de Q são exactamente os conjuntos $Q_{k'}$, com $0 \leq k \leq n$. Ora, não é difícil de ver que, para cada k ,

$$Q_{k'} = J(0) \cup J(1) \cup \dots \cup J(k).$$

Como Q é regular e $Q_{k'}$ é um ideal de Q , não é difícil ver que $Q_{k'}$ é um subsemigrupo regular de Q .

No que se segue, descreveremos as $\mathcal{H}$ -classes de Q que são grupos (para W com dimensão finita ou infinita). Para tal, recorreremos ao grupo $GL(U)$ de todos os automorfismos de um subespaço vetorial U de V . Recordemos que, pelo Lemma 15, dados $\alpha, \beta \in Q$,

$$\alpha \mathcal{H} \beta \quad \text{se e só se} \quad V\alpha = V\beta \quad \text{e} \quad \ker \alpha = \ker \beta.$$

Lema 22. *Seja $\varepsilon \in Q$ um idempotente. Então, $H_\varepsilon = \{\varepsilon\sigma : \sigma \in GL(V\varepsilon)\}$.*

Demonstração. Seja $\sigma \in GL(V\varepsilon)$. Então, $(V\varepsilon)\sigma = V\varepsilon$. Mais, $\varepsilon\sigma : V \rightarrow V$ é uma transformação em $T(V)$ tal que $V(\varepsilon\sigma) = (V\varepsilon)\sigma = V\varepsilon \subseteq W$ e $V(\varepsilon\sigma) = (V\varepsilon)\sigma = (W\varepsilon)\sigma = W(\varepsilon\sigma)$, pelo que $\varepsilon\sigma \in Q$.

Vejam os que $\ker \varepsilon\sigma = \ker \varepsilon$. Dado $u \in \ker \varepsilon\sigma$, temos $(u\varepsilon)\sigma = u(\varepsilon\sigma) = 0$, pelo que $u\varepsilon = 0$ (pois σ é um automorfismo). Logo, $u \in \ker \varepsilon$ e, portanto, $\ker \varepsilon\sigma \subseteq \ker \varepsilon$. É claro que $\ker \varepsilon \subseteq \ker \varepsilon\sigma$, e a igualdade pretendida segue. Como $V\varepsilon\sigma = V\varepsilon$ e $\ker \varepsilon\sigma = \ker \varepsilon$, temos, pelo Lema 15, que $\varepsilon\sigma \in H_\varepsilon$ (pois $\varepsilon\sigma, \varepsilon \in Q$).

Tomemos, agora, $\alpha \in H_\varepsilon$. Pelo Lema 15, $V\varepsilon = V\alpha$ e $\ker \varepsilon = \ker \alpha$. Como H_ε é a $\mathcal{H}$ -classe de um idempotente, sabemos que H_ε é um grupo e ε é a sua identidade. Logo, $\varepsilon\alpha = \alpha$.

Definamos σ como a restrição de α a $V\varepsilon$, isto é, $\sigma = \alpha|_{V\varepsilon}$. Então, σ é uma aplicação linear de domínio $V\varepsilon$ e $(V\varepsilon)\sigma = (V\varepsilon)\alpha = V(\varepsilon\alpha) = V\alpha = V\varepsilon$, pelo que $\sigma : V\varepsilon \rightarrow V\varepsilon$ é uma aplicação sobrejetiva. De seguida, mostramos que σ também é injetiva. Para isso, tomemos $u, v \in V\varepsilon$ tais que $u\sigma = v\sigma$. Sendo σ a restrição de α a $V\varepsilon$, podemos concluir que $u\alpha = v\alpha$. Logo, $(u - v)\alpha = 0$, ou seja, $u - v \in \ker \alpha$. Por hipótese, $\ker \alpha = \ker \varepsilon$ e, assim, $(u - v)\varepsilon = 0$. Logo, $u\varepsilon = v\varepsilon$. Ora, como $u, v \in V\varepsilon$, existem $u', v' \in V$ tais que $u = u'\varepsilon, v = v'\varepsilon$. Portanto,

$$u = u'\varepsilon = u'\varepsilon^2 = (u'\varepsilon)\varepsilon = u\varepsilon, \quad v = v'\varepsilon = v'\varepsilon^2 = (v'\varepsilon)\varepsilon = v\varepsilon,$$

donde segue que $u = u\varepsilon = v\varepsilon = v$. Logo, σ é injetiva. Por outras palavras, vimos que $\sigma \in GL(V\varepsilon)$. Falta apenas ver que $\alpha = \varepsilon\sigma$. Ora, para cada $v \in V$, $v(\varepsilon\sigma) = (v\varepsilon)\alpha = v\alpha$. Então, $\alpha = \varepsilon\sigma$, com $\sigma \in GL(V\varepsilon)$. □

Com o Lema anterior, vemos que podemos escrever cada elemento da $\mathcal{H}$ -classe de um idempotente ε como o produto de ε por um automorfismo de $V\varepsilon$. Assim, verificamos que cada $\mathcal{H}$ -classe de Q que é um grupo é isomorfa a um grupo de automorfismos, como descrevemos em seguida.

Lema 23. *Para cada idempotente ε em Q , $H_\varepsilon \cong GL(V\varepsilon)$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in Q$. Pelo Lema 22, $H_\varepsilon = \{\varepsilon\sigma : \sigma \in GL(V\varepsilon)\}$. Definamos $\phi : GL(V\varepsilon) \rightarrow H_\varepsilon$ por $\sigma\phi = \varepsilon\sigma$, para cada $\sigma \in GL(V\varepsilon)$. Vejamos, em primeiro lugar, que ϕ é injetiva. Sejam $\sigma, \tau \in GL(V\varepsilon)$ tais que $\sigma\phi = \tau\phi$. Pela definição de ϕ , temos $\varepsilon\sigma = \varepsilon\tau$. Para cada $v \in V\varepsilon$, existe $v' \in V$ tal que $v = v'\varepsilon$ e, portanto, $v\sigma = (v'\varepsilon)\sigma = v'(\varepsilon\sigma) = v'(\varepsilon\tau) = (v'\varepsilon)\tau = v\tau$. Assim, $\sigma = \tau$, e ϕ é injetiva.

Para mostrarmos a sobrejetividade de ϕ , tomemos $\gamma \in H_\varepsilon$. Então, $\gamma = \varepsilon\sigma$, para algum $\sigma \in GL(V\varepsilon)$. Por definição, $\sigma\phi = \varepsilon\sigma = \gamma$, isto é, ϕ é sobrejetiva.

Falta mostrar que ϕ é morfismo de grupos, isto é, ϕ preserva a composição de funções. Tomemos, então, $\sigma, \tau \in GL(V\varepsilon)$. Então, $(\sigma\tau)\phi = \varepsilon(\sigma\tau) = (\varepsilon\sigma)\tau$. Vimos acima que, para todo $u \in V\varepsilon$, temos $u = u\varepsilon$.

Ora, para todo $v \in V$, $v\varepsilon \in V\varepsilon$, pelo que $(v\varepsilon)\sigma \in V\varepsilon$. Logo, $(v\varepsilon)\sigma = ((v\varepsilon)\sigma)\varepsilon$. Portanto, para todo $v \in V$,

$$v(\varepsilon\sigma\varepsilon) = (v\varepsilon)\sigma.$$

Logo, para todo v ,

$$v(\varepsilon\sigma\varepsilon\tau) = v(\varepsilon\sigma\varepsilon)\tau = (v\varepsilon)\sigma\tau = v(\varepsilon\sigma\tau),$$

pelo que $(\sigma\tau)\phi = \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon\sigma\tau = \varepsilon\sigma\varepsilon\tau = (\sigma\phi)(\tau\phi)$. $\square$

Ao longo do resto desta secção, W é um subespaço finitamente gerado e $\dim W = n$ (com $n \in \mathbb{N}_0$).

No teorema seguinte, descrevemos a $\mathcal{J}$ -classe $J(n)$ de Q .

Teorema 38. *Seja $\{\varepsilon_p : p \in P\}$ o conjunto de todos os idempotentes em $J(n)$. Então,*

$$J(n) = \bigcup_{p \in P} H_{\varepsilon_p}$$

e, portanto, $J(n)$ é uma união disjunta de grupos, todos isomorfos.

Demonstração. Vimos antes que $\{\varepsilon_p : p \in P\} \neq \emptyset$ e sabemos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$. Logo, $P \neq \emptyset$ e, para cada $p \in P$, $H_{\varepsilon_p} \subseteq J(n)$. Portanto,

$$\bigcup_{p \in P} H_{\varepsilon_p} \subseteq J(n).$$

Para a inclusão recíproca, tomemos $\alpha \in J(n)$. Por definição de $J(n)$, $\alpha \in Q$ e $\dim(V\alpha) = n$. Suponhamos que $\ker \alpha = \langle u_i \rangle$ e $V\alpha = \langle w_j \alpha \rangle$, onde, para cada $j \in J$, $w_j \in W$. Como, por hipótese, $\dim(W) = n < \aleph_0$ e $V\alpha \subseteq W$, temos $V\alpha = W$ e, por isso, $|J| = n$. Podemos, assim, escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_i & w_j \\ 0 & w_j \alpha \end{pmatrix}.$$

Definamos ε em $T(V)$ por

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} u_i & w_j \\ 0 & w_j \end{pmatrix}.$$

É claro que ε é idempotente em Q e, como $\dim(V\varepsilon) = |J| = n$, temos $\varepsilon \in J(n)$. Mais, como $n < \aleph_0$, podemos concluir que $V\varepsilon = W$.

Ora, temos $\ker \alpha = \langle u_i \rangle = \ker \varepsilon$ e $V\alpha = W = V\varepsilon$, ou seja, $\alpha \in H_\varepsilon \subseteq \bigcup_{p \in P} H_{\varepsilon_p}$, de onde se conclui a igualdade.

Para concluir a demonstração, basta notar que, pelo Lema 23, para todo $p \in P$, $H_{\varepsilon_p} \cong GL(V\varepsilon_p) = GL(W)$, ou seja, temos uma união disjunta de grupos isomorfos entre si. $\square$

Introduzimos, agora, dois lemas mais técnicos, que nos permitirão demonstrar outros resultados.

Lema 24. *Sejam ε_i e ε_j idempotentes em $J(n)$ e seja $\sigma \in GL(W)$. Então, $\varepsilon_i \sigma \varepsilon_j = \varepsilon_i \sigma$ e $\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_i$.*

Demonstração. Tomando $v \in V$, temos que $v\varepsilon_i \in V\varepsilon_i = W$. Notemos que $(v\varepsilon_i)\sigma \in W = V\varepsilon_j$ (pois $\sigma \in GL(W)$). Assim, sabemos que existe $u \in V$ tal que $u\varepsilon_j = v\varepsilon_i\sigma$, donde $v\varepsilon_i\sigma\varepsilon_j = (u\varepsilon_j)\varepsilon_j = u\varepsilon_j = v\varepsilon_i\sigma$. Portanto, $\varepsilon_i\sigma\varepsilon_j = \varepsilon_i\sigma$.

Em particular, se $\sigma = id_W \in GL(W)$, utilizando o que acabamos de ver, temos $\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_i id_W \varepsilon_j = \varepsilon_i id_W = \varepsilon_i$. □

Lema 25. *Seja $\{\varepsilon_p : p \in P\}$ o conjunto de todos os idempotentes em $J(n)$. Então, $\{\varepsilon_p : p \in P\}$ é semigrupo zero à esquerda e $H_{\varepsilon_i}H_{\varepsilon_j} = H_{\varepsilon_i}$, para todos $i, j \in P$.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ idempotentes em $J(n)$. Pelo Lema 24, temos $\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_i$. Portanto, $\{\varepsilon_p : p \in P\}$ é semigrupo zero à esquerda.

