Universidade do Minho
Instituto de Educação

Alice Patrícia Lopes Faro e Santos

A modelação matemática e a justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico

dezembro de 2024

A modelação matemática e a justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico

Alice Patrícia Lopes Faro e Santos

UMinho | 2024

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Alice Patrícia Lopes Faro e Santos

A modelação matemática e a justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico

Tese de Doutoramento
Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade em Educação Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu
e do
Professor Doutor Manuel António Ferreira da Silva

dezembro de 2024

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.
Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.
Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual
CC BY-NC-SA
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

AGRADECIMENTOS

Numa primeira linha, gostaria de deixar um profundo agradecimento ao meu orientador, professor Floriano Viseu. A sua orientação foi pautada pelo rigor, seriedade e dedicação. Ao longo dos anos em que se desenvolveu este trabalho foi construída uma relação de confiança, incentivo, mas também de compreensão e admiração. Agradeço ao professor Manuel da Silva pelo direcionamento dado no vasto universo da teoria crítica.

Ainda nesta vertente, a todos os alunos e professores que participaram neste estudo, principalmente, às professoras que integraram os estudos de caso, assim como aos investigadores que, gentilmente, responderam aos meus pedidos, Vince Geiger, Gloria Stillman, Stanislaw Schukajlow e Eric Guststein. Numa esfera mais ampla, um obrigada aos meus alunos por me mostrarem as possibilidades que temos para reinvindicar o presente e as matizes com que podemos desenhar o futuro. À turma do 9.º A não só por alegrarem as minhas manhãs, como também por darem significado à reciprocidade da relação educativa.

Agradeço, também, às amizades na minha vida e que, de alguma maneira, sustentaram a concretização deste trabalho. Umas por serem amigas de luta, Susana e Catarina; outros por serem amigos de sempre, Domingos. Umas amizades por servirem de bússola, Denise; umas, por serem montanha, Salomé, Bruno e Carina; e, outras, por apoiarem nos detalhes, Emília e Isa.

Por fim, os agradecimentos dirigem-se à minha família. À família nuclear e à família alargada, ambas sinónimos de alento e encorajamento. À minha irmã Susana, pela paciência e por ser um dos meus grandes lugares seguros; ao meu pai, por ouvir o meu inconformismo. À avó das minhas filhas, Amélia, por as ter mimado o quanto conseguiu, deixando nelas o carinho e a lembrança. À família de Guardizela, pelo aconchego e por acompanhar as nossas inquietações.

Ao Pedro, no plano do concreto, por me mostrar o poder das palavras sem receios e por conduzir-me na assertividade. Ao entrar, na minha vida, numa fase em que tudo era só um projeto, tornou possível não só a sua concretização, mas todas as que se lhe juntaram. No plano etéreo, pelo amor, pelo apoio mútuo e por, juntos, resgatarmos o tempo.

Às minhas filhas, Laura e Helena, que acompanharam este trabalho (primeiro uma e depois outra) desde as suas vidas embrionárias e entenderam a importância que tinha para a mãe terminá-lo. O vosso amor inabalável foi determinante para o conseguir.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

A MODELAÇÃO MATEMÁTICA E A JUSTIÇA SOCIAL NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES DE ALUNOS DO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO

RESUMO

Posicionar a Matemática como uma ferramenta disponível aos alunos para que, com ela, sejam capazes, como futuros cidadãos, de entender e agir sobre as desigualdades sociais e, simultaneamente, conectá-la à realidade para fortalecer a sua compreensão é um duplo desafio da educação matemática. Neste sentido, explorar nas salas de aula tarefas de modelação, cujos contextos incidam em fenómenos sociais, é contribuir para uma escola justa, que deixe de perpetuar a disciplina de Matemática como um fator determinante de insucesso e exclusão escolar. Este estudo visa averiguar o contributo da modelação matemática e da justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Na concretização deste objetivo, procura-se responder aos seguintes objetivos específicos: enquadrar as expetativas dos alunos para a aprendizagem de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos sociais, face à cultura da escola; identificar as atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, na aprendizagem de funções; e verificar como os alunos valorizam as tarefas de modelação contextualizadas por situações de justiça social na aprendizagem de funções. Princípios axiológicos de justiça, pedagogia crítica, educação matemática para a justiça social e modelação matemática constituem os domínios da sustentação teórica deste estudo. Atendendo à natureza do objetivo geral do estudo, adotou-se uma metodologia de índole qualitativa e interpretativa, com um *design* de estudo de caso, relativo a duas turmas, uma de 8.º ano e uma de 9.º ano, de escolas distintas da rede pública de ensino, da região sul do país. Participaram nesta investigação, para além dos alunos, os diretores dos agrupamentos dessas escolas, os professores do grupo de Matemática e as docentes de Matemática de cada uma das turmas. Os dados foram recolhidos através da observação e de gravações áudio e vídeo de aulas, de entrevistas, das produções dos alunos, bem como de documentos relevantes que fazem parte das escolas, assim como notas de campo da investigadora. Tais dados foram sujeitos a uma análise de conteúdo.

Os resultados mostram que, para os alunos, o principal impulso motivacional à frequência escolar é de raiz social, assim como o grau de interesse às experiências escolares é determinado pelo aspeto relacional. Enquanto um grupo de alunos deposita a esperança num futuro promissor através da meritocracia, o outro valoriza o tempo presente, reconhecendo nos recursos físicos e humanos os benefícios da escola que frequentam. Transversalmente, os alunos selecionam o par exercício-problema como as tarefas associadas à aprendizagem da Matemática, posicionando-a e, em especial, ao tópico de funções, desconectados da realidade. Estes alunos valorizam a disciplina pelo impacto que terá para os seus futuros e aceitam o insucesso que demonstra, assente no *status quo* de um ensino da Matemática que seleciona e estratifica. No âmbito das atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, os alunos executam as tarefas de modo holístico e atomístico. Compreender e simplificar a tarefa são atividades implícitas que os alunos desenvolveram em grupo, de autonomia variável consoante as dificuldades. A definição do modelo é uma atividade de modelação explícita, que deixa transparecer alguns obstáculos que são minimizados com a intervenção das respetivas docentes. A atividade de trabalhar com o modelo revelou-se a mais aproximada ao modo de trabalho que os alunos têm por hábito realizar. Na atividade de interpretação dos resultados houve diferentes manifestações do conhecimento reflexivo. A validação do modelo foi uma atividade que, para muitos alunos, se revelou uma barreira. Outras atividades em que os alunos se envolveram foram a leitura crítica dos dados, trabalhar em grupo, desenvolver a autonomia e o estabelecimento de discussões verbais. Os principais contributos que os alunos destacam na resolução das tarefas de modelação sobre fenómenos sociais são a visibilidade da aplicação dos conteúdos de funções à realidade, o espaço dado à promoção da autonomia e a ação dialógica em que se envolveram. Para esta opinião, influenciaram, de forma simbiótica, o desenvolvimento da consciência sociopolítica e a mobilização das experiências socioculturais dos alunos. Como consequência do cruzamento das funções com a realidade e as interações verbais, as narrativas indicam uma reconfiguração da perceção dos alunos relativamente à utilidade das funções.

Palavras-chave: Alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico; aprendizagem; funções; justiça social; modelação matemática.

MATHEMATICAL MODELLING AND SOCIAL JUSTICE IN THE LEARNING OF FUNCTIONS BY MIDDLE SCHOOL STUDENTS

ABSTRACT

Positioning mathematics as a tool available to students so that, with it, they are able, as future citizens, to understand and act on social inequalities and, at the same time, connect it to reality in order to strengthen their understanding is a double challenge for mathematics education. In this sense, exploring modelling tasks in the classroom, whose contexts focus on social phenomena, means contributing to a fair school that no longer perpetuates the subject of mathematics as a determining factor in school failure and exclusion. This study aims to investigate the contribution of mathematical modelling and social justice in the learning of functions by middle school students. In order to achieve this goal, the following specific objectives was sought: the framing of students' expectations for learning functions through modelling tasks on social phenomena, in relation to the school culture; the identifying of students' activities in solving modelling tasks, with a focus on social justice, in learning functions; and the verifying of how students value modelling tasks contextualized by situations of social justice in learning functions. Axiological principles of justice, critical pedagogy, mathematical education for social justice and mathematical modelling constitute the domains for the theoretical basis of this study. Given the nature of the general aim of the study, a qualitative and interpretative methodology was adopted, with a case study design, relating to two classes, one in year 8 and another in year 9, from different public schools in the southern region of the country. In order to meet the specific objectives, in addition to students, headmasters, teachers of the maths department, the maths teachers of both classes took part in this research. Data collection involved observed lessons, interviews at different times during the empirical component, audio and video recordings of the lessons observed, the students' productions, as well as all the relevant documents that are part of the school, as well as the researcher's field notes. The data collected was subjected to content analysis.

The results show that, for students, the main motivational impetus for attending school is social, while the degree of interest in school experiences is determined by the relational aspect. While one group of students' hopes for a promising future is achieved through meritocracy, the other group values the present time, recognising in physical and human resources the benefits of the school they attend. Across the board, the students select the exercise-problem pair as well as the tasks associated with learning mathematics, positioning it, in particular, with the topic of functions, disconnected from reality. These students value the subject for the impact it will have on their futures and accept the failure it enfolds, based on the *status quo* of a mathematics education that both selects and stratifies. With reference to the students' activities in solving modelling tasks, with a focus on social justice, the students carry out these tasks in a holistic and atomistic way. Understanding and simplifying the task are implicit activities that the students carried out in groups, with varying degrees of autonomy depending on the difficulties raised. Defining the model is an explicit modelling activity, which reveals some obstacles that are minimised with the intervention of the respective teachers. The activity of working with the model proved to be the closest to the way the students usually work. In the activity of interpreting the results, there were different manifestations of reflective knowledge. Validating the model was an activity that proved to be a barrier for many students. Other activities in which the students engaged in were critical reading of data, working in groups, developing autonomy and establishing verbal discussions. The main contributions that the students highlight in solving the modelling tasks on social phenomena are the visibility of the application of function content to reality, the space given to promoting autonomy and the dialogical action in which they were involved. This outcome was influenced, in a symbiotic way by the development of socio-political awareness and the mobilisation of the students' socio-cultural experiences. As a result of crossing functions with reality and verbal interactions, narratives show a reconfiguration of students' perception on the utility of functions.

Keywords: Functions; learning; mathematical modelling; middle school students; social justice.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS iii
DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE iv
RESUMO v
ABSTRACT vi
ÍNDICE vii
CAPÍTULO 1 1
INTRODUÇÃO 1
1.1. Âmbito e relevância do estudo 1
1.2. Motivações do estudo 6
1.3. Objetivos do estudo 7
1.4. Estrutura da tese 9
CAPÍTULO 2 11
A MODELAÇÃO MATEMÁTICA COMO CENÁRIO EDUCATIVO 11
2.1. Da generalização à especificidade da modelação matemática 11
2.1.1. Génese 12
2.1.2. Fundamentos 13
2.1.3. Abordagens e perspetivas 15
2.2. A modelação matemática em contexto educativo 17
2.2.1. Definição e fundamentação 17
2.2.2. As etapas cognitivas do processo de modelação 20
2.2.3. A modelação como competência 23
2.2.4. Metacognição, resolução de problemas, aplicações e modelação 25
2.3. Finalidades da modelação matemática como prática 26
2.3.1. Conectar o ensino em contexto de modelação ao papel do professor 27
2.3.2. O aluno interpretando o seu mundo 28
2.3.3. A autenticidade do contexto e as tarefas de modelação 30
2.4. Implementação e dinâmicas em torno da modelação matemática 34
2.4.1. Procedimentos, estratégias e desafios da modelação matemática como ambiente de aprendizagem 34
2.4.2. Descortinar possíveis bloqueios nas etapas de modelação 36
2.4.3. Uma intervenção pedagógica que pontue a diferença e o diálogo 37

2.4.4. Conjunção das funções e da modelação matemática nos documentos normativos 39
2.4.5. Importância das representações matemáticas nas conexões externas 43
2.5. Ação e reflexão: A abordagem sociocrítica 43
2.6. Síntese do capítulo 49
CAPÍTULO 3 52
UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA A JUSTIÇA SOCIAL 52
3.1. A Escola como antecâmara do mundo: um caminho para uma liberdade emancipadora ou uma máquina institucional de controlo? 52
3.1.1. Pode a educação mudar a sociedade? 53
3.1.2. Professor como intelectual transformador e alunos como agentes de mudança 56
3.1.3. Resposta contra-hegemónica: A pedagogia crítica 58
3.2. Pluralidade do conceito de justiça 62
3.2.1. Revisitação das teorias de justiça social 63
3.2.2. A teoria rawlsiana 66
3.2.3. Multidimensionalidade da justiça 68
3.3. Construção de um sentido de justiça na educação: A justiça como "primeira virtude" da escola pública 71
3.4. A educação matemática como imperativo ético 76
3.5. A procura de uma educação matemática que proporcione empoderamento 78
3.5.1. O poder emancipatório da educação matemática 79
3.5.2. A inquietação ética da educação matemática crítica 84
3.6. Educação Matemática para a justiça social 86
3.6.1. Objetivos e componentes pedagógicos 86
3.6.2. Uma pedagogia de múltiplos recursos 89
3.6.3. Desafios em aprender a ensinar matemática para a justiça social 92
3.7. A marca normativa da educação matemática para a justiça social nos documentos nacionais 94
3.8. Interseção entre a educação matemática para a justiça social e a modelação matemática crítica 97
3.9. Síntese do capítulo 99
CAPÍTULO 4 101
METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO 101

4.1. Opções metodológicas 101
4.2. Participantes no estudo 105
4.2.1. Caracterização das Escolas e Diretores 107
4.2.2. Caracterização do grupo disciplinar de Matemática 108
4.2.3. Caracterização dos alunos 110
4.3. Procedimentos e técnicas de recolha de dados 111
4.3.1. Entrevistas 113
4.3.2. Observação 116
4.3.3. Documentos 118
4.3.4. Notas de campo 119
4.4. As tarefas de modelação como suporte do estudo 120
4.5. Procedimentos e técnicas de análise dos dados 124
CAPÍTULO 5 129
ESTUDO DE CASO SOBRE A TURMA DE 8.º ANO 129
5.1. O horizonte escolar e as vozes de intervenientes da comunidade educativa 129
5.1.1. A escola e a sua missão 130
5.1.2. A diretora do Agrupamento 132
5.1.3. O grupo disciplinar de Matemática de 3.º Ciclo 137
5.1.4. A turma do 8.º ano 148
5.1.5. Interseccionalidade das vozes 156
5.2. Momentos de aprendizagem 158
5.2.1. Narrativa da intervenção 158
5.2.2. Descrição dos processos estabelecidos na resolução das tarefas de modelação 166
5.2.3. A vertente sociocrítica das tarefas de modelação 192
5.3. Contributos das tarefas de modelação com recurso a questões de justiça social na aprendizagem de funções 200
5.3.1. Perspetivas dos alunos 200
5.3.2. Perspetivas da Professora da turma 208
Síntese 211
5.4. Síntese do capítulo 212
CAPÍTULO 6 214
ESTUDO DE CASO SOBRE A TURMA DE 9.º ANO 214

6.1. O horizonte escolar e as vozes de intervenientes da comunidade educativa 214
6.1.1. A escola e a sua missão 214
6.1.2. O diretor da Escola 217
6.1.3. O grupo disciplinar de Matemática de 3.º Ciclo 222
6.1.4. A turma de 9.º ano 234
6.1.5. Interseccionalidade das vozes 244
6.2. Momentos de aprendizagem 246
6.2.1. Narrativa da intervenção 246
6.2.2. Descrição dos processos estabelecidos na resolução das tarefas de modelação 261
6.2.3. A vertente sociocrítica das tarefas de modelação 293
6.3. Contributos das tarefas de modelação com recurso a questões de justiça social na aprendizagem de funções 304
6.3.1. Perspetivas dos alunos 304
6.3.2. Perspetiva da Professora da turma 310
Síntese 313
6.4. Síntese do capítulo 313
CAPÍTULO 7 316
DISCUSSÃO DE RESULTADOS 316
7.1. A equidade das práticas educativas 316
7.1.1. Missão escolar, práticas organizacionais e pedagógicas 316
7.1.2. Prática docente 318
7.1.3. As docentes de Matemática das turmas caso 321
7.2. Significados atribuídos pelos alunos às dinâmicas escolares e às aprendizagens 323
7.3. A modelação matemática na aprendizagem de funções 325
7.3.1. Processos estabelecidos e barreiras cognitivas 325
7.3.2. Tipos de representação e mobilização do conhecimento de funções 332
7.4. A aprendizagem matemática contextualizada por fenómenos sociais 334
7.5. Dinâmicas valorizadas pelos alunos 339
CAPÍTULO 8 341
CONCLUSÕES 341
8.1. Síntese do estudo 341
8.2. Conclusões do estudo 343

8.2.1. Enquadrar as expetativas dos alunos para a aprendizagem de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos sociais, face à cultura da escola 343
8.2.2. Identificar as atividades concretizadas pelos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, no estudo de funções 349
8.2.3. Verificar como os alunos valorizam as tarefas de modelação contextualizadas por situações de justiça social na aprendizagem de funções 354
8.3. Considerações finais 356
8.4. Limitações do estudo e sugestões para futuras investigações 358
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 359
APÊNDICES 384

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ciclo de modelação adaptado por Ferri (2006, p. 92) 14
Figura 2. Ciclo de modelação proposto por Ponte (1992, p. 1) 21
Figura 3. Ciclo de modelação de Galbraith e Stillman (2006, p. 2) 21
Figura 4. Modelo proposto por Blum e Leiβ (2007) 22
Figura 5. Esquema representativo da participação do professor e do aluno em cada caso (Barbosa, 2001, p. 9) 27
Figura 6. Ciclo de modelação segundo a abordagem sociocrítica de Rosa e Orey (2015) 48
Figura 7. Mapa concetual do discurso dos intervenientes da turma de 8.º ano 157
Figura 8. Distribuição dos alunos por grupos 159
Figura 9. Os alunos observam uma reportagem 160
Figura 10. Alunos a trabalharem em grupo e professora a circular pelos lugares 164
Figura 11. Representação da tarefa "Previsão da Escassez Hídrica" 167
Figura 12. Forma de destaque de informação relevante de Daniela (G5) 169
Figura 13. Estruturação da informação por Andreia (G4) e por Rodrigo (G1) 169
Figura 14 Representação matemática da situação real de Ana (G1) 169
Figura 15. Identificação das variáveis na resposta de Guilherme (G2) 170
Figura 16. Respostas dados pelos alunos Andreia, Maria e Frederico (G4) 172
Figura 17. Resposta de Ana (G1) à alínea a) 172
Figura 18. Resposta de Pedro (G6) à alínea a) 173
Figura 19. Modelo matemático de Guilherme (G2) 173
Figura 20. Resposta de Frederico (G4) à alínea b) 174
Figura 21. Mapa síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Previsão da escassez hídrica' 175
Figura 22. Representação da tarefa "Por que motivo os preços importam?" 176
Figura 23. Forma de destaque Andreia (G4) e Definição de estratégia Ana (G1) 177
Figura 24. Representação do modelo matemático de Ângela (G6) 178
Figura 25. Representação de Maria (G4) e de Rodrigo (G1) 179
Figura 26. Trabalho com o modelo de Andreia (G4) 179
Figura 27. Representação gráfica de Beatriz (G1) 180
Figura 28. Resposta de Tomás (G2), da Ana (G1) e da Catarina (G3) à alínea c) 181
Figura 29. Resposta de Beatriz (G1) à alínea c) 181

Figura 30. Mapa síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Por que motivo os preços importam?' 182
Figura 31. Representação da tarefa "Comparação da Pegada Hídrica" 183
Figura 32. Anotação de Andreia (G4) na Tarefa 6 184
Figura 33. Seleção de informação de Tomás (G3) na Tarefa 6 185
Figura 34. Parte da resposta de David (G3) 186
Figura 35. Resolução proposta por Ângela (G6) 186
Figura 36. Representação gráfica elaborada por Tomás (G3) 187
Figura 37. Modelo proposto por Andreia (G4) e por Ana (G1) 187
Figura 38. Resultado de Ana (G1) 188
Figura 39. Verificação dos resultados de Beatriz (G1) 189
Figura 40. Justificação apresentada por Pedro (G6) 189
Figura 41. Justificação apresentada por Ana (G1) 190
Figura 42. Mapa síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Pegada Hídrica' 190
Figura 43. Reflexão de Beatriz (G1) sobre uma forma justa de distribuição de água na tarefa 'Distribuição de água no Planeta' 193
Figura 44. Respostas de Vítor, Catarina e de Ana na tarefa 'Previsão da disponibilidade de água' . 194
Figura 45. Determinação da relação entre o tempo gasto para recolha de água por uma mulher e por um homem, por Ângela (G6) no Madagáscar e por Bruna (G3) no Benim 195
Figura 46. Resposta de David (G3) à questão reflexiva da tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' 195
Figura 47. Justificação de Rodrigo (G1) à questão reflexiva da tarefa 'Por que motivo os preços importam?' 196
Figura 48. Mapa concetual do discurso dos intervenientes da turma de 9.º A 244
Figura 49. Distribuição dos alunos por grupos 247
Figura 50. Docente de Matemática e alunos em diálogo 249
Figura 51. Professora de Matemática e alunos em diálogo 250
Figura 52. Aluna apresenta a sua esolução, no quadro 250
Figura 53. Excerto da tarefa 'O trabalho e as mulheres', Alíneas a), b) e c) 251
Figura 54. Docente e aluna dialogam sobre a resolução 252
Figura 55. Apresentação da resolução, no quadro, da alínea d) 254
Figura 56. Professora comenta a resolução de um aluno 254

Figura 57. Excerto da Tarefa 2.1., Alíneas a) a d) 255
Figura 58. Grupos em trabalho autónomo 256
Figura 59. Excerto da tarefa 'Retratos de vidas de trabalho', alíneas a), b), c) d), e) 257
Figura 60. Excerto da Tarefa 'Redistribuição da riqueza', alíneas a), b), c), d) 258
Figura 61. Excerto da tarefa 'A uberização do trabalho', alíneas a), b), c) 259
Figura 62. A docente presta alguns esclarecimentos 260
Figura 63. Grupo retrata incêndios de Pedrogão 260
Figura 64. Grupo apresenta trabalho sobre consumo de água 261
Figura 65. Representação da tarefa "As mutações do trabalho" 262
Figura 66. Anotações de Liang (G5) e de Ana (G3) 264
Figura 67. Registos de Miguel (G5) e de Matilde (G7) 265
Figura 68. Registo de Inês (G4) 265
Figura 69. Registo de Guilherme (G2) 265
Figura 70. Folha de cálculo projetada para a turma analisar 266
Figura 71. Identificação das variáveis na resolução de Vera (G2) 267
Figura 72. Registo de Raquel (G6) 267
Figura 73. Cálculos efetuados por Raquel (G6) 268
Figura 74. Representação Gráfica de Carolina (G1) 268
Figura 75. Tabela apresentada por Daniela (G3) 269
Figura 76. Resolução de Vera (G2) 269
Figura 77. Resolução de Tomás (G4) 270
Figura 78. Resolução de Margarida (G1) 270
Figura 79. Mapa síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'As mutações do trabalho' 271
Figura 80. Representação da tarefa 'A redistribuição da riqueza' 272
Figura 81. Resoluções de Maria (G4) e de Ricardo (G2) 274
Figura 82. Resolução de Madalena (G5) 274
Figura 83. Resolução de Daniela (G3) 275
Figura 84. Tabela apresentada por Carlos (G7) 275
Figura 85. Resolução de Maria (G4) à alínea c) 276
Figura 86. Resolução de Raquel (G6) 276
Figura 87. Parte da resposta de Margarida (G1) 276

Figura 88. Identificação das variáveis de Ana (G3) 277
Figura 89. Parte da resposta de Vera (G2) 277
Figura 90. Modelo apresentado por Leonor (G4) 278
Figura 91. Tabela construída por Theresa (G7) e gráfico desenhado por Raquel (G6) (G7) 278
Figura 92. Determinação dos lucros pelos trabalhadores de Gabriel (G1) e de Madalena (G5) 278
Figura 93. A professora comenta a resolução da alínea c) 280
Figura 94. Projeção da folha de cálculo elaborada pela professora 280
Figura 95. Alunos do Grupo 1 a trabalhar com a folha de cálculo 281
Figura 96. Resposta dada por Madalena (G5) 281
Figura 97. Resposta de Gonçalo (G7) 282
Figura 98. Resposta de Nídia (G3) 282
Figura 99. Mapa síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'A redistribuição da riqueza' 283
Figura 100. Representação da tarefa 'A uberização do trabalho' 284
Figura 101. Esboço de um gráfico de Lúcia (G6) 286
Figura 102. Resolução de Madalena (G5) 286
Figura 103. Identificação das variáveis de Raquel (G6) 287
Figura 104. Resolução de Martim (G6) 288
Figura 105. Trabalho matemático de Carolina (G1) 288
Figura 106. Trabalho matemático de Nídia (G3) 289
Figura 107. Resolução de gonçalo (G7) 289
Figura 108. Cálculos efetuados por Ricardo (G1) 2890
Figura 109. Respostas de Tiago (G6) e de Maria (G4) 291
Figura 110. Mapa síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'A uberização do trabalho' 291
Figura 111. Respostas de Diogo (G3) e de Carolina (G1) na tarefa 'O trabalho e as mulheres 294
Figura 112. Determinação do ano em que se atingirá a igualdade de género económica por Ricardo (G2) na tarefa 'O trabalho e as mulheres' 295
Figura 113. Distribuição do tempo diário proposto por Vera (G1) 295
Figura 114. Representação gráfica de Raquel (G6) na Tarefa 'O trabalho e a conquista das 8 horas' 296
Figura 115. Resposta de Leonor (G4) 297

Figura 116. Resposta de Inês (G4) 297
Figura 117. Reflexões de Daniela (G3) e de Maria (G4) sobre existência de desigualdade na tarefa 'Retratos da vida 298
Figura 118. Propostas de Miguel (G5) e de Nídia (G3) 298
Figura 119. Proposta de Margarida (G1) 299
Figura 120. Respostas de Tomás (G4) e de Lúcia (G6) na Tarefa 'A Uberização do Trabalho' 300
Figura 121. Respostas de Madalena (G5) e de Carlos (G7) 300
Figura 122. Barreiras cognitivas apresentadas na resolução das tarefas de modelação 331
Figura 123. Relações entre etapas de modelação, representações e conhecimento de funções 334

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Fases do processo empírico e dos instrumentos de recolha de dados 112

Tabela 2. Possíveis temas e modelos matemáticos a serem trabalhados 120

Tabela 3. Tarefas de modelação de 8.º ano de acordo com as AEM 121

Tabela 4. Tarefas de modelação de 9.º ano de acordo com as AEM 123

Tabela 5. Significado dos códigos atribuídos aos materiais da recolha de dados 125

Tabela 6. Categorias e dimensões relativas ao tema Caracterização do contexto escolar 126

Tabela 7. Categorias e dimensões relativas a Momentos de aprendizagem 127

Tabela 8. Categorias e dimensões relativas a Contributos das tarefas de modelação 128

Tabela 9. Respostas relativas à Prática Profissional dos Professores de Matemática do Agrupamento LJ 137

Tabela 10. Respostas relativas ao ensino de funções e integração de tarefas de modelação 143

Tabela 11. Respostas relativas ao ensino da Matemática e responsabilidade social 145

Tabela 12. Frequências relativas ao percurso e motivação escolares da turma de 8.º ano 150

Tabela 13. Frequências relativas à aprendizagem da Matemática 152

Tabela 14. Frequências relativas às aprendizagens dos conteúdos de funções 154

Tabela 15. Frequências relativas à noção de justiça social 155

Tabela 16. Relação entre o número de aulas e as tarefas de modelação de 8.º ano propostas 159

Tabela 17. Tarefas de modelação de 8.º ano e modelo matemático 167

Tabela 18. Frequências das respostas dos alunos à tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' 168

Tabela 19. Frequências das respostas dos alunos à tarefa "Por que motivo os preços importam?" 177

Tabela 20. Frequências das respostas dos alunos à tarefa "Comparação da Pegada Hídrica" 184

Tabela 21. Relação entre as barreiras cognitivas, tipos de representação e dificuldades na mobilização do conhecimento matemático por Tarefa 191

Tabela 22. Relação entre as tarefas propostas de 8.º ano e as questões sociais 193

Tabela 23. Frequência de intervenções efetuadas pelos alunos de 8.º ano 197

Tabela 24. Frequências relativas à aprendizagem por tarefas de modelação matemática 201

Tabela 25. Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação matemática 204

Tabela 26. Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação com base em assuntos de justiça social 206

Tabela27. Respostas relativas à prática profissional dos Professores de Matemática da Escola MA 223

Tabela 28. Respostas dos docentes relativas ao ensino de funções e integração de tarefas de modelação 228
Tabela 29. Respostas dos docentes relativas ao ensino da Matemática e responsabilidade social .. 231
Tabela 30. Frequências relativas ao percurso e motivação escolares dos alunos de 9.º ano 236
Tabela 31. Frequências relativas à aprendizagem da Matemática dos alunos de 9.º ano 238
Tabela 32. Frequências do reflexo das aprendizagens escolares na vida quotidiana dos alunos de 9.º ano 240
Tabela 33. Frequências relativas à noção de justiça social dos alunos de 9.º ano..... 242
Tabela 34. Relação entre o número de aulas e as tarefas de modelação de 9.º ano propostas 246
Tabela 35. Relação entre as tarefas de modelação de 9.º ano e modelo matemático 261
Tabela 36. Etapas dos alunos à tarefa 'As mutações do trabalho' 263
Tabela 37. Etapas dos alunos na tarefa 'A redistribuição da riqueza' 273
Tabela 38. Etapas dos alunos na tarefa 'A uberização do trabalho' 285
Tabela 39. Relação entre as barreiras cognitivas, tipos de representação e dificuldades na mobilização do conhecimento matemático por Tarefa 292
Tabela 40. Relação entre as tarefas de 9.º ano propostas e as questões sociais 293
Tabela 41. Frequência de intervenções efetuadas pelos alunos de 9.º ano..... 301
Tabela 42. Frequências relativas à aprendizagem por tarefas de modelação matemática 305
Tabela 43. Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação matemática 306
Tabela 44. Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação com base em assuntos de justiça social 309
Tabela 45. Forma de trabalho dos alunos na etapa de compreensão, simplificação e estruturação do problema em cada uma das tarefas..... 326
Tabela 46. Forma de trabalho dos alunos na etapa de matematização e trabalho com o modelo... 328
Tabela 47. Forma de trabalho dos alunos na etapa interpretação dos resultados e validação do modelo 330

À memória da minha mãe, Laurinda, que continua a orientar todos os passos que dou.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o âmbito do estudo do contributo da modelação matemática e da justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3.º ciclo do ensino básico, bem como se assinala a sua relevância. Espera-se, com esta priorização, mostrar os elementos que forneceram as bases para sustentar a pertinência em adotar um ambiente de aprendizagem de funções que conjugue a modelação matemática com temas de justiça social. Esta última noção é aplicada à investigação na sua pluridimensionalidade. Assim, de seguida, dão-se a conhecer as motivações que levaram à concretização deste trabalho. Segue-se a descrição do objetivo da investigação e dos objetivos específicos que a delinearam. Finaliza-se com o modo como está estruturada esta tese, salientando os pontos centrais de onde se situa o debate.

1.1. Âmbito e relevância do estudo

A modelação matemática no ensino e na aprendizagem da Matemática é um assunto que merece reflexão, especialmente nos últimos anos, após o impacto social da importância dos modelos matemáticos na sociedade, nas várias disciplinas científicas e no mundo quotidiano (Carreira & Blum, 2021a; Greefrath & Carreira, 2024). Neste seguimento, estudos recentes mostram a aplicação do processo de modelação sobre o atual problema da propagação de doenças infeciosas e a forma como pode ser promovido nas universidades, nos programas de formação de professores e nas práticas de sala de aula (Carreira & Blum, 2021a). O cruzamento, aqui efetuado, da modelação matemática com o conceito de justiça social surge vinculado aos assuntos do quotidiano passíveis de serem modelados e que vão ao encontro da concretização de práticas metodológicas e educativas que possibilitem, aos alunos, analisarem problemas para que se tornem participantes ativos da sociedade (Vithal et al., 2024). Numa perspetiva sociocrítica, através desta ligação, os alunos poderão refletir criticamente sobre os problemas da sociedade, com vista a desenvolverem o discurso reflexivo, criando significados necessários para a transformação estrutural da própria sociedade (Rosa & Orey, 2015). Clarificar-se-á, de seguida, esta reunião, tentando sintetizar as noções de forma sequencial.

Os conceitos de educação e justiça são, à luz da atualidade, indissociáveis. Se é a educação que promove, para além do conhecimento, o pensamento crítico e a cidadania, é através da justiça que é assegurado o acesso, de todos os cidadãos, à educação, de acordo com a noção de sociedade bem

ordenada (Platão, 2007; Rawls, 2013). Não é, portanto, de estranhar que a metanarrativa consagrada na Constituição da República Portuguesa, nos artigos relacionados com a educação, seja a de possibilitar a igualdade de oportunidades no acesso e êxito escolares através de uma educação de qualidade, gratuita e inclusiva. É, através deste normativo, propalada uma educação que promova o desenvolvimento integral do indivíduo não apenas em termos académicos, mas também nos valores éticos e sociais, que forme cidadãos participativos e solidários, com vista a uma sociedade mais igualitária, que minimize as desigualdades económicas, sociais e culturais. Com a proclamação destes princípios, fica evidente o lugar da justiça na educação e, se dúvidas persistissem, a Lei de Bases do Sistema Educativo reforça-o, sustentando que é da responsabilidade do Estado garantir o direito a uma justa e efetiva igualdade de oportunidades no acesso e sucesso escolares. No entanto, existem palavras que, de tanto serem usadas, perdem o seu significado original para se converterem em expressões vazias (Murillo & Hernández-Castilla, 2014). Perante esta união invisível entre educação e justiça, é inevitável surgirem algumas interrogações, de entre as quais: é suficiente garantir a igualdade de oportunidades no acesso e sucesso escolares para que a escola seja uma escola justa? Até que ponto o Estado deve intervir, sobre a forma da educação, para mitigar as desigualdades económicas e sociais? Para responder a questões similares, um conjunto vasto de investigações têm sido desenvolvidas e, para as quais, parece fazer sentido que a mitigação das desigualdades sociais se dê através da mitigação das desigualdades escolares (Lopes et al., 2017; Pacheco, 2019; Rosa & Amaral, 2014), ou seja, a escola deverá ajudar na erradicação do determinismo social à nascença (Bourdieu & Passeron, 2008). A ser verdade, também o parece ser que o primeiro reto foi conseguido, uma vez que, à data, as desigualdades escolares de acesso estão suavizadas principalmente desde o prolongamento da escolaridade obrigatória. O mesmo não se poderá afirmar quanto ao sucesso escolar. Sabe-se que os projetos implementados pelas várias tutelas, ao longo dos anos, para melhoria dos resultados escolares se vão acumulando. Contudo, os números indicam que, quer nas avaliações internas, quer nas avaliações externas dos alunos na disciplina de Matemática, a variação do nível de sucesso na última década e meia é mínima (Canavarro et al., 2020). Sabe-se que a literacia matemática é importante para todos os alunos, mas os alunos de meios socioeconómicos mais desfavorecidos estão desproporcionalmente representados no domínio da literacia matemática, o que limita significativamente a sua oportunidade de aceder a uma vasta gama de cursos do ensino superior (Vithal et al., 2024). Perante este cenário, como pode o ensino da Matemática contribuir para sair deste labirinto que não permite concretizar a justa igualdade de oportunidades no sucesso escolar? Mais ainda, a perpetuação do insucesso escolar em Matemática, ao contribuir para uma clivagem,

define-se, também, como responsável por agravar a exclusão escolar, qual tira de Möbius representando um caminho cujo início já se desconhece e não se vislumbra o seu fim.

Numa análise de percurso ascendente, o currículo surge, obviamente, como o farol, tendo nos programas das respetivas áreas disciplinares as suas âncoras. Um dos princípios para a Matemática Escolar é o princípio para a equidade (NCTM, 2017), através do qual se divulga que a visão de acesso e equidade obriga a ter em conta os contextos de origem dos alunos, a sua experiência e conhecimento quando se concebe, implementa e avalia a eficácia de um programa de Matemática. Neste sentido, as adaptações curriculares são cada vez mais exigidas sobre o mote de tornar as escolas mais inclusivas e equitativas (OECD, 2021). Uma vertente de currículo sugerida é um currículo baseado em competências e conteúdos transversais, cujas experiências de aprendizagem sejam mais envolventes e práticas para todos os alunos, colocando o tónus no facto de ser dirigido a todos os alunos e não apenas a certos grupos de alunos, alertando para ser uma medida de equidade e não de segregação (OECD, 2021).

Com a garantia da participação, da disponibilização das mesmas oportunidades de aprendizagem e do envolvimento de todos os alunos, com um currículo comum, encontra-se assegurada a igualdade de oportunidade no acesso e no ensino. A ser verdadeira esta proposição, a pergunta que se coloca reside na exequibilidade do envolvimento de todos os alunos. Até porque se considera que existe uma ligação entre proporcionar o envolvimento de todos os alunos como um bem básico, à semelhança do valor da autoestima da teoria de justiça de Rawls (2013). Para este autor, o valor da autoestima é um bem básico, associando às funções de um Estado que pretende ser justo o dever de criar condições para que todos os cidadãos se possam respeitar a si próprios (Camps, 2022). A par desta ideia está, também, a viabilidade na igualdade equitativa de oportunidades quanto ao sucesso, ou seja, ao conhecimento. Neste ponto, os resultados dos alunos em Matemática incluem não somente a persistência no trabalho escolar como também a atitude que possuem face à Matemática e a capacidade para utilizarem a Matemática em contextos reais (Gutiérrez, 2012), sendo o mais importante assegurar que, independentemente dos contextos de origem, todos os alunos tenham as mesmas possibilidades de obterem resultados significativos (Gutiérrez, 2018).

A reunião de ambas as conceções faz emergir a necessidade de encontrar novas formas de estruturar o ensino da Matemática, indo ao encontro de uma educação matemática mais orientada com a realidade, como postulado em muitas posições didáticas, desde o fim de século vinte (Blum & Niss, 2024). Neste sentido, um dos conceitos mais estudados, nas últimas décadas, na educação matemática, é a modelação como ambiente de aprendizagem, encontrando-se, assim, na modelação

matemática a oportunidade de conjugar o currículo nacional com as realidades sociais dos alunos por forma a que, por conseguinte, os alunos melhorem as suas capacidades para utilizar as representações matemáticas em situações do quotidiano (Gutstein, 2006). De facto, a necessidade de "proporcionar experiências que permitam que os alunos compreendam que a Matemática possui utilizações poderosas na modelação e na previsão de fenómenos reais" (NCTM, 2007, p. 12) é, reiteradamente, integrada no currículo, mormente no campo da Álgebra e de modo transversal a todo o percurso escolar. Para esse fim, é fundamental oferecer a possibilidade aos alunos de trabalharem com os modelos matemáticos e a modelação de situações inseridas em contexto real, assim como a análise da variação. No 3.º ciclo do ensino básico, o estudo de funções oferece um dos cenários para a concretização destas conjugações. A escolha da aplicação da modelação matemática na aprendizagem de funções é ancorada, primeiramente, no currículo, associada a uma solicitação das oportunidades, dadas aos alunos, de modelar matematicamente uma vasta gama de fenómenos, em particular no estudo de funções (NCTM, 2007), quer nos documentos reguladores do ensino da Matemática internacionais, quer nos programas nacionais ao longo dos anos. Um vasto conjunto de investigadores internacionais tem mostrado como é possível conjugar assuntos de justiça social, no seio do currículo de Matemática, nomeadamente na área da Álgebra, seja conectando a Matemática à realidade dos alunos, seja ligando-a à sua cultura e comunidade (Gutstein & Peterson, 2013). O projeto Equações radicais: literacia matemática e direitos civis, que dura há duas décadas, é um projeto de Álgebra, destinado a alunos do 3.º Ciclo, cuja finalidade é auxiliar estudantes afroamericanos a atingir um nível mais elevado de competências matemáticas (Moses & Cobb, 2001). Outro exemplo, mostra a possibilidade de trabalhar o estudo de funções em alunos de 8.º ano, analisando as variáveis, recorrendo às representações gráfica e algébrica para calcular o salário diário e mensal de alguns trabalhos do setor de serviços, descobrir os custos associados à procura de habitação ou comparar salários mínimos de trabalhos (Dean, 2013).

Por sua vez, a pertinência da modelação matemática, na atualidade, parece ser indiscutível. Certos acontecimentos e fenómenos assim o têm mostrado, como durante a pandemia da COVID-19, em que foram mostrados os modelos epidemiológicos criados para convencer o público da necessidade de restringir comportamentos, ou o intenso debate gerado em torno do acordo de Paris sobre o clima; acontecimentos que mostram a necessidade de tomar decisões informadas e fundamentadas em factos, que, por sua vez, se baseiam em modelos matemáticos (Siller et al., 2024; Skovsmose, 2021). Por estes mesmos motivos, a par da modelação é também requerida uma leitura crítica dos dados (Rubel et al., 2021), fundamentada na crescente prevalência das visualizações de

dados através dos meios de comunicação de massas. Esta proliferação de rápido consumo levanta questões de fiabilidade e ética dos dados que exigem uma atitude crítica perante os mesmos. Assim, não apenas a compreensão da modelação matemática e dos modelos matemáticos deve ser promovida em todo o ensino como também é necessária uma leitura crítica dos dados, baseada na educação matemática crítica (Rubel et al., 2021), como um forte potencial para uso na sala de aula. Um exemplo destas propostas, em sala de aula, é o uso da modelação para pensar sobre diferentes formas de intervir para reduzir as emissões de CO_2, assumindo como possibilidades discutir as taxas de impostos sobre os alimentos que impliquem uma maior emissão de CO_2 dependendo do transporte ou do seu cultivo (Gildehaus & Liebendörfer, 2021).

A concretização destas reivindicações em sala de aula é possível executar com o atual currículo português e no seio do programa de Matemática. É convicção da presente investigação que a criação de um ambiente de aprendizagem de tópicos de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos de justiça social possa responder neste sentido e, assim, fortalecer, nos alunos, a compreensão concetual e de procedimentos matemáticos, o pensamento crítico, a literacia matemática, bem como desenvolver aptidões para a interpretação da realidade social. Pensa-se, deste modo, que a relevância deste estudo recai não apenas como benefício para a consubstancialização da igualdade de oportunidades no acesso e no sucesso, mas, também, em sentido inverso, como contributo ao empoderamento de quem parte em desvantagem. Por outras palavras, através da temática das tarefas de modelação, os alunos têm a possibilidade de desconstruir as relações de poder, as desigualdades de recursos e de oportunidades, as discriminações explícitas entre diferentes grupos sociais (Gutstein, 2018; McLaren, 2018), no fundo, criarem consciência social (Gutiérrez et al., 2024). Segundo Frankenstein (2013), sem a Matemática é impossível entender inteiramente o orçamento do Estado, o impacto de uma guerra, o significado de uma dívida nacional. Esta autora defende que, para compreender a maneira como o nosso mundo está estruturado seja ao nível social, cultural ou económico, é importante entender o significado dos números e os procedimentos matemáticos.

Esta opção de investigação é, também, justificada sobre a assunção do reforço do valor da autoestima (Rawls, 2013) dos alunos, principalmente, dos que estão em situação de desigualdade inicial, contrariamente à naturalização da aceitação de que algumas pessoas conseguem ter sucesso na escola, enquanto outras, oriundas de meios ditos 'desfavorecidos' e que toda a gente sabe que estão pouco protegidas, merecem 'falhar'. Por esse motivo, é necessário, precisamente, pôr em causa a perspetiva meritocrática de que o facto de terem um mau desempenho escolar se deve unicamente à

falta de empenho (Smyth, 2016) e mostrar que, aumentando o acesso e o sucesso de grupos minoritários e marginalizados, os alunos não são passivos (Tremaine et al., 2022).

1.2. Motivações do estudo

Depois de analisado um plano mais vasto, poderá deter-se a atenção sobre a influência do papel das práticas pedagógicas e das metodologias de ensino nos percursos escolares dos alunos. O compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia é uma ideia há muito defendida por vários autores (Skovsmose & Valero, 2002a; Yolcu & Kirchgasler, 2024), sustentada pelo princípio da não neutralidade da educação (Giroux, 2023). A educação, contudo, pode ser encarada de, pelo menos, duas vertentes. Uma delas, relembrando Althusser (Pacheco, 2019), orientada e estruturada segundo os cânones do aparelho ideológico do Estado, maniqueísta e controladora. Ainda assim, a escola pode, também, ser vista como motor de mudança social e a educação encarada como uma prática de liberdade (Freire, 2019). Sendo esse o caso, o objetivo do educador não é, somente, ensinar alguma coisa ao seu interlocutor, mas procurar com ele os meios de transformar o mundo no qual vivem (Freire, 2019).

Estes dois vetores interpretativos, cujos sentidos se opõem, convergem, porém, segundo o princípio da ambivalência de Bauman (2007), que categoriza que perante um mesmo facto é possível identificar uma pluralidade de interpretações, na medida em que essas perceções dependem do quadro interpretativo que cada um utiliza para aceder à compreensão do facto. Na verdade, um dos estímulos à realização deste estudo foi, precisamente, sentir esta ambiguidade latente entre a existência de uma escola que endoutrina massivamente de acordo com as políticas neoliberais ao mesmo tempo que reproduz e acentua desigualdades e, por outro lado, ver essa mesma escola como uma via de esperança à transformação social e procurar possíveis caminhos. Impossível ir ao âmago desta dualidade sem reflexão, contudo, a pretensão é, também, de ação, numa combinação que, segundo Giroux (2023), faz do professor um intelectual transformador.

Partindo do princípio de uma responsabilidade ética, atribuída ao professor no Estatuto da Carreira Docente (ECD, 2012) que impele à adoção de práticas e instrumentos que permitam aos alunos defenderem-se contra formas de segregação e exploração, encontra-se a necessidade deontológica (Rawls, 2013) de uma prática que concretize o currículo de modo democrático e inclusivo. Esta constatação é apoiada pelo reconhecimento de que o currículo expressa o plano de socialização através das práticas escolares, imposto de fora, mas, ainda assim, os professores têm capacidade de o moldar, podendo atuar como contrapeso se for exercido adequadamente e estimulado como

mecanismo contra-hegemónico (Sacristán, 2017). É por este motivo que se acredita numa resposta dentro do currículo que chegue a todos os alunos, numa ideia semelhante à de Perrenoud (2001), a propósito da diferenciação pedagógica, o qual afirma que diferenciar é dar aos alunos mais desprovidos ocasiões de aprender e de interagir. Não é por acaso que investigações recentes (por exemplo, Vithal et al., 2024) demonstram a complexidade do estudo da equidade no ensino da Matemática, ao mesmo tempo que requerem um maior foco de estudo dedicado aos alunos e professores nas salas de aula de Matemática.

Pelo precedido, confia-se que a tríade formada por educação matemática para a justiça social, modelação matemática e funções possa fortalecer, nos alunos, a compreensão concetual e de procedimentos matemáticos, bem como desenvolver aptidões para a compreensão da realidade social, atenuando, simultaneamente, a perpetuação na identificação da disciplina de Matemática como um fator determinante de insucesso e exclusão escolar.

1.3. Objetivos do estudo

Este estudo visa averiguar o contributo da modelação matemática e da justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Na concretização deste objetivo, procura-se responder aos seguintes objetivos específicos:

(1) Enquadrar as expetativas dos alunos para a aprendizagem de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos sociais, face à cultura da escola;
(2) Identificar as atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, na aprendizagem de funções;
(3) Verificar como os alunos valorizam as tarefas de modelação contextualizadas por situações de justiça social na aprendizagem de funções.

No que diz respeito aos objetivos específicos, importa clarificar alguns conceitos, aproveitando para justificar algumas opções. Relativamente ao primeiro objetivo específico, é pretendido clarificar as expetativas dos alunos quanto à aprendizagem em geral e, especificamente, de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos sociais. As expetativas dos alunos são formadas, precisamente, pelo produto de alguns elementos que fazem parte do seu contexto, sabendo-se que, para elas, influenciam o desempenho académico dos alunos, segundo Bandura (2023), e que quer as expetativas dos alunos, quer o ambiente escolar são importantes para o desenvolvimento académico e emocional dos mesmos (Comer, 2015). Deste modo, entende-se a realidade escolar dos alunos afastada da

linearidade, que se desenrola num palco de ações recíprocas, logo, presume-se como importantes à sua caracterização o aprofundamento de alguns dos agentes educativos que com eles se relacionam.

A noção de cultura da escola aqui mencionada está ligada ao conceito de *ethos* escolar, uma vez que a noção de cultura tem um significado mais vasto, podendo assumir uma pluralidade de dimensões: sociológica, normativa, política, entre outras. Assim, a cultura da escola, encarada enquanto *ethos*, é vista como as crenças, os valores, as dinâmicas interaccionais dos membros de uma organização, o que em linguagem coloquial se designa de filosofia ou ambiente (Donnely, 2000). No seio de uma organização escolar, traduz o modo como os seus membros entendem as normas culturais e os valores dominantes, e os concretizam sob a forma de agir e interagir, resultando nas características identitárias nas quais de distinguem as escolas (Donnely, 2000). Apesar de ser considerado um fator importante para a melhoria da escola um ethos escolar positivo, pouco se conhece sobre a forma como é vivido pelos alunos (Graham, 2012). Por tudo o precedido, não seria coerente ignorar os significados que os alunos dão às suas experiências escolares e, daí, a imprescindibilidade de enquadrar os alunos no seu contexto.

O segundo objetivo específico refere-se à identificação das atividades dos alunos na resolução das tarefas de modelação, com foco na justiça social. Uma vez que este estudo se debruça sobre modelação matemática, considera-se não ser relevante detalhar-se, neste momento, o sentido de tarefas de modelação. Por outro lado, é sentida a necessidade de atribuir um significado claro ao que se entende por atividades dos alunos. Deste modo, por atividade dos alunos entende-se o conjunto das execuções físicas ou mentais dos alunos, relativamente a determinada tarefa, no fundo, aquilo que os alunos fazem num dado contexto (Ponte, 2014), estando implícito o papel ativo do aluno no decorrer da aprendizagem, ou seja, pressupõe um convite à atuação do aluno (Skovsmose, 2020). No âmbito da modelação, esse convite é intrínseco à própria modelação e, portanto, as atividades dizem respeito a um conjunto de ações que envolvem interpretar os dados, organizá-los, abordá-los matematicamente, investigar formas de resolvê-los, avaliar os resultados, assim como podem levantar questões e realizar investigações que mobilizem o conhecimento reflexivo (Barbosa, 2009).

A valorização dos alunos às tarefas de modelação contextualizadas por situações de justiça social na aprendizagem de funções é o terceiro objetivo específico deste estudo. Considera-se que é fundamental dar conta do envolvimento e do desenvolvimento da identidade, entendendo-se a identidade como o crescimento holístico dos alunos enquanto seres sociais e culturais que a educação matemática pode e deve promover (Gutiérrez, 2012), bem como se verifica o modo como os alunos percecionam a aplicação dos conteúdos de funções à realidade.

1.4. Estrutura da tese

Este trabalho encontra-se organizado em oito capítulos. O primeiro corresponde à sua introdução, com a qual é apontada a direção do estudo, em termos axiológicos, é dado a conhecer o objetivo da investigação e os objetivos específicos que a delinearam e é traçado o percurso seguido.

No segundo e terceiro capítulos desenvolve-se o enquadramento teórico que sustenta o estudo, procedendo-se a uma revisão da literatura e apresentando-se alguns estudos empíricos. No Capítulo 2, *A modelação matemática como cenário educativo*, começa-se por apresentar terminologia e definir conceitos conectados à modelação matemática. Fundamenta-se a sua vertente educativa através da clarificação das etapas cognitivas do processo de modelação e do desenvolvimento de competências de modelação. São abordadas as finalidades da modelação como prática educativa, no que diz respeito ao papel do professor, bem como a importância de usar o contexto do mundo real nas tarefas de modelação de forma a levar os alunos a interpretarem o seu mundo. É elaborada uma breve revisão da evolução curricular da modelação matemática em Portugal, em conexão com o tópico de funções, no 3.º ciclo do ensino básico. Ainda neste capítulo são apresentadas estratégias e dinâmicas de implementação da modelação como ambiente de aprendizagem, sobretudo no que diz respeito à visão sociocrítica. No Capítulo 3, *Uma educação matemática para a justiça social*, procede-se a uma revisão da literatura que sustenta a educação matemática dentro de uma prática educativa que valorize a justiça social. Para tal, inicia-se com uma problematização decorrente da educação contemporânea, colocando professores e alunos no centro da construção de uma consciência identitária, que indique um caminho que se distancie de uma escola neomercantil. Segue-se uma análise epistemológica do conceito de justiça até aplicar a sua multidimensionalidade à educação, como base para fundamentar o imperativo ético da educação matemática. A procura de uma educação matemática que proporcione empoderamento leva a encará-la segundo uma vertente crítica e a conectá-la à justiça social. São, ainda referenciadas as marcas normativas da educação matemática para a justiça social nos documentos nacionais. Finaliza-se com uma interseção entre a educação matemática para a justiça social e a modelação matemática crítica.

No quarto capítulo, *Metodologia da investigação*, são apresentadas e justificadas as opções metodológicas do estudo, identificados os participantes, elencados os procedimentos metodológicos adotados, as técnicas de recolha e de análise dos dados.

O quinto e sexto capítulos são dedicados aos casos, separados por turmas. O capítulo 5, *Estudo de caso de uma turma de 8.º ano*, e o capítulo 6, *Estudo de caso de uma turma de 9.º ano*. Estes capítulos encontram-se divididos em quatro partes, de acordo com um conjunto de temas que

assentam na forma como estão elaborados os casos, a saber: O horizonte escolar e as vozes de intervenientes da comunidade educativa; Momentos de aprendizagem; Contributos das tarefas de modelação; e, por fim, uma síntese do capítulo.

No Capítulo 7, *Discussão de resultados*, procede-se a uma transversalidade da informação emergente dos dados recolhidos, cruzados com a literatura na procura de consolidar os objetivos de investigação.

O oitavo e último capítulo, *Conclusões*, encerra esta tese com a apresentação dos principais resultados, num diálogo concomitante entre a teoria e os dados empíricos, inferindo-se sobre as implicações do estudo, bem como as possibilidades que deixa em aberto.

CAPÍTULO 2

A MODELAÇÃO MATEMÁTICA COMO CENÁRIO EDUCATIVO

O presente capítulo é dedicado ao aprofundamento de um cenário educativo[1] que priorize a modelação matemática como motriz de aprendizagem, pelo que se encontra dividido em seis secções, sendo a última uma síntese. Neste caminho, são tidos em consideração alguns fatores que ajudam a clarificar a estratégia a seguir, assim como as etapas cognitivas do processo de modelação, o desenvolvimento de competências de modelação ou a análise dos processos cognitivos envolvidos nas atividades de modelação e na aplicação de resolução de problemas. Por este motivo inicia-se com uma abordagem à terminologia e a especificação de alguns conceitos, para passar à fundamentação da modelação em contexto educativo. Seguem-se os vetores da sua finalidade pedagógica, segundo a vertente do ensino, da aprendizagem e da importância da autenticidade nas tarefas de modelação. Analisam-se formas e dinâmicas de implementação da modelação em contexto educativo, bem como a sua conjugação com o tópico de funções de acordo com o currículo nacional. Por fim, realça-se a dimensão sociocrítica da modelação, para evidenciar, sobretudo, como é possível construir um ambiente educativo que combine ação e reflexão.