Tomemos $\alpha \in H_{\varepsilon_i}$ e $\beta \in H_{\varepsilon_j}$. Temos, então, $\alpha = \varepsilon_i\sigma$ e $\beta = \varepsilon_j\tau$, para alguns $\sigma, \tau \in GL(W)$. É importante notar que $GL(W) = GL(V\varepsilon_i) = GL(V\varepsilon_j)$, como vimos anteriormente. Pelo Lema 24, temos $\alpha\beta = (\varepsilon_i\sigma)(\varepsilon_j\tau) = (\varepsilon_i\sigma\varepsilon_j)\tau = (\varepsilon_i\sigma)\tau = \varepsilon_i(\sigma\tau)$. Como $\sigma, \tau \in GL(W)$, também $\sigma\tau \in GL(W) = GL(V\varepsilon_i)$, pelo que $\alpha\beta \in H_{\varepsilon_i}$ e $H_{\varepsilon_i}H_{\varepsilon_j} \subseteq H_{\varepsilon_i}$.

Para verificarmos a inclusão recíproca, consideremos $\gamma \in H_{\varepsilon_i}$. Então, existe $\pi \in GL(V\varepsilon_i) = GL(W)$ tal que $\gamma = \varepsilon_i\pi$ e, conseqüentemente, $\gamma = \varepsilon_i\pi = \varepsilon_i\pi\varepsilon_j = \gamma\varepsilon_j \in H_{\varepsilon_i}H_{\varepsilon_j}$. Portanto, $H_{\varepsilon_i} \subseteq H_{\varepsilon_i}H_{\varepsilon_j}$, e a igualdade verifica-se. □

Podemos agora mostrar que a $\mathcal{J}$ -classe $J(n)$ de Q é um semigrupo regular.

Teorema 39. *O conjunto $J(n)$ é um subsemigrupo regular de Q .*

Demonstração. Pelo Teorema 38, $J(n) = \bigcup_{p \in P} H_{\varepsilon_p}$. Logo, o Lema 25 assegura-nos que $J(n)$ é um semigrupo. Falta, assim, provar a regularidade de $J(n)$.

Dado $\alpha \in J(n)$, existe $i \in P$ tal que $\alpha \in H_{\varepsilon_i}$. Sabemos que H_{ε_i} é grupo, pelo que existe $\alpha' \in H_{\varepsilon_i}$ tal que $\alpha'\alpha = \alpha\alpha' = \varepsilon_i$. Mais, como $\alpha \in H_{\varepsilon_i}$, então $\alpha = \varepsilon_i\sigma$, para algum $\sigma \in GL(W)$. Desta forma, $\alpha\alpha'\alpha = \varepsilon_i\alpha = \varepsilon_i(\varepsilon_i\sigma) = \varepsilon_i\sigma = \alpha$, pelo que α é regular em $J(n)$. Assim, $J(n)$ é um subsemigrupo regular de Q . □

No que se segue, iremos assumir que o corpo K é finito. Assim, W é um subespaço finitamente gerado de V definido sobre um corpo K finito. Já vimos que Q é o maior subsemigrupo regular de $T(V, W)$. Pretendemos agora descrever todos os subsemigrupos regulares maximais de Q .

O resultado que se segue será usado na demonstração de outros resultados.

Lema 26. Para todo $\alpha \in J(n-1)$,

$$J(n-1) \subseteq J(n) \alpha J(n).$$

Demonstração. Seja $\alpha \in J(n-1)$. Escrevemos $V\alpha = W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, onde $\{w_i\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores de W , com $|I| = n-1$. Como $W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, temos $W = (\ker \alpha \cap W) \oplus \langle w_i \rangle$. Ora, $\dim(W) = n$ e $\dim \langle w_i \rangle = n-1$, pelo que $\dim(\ker \alpha \cap W) = 1$. Portanto, $\ker \alpha \cap W = \langle u \rangle$, para algum $u \in V$. Escrevamos $\ker \alpha = \langle u \rangle \oplus \langle u_j \rangle$. Desta forma, temos $W = \langle u \rangle \oplus \langle w_i \rangle$ e $V = \langle u \rangle \oplus \langle u_j \rangle \oplus \langle w_i \rangle$, pelo que podemos escrever α como

$$\alpha = \begin{pmatrix} u & u_j & w_i \\ 0 & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix}.$$

Pretendemos mostrar que $J(n-1) \subseteq J(n) \alpha J(n)$. Para isso, tomemos $\beta \in J(n-1)$. Tal como vimos para α , podemos escrever β como

$$\beta = \begin{pmatrix} u' & u'_k & w'_i \\ 0 & 0 & w'_i\beta \end{pmatrix},$$

onde $V\beta = W\beta = \langle w'_i\beta \rangle$, $\ker \beta \cap W = \langle u' \rangle$, $\ker \beta = \langle u' \rangle \oplus \langle u'_k \rangle$ e $V = \langle u' \rangle \oplus \langle u'_k \rangle \oplus \langle w'_i \rangle$. Observemos que $|K| = \text{codim } W = |J|$. Por $|I| = n-1$, existem w e w' em W tais que $W = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle w \rangle = \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle w' \rangle$. Escrevamos $V = W \oplus \langle v_\ell \rangle$. É claro que, como $|L| = \text{codim } W$, temos $|L| = |J| = |K|$. Definamos $\gamma, \delta \in T(V, W)$ por

$$\gamma = \begin{pmatrix} u'_k & u' & w'_i \\ 0 & u & w_i \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} v_\ell & w & w_i\alpha \\ 0 & w' & w'_i\beta \end{pmatrix}.$$

É trivial que $\gamma, \delta \in J(n)$ e

$$\gamma\alpha\delta = \begin{pmatrix} u'_k & u' & w'_i \\ 0 & u & w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u_j & w_i \\ 0 & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\ell & w & w_i\alpha \\ 0 & w' & w'_i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_k & u' & w'_i \\ 0 & 0 & w'_i\beta \end{pmatrix} = \beta,$$

pelo que $\beta \in J(n) \alpha J(n)$ e, portanto, $J(n-1) \subseteq J(n) \alpha J(n)$. □

Descrevemos, no resultado que se segue, o primeiro subsemigrupo regular maximal de Q . Em particular, este resultado diz-nos que, excluindo todas as transformações em Q cuja imagem tem dimensão $n - 1$, continuamos a ter um semigrupo regular.

Teorema 40. *O conjunto $Q_{n-2} \cup J(n)$ é um subsemigrupo regular maximal de Q .*

Demonstração. Pelo Teorema 35, Q_{n-2} é ideal de Q . Como Q é o conjunto de todos os elementos regulares de $T(V, W)$, vem que Q_{n-2} é subsemigrupo regular de Q . Por outro lado, pelo Teorema 39, $J(n)$ é subsemigrupo regular de Q . Assim, $Q_{n-2} \cup J(n)$ é subsemigrupo regular de Q . Falta apenas provar a sua maximalidade.

Suponhamos, então, que existe S subsemigrupo regular de Q tal que

$$Q_{n-2} \cup J(n) \subsetneq S \subseteq Q.$$

Então, existe $\alpha \in S \setminus (Q_{n-2} \cup J(n))$, ou seja, existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \notin Q_{n-2}$ e $\alpha \notin J(n)$. Portanto, $\alpha \in S \cap J(n-1)$ e $\dim(V\alpha) = n - 1$.

Queremos provar que $S = Q$. Ora, temos $Q = Q_{n-2} \cup J(n-1) \cup J(n)$ e sabemos, por hipótese, que $Q_{n-2} \cup J(n) \subsetneq S$. Se $J(n-1) \subseteq S$, podemos concluir que $Q \subseteq S$ e a igualdade segue. Desta forma, tomemos $\beta \in J(n-1)$ e verifiquemos que $\beta \in S$. Pelo Lema 26, existem $\delta, \gamma \in J(n)$ tais que $\beta = \delta\alpha\gamma$. Como $J(n) \subsetneq S$, temos $\delta, \gamma \in S$. Também α é um elemento de S , pelo que $\beta \in S$. Assim, $Q = S$, e $Q_{n-2} \cup J(n)$ é um subsemigrupo regular maximal de Q . $\square$

Denotemos por $E(J(n))$ o conjunto de todos os idempotentes de $J(n)$, isto é, $E(J(n)) = \{\varepsilon_p : p \in P\}$.

Pelo Lema 23, para cada $\varepsilon_p \in E(J(n))$,

$$H_{\varepsilon_p} \cong GL(V\varepsilon_p) = GL(W).$$

Por outro lado, sabe-se que $GL(W)$ é isomorfo a $GL(n, q)$, o grupo linear geral de grau n , onde $q = |K|$.

Ora, $GL(n, q)$ é um grupo finito e, portanto, para todo $p \in P$, H_{ε_p} é também grupo finito.

Dado $p \in P$, consideremos o isomorfismo de grupos $\phi_p : H_{\varepsilon_p} \rightarrow GL(W)$ tal que, para todo $\sigma \in GL(W)$, $\varepsilon_p \sigma \phi = \sigma$. Tomando U subgrupo maximal de $GL(W)$, podemos afirmar que $M_p = U\phi_p^{-1} = \{\varepsilon_p \sigma : \sigma \in U\}$ é subgrupo maximal de H_{ε_p} . No próximo resultado, usamos estes subgrupos maximais para construir um subsemigrupo regular maximal de $J(n)$.

Lema 27. *Sejam $\{\varepsilon_p : p \in P\}$ o conjunto dos idempotentes de $J(n)$ e U um subgrupo maximal de $GL(n, q)$. Para cada $p \in P$, sejam ϕ_p e $M_p = U\phi_p^{-1}$ como definidos acima. Então, o conjunto*

$$M = \bigcup_{p \in P} M_p$$

é um subsemigrupo regular maximal de $J(n)$.

Demonstração. Começemos por reparar que

$$M = \bigcup_{p \in P} M_p \subseteq \bigcup_{p \in P} H_{\varepsilon_p} = J(n).$$

Num primeiro passo, vejamos que M é semigrupo. Sejam $\alpha \in M_{p_1}$ e $\beta \in M_{p_2}$, para certos $p_1, p_2 \in P$. Podemos escrever $\alpha = \varepsilon_{p_1} \delta_1$ e $\beta = \varepsilon_{p_2} \delta_2$, onde $\delta_1, \delta_2 \in U$. Assim, segue que $\alpha\beta = (\varepsilon_{p_1} \delta_1)(\varepsilon_{p_2} \delta_2) = (\varepsilon_{p_1} \delta_1 \varepsilon_{p_2}) \delta_2 = (\varepsilon_{p_1} \delta_1) \delta_2 = \varepsilon_{p_1} (\delta_1 \delta_2)$. Ora, $\delta_1 \delta_2 \in U$, pelo que $\alpha\beta \in M_{p_1} \subseteq M$. Logo, M é semigrupo e, consequentemente, subsemigrupo de $J(n)$. Quanto à regularidade, basta-nos reparar que, para cada $p \in P$, M_p é grupo e, portanto, M é regular. Falta apenas provar a maximalidade de M .

Seja T um subsemigrupo regular de $J(n)$ tal que $M \subsetneq T \subseteq J(n)$ e tomemos $\alpha \in T \setminus M$. Então, $\alpha \in H_{\varepsilon_p} \setminus M_p$, para algum $p \in P$. É claro que $\langle M_p \cup \{\alpha\} \rangle \subseteq T$ e é bem sabido que todo o subsemigrupo finito S de um grupo G é seu subgrupo. Logo, como H_{ε_p} é grupo finito, o seu subsemigrupo $\langle M_p \cup \{\alpha\} \rangle$ é subgrupo de H_{ε_p} . Temos

$$M_p \subsetneq \langle M_p \cup \{\alpha\} \rangle \subseteq H_{\varepsilon_p}.$$

Como M_p é subgrupo maximal de H_{ε_p} , segue que $\langle M_p \cup \{\alpha\} \rangle = H_{\varepsilon_p}$.

Pretendemos mostrar que $T = J(n)$, ou seja, que $J(n) \subseteq T$. Desta forma, tomemos $\beta \in J(n)$. Então, existe $q \in P$ tal que $\beta \in H_{\varepsilon_q}$, pelo que podemos escrever $\beta = \varepsilon_q \pi$, para algum $\pi \in GL(W)$. Pelo Lema 24, $\varepsilon_q \varepsilon_p = \varepsilon_q$. Logo,

$$\beta = \varepsilon_q \pi = (\varepsilon_q \varepsilon_p) \pi = \varepsilon_q (\varepsilon_p \pi).$$

Ora, como U é subgrupo de $GL(W)$ e id_W é a identidade neste grupo, temos $\varepsilon_q = \varepsilon_q \text{id}_W \in M_q$. Por outro lado, $\varepsilon_p \pi \in H_{\varepsilon_p} = \langle M_p \cup \{\alpha\} \rangle \subseteq T$. Assim, como $M_q \subseteq M \subseteq T$, segue que $\beta \in T$. Logo, $J(n) \subseteq T$, de onde concluímos a maximalidade de M . $\square$

Este resultado permite-nos construir mais um subsemigrupo regular maximal de Q .