2.1. Da generalização à especificidade da modelação matemática

Nas últimas décadas, à relação entre a Matemática e o mundo real foi atribuída especial importância, especialmente no campo educativo, mediante o processo denominado modelação matemática (Blum & Niss, 2024; Galbraith, 2024; Smith & Morgan, 2016; Stillman, 2019), cujos produtos académicos contribuíram significativamente para as salas de aulas, nos mais diversos níveis e contextos educativos.

A relevância na definição de termos e conceitos relacionados com o processo de modelação matemática transporta um caráter precioso na clarificação e desenvolvimento do tema em questão. A sustentação teórica envolverá uma distinção entre modelação matemática como método científico e como abordagem educativa. No domínio científico, surge associada a uma estratégia de investigação ou a um método de pesquisa (Ärlebäck & Doerr, 2015; Bassanezi, 2002; Biembengut, 2009), assim como aparece numa dimensão pedagógica, sob a forma de ambiente de aprendizagem (Barbosa,

[1] A ideia de cenário educativo é proveniente do investigador Ole Skovsmose (2007).

2008; Galbraith, 2024; Skovsmose, 2007) ou como um sistema de ensino e aprendizagem (Aroeira et al., 2024).

2.1.1. Génese

Um modelo é uma descrição simplificada de uma situação, seja ela real ou imaginária (Ponte, 1992), indubitavelmente associada à representação de um sistema (Bassanezi, 2002) e derivando, pelo menos, em dois tipos de modelos: o modelo objeto, como representação de um objeto ou facto concreto, e o modelo teórico, conectado com uma teoria geral existente. Tal definição implica atividade, sentido, conexão com a realidade. Esta atividade pode ser representada por diversas formas, sejam elas palavras, desenhos ou esboços, modelos físicos ou fórmulas matemáticas e diferentes linguagens, englobando todo um processo: o processo de modelação. O processo de modelação é a construção dessas representações, como são elaboradas e de que forma exprime a informação acerca do real (D'Ambrosio, 2009).

O conceito de modelo matemático figura em inúmeros estudos e invade diversas áreas de investigação quer no domínio científico (Blum & Niss, 2024) quer numa perspetiva educativa (Almeida & Ferruzzi, 2009; Barbosa, 2001; Blum & Ferri, 2009; Niss, 2010; Ponte, 1992). Concretamente, um modelo científico torna-se num modelo matemático se o modelo descrever ou representar uma situação do mundo real, desde que a estrutura de construção envolva conceitos e ferramentas matemáticas (Pollack, 2003). No sentido lato, um modelo matemático de um fenómeno ou de uma situação problema "é um conjunto de símbolos e de relações matemáticas que representam, de alguma maneira, o fenómeno em questão" (Biembengut & Hein, 2007, p. 106). Neste sentido, os modelos podem ser vistos como sistemas concetuais que são usados para construir, interpretar, explicar e, matematicamente, descrever uma situação (English & Watters, 2005). Mais especificamente, os modelos são sistemas concetuais significativos que promovem a compreensão concetual e a matematização (Lesh & Zawojewski, 2007). As situações que se pretendem descrever vêm sempre associadas a fenómenos particulares do mundo real.

Deste último conceito – o mundo real – imanam inúmeras considerações, no entanto, destaca-se, de momento, aquilo a que vários autores denominam como o domínio extra-matemático (Ärlebäck, 2009; Ferri, 2006; Niss, 2012). Desse mundo, o que se pretende é utilizar a Matemática para lidar com características, fenómenos, estruturas, questões ou propriedades. Seguidamente, cada uma dessas entidades tem de ser representada por entidades matemáticas que sejam relevantes para o contexto. Em síntese, a pertinência está em mapear ou traduzir as entidades selecionadas do domínio

extra-matemático em entidades matemáticas pertencentes ao domínio matemático correspondente. Para concluir esta transferência e obter conclusões matemáticas, é, para Niss (2012), necessário traduzi-las de volta ao domínio extra-matemático. Este processo é conhecido na literatura como ciclo de modelação (Blum & Ferri, 2009; Galbraith & Stillman, 2006; Stillman et al., 2013), no fundo, uma descrição teórica do que envolve a modelação do mundo real (Stillman, 2019).

2.1.2. Fundamentos

Niss (2012) apresenta a simbologia, que intitula metáfora teórica, segundo o triplo (D,f,M) a que usualmente é chamado matematização. D é atribuído ao domínio extra-matemático, M representa o domínio matemático e f uma tradução de D para M ou uma matematização de D por meio de M. De notar que D e M são mais do que conjuntos constituídos por elementos singulares, englobando também fenómenos, relações ou questões. Não obstante a relevância deste processo de matematização, a verdade é que é apenas uma etapa de um processo bem mais alargado e dinâmico, conhecido como modelação matemática e a que Blum e Ferri (2009) sucintamente, descrevem como o processo de transição entre o mundo real e a Matemática, em ambas as direções. Isto porque, e como reforça Lingefjärd (2006), o processo de modelação envolve observar uma situação, conjeturar relações, aplicar análises matemáticas, obter resultados matemáticos e reinterpretar o modelo no mundo real. Do mesmo modo, Bassanezi (2002) expõe a modelação matemática como uma dinâmica criada com vista à obtenção e validação de modelos matemáticos. A ligação com a realidade nunca é descurada, uma vez que a modelação consiste, precisamente, numa forma de abstração e generalização com o intuito de transformar a realidade em problemas matemáticos.

O facto de o processo de modelação envolver ciclicamente a realidade leva a que haja autores que argumentem a necessidade de reconhecer o papel decisivo do sujeito na perceção dessa realidade e consequente construção do modelo, na medida em que a representação é criada por um dado sujeito com distintas conceções e interpretações da situação real (Carreira, 2001). No entanto, Bassanezi (2002) alerta que "a modelação é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade" (p. 24).

Como resultado deste carácter subjetivo, D'Ambrosio (2009) sustenta que os modelos apenas fornecem aproximações do comportamento real e, por esse motivo, podem ser mais ou menos úteis, na medida em que estão sujeitos a reformulações. Contudo, servem sempre para reformular hipóteses ou até formular outras, podendo levar ao estabelecimento de novas teorias mais apropriadas à questão original. A tradução em modelo matemático da realidade "depende do conhecimento dos factos,

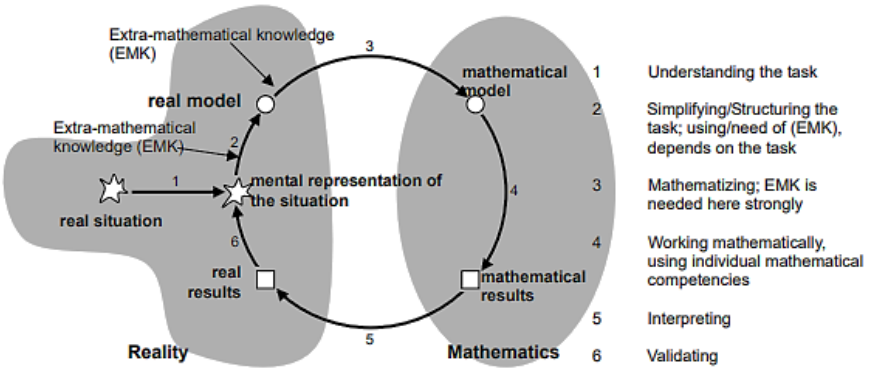
fenómenos e do reconhecimento do comportamento dos objetos ou sistemas reais" (D'Ambrosio, 2009, p. 91). Outra grande vantagem que aponta o autor é o facto de a modelação matemática servir para fazer previsões sobre o comportamento de um sistema e, subsequentemente, poder controlar o sistema.

Por outras palavras, Ferruzzi e Almeida (2015) entendem a modelação matemática como a procura de uma representação matemática para um objeto ou fenómeno que pode ou não ser matemático. E, neste sentido, estes autores consideram que "trata-se de um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenómeno que pretende representar" (p. 378).

Blum (2015) chega mesmo a defender que o processo que transforma a situação em modelo cria uma realidade que depende do conhecimento, das intenções e dos interesses do sujeito da resolução. Parece ser consensual admitir que este processo requer do modelador habilidades específicas, como conhecimento matemático e capacidade de interpretar o fenómeno segundo uma ótica matemática (Biembengut, 2014). Para além disso, encontra-se, frequentemente, na literatura a descrição deste processo através de um esquema que ilustra como o processo de modelação conecta o mundo extra-matemático e o mundo matemático, quer de uma forma iterativa ou cíclica, o ciclo de modelação. Um destes exemplos surge com Ferri (2006), como representado na Figura 1, que, ao adaptar o ciclo de modelação, nomeadamente, de Blum e Leiss, dentro de uma perspetiva cognitiva, descreve o processo de modelação em seis fases: situação real; representação mental da situação; modelo real; modelo matemático; resultado matemático; e resultados reais. Na transição entre essas fases, a autora evidencia as fases: entender a tarefa; simplificar/estruturar a tarefa; matematizar; trabalhar matematicamente; interpretar; e validar.

Figura 1

Ciclo de modelação adaptado por Ferri (2006, p. 92)



2.1.3. Abordagens e perspetivas

É neste contexto que surge a tentativa de mediação entre a evolução da pesquisa matemática e a educação matemática e que a implicação do conceito de aplicabilidade se estabelece como uma ponte. Conforme alertam Burkhardt e Pollak (2006), é fundamental saber mais sobre a melhor forma de permitir que todos os professores de Matemática adquiram as habilidades extra-matemáticas necessárias para ensinar modelação. Realce-se que as influências intelectuais dominantes na matemática escolar provêm de matemáticos. No fundo, o que mais interessa é que a modelação matemática, quer esteja sob uma ótica científica, quer segundo uma estratégia de ensino e aprendizagem, seja entendida como a "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando as suas soluções na linguagem do mundo real" (Bassanezi, 2002, p. 16).

Ao observar a evolução no debate acerca da categorização das perspetivas de modelação, distingue-se em Kaiser-Messmer (1991) duas perspetivas: a pragmática e a científica-humanística. A primeira, segunda esta autora, consiste em estimular nos alunos habilidades matemáticas para a solução de problemas reais, mais ainda, tendo em vista as futuras profissões dos mesmos. Na perspetiva científica-humanística, Kaiser-Messmer (1991) destaca que as atividades de modelação fornecem apenas o contexto para desenvolver os tópicos previstos no programa, tendo como objetivo final aprender Matemática. Por outro lado, tomando como referência as abordagens propostas por Kaiser e Sriraman (2006), pode-se estabelecer uma clarificação na distinção entre abordagens didáticas e perspetivas de pesquisa científica. Enquanto as abordagens didáticas seguem uma conduta normativa, em que as aplicações e modelação em educação matemática são o cerne, as perspetivas científicas caracterizam-se por se especializarem sobre aspetos específicos das aplicações e da modelação matemática. A categorização proposta por estes autores das diferentes abordagens que pode assumir a modelação matemática não é um produto final, senão um instrumento de trabalho que tem auxiliado pesquisadores e profissionais, permitindo uma sistematização de conceitos, noções, processos e dinâmicas. Destacam-se seis perspetivas, denominadas realista, contextual, cognitiva, educacional, epistemológica e sociocrítica.

Três objetivos centrais, revestidos de carácter utilitário e pragmático, são apresentados para caracterizar a modelação matemática segundo a perspetiva realista: resolução de problemas reais, compreensão do mundo real e promoção de competências de modelação. O processo de modelação é usado para analisar uma situação ou prática da vida real e o intuito de investigação prende-se com a verificação das condições necessárias para modelar um determinado problema concreto. A utilização

desta perspetiva difunde-se por profissionais de engenharia, economia, ciência e outras áreas em que a matemática seja um denominador comum. Na linha reiterada por Haines e Crouch (2001), Kaiser e Schwarz (2006) apresentam, como principal característica desta perspetiva, o facto de a modelação ser entendida como uma atividade a ser utilizada para resolver problemas autênticos e não como desenvolvimento de teorias matemáticas, especificando que o processo de modelação é executado como um todo e não parcialmente. Na sua vertente pedagógica, a perspetiva realista dota o processo de modelação de pragmatismo, convergindo na aplicação de atividades interdisciplinares de resolução de problemas e, por isso, exemplos reais provenientes de diversas áreas de investigação científica são utilizados com o fim de proporcionar um ambiente de aprendizagem baseado na análise de problemas do mundo real ou na aplicação de situações reais. Importa reconhecer que foi Pollack (1969) que abriu caminho à abordagem desta perspetiva como ambiente de aprendizagem, defendendo a ideia de que a natureza "aplicada" da matemática é mais relevante para a sua aprendizagem do que a sua dual "pura", tendo ficado conhecida como perspetiva pragmática.

De uma forma simplificada, a perspetiva contextual é sinónimo de resolução de problemas. Baseia-se na investigação que se desenvolveu em psicologia e tem como motor promover o ensino dos conteúdos matemáticos e o estudo das aprendizagens dos alunos.

Autores como Kaiser et al. (2007), enquadram a perspetiva cognitiva como uma meta perspetiva. Ao centrar-se na investigação da psicologia, tem como objetivo analisar e compreender os processos cognitivos que se produzem no decorrer das atividades de modelação. Pretende estimular os processos de pensamento matemático através do uso de modelos como imagens mentais ou imagens físicas. Além disso, realça a modelação como um processo mental como abstração ou generalização.

Diferenciam-se na categoria da perspetiva educacional a modelação didática e a modelação conceptual, sendo que têm como objetivo a estruturação do ensino e a sua promoção e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Têm uma vertente de promoção da motivação e melhoria das atitudes face à matemática e da compreensão crítica dos processos de modelação e o desenvolvimento de modelos.

Por sua vez, a perspetiva epistemológica apoia-se na Antropologia e na teoria da Didática para promover as conexões existentes entre as atividades de modelação e as atividades matemáticas. Ao centrar-se nos conteúdos matemáticos, tenta desenvolver uma nova concetualização e reorganização da Matemática, do ponto de vista da modelação.

Por último, para Barbosa (2006), a discussão teórica dirigida por Kaiser-Messmer (1991) revela-se insuficiente no que diz respeito ao tipo de conhecimento em que as diferentes abordagens

relativas ao processo de modelação se centram. De modo lacónico, relembramos que este autor reconhece que a abordagem pragmática prioriza o conhecimento técnico, enquanto a abordagem científica faz ressaltar o conhecimento matemático. Contudo, chama à atenção para um outro conhecimento, que não é contemplado por nenhuma destas abordagens, aquilo que Skovsmose (2007) define como conhecimento reflexivo, ou seja, a capacidade de compreender as implicações dos resultados matemáticos, na prática social. O conhecimento técnico e o matemático não são disjuntos do conhecimento reflexivo, apenas dependem do que se pretende evidenciar na prática de modelação. Por este motivo, Barbosa (2009) propõe, na esteira de uma abordagem emancipatória da modelação matemática, a perspetiva sociocrítica. O conhecimento reflexivo é o foco e o desenvolvimento do pensamento crítico uma prioridade. Esta dimensão sociocrítica da modelação matemática é considerada, segundo Orey e Rosa (2018), uma extensão da Teoria Crítica do Conhecimento.

2.2. A modelação matemática em contexto educativo

Segundo Barbosa (2006), é imprescindível diferenciar o trabalho desenvolvido por modeladores profissionais das atividades de modelação aplicadas em sala de aula, uma vez que a modelação na educação matemática assume contornos especiais, dependendo do contexto educativo, dos professores envolvidos, do perfil dos alunos, entre outros fatores (Araújo, 2009).

A integração da modelação matemática na sala de aula é agora um cenário defendido por um extenso número de investigadores (Almeida & Kato, 2014; Blum 2015; Madruga & Biembengut, 2016; Niss & Blum, 2020), chegando mesmo a assumir-se como uma tendência metodológica (Klüber, 2016). Até porque, na perspetiva da educação matemática, a modelação matemática, é definida genericamente como "a abordagem de problemas da realidade, utilizando conteúdos matemáticos" (Souza & Barbosa, 2014, p. 32). Adotando como referência esta definição, as ramificações para outras definições parecem não ter fim. A modelação matemática é tomada como um recurso, uma atividade, uma perspetiva de aprendizagem, um ambiente de aprendizagem, uma ferramenta, uma alternativa pedagógica. Contudo, os aspetos que detêm em comum revelam-se simples de enunciar: matemática e realidade.

2.2.1. Definição e fundamentação

Importa reconhecer que o papel desempenhado pelo ensino e aprendizagem da modelação matemática começa no séc. XIX com Felix Klein (Schukajlow et al., 2018), porém, é apenas nos anos oitenta do séc. XX que os investigadores colocam questões relacionadas com os efeitos que terá nos

alunos a utilização da modelação matemática. Os estudos desta época revelam como principais interesses de investigação a promoção de habilidades e as competências de modelação. Nas últimas décadas, o foco de estudo recaiu sobre os aspetos cognitivos. Neste contexto, importa reconhecer o contributo de congressos e encontros internacionais que promovem o debate e a exposição de resultados de estudos empíricos no âmbito da modelação matemática como ambiente de aprendizagem em todos os níveis e ciclos de ensino. O primeiro destes encontros, ICMTE (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications), surgiu em 1983. Na mesma linha de ação, são de realçar o Congress ICME (International Congress on Mathematical Education) e as conferências CERME (Conferences of European Society for Research in Mathematics Education). Nos primeiros três congressos do ICTMA a preocupação centrou-se na criação de novos exemplos e temas matemáticos de modelação a serem abordados em contexto educativo e, especialmente, em novas formas de projeção de cursos de modelação (Blum & Niss, 1989). A partir desta data, o hiato torna-se estreito, podendo encontrar-se na literatura um sem número de publicações com base em estudos teóricos e investigações empíricas.

No início da década de 90, Blum e Niss (1991) ressalvam que a utilização da modelação matemática como ambiente de aprendizagem conduz a um cumprimento dinâmico do currículo, despromovendo o ensino tradicional estanque por temas. Encontra-se, em Ponte (1992), um pedido de valorização da modelação matemática na sua vertente educativa como um trunfo a explorar para o desenvolvimento da capacidade de compreender, desenvolver, construir e analisar criticamente modelos matemáticos simples. Blum (2011) discorre sobre quatro argumentos que considera essenciais no favorecimento da modelação na educação matemática, sendo eles os argumentos pragmático, formativo, cultural e psicológico. Para além desta sustentação teórica, o autor revela que a integração da modelação no ensino e na aprendizagem da Matemática pode contribuir, significativamente, para que os alunos deixem de encarar a mesma sob um ponto de vista mecânico de mera manipulação de símbolos.

Barbosa (2001) sublinha que a modelação é considerada como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são levados a problematizar e investigar, através da Matemática, situações com referência na realidade. Situações essas que, a partir dos anos 90, são frequentemente apresentadas nos currículos oficiais como áreas extra-matemáticas, ao que os investigadores respondem que o ensino da Matemática não pode ser reduzido apenas à aplicação de exemplos baseados na realidade, senão que estes exemplos da realidade devem desempenhar um papel central (Kaiser & Schwarz, 2006). Paralelamente, a abordagem de questões reais, provenientes de um contexto do interesse dos

alunos, pode motivar a compreensão de conteúdos e processos matemáticos, permitindo, simultaneamente, a visibilidade da aplicação da Matemática noutras áreas do conhecimento (Almeida & Brito, 2005).

Blum e Ferri (2009) especificam que o uso da modelação e dos seus modelos, na sala de aula, possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de competências críticas e a compreensão dos seus próprios contextos e aspetos sociais, para além de contribuir para a formação de cidadãos responsáveis e interventivos numa sociedade que requer, cada vez mais, competências em modelação.

Uma vez reconhecido, pela comunidade científica, o papel da modelação no campo educacional (Carreira & Blum, 2021b; Galbraith, 2024), os estudos dirigem-se para os processos cognitivos que lhes são inerentes e uma das primeiras questões que surge diz respeito à forma como deve ser encarada a modelação matemática, se por uma proficiência ou como uma competência na aprendizagem da Matemática (Carrejo & Marshall, 2007). Transversalmente, o foco da atenção vai para os alunos e como se processa a aprendizagem, sendo que "a modelação pode realmente ser aprendida se o ensino obedecer a determinados critérios de qualidade, em particular, mantendo um permanente equílibrio entre a orientação do professor e a independência dos alunos" (Blum & Ferri, 2009, p. 45). Neste mesmo sentido pronunciam-se Rosa e Orey (2012), ao definirem a modelação como um "ambiente de aprendizagem que tem como objetivo facilitar a investigação de uma situação-problema através da elaboração de atividades pedagógicas contextualizadas que auxiliem os alunos na conversão e na utilização dos conhecimentos matemáticos para a resolução de situações-problema" (p. 264).

Mais concretamente, Viseu e Menezes (2014) apresentam a modelação em sala de aula como uma atividade que consta em interpretar os elementos e as relações de uma dada situação, solucionar a situação com base na Matemática, proceder à análise dos resultados, compará-los com o fenómeno em estudo e, por fim, obter conclusões. Vista como um processo, a modelação matemática implica uma série de ações ou fases que fazem com que a construção ou interpretação de um modelo não se efetue de forma instantânea na sala de aula, o que na literatura ficou conhecido como ciclo de modelação (Villa-Ochoa, 2015).

A questão que importa, neste momento, evidenciar é a seguinte: como se confere o processo de modelação matemática?

2.2.2. As etapas cognitivas do processo de modelação

Kaiser-Messmer (1987) descreveu o processo de modelação como um ciclo que parte do mundo real para o mundo matemático e volta para o real. De acordo com Kaiser e Schwartz (2006), o ponto de partida do processo de modelação é uma situação do mundo real. Posteriormente, a situação é simplificada e estruturada para obter um modelo do mundo real. Esse modelo do mundo real é matematizado, isto é, traduzido em matemática de tal forma que se obtenha um modelo matemático da situação original. As considerações matemáticas que resultam do modelo matemático produzem resultados matemáticos, que devem ser reinterpretados na situação real. A adequação destes resultados deve ser verificada e validada.

Por sua vez, Almeida e Ferruzzi (2009) apresentam um conjunto de procedimentos tomados ao desenvolver atividades de modelação:

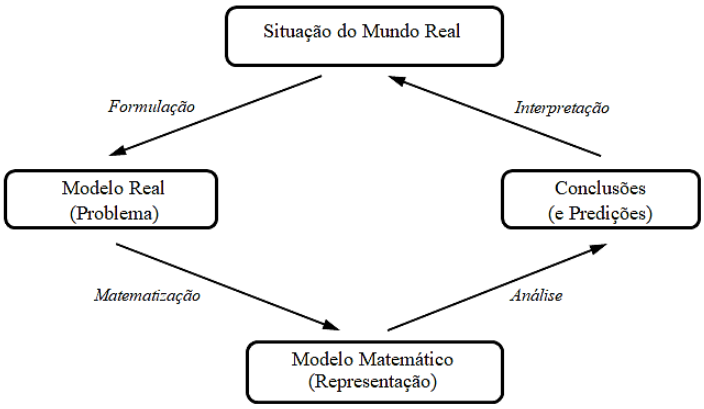
> (...) a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não. (p. 121)

A procura de um ciclo que descreva as etapas gradativas do processo de modelação fez recrudescer o enfoque no papel do aluno e do professor. No entanto, dependendo do objetivo da pesquisa, esses ciclos de modelação podem parecer diferentes e destacar aspetos distintos do processo de modelação (Haines & Crouch, 2013).

Ponte (1992) apresenta um diagrama (Figura 2) através do qual descreve o processo de modelação através de um ciclo que tem início na tradução de uma situação do mundo real num problema. Segue-se para a escolha de uma estrutura matemática que represente o problema e, simultaneamente, selecionam-se e estabelecem-se relações entre as variáveis. Utilizando ferramentas matemáticas, analisa-se o modelo matemático procurando obter conclusões, onde, de seguida, se utilizam as conclusões para interpretá-las à luz da situação real inicial. Neste momento, verifica-se a adequabilidade do modelo e, se o caso for negativo, procura-se redefinir o problema, encontrar novas variáveis e reajustes. Se necessário, ter-se-á que repetir várias vezes este ciclo até obter um resultado que se pense satisfatório.

Figura 2

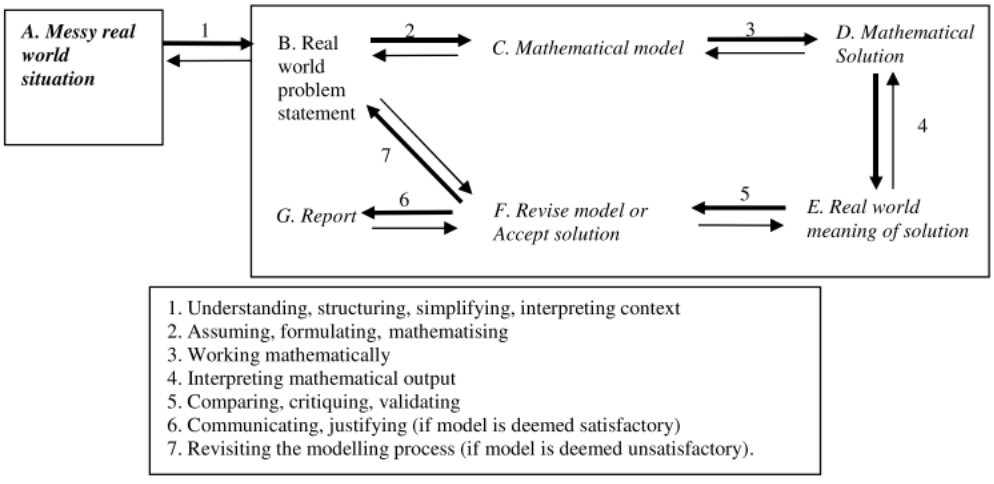
Ciclo de modelação proposto por Ponte (1992, p. 1)



Analise-se o ciclo proposto por Galbraith e Stillman (2006) que possui um aspeto relevante no que diz respeito aos interesses educacionais na medida em que lhe é acrescentada uma adenda (Figura 3). Os autores têm como objetivo aprender sobre o que pode acontecer nas transições entre as etapas do processo de modelação, que, segundo os mesmos, se inicia com a transição de uma situação confusa do mundo real para a formulação de um problema real (A↔B). A segunda transição é a passagem do problema real para o modelo matemático (B↔C) à qual se segue do modelo matemático para a solução matemática (C↔D). A quarta transição parte da solução matemática até chegar ao seu significado no mundo real (D↔E). Por fim, o significado no mundo real é revisto para aceitação do modelo (E↔F).

Figura 3

Ciclo de modelação de Galbraith e Stillman (2006, p. 2)

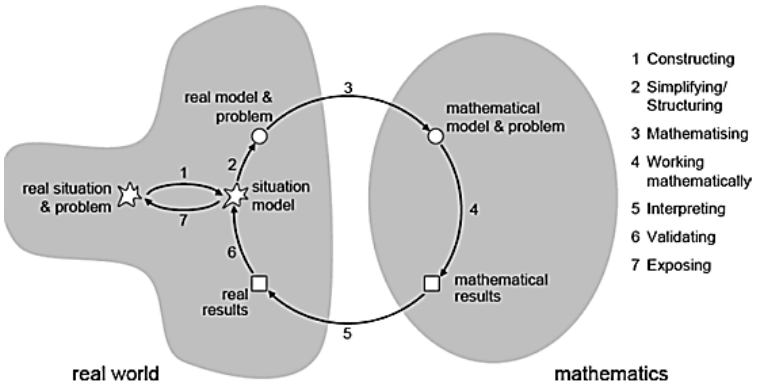


A segunda parte do diagrama apresentado por Galbraith e Sttilman (2006) tem um foco puramente educacional, na medida em que os autores tentam expressar os tipos de atividade mental que ocorrem nas transições. Assim, a transição (A↔B) contém as ações compreender, estruturar, simplificar e interpretar o contexto; a segunda (B↔C) inclui pressupor, formular e matematizar; a ação de trabalhar matematicamente encontra-se na transição (C↔D); na transição (D↔E) ocorrem a interpretação de resultados matemáticos; e de E↔F as ações de comparar, criticar e validar. Os autores acrescentam ainda, de F↔B, comunicar e justificar se o modelo for considerado satisfatório e, de F↔G, rever o processo de modelação se o processo for considerado insatisfatório.

Com o ciclo de modelação construído por Blum e Leiβ (2007), representado na Figura 4,.os autores apresentam um diagrama cíclico dividido em sete passos. Parte-se da situação real e através da compreensão da tarefa chega-se à situação a modelar até obter o modelo real por meio da simplificação e estruturação. O terceiro passo diz respeito à matematização com a qual se obtém o modelo matemático. Trabalhando matematicamente atingem-se resultados matemáticos que são, posteriormente, interpretados e obtendo resultados reais. Ao validar esses resultados, poder-se-á verificar que será necessária uma segunda volta ao ciclo que leve a ter em conta outros fatores.

Figura 4

Modelo proposto por Blum e Leiβ (2007, p.225))



Blum e Ferri (2009) destacam algumas das vantagens deste modelo, argumentando, em primeiro lugar, que o facto do primeiro passo estar separado é relevante, uma vez que este surge como a primeira barreira cognitiva para os alunos na resolução de tarefas de modelação. Em segundo lugar, torna-se claro com este modelo que estes passos representam barreiras cognitivas para os alunos e, portanto, a ter em conta, embora geralmente não em ordem linear.

Este breve itinerário por alguns dos estudos empíricos realizados, nos últimos anos, no quadro da modelação matemática está longe de esgotar toda a produção sobre os ciclos de modelação e muito menos aquela que, não se debruçando diretamente sobre ela, toca em aspetos que a cruzam (Blum, 2015). No entanto, permite dar conta do paralelismo entre o mundo real e o mundo matematizado onde se opera, na sua multiplicidade, em três grandes etapas: a descrição; a prescrição; e a previsão (Carreira, 2011).

2.2.3. A modelação como competência

A competência de modelação pode ser caracterizada como a capacidade para construir modelos realizando adequadamente as várias etapas do ciclo de modelação, assim como analisar ou comparar determinados modelos (Blum & Leiβ, 2007; Kaiser & Brand, 2015). Por sua vez, estimular os alunos para uma cidadania responsável exige que os mesmos desenvolvam competências de modelação (Blum & Ferri, 2009; Geiger et al., 2022). De forma genérica, Blomhøj e Jensen (2003) apresentam a competência de modelação matemática como a habilidade, autónoma, para atravessar todos os aspetos do processo de modelação num determinado contexto. Kaiser-Messmer (1987) desenvolve um quadro teórico para descrever distintas competências na aplicação da matemática conhecida e com a finalidade de resolver problemas do mundo real, as quais se traduzem por competências para realizar o processo de modelação. No estudo empírico que desenvolve, são formuladas e explicitadas habilidades pedagógicas como competências para a resolução de problemas, competências de desenvolvimento de estratégias heurísticas e competências de comunicação.

Como resultado do mencionado até aqui, origina-se um pressuposto simples: o ciclo de modelação está fortemente conectado com as competências de modelação. Por esse motivo, diferentes perspetivas do ciclo de modelação derivam em distintas abordagens das competências de modelação.

Uma das tendências ao desenvolver o conceito de modelação como competência é enumerar um conjunto de subcompetências ligadas à compreensão do processo de modelação (Maaβ, 2006, p. 116):

> "*Competências para entender o problema real e construir um modelo baseado na realidade*. Tal, implica competências para: fazer suposições para o problema e simplificar a situação; reconhecer quantidades que influenciam a situação, nomeá-las e identificar as variáveis; construir relações entre as variáveis; procurar informações disponíveis e distinguir entre informações relevantes e irrelevantes.
> *Competências para construir um modelo matemático a partir do modelo real*, o que leva a competências para: matematizar e relacionar quantidades relevantes; simplificar essas

> quantidades relevantes, se necessário, e reduzir o seu número e complexidade; escolher notações matemáticas apropriadas e representar graficamente situações.
>
> *Competências para interpretar resultados matemáticos numa situação real*, levando a competências para: interpretar resultados matemáticos em contextos extra-matemáticos; generalizar soluções que foram desenvolvidas para uma determinada situação; usar linguagem matemática apropriada para comunicar sobre as soluções.
>
> *Competências para validar a solução*, implicando competências para: verificar criticamente e refletir sobre as soluções encontradas; rever partes do modelo ou passar novamente pelo processo de modelação, se as soluções não se adequarem à situação; refletir sobre outras formas de resolver o problema; questionar globalmente o modelo."

Em jeito de definição concisa, Maaβ (2006, p. 117) apresenta-nos as competências de modelação como incluindo "competências e habilidades para realizar processos de modelação apropriados e orientados segundo objetivos, bem como a vontade para colocá-los em ação".

Blomhøj e Jensen (2007) apresentam o termo competência como "a perspicácia de alguém em agir em resposta aos desafios de uma dada situação" (p. 47). Assente nesta ideia, os autores propõem duas abordagens distintas para basear as competências de modelação: a abordagem holística, que requer que os alunos trabalhem todas as fases do processo de modelação; e a abordagem atomista, que implica que os alunos se concentrem nos subprocessos tais como os de matematização ou de análise de modelos matemáticos. Numa situação como a descrita, pode-se concluir que para desenvolver competências de modelação matemática é necessário estabelecer um equilíbrio entre ambas as abordagens e não as encarar isoladamente, por forma a complementarem-se.

Na versão de Greer e Verschaffel (2007), podem-se classificar três níveis de modelação matemática: a modelação implícita; a modelação explícita; e a modelação crítica. As competências implícitas são referentes a atividades de modelação nas quais os alunos envolvem-se sem estarem verdadeiramente conscientes de que as mesmas são essenciais para a modelação. Por sua vez, às competências explícitas está inerente a atenção explícita ao processo de modelação. Já no caso das competências críticas, as mesmas traduzem a reflexão crítica sobre os papéis e consequências da modelação tanto na Matemática como no seio interdisciplinar e na sociedade. Neste ponto, verifica-se que, à data, as análises prendiam-se com a diferenciação das competências através de diferentes abordagens. A holística pressupunha ver as competências como um todo, com critérios e *performances* definidos, por outro lado, a analítica estruturava-se em subcompetências e critérios de desempenho.

Ainda com o propósito de clarificar o processo de modelação, elencam-se as seis fases atribuídas por Verschaffell et al. (2000), com o intuito de sequenciar as atividades inerentes ao

processo, a saber: A primeira fase é compatível com a compreensão da situação; seguindo-se a fase da construção de um modelo matemático que traduza a situação para um formato matemático; a terceira fase requer o trabalho com o modelo, obtendo alguns resultados; sendo a fase quatro, a interpretação dos resultados que implica chegar a uma solução de acordo com o contexto original; na fase cinco avalia-se o modelo, para que, na última fase se comunique a solução proveniente do problema da situação inicial.

2.2.4. Metacognição, resolução de problemas, aplicações e modelação

Outro tópico a ser estudado, e ao qual foi dada importância, foi a metacognição e a sua importância na promoção de competências de modelação, bem como a análise dos processos cognitivos. Embora não haja uma definição estandardizada, Maaβ (2006) salienta que as definições relativas a este conceito vão desde o conhecimento sobre o próprio conhecimento até à autorregulação na resolução de problemas. De acordo com Tanner e Jones (1995), os elementos que constituem a metacognição não são apenas o conhecimento de cada um e os processos do conhecimento, senão também as crenças sobre a natureza da Matemática e as próprias de cada um enquanto sujeitos de aprendizagem.

Matos e Carreira (1996) analisaram os processos cognitivos envolvidos nas atividades de aplicação de resolução de problemas, diferenciaram fases nas atividades de modelação e identificaram variáveis com base em perceções intuitivas para chegarem à distinção das fases do processo de modelação. Estes estudos empíricos levaram ao desenvolvimento de modelos conceptuais que sustentam e orientam o processo de modelação. Deste modo, a metacognição pode ser um fator importante de influência no desenvolvimento de competências de modelação, assim como as estratégias de resolução de problemas são necessárias para a realização de processos de modelação (Maaβ, 2006).

Bahmaei (2011) menciona que, na prática de ensino comum, o hábito de relacionar as atividades matemáticas de sala de aula com as experiências quotidianas restringe-se, muitas vezes, à resolução de problemas. No entanto, verificou-se que a Matemática escolar assente na mera resolução de problemas exclui da sua aprendizagem a vertente realista e suspende a construção de sentido (Verschaffel et al., 2000). Inclusive, os problemas que aparentemente conectam a Matemática a situações do mundo real não são mais que exercícios mal disfarçados nas quatro operações básicas (Greer et al., 2007). Tais dificuldades acarretam uma necessidade de rigor na terminologia que desemboque numa clareza dos conceitos. Nesse sentido, Ärlebäck (2009) contribui ao enquadrar com

precisão os conceitos de problema, aplicação e modelação. O autor fundamenta-se em Niss para concluir que um problema matemático é considerado um problema puro se a situação problemática em causa for incorporada totalmente dentro do universo matemático – o domínio matemático. Se, por outro lado, a situação problemática abordar situações do mundo real ou outras disciplinas – o domínio extra-matemático – o problema é denominado problema aplicado. Segundo Ärlebäck (2009), relaciona-se, na literatura, a designação aplicação da matemática com o uso da Matemática para resolver um problema extra-matemático. Contudo, os autores Ärlebäck e Doerr (2015), evidenciam que já se observam, em conjunto, os termos aplicações e modelação para representar todos os tipos de conexões feitas entre os domínios matemático e extra-matemático. De modo mais sistemático, a modelação concentra-se na transição do domínio extra-matemático para o domínio matemático enquanto a aplicação acontece precisamente na transição inversa.

2.3. Finalidades da modelação matemática como prática

Uma das questões recorrentes no âmbito da implementação de atividades de modelação na prática educativa é porque fazê-lo? Para responder, é importante definir-se com que finalidade e, segundo, com que princípios se pretende trabalhar a modelação em sala de aula. O que leva a uma outra questão, como fazê-lo?

É de relembrar que existem seis perspetivas categorizadas por Kaiser e Sriraman (2006) que espelham diferentes abordagens no que à modelação matemática diz respeito. Ainda assim, consideramos que o foco que estas perspetivas detêm em comum deverá ser previamente destacado. Neste sentido pronuncia-se Villa-Ochoa (2007), ao exemplificar que o propósito de um científico ao criar e utilizar um modelo é solucionar um problema ou avançar numa determinada teoria, enquanto na aula o modelo é construído para dotá-lo de significado ao mesmo tempo que incrementa o interesse pela Matemática. E se na atividade científica os conceitos matemáticos deste processo emergem da própria situação, através da abstração e simplificação de um fenómeno, na sala de aula são considerados *a priori* pelo professor com vista ao propósito do contexto, seja ele de ordem quotidiana ou de outras ciências. Por meio desta evidente distinção tão minuciosamente argumentada, deduz-se que, transversalmente a todas as abordagens e perspetivas, a modelação matemática converte-se para além de uma ferramenta para construir conceitos, "numa estratégia que possibilita o entendimento de um conceito matemático imerso num micromundo (contexto dotado de relações e significados) que prepara o estudante para desenvolver uma atitude diferente de perguntar e abordar o problema de um contexto real" (Villa-Ochoa, 2007, p. 70).

Justificada a dimensão pedagógica da modelação matemática, importa perceber que a construção desta dinâmica tem várias matizes, numa gradação sem hierarquias que passa tanto pelo aluno, como pelo professor, pelo contexto, pelo ambiente de aprendizagem, pela atividade, pelos tipos de tarefas e sua autenticidade, pelos tipos de representação, pela construção do conhecimento, numa enumeração difícil de finalizar. Ao apresentar-se como uma alternativa metodológica que traz para a sala de aula os problemas da vida real e da cultura dos alunos (Brandt et al., 2016), torna-se imprescindível enquadrar e colocar em evidência todos os elementos que fazem parte deste preâmbulo educativo, a partir do qual parece ser possível alterar o rumo de um ensino da Matemática descontextualizado e de carácter seletivo.

2.3.1. Conectar o ensino em contexto de modelação ao papel do professor

Para o desenvolvimento de uma atividade com modelação matemática existem, na literatura, inumeráveis propostas de etapas e procedimentos, alguns deles já aqui retratados. Independentemente daquelas que se elegerem, para Burak (2016) essas etapas devem ser conduzidas com base em dois pressupostos. Em primeiro lugar, o interesse do grupo, em segundo, a obtenção de informações e dados do contexto onde se encontra o interesse do grupo. Para operacionalizar esse processo, o papel do professor é determinante na medida em que assume o papel de mediador, orientador e problematizador (D'Ambrosio, 2015; Lima & Araújo, 2021). No entanto, Barbosa (2001) ressalva que "o ambiente de aprendizagem que o professor organiza pode apenas colocar o convite. O envolvimento dos alunos ocorre na medida em que seus interesses se encontram com esse" (p. 6). Esta posição leva diretamente a um conceito designado conhecimento do professor que ver-se-á, em detalhe, mais adiante. Para o autor em questão existem três formas de o professor se posicionar em face às possíveis organizações curriculares da modelação (Figura 5).

Figura 5

Esquema representativo da participação do professor e do aluno em cada caso (Barbosa, 2001, p. 9)

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

No primeiro caso, o professor coloca uma situação, com referência na realidade que tenha por base um problema a ser resolvido, fornecendo as informações necessárias à sua resolução. Aos alunos, cabe o processo de resolução sob a orientação do professor. No segundo caso, o professor apresenta um problema inicial, sustentado na realidade, incitando os alunos à procura e simplificação de dados que sejam importantes para a sua resolução. O terceiro caso aproxima-se do trabalho de projeto, uma vez que a situação-problema de contexto real é formulada pelo aluno, que posteriormente recolhe informação e trabalha os dados com vista à sua resolução. Qualquer dos casos revela um conjunto de passos que o norteia, diferindo no foco dado ao professor: à medida que este diminui, tendencialmente aumentará no aluno, segundo uma relação que se ilustra através do seguinte esquema e que pretende traduzir o envolvimento de ambos.

2.3.2. O aluno interpretando o seu mundo

Uma das questões que se coloca mais premente é a seguinte: por que é que é tão importante para o aluno a modelação? De acordo com Blum e Ferri (2009), uma das explicações pode partir pelo facto de quer os modelos matemáticos, quer a modelação estarem por todo o lado, inclusivamente na sua estreita ligação com as ferramentas tecnológicas, algo que é próximo dos alunos. Mas estes autores assentam, essencialmente, esta justificação em quatro premissas que consideram ser, em simultâneo, princípios subjacentes ao ensino da Matemática. O primeiro argumento que apresentam para responder à questão é o de que a modelação pode ajudar os alunos a melhor compreenderem o mundo, da mesma forma que mune a aprendizagem da Matemática de uma rede de suporte que abrange motivação, formação de conceitos, compreensão e retenção, contribui para o desenvolvimento de certas competências matemáticas e, por fim, dota a Matemática de uma imagem mais positiva na medida em que prepara os alunos para o seu uso em diferentes áreas ao mesmo tempo que incrementa a compreensão do seu papel sociocultural. Segundo Pollack (2007), perdem-se os alunos quando apenas se lhes ensina matemática 'pura'.

Na mesma linha posicionam-se Galbraith e Stillman (2006), ao apresentarem como propósitos da integração da modelação matemática desenvolver habilidades dos alunos para aplicar a Matemática no seu mundo, levar a Matemática para além da sala de aula e usar o contexto do mundo real como uma componente chave. Burkhardt (2018) compila todos estes argumentos em apenas um, alegando que modelar situações da vida quotidiana é o cerne da alfabetização matemática. Mais peremptoriamente, para que a Matemática seja significativa e relevante para os alunos, experimentar

atividades de modelação nos primeiros anos escolares é uma necessidade (Blum et al 2007; English, 2018), o que levanta diretamente uma outra questão: o que é a matemática significativa?

Indiscutivelmente, o envolvimento dos alunos, definido em qualquer uma das suas dimensões, é um contributo fundamental para uma participação ativa na aprendizagem. Reeve e Tseng (2011) defendem que, para além de influenciar o desempenho académico, o envolvimento é um fator que pode auxiliar na minimização da indisciplina e do abandono escolar. Se a disciplina de Matemática puder desfrutar desse suporte à aprendizagem, isso é algo a não desperdiçar. Atendendo a este facto, as atividades de modelação que têm por base tarefas de modelação autênticas são um aliado inequívoco. Para além do mencionado, a modelação fornece, aos alunos, formas eficazes para os ajudar a melhor solucionarem problemas e serem capazes de usar a Matemática em situações da vida real extraescolares (Lesh & Zawojewski, 2007).

Pollack (2007) refere que um dos benefícios da integração de atividades de modelação em sala de aula é, as mesmas exigirem para a sua resolução um maior desenvolvimento cognitivo do que a tradicional resolução de problemas. Tal justificação reside no facto de que situações autênticas pressupõem, da parte dos alunos, uma maior interpretação e descrição de formas matemáticas em vez de uma simples determinação da solução de um problema (Lesh & Hager, 2001), levando também a explorações matemáticas e generalizações.

Como visto anteriormente, o pensamento crítico é uma competência que os alunos desenvolvem ao trabalharem com modelação. De acordo com Lesh e Hager (2001), ao usar modelos para interpretar e explicar sistemas complexos, ao desenvolver fluência representacional e ao raciocinar matematicamente de diversas formas, os alunos estão a aprimorar o pensamento crítico, na medida em que estas etapas os ajudam a pensar no problema criticamente antes de enfrentá-lo. É de realçar que as atividades de modelação oferecem oportunidades para que os alunos expressem as suas ideias e pensem em múltiplas representações acerca de uma mesma situação (English & Watters, 2005).

Em Asempapa (2015), encontra-se enquadramento para aquilo que Pollack (2007) refere como sendo mais um benefício das atividades de modelação: o discurso de sala de aula. As experiências de modelação são ideais para promover comunicação, levando à exploração colaborativa e ao trabalho em equipa através de experiências sociais. Estudos demonstram que os alunos debatem, participam em discussões e partilham ideias ao trabalharem a partir da criação de modelos e a representação dos seus dados, tendo-se com eles concluído que os processos de comunicação inerentes às atividades de modelação resultam em importantes contribuições no que diz respeito ao

desenvolvimento social e matemático dos alunos. Este mesmo autor reforça que propiciar um ambiente de ensino que promova nos alunos uma cidadania responsável e participativa exige que nele assente o desenvolvimento de competências de modelação. Bahmaein (2011) ressalta que a resolução de problemas é importante, mas a sua única aplicação não estimula adequadamente o conhecimento, os processos e os desenvolvimentos sociais que são exigidos aos alunos para lidarem com os sistemas cada vez mais sofisticados da nossa sociedade. Em contrapartida, as atividades de modelação parecem ir ao encontro dessa reivindicação. Paralelamente, ao proporcionar aos alunos situações que estejam relacionadas com as suas próprias experiências, é-lhes permitido aprofundar e ampliar a sua compreensão do alcance e utilidade da Matemática. Não obstante, conjugar estes benefícios da modelação matemática numa prática pode ser um verdadeiro desafio, como se focará, mais adiante.

2.3.3. A autenticidade do contexto e as tarefas de modelação

Chegando a este ponto, crê-se importante não avançar sem antes discorrer acerca de três pressupostos inerentes à caracterização das tarefas de modelação: realidade, contexto e autenticidade, uma vez que, se se focar a atenção nas dimensões pragmática e crítica, os alunos deverão envolver-se em situações autênticas da cultura e sociedade a que pertencem e reconhecer as práticas, usos e papéis autênticos que as comunidades fazem da Matemática e da modelação (Villa-Ochoa, 2017).

A origem da palavra realidade encontra-se no vocábulo latino *realitas*, que corresponde a uma qualidade do que é real e desemboca no conceito de verdade. Real é, portanto, aquilo que tem existência verdadeira. Para além do seu significado etimológico, o termo realidade é controverso sob o ponto de vista filosófico e, genericamente, sinónimo de antagonismo entre um mundo com uma existência independente *versus* a possibilidade de ser um conjunto de representações do nosso pensamento[2]. Analogamente, isto significa que um contexto que traduza uma representação do pensamento dos alunos deverá ser uma aproximação do que é experienciado por eles próprios e que implique situações que compreendem e a que atribuem significado (Freudenthal, 1991).

Com efeito, uma das justificações para que sejam utilizados modelos matemáticos é os alunos poderem ver a aplicabilidade real das ideias matemáticas, podendo ser esse um fator de motivação (Zbiek & Connor, 2006), que é incrementada quando os problemas explorados fazem parte das suas próprias experiências de vida ou se uma determinada finalidade prática pudesse ser identificada diretamente (Kaiser & Schwarz, 2006). Contudo, quais os contextos do mundo real que realmente interessam aos alunos? O que será necessário para que um contexto seja autêntico? Neste sentido

[2] Para Platão, a realidade está dividida em duas partes: uma parte é o mundo sensível, a outra parte é o mundo inteligível, o mundo das ideias.

pronunciam-se Stender e Kaiser (2015), referindo que os problemas de modelação não podem ser autênticos apenas sob o ponto de vista dos investigadores ou dos professores, mas acima de tudo dos alunos, até porque o processo de modelação não pode viver inteiramente na sala de aula de Matemática, uma vez que começa e termina no mundo real (Stillman & Galbraith, 2012). No seguimento deste questionamento, surge em Skovsmose (2012a) a abordagem, sob a reflexão acerca de ambiente de aprendizagem, ao conceito de "referência", sendo que o apresenta como a produção de significado em educação matemática e, na sua perspetiva, as referências incluem o contexto que servem de motivação às ações. O autor avança três tipos de contextos para auxiliar na definição e constituição de um cenário educativo – o de matemática pura, o de semi-realidade e o de realidade. O primeiro tem a ver com questões e atividades matemáticas cuja referência apenas à Matemática diz respeito[3]. O segundo critério é uma estrutura intermédia entre a Matemática e a realidade, a que Skovsmose designa por semi-realidade. Para o autor, este tipo de referência apenas oferece suporte aos alunos para a resolução de um problema, que é geralmente dado sob a forma de exercício, extraído do manual escolar, em que o único propósito é resolvê-lo e através do qual é estabelecido um contrato entre o professor e o aluno, embora de contornos unilaterais. O conteúdo e a informação contidos no exercício acabam por ser irrelevantes e somente as quantidades enumeradas são alvo de atenção, o que acaba por se traduzir numa falsa realidade, artificial, eloquentemente intitulada por Skovsmose (2007) de um mundo sem impressões dos sentidos, de uma metafísica da semi-realidade[4]. Exemplo disso são, para o autor, questões retiradas dos manuais didáticos. O terceiro critério prima pela ausência de caracterização, revelador da dificuldade, uma vez mais, de definir a realidade. Contudo, o investigador aponta que, uma vez que neste tipo de cenário as referências são reais, se torna possível os alunos produzirem significados distintos para as atividades e não somente os conceitos.

Mas afinal, pelas linhas seguidas, o que enrobustece a caracterização de realidade? Veleda e Almeida (2009) apoiam-se em Bicudo para discorrer acerca da noção de realidade, que se refere a quatro matizes da realidade: objetiva, percebida, construída e criada. Estas autoras definem a realidade objetiva como sendo uma realidade independente do conhecimento que temos dela, enquanto a realidade percebida é restrita à perceção de cada observador. Estas duas vertentes de realidade assemelham-se àquilo que outrora Platão sustentou como Formas. Por outro lado, "as concepções de

[3] Num ambiente de aprendizagem que tenha por referência a matemática pura é natural a adoção praticamente exclusiva do paradigma do exercício. Como exemplo, Skovsmose dá a resolução de uma expressão numérica. Se se pretender investigar com este tipo de referência matemática, o autor ilustra com a translação de figuras geométricas numa tabela de números.

[4] Skovsmose exemplifica a utilização de exercícios com referência à semirealidade da seguinte forma: "Um feirante A vende maçãs a 0,85 € o kg. Por sua vez, o feirante B vende 1,2 kg por 1,00 €. (a) Que feirante vende mais barato? (b) Qual é a diferença entre os preços cobrados pelos dois feirantes por 15 kg de maçãs?" (2000, p.8)

realidade construída ou realidade criada negam a existência de uma única realidade" (Veleda & Almeida, 2009, p. 1054). Uma vez que a realidade resulta da construção mental individual, cada pessoa concebe a sua própria realidade. Em que é que a modelação matemática permite, então, alargar esta conceção?

Encontra-se, em Villa-Ochoa (2015), um estudo com professores sobre o significado da realidade na modelação matemática escolar. O autor investiga as crenças e perceções que os professores têm acerca da realidade e conclui que as diferenças que revelam acerca das mesmas condicionam e determinam as situações e os problemas que apresentam e que, *a priori*, impõem ritmos distintos na implementação da modelação como recurso em sala de aula.

No que diz respeito à abordagem da realidade em atividades de modelação, Veleda e Almeida (2009) baseiam-se em Negrelli para analisarem, numa atividade, as realidades que lhe estão implícitas e que apresentam como realidade inicial e intermediária. A realidade inicial tem contornos platonistas e configura-se pelos elementos que são exteriores ao sujeito. Por sua vez, a realidade intermediária é estabelecida pela seleção dos objetos apreendidos pelo sujeito, elaborada com base na relação que é estruturada através dos elementos possíveis de serem captados. Através deste estudo, as autoras concluem que as atividades de modelação nem sempre estão próximas das vivências dos alunos. Ainda que o modelo matemático represente bem a realidade inicial, pode não proporcionar uma ação dos alunos nessa realidade.

Maaβ (2010) desenvolveu um esquema de classificação de tarefas por aproximação à realidade. Para sustentar o argumento de que existem muitos tipos de tarefas relacionadas com a realidade e a modelação, a autora sintetizou um conjunto de características com base nas classificações já existentes. Com este esquema, Maaβ pretende demonstrar uma visão geral dos diferentes recursos das tarefas de modelação e orientar nos processos de seleção das tarefas segundo os grupos alvo. Relativamente à característica que intitula como natureza da relação com a realidade, a autora classifica as tarefas em cinco categorias: i) autêntica; ii) próxima da realidade; iii) envolvida de realidade; (iv) intencionalmente artificial; e v) fantasiosa.

Na tentativa de aprimorar esta categorização, Villa-Ochoa et al. (2017) apresentam uma classificação alternativa com o propósito de identificar o contexto que faz parte dos enunciados que compõem as tarefas e nele reconhecer a referência que é feita à realidade. Para tal, os autores expõem quatro categorias que, em detalhe, justificam quais derivam em subcategorias e as exemplifica: i) enunciados verbais; ii) construção de representações; iii) modelação de projetos; e iv) uso de análise de modelos. Delas, vale a pena destacar a primeira categoria que diz respeito àquilo que Villa-Ochoa et al.

(2017) chamam enunciados verbais, mas que no panorama nacional é amplamente designado por resolução de problemas[5]. Aqui, os investigadores argumentam sobre a necessidade de distinguir o contexto dos problemas em realistas e autênticos. A primeira subcategoria evidencia que o tipo de tarefas de carácter realista pode "evocar aspetos realistas ou imaginários sem necessariamente vincular contextos próximos da experiência diária do aluno" (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 230). Os autores salientam que nas perspetivas pragmáticas e críticas não se reconhecem estes problemas como tarefas de modelação, na medida em que a principal ênfase é atribuída ao reconhecimento da estrutura matemática que está subjacente no problema. Este tipo de tarefas é elaborado pelos professores e a participação do aluno apenas consiste em resolvê-las. No entanto, estas tarefas podem ser integradas em ambientes que promovam o diálogo sobre os usos e contextos da tarefa e o questionamento da situação implícita e das condições do contexto real. Apesar disso, estas tarefas que se reduzem a problema rotineiros são, por vezes, o único recurso que alguns professores utilizam para exemplificar as conexões da Matemática com a realidade. Villa-Ochoa et al. (2017) vão mais longe ao avançar que a resolução de problemas é muitas vezes utilizada como "uma maneira de conservar o *status quo* em currículos com características rígidas e centrados no desenvolvimento dos conteúdos" (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 232).