Teorema 41. *Seja $M = \bigcup_{p \in P} M_p$ como definido no Lema 27. Então, $Q_{n-1} \cup M$ é um subsemigrupo regular maximal de Q .*

Demonstração. Começemos por observar que M é subsemigrupo regular de Q e que Q_{n-1} é ideal do semigrupo regular Q , pelo que Q_{n-1} é subsemigrupo regular de Q . Podemos, então, concluir que $Q_{n-1} \cup M$ é subsemigrupo regular de Q . Vamos agora mostrar que é maximal nessas condições.

Seja S subsemigrupo regular de Q tal que $(Q_{n-1} \cup M) \subsetneq S \subseteq Q$. Notemos que $M \subseteq J(n) \subseteq Q$ e que $Q_{n-1} \cap J(n) = \emptyset$. Assim, $(Q_{n-1} \cup M) \cap J(n) = M$ e $Q \cap J(n) = J(n)$, pelo que temos

$$M \subsetneq S \cap J(n) \subseteq J(n). \quad (2)$$

Como $J(n)$ é a união disjunta dos grupos $H_{\varepsilon p}$, com $p \in P$, temos

$$S \cap J(n) = S \cap \left(\bigcup_{p \in P} H_{\varepsilon p} \right) = \bigcup_{p \in P} (S \cap H_{\varepsilon p}).$$

Vamos mostrar que, para cada $p \in P$, $S \cap H_{\varepsilon p} = M_p$ ou $S \cap H_{\varepsilon p} = H_{\varepsilon p}$. Para isso, tomemos $p \in P$. Temos $M \subseteq S$, pelo que $M_p \subseteq S$. Por outro lado, $M_p \subseteq H_{\varepsilon p}$. Logo,

$$M_p \subseteq S \cap H_{\varepsilon p} \subseteq H_{\varepsilon p}. \quad (3)$$

Como $H_{\varepsilon p}$ é grupo finito e $S \cap H_{\varepsilon p}$ é um seu subsemigrupo, sabemos que $S \cap H_{\varepsilon p}$ é subgrupo finito de $H_{\varepsilon p}$. Mas M_p é um subgrupo maximal de $H_{\varepsilon p}$. Portanto, de (3) vem $S \cap H_{\varepsilon p} = M_p$ ou $S \cap H_{\varepsilon p} = H_{\varepsilon p}$.

Desta forma, concluímos que $S \cap J(n) = \bigcup_{p \in P} (S \cap H_{\varepsilon p})$ é uma união disjunta de grupos e, portanto, $S \cap J(n)$ é um semigrupo regular. Mas M é um subsemigrupo regular maximal de $J(n)$ e, por (2), concluímos que $S \cap J(n) = J(n)$. Logo, temos $J(n) \subseteq S$ e $Q_{n-1} \subseteq S$. Então, $Q = Q_{n-1} \cup J(n) \subseteq S \subseteq Q$ e, portanto, $S = Q$. Desta forma, a maximalidade de $Q_{n-1} \cup M$ fica provada. $\square$

Iremos provar que existem apenas dois tipos de subsemigrupos regulares maximais de Q : exatamente os descritos nos Teoremas 40 e 41. Para tal, iremos precisar dos próximos quatro lemas.

Lema 28. *Seja T um subsemigrupo regular maximal de $J(n)$. Seja $R = \{r \in P : T \cap H_{\varepsilon r} \neq \emptyset\}$ e seja $T_r = T \cap H_{\varepsilon r}$, para todo $r \in R$. Tomando ϕ_r como definido no parágrafo anterior ao Lema 27, seja $T_r \phi_r = V_r$ em $GL(W)$, para todo $r \in R$. Então,*

1. $V_r = V_s$, para todos $r, s \in R$;
2. T_r é subgrupo maximal de H_{ε_r} , para todo $r \in R$.

Demonstração. Começemos por provar a igualdade entre V_r e V_s para certos $r, s \in R$. Notemos que T_r é subsemigrupo finito de H_{ε_r} , que é um grupo finito. Portanto, T_r é subgrupo de H_{ε_r} . Assim, sabemos que $T_r \neq \emptyset$ e, analogamente, $T_s \neq \emptyset$. Mais, podemos escrever $T_r = \{\varepsilon_r \sigma : \sigma \in V_r\}$, onde ε_r é idempotente de H_{ε_r} .

Tomemos, agora, $\sigma \in V_r$. Então, $\varepsilon_r \sigma \in T_r$. Ora, pelo Lema 24, $\varepsilon_s \sigma = \varepsilon_s(\varepsilon_r \sigma)$, pelo que $\varepsilon_s \sigma \in T_s T_r \subseteq T$. Por outro lado, $\varepsilon_s \sigma \in H_{\varepsilon_s}$, pelo que $\varepsilon_s \sigma \in T \cap H_{\varepsilon_s} = T_s$. Temos, assim, que $\varepsilon_s \sigma \in T_s$, o que implica que $\sigma \in V_s$ e, conseqüentemente, $V_r \subseteq V_s$. De forma semelhante, o recíproco prova-se, concluindo-se que $V_r = V_s$.

Para a segunda parte do Lema, suponhamos que existe $s \in R$ tal que T_s não é subgrupo maximal de H_{ε_s} . Assim, existe N_s subgrupo maximal de H_{ε_s} tal que $T_s \subsetneq N_s \subsetneq H_{\varepsilon_s}$. Seja $U = N_s \phi_s \subseteq GL(W)$. Então, como ϕ_s é um isomorfismo de grupos, U é subgrupo maximal de $GL(W)$. Mais, $V_s = T_s \phi_s \subsetneq N_s \phi_s = U$, já que ϕ_s é isomorfismo.

Tomemos $M = \bigcup_{p \in P} M_p$, onde $M_p = U \phi_p^{-1}$, para todo $p \in P$. Pelo Lema 27, M é subsemigrupo regular maximal de $J(n)$. Assim, como $T_r \phi_r = V_r = V_s \subsetneq U$, para todo $r \in R$, segue que $T_r \subsetneq U \phi_r^{-1} = M_r$, para todo $r \in R$. Portanto,

$$T = \bigcup_{r \in R} T_r \subsetneq \bigcup_{r \in R} M_r \subseteq \bigcup_{p \in P} M_p = M \subsetneq J(n),$$

o que contradiz a maximalidade de T . Logo, podemos concluir que T_r é subgrupo maximal de H_{ε_r} , para todo $r \in R$. □

Lema 29. *Um conjunto T é subsemigrupo regular maximal de $J(n)$ se e só se existir U subgrupo maximal de $GL(W)$ tal que $T = \bigcup_{p \in P} M_p$, com $M_p = U \phi_p^{-1}$, para todo $p \in P$.*

Demonstração. Seja R tal como definido no Lema 28. Se $R = \emptyset$, então

$$T = \bigcup_{p \in P} (T \cap H_{\varepsilon_p}) = \bigcup_{p \in P} \emptyset = \emptyset,$$

o que é uma contradição. Logo, $R \neq \emptyset$ e existe $r \in R$ tal que $T_r = T \cap H_{\varepsilon_r} \neq \emptyset$. Pelo Lema 28, T_r é um subgrupo maximal de H_{ε_r} . Seja $T_r \phi_r = V_r$. Como ϕ_r é isomorfismo, V_r é subgrupo maximal de

$GL(W)$. Tomemos $U = V_r$ e reparemos que, novamente pelo Lema 28, $U = V_s$, para todo $s \in R$. Seja $M_p = U\phi_p^{-1}$, para todo $p \in P$.

Vamos mostrar que $T = \bigcup_{p \in P} M_p$. Dado $\alpha \in T$, existe $s \in P$ tal que $\alpha \in T \cap H_{\varepsilon_s}$. Assim, $T \cap H_{\varepsilon_s} \neq \emptyset$, pelo que $s \in R$ e $T \cap H_{\varepsilon_s} = T_s$. Mais, T_s é subgrupo maximal de H_{ε_s} . Temos $\alpha\phi_s \in T_s\phi_s = V_s = U$. Logo, $\alpha \in U\phi_s^{-1} = M_s \subseteq \bigcup_{p \in P} M_p$. Ficamos, então, com

$$T \subseteq \bigcup_{p \in P} M_p \subsetneq J(n),$$

onde $\bigcup_{p \in P} M_p$ é um subsemigrupo regular de $J(n)$ (pelo Lema 27). Pela maximalidade de T , podemos concluir que $T = \bigcup_{p \in P} M_p$, como pretendido.

O recíproco sai diretamente do Lema 27, ficando a prova concluída. $\square$

Lema 30. Para cada k tal que $0 \leq k \leq n-1$, o semigrupo Q_k é gerado por $J(k)$.

Demonstração. Seja $0 \leq k \leq n-1$. Se $\alpha \in J(k)$, então $\alpha \in Q_k$, pois $Q_k = Q_{k-1} \cup J(k)$. Logo, $J(k) \subseteq Q_k$ e, como Q_k é semigrupo, temos $\langle J(k) \rangle \subseteq Q_k$.

Tomemos agora $\alpha \in Q_k = J(k) \cup Q_{k-1}$. Se $\alpha \in J(k)$, é claro que $J(k) \subseteq \langle J(k) \rangle$. Por outro lado, se $\alpha \in Q_{k-1}$, então existe t tal que $0 \leq t \leq k-1$ e $\alpha \in J(t)$. Assim, temos $\dim(V\alpha) = t$. Escrevamos $V\alpha = W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, com $w_i \in W$ e $|I| = t$. Por um argumento usado anteriormente, podemos escrever $V = \ker \alpha \oplus \langle w_i \rangle$ e $W = (\ker \alpha \cap W) \oplus \langle w_i \rangle$. Temos $\dim(W) = n$ e $\dim(W\alpha) = t \leq k-1 \leq n-2$, pelo que $\dim(\ker \alpha \cap W) \geq 2$. Logo, existem $u, v \in \ker \alpha \cap W$ tais que $\{u, v\}$ é linearmente independente. Escrevendo $\ker \alpha = \langle u, v \rangle \oplus \langle v_s \rangle$, podemos escrever α como

$$\alpha = \begin{pmatrix} u & v & v_s & w_i \\ 0 & 0 & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix}.$$

Escrevamos $W = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle w_j \rangle$. Como $|I| = t \leq n-2$, sabemos que $|J| > 0$. Fixemos j_0 em J e definamos β, γ em $T(V)$ por

$$\beta = \begin{pmatrix} u & v & v_s & w_i \\ 0 & u & 0 & w_i \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} u & v & v_s & w_i \\ 0 & w_{j_0} & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix}.$$

É claro que $V\beta \subseteq W$ e $V\gamma \subseteq W$, pelo que ambas as aplicações estão em $T(V, W)$. Mais, como $V\beta = W\beta$ e $V\gamma = W\gamma$, temos $\beta, \gamma \in Q$. Ora,

$$\beta\gamma = \begin{pmatrix} u & v & v_s & w_i \\ 0 & u & 0 & w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & v_s & w_i \\ 0 & w_{j_0} & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & v_s & w_i \\ 0 & 0 & 0 & w_i\alpha \end{pmatrix} = \alpha.$$

Como $\dim(V\beta) = \dim(V\gamma) = |I| + 1 = t + 1$, concluímos que $\alpha \in J(t+1)J(t+1)$. Seguem, assim, duas hipóteses. Se $t + 1 = k$, então $\alpha \in J(k)J(k) \subseteq \langle J(k) \rangle$. Por outro lado, se tivermos $t + 1 < k$, então podemos repetir o raciocínio inicial para concluir que $\beta, \gamma \in J(t+2)J(t+2)$. Se $t+2 = k$, então α escreve-se como o produto de quatro elementos de $J(k)$ e, portanto, pertence a $\langle J(k) \rangle$. Caso contrário, voltamos a repetir o raciocínio até conseguirmos escrever α como o produto de um número finito de transformações pertencentes a $J(k)$. Concluímos, então, que $\alpha \in \langle J(k) \rangle$ e, portanto, $Q = \langle J(k) \rangle$. $\square$

Lema 31. *Seja S um subsemigrupo regular maximal de Q . Então, as seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. *Se $S \cap J(n) = J(n)$, então $S \cap J(n-1) = \emptyset$.*
2. *Se $S \cap J(n) \subsetneq J(n)$, então $S \cap J(n)$ é subsemigrupo regular maximal de $J(n)$.*

Demonstração. Começamos por provar que $S \cap J(n) \neq \emptyset$. De facto, se $S \cap J(n) = \emptyset$, então $S \subseteq Q_{n-1} \subsetneq Q_{n-1} \cup M \subsetneq Q$, onde M é um subsemigrupo regular maximal de $J(n)$ definido tal como no Lema 27. Pelo Teorema 41, $Q_{n-1} \cup M$ é um subsemigrupo regular maximal de Q , o que contradiz a maximalidade de S . Assim, $S \cap J(n) \neq \emptyset$.