A segunda subcategoria foca-se no papel da autenticidade do contexto dos problemas. O autor inspira-se em Bonotto (2007) para fundamentar a importância de criar problemas capazes de estabelecer vínculos mais fortes entre a Matemática e o conhecimento extraescolar, revestindo a cultura escolar de uma mudança com vista à criação de novas normas sóciomatemáticas. Estes problemas, chamados problemas autênticos, têm diferentes contornos no diz respeito à autenticidade, podendo ser, por exemplo, de autenticidade de contexto, de atividade, de impacto, ou mesmo de autententicidade do pessoal ou de valor. Estas características distinguem-se entre si na medida em que os problemas que refletem experiências dos sujeitos incluem-se em autenticidade pessoal. Quando os resultados de determinado problema produzem um impacto na tomada de decisão dos alunos, o carácter de autenticidade é de impacto. Por sua vez, se as tarefas ou projetos respondem, de certa forma, a perguntas pessoais ou comunitárias, a autenticidade designa-se de valor.

Os autores Villa-Ochoa et al. (2017) observam que, apesar de várias perspetivas da modelação transparecerem a preocupação para com a elaboração de tarefas que possuam um contexto autêntico, reproduzindo um contexto que embora próximo da realidade não se aproxima de aspetos sociais ou culturais da vida dos alunos, as características de autenticidade pessoal, de impacto ou de valor

[5] Para Verschafell, "os problemas verbais são textos nos quais se descreve uma situação mais ou menos familiar e se coloca uma pergunta quantitativa que se pode resolver com a ajuda da matemática" (Villa-Ochoa 2017, p.229).

requerem projetos mais próximos da realidade dos estudantes, desenvolvendo, desta forma, processos mais complexos de aprendizagem.

2.4. Implementação e dinâmicas em torno da modelação matemática

Entre as pesquisas que se têm efetuado em torno da modelação matemática, a sua implementação em contexto educativo tem-se destacado. Em alguns casos, sob o ponto de vista das estratégias e dinâmicas que se estabelecem, sobre quais os critérios a que o seu ensino deverá obedecer e qual o equilíbrio a ter em conta entre a orientação do professor e a independência dos alunos (Blum, 2015). Noutros, procurando detetar quais as dificuldades e constrangimentos a ser ultrapassados.

Por sua vez, o panorama nacional reflete os avanços e recuos dados no sentido de implementação da modelação em contexto escolar. Apesar da modelação matemática se ter tornado a base da estrutura matemática no PISA 2015 e de ter sido enquadrada nos currículos de sistemas de ensino um pouco por todo o mundo (Ng & Lee, 2015), nem sempre as reformas educativas portuguesas se traduziram numa ênfase às práticas de modelação e a sua incorporação tem sido subtil.

2.4.1. Procedimentos, estratégias e desafios da modelação matemática como ambiente de aprendizagem

Um dos procedimentos que parece importante destacar tem a ver com a criação de uma cultura em sala de aula que sustente as atividades de modelação. O conhecimento do professor torna-se, com frequência, um dos principais desafios encontrados quando se analisam estudos realizados neste sentido (Asempapa, 2018; Blum & Ferri, 2009). Isto porque, para modelar fenómenos do mundo exterior, é necessário entender esses fenómenos e, portanto, o conhecimento do mundo real é imprescindível. Esta ideia leva, por consequência, à necessidade de um ensino mais aberto e, desde logo, menos previsível. Um ensino que dá a oportunidade ao aluno de exercer um papel investigativo e, portanto, que fomenta a cultura investigativa (Mendonça & Lopes, 2017).

Outro desafio realçado por Blum e Ferri (2009) tem a ver com a exigência cognitiva das tarefas de modelação na medida em que existe um fosso entre os produtos da investigação na área e a prática educativa que deixa transparecer que a modelação é difícil para grande parte dos professores, o que redunda em que os alunos também a achem difícil. Burkhardt (2018) alega que um currículo em

mudança pede por um programa da Matemática atualizado que inclua aspetos quer de ensino, quer de aprendizagem em modelação matemática.

Para Blum e Niss (1991), o tempo, o espaço e a necessidade do cumprimento integral do programa são barreiras que os professores consideram existir, no que diz respeito à implementação da modelação. Por sua vez, Artaud (2007) defende que a falta de tempo é um revés que tem de ser ultrapassado e, portanto, facultar mais tempo deverá ser uma prioridade para que a modelação possa ser uma realidade concretizável nas salas de aula de Matemática. Na visão de Jacobini (2004), ainda que existam projetos educacionais, individuais, do professor ou institucionais que inovam na tentativa de valorizarem a ação pedagógica, muitas vezes tendem a embater em questões relacionadas com a avaliação. Outro dos desafios ponderados por este autor tem a ver com o facto de "ou por os alunos estarem habituados ao "paradigma do exercício" ou por entenderem que essa nova dinâmica de trabalho vai exigir deles muita dedicação e esforço, nem sempre estão dispostos a aceitar uma nova dinâmica pedagógica" (Jacobini, 2004, p. 46). Aqui, a resposta poderá estar naquilo a que Skovsmose (2000) chama "contrato didático[6]" (p. 85).

Ultrapassadas algumas das dificuldades que podem surgir na implementação de um ensino que tenha por base a modelação, importa reconhecer que estratégias lhe estão subjacentes. A dinâmica criada tem como mote uma série de ações que se desencadeiam, de uma forma genérica e dependendo do ciclo de modelação adotado, que passam por "procura de informação sobre o fenómeno a ser estudado, identificação e seleção de variáveis, elaboração de hipóteses, simplificação do problema, obtenção e validação de um modelo matemático" (Ferruzi & Almeida, 2015, p. 379). Neste ponto, o que até aqui existe de novo por destacar é o papel fundamental das interações que se estabelecem no seio das atividades de modelação. Um grande número de pesquisas reflete que estas interações são determinantes para a aprendizagem e, portanto, uma das premissas é, precisamente, estas atividades desenvolverem-se em grupo. Este ponto de partida fornece para English et al. (2005) uma oportunidade para a colaboração social e o desenvolvimento de habilidades de comunicação, na medida em que os alunos podem comparar e discutir conceitos, explicações, justificações e representações matemáticas. Blum e Ferri (2009) partilham desta ideia, mas vão mais longe, apoiando-se numa máxima montessoriana[7] para justificar que a intervenção do professor na orientação dos alunos deve ser mínima e propiciar a máxima independência dos alunos. Este equilíbrio deverá ser

[6] Do ponto de vista de Skovsmose (2000), um contrato didático define-se como um equilíbrio no ambiente de aprendizagem, traduzindo-se numa harmonia entre os elementos do ambiente de aprendizagem como a organização das tarefas, a estrutura do manual, o desenvolvimento da comunicação preconizado pelos principais atores: o professor e os alunos.

[7] "*Ajuda-me a fazer por mim"* é considerada uma das principais frases que resume o método pedagógico de Maria Montessori.

guiado através de um metanível de intervenção por parte do professor, que se foque essencialmente em intervenções estratégicas de orientação, sempre estimulando a maior autonomia do aluno.

Como resultado das suas investigações, Blum e Ferri (2009) defendem quatro implicações para o ensino da modelação. A primeira sustenta que um ensino de modelação de qualidade só poderá ter como base tarefas de modelação de apropriadas e cuja manipulação premeiem um equilíbrio entre a independência máxima dos alunos e uma orientação mínima do professor. A segunda implicação tem a ver com permitir que os alunos utilizem as suas próprias rotas de modelação e incentivar a várias soluções. Segundo Ferri (2007), uma rota de modelação é um processo de modelação individual num nível interno e externo, percorrendo as várias fases do ciclo de modelação. O aluno começa com este processo numa certa fase, de acordo com as suas preferências, continuando por diferentes fases tantas vezes quantas pretender, focando-se numa determinada fase ou ignorando outras. Uma terceira implicação é relativa ao conhecimento do professor no que diz respeito aos modos de intervenção, particularmente, pedagógicos, estando subjacente, uma vez mais, o fator da mínima orientação. Por fim, o professor deverá dominar formas de levar os alunos a estratégias adequadas para resolverem tarefas de modelação, podendo munir-se de uma ferramenta útil como é o ciclo de modelação (Lima & Araújo, 2021).

2.4.2. Descortinar possíveis bloqueios nas etapas de modelação

A ideia de esmiuçar as dificuldades dos alunos não é nova em qualquer campo da educação matemática assim como também não o é na aprendizagem da modelação matemática. Entre os seus divulgadores encontramos em Blum e Ferri (2009) estudos que permitem compreender a origem de algumas dificuldades reveladas pelos alunos na hora de trabalharem com tarefas de modelação e que levam diretamente à complexidade cognitivas dessas tarefas. Os autores elegem três passos no ciclo de modelação que utilizam (ver ciclo de modelação Blum & Leiβ, 2007) para analisar dificuldades específicas dos alunos. Primeiramente, na fase de construção os alunos têm por hábito trabalhar com estratégias cujas soluções são superficiais, uma vez que podem ignorar o contexto real e extrair do conteúdo dos problemas apenas os números que permitam calcular algo de acordo com um esquema mais ou menos familiar. Deduz-se que se a tarefa exigir que a situação do problema seja compreendida, aí residirão as dificuldades. Na fase de simplificação, apesar de os alunos conseguirem construir um modelo apropriado, não conseguem fazer conjeturas. Por fim, o passo da validação parece ser verdadeiramente preocupante. Ao não verificarem se as soluções são razoáveis ou apropriadas, cabe ao professor ser o responsável pela correção das soluções. Por este motivo, o

processo de validação e razoabilidade das soluções obtidas surge como um dos focos em destaque na modelação em contexto educativo.

O alargamento deste estudo surge com a análise e a elaboração de um enquadramento minucioso das barreiras associadas à transição entre as diferentes fase do processo de modelação por parte de Stillman et al. (2007). A investigação desenvolvida tem como motivação permitir que um pesquisador, professor ou *designer* de currículo identifique as competências específicas que os alunos precisariam para concluir uma tarefa de modelação específica com sucesso.

A intenção é permitir que o professor esteja bem preparado apoiando melhor os alunos a superar certos bloqueios que possam surgir. Deste modo, esta pesquisa revela que os bloqueios podem ocorrer quando alguma das atividades tiver que ser realizada. Ressalta deste quadro teórico, e como visto, anteriormente, que "as atividades cognitivas associadas aos elementos de transição são: compreensão, simplificação, interpretação do contexto; reconhecer, formular, matematizar; trabalhar matematicamente; interpretação de resultados matemáticos; e comparar, criticar, validar" (Stillman et al., 2007, p. 693).

2.4.3. Uma intervenção pedagógica que pontue a diferença e o diálogo

Ainda dentro da mesma temática, mas com preocupações ligeiramente distintas relativamente à resposta a dar em situações de dificuldades cognitivas em atividades de modelação, regressa-se a Blum e Ferri (2009). Estes autores apostam em assumir um papel de intervenção pedagógica que permita ao professor atuar com segurança quando adota a modelação como prática educativa, munindo-se de diversas estratégias de ação sem nunca perder de vista que a orientação deve ser mínima de forma a propiciar a máxima independência dos alunos. Em primeiro lugar, é fundamental a clareza sobre o ciclo de modelação com o objetivo de ajudar os alunos a evoluírem de uma etapa para a outra. Em segundo lugar, e mediante estudos empíricos, os investigadores categorizam, com base nas resoluções, três estilos de pensamento matemático que, segundo Blum e Ferri (2009), condicionam as respostas dos alunos, a saber: visual, analítico e integrado. Quando determinado aluno demonstra ter um estilo de pensamento visual, ou seja, raciocina por imagens mentais e representações externas pictóricas, tem, desde logo, uma visão mais global sobre as situações problemáticas e, portanto, nas tarefas de modelação concentra-se mais no processo do mundo real. Por outro lado, com um estilo de pensamento analítico, os alunos raciocinam por imagens e representações formais internas, levando a que tenham preferência por cálculos mentais, processos mais simbólicos ou verbais e pela resolução passo a passo. Nas tarefas de modelação focam-se mais

na parte Matemática. Os alunos que possuem um estilo de pensamento integrado conseguem transitar entre ambos estilos de pensamento, o visual e o analítico (Blum & Ferri, 2009). Por fim, os autores incentivam a que os professores conheçam o seu próprio estilo de pensamento.

Numa outra linha de ação, encontra-se um tipo de estratégia que valoriza as interações verbais e os percursos discursivos como elementos essenciais de suporte à intervenção do professor no desenvolvimento de atividades de modelação e como resposta às demonstrações cognitivas dos alunos (Barbosa, 2003, 2006). Barbosa (2006) defende a noção de espaços de interação para conceptualizar sobre os momentos em que alunos e professores interagem verbalmente em atividades de modelação. O discurso tem uma função reguladora uma vez que, através dele, negoceiam-se significados. Barbosa reitera esta ideia apresentando três definições de discussão de alunos: a Matemática, que se refere às ideias pertencentes ao campo da matemática pura; a tecnológica, que se refere às técnicas de construção do modelo matemático; e a reflexiva, que se refere à natureza do modelo matemático, aos critérios utilizados na sua construção e suas consequências. Para o investigador, estas definições acrescentam uma forma importante de descrever a prática dos alunos e, portanto, melhor entendê-la.

Seguindo uma perspetiva vygotskiana[8], Alrø e Skovsmose (2021) acreditam que a "qualidade da comunicação em sala de aula influencia a qualidade da aprendizagem da matemática" (p. 11). Estas interações os autores definem como diálogos, sendo que estes diálogos não são meras conversações entre pessoas, mas uma "conversação com certas qualidades" (Alrø & Skovsmose, 2021, p. 12) e uma ferramenta para o sucesso. Mais ainda, um diálogo é motivado por expectativas de mudança e, portanto, o compromisso é fundamental e a cooperação é "um parâmetro central da comunicação dialógica" (Alrø & Skovsmose, 2021, p. 14)[9].

Ao aplicarem a teoria dialógica de Alrø e Skovsmose nas suas investigações empíricas, Ferruzzi e Almeida (2015) concluem que, nem sempre, as ações dos alunos são exclusivas de atividades interativas, no entanto, o que se verifica é que estas interações, ao facilitarem a reorganização do pensamento e estruturação, promovem novas aprendizagem e, portanto, atuam como mecanismo de sustentação à própria reflexão do pensamento. As autoras apuram que, enquanto trabalham em grupo, os alunos falam entre si, explicam e debatem o que fazem. Estes diálogos acompanham a realização da atividade, mas acima de tudo orientam-na.

[8] Para Vygotski a aprendizagem está diretamente associada à interação.
[9] No livro "Diálogos e aprendizagem e educação matemática" os autores classificam três características do diálogo que estão ligadas à aprendizagem: "1) realizar uma investigação, 2) correr riscos e 3) promover a igualdade" (Alrø & Skovsmose, 2021, p. 16).

2.4.4. Conjunção das funções e da modelação matemática nos documentos normativos

Blum e Niss (1991) ressalvam que a utilização da modelação matemática como ambiente de aprendizagem conduz a um cumprimento dinâmico do currículo, despromovendo o ensino tradicional estanque por temas. A análise do documento *Programa e Metas Curriculares de Matemática*, que destaca como uma das finalidades para o Ensino da Matemática a interpretação da sociedade e que reforça o seu contributo para o exercício de uma cidadania plena e informada (Ministério Educação e Ciência [MEC], 2013), vem intensificar esta ideia. Mais especificamente, parece ser no estudo da Álgebra que os alunos deverão ter oportunidades de modelar matematicamente uma vasta gama de fenómenos, em particular no estudo de funções (NCTM, 2007). No que concerne à Álgebra escolar, o NCTM (2007) recomenda que os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão levar todos os alunos a desenvolver o pensamento algébrico através do estudo das estruturas, da simbolização, da modelação e do estudo da variação. As normas especificam que os alunos de 3.º ciclo, deverão apreender Álgebra como um conjunto de conceitos associados às relações quantitativas, mas também como um raciocínio matemático utilizado na formalização de padrões, funções e generalizações. Para Ponte (2005), desenvolver o pensamento algébrico implica também a capacidade de lidar com estruturas matemáticas, relações de ordem e de equivalência, aplicando-as para interpretar e resolver problemas. Até porque, ao aprenderem que as situações podem ser descritas por meio da Matemática, os alunos poderão desenvolver noções elementares de modelação matemática. Tal pode verificar-se no desenvolvimento da compreensão da noção de função através da experiência sistemática com padrões (NCTM, 2007).

Entre o 2.º e o 3.º ciclo, os alunos deverão estabelecer ligações entre as suas experiências com funções lineares e a compreensão que desenvolvem da proporcionalidade. Ao chegar ao 9.º ano, os alunos deverão possuir a capacidade de representação de funções lineares por meio de tabelas, gráficos, expressões algébricas e trabalhado a interpretação dessas representações. Neste ano de escolaridade ampliam-se os conhecimentos para o estudo da proporcionalidade inversa como função, da variação das funções linear e afim e da função quadrática.

Apesar do estudo da Álgebra, e em particular das funções, assumir, cada vez mais, um papel preponderante ao longo das sucessivas reformulações dos programas de Matemática (Viseu, 2015), tem-se verificado que os alunos demonstram dificuldades em compreender, interpretar, traduzir e fazer conexões entre as distintas representações (Domingos, 2008). Para Duval (2006), uma das maiores dificuldades é a passagem da representação gráfica de funções para a sua forma algébrica, sugerindo que o processo de ensino dê especial destaque ao estudo das conversões entre representações, em

particular, no estudo das funções. Outra lacuna, normalmente manifestada pelos alunos, é a compreensão da variação, o que dificulta a aprendizagem das funções ou mesmo a compreensão de muitas ideias transmitidas nas notícias (NCTM, 2007). Com o estudo da representação gráfica das funções lineares, no 2.º e 3.º ciclos, "os alunos poderão aprender que o declive representa a taxa constante de variação das funções lineares e ficarão preparados para a aprendizagem dos diversos tipos de funções que não possuem taxas de variação constantes" (p. 43). Neste contexto, Viseu (2015) defende a importância das tarefas que o professor propõe ao aluno e à forma como o envolve nas atividades da aula, apresentando a resolução de problemas, investigações e projetos como as tarefas mais enriquecedoras, na medida em que o aluno deverá estabelecer conexões, raciocinar e comunicar matematicamente.

Chegando a este ponto, parece ser irrefutável que as tarefas de modelação sejam encaradas como fundamentais no estudo da Álgebra. Mais concretamente, no estudo das funções, devem-se explorá-las como ferramentas de modelação em situações diversas (ME, 2007). Deste modo, ver-se-á, de seguida, se desde a reforma do sistema educativo português no pós-Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE, 1986), os documentos curriculares que regem o ensino básico, concretamente o 3.º Ciclo, que foram revistos em 1990/91, 2001, 2007, 2012/13, 2016/18[10] , resultaram, gradualmente, numa ênfase explícita à modelação matemática ou se, pelo contrário, primam pela sua ausência.

No Programa de Matemática de 1991, uma das três capacidades que fazem partes dos objetivos gerais para o 3.º ciclo diz respeito à utilização da Matemática na interpretação e intervenção no real. O documento CNEB de 2001, *Competências Essenciais*, enumera alguns aspetos específicos para o 3.º ciclo, sendo que um deles é a "sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real" (p. 67).

O primeiro documento a referir-se explicitamente à modelação é o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) de 2007. O PMEB apresenta duas grandes finalidades para o ensino da Matemática sendo que a primeira delas é "(i) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados" (p. 3). Ao fundamentar esta escolha enumera quatro pontos essenciais no desenvolvimento dos alunos e subjacentes a esta ideia estando, entre eles, "capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação

[10] Os documentos curriculares relativos ao ensino da Matemática no Ensino Básico (Canavarro et al., 2020) no pós-LBSE são os seguintes: *Programa de Matemática* de 1990 e 1991; *Currículo Nacional do Ensino Básico* de 2001; *Programa de Matemática do Ensino Básico* de 2007, referente ao período do plano da Matemática; *Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico* de 2013; e os documentos com impacto curricular: *Perfil dos Alunos* de 2016; *Orientações de Gestão curricular* de 2017; *Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular* e *Aprendizagens Essenciais*, ambos de 2018; *Aprendizagens Essenciais de Matemática* de 2021, com entrada em vigor no ano letivo 2022/2023.

matemática" (p. 3). No que diz respeito aos objetivos gerais da Matemática, o diploma refere que "os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de: "usar representações para modelar, interpretar e refletir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais" (p. 5). Quando analisados os tópicos e objetivos específicos, o PMEB foca várias vezes a utilização de modelação quer para a resolução de problemas,[11] quer para a proporcionalidade[12]. No domínio específico da Álgebra, surge como principal propósito de ensino "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações formuladas em contextos diversos" (p. 61) apoiando-se em objetivos gerais como "ser capazes de resolver problemas, comunicar, argumentar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos" (p. 61). A modelação também surge associada às indicações metodológicas do ensino da Álgebra e às tarefas e recursos. Mais perentoriamente, ao especificar o estudo de funções, o programa reforça que:

> "são fundamentais as várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações. As funções cujo estudo se propõe (linear, afim e quadráticas simples) devem ser exploradas como ferramentas de modelação em situações diversas. As situações de proporcionalidade directa e inversa, modeladas respetivamente por funções do tipo $y = kx$ e $y = k/x$, assumem um destaque particular como ferramentas de modelação neste ciclo de ensino". (p. 62)

Indo mais longe, este documento também orienta e responsabiliza o papel do professor no que diz respeito à utilização da modelação uma vez que indica claramente que "cabe ao professor propor problemas com diversos graus de estruturação, desde problemas assumidamente estruturados até questões abertas para investigar, bem como situações de modelação matemática" (p. 65).

O programa que esteve em vigor entre 2013 e 2022, *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico,* apresentou três grandes finalidades para o ensino da Matemática: a estruturação do pensamento; a análise do mundo natural; e a interpretação da sociedade. Ao propor como finalidade a análise do mundo natural, o documento revela que "a Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução" (p. 2). Apesar de especificar, no âmbito da interpretação da sociedade, que "o Ensino da Matemática contribui assim

[11] "Para modelar problemas, propor, quando apropriado, o recurso a materiais manipuláveis" (PMEB, 2007, p. 33)
[12] "Utilizar o conceito de proporção para modelar situações e fazer previsões" (PMEB, 2007, p. 47)

para o exercício de uma cidadania plena, informada e responsável" (p. 2) e do seu início ser prometedor no que diz respeito à prática educativa da modelação, o restante diploma descura completamente o tema. Até mesmo a ideia inicial, que fica no ar com uma primeira leitura, que o ensino da Matemática tem como um dos propósitos criar a capacidade de utilizar a Matemática como uma ferramenta de análise e intervenção no real se perde com uma leitura mais extensiva.

Entre 2016 e 2018, o Ministério da Educação e Ciência (MEC)[13] lança dois documentos para associar ao *Programa e Metas Curriculares* as *Orientações de Gestão Curricular* (OGC) e as *Aprendizagens Essenciais* (AE). Com a publicação das AE, redefinem-se dois eixos principais para o ensino da Matemática:

> "a) Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos; e b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência" (MEC, 2018, p. 2).

Como primeira finalidade, reconhece-se a importância de que os alunos "desenvolvam a capacidade de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem áreas matemáticas diferentes e problemas de modelação matemática" (MEC, 2018, p. 2), em qualquer ano de escolaridade correspondente ao 3.º ciclo.

As novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática (AEM)* são colocadas em prática no ano letivo 2022/23 para os 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade, estendendo-se aos restantes anos do Ensino Básico e Secundário em 2023/2024. Neste documento, a presença da modelação matemática é fortemente sentida, ao longo do 3.º CEB, com um dos seis tópicos das capacidades matemáticas transversais a todos os capítulos, conexões matemáticas. Neste tópico são discriminados três subtópicos, sendo um deles 'modelos matemáticos'. Para este subtópico, especificam-se dois objetivos de aprendizagem, através dos quais se eleva o papel da modelação na aprendizagem da Matemática. Este documenta reforça, assim, a conexão entre a interpretação matemática e situações do mundo real, reconhecendo a utilidade e o poder da Matemática na previsão e intervenção de situações, bem como a compreensão do seu papel na construção da realidade. Especificamente no domínio das funções, os objetivos de aprendizagem remetem para a modelação de situações através de funções afins, nos 7.º e 8.º anos, e para interpretação e modelação de situações de outras áreas e da vida real que envolvam proporcionalidade inversa, bem como o reconhecimento das funções quadráticas no

[13] A publicação das Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico (OGC) é motivada pelo reconhecimento de que a adoção do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico "suscitou um conjunto de questões e a sinalização de vários problemas por parte das Escolas e dos Professores, pondo em causa a exequibilidade destes documentos" (MEC, 2016, p. 2).

mundo real, no 9.º ano. Nas ações estratégicas correspondentes a estes objetivos específicos, as AEM (MEC, 2021) apontam para a dinamização de atividades de modelação de fenómenos reais, pela determinação de modelos adequados e realizadas em grupo.

2.4.5. Importância das representações matemáticas nas conexões externas

A importância da representação na atividade matemática resulta, segundo Duval (2012), do momento em que o aluno é capaz de conjugar e dominar dois registos de representação para um mesmo objeto e declara que uma tática relevante para a compreensão da Matemática é a distinção entre um objeto e a sua representação. Reforçando esta ideia, para Moretti e Thiel (2012), a variedade dos sistemas de representação é fundamental, para além da sua aprendizagem, para a construção de novos conceitos. Tais argumentos criam uma espécie de paradoxo cognitivo do pensamento matemático (Duval, 2012). Por um lado, a utilização de representações semióticas para a apreensão de objetos matemáticos é essencial, uma vez que a única forma possível para tal que aconteça é através da produção de representações semióticas. Por outro lado, a aquisição de conhecimentos matemáticos requer uma clara diferenciação entre os objetos matemáticos e suas representações e, portanto, não pode ser mais do que uma apreensão concetual.

Não é de descurar que o NCTM (2017), defende que o uso de múltiplas representações, fomenta, nos alunos, a interiorização e a compreensão dos conceitos matemáticos. Assim, surgem, também, nas AEM (MEC, 2021) reivindicações no sentido de desenvolver a capacidade dos alunos para utilizarem representações múltiplas. Espera-se, com isso, que os alunos sejam capazes de expressar ideias e procedimentos matemáticos através de linguagem natural, simbólica, verbal, com esquemas e diagramas, com a presença ou não de tecnologias, ou combinando vários tipos (Amado, 2022).

2.5. Ação e reflexão: A abordagem sociocrítica

Se for reconhecida a argumentação ramificada nas seguintes premissas: a aprendizagem como ação e um sujeito crítico tem que ser um sujeito que age, então deverá aceitar-se as ideias-chave da teoria educativa desenvolvida por Skovsmose (2007). Não será estranho, por isso, que Skovsmose (2007) contraponha ao paradigma do exercício tão naturalizado, nas salas de aula, pelo menos, do mundo ocidental, uma abordagem investigativa que contribua para o enfraquecimento de várias autoridades existentes na aula de matemática tradicional: a do monólogo expositivo do professor, a da

imposição externa dos exercícios do manual, a da resposta única aos exercícios. Propõe-se, pois, um cenário de investigação que alicie os alunos a participar ativamente nos seus processos de aprendizagem, pondo em prática um ambiente educativo que combine ação e reflexão e que, dessa forma, atribua à educação matemática uma dimensão crítica.

Tomando como referência os trabalhos de D'Ambrosio, de Skovsmose e de Gutstein, esta dimensão crítica estabelece-se com base na característica comum de tornar a Matemática numa linguagem de desconstrução social, de aspirar a que a *matemacia* seja para todos. O termo *matemacia* surge associado ao movimento 'Educação Matemática Crítica' e é criado por Skovsmose (1994), traduzindo-o como uma competência pela qual nos tornamos capazes de interpretar e entender as características da nossa realidade social. De igual forma, Gutstein (2006) defende que a Matemática deve ser um meio para os alunos aprofundarem a compreensão dos contextos sociopolíticos dos quais fazem parte. Através do processo de estudarem as suas realidades – usando a Matemática – os alunos fortalecem a compreensão concetual e procedimentos matemáticos. Importa reconhecer D'Ambrosio (2009) como o pai da Etnomatemática, um conceito que o mesmo define como o reconhecimento de que as ideias matemáticas são intrínsecas à natureza humana e que os processos matemáticos têm origem no ambiente natural, social e cultural onde se inserem os indivíduos. Tendo em consideração o referido até aqui, destaca-se que a educação matemática crítica, o movimento ensinar para a justiça social e a Etnomatemática têm em comum estabelecerem-se sobre uma pedagogia crítica, serem teorias construídas nas culturas e experiências e na tentativa de envolver os alunos para usar a Matemática para pensar e agir sobre o mundo.

Na mesma linha dos autores referidos, Barbosa (2009) fundamenta as justificações da perspetiva sociocrítica da modelação matemática, começando por relembrar a implicação da Matemática na vida quotidiana das pessoas e, com esta premissa, desenha uma trajetória que conduz a um exercício pleno de cidadania, em que a prática de intervenção social passe pelo domínio de habilidades e argumentos matemáticos que sejam necessários. Mais diretamente influenciado pela educação matemática crítica, este autor reforça a ideia da necessidade de educar criticamente por meio da Matemática e promover o pensamento crítico através da aplicação da Matemática em situações reais e não fictícias.

Neste mesmo prisma, e na senda de Skovsmose (1994), Araújo (2009) sustenta que o uso dos modelos matemáticos na sociedade contribui à compreensão da Matemática como uma linguagem de poder, proporcionando a formação de cidadãos críticos, autónomos e participativos. Araújo (2009) alerta para o facto de podermos estar a contribuir para a manutenção de uma sociedade injusta se

trabalharmos com a modelação matemática e "não discutirmos questões como o uso da matemática na sociedade, a ideologia da certeza e o poder formatador na Matemática" (p. 64). Daí que a autora defenda uma abordagem da modelação matemática que vá mais além do que apenas fornecer instrumentos matemáticos ou dar exemplos das aplicações da matemática na realidade, mas sim uma modelação que faça os alunos refletir sobre a presença da Matemática na sociedade e que reajam criticamente em situações que a Matemática também ajude a construir. Não se pode negar estar perante uma perspetiva de modelação que se assume com propósitos educacionais. É indiscutível que a sua investigação caminha nesse sentido, conjugando aspetos comuns ao conhecimento reflexivo, pensamento crítico e modelação. Desta triangulação deriva uma das definições de modelação como ambiente de aprendizagem, resultando num "ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagarem e investigarem, através da Matemática, situações com referência à realidade" (Barbosa, 2003, p. 230). Orey e Rosa (2007) partem de duas questões para fundamentarem o uso da dimensão sociocrítica na abordagem da modelação matemática: i) "qual é o papel das escolas na promoção da eficiência sociocrítica dos alunos? ii) Como as práticas pedagógicas atualmente usadas no processo de ensino e aprendizagem de matemática afetam a eficiência sociocrítica dos alunos?" (p. 197).

Barbosa (2009) justifica o papel crítico da Matemática no sentido de que ela pode ser usada de diversas maneiras em que uma das mais visíveis é usar os resultados matemáticos para fundamentar conceções na sociedade. Daí que Barbosa (2009) aproveite para esclarecer a grande diferença, sob a perspetiva sociocrítica, acerca das situações que servem de base para exemplificar a aplicação da Matemática, em sala de aula. Estas situações não deverão ser meras transferências do problema para situações do quotidiano, mas oportunidades que os alunos tenham de envolverem-se e refletirem sobre situações que, de facto, aconteceram ou acontecem na sociedade (Barbosa, 2009). Até porque, como advoga Jacobini (2004), existe uma maior probabilidade de os procedimentos matemáticos passarem a ser vistos pelos alunos como algo útil e presente no seu dia a dia se as situações trazidas para a aula estiverem relacionadas com questões do interesse da comunidade local ou da sociedade e fazerem parte daquilo a que o autor compara com o "mundo da vida" (p. 41). A sala de aula é assumida "um espaço democrático, onde o diálogo, no sentido de ação dialógica, é a forma de comunicação entre os participantes" (Jacobini & Wodwotzki, 2006, p. 73).

Posicionando-se num sentido oposto à utilização de estágios normativos para entender as transições dos alunos no processo de modelação, Barbosa (2006) defende que as cognições dos alunos deverão ser antes analisadas sob o ponto de vista das condições da sua produção, bem como a

possibilidade de constituir práticas sociocríticas. Neste sentido, Barbosa (2006) reconhece o discurso dos alunos como uma forma de compreender os aspetos cognitivos no processo de modelação. Para fundamentar esta posição, o autor apoia-se na definição de discurso como um todo, incluindo todos os tipos de linguagem, sinais, gestos, partindo de uma perspetiva discursiva cultural que reforça que o discurso constitui consciência e que é inseparável da cognição. Para esse fim, Barbosa (2006) categoriza os tipos de discussão: matemáticas, referem-se às ideias pertencentes ao campo da matemática pura; tecnológicas, dizem respeito às técnicas de construção do modelo matemático; e reflexivas, referem-se, para além da natureza do modelo matemático, aos critérios usados na sua construção e às suas consequências.

A espaços de interação, Barbosa (2006) clarifica como os momentos em que alunos e professores interagem verbalmente sobre uma atividade de modelação, em que para além das informações acerca do que os alunos dizem, também se podem retirar informações sobre a perspetiva que usam e os significados que lhes atribuem. Consequentemente, Barbosa (2006) sublinha que existe uma dinâmica correlacional para representar as transições que podem ocorrer com as questões levantadas nas discussões. O peso dado a cada um dos tipos de discussão depende da perspetiva do professor. Para Barbosa (2006), "na escola pragmática do pensamento, as discussões tecnológicas são privilegiadas; as discussões matemáticas têm prioridade de uma perspetiva científica; e de acordo com uma escola de pensamento sociocrítico, o interesse está nas discussões reflexivas" (p. 6).

Ainda em Barbosa (2008) encontramos a noção de rotas de modelação para delinear os discursos produzidos com uma função clara de construir uma representação matemática para a situação problema em estudo. No seguimento, o autor perscruta acerca de um tipo de discussões a que chama discussões paralelas e as quais define pelo seu contrário, sustentando que são aquelas que não são nem técnicas, nem matemáticas, nem reflexivas. Estas discussões acontecem nos espaços de interação, no entanto, ocorrem paralelamente às rotas de modelação. A sua importância reside no facto de se relacionarem com a contexto social e cultural e influenciarem, de certa forma, "o modo como os alunos concebem a situação problema, o termo "paralela" para este tipo de discussão não significa disjunção em relação às rotas de modelação, mas apenas define um tipo de discussão a qual é diferente delas" (p. 56). Figura em Jacobini (2004) uma enumeração de situações que o autor considera poderem retratar aquilo a que Skovsmose (2000) intitula ambiente de aprendizagem com referência à realidade e que aqui já foi ilustrado. Entre elas,

> "questões relacionadas com as elevadas taxas de desemprego, a existência de diversos índices de variação de preço e suas composições, as medições da

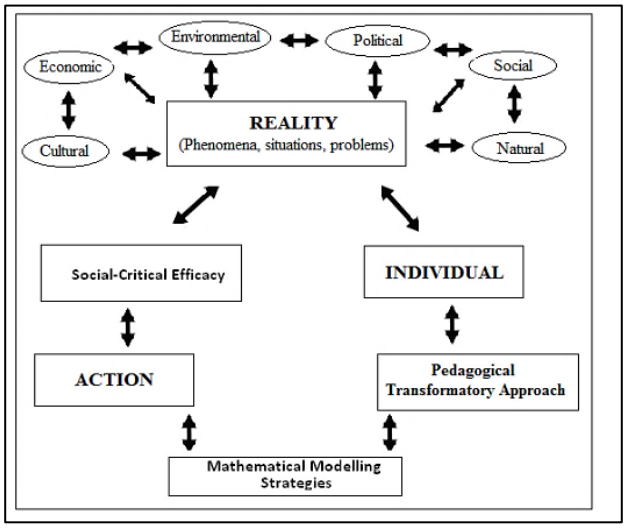
> popularidade do Presidente da República ou de uma política que está sendo implementada, a matemática da rua ou a matemática presente no dia-a-dia do trabalho". (p. 42)

Por sua vez, Orey e Rosa (2007) consideram que existem, pelo menos, três práticas pedagógicas distintas de modelação matemática que podem ser utilizadas no currículo escolar. No primeiro caso exposto, por Orey e Rosa, e, normalmente, aquele que surge como um primeiro passo para a integração de atividades de modelação, os professores selecionam um problema ou uma situação, de acordo com o currículo a ser desenvolvido, e descrevem-na aos alunos. Além disso, também fornecem aos alunos as ferramentas matemáticas para a elaboração dos modelos. No segundo caso apresentado pelos autores, os professores sugerem e elaboram uma situação inicial, mas são os alunos que investigam o problema, reúnem os dados e formulam hipóteses. Assim, são os alunos os responsáveis por conduzir as atividades para desenvolver o processo de modelação. Naquilo a que Orey e Rosa (2007) posicionam como caso três, os professores apenas facilitam, orientam e motivam as atividades de modelação. Cabe aos alunos escolherem os temas e desenvolverem projetos nos quais sejam os responsáveis por todas as etapas do processo de modelação, pressupondo um envolvimento sociocrítico. Em qualquer um destes casos, os autores destacam que o mais importante é a análise crítica dos resultados obtidos e que é a mesma que deve ser incentivada e desenvolvida. Os autores sintetizam que o uso da modelação matemática sociocrítica desenvolve as habilidades críticas, quer de professores, quer de alunos, que permitem interpretar dados, formar e testar hipóteses e verificar a eficácia dos modelos matemáticos.

Rosa e Orey (2015) vão mais longe e propõem um ciclo de modelação matemática de acordo com a perspetiva sociocrítica (Figura 6), posicionando a Matemática numa ótica dinâmica e humanizada. Segundo os autores, uma forma eficaz de integrar a modelação é expor aos alunos uma variedade de problemas ou temas provenientes da realidade. Estas situações têm raízes culturais, económicas, políticas, ambientais e sociais que se misturam e interrelacionam, fazendo uma ponte com o modo como os alunos as interpretam. A conjugação das próprias experiências dos alunos (Individualidade) combinadas com a reflexão crítica sobre essas experiências (Eficiência sociocrítica) "podem ajudá-los a identificar problemas comuns e desenvolver coletivamente estratégias para resolvê-los" (Rosa, 2015, p. 234).

Figura 6

Ciclo de Modelação segundo a abordagem sociocrítica de Rosa e Orey (2015)



Como resultado, e por meio de ações como fazer hipóteses, testá-las, corrigi-las, generalizar, analisar, concluir e tomar decisões sobre o objeto em estudo, o uso da modelação matemática pode ser uma abordagem pedagógica transformadora que tem como característica fundamental a "ênfase na análise crítica dos alunos sobre as estruturas de poder da sociedade" (Rosa & Orey, 2007, p. 198).

Para encerrar os contributos, recorre-se a Silva e Kato (2012) e às suas propostas para a identificação de um conjunto de elementos que caracterizam uma atividade de modelação matemática na perspetiva sociocrítica, às quais as autoras chegam à conclusão após analisarem referenciais teóricos publicados sobre o tema. Entre elas, definem um conjunto de quatro categorias, como premissa irrevogável para que uma atividade de modelação possa ser enquadrada à luz da perspetiva sociocrítica. A estas características, Silva e Kato (2012) designam 'Características da Perspetiva Sociocrítica da Modelação Matemática'. A primeira característica constitui um dos principais elementos no desenvolvimento de qualquer atividade de modelação, dado que relaciona o aluno e a sua participação ativa na construção do modelo. As investigadoras sintetizam que, para a elaboração do modelo matemático, é importante que os alunos discutam ideias e confrontem opiniões, daí a relevância quer do trabalho em grupo, quer da escolha de um problema inicial que seja do interesse de todo o grupo, para que todos se sintam envolvidos nas problematizações e discussões. Só faz sentido, sob a perspetiva sociocrítica, as atividades de modelação desenvolverem-se num espaço em que se participe igualmente para que seja possível que os alunos "observem como a Matemática e o modelo matemático construído podem servir para analisar e tomar decisões sobre determinado problema" (p. 830). Outro elemento que se insere nas categorias de análise é a participação ativa do aluno na

sociedade. Segundo as autoras, é expetável que as atividades desenvolvidas, através das soluções encontradas, sejam interpretadas no contexto social que se lhes equipara, o que pode levar a mudança de atitudes ou, eventualmente, a tomadas de posição na sociedade. Em última instância, exemplos disso são ações comunitárias e, portanto, a comunidade surge como uma extensão do espaço democrático da sala de aula. A terceira categoria tem, por sua vez, relação com a escolha do problema não matemático da realidade, o que pressupõe que os alunos selecionem problemas sobre os quais tenham interesse e que, desde logo, sejam reais. Este ponto de partida considera "a cultura do grupo e também da comunidade à qual pertencem, o que envolve, igualmente, os conhecimentos que já possuem (matemáticos ou não)" (Silva & Kato, 2012, p. 831). Por sua vez, ao ter em conta a cultura dos alunos, é preciso ter noção que tal facto influenciará as suas interpretações dos modelos matemáticos obtidos. Por último, não é descurado a atuação do professor como mediador. A ele cabe ser o elemento propiciador das ações a desenvolver nomeadamente ao estimular o trabalho em conjunto e fomentando a exposição de argumentos, tornando a sala de aula um espaço democrático para além de auxiliar a escolha do problema tendo por base o conhecimento da cultura dos seus alunos. O seu papel, numa dimensão crítica, consiste ainda em encorajar os alunos a estabelecerem uma ponte entre a sala de aula e a sociedade.

2.6. Síntese do capítulo

Integrar a modelação matemática como um ambiente de aprendizagem para intersetar o ensino da Matemática com a realidade é uma proposição válida para quem, sob uma perspetiva sociocrítica, pretender tornar as salas de aula de Matemática em lugares democráticos, incentivando os alunos a usarem a Matemática para pensar e agir sobre o mundo. Neste sentido, fundamentou-se, teoricamente, ao precisar terminologia e desenvolver conceitos intrinsecamente conectados ao longo de todo o processo de modelação. O conceito de modelo matemático tem estado presente em muitas das áreas onde a Matemática é preponderante, principalmente para a resolução de problemas. O seu significado assume-se como uma descrição ou representação de uma situação do mundo real, por meio de representações cuja combinação corresponde ao processo de modelação. Reconhecendo que o conceito de realidade é impreciso, apresentou-se necessário discorrer, um pouco, sobre a investigação efetuada no campo da educação matemática. Assim, o mundo real é designado, frequentemente, por domínio extra-matemático e a Matemática é utilizada para traduzir entidades do domínio extra-matemático para entidades do domínio matemático correspondente, um procedimento conhecido como matematização. Para validar esse procedimento e obter conclusões, é necessário

transferir as entidades de volta ao domínio extra-matemático, num processo denominado por ciclo de modelação. Uma vez que a tradução da realidade em modelos matemáticos é subjetiva, dependendo de fatores como o conhecimento, perceções, intenções ou interesses do sujeito que dirige esse processo, vários autores continuam, ao longo de décadas, a propor ciclos de modelação que evidenciam fases ou etapas, que compreendem de uma forma global as seguintes etapas cognitivas: compreensão da tarefa, simplificação/estruturação, matematização, trabalhando matematicamente, interpretação, validação e, por último, apresentação dos resultados (Blum & Leiβ, 2007; Ferri, 2006).

As abordagens e perspetivas da modelação matemática multiplicam-se, tornando evidente a aplicabilidade da modelação matemática quer em contexto científico, quer educativo. A transversalidade da sua aplicação infere-se por ser uma estratégia que possibilita a compreensão de um conceito matemático através das potencialidades do seu contexto.

Quanto às finalidades da modelação como prática educativa, conectou-se o seu ensino ao papel do professor, bem como se pretendeu deixar claro a importância de usar o contexto do mundo real nas tarefas de modelação, de forma a levar os alunos a interpretarem o seu mundo. Para tal, foram retratadas estratégias e dinâmicas de implementação da modelação como ambiente de aprendizagem, como sendo o posicionamento do professor face ao grau de envolvimento do aluno e consoante cada uma das etapas do processo (Barbosa, 2001), num equilíbrio que permita que a intervenção mínima do professor na orientação dos alunos (Blum, 2015). Por sua vez, as tarefas de modelação proporcionam aos alunos inúmeros benefícios como uma aprendizagem significativa, ajudá-los a melhor compreenderem o mundo (Blum, 2015), assim como a entenderem a aplicação da Matemática no mundo (Galbraith & Stillman, 2006), para referir alguns. Em relação à autenticidade das tarefas, as mesmas deverão ter características de autenticidade pessoal, de impacto ou de valor, que sejam próximas da realidade dos alunos, fomentando, assim, processos mais complexos de aprendizagem (Villa-Ochoa, 2017). Ao longo deste capítulo foram, também, analisados os bloqueios e as dificuldades com que os alunos se podem deparar na resolução de tarefas de modelação, deduzindo que apesar de existirem fases mais desafiantes como a fase de construção, a fase de simplificação e a fase de validação (Blum & Ferri, 2009), os bloqueios podem ocorrer quando alguma das atividades tiver que ser realizada (Stillman et al., 2007). A conjugação das funções e da modelação matemática tem várias potencialidades para os alunos, fazendo ressaltar a dualidade de desenvolver a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real (ME, 2001).

Por fim, emerge a perspetiva sociocrítica associada ao par ação/reflexão. De forma resumida, com esta abordagem a sala de aula é configurada para ser um lugar democrático, um espaço de interação, de onde emerge a ação dialógica, fruto das discussões reflexivas originadas pelos alunos (Araújo, 2009; Barbosa, 2001).

CAPÍTULO 3

UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA A JUSTIÇA SOCIAL

É pressuposto da presente investigação que a adoção de uma educação matemática (EM) dentro de uma prática educativa que valorize a justiça social, proporciona aos alunos um meio para desenvolverem aptidões para a interpretação da realidade social, atenuando, simultaneamente, a perpetuação na identificação da disciplina de Matemática como um fator determinante de insucesso e exclusão escolar. O propósito do presente capítulo é fundamentar esta intencionalidade, estando, para isso, dividido em oito secções, finalizando com uma síntese. As três primeiras secções partem do questionamento de onde se situa, hoje, a escola enquanto instituição, qual é o lugar dos professores e o espaço deixado aos alunos. A resposta contra-hegemónica parece indiciar uma necessidade de radicalização axiológica e, por esse motivo, segue-se a análise da pluralidade do conceito de justiça com a intenção de o aplicar à educação. Assim, na quarta secção é apresentado o imperativo ético da educação matemática, pela que, na quinta parte, se evidencia o poder emancipatório da mesma. Nesta senda, averiguam-se as potencialidades de uma educação matemática para a justiça social e perscruta-se a sua presença normativa, a nível nacional. Por fim, interseta-se a educação matemática para a justiça social e a modelação matemática crítica, fazendo emergir as potencialidades de ambas no sentido de mitigação e combate às injustiças estruturais.

3.1. A Escola como antecâmara do mundo[14]: Um caminho para uma liberdade emancipadora ou uma máquina institucional de controlo?

A educação vista enquanto processo global e permanente é, hoje, uma realidade indubitável embora funcione como um pêndulo difícil de equilibrar. Por um lado, ainda que seja frequente encontrar a ideia de uma educação global um pouco por toda a História, principalmente conectada com o humanismo, também é repetida a forma como as vestes institucionalizadas desrespeitam a riqueza das possibilidades humanas, reduzindo-as a uma única dimensão – a intelectual, sob o aspeto cognitivo (Monteiro, 2017). Ao tornar-se a escola uma instituição forte e privilegiada, criou-se a tendência de identificar *educação* com *educação escolar*. Numa vertente oposta, encontra-se obsoleta a ideia de educação como mera transmissão de conhecimentos, tendo vindo, cada vez mais, a ser

[14] Arendt, H. A Crise na Educação *in* Pombo, O. (2000) Quatro textos excêntricos

sustentado, por diversos autores e organismos internacionais, que a ela também lhe compete preparar os jovens para serem ou virem a ser reflexivos e transformadores, cidadãos críticos que procuram aprofundar os valores democráticos das sociedades em que vivemos (Seiça, 2016).

Independente dos objetivos a que se propõe, nenhuma educação é neutra, uma vez que é orientada para servir interesses bem definidos e não universalistas. Como fundamenta Monteiro (2017), a educação pode ser bloqueadora e utilitarista, tendo o educador como reflexo da sociedade. Esta contradição perturba quer os educadores quer os educandos e, ainda que em dimensões diferentes, torna-os igualmente vítimas. De facto, encontra-se nos pensamentos de Freire (2019) uma classificação da escola como instrumento de controlo social condizente com instituições de domesticação. Todavia, é também na pedagogia freireana que a educação surge como oásis de libertação no sentido de desmistificar a realidade para conseguir desmistificar a consciência, porque não é possível impedir o homem de pensar. Transmitindo esse sinal de esperança que evidencia que a escola pode ser motor de transformação social, é ainda de Freire (2001) a mítica frase "a educação não muda o mundo, muda as pessoas que vão mudar o mundo" (p. 84)

3.1.1. Pode a educação mudar a sociedade?

Os debates em torno do papel da educação na construção e evolução de uma sociedade têm sido extensivamente aprofundados e têm percorrido um largo espectro histórico-político. Para se refletir sobre as principais questões que podem apresentar-se, sugere-se começar por uma das mais primárias, que dá título a uma das principais obras de Apple (2017): "pode a educação mudar a sociedade"? A resposta a esta questão é dada pelo autor, ao longo de anos e em diferentes obras, sem que, no entanto, lhe atribua uma definitiva ou absoluta. Sob o ponto de vista de Apple (2017), existe uma condição *sine qua non* para que qualquer possível resposta seja atribuída adequadamente – olhar para a sociedade da posição de múltiplos grupos oprimidos. Assumindo a vertente afirmativa, Apple (2017) é categórico em argumentar que a educação pode mudar a sociedade se e só se desafiar abertamente classe e capitalismo, deixando implícita a ideia de que a educação deverá não somente não se deixar subjugar à lei dos mercados, como também ultrapassar a esfera neoliberalista que alicia com "escolas eficientes e eficazes num ímpeto competitivo de mercado global" (p. 5). Até porque, na visão de Dewey (2001), para que a educação possa contribuir para a reconstrução social há que quebrar o *status quo* imperante de que "vivemos numa sociedade economicamente livre na qual cada indivíduo tem oportunidades iguais para desenvolver as suas iniciativas" (p. 2), uma vez que "a liberdade económica para a vasta maioria da população, não existe ou é precária" (Dewey, 2001, p. 2).

Concatenando estas ideias, Teodoro e Torres (2005) propõem "uma *utopística* que guie a transformação da sociedade, imaginando uma era pós-liberal, uma transição que está emergindo em direções difíceis de predizer" (p. 14).

Mostra-se pouco discutível, através desta questão introdutória, quer a pertinência do papel da educação na mudança social, quer uma subsequente indagação quanto à forma como o poderá fazer. E é, nesta última, que parece incidir o maior desafio atual e onde se depositam grandes esperanças, que funcionem como um travão na agudização das crises sociais, da última década, e no ceticismo quanto ao poder das instituições do Estado. Como resposta, Smyth (2011) conjuga três elementos necessários para que a escola possa contribuir para a edificação de uma sociedade melhor: o primeiro, os professores como intelectuais transformadores e atores políticos, com o ímpeto da resistência contra-hegemónica ao neoliberalismo, implicados na luta contra as injustiças sociais, estimulam um ensino de responsabilidade social; o segundo, os alunos como ativistas da sua própria aprendizagem; por último, as comunidades educativas conectadas e envolvidas politicamente de forma a criarem estratégias que liguem os alunos às suas comunidades para que eles próprios se tornem agentes de mudança.

Pois bem, assumindo que para agir há que contextualizar, Sloterdijk[15] (2013) satiriza que o "facto fundamental para a Época Moderna não foi que a Terra gira à volta do Sol, mas que o dinheiro gira à volta da Terra" (p. 9). Tal alegoria torna indubitável o papel do capital no seio de um contexto neoliberal, um reflexo das sociedades pós-modernas ocidentais vítimas de uma globalização galopante, que desemboca num crescimento de desigualdades de oportunidades pessoais e sociais. É aqui entendido como neoliberalismo, a "força motriz ideológica da globalização, que vê como crucial a expansão do mercado livre e a eliminação de todas as barreiras que se lhe oponham" (Dale, 2005, p. 57). O imperativo ideológico assume-se, na prática, ao privatizar instituições públicas, nomeadamente, nas áreas da educação e da saúde, transformá-las em locais de lucro e eliminando a sua ação social, para substituir o conceito de bem público pelos interesses individuais (De Lissovoy et al., 2015). Também por isso, na chamada era dos mercados, a democratização da escola, tão radicalmente defendida outrora, é ainda débil e a escola persiste em ser local de reprodução das diferenças socioculturais de partida.

Nesta conjuntura, não é de estranhar o surgimento do termo mercantilização do ensino para traduzir a privatização e a descentralização das formas públicas de educação cujo ímpeto é desenvolver o seu próprio modelo hegemónico de dominação intelectual e cultural (Ball, 2020): uma

[15] Em *In the World Interior of Capital*, Peter Sloterdijk mostra como o sistema capitalista terminou por determinar todas as condições da existência, na atual globalização.

educação baseada em *standards de performance*, com enfoque em exames nacionais e testes estandardizados, enquadrada por um regime de *accountability* (Teodoro & Torres, 2005), através de um perfil docente assente numa cultura de prestação de contas e numa "escolarização restrita que provoca um impasse silencioso nos professores" (Pacheco, 2019, p. 48).

Com efeito, sabido é que a escola pública, conduzida pelo Estado-Nação, representou historicamente um projeto essencial à construção social das sociedades modernas (Lima, 2005), contudo, em pouco mais de um século, passou do "estatuto de novidade à procura de consolidação, ao de realidade fortemente institucionalizada e omnipresente" (p. 19). Teodoro (2005) relembra que, desde o século XIX, através do estabelecimento de modelos de organização escolar e pedagógicos foi possível a expansão da escola a um maior número de alunos, de todas as camadas e grupos sociais. Tal cenário merece uma análise que permita visualizar até que ponto a edificação da escola moderna foi vítima das "ideologias organizacionais da modernidade e do capitalismo" (Lima, 2005, p. 21) ou se, por outro lado, o processo de escolarização só poderia ser alcançado por meio de um processo de formalização organizacional voltada para a produção em larga escala. Também Monteiro (2006) assinala que os dois objetivos fundamentais da educação de uma sociedade capitalista são formar quadros ideológicos e dirigentes e instruir pelo mínimo uma mão de obra que lhe permita existir.

De qualquer forma e seja qual for o argumento, pelo menos no resultado, encontra-se implícito aquilo que ficou conhecido como *taylorização*[16] da instrução, uma analogia ao trabalho fabril levada a cabo para uma otimização do contexto escolar. Na verdade, um conjunto de características escolares com dimensões hierárquicas, de poder e de controlo, que justificam uma organização escolar moldada "simultaneamente, por uma elevada produtividade e eficácia e, ainda, a perpetuação do controlo do Estado sobre as famílias, a comunidade e os profissionais da educação" (Lima, 2005, p. 22). E ainda que a responsabilidade do Estado seja dúbia no que diz respeito às promessas não cumpridas da "construção de uma escola como organização democrática e como organização para a promoção da democracia" (Lima, 2005, p. 24), um pressuposto é certo, na visão althusseriana[17]: a escola é um aparelho ideológico do Estado e, uma vez mais, fica subjacente a ideia de perpetuação do poder, com o recurso a uma máquina de endoutrinamento massivo. Usando a linguagem foucaultiana[18], a educação é um dispositivo disciplinar que fabrica o indivíduo. O conhecimento, neste sentido, é apenas uma desculpa para a construção de um sujeito desejável (Foucault, 2010).