Suponhamos, em primeiro lugar, que $S \cap J(n) = J(n)$. Então, $J(n) \subseteq S$. Se existir $\alpha \in S \cap J(n-1)$, então $\alpha \in J(n-1)$ e, pelo Lema 26, temos $J(n-1) \subseteq J(n)\alpha J(n) \subseteq S\alpha S \subseteq S$. Assim, S é um subsemigrupo de Q que contém $J(n-1)$. Pelo Lema 30, $Q_{n-1} \subseteq S$, (pois Q_{n-1} é o menor subsemigrupo de Q que contém $J(n-1)$). Portanto,

$$Q = Q_{n-1} \cup J(n) \subseteq S,$$

pelo que $Q = S$, o que contradiz a maximalidade de S . A contradição resultou de supormos que existe $\alpha \in S \cap J(n-1)$. Logo, $S \cap J(n-1) = \emptyset$.

Suponhamos, agora, que $S \cap J(n) \subsetneq J(n)$. Como $S \cap J(n) \neq \emptyset$, segue que $S \cap J(n)$ é subsemigrupo de $J(n)$ e $S \cap H_{\varepsilon_r} \neq \emptyset$, para algum $r \in P$. Definamos, como anteriormente, $R = \{r \in P : S \cap H_{\varepsilon_r} \neq \emptyset\}$. Então,

$$S \cap J(n) = \bigcup_{r \in R} (S \cap H_{\varepsilon_r}),$$

onde $S \cap H_{\varepsilon_r}$ é subsemigrupo finito de H_{ε_r} , para todo $r \in R$. Portanto, $S \cap J(n)$ é uma união disjunta de grupos e, em particular, é um subsemigrupo regular de $J(n)$. Se $S \cap J(n)$ não é maximal nestas

condições, então existe T subsemigrupo regular de $J(n)$ tal que $S \cap J(n) \subsetneq T \subsetneq J(n)$. Então, $Q_{n-1} \cup T$ é subsemigrupo regular de Q . Mas

$$S = S \cap Q = (S \cap Q_{n-1}) \cup (S \cap J(n)) \subsetneq Q_{n-1} \cup T \subsetneq Q,$$

o que contradiz a maximalidade de S . Logo, podemos concluir que $S \cap J(n)$ é subsemigrupo regular maximal de $J(n)$. $\square$

Estamos, agora, em condições de apresentar o próximo resultado, que nos permite caracterizar todos os subsemigrupos regulares maximais de Q .

Teorema 42. *Os subsemigrupos regulares maximais de Q são exatamente os conjuntos S da forma $Q_{n-2} \cup J(n)$, ou $Q_{n-1} \cup M$, onde M é um subsemigrupo regular maximal de $J(n)$ como definido no Lema 27.*

Demonstração. Pelos Teoremas 40 e 41, $Q_{n-2} \cup J(n)$ e $Q_{n-1} \cup M$ são subsemigrupos regulares maximais de Q .

Suponhamos agora que S é um subsemigrupo regular maximal de Q . Tendo em conta o Lema 31, consideramos dois casos: quando $S \cap J(n) = J(n)$ e quando $S \cap J(n) \subsetneq J(n)$. Se $S \cap J(n) = J(n)$ então, pelo Lema 31, $S \cap J(n-1) = \emptyset$ e, portanto, $S \subseteq Q_{n-2} \cup J(n)$. Mas, pelo Teorema 40, $Q_{n-2} \cup J(n)$ é subsemigrupo regular maximal de Q , bem como S . Logo, $S = Q_{n-2} \cup J(n)$.

Por último, se $S \cap J(n) \subsetneq J(n)$, então $S \cap J(n)$ é subsemigrupo regular maximal de $J(n)$. Do Lema 29, segue que $S \cap J(n) = \bigcup_{p \in P} M_p$, onde, para cada p , $M_p = U\phi_p^{-1}$, com U subgrupo maximal de $GL(W)$. Tal como anteriormente, seja $M = \bigcup_{p \in P} M_p = S \cap J(n)$. É claro que $S \cap J(n) \subseteq J(n)$ e que $S \setminus J(n) \subseteq Q_{n-1}$ e, portanto, $S \subseteq Q_{n-1} \cup M$. Pelo Teorema 41, $Q_{n-1} \cup M$ é subsemigrupo regular maximal de Q . Como, por hipótese, S também é subsemigrupo regular maximal de Q , temos $S = Q_{n-1} \cup M$. $\square$

De seguida, consideramos o caso em que $V = W$ e V é um espaço vetorial sobre um corpo K finito tal que $\dim V = n < \aleph_0$. Sabemos que quando $V = W$, então $T(V, W) = T(V)$. Ora, $T(V)$ é regular, pelo que $Q = T(V)$ e, conseqüentemente, $J(n) = \{\alpha \in T(V) : \dim(V\alpha) = n\}$. Dado $\alpha \in J(n)$, temos $\dim(V) = \dim(V\alpha) = n < \aleph_0$, pelo que $V = V\alpha$. Assim, toda a aplicação $\alpha \in J(n)$ é bijetiva, isto é, $J(n) = GL(V)$. O resultado que se segue é, pois, corolário do Teorema 42.

Corolário 14. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n < \aleph_0$ sobre um corpo finito K e seja S um subsemigrupo regular maximal de $T(V)$. Então S é da forma $Q_{n-2} \cup GL(V)$, ou $Q_{n-1} \cup M$, com M subgrupo maximal de $GL(V)$.*

Capítulo 6

Semigrupos de transformações lineares com um espaço invariante

Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ e um subespaço W de V , podemos considerar o semigrupo de transformações lineares correspondente a $S(V, W)$, isto é, o subsemigrupo de $T(V)$ que consiste de todas as aplicações lineares que deixam W invariante. Temos, então, o conjunto

$$S(V, W) = \{\alpha \in T(V) : W\alpha \subseteq W\},$$

que será objeto do nosso estudo neste capítulo. A maioria dos resultados aqui apresentados estão publicados em [3].

Notemos que, se $V = W$ ou $W = \{0_V\}$, então $S(V, W) = T(V)$, pelo que $S(V, W)$ pode ser visto como uma generalização de $T(V)$. Começemos por ver que todo o $S(V, W)$ é, de facto, um semigrupo.

Proposição 11. *O conjunto $S(V, W)$ é um subsemigrupo de $T(V)$.*

Demonstração. Começemos por mostrar que $S(V, W)$ é não vazio. De facto, tanto id_V como V_0 são elementos de $T(V)$, e $W \text{id}_V = W$, $W V_0 = \{0_V\} \subseteq W$. Logo, $\text{id}_V, V_0 \in S(V, W)$.

Sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Então $\alpha, \beta \in T(V)$ e $W\alpha \subseteq W$, $W\beta \subseteq W$. Então, $\alpha\beta \in T(V)$ e

$$W(\alpha\beta) = (W\alpha)\beta \subseteq W\beta \subseteq W.$$

Logo, $\alpha\beta \in S(V, W)$. Assim, $S(V, W)$ é um subsemigrupo de $T(V)$. □

É fácil verificar que $S(V, W)$ contém o semigrupo $T(V, W) = \{\alpha \in T(V) : V\alpha \subseteq W\}$, definido no capítulo anterior. Na verdade, $T(V, W)$ é um ideal de $S(V, W)$.

Proposição 12. *O conjunto $T(V, W)$ é um ideal de $S(V, W)$.*

Demonstração. É claro que $T(V, W) \subseteq S(V, W)$, uma vez que, para todo $\alpha \in T(V)$, de $W \subseteq V$ segue que $W\alpha \subseteq V\alpha$. Assim, se $V\alpha \subseteq W$ também $W\alpha \subseteq W$. Portanto, $T(V, W)$ é um subsemigrupo de $S(V, W)$. Vejamos que é, de facto, um ideal. Consideremos, então, $\alpha \in T(V, W)$ e $\lambda, \mu \in S(V, W)$. Temos

$$V(\lambda\alpha) = (V\lambda)\alpha \subseteq V\alpha \subseteq W,$$

pelo que $\lambda\alpha \in T(V, W)$. Por outro lado,

$$V(\alpha\mu) = (V\alpha)\mu \subseteq W\mu \subseteq W$$

e, portanto, $\alpha\mu \in T(V, W)$. □

6.1 Isomorfismos

Como referimos antes, se $V = W$ ou $W = \{0_V\}$, temos $S(V, W) = T(V)$. É bem sabido que $T(V)$ é um semigrupo regular. Por isso, neste caso, $S(V, W)$ é regular. No entanto, em geral, $S(V, W)$ não é um semigrupo regular. De seguida, caracterizamos os elementos regulares de $S(V, W)$. Este resultado deve-se a Nenthein e Kemprasit (ver [8]).

Lema 32. *Seja $\alpha \in S(V, W)$. Então, α é regular em $S(V, W)$ se e só se $V\alpha \cap W = W\alpha$.*

Demonstração. Começemos por supor que α é regular em $S(V, W)$. Então, existe $\gamma \in S(V, W)$ tal que $\alpha\gamma\alpha = \alpha$. Ora, por $\alpha \in S(V, W)$, sabemos que $W\alpha \subseteq W$ e, como $W \subseteq V$, temos $W\alpha \subseteq V\alpha$. Logo, $W\alpha \subseteq V\alpha \cap W$. Vejamos que $V\alpha \cap W \subseteq W\alpha$. Dado $v \in V\alpha \cap W$, existe $v' \in V$ tal que $v'\alpha = v$. Assim, $v = v'\alpha = (v'\alpha\gamma)\alpha$. Como $v'\alpha \in W$ e $\gamma \in S(V, W)$, temos $(v'\alpha)\gamma \in W$. Portanto, $v = (v'\alpha\gamma)\alpha \in W\alpha$, e $V\alpha \cap W \subseteq W\alpha$. Logo, $V\alpha \cap W = W\alpha$.

Assumamos, agora, que $V\alpha \cap W = W\alpha$. Escrevamos $V\alpha \cap W = W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, com $w_i \in W$ para cada i , e $\ker \alpha \cap W = \langle w_k \rangle$. Então, $W = \langle w_i \rangle \oplus \langle w_k \rangle$. Podemos estender a base $\{w_k\}$ de $\ker \alpha \cap W$ para uma base de $\ker \alpha$, digamos $\{w_k\} \dot{\cup} \{z_r\}$, e estender a base $\{w_i\}$ de $V\alpha \cap W$ para $V\alpha$, digamos $V\alpha = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle v_j\alpha \rangle$. Assim, podemos escrever α como

$$\alpha = \begin{pmatrix} z_r & w_k & w_i & v_j \\ 0 & 0 & w_i\alpha & v_j\alpha \end{pmatrix}.$$

Como $\{w_i\alpha\} \dot{\cup} \{v_j\alpha\}$ é uma base de $V\alpha$ e $V\alpha$ é um subespaço de V , podemos escrever $V = \langle z_t \rangle \oplus \langle v_j\alpha \rangle \oplus \langle w_i\alpha \rangle$. Definamos $\gamma \in T(V)$ por

$$\gamma = \begin{pmatrix} z_t & w_i\alpha & v_j\alpha \\ 0 & w_i & v_j \end{pmatrix}.$$

Notemos que $W\gamma \subseteq (\langle z_t \rangle \oplus \langle w_i\alpha \rangle)\gamma = \langle w_i \rangle \subseteq W$, pelo que $\gamma \in S(V, W)$. Mais,

$$\alpha\gamma\alpha = \begin{pmatrix} z_r & w_k & w_i & v_j \\ 0 & 0 & w_i\alpha & v_j\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_t & w_i\alpha & v_j\alpha \\ 0 & w_i & v_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_r & w_k & w_i & v_j \\ 0 & 0 & w_i\alpha & v_j\alpha \end{pmatrix} = \alpha.$$

Portanto, α é regular em $S(V, W)$. □

Com este resultado, podemos concluir que $S(V, W)$ é regular apenas quando $W = V$ ou $W = \{0_V\}$.

Lema 33. *O semigrupo $S(V, W)$ é regular se e só se $W = V$ ou $W = \{0_V\}$.*

Demonstração. Como já referimos acima, se $W = V$ ou $W = \{0_V\}$ então $S(V, W) = T(V)$, que sabemos ser um semigrupo regular.

Suponhamos, agora, que $W \subsetneq V$ e $W \neq \{0_V\}$. Sejam $W = \langle w \rangle \oplus \langle w_j \rangle$ e $V = W \oplus \langle v \rangle \oplus \langle v_i \rangle$ (onde J e I podem ser eventualmente vazios). Definamos α em $T(V)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} w & w_j & v & v_i \\ 0 & 0 & w & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $W\alpha = \{0_V\} \subseteq W$, temos $\alpha \in S(V, W)$. Mais, $W\alpha = \{0_V\} \neq \langle w \rangle = V\alpha \cap W$ e, pelo Lema 32, α não é regular. Portanto, $S(V, W)$ não é regular. □

No capítulo 4, vimos que $S(X, Y)$ é isomorfo a $T(Z)$ se e só se $X = Y$ ou $|Y| = |Z|$. O resultado correspondente para espaços vetoriais e transformações lineares é o que se segue.

Corolário 15. *Se $W \subsetneq V$ e $W \neq \{0_V\}$, então $S(V, W)$ nunca é isomorfo a $T(U)$, qualquer que seja o espaço vetorial U .*

Demonstração. O resultado sai de imediato, aplicando o Lema 33. □

Notemos que $S(V, W)$ tem sempre um elemento zero, a aplicação nula, que denotamos por V_0 . Em $S(X, Y)$, não temos, em geral, elemento zero. Iremos demonstrar agora este resultado, pois permite-nos determinar quando é que semigrupos destes dois tipos distintos podem ser isomorfos.

Lema 34. *O semigrupo $S(X, Y)$ tem elemento zero se e só se $|Y| = 1$.*

Demonstração. Suponhamos que $|Y| = 1$ e $Y = \{a\}$. Definamos α em $T(X)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha \in S(X, Y)$, pois $Y\alpha = X\alpha = \{a\} = Y$. Na verdade, α é o único elemento de $S(X, Y)$, pois, neste caso, todo o elemento de $S(X, Y)$, por ser transformação total, tem domínio X e, por a imagem estar contida em Y , tem contradomínio $\{a\}$. Logo, α é elemento zero.

Reciprocamente, suponhamos que $S(X, Y)$ tem elemento zero. Seja δ esse elemento zero. Tomemos $b, c \in Y$ e definamos $\beta, \gamma \in T(X)$ por

$$\beta = \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} X \\ c \end{pmatrix}.$$

É claro que $\beta, \gamma \in S(X, Y)$. Como δ é elemento zero, $\delta\beta = \delta = \delta\gamma$. Por outro lado, temos

$$\emptyset \neq X(\delta\beta) = (X\delta)\beta \subseteq X\beta = \{b\} \quad \text{e} \quad \emptyset \neq X(\delta\gamma) = (X\delta)\gamma \subseteq X\gamma = \{c\},$$

pelo que $\delta\beta = \beta$ e $\delta\gamma = \gamma$. Assim, $\beta = \alpha = \gamma$, donde segue que $b = c$. Logo, $|Y| = 1$. □

Desta forma, se $|Y| > 1$, $S(X, Y)$ não tem elemento zero, enquanto que $0_V \in S(V, W)$, para quaisquer V e W .

Corolário 16. *Seja Y um subconjunto não vazio de X . Se $|Y| > 1$, $S(X, Y)$ nunca é isomorfo a $S(V, W)$, para qualquer espaço vetorial V e qualquer seu subespaço W .*

6.2 Relações de Green

No Capítulo 4 vimos que, em $S(X, Y)$, $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só se $X\alpha = X\beta$ e $Y\alpha = Y\beta$ e $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\pi_\alpha = \pi_\beta$ e $\pi_\alpha(Y) = \pi_\beta(Y)$. Para $S(V, W)$, os resultados correspondentes seguem dos próximos Lemas.

Lema 35. *Sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Então, existe $\gamma \in S(V, W)$ tal que $\alpha = \gamma\beta$ se e só se $V\alpha \subseteq V\beta$ e $W\alpha \subseteq W\beta$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{L} \beta$ se e só se $V\alpha = V\beta$ e $W\alpha = W\beta$.*

Demonstração. Se $\alpha = \gamma\beta$, então $V\alpha = V(\gamma\beta) = (V\gamma)\beta \subseteq V\beta$ e, similarmente, $W\alpha = W(\gamma\beta) = (W\gamma)\beta \subseteq W\beta$.

Suponhamos, agora, que $V\alpha \subseteq V\beta$ e $W\alpha \subseteq W\beta$. Sejam $W = \langle w_i \rangle$ e $V = \langle w_i \rangle \oplus \langle v_j \rangle$. Como $W\alpha \subseteq W\beta$, temos que $w_i\alpha \in W\beta$, pelo que existe $w'_i \in W$ tal que $w_i\alpha = w'_i\beta$. Analogamente, temos que para todo $v_j\alpha \in V\alpha$, existe $v'_j\beta \in V\beta$, tal que $v_j\alpha = v'_j\beta$.

Tomemos

$$\gamma = \begin{pmatrix} w_i & v_j \\ w'_i & v'_j \end{pmatrix}.$$

É claro que $\gamma \in T(V)$ e $W\gamma = \langle w'_i \rangle \subseteq W$. Logo, $\gamma \in S(V, W)$. Mais, $(w_i\gamma)\beta = w'_i\beta = w_i\alpha$ e $(v_j\gamma)\beta = v'_j\beta = v_j\alpha$, pelo que $\alpha = \gamma\beta$.

Pelo que acabamos de ver, segue trivialmente que $\alpha \mathcal{L} \beta$ em $S(V, W)$ se e só se $V\alpha = V\beta$ e $W\alpha = W\beta$. $\square$

Lema 36. *Sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Então $\alpha = \beta\gamma$, para algum $\gamma \in S(V, W)$, se e só se $\ker \beta \subseteq \ker \alpha$ e $W\beta^{-1} \subseteq W\alpha^{-1}$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{R} \beta$ se e só se $\ker \alpha = \ker \beta$ e $W\beta^{-1} = W\alpha^{-1}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = \beta\gamma$, para algum $\gamma \in S(V, W)$. Tomemos $v \in \ker \beta$. Então $v\beta = 0$ e $v\alpha = v(\beta\gamma) = (v\beta)\gamma = 0\gamma = 0$. Logo, $v \in \ker \alpha$, e temos a primeira inclusão pretendida. Dado $w \in W\beta^{-1}$, temos $w\beta \in W$. Como $\gamma \in S(V, W)$, sabemos que $W\gamma \subseteq W$ e, portanto, $w\alpha = w(\beta\gamma) = (w\beta)\gamma \in W$. Logo, $w \in W\alpha^{-1}$, donde segue que $W\beta^{-1} \subseteq W\alpha^{-1}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\ker \beta \subseteq \ker \alpha$ e $W\beta^{-1} \subseteq W\alpha^{-1}$. Então, podemos escrever $\ker \beta \cap W = \langle w_i \rangle$, $\ker \beta = \langle w_i \rangle \oplus \langle v_j \rangle$, $\ker \alpha \cap W = \langle w_i \rangle \oplus \langle w_k \rangle$ e $\ker \alpha = \langle w_i \rangle \oplus \langle w_k \rangle \oplus \langle v_j \rangle \oplus \langle v_\ell \rangle$. Tomemos $W = \langle w_i \rangle \oplus \langle w_k \rangle \oplus \langle w_s \rangle$ e, por fim, $V = W \oplus \langle v_j \rangle \oplus \langle v_\ell \rangle \oplus \langle u_t \rangle$. Com estas escolhas de bases, podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} w_i & w_k & w_s & v_j & v_\ell & u_t \\ 0 & 0 & w_s\alpha & 0 & 0 & u_t\alpha \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} w_i & w_k & w_s & v_j & v_\ell & u_t \\ 0 & w_k\beta & w_s\beta & 0 & v_\ell\beta & u_t\beta \end{pmatrix}.$$

Temos $V\alpha = \langle w_s\alpha \rangle \oplus \langle u_t\alpha \rangle$ e, ainda, $V\beta = \langle w_k\beta \rangle \oplus \langle w_s\beta \rangle \oplus \langle v_\ell\beta \rangle \oplus \langle u_t\beta \rangle$. Assim, podemos escrever $V = V\beta \oplus \langle z_r \rangle \oplus \langle z_p \rangle$, onde $W = (W \cap V\beta) \oplus \langle z_r \rangle$. Definamos $\gamma \in T(V)$ por

$$\gamma = \begin{pmatrix} w_k\beta & w_s\beta & v_\ell\beta & u_t\beta & z_r & z_p \\ 0 & w_s\alpha & 0 & u_t\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vejamos que $\gamma \in S(V, W)$, ou seja, que $W\gamma \subseteq W$. Como, para todo r , $z_r\gamma = 0 \in W$, basta verificar que $(W \cap V\beta)\gamma \in W$. Assim, tomemos $w \in W \cap V\beta$. Então, existe $x \in V$ tal que $w = x\beta$. Como $x \in V$, podemos escrever

$$x = \sum_{i \in I} a_i w_i + \sum_{k \in K} b_k w_k + \sum_{s \in S} c_s w_s + \sum_{j \in J} d_j v_j + \sum_{\ell \in L} e_\ell v_\ell + \sum_{t \in T} f_t u_t,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i \in I} a_i (w_i \beta) + \sum_{k \in K} b_k (w_k \beta) + \sum_{s \in S} c_s (w_s \beta) + \sum_{j \in J} d_j (v_j \beta) + \sum_{\ell \in L} e_\ell (v_\ell \beta) + \sum_{t \in T} f_t (u_t \beta) \\ &= \sum_{k \in K} b_k (w_k \beta) + \sum_{s \in S} c_s (w_s \beta) + \sum_{\ell \in L} e_\ell (v_\ell \beta) + \sum_{t \in T} f_t (u_t \beta). \end{aligned}$$

e, aplicando γ , temos

$$w\gamma = \sum_{s \in S} c_s (w_s \alpha) + \sum_{t \in T} f_t (u_t \alpha).$$

Determinemos, agora, $x\alpha$:

$$\begin{aligned} x\alpha &= \sum_{i \in I} a_i (w_i \alpha) + \sum_{k \in K} b_k (w_k \alpha) + \sum_{s \in S} c_s (w_s \alpha) + \sum_{j \in J} d_j (v_j \alpha) + \sum_{\ell \in L} e_\ell (v_\ell \alpha) + \sum_{t \in T} f_t (u_t \alpha) \\ &= \sum_{s \in S} c_s (w_s \alpha) + \sum_{t \in T} f_t (u_t \alpha). \end{aligned}$$

Então, $w\gamma = x\alpha$. Ora, sabemos que $w = x\beta \in W \cap V\beta$. Em particular, $x\beta \in W$ e, portanto, $x \in W\beta^{-1}$. Mas $W\beta^{-1} \subseteq W\alpha^{-1}$, pelo que $x\alpha \in W$, ou seja, $w\gamma \in W$. Logo, $W\gamma \subseteq W$ e $\gamma \in S(V, W)$. Facilmente se verifica que $\alpha = \beta\gamma$. $\square$

Para demonstrarmos o próximo Teorema, onde caracterizaremos a relação $\mathcal{D}$ em $S(V, W)$, precisamos dos dois lemas que em seguida apresentamos.