[16] "Tais dimensões de dominação, de ordem hierárquica e de controlo centralizado, foram muito apreciadas por Frederick Taylor, que as observou interessadamente como características escolares e lhes reconheceu utilidade para a organização industrial, sob os princípios da administração científica" (Lima, 2005, p. 21)

[17] Althusser (2022) apresentou o conceito de Aparelhos Ideológicos do Estado, em 1974, constituindo a escola um dos aparelhos de endoutrinação ideológica mais poderoso.

[18] Michel Foucault foi um filósofo francês, conhecido por obras como Vigiar e Punir ou a Hermenêutica do Sujeito.

Por outro lado, Pacheco (2019) chama à atenção que a dimensão universal da educação sustenta a sua finalidade social que incluiu saberes, atitudes ou capacidades e que, em última instância, pode ser conectada com o papel determinante a que Adorno[19] (2003) outorga à educação, a exigência para que Auschwitz não se repita. Para o autor, qualquer debate acerca do tema que não contemple esta meta carece de significado e, por sua vez, para garantir a sobrevivência humana, a questão mais urgente da educação está em se, através da mesma, é possível desbarbarizar. Aplicando a ideia de Adorno à atrocidade ocorrida na África do Sul, na segunda metade do século XX, Skovsmose (2007) lança a expressão "educação depois do apartheid", para representar o conceito iminente de que "qualquer educação deve evitar a ocorrência de qualquer apartheid" (p. 19)

3.1.2. Professor como intelectual transformador e alunos como agentes de mudança

Considerando os professores "guardiões da civilização e da cultura", Russell[20] defende que "o sentimento de independência intelectual é essencial ao adequado preenchimento das funções de professor" (2000, p. 72), contrariamente ao *status quo* imperante de "incutir crenças e pressupostos cuja utilidade é estabelecida por aqueles que lhe dão emprego" (Russell, 2000, p. 77). Ora, o panorama atual é dominado por um sistema escolar que se rege pelos resultados, adotando um modelo de avaliação externa das escolas que vai conduzir a um determinado perfil docente, por sua vez regulado por uma aprendizagem apressada e orientada para os testes padronizados. Nesta cadeia de acontecimentos, o professor surge como "um mero funcionário do ato pedagógico que acontece na sala de aula" (Pacheco, 2019, p. 51), cuja atividade principal é centrada nos resultados dos alunos na avaliação sumativa externa, sendo, desta forma, inviabilizados de se direcionarem para resolver os problemas que, de facto, gostariam de resolver, circunscritos a um duplo impasse de se sentirem bem e mal ao mesmo tempo na profissão. Mergulhados numa letargia produzida por um cansaço burocrático insuportável ou por uma indisciplina discente, os docentes adotam um silêncio inconsciente, cujas raízes provêm de um medo instalado que passa a comandar e gera uma interiorização da não contestação. Mais do que isso, a instalação de uma obediência passiva é resultado de uma mentalidade tecnicista e submissa, que nada tem a ver com o trabalho de um intelectual. Neste contexto, continuam atuais as palavras de Giroux (2024a) ao defender que se torna premente o professor surgir como "um intelectual transformador, que combina reflexão e ação" (p. 29) com o sentido de transmitir aos alunos "as habilidades e conhecimentos necessários para

[19] Theodor W. Adorno escreve, em *Educação depois de Auschwitz* (*Erziehung nach Auschwitz*), que a primeira exigência da educação é que Auschwitz não aconteça de novo (Adorno, 2003).
[20] Bertrand Russell escreve o texto As funções de um professor *in* Pombo, O. (2000) Quatro textos excêntricos.

identificarem as situações de injustiças, e de serem atuantes críticos comprometidos com o desenvolvimento de um mundo livre da opressão e da exploração" (Giroux, 2024a, p. 29). Já McLaren (2015) atribui a responsabilidade ao professor de conectar aquilo que denomina "domínio macro socioeconómico" da vida social e o domínio "micro-social" referente às salas de aulas das escolas (p. 27). Esta fusão pressupõe que do professor tem de emergir a vontade de transformação social, para que se possam desenvolver alternativas contra-hegemónicas.

No caso português, e como destaca Seiça (2016), o sentido de justiça e responsabilidade do professor é, inclusivamente, sustentado pelo Estatuto da Carreira Docente ao enunciar o dever de "orientar o exercício das suas funções pelos princípios do rigor, da isenção, da justiça e da equidade" (Artigo 10.º, 2, alínea a). Este vínculo normativo poderá servir de impulso à adoção de práticas docentes que possibilitem aos alunos "meios de defesa contra formas de elitismo, de segregação, de exploração e instrumentos críticos que lhes permitam distinguir a autoridade que promove a igualdade daquela que a limita (ECD, p. 56). Seja como for, o caminho em que professores e alunos partilham um processo de questionamento e construção da consciência identitária é longo.

Ao assumir que é o mercado que introduz regras sobre o que é pretendido aprender, Pacheco (2019) desmonta a ideia de que a educação é imutável perante a matriz de todos os problemas, pelo contrário, ela é suscetível de ser regulada pelas leis da oferta e da procura, moldada por um neoliberalismo educacional que a condena a uma *standardização* transglobal. Urge questionar qual é o papel dos alunos numa cultura escolar marcada pela constante estratificação. Hooks (2003) é, desde logo, categórica em denunciar que a aprendizagem competitiva é desumanizante e que a competição em sala de aula pode resultar em adultos atomizados e egoístas. Por sua vez, Kohn (2015) lista algumas preocupações face a uma aprendizagem competitiva como, por exemplo, ser responsável por prejudicar a autoestima, a confiança, e o desenvolvimento global dos alunos. Simultaneamente, cria ansiedade e fomenta nos alunos verem os colegas como um obstáculo. Com este tipo de atmosfera, é gerado um ambiente tóxico nada propício à humanização da educação pois, indo ao encontro daquilo que já dizia Adorno (2003), "a competição é um princípio no fundo, contrário a uma educação humana" (p. 161).

A forma de contraposição a estas práticas levanta a hipótese da necessária consciencialização, mas também de construção de experiências que reforcem a voz interventiva dos alunos. Avaliando o tónus da atual investigação educativa quanto ao papel dos alunos em termos do seu envolvimento e participação (Smyth, 2016), comprova-se uma ênfase na metáfora dos alunos como agentes de mudança, conhecedores das injustiças e sensíveis a elas. Outra das máximas de Smyth (2011)

relativas a esta temática é invocar os alunos como ativistas, para, desde logo, a reenquadrar na "revolução suave" de Postman e Weingartner[21], uma ideia que procura ser uma metáfora, mas também uma estratégia política. Adotando este conceito, Smyth (2011) utiliza-o para clamar a necessidade de humanizar as escolas, tornando-as afetuosas para com os interesses, os contextos ou as aspirações dos alunos, principalmente dos mais desfavorecidos. Para este autor é importante descortinar que a escola opera num determinado quadro de referência e, por sua vez, os alunos aportam consigo as suas próprias referências o que pode originar um choque de desentendimentos. Embora não existam fórmulas mágicas, a resposta encontrada, que poderá ser útil para contrariar esta tendência, está no poder relacional fundamentado numa base de cooperação.

3.1.3. Resposta contra-hegemónica: A pedagogia crítica

Tal como a palavra *justiça*, também a palavra *crítica* se pode tornar um lugar-comum, visível, nomeadamente, na investigação educacional ou nos documentos curriculares. À semelhança do termo *justiça*, o uso excessivo da noção de crítica corre igualmente o risco de perda de significado (Pais et al., 2012), incorrendo numa "espécie de domesticação"[22] (p. 2).

No contexto filosófico, o conceito de crítica evolui historicamente desde a antiga civilização grega. É, contudo, na primeira metade do século XX, com a Escola de Frankfurt, que se transforma numa escola de pensamento e dela surge a Teoria Crítica. Neste seguimento, emerge a Pedagogia Crítica, um movimento pedagógico vinculado à Teoria Crítica. Os seus autores mais representativos defendem como resposta contra-hegemónica[23], uma pedagogia de resistência à reprodução, nas escolas, de uma sociedade profundamente injusta (Apple, 2017; Giroux, 2023; Kincheloe, 2012; McLaren, 2018). Assinalando a radicalidade do termo crítica, Giroux (2014) apresenta a pedagogia crítica como sendo o antídoto para o ataque neoliberal da educação pública, o que traduz a necessidade de definir as escolas como esferas públicas democráticas. Ainda nesta linha de pensamento, Skovsmose (2007) vai mais longe afirmando que "se a sociedade absolutamente perfeita de Platão existisse e na realidade assim o fosse, não seria necessário inventar uma educação crítica. Não esperaríamos uma secção acerca da educação crítica na República" (p. 24).

As origens da pedagogia crítica remontam, segundo Giroux (2022), a 1976 quando Samuel

[21] Neil Postman and Charles Weingartner escrevem, em 1971, *Teaching as a subversive activity* e *The Soft Revolution* (Smyth, 2011).
[22] Os autores concretizam esta ideia ao referirem como, quase paradoxalmente, surgem nos currículos mundiais quer a palavra *crítica* quer a importância de permitir aos alunos uma educação crítica.
[23] Gramsci (1971) expõe o conceito de hegemonia como o processo pelo qual os líderes da sociedade, dos quais figuram os próprios professores, exercem controlo ao reforçar as crenças sobre o que é considerado verdade.

Bowles e Herbert Gintis publicaram *Schooling in Capitalist America*[24]. Influenciada pela Escola de Frankfurt e pelo conceito de teoria crítica por ela criado, é também emoldurada pelos seus procedentes[25], como Jürgen Habermas[26] ou Paulo Freire[27]. A Escola de Frankfurt foi fundada em 1922, associada à Universidade de Frankfurt, com o intuito de teorizar acerca dos movimentos operários na Europa e tendo como principais impulsionadores Max Horkheimer, Theodor Adorno, Herbert Marcuse (para referir os principais). Este último autor era um filósofo alemão que assinalou a existência de um massivo endoutrinamento ideológico, praticado nas sociedades avançadas, que faz com que o indivíduo fique fora de jogo para decidir o seu destino (Marcuse, 2012). Tendo em vista que o foco da teoria Crítica é desconstruir as relações de poder, a hegemonia e o *status quo,* é compreensível que, para McLaren (2015), a pedagogia crítica seja desmistificadora, e, com a qual, os sistemas de sinais dominantes são reconhecidos e desnaturalizados, o sentido comum é historiado e o significado é entendido como uma prática política e responsável diante dos dilemas sociais. Reconhecendo a natureza dialética da Teoria Crítica, McLaren (2015) desafia o investigador educacional a ver a escola para além de "uma arena de endoutrinação ou socialização ou um local de instrução, mas também como um terreno cultural que promova o empoderamento do aluno e a autotransformação" (p. 194).

Com Freire (2018a), surge o termo *conscientização*, o qual implica que que seja ultrapassada a esfera espontânea de apreensão da realidade, para se chegar a uma esfera crítica na qual "a realidade se apresenta como objeto cognoscível e na qual o homem assume uma posição epistemológica" (p. 26). Esta posição associa-se a uma consciência histórica, permitindo que se desenvolva um novo tipo de conhecimento que tenha em conta a dialética das relações entre a cultura dominante e a dominada (Giroux, 2023).

Freire (2010) insiste na necessidade de uma permanente atitude crítica com vista à superação de uma atitude de mera acomodação e como única via de apreensão de temas e tarefas da sua época. O conceito de *praxis,* nos trabalhos de Freire, pressupõe dois fatores: a radicalização[28] e o diálogo, numa linha em que submete sempre a ação à reflexão. E é nesta conjugação que emerge a consciência crítica. Pelo contrário, qualquer fonte de dominação vem da ação antidialógica (Freire, 2018b) e anticomunicativa, até porque somente a praxis revolucionária se pode opor à praxis das elites

[24] Em *Schooling in Capitalism America: Educational Reform and the Contradictions of Economics Life (1976)*, os autores analisam as injustiças políticas e económicas presentes na educação, integrando-se no que viria, mais tarde, a ser designado por *teorias da reprodução social e cultural*.

[25] Também Pierre Bourdieu e Jean-Claude Passeron (autores de A Reprodução, 1977) ou Louis Althusser (1970) cimentaram a abordagem teórica da Pedagogia Crítica.

[26] Habermas começou por conectar emancipação a uma crítica ao positivismo da pesquisa em ciências sociais e à necessidade de as ciências sociais se basearem na procura e interesse pela emancipação.

[27] A obra de Paulo Freire, *Pedagogia do Oprimido* (2018b), é considerada uma obra seminal da Pedagogia Crítica. "Ninguém liberta ninguém, ninguém se liberta sozinho, os Homens libertam-se em comunhão" (p. 29) é uma das máximas presentes nesta obra e que marca toda a teoria educativa de Freire.

[28] Para Freire (2003), a radicalização é positiva, "porque preponderantemente crítica (...) o homem radical na sua opção, não nega o outro de optar. Não pretende impor a sua opção. Dialoga sobre ela" (p. 50).

dominadoras que tem como constituintes a "manipulação, a *sloganização*, o depósito, a condução, a prescrição" (p. 71). Ao analisar a relação de educador e educando, sob a perspetiva freireana, depara-se com um conceito a que autor denomina por educação bancária. Esta relação é tendencialmente narradora, implicando um sujeito que narra e um ouvinte estático, tornando-a, em potência, esvaziada de realidade, uma vez que o seu principal mote é o depósito desenfreado de conteúdos. Este carácter depositário valoriza a memorização mecânica dos conteúdos por parte dos educandos, a que autor caracteriza como "uma narração que os transforma em vasilhas, em recipientes a serem enchidos pelo educador". O autor concluiu então que "uma educação torna-se um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador o depositante" (Freire, 2018b, p. 33). Esta visão bancária da educação acarreta em si mesma uma prática de dominação. Revestindo o saber como uma doação dos "que se julgam sábios aos que julgam nada saber" (p. 33), instrumentaliza-se como uma ideologia da opressão. Como força antagónica a uma educação bancária, Freire (2018b) apresenta uma educação problematizadora que tenha raiz no diálogo e que sirva à libertação, onde não haja lugar à neutralidade e à apatia e estando bem seguros de que não existe, em nenhum caso, transformação sem ação.

Por sua vez, encontra-se uma vasta abordagem literária, filosófica ou sociológica relativamente à adoção de uma postura neutra em situações críticas (no sentido de pressuporem ação). Nos seu ensaio, Pensamentos e Considerações Morais[29], Arendt (2007) exemplifica-o afirmando que "a triste verdade é que os maiores males são praticados por pessoas que nunca se decidiram pelo bem ou pelo mal" (p. 247). A frase de Zinn (2018) que dá título a uma obra de memórias do historiador e ativista americano "não podes ser neutro num comboio em movimento", transportada à educação, sugere que a neutralidade não é uma opção, ou se é resistente ou se é complacente, e que a potencialidade educativa é, precisamente, a ação. Na perspetiva de Freire (2010), "não há nem jamais houve prática educativa em espaço-tempo nenhum de tal maneira neutra, comprometida apenas com ideias preponderantemente abstratas e intocáveis" (p. 78). Na esteira deste pensamento, Giroux (2024a) assegura que as escolas não são locais neutros uma vez que incorporam disputas ora de formas de autoridade ora de regulação moral ou de tipos de conhecimento. Daí que, se os professores não quiserem ser lançados do comboio em movimento, utilizando o figurativo de Zinn, não poderão ser neutros. Subjacente a este princípio o autor sugere que os professores se afirmem como intelectuais transformadores, procurando, desta forma, "tornar o pedagógico mais político e o político mais pedagógico" (Giroux, 2024a, p. 163), bem como resume esta última implicação, recomendando que

[29] Este ensaio faz parte da obra de Arendt (2007) *Responsabilidade e Julgamento*.

os professores assumam a "necessidade de dar aos estudantes voz ativa nas suas experiências de aprendizagem" (p. 163).

Cabe então questionar, como revestir a educação com elemento crítico, elemento este gerador de ação? McLaren (2018) responde, em tom axiomático, reconhecendo que, em primeiro lugar, as pedagogias devem assumir-se potencialmente de criticismo social e cultural. Acrescenta-se a este, que todo o conhecimento é estabelecido por relações linguísticas que são, na sua essência, constituídas histórica e socialmente. Além disso, todos os indivíduos estão "sincronamente relacionados com a sociedade em geral através de relações de mediação (família, amigos, religião, ensino formal, cultura popular)" (p. 268), assim como é de sublinhar que os factos sociais nunca se podem dissociar dos valores dominantes nem separar das formas ideológicas de produção. É de relembrar que, para a Teoria Crítica, o poder é visto como "participante das relações entre as pessoas que estão diferenciadamente capacitadas para atuar em virtude das oportunidades disponíveis em função da sua raça, etnia, classe, género e orientação sexual" (p. 269).

De modo lacónico, a pedagogia crítica dá conta dos contextos sociais, culturais e políticos, mas, essencialmente, tenta analisar e também desestabilizar essas mesmas configurações sociais. É decisivo para a ação que os professores e estudantes explorem a "relação das suas próprias experiências quotidianas, as suas práticas pedagógicas de sala de aula, os conhecimentos que produzem, e as disposições sociais, culturais e económicas da ordem social em geral" (McLaren, 2018, p. 270). Este posicionamento crítico implica uma forma de aprendizagem que fomenta nos alunos poder e controlo sobre a própria aprendizagem, desmarginalizando-se, desta forma, da apropriação do saber (Estêvão, 2012).

Se bem que a Pedagogia Crítica não oferece receitas milagrosas, também é verdade que se assume como uma prática da crítica bem como uma crítica da prática hegemónica (McLaren, 2018). Um dos exemplos é a referência ao currículo oculto (Apple, 2018; Giroux, 2004), através do qual está implícito um conjunto de normas, valores e crenças não declarados que são transmitidos aos alunos, "adquiridos mediante a participação nos vários processos e interações que ocorrem nas organizações educativas" (Estêvão, 2012, p. 102). Do ponto de vista de Giroux (2004), o currículo oculto é entendido como uma ferramenta pedagógica pronta para ativar uma pedagogia crítica. Ainda que reconheça a existência de visões tradicionalistas, liberais e radicais[30] deste conceito, o autor analisa-as para ele

[30] Segundo Giroux (2004), o currículo oculto, sob o enquadramento tradicionalista, é tido como uma reprodução da estabilidade e coesão da sociedade global aplicada ao sistema de escolarização. Por sua vez, com o enfoque liberal, é deixado de lado o estudo das estruturas sociais e apenas se analisa a forma de produção e negociação dos significados ocorridos em sala de aula. Por fim, desde a perspetiva radical, a preocupação reside nas estruturas sociais e na construção dos significados com vista à compreensão do funcionamento do "processo de escolarização para reproduzir e sustentar as relações de dominação, exploração e desigualdade entre as classes" (p. 83).

próprio apresentar uma reconceptualização de currículo oculto, defendendo, em primeiro lugar, que esta noção terá de ocupar um lugar central no desenvolvimento da teoria curricular. Neste contexto, quer a teoria, quer a prática curricular terão de integrar na sua problemática uma noção de crítica, necessária ao questionamento dos pressupostos normativos que estão subjacentes na sua lógica e no seu discurso. Giroux (2004) entende que o currículo oculto deverá ser usado não só para analisar as relações sociais de sala de aula, mas também os "silêncios estruturais e as mensagens ideológicas que dão forma e conteúdo ao conhecimento da escola" (p. 89). É importante que uma redefinição de currículo oculto se associe a uma noção de libertação, enraizada nos valores de dignidade pessoal e de justiça social. A sua essência seria estabelecida mantendo o foco não só na reprodução como também na transformação. Por fim, na proposta de Giroux (2014), é imperativo que se incluam nesta teoria abordagens à consciência e ação humanas, bem como formas de análise que explorem a forma como se conjugam.

Por estes aspetos, a pedagogia crítica indica um caminho que se direciona, fundamentalmente, num processo transformador da educação, que guie na "construção de uma luta emancipadora anticapitalista, antirracista, anti-sexista e pró-democrática, ou seja, defendendo a justiça social" (McLaren, 2018, p. 54). Nestas circunstâncias, é, pois, de assinalar que o fator pedagógico mais importante, partilhado pela teoria crítica e pela pedagogia crítica, é o de levar os educandos a situarem-se, ativamente, no contexto sociopolítico, como agentes de uma *praxis* transformadora do discurso de reprodução das estruturas de poder desde o currículo (Cánovas, 2014). Contudo, apesar da pedagogia crítica dar pistas e estabelecer vários sentidos, a questão radical continua no cerne: que papel outorga a educação na construção de uma sociedade mais justa? Por sua vez, também é válido o seu recíproco: qual o lugar da justiça na educação? Destes questionamentos emerge uma relação explícita entre o conceito de justiça social e pedagogia crítica que é inevitável investigar.

3.2. Pluralidade do conceito de justiça

O carácter fugaz, algo leviano, a que, muitas vezes, é feita referência à expressão *justiça social* leva a uma perda do seu sentido original, convertendo-se em palavras que de tanto serem manuseadas já nem se sabe o que significam (Murillo & Hernández-Castilla, 2014). Não só por esse motivo, torna-se difícil apresentar uma definição que abarque uma essência de raiz histórica clara, que traduza o seu real objetivo contemporâneo.

Embora o conceito de justiça esteja embebido numa tradição filosófica, pelo menos desde o tempo de Aristóteles, sendo sobretudo na área da filosofia política e moral que encontrou o seu lugar

de destaque, a força do seu paradigma abrange âmbitos de pesquisa que vão desde teoria jurídica e económica, psicologia, ciência política ou ética médica, para referir alguns exemplos. Porém, o facto de muitos se referirem a questões de justiça não significa que todos falem do mesmo, até porque dependem do ponto de vista – axiológico, ético – que lhes for atribuído ou mesmo de um sentido – restrito ou abrangente. Mais ainda, o seu carácter polissémico invoca a articulação entre uma diversidade de ideias que vão desde liberdade, igualdade, lei, ordem, virtudes morais e éticas. De igual modo, a sua pluridimensionalidade – redistribuição, reconhecimento, participação – ultrapassa a esfera conceptiva para se posicionar no plano da atuação. Pensa-se que um preâmbulo que aborde, de forma geral, a metanarrativa da justiça poderá ser útil para reconhecer em que plano normativo e analítico se está a propor investigar e refletir.

3.2.1. Revisitação das teorias de justiça social

Na República, Platão (2007) perscruta acerca das ideias de *justo* e de *justiça*, indagando se e por que devemos ser justos, que tipo de bem constitui a justiça e que razões promovem a sua aspiração. A resposta que procura dar a estas questões, baseia-se na construção de uma sociedade bem ordenada, na qual impera a harmonia e o respeito pelo equilíbrio das classes sociais, e o justo é aquele que se comporta de acordo com a lei. Aristóteles (2011) argumentou que a justiça é um princípio que garante a ordem social através da regulação da distribuição de benefícios, com base numa noção de igualdade correspondente ao mérito. No entanto, na sua visão, a igualdade e a justiça aplicavam-se somente a indivíduos que ocupassem o mesmo estrato social hierárquico. Segundo as ideias aristotélicas de justiça social, as desigualdades na hierarquia social eram para ser tratadas de forma desigual, não pretendendo que fossem mudadas as estruturas sociais, mas sim atuar dentro delas.

Os filósofos modernos canalizam a atenção para a justificação da, não só, obrigação política, mas também de um dever de todos, apenas divergindo no modo como o fazem. A ideia de *contrato social* surge com Thomas Hobbes e John Locke. Hobbes (2017), filósofo moral de tradição jusnaturalista, estabelece importantes conexões entre sociedade, leis, direito e justiça. A noção de *justiça* hobbesiana segue a equação *justiça igual a pacto*, sendo que não existe pacto sem o Estado e as suas leis civis. Por contrato, Hobbes clarifica que, seguindo-se os preceitos das leis naturais hobbesianas, o homem deve renunciar ou abdicar de alguns dos seus direitos através de uma translação, ou transferência mútua de direitos. A teoria da justiça de Hume (2002) prima pela construção de um modelo normativo onde a justiça é assumida como uma virtude de sentido natural,

pois nenhuma virtude é mais natural que a justiça. Destaca-se a importância que dá à educação e à aprendizagem moral para o processo de construção de normas como garantia de estabilidade. Para Rousseau (2011), a busca e a realização de justiça estão ligadas à preservação da liberdade individual e igualdade de oportunidades e direitos, mas, acima de tudo, sustenta a organização estrutural do contrato social na certeza de uma criação coletiva das normas de justiça. Mais importante que a procura de estabilidade das instituições é a existência de um critério normativo independente que permita avaliar criticamente a justiça de ordem social. Uma vez que as leis são atos provenientes da vontade geral, nenhuma lei pode ser injusta, pois ninguém é injusto para consigo mesmo. Analogamente, a máxima rousseauniana estende-se de forma inversa, sublinhando que "a única verdadeira lei fundamental que deriva imediatamente do pacto social, é que cada um prefira em todas as coisas o maior bem de todos" (Rousseau, 2011, p. 124).

Na obra de Kant, assiste-se a uma oscilação entre a teoria moral e a teoria política no que diz respeito à tentativa de uma construção categorial do sentido de justiça (Maffettone & Veca, 2005). Em traços muito gerais, segundo a perspetiva kantiana, a justiça está conectada ao imperativo categórico (entendendo como imperativos, conformidades das ações à lei) e, neste sentido, implica o formalismo da lei moral[31] (Kant, 2011). Sendo estritamente formal, este princípio, que não tem qualquer influência empírica nem depende das circunstâncias, é, portanto, válido universalmente e tem origem na liberdade da razão. Esta lei universal é também um fim em si mesmo e deve derivar da razão pura. O valor moral da ação é garantido não pelo meio, mas pelo seu fim. De acordo com a ética kantiana, o imperativo categórico surge da vontade universalmente legisladora, do sujeito racional que age intencionalmente por dever, regendo-se pela lei da vontade ou, simplesmente, pela lei moral, guiado pela máxima suprema "devo proceder sempre de maneira que eu possa querer também que a minha máxima se torne uma lei universal" (Kant, 2011, p. 209).

A partir do início do século XIX, com a inclusão da questão social, começa-se a reformular o conceito de justiça, procurando satisfazer fins e expectativas sociais, uma vez que persistem as desigualdades e injustiças e se torna cada vez mais difícil conciliar a igualdade social e a preservação das liberdades individuais. O centro das questões está nas cooperações sociais e nas relações sociais de produção, onde a justiça é reinterpretada como justiça social (Maffettone & Veca, 2005). Aborda-se, pela primeira vez, a noção de *justiça distributiva*, que passa a estar no cerne da teoria política normativa. Na obra de Jeremy Bentham, *Fragmentos sobre o governo*, surge, pela primeira vez, o conceito de *utilidade* como sinónimo do desejável, como instrumento para conseguir e felicidade da

[31] O imperativo categórico assume um papel central na obra Fundamentação da Metafísica dos Costumes.

humanidade. Bentham (2018) considera que o carácter utilitarista da justiça se sustenta na maximização da utilidade coletiva, ou seja, o conceito de *justiça* é baseado no princípio da utilidade, como bem-estar coletivo, ocorra ela individual ou coletivamente. Mill (2023) corrobora esta posição, embora vá mais longe, garantindo a dependência da justiça em relação à utilidade fundamentando-a no facto de ser a ligação mais vinculativa de toda a moral, não sendo, portanto, de estranhar ter esta visão ficado conhecida como o princípio da máxima felicidade. Por sua vez, Marx (1971) define *justiça* como uma construção ideológica, criada por uma ordem particular das relações sociais e da produção. O seu conceito assenta no princípio de que a redistribuição deve ser feita com base na necessidade e no valor humanos, em oposição ao que um indivíduo merece, com base no seu estatuto social ou produtividade.

Em jeito conclusivo, as perspetivas utilitaristas[32] de Bentham e Mill seguem uma ética consequencialista e desenham-se a partir do momento em que a deliberação de uma ação a realizar tenha em vista o maior alcance de resultados. No fundo, o que é suposto é agir de forma a produzir a maior quantidade de bem-estar, ainda que tal possa ser desvantajoso para uma minoria.