Lema 37. *Seja $\alpha \in S(V, W)$. Então,*

1. $\dim(W\alpha) = \dim(W/(W \cap \ker \alpha))$.
2. $\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = \dim(W\alpha^{-1}/(W\alpha)\alpha^{-1})$.
3. $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = \dim(V/W\alpha^{-1})$.

Demonstração. Começemos por escolher bases para os espaços vetoriais em questão. Como $\alpha \in S(V, W)$, podemos escrever $W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$ e $V\alpha \cap W = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle v_j\alpha \rangle$, de onde segue que $V\alpha = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle v_j\alpha \rangle \oplus \langle v_k\alpha \rangle$. Escrevamos, agora, $\ker \alpha \cap W = \langle z_r \rangle$ e $\ker \alpha = \langle z_r \rangle \oplus \langle z_t \rangle$. Por último, podemos escrever $V = \langle w_i \rangle \oplus \langle v_j \rangle \oplus \langle v_k \rangle \oplus \langle z_r \rangle \oplus \langle z_t \rangle$, $W = \langle w_i \rangle \oplus \langle z_r \rangle$ e $W\alpha^{-1} = \langle w_i \rangle \oplus \langle v_j \rangle \oplus \langle z_r \rangle \oplus \langle z_t \rangle$.

Vejam, em primeiro lugar, que $\dim(W\alpha) = \dim(W/(W \cap \ker \alpha))$. Ora, pela construção acima, é fácil ver que $\dim(W\alpha) = |I| = \dim(W/(W \cap \ker \alpha))$. Para a segunda igualdade, reparemos que $(W\alpha)\alpha^{-1} = \langle w_i \rangle \oplus \langle z_r \rangle \oplus \langle z_t \rangle$, pelo que

$$\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = |J| = \dim(W\alpha^{-1}/(W\alpha)\alpha^{-1}).$$

Por último, $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = |K| = \dim(V/W\alpha^{-1})$. □

Lema 38. *Sejam $\alpha, \beta \in T(V, W)$. Então, $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$ se e só se $(W\alpha)\alpha^{-1} \subseteq (W\beta)\beta^{-1}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$. Vamos mostrar que $(W\alpha)\alpha^{-1} \subseteq (W\beta)\beta^{-1}$. Para tal, tomemos $x \in (W\alpha)\alpha^{-1}$. Então, $x\alpha \in W\alpha$ e, portanto, existe $w \in W$ tal que $x\alpha = w\alpha$. Assim, $x - w \in \ker \alpha \subseteq \ker \beta$, pelo que $(x - w)\beta = 0$, isto é, $x\beta = w\beta$. Como $w \in W$, concluímos que $x\beta \in W\beta$ e, portanto, $x \in (W\beta)\beta^{-1}$. Logo, $(W\alpha)\alpha^{-1} \subseteq (W\beta)\beta^{-1}$. □

Estamos, assim, em condições de avançar para o Teorema que se segue.

Teorema 43. *Sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Então, $\alpha \mathcal{D} \beta$ se e só se $\dim(W\alpha) = \dim(W\beta)$, $\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = \dim((V\beta \cap W)/W\beta)$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$ e suponhamos que $\alpha \mathcal{D} \beta$. Então, existe $\gamma \in S(V, W)$ tal que $\alpha \mathcal{L} \gamma \mathcal{R} \beta$. Pelo Lema 35, sabemos que $V\alpha = V\gamma$ e $W\alpha = W\gamma$ e, pelo Lema 36, $\ker \gamma = \ker \beta$ e $W\gamma^{-1} = W\beta^{-1}$. Ora, pelo Lema 37, temos que

$$\dim(W\alpha) = \dim(W\gamma) = \dim(W/(W \cap \ker \gamma)) = \dim(W/(W \cap \ker \beta)) = \dim(W\beta).$$

Mais, novamente pelo Lema 37,

$$\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = \dim((V\gamma \cap W)/W\gamma) = \dim(W\gamma^{-1}/(W\gamma)\gamma^{-1}).$$

Como $W\gamma^{-1} = W\beta^{-1}$ e, pelo Lema 38, $(W\gamma)\gamma^{-1} = (W\beta)\beta^{-1}$ (uma vez que $\ker \gamma = \ker \beta$, temos

$$\dim(W\gamma^{-1}/(W\gamma)\gamma^{-1}) = \dim(W\beta^{-1}/(W\beta)\beta^{-1}) = \dim((V\beta \cap W)/W\beta).$$

Por último, temos, pelo Lema 37,

$$\begin{aligned} \dim((V\alpha/(V\alpha \cap W)) &= \dim((V\gamma/(V\gamma \cap W)) = \dim(V/W\gamma^{-1}) \\ &= \dim(V/W\beta^{-1}) = \dim(V\beta/(V\beta \cap W)). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, $W\beta = \langle w'_i\beta \rangle$, $(V\alpha \cap W)/W\alpha = \langle u_j\alpha + W\alpha \rangle$, $(V\beta \cap W)/W\beta = \langle u'_j\beta + W\beta \rangle$, $V\alpha/(V\alpha \cap W) = \langle v_k\alpha + V\alpha \cap W \rangle$ e $V\beta/(V\beta \cap W) = \langle v'_k\beta + V\beta \cap W \rangle$. Temos, desta forma, $V\alpha \cap W = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle u_j\alpha \rangle$ e $V\alpha = \langle v_k\alpha \rangle \oplus \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle u_j\alpha \rangle$. Analogamente, temos $V\beta \cap W = \langle v'_k\beta \rangle \oplus \langle w'_i\beta \rangle$ e $V\beta = \langle v'_k\beta \rangle \oplus \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle u'_j\beta \rangle$. Sejam $\ker \alpha = \langle z_r \rangle$ e $\ker \beta = \langle z_t \rangle$. Então, $V = \langle z_r \rangle \oplus \langle v_k \rangle \oplus \langle w_i \rangle \oplus \langle u_j \rangle$ e $V = \langle z_t \rangle \oplus \langle v'_k \rangle \oplus \langle w'_i \rangle \oplus \langle u'_j \rangle$ e podemos escrever

$$\alpha = \begin{pmatrix} z_r & w_i & u_j & v_k \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & v_k\alpha \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} z_t & w'_i & u'_j & v'_k \\ 0 & w'_i\beta & u'_j\beta & v'_k\beta \end{pmatrix}.$$

Definamos

$$\gamma = \begin{pmatrix} z_t & w'_i & u'_j & v'_k \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & v_k\alpha \end{pmatrix}.$$

Então, $\gamma \in T(V)$ e $W\gamma \subseteq W$, pelo que $\gamma \in S(V, W)$. Para além disso, $V\alpha = V\gamma$ e $W\alpha = W\gamma$. Portanto, pelo Lema 35, $\alpha \mathcal{L} \gamma$. Mais, como $\ker \gamma = \ker \beta$ e $W\gamma^{-1} = \langle w'_i \rangle \oplus \langle u'_j \rangle = W\beta^{-1}$, temos, pelo Lema 36, $\gamma \mathcal{R} \beta$. $\square$

No resultado que se segue, caracterizamos a relação $\mathcal{J}$ em $S(V, W)$.

Teorema 44. *Sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Então $\alpha = \lambda\beta\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in S(V, W)$ se e só se $\dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) \leq \dim(W\beta)$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) \leq \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$. Consequentemente, $\alpha \mathcal{J} \beta$ se e só se $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) = \dim(W\beta)$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = \lambda\beta\mu$, para alguns $\lambda, \mu \in S(V, W)$. Segue de imediato que $\dim(V\alpha) = \dim((V\lambda)\beta\mu) \leq \dim((V\beta)\mu) \leq \dim(V\beta)$.

De modo análogo, $\dim(W\alpha) = \dim((W\lambda)\beta\mu) \leq \dim((W\beta)\mu) \leq \dim(W\beta)$. Por último, temos

$$\begin{aligned} \dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) &= \dim(V\lambda\beta\mu/(V\lambda\beta\mu \cap W)) \leq \dim(V\beta\mu/(V\beta\mu \cap W)) \\ &\leq \dim(V\beta/(V\beta \cap W)). \end{aligned}$$

Assumamos, agora, que $\dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) \leq \dim(W\beta)$ e, ainda, que $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) \leq \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$. Escrevamos $W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, $V\alpha \cap W = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle u_j\alpha \rangle$, $V\alpha/(V\alpha \cap W) = \langle v_k\alpha + V\alpha \cap W \rangle$ e, portanto, $V\alpha = \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle u_j\alpha \rangle \oplus \langle v_k\alpha \rangle$. Analogamente, sejam $W\beta = \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle w'_\ell\beta \rangle$, $V\beta \cap W = \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle w'_\ell\beta \rangle \oplus \langle u'_m\beta \rangle$, $V\beta/(V\beta \cap W) = \langle v'_n\beta + V\beta \cap W \rangle \oplus \langle v'_k\beta + V\beta \cap W \rangle$ e, consequentemente, $V\beta = \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle w'_\ell\beta \rangle \oplus \langle u'_m\beta \rangle \oplus \langle v'_n\beta \rangle \oplus \langle v'_k\beta \rangle$. Assim, escrevamos $V = \langle w_i \rangle \oplus \langle u_j \rangle \oplus \langle v_k \rangle \oplus \langle z_r \rangle$, onde $\ker \alpha = \langle z_r \rangle$ e, ainda, $V = \langle w'_i \rangle \oplus \langle w'_\ell \rangle \oplus \langle u'_m \rangle \oplus \langle v'_n \rangle \oplus \langle v'_k \rangle \oplus \langle z_t \rangle$, onde $\ker \beta = \langle z_t \rangle$. Desta forma, podemos escrever α e β como

$$\alpha = \begin{pmatrix} z_r & w_i & u_j & v_k \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & v_k\alpha \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} z_t & w'_i & w'_\ell & u'_m & v'_n & v'_k \\ 0 & w'_i\beta & w'_\ell\beta & u'_m\beta & v'_n\beta & v'_k\beta \end{pmatrix}.$$

Temos que $|I| + |J| + |K| \leq |I| + |L| + |M| + |N| + |K|$, uma vez que, por hipótese, $\dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta)$. Vamos considerar dois casos, e começamos pelo caso em que $|J| \leq |L| + |M| + |N|$.

Suponhamos que $L \dot{\cup} M \dot{\cup} N = P \dot{\cup} Q$, onde, sem perda de generalidade, $|P| = |J|$. Desta forma, podemos escrever $\{w'_\ell\} \dot{\cup} \{u'_m\} \dot{\cup} \{v'_n\} = \{s_p\} \dot{\cup} \{s_q\}$ e reescrever β como

$$\beta = \begin{pmatrix} z_t & w'_i & s_p & s_q & v'_k \\ 0 & w'_i\beta & s_p\beta & s_q\beta & v'_k\beta \end{pmatrix}.$$

Como $|J| = |P|$, existe uma bijeção $\varphi : J \rightarrow P$. Seja, assim, definamos λ em $T(V)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} z_r & w_i & u_j & v_k \\ 0 & w'_i & s_{j\varphi} & v'_k \end{pmatrix}.$$

Reparemos que $W\lambda = \langle w'_i \rangle \subseteq W$. Logo, $\lambda \in S(V, W)$. Temos $V\beta = \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle s_p\beta \rangle \oplus \langle s_q\beta \rangle \oplus \langle v'_k\beta \rangle$ e podemos escrever $V = \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle s_p\beta \rangle \oplus \langle s_q\beta \rangle \oplus \langle v'_k\beta \rangle \oplus \langle z'_s \rangle$. Definamos $\mu \in T(V)$ por

$$\mu = \begin{pmatrix} z'_s & w'_i\beta & s_{j\varphi}\beta & s_q\beta & v'_k\beta \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & 0 & v_k\alpha \end{pmatrix}.$$

É claro que $\mu \in S(V, W)$ e

$$\begin{aligned}\lambda\beta\mu &= \begin{pmatrix} z_r & w_i & u_j & v_k \\ 0 & w'_i & s_{j\varphi} & v'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_t & w'_i & s_p & s_q & v'_k \\ 0 & w'_i\beta & s_p\beta & s_q\beta & v'_k\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_s & w'_i\beta & s_{j\varphi}\beta & s_q\beta & v'_k\beta \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & 0 & v_k\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_r & w_i & u_j & v_k \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & v_k\alpha \end{pmatrix} = \alpha.\end{aligned}$$

Consideremos agora o caso em que $|J| > |L| + |M| + |N|$. Temos, então, $\dim(V\beta)$ infinita, pelo que $|J| \leq |I|$ ou $|J| \leq |K|$.