É na contemporaneidade que se encontra o maior número de textos consagrados à teoria da justiça e os nomes dos seus autores parecem não terminar. No entanto, para discutir com propriedade, sobre justiça é imprescindível ler a obra de Rawls (2013), 'Uma Teoria da Justiça'. Com esta obra, florescem as teses e perspetivas acerca do tema e, indiscutivelmente, até para os seus maiores críticos, Rawls (2013) produz uma das teorias de maior relevância no respeitante às soluções propostas quanto à justiça como equidade[33]. Os modelos alternativos de uma sociedade bem ordenada proliferam e dividem-se, essencialmente, devido à difícil conciliação entre dois tipos de valores: o da liberdade individual e o social comunitário, por outras palavras, os interesses particulares e o bem comum, dando origem a perspetivas liberalistas e comunitaristas. Por um lado, as posições liberalistas ramificam-se em versões libertárias empreendidas por Robert Nozick e em abordagens igualitárias, tendo com John Rawls o seu principal representante. Por outro lado, nomes como Charles Taylor, Michael Sandel, Alasdair MacIntyre e Michael Walzer sustentam que a justiça se encontra conectada às comunidades e que, por isso, está associada a uma ideia de bem que pode ser muito variável (Maffettone & Veca, 2005).

[32] Também Hume e Adam Smith fazem parte do rol dos grandes pensadores utilitaristas (Rawls, 2013).

[33] Reacendido o debate público e académico, diferentes perspetivas surgem como resposta ou paralelas à teoria de Rawls. Uma delas é a de Robert Nozick, de tez libertária, com a sua obra *Anarquia, Estado e Utopia*. Surgem reformulações do utilitarismo com R.M. Hare ou no contratualismo de David Gauthier., Abordagens comunitaristas com Taylor, Sandel e MacIntyre em destaque assim como posições pluralistas como Michael Walzer com a sua obra *Esferas da Justiça: em defesa do pluralismo e da igualdade*. A teoria de democracia deliberativa de Habermas assume grande relevo na década de 70 (Maffettone & Veca, 2005).

3.2.2. A teoria rawlsiana

Rawls (2013) começa por contestar os utilitarismos dominantes nas sociedades liberais argumentando que, em muitos casos, se acaba por recorrer ao intuicionismo como variante ao princípio da utilidade. Ao fazê-lo, justifica o porquê de tentar apresentar uma conceção que consiga responder a uma certa lacuna deixada pelo utilitarismo. Para isso, vai ao encontro da teoria tradicional do contrato social de Locke, de Rousseau e de Kant, procurando desenvolver uma análise sistemática que a consiga elevar. Desta forma, um dos grandes objetivos que lança Rawls (2013) na sua *teoria da justiça como equidade* é destinar as suas ideias centrais a uma implicação prática numa democracia constitucional. Outra distinção está em que, enquanto o utilitarismo se assume como uma teoria teleológica, a justiça como equidade define-se como uma teoria deontológica, ou seja, "não interpreta o conceito de justo como maximização do de bem" (Rawls, 2013, p. 46), antes coloca o conceito de justo como prioritário ao de bem. A ideia central da doutrina deontológica é a de que agir eticamente é cumprir o dever, sejam quais forem as consequências que daí decorrerem (Seiça, 2016).

A proposta de justiça de Rawls apresenta-se como a estrutura básica da sociedade, ou por outras palavras, a articulação das principais instituições[34] num sistema único de cooperação. Com um ideal moral de índole ética, esta teoria tem como virtudes primeiras da atividade humana, a verdade e a justiça. Acarreta a proposição da inviolabilidade pessoal que decorre da justiça, a qual, em nenhum momento, pode ser posta em causa, mesmo que isso implique um benefício do bem-estar da sociedade como um todo (crítica ao utilitarismo). De essência distributiva, pressupõe a distribuição dos direitos e deveres fundamentais e a divisão dos benefícios da cooperação em sociedade.

Para adentrar na teoria de justiça como equidade, é fundamental compreender os seus princípios, contudo, antes de os definir há que aclarar que o papel destes princípios é fornecer "um critério para a atribuição dos direitos e deveres nas instituições básicas da sociedade" que traduzam "a distribuição adequada dos encargos e benefícios da cooperação social" (Rawls, 2013, p. 28), bem como, definir alguns conceitos imprescindíveis à sua exposição. O primeiro deles é o *de sociedade bem ordenada*, que o autor apresenta como uma sociedade regulada por uma conceção pública de justiça, em que todos os elementos aceitam os mesmos princípios de justiça e na qual as instituições básicas atendem a esses princípios, existindo esse reconhecimento na esfera pública. Mais ainda, numa sociedade bem ordenada, todos os elementos que dela fazem parte partilham um entendimento comum sobre o que é justo ou injusto. Em segundo lugar, para ser possível chegar aos princípios que

[34] Rawls (2013) define instituições "como sendo um sistema público de regras que determina funções e posições, fixando, por exemplo, os respetivos direitos e deveres, bem como poderes e imunidades" (p.63), ou, em sentido mais geral, como práticas sociais.

constituirão a justiça como equidade é de referir que a teoria segue uma doutrina contratualista, na medida em que se estabelecerá um acordo cujo conteúdo implica a aceitação de certos princípios morais, a que o autor designa por *posição original*. A mesma constitui um *status quo* inicial que garanta que os "acordos fundamentais estabelecidos em tal situação são equitativos" (Rawls, 2013, p. 34). Este acordo seria firmado por indivíduos colocados numa situação inicial semelhante, cobertos por um v*éu de ignorância* que impossibilite saber o seu lugar na sociedade seja ele a sua geração, estatuto social, fortuna, distribuição de talentos naturais e capacidades, inteligência, etc. Nesta posição original, os sujeitos deliberariam sobre os princípios que deveriam orientar equitativamente a atribuição dos direitos e deveres fundamentais e a distribuição dos benefícios.

Determinar os princípios de justiça para a regulação de uma sociedade bem ordenada é uma das principais tarefas ao desenvolver a conceção da justiça como equidade, os quais só poderiam ser escolhidos na posição original (através de um acordo original originado em situação de igualdade) e sob a condição natural de uma teoria contratualista, que subjaz a condição que o conhecimento seja público. É neste contexto que Rawls lança uma conceção mais geral – relativamente aos princípios – de *justiça*: "Todos os valores sociais – liberdade e oportunidade, renda e riqueza, e as bases sociais do respeito próprio – devem ser distribuídos igualmente, salvo se uma distribuição desigual de algum desses valores, ou de todos eles, redunde em benefício de todos" (Rawls, 2013, p. 69). É importante aclarar, neste momento, que na base da distribuição estão, aquilo a que o autor designa por *bens primários*. Nestes, são considerados *bens sociais primários*, os direitos, liberdades e oportunidades, rendimentos e riqueza, bem como o respeito por si próprio ou autoestima. Quanto à saúde, inteligência ou imaginação são denominados por bens naturais, uma vez que não se encontram sob o controlo direto da estrutura básica.

Após o desenho do cenário que compõe os alicerces da teoria e as suas finalidades, torna-se imperativo avançar com os dois princípios que compõem a justiça como equidade. O primeiro deles é o princípio da igual liberdade, "cada pessoa deve ter um direito igual ao mais amplo sistema total de liberdades básicas iguais que seja compatível com um sistema semelhante de liberdades para todos" (Rawls, 2013, p. 239). O segundo princípio visa a distribuição das desigualdades económicas por forma a garantir, em simultâneo: a) o princípio da diferença, postulando que "redundem nos maiores benefícios possíveis para os menos beneficiados" e de forma a que se alcance b) o princípio da igualdade equitativa de oportunidades, "sejam a consequência do exercício de cargos e funções abertos a todos em circunstâncias de igualdade equitativa de oportunidades" (Rawls, 2013, p. 239). Duas notas são de salientar, a primeira tem a ver com a aplicação de uma regra de prioridade que

estabelece uma ordenação dos princípios sendo que o primeiro tem prioridade sobre o segundo, isto é, "as violações das liberdades básicas iguais protegidas pelo primeiro princípio não podem ser justificadas, ou compensadas, por maiores vantagens económicas e sociais" (Rawls, 2013, p. 68). Por sua vez, o princípio da igualdade equitativa de oportunidades tem prioridade sobre o princípio da diferença, ou seja, não se pode maximizar a soma dos benefícios se tal colocar em causa a igualdade de oportunidades. A segunda nota diz respeito ao carácter fortemente igualitário do princípio da diferença, uma vez que só existe ganho, na distribuição, quando o outro sujeito melhorar também a sua posição, mais especificamente, a menos que haja uma distribuição que melhore a situação dos menos favorecidos, uma distribuição igual é preferível. Por conseguinte, e, não obstante os direitos e deveres dos indivíduos e das instituições, as funções do Estado são claras: ser interventivo de forma a reparar as desigualdades imerecidas, sejam naturais ou sociais, fruto da lotaria social e não da responsabilidade do indivíduo - Princípio da reparação - e proceder a uma redistribuição da riqueza favorecendo os mais desfavorecidos - Justiça distributiva (Santos, 2015).

3.2.3. Multidimensionalidade da justiça

Ao considerar insuficiente a noção distributiva de justiça, Young (2022)[35] sustenta que a deliberação de distribuição não se pode restringir à riqueza ou bens materiais que se possuem e se repartem, esquecendo aspetos de identidade ou cultura. Argumenta que, quando as sociedades se tornam multiculturais, o significado político das questões de distribuição material é redutor, para ser substituído por questões de reconhecimento cultural que traduzem a justiça como um conceito multidimensional[36]. Para além da crítica ao paradigma distributivo, Young analisa a debilidade do ideal de imparcialidade liberal que está inerente a este princípio (aquilo que em Rawls se designa por véu de ignorância). Como salienta Valencia-Gutiérrez (2019), a tese de Young adverte que, numa sociedade heterogénea, insistir na imparcialidade é uma tentativa de homogeneização dos grupos, menosprezando, por sua vez, as suas características distintivas. Embebida de um discurso reflexivo, a filósofa defende uma noção ampla de justiça que consiga concatenar três finalidades, "esclarecer o significado de conceitos e questões, descrever e explicar as relações sociais e articular e defender ideais e princípios" (Young, 2022, p. 5).

A teoria de justiça youngiana é fortemente marcada pela valorização da diferença cultural, uma vez que o seu contrário permite a exploração e a opressão dos grupos sociais. Young (2022) alerta que

[35] Uma das obras mais citadas da filósofa Iris Marion Young, *Justice and the Politics of Difference,* data de 1990.

[36] As reivindicações dos movimentos feministas, LGBTIQ+, indígenas ou nacionalistas não se circunscrevem à redistribuição de recursos, clamam por respeito, reconhecimento e valorização das diferenças culturais (Belavi & Murillo, 2016).

a "opressão consiste em processos institucionais sistemáticos que impedem algumas pessoas de aprenderem e usarem competências satisfatórias e comunicativas em ambientes socialmente reconhecidos" (p. 38), assim como a "dominação consiste em condições institucionais que inibem ou impedem as pessoas de participarem na determinação das suas ações, ou das condições das suas ações" (p. 38). Na medida em que o sujeito da justiça são os grupos sociais, Young (2022) acautela que nem todos os grupos sofrem opressão da mesma forma. Como consequência, é com base na análise das relações de opressão que a autora caracteriza aquilo a que designa por as cinco faces da opressão: "exploração, marginalização, carência de poder, imperialismo cultural e a violência[37]" (p. 175). Assim, como condição básica de justiça social, Young advoga um processo democrático pelo meio do qual as estruturas de tomada de decisões são o principal elemento para alcançar a justiça distributiva e de reconhecimento da diferença (Belavi & Murillo, 2020). Deste modo, Young (2022) encontra nas políticas da diferença a potencialidade emancipadora necessária para superar as injustiças, onde a aposta num Estado inclusivo permita a não assimilação dos grupos não dominantes, operando na heterogeneidade (Valencia-Gutiérrez, 2019). Por fim, a diferença atuaria como um desestabilizador das visões da vida dominante, abrindo espaços de decisão política à participação das pessoas com uma visão não dominante.

Ainda que influenciada pela obra de Young, Fraser[38] inicia um debate com a mesma quando apresenta um conjunto de dois textos que espelham uma crítica à justiça de reconhecimento (Valencia-Gutiérrez, 2019). Desta forma, constrói um critério normativo através do qual coloca a participação de todas as pessoas como questão central, eliminando-lhe os impedimentos culturais e económicos.

---

[37] Na perspetiva de Young (1992) a exploração reveste-se de uma relação de poder entre grupos, ultrapassando a esfera da categoria distributiva. De forma resumida, a opressão ocorre quando os resultados do trabalho de um grupo são transferidos para outro, de forma sistemática, permitindo que os esforços dos grupos mais desfavorecidos aumentem a riqueza e o poder dos dominantes.
Nas palavras de Young (2021) a "marginalização é talvez a forma mais perigosa de opressão. Toda uma categoria de pessoas é expulsa da participação útil na vida social, depois potencialmente sujeitas a uma severa privação material e até exterminação" (p. 186). No entanto, para além desta carência de bens que poderão ser mitigados através de programas de redistribuição, Young alerta que dois tipos de injustiça não distributiva se associam à cara da marginalização nas sociedades capitalistas avançadas, provenientes, precisamente dessa provisão de bens. Isto porque, em primeiro lugar, as pessoas que recebem os subsídios ficam limitadas nos seus direitos em comparação com as que não dependem desses subsídios. Em segundo lugar, existe um bloqueio que as pessoas marginalizadas vivenciam perante a possibilidade de exercerem as suas capacidades (como princípio básico de justiça), ficando as mesmas reduzidas aos papéis definidos pela sociedade.
A carência de poder diz respeito à divisão do trabalho entre profissionais e trabalhadores não profissionais. Ainda que ambos os grupos estejam sujeitos à exploração, ser trabalhador profissional promove uma posição com alguma autoridade e estatuto que os não profissionais carecem. Esta diferença é fonte de injustiça na medida em que, como Young constata, "as normas de respeitabilidade na nossa sociedade estão associadas especificamente com a cultura profissional" (1992, p. 190).
Enquanto que as três relações de opressão já mencionadas se referem a formas concretas de poder, intimamente ligadas à divisão social do trabalho e delimitando quem beneficia de quem e definindo quem é dispensável, existe, segundo Young (1992) uma forma de dominação distinta, que os movimentos de liberação já haviam alertado, e que a autora designa por *imperialismo cultural*. Consiste, fundamentalmente, na "universalização da experiência e cultura de um grupo e no seu estabelecimento como norma" (p. 191). Por esse motivo, os grupos dominantes e as suas expressões culturais assumem-se como o normal, o universal, o inatacável. Por seu lado, a existência de uma cultura dominante normalizada provoca quer a invisibilidade quer a exclusão de participação em tomadas de decisão determinantes de cultura coexistentes não normativas. Este aspeto reside naquilo que Young marca como um *paradoxo* visto que o imperialismo cultural envolve o sentir-se invisível ao mesmo tempo, em que se é apontado e percebido como diferente.
Por último, a violência manifesta-se quando a humilhação, o assédio ou mesmo a agressão física submetem de forma sistemática e, acima de tudo, normalizada contra grupos sociais em desvantagem.

[38] Com a obra *Justice Interrupts*, Nancy Fraser (2022) defende uma abordagem que integre os melhores aspetos entre "a política de reconhecimento" e a "política de redistribuição". Ao longo de toda a sua obra, a autora define uma era pós-socialista, cujo espaço de reivindicações se desloca da igualdade material para o campo do reconhecimento.

Para esse efeito, Fraser (2009) opera num sistema bidimensional que requer duas condições prévias de igualdade social que tenha em conta a redistribuição e o reconhecimento. Ao longo da sua obra, a autora destrinça, combinando e hibridizando, sobre os modelos de reconhecimento e redistribuição e a sua mútua irredutibilidade. Resumidamente, Fraser assume que a redistribuição e o reconhecimento devem ser consideradas como duas perspetivas analíticas, rejeitando o facto de serem encaradas como esferas distintas de justiça. Ao contrário de Rawls, Sen ou Dworkin que tendem a reduzir o reconhecimento à redistribuição, na medida em que defendem que a redistribuição de direitos e recursos ajudam a remediar o não reconhecimento, Fraser (2022) defende que estas abordagens não são válidas justificando que podemos ter acesso a liberdades ou recursos relevantes sem sermos capazes de evitar o desreconhecimento, assim como considera que o contrário também não é válido, que o modelo do reconhecimento não abarca o de redistribuição, visto que algumas formas de má distribuição não podem ser reduzidas ao não reconhecimento. Esta má distribuição não pode ser derivada de padrões culturais que poderíamos transformar a fim de alterar os sistemas redistributivos (Fraser, 2022). Por estes motivos, Fraser (2009) acredita que combinar as duas dimensões da justiça social, sem as fundir, permite evitar o reducionismo. Para tal, propõe o conceito de *paridade participativa* para representar o princípio normativo que permita a participação em pé de igualdade de todas as pessoas de uma sociedade, nos espaços públicos de debate. No fundo, implica a possibilidade de qualquer voz ser ouvida, expressando uma identidade plural e pressupondo um valor moral igual, em todos os espaços sociais. Neste contexto, são estabelecidos processos deliberativos que assentam sobre duas condições a que Fraser (2009) designa por objetiva e subjetiva e cuja relação traduz a índole bidimensional de justiça fraseriana: a justiça a duas mãos, sendo que a redistribuição satisfaz a condição objetiva e, por sua vez, o reconhecimento a condição subjetiva. Com a formulação deste princípio normativo, Fraser (2022) conecta a redistribuição à paridade participativa com base no facto do usufruto dos bens materiais ser repartido de igual maneira por todos os membros de um dado grupo, correlacionando o reconhecimento na medida em que os direitos civis são compartilhados indistintamente por todos. A tese desenvolvida por Fraser (2022) faz notar a emergência de interagir na sociedade a partir de um ponto comum que implique uma adequada representatividade. Por outras palavras, alcançar políticas de reconhecimento sustentadas por uma igualdade formal somada com uma igualdade real[39], que se obtenha com a aplicação das condições da paridade participativa, a qual permita fazer com que os grupos atinjam o estatuto de par na participação social ao mesmo tempo que mantêm as suas diferenças (Valencia-Gutiérrez, 2019).

[39] "A igualdade de oportunidades, o acesso ao poder, a possibilidade de participar em diferentes espaços públicos ou o acesso ao conhecimento são alguns bens que também têm de ser redistribuídos" (Belavi & Murillo, 2016, p. 16).

3.3. Construção de um sentido de justiça na educação: A justiça como "primeira virtude" da escola pública

Como até agora se verificou, o conceito de *justiça* foi-se redefinindo ao longo dos séculos, dependendo dos seus autores. No entanto, nele pareceram estar sempre subjacentes os conceitos de *bem*, *liberdade* ou *democracia*. Estarão as noções de *justiça* e *educação* intimamente ligadas? Pelo menos, se considerarmos o *contrariu sensu* de Aristóteles, ter-se-á que averiguar se está conectada com a igualdade de oportunidades, embora na ética aristotélica a noção de *justiça distributiva* seja uma noção de igualdade proporcional ao mérito. Já para filósofos modernos, como Hume ou Rousseau, a relação existente é irrefutável, dada a importância que atribuem à aprendizagem moral. De Kant (2011) extraem-se os direitos inalienáveis de liberdade (hoje entendida como *autonomia*) e da igualdade civil e política como dois princípios que emergem na educação. Como constata Seiça (2016), um dos exemplos é a liberdade de escolha da educação e da escola, bem como o respeito pela multiplicidade de visões, para além da equidade de tratamento dos alunos e da sua autonomia.

Perpassando a esfera filosófica, é também no campo da psicologia do desenvolvimento[40] ou da sociologia[41] que se obtêm noções de *justiça* cujas matrizes têm aplicações educacionais. Na contemporaneidade, estendem-se múltiplos discursos em torno de uma educação orientada pela justiça social (Hytten & Bettez, 2011). Neste rol destacam-se a "educação democrática, pedagogia crítica, multiculturalismo, pós-estruturalismo, feminismo, teoria *queer*, educação antiopressiva, estudos culturais, pós-colonialismo, globalização e teoria crítica racial" (Hytten & Bettez, 2011,p. 9).

No respeitante à escola como estrutura básica da sociedade, há que referir, em primeiro lugar, que Rawls (2013) não apresenta nenhuma teoria educativa nem tão pouco formula nenhuma teoria específica da aprendizagem. Contudo, é possível, através da sua obra, inferir que a primazia dada ao papel das instituições sociais atua como alavanca para assentar a escola pública na base desta teoria. Nas palavras do autor, "não é suficiente que as instituições básicas sejam ordenadas e eficientes, é necessário que sejam justas. E se não o são, é importante que sejam reformadas ou abolidas" (Rawls, 2013, p. 30). Aplicando a teoria rawlsiana à educação e assumindo esta última como indispensável ao desenvolvimento das habilidades e aptidões individuais no contexto de uma sociedade bem ordenada (já defendida por Platão), depreende-se que a educação surge, ela própria como um bem social primário, uma vez que se encontra intimamente associada à autoestima. E, ao ser desta forma, a educação torna-se algo indispensável à concretização de um plano racional de vida a todos os

[40] Kohlberg (2006) associa a justiça aos estádios de desenvolvimento moral.
[41] Durkheim (2016) coloca a justiça como o princípio básico da ordem moral das sociedades.

indivíduos. Como destaca Afonso (2010), este bem social primário, para além de ser necessário a cada cidadão, tem de ser adquirido e construído, não podendo ser redistribuído como acontece com os bens materiais. É neste sentido que as implicações dos pressupostos de Rawls – liberdade e igualdade de oportunidades – se transpõem para a escola enquanto instituição social comprometida com a distribuição de um bem comum. A obrigação ética começa, desde logo, pela garantia de uma escola universal e verdadeiramente inclusiva, capaz de assegurar os recursos materiais e humanos necessários à integração e ao sucesso educativo. Mas afinal, como aplicar os princípios rawlsianos à prática educativa, reconsiderando a escola como uma organização democrática, afirmando-a normativamente como um lugar natural de consolidação de valores de justiça? Uma das possíveis respostas pode ser encontrada, através do princípio reparador, em que o Estado é responsável por assegurar a igualdade de oportunidades de educação e cultura através das instituições básicas sociais, não esquecendo que a justiça é a virtude primária das instituições sociais. Desta forma, o sistema educativo só poderá cumprir com a sua obrigação moral se assegurar a efetiva igualdade de oportunidades consonante com uma verdadeira escola inclusiva. Para tal, as políticas educativas, enquadradas pelo princípio da igualdade de oportunidades, têm de ser orientadas preponderantemente para o acesso aos bens resultantes da educação. As medidas de intervenção deverão assegurar a todos a igualdade equitativa de oportunidades, a todos aqueles que têm o mesmo nível de talento e idênticas motivações, garantindo as mesmas perspetivas de sucesso, "independentemente da posição social que inicialmente ocupem, contribuindo assim para eliminar as barreiras de classe (Seiça, 2011, p. 10).

Por força de alguns limites na aplicação do princípio da igualdade de oportunidades, torna-se visível que as existências de desigualdades iniciais têm de ser rebatidas. Com base no princípio da diferença, em consonância com algumas considerações evidenciadas pelo princípio da reparação[42], Rawls (2013) defende que "para tratar igualmente todas as pessoas, para permitir uma genuína igualdade de oportunidades, a sociedade deve dar melhor atenção aos que nasceram em posições sociais menos favorecidas" (p. 95). Para tal, está justificado a consagração de maiores recursos à educação das pessoas menos inteligentes comparativamente às que são mais, pelo menos nos primeiros anos de escolaridade. A aplicação destes recursos visaria melhorar as expectativas de longo prazo dos mais desfavorecidos. Não obstante, o papel da educação – sob o ponto de vista da diferenciação – vai para além da eficiência económica ou até do bem-estar social, tendo, no seu âmago, o poder de permitir às pessoas de fruírem da cultura e participarem nas respetivas atividades

[42] Segundo este princípio, Rawls (2013) esclarece que desigualdades imerecidas exigem reparação "e como desigualdades de nascimento e de capacidades naturais são imerecidas, elas devem ser de alguma forma objeto de compensação" (p. 95)

da sociedade e, assim, conceder a cada indivíduo a noção do seu próprio valor, indo ao encontro dos bens primários de autorrespeito e autoestima. Tendo em linha de conta este raciocínio, a escola deverá, portanto, implementar "pedagogias diferenciais e a adoção de medidas compensatórias das diferenças entre os alunos" (Seiça, 2011, p. 10).

Um lugar de encontros e cruzamentos de vários mundos[43], racionalidades, lógicas, justiças, justificações: é assim que Estêvão (2012) visiona a escola, embora alerte para o condicionamento a que está sujeita pela génese sociopolítica dos seus contextos específicos. Não deixa de ser verdade, para Estêvão (2012), que a "educação [se] constitui como um dos lugares naturais de aplicação, consolidação e expansão dos direitos humanos cuja negação é especialmente perigosa para o princípio democrático da igualdade civil e política" (p. 80). Em consonância com estes valores, é indiscutível fortalecer uma cultura democrática que produza fórmulas robustas de justiça e de direitos. No entanto, Estêvão (2012) deixa claro que a noção de justiça escolar acarreta um sentido unívoco dominado pelo conceito de *justiça oficial*, o qual, "sob a forma de equidade formal e universal, reproduz, de facto, embora de forma velada, uma pluralidade de formas de injustiça" (p. 83) e que, sob o móbil da igualdade meritocrática de oportunidades, é conivente com as desigualdades provenientes das posições sociais iniciais. Face a este cenário, e defendendo que a escola não pode ser indiferente quer à universalidade da justiça, quer à hierarquia dos seus princípios, o autor propõe uma escola cidadã que situe a educação como basilar ao desenvolvimento do sentido de justiça e do empoderamento individual e social. Por sua vez, uma "educação cidadã e democrática deve ter expressão no currículo através do balancear da dimensão distributiva igualizadora com a dimensão do reconhecimento da diversidade cultural" (Estêvão, 2012, p. 88). Esta ideia aproxima-se aos princípios rawlsianos respeitando, com notoriedade, a igualdade dentro do pluralismo. De forma mais incisiva, Estêvão (2012) acorre a Sacristán para justificar pedagogicamente a necessidade de um currículo que traduza estes princípios. A primeira das orientações passa pela objetivação de um currículo comum, "regido pela ideia de justiça como igualdade de tratamento e de redistribuição" (p. 88). A segunda diretriz abarca um currículo comum, mas que parta da especificidade de cada realidade, que seja integrador sem que com isso coloque nunca em causa a diversidade cultural. Por fim, com vista ao desenvolvimento do currículo, traça a inevitabilidade de uma pedagogia diferenciada, mais política, que priorize os espaços de debate, de crítica, e dê sentido às questões da participação, da justiça e dos direitos, com métodos individualizados que estimulem não só a singularidade como a cooperação.

[43] De acordo com Estêvão (2012) "estes" mundos podem ser "cívico, doméstico, mercantil, empresarial, mundial" (p. 82)

Gau (2005) argumenta que a justiça social na educação é um processo de análise da opressão e de crítica às desigualdades, enquanto se ajuda os alunos a identificar como esses assuntos estão ligados às suas vidas e a envolvê-los em ações intencionadas a desafiar essas estruturas desiguais. Que tipos de escola, currículo, projeto educativo, pedagogias, modelos revertem em função de um ensino cooperativo, menos hierarquizado, dialógico, empenhado na construção de uma comunidade educativa que pense por si própria, consciente, crítica, solidária e criativa? Procurar-se-á, por isso, em primeiro lugar, apurar que tipo de escolas se podem considerar socialmente justas[44] e, em segundo, qual o tipo de ferramentas sociais e educativas substancializam um ensino para a justiça social, quer ao nível do currículo, quer das capacidades que devem ter os docentes. Será condição *sine qua non* para que uma escola seja justa que funcione desde a justiça?

Sendo certo que um dos caminhos é a escola estar ancorada em princípios de justiça, propõe-se analisá-lo sob o eixo polimorfo - redistribuição, reconhecimento e participação. Destaca-se, para esse efeito, o trabalho de Murillo e Hernández-Castilla (2014), inspirado nos trabalhos de Smyth (2011).

Desde o conceito de redistribuição, os autores focam vários