Se $|J| \leq |I|$, então escrevemos $I = P \dot{\cup} Q$, onde $|P| = |I|$ e $|Q| = |J|$. Podemos escrever $\{w'_i\} = \{s_p\} \dot{\cup} \{s_q\}$ e reescrevemos

$$\beta = \begin{pmatrix} z_t & s_p & s_q & w'_\ell & u'_m & v'_n & v'_k \\ 0 & s_p\beta & s_q\beta & w'_\ell\beta & u'_m\beta & v'_n\beta & v'_k\beta \end{pmatrix}.$$

Por hipótese, temos $|I| = |P|$ e $|J| = |Q|$ e, por isso, existem bijeções $\varphi : I \rightarrow P$ e $\psi : J \rightarrow Q$. De $V\beta = \langle s_p\beta \rangle \oplus \langle s_q\beta \rangle \oplus \langle w'_\ell\beta \rangle \oplus \langle u'_m\beta \rangle \oplus \langle v'_n\beta \rangle \oplus \langle v'_k\beta \rangle$, podemos escrever $V = \langle s_p\beta \rangle \oplus \langle s_q\beta \rangle \oplus \langle w'_\ell\beta \rangle \oplus \langle u'_m\beta \rangle \oplus \langle v'_n\beta \rangle \oplus \langle v'_k\beta \rangle \oplus \langle z'_t \rangle$. Assim, definimos λ, μ em $T(V)$ por

$$\lambda = \begin{pmatrix} z_r & w_i & u_j & v_k \\ 0 & s_{i\varphi} & s_{j\psi} & v'_k \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} z'_t & s_{i\varphi}\beta & s_{j\psi}\beta & w'_\ell\beta & u'_m\beta & v'_n\beta & v'_k\beta \\ 0 & w_i\alpha & u_j\alpha & 0 & 0 & 0 & v_k\alpha \end{pmatrix}.$$

Logo, $\alpha = \lambda\beta\mu$. O subcaso $|J| \leq |K|$ é análogo, pelo que o resultado segue. $\square$

Os próximos exemplos mostram que, geralmente, em $S(V, W)$, $\mathcal{D} \neq \mathcal{J}$. Em ambos os exemplos, V é infinitamente gerado, sendo que W é infinitamente gerado no primeiro exemplo e finitamente gerado no segundo.

Exemplo 13. Sejam $V = \langle w \rangle \oplus \langle w_k \rangle \oplus \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w \rangle \oplus \langle w_k \rangle$, com K infinito. Escrevamos $\{w_k : k \in K\} = \{w'\} \dot{\cup} \{w'_k : k \in K\}$ e consideremos α, β em $T(V)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w & w' & w'_k \\ 0 & w & w' & w' & w'_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w & w' & w'_k \\ 0 & w' & w' & w' & w'_k \end{pmatrix}.$$

Obviamente, temos $\alpha, \beta \in S(V, W)$ e $V\alpha = \langle w, w_k \rangle$, $V\beta = \langle w_k \rangle$, $W\alpha = \langle w_k \rangle$ e $W\beta = \langle w_k \rangle$ e, desta forma, $\dim(V\alpha) = |K| = \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) = |K| = \dim(W\beta)$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = 0 = \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$. Logo, pelo Teorema 44, $\alpha \mathcal{J} \beta$. Como $\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = 1 \neq 0 = \dim((V\beta \cap W)/W\beta)$, pelo Teorema 43, $\alpha \not\mathcal{D} \beta$.

Exemplo 14. Sejam $V = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \oplus \langle u \rangle \oplus \langle u_k \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, com K é infinito. Consideremos $\alpha, \beta \in T(V)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} u & w_1 & w_2 & w_3 & u_k \\ 0 & 0 & w_1 & w_3 & u_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & u & u_k \\ 0 & w_1 & w_3 & w_2 & u_k \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Mais, $V\alpha = \langle w_1, w_2 \rangle \oplus \langle u_k \rangle$, $W\alpha = \langle w_1, w_3 \rangle$, $V\alpha \cap W = \langle w_1, w_3 \rangle$, $V\beta = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \oplus \langle u_k \rangle$, $W\beta = \langle w_1, w_3 \rangle$ e $V\beta \cap W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$. Então, $\dim(V\alpha) = |K| = \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) = 2 = \dim(W\beta)$ e, por fim, temos $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = |K| = \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$. Logo, pelo Teorema 44, $\alpha \mathcal{J} \beta$. Por outro lado, $\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = 0 \neq 1 = \dim((V\beta \cap W)/W\beta)$ e, pelo Teorema 43, $\alpha \not\mathcal{D} \beta$.

De seguida vemos uma condição necessária e suficiente para que, em $S(V, W)$, as relações $\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}$ coincidam.

Teorema 45. Em $S(V, W)$, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ se e só se $W = V$ ou $W = \{0\}$ ou $\dim(V) < \aleph_0$.

Demonstração. Se $W = V$ ou $W = \{0\}$, então $S(V, W) = T(V)$ e, consequentemente, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. Suponhamos, agora, que V é finito e sejam $\alpha, \beta \in S(V, W)$ tais que $\alpha \mathcal{J} \beta$. Então, pelo Teorema 44, temos que $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) = \dim(W\beta)$ e, ainda, $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$.

Escrevamos $W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$, $V\alpha/(V\alpha \cap W) = \langle u_k\alpha + V\alpha \cap W \rangle$, $W\beta = \langle w'_i\beta \rangle$ e $V\beta/(V\beta \cap W) = \langle u'_k\beta + V\beta \cap W \rangle$. Escrevamos também $V\alpha \cap W = \langle v_j\alpha \rangle \oplus \langle w_i\alpha \rangle$, $V\alpha = \langle v_j\alpha \rangle \oplus \langle w_i\alpha \rangle \oplus \langle u_k\alpha \rangle$, $V\beta \cap W = \langle v'_\ell\beta \rangle \oplus \langle w'_i\beta \rangle$ e $V\beta = \langle v'_\ell\beta \rangle \oplus \langle w'_i\beta \rangle \oplus \langle u'_k\beta \rangle$. Temos, assim, $\dim(V\alpha) = |I| + |J| + |K|$ e $\dim(V\beta) = |I| + |L| + |K|$. Como, por hipótese, estas duas dimensões são finitas e iguais, concluímos que $|J| = |L|$ e, consequentemente, $\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = \dim((V\beta \cap W)/W\beta)$. Logo, pelo Teorema 43, $\alpha \mathcal{D} \beta$. Vimos, portanto, que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$. Ora, em qualquer semigrupo, temos $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Logo, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\dim V > \aleph_0$ e $\{0\} \neq W \subsetneq V$. Consideremos dois casos, quando W é finitamente gerado e quando W é infinitamente gerado.

Suponhamos que $\dim W = n < \aleph_0$. Sejam $V = \langle w_1, \dots, w_n \rangle \oplus \langle u \rangle \oplus \langle u_k \rangle$ e $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$, com $n \geq 1$ e K infinito. Definamos α, β em $T(V)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} u & w_1 & w_2 & \dots & w_n & u_k \\ 0 & 0 & w_2 & \dots & w_n & u_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n & u & u_k \\ 0 & w_2 & \dots & w_n & w_1 & u_k \end{pmatrix}.$$

É claro que $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Mais, $\dim(V\alpha) = |K|$, $\dim(W\alpha) = n - 1$ e $\dim(V\alpha \cap W) = n - 1$. Temos, ainda, $\dim(V\beta) = |K|$, $\dim(W\beta) = n - 1$ e $\dim(V\beta \cap W) = n$. Pelo Teorema 44, $\alpha \mathcal{J} \beta$. No entanto, como

$$\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = 0 \neq 1 = \dim((V\beta \cap W)/W\beta),$$

α e β não estão $\mathcal{D}$ -relacionados. Logo, $\mathcal{J} \neq \mathcal{D}$.

Para o caso em que $\dim W > \aleph_0$, sejam $V = \langle w, w' \rangle \oplus \langle w_k \rangle \oplus \langle u \rangle \oplus \langle u_i \rangle$ e $W = \langle w, w' \rangle \oplus \langle w_k \rangle$, com K infinito (I pode ser eventualmente vazio). Definamos α, β em $T(V)$ por

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_i & u & w & w' & w_k \\ 0 & w' & w & w & w_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} u_i & u & w & w' & w_k \\ 0 & w' & w' & w' & w_k \end{pmatrix}.$$

Como $V\alpha \subseteq W$ e $V\beta \subseteq W$, é claro que $\alpha, \beta \in S(V, W)$. Temos $\dim(V\alpha) = |K| = \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) = |K| = \dim(W\beta)$ e, por fim, $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = 0 = \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$. Portanto, pelo Teorema 44, $\alpha \mathcal{J} \beta$. Por outro lado, como $\dim((V\alpha \cap W)/W\alpha) = 1 \neq 0 = \dim((V\beta \cap W)/W\beta)$, α não está $\mathcal{D}$ -relacionado com β . Assim, $\mathcal{J} \neq \mathcal{D}$. $\square$

6.3 Ideais

Nesta secção estudaremos e caracterizaremos os ideais de $S(V, W)$. Esta caracterização depende, como seria natural prever, de dimensões de subespaços de W e de V . Sejam, então, $\dim V = a$, $\dim W = b$ e $\dim(V/W) = c$. Para cada r, s e t , tais que $1 \leq r \leq a'$, $1 \leq s \leq b'$ e $1 \leq t \leq c'$, seja

$$S(r, s, t) = \{\alpha \in S(V, W) : \dim(V\alpha) < r, \dim(W\alpha) < s \text{ e } \dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) < t\}.$$

O conjunto $S(r, s, t)$ é, de facto, um ideal de $S(V, W)$, como veremos de seguida.

Teorema 46. *O conjunto $S(r, s, t)$ é um ideal de $S(V, W)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in S(r, s, t)$ e $\beta \in S(V, W)$. Notemos que $\dim(V\alpha\beta) \leq \dim(V\alpha) < r$, $\dim(W\alpha\beta) \leq \dim(W\alpha) < s$ e, por último, $\dim(V\alpha\beta/(V\alpha\beta \cap W)) \leq \dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) < t$. Assim, $\alpha\beta \in S(r, s, t)$. Analogamente, prova-se que $\gamma\alpha \in S(r, s, t)$, para $\gamma \in S(V, W)$. Portanto, $S(r, s, t)$ é ideal de $S(V, W)$. $\square$

Depois de vermos que $S(r, s, t)$ é, efetivamente, ideal de $S(V, W)$, analisemos alguns casos que seguem, trivialmente, da definição. Ora, é claro que, se $r = a'$, $s = b'$ e $t = c'$, então

$$S(r, s, t) = S(a', b', c') = S(V, W).$$

Por outro lado, se $r = b'$, $s = b'$ e $t = 1$,

$$S(r, s, t) = S(b', b', 1) = T(V, W).$$

De facto, se $\alpha \in S(V, W)$ é tal que $\dim(V\alpha) < b'$, $\dim(W\alpha) < b'$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) < 1$, então $V\alpha \subseteq W$. Ou seja, $T(V, W)$ é ideal de $S(V, W)$, como já tínhamos visto na Proposição 12. Mais, se $V = W$, então $\dim V = a = \dim W$, $\dim(V/W) = 0$, $S(V, W) = T(V)$ e, para cada r tal que $1 \leq r \leq a'$, $S(r, r, 1)$ é o conjunto de elementos de $T(V)$ tais que $\dim(V\alpha) < r$, ou seja,

$$S(r, r, 1) = T_r,$$

que sabemos bem ser ideal de $T(V)$.

Observemos que, se $r \leq u$, $s \leq v$ e $t \leq w$, então $S(r, s, t) \subseteq S(u, v, w)$. No entanto, pelo exemplo que se segue, podemos verificar que nem todos os ideais de $S(V, W)$ são da forma $S(r, s, t)$. Mais, podemos também concluir que os ideais de $S(V, W)$ não formam uma cadeia.

Exemplo 15. *Sejam $V = \langle w_1, w_2 \rangle \oplus \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Temos $\dim V = 4$, $\dim W = 2$ e $\dim V/W = 2$.*

Como $S(3, 3, 1)$ e $S(4, 2, 2)$ são ideais de $S(V, W)$, então $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2)$ é também ideal de $S(V, W)$. Suponhamos que $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2) = S(\ell, m, n)$, para $1 \leq \ell \leq 5$, $1 \leq m \leq 3$ e $1 \leq n \leq 3$.

Tomemos α em $T(V)$ definida por

$$\alpha = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & u_1 & u_2 \\ 0 & w_1 & w_2 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Como $W\alpha = \langle w_1 \rangle \subseteq W$, temos $\alpha \in S(V, W)$. Mais, $\dim(V\alpha) = 3$, $\dim(W\alpha) = 1$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) = 1$. Portanto, $\alpha \in S(4, 2, 2) \setminus S(3, 3, 1)$. Notemos que, se $\ell < 4$ ou $n = 1$, temos $\alpha \in S(4, 2, 2) \setminus S(\ell, m, n)$.

Por outro lado, consideremos $\beta \in T(V)$ definida por

$$\beta = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 & w_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $W\beta = W$, pelo que $\beta \in S(V, W)$. Como $\dim(V\beta) = 2 < 3$, $\dim(W\beta) = 2 < 3$ e $\dim(V\beta/(V\beta \cap W)) = 0 < 1$, temos $\beta \in S(3, 3, 1) \setminus S(4, 2, 2)$. Observemos que, se $m < 3$, então $\beta \in S(3, 3, 1) \setminus S(\ell, m, n)$.

Ora, como $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2) = S(\ell, m, n)$, concluímos que $\ell \geq 4$, $m \geq 3$ e $n \geq 2$. Consideremos, assim, $\delta \in T(V)$ definida por

$$\delta = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $\delta \in S(4, 3, 2)$ e, portanto, para quaisquer r, s e t tais que $r \geq 4$, $s \geq 3$ e $t \geq 2$, temos $\delta \in S(r, s, t)$. Mas $\delta \notin S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2)$, pelo que, quaisquer que sejam $r \geq 4$, $s \geq 3$ e $t \geq 2$, $S(r, s, t) \neq S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2)$. Assim, $S(3, 3, 1) \cup S(4, 2, 2)$ é um ideal de $S(V, W)$ mas não é da forma $S(r, s, t)$.

Este exemplo, dá-nos, então, o mote para avançar para o Lema que se segue.

Lema 39. *O conjunto de ideais de $S(V, W)$ é uma cadeia se e só se $V = W$ ou $W = \{0_V\}$.*

Demonstração. Se $V = W$ ou $W = \{0_V\}$, então $S(V, W) = T(V)$ e os ideais de $T(V)$ são precisamente os conjuntos $T_r = \{\alpha \in T(V) : \dim(V\alpha) < r\}$, onde $1 \leq r \leq \dim(V\alpha)'$, que formam uma cadeia.

Reciprocamente, suponhamos que $\{0_V\} \neq W \subsetneq V$. Sejam $W = \langle w \rangle \oplus \langle w_j \rangle$ e $V = \langle w \rangle \oplus \langle w_j \rangle \oplus \langle u \rangle \oplus \langle u_i \rangle$, onde tanto I , como J podem ser vazios. Temos $\dim V = |I| + |J| + 2$, $\dim W = |J| + 1$ e $\dim V/W = |I| + 1$. Consideremos $\alpha, \beta \in T(V)$ definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} w & w_j & u & u_i \\ w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} w & w_j & u & u_i \\ 0 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $W\alpha = \langle w \rangle \subseteq W$ e $W\beta = \{0_V\} \subseteq W$, pelo que $\alpha, \beta \in S(V, W)$. É fácil ver que $\alpha \in S(2, 2, 1) \setminus S(2, 1, 2)$ e $\beta \in S(2, 1, 2) \setminus S(2, 2, 1)$. Assim, temos dois ideais de $S(V, W)$ que não são comparáveis pela relação de inclusão, ou seja, o conjunto dos ideais de $S(V, W)$ não é uma cadeia. $\square$

De forma a obter uma caracterização de todos os ideais de $S(V, W)$, consideraremos um conjunto associado a cada subconjunto não vazio de $S(V, W)$, como passamos a descrever. Para cada subconjunto

não vazio U de $S(V, W)$, definimos

$$K(U) = \{\alpha \in S(V, W) : \dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta), \dim(W\alpha) \leq \dim(W\beta), \\ \dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) \leq \dim(V\beta/(V\beta \cap W)), \text{ para algum } \beta \in U\}.$$

Segue, imediatamente, que $U \subseteq K(U)$ e, se $U_1 \subseteq U_2$, então $K(U_1) \subseteq K(U_2)$.

Teorema 47. *Os ideais de $S(V, W)$ são precisamente os conjuntos $K(U)$, para algum subconjunto não vazio U de $S(V, W)$.*

Demonstração. Seja I um ideal de $S(V, W)$. Vamos mostrar que $I = K(I)$. Por definição, $I \subseteq K(I)$. Dado $\alpha \in K(I)$, existe $\beta \in I$ tal que $\dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) \leq \dim(W\beta)$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) \leq \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$. Assim, pelo Teorema 44, existem $\lambda, \mu \in S(V, W)$ tais que $\alpha = \lambda\beta\mu$. Como $\beta \in I$ e I é ideal de $S(V, W)$, concluímos que $\alpha = \lambda\beta\mu \in I$. Segue, assim, que $K(I) \subseteq I$ e, portanto, $I = K(I)$.

Reciprocamente, vejamos que, dado U subconjunto não vazio de $S(V, W)$, temos $K(U)$ ideal de $S(V, W)$. Sejam, assim, $\alpha \in K(U)$ e $\lambda, \mu \in S(V, W)$. Então, existe $\beta \in U$ tal que $\dim(V\alpha) \leq \dim(V\beta)$, $\dim(W\alpha) \leq \dim(W\beta)$ e $\dim(V\alpha/(V\alpha \cap W)) \leq \dim(V\beta/(V\beta \cap W))$ e já vimos que $\dim(V\lambda\alpha\mu) \leq \dim(V\alpha)$, $\dim(W\lambda\alpha\mu) \leq \dim(W\alpha)$ e $\dim(V\lambda\alpha\mu/(V\lambda\alpha\mu \cap W)) \leq \dim(V\alpha/(V\alpha \cap W))$. Então, podemos concluir que $\lambda\alpha\mu \in K(U)$. Portanto, $K(U)$ é ideal de $S(V, W)$. $\square$

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação, focamos o nosso estudo em semigrupos de transformações e semigrupos de transformações lineares totais, analisando quatro semigrupos específicos: $T(X, Y)$ e $S(X, Y)$, que consistem de transformações de um conjunto X , e $T(V, W)$ e $S(V, W)$, que são formados por transformações lineares de um espaço vetorial V .

Para cada um destes semigrupos, caracterizaram-se as relações de Green e os elementos regulares. À custa desta última caracterização foram muitas vezes encontradas condições necessárias e suficientes para que os semigrupos fossem regulares e foram, ainda, encontrados os conjuntos de todos os elementos regulares de cada um deles.

No caso do semigrupo $T(X, Y)$ encontrou-se um subsemigrupo inverso maximal e apresentou-se uma forma de contar o número de elementos desse subsemigrupo. Em relação a $S(X, Y)$, demonstramos uma condição necessária e suficiente para que $S(X, Y)$ seja isomorfo a $T(Z)$, para algum conjunto Z . Mais, mostramos que qualquer subsemigrupo pode ser mergulhado num semigrupo da forma de $S(X, Y)$. Também foram encontradas caracterizações de elementos regulares à esquerda, à direita, intrarregulares, completamente regulares e corregulares. Em $T(V, W)$, realizamos um estudo mais detalhado dos subsemigrupos regulares maximais. Por último, vimos que $S(V, W)$ nunca é isomorfo a $S(X, Y)$, apesar do primeiro ser o correspondente linear do segundo.

Foram, pois, diversos os assuntos da Teoria de Semigrupos estudados nesta dissertação. Desta forma, este trabalho oferece uma base sólida para pesquisas posteriores, abrangendo aspetos essenciais no estudo e compreensão da estrutura dos semigrupos de transformações e de transformações lineares em questão.

Para trabalhos futuros, propomos o estudo de semigrupos de transformações parciais e de semigrupos de transformações lineares parciais que tenham algum conjunto ou subespaço invariante. O foco deve ser a aplicação e a ampliação das técnicas e resultados aqui apresentados a estruturas nas quais as transformações não são definidas para todo o conjunto ou espaço vetorial. Podemos também estudar semigrupos de transformações (e os seus correspondentes ‘lineares’) que tenham outras restrições definidas por algum subconjunto (ou subespaço vetorial).

Bibliografia

- [1] W. Choomanee, P. Honyam e J. Sanwong. “Regularity in Semigroups of Transformations with Invariant Sets”. Em: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 87.1 (2013), pp. 151–164.
- [2] A. Clifford e G. Preston. *The Algebraic Theory of Semigroups*. American Mathematical Society, 1961.
- [3] P. Honyam e J. Sanwong. “Semigroups of linear transformations with invariant subspaces”. Em: *International Journal of Algebra* (jan. de 2012).
- [4] P. Honyam e J. Sanwong. “Semigroups of transformations with invariant set”. Em: *Journal of the Korean Mathematical Society* 48 (mar. de 2011). doi: 10.4134/JKMS.2011.48.2.289.
- [5] J. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*. LMS monographs. Clarendon, 1995. isbn: 9780198511946. url: <https://books.google.pt/books?id=pPg6uuYuczoC>.
- [6] S. Jintana e W. Sommanee. “Regularity and Green’s Relations on a Semigroup of Transformations with Restricted Range”. Em: *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2008 (set. de 2008). doi: 10.1155/2008/794013.
- [7] A. I. Malcev. “Symmetric Groupoids”. Em: *Matematicheskii Sbornik N. S.* 31.73 (1952), pp. 136–151.
- [8] S. Nenthein e Y. Kemprasit. “On transformation semigroups which are $\mathcal{BQ}$ -semigroups”. Em: *Int. J. Math. Mathematical Sciences* 2006 (ago. de 2006). doi: 10.1155/IJMMS/2006/12757.
- [9] J. W. Nichols. “A Class of Maximal Inverse Subsemigroups of T_X ”. Em: *Semigroup Forum* 13.1 (1976), pp. 187–188.
- [10] S. Phongchan e P. Honyam. “Regularity and Finiteness Conditions on Transformation Semigroups with Invariant Sets”. Em: *Thai Journal of Mathematics* 21.3 (set. de 2023), pp. 569–583. url: <https://thaijmath2.in.cmu.ac.th/index.php/thaijmath/article/view/1528>.

-
- [11] W. Sommanee e K. Sangkhanan. "The Regular Part of a Semigroup of Linear Transformations with Restricted Range". Em: *Journal of the Australian Mathematical Society* 103 (fev. de 2017), pp. 402–419. doi: 10.1017/S144678871600080X.
- [12] R. P. Sullivan. "Semigroups of linear transformations with restricted range". Em: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 77.3 (2008), pp. 441–453. doi: 10.1017/S0004972708000385.
- [13] R. P. Sullivan. "Transformation Semigroups and Linear Algebra". Em: *Monash Conference on Semigroup Theory (Melbourne, 1990)*. Ed. por T. E. Hall, P. R. Jones e J. C. Meakin. Singapore: World Scientific, 1991, pp. 290–295.
- [14] R. P. Sullivan. "Transformation Semigroups: Past, Present and Future". Em: *Proceedings of the International Conference on Semigroups (University of Minho, Portugal, June 1999)*. Ed. por P. Smith, P. Mendes e E. Giraldes. Singapore: World Scientific, 2000, pp. 191–243.
- [15] J. S. V. Symons. "Some results concerning a transformation semigroup". Em: *Journal of the Australian Mathematical Society* 19.4 (1975), pp. 413–425. doi: 10.1017/S1446788700034455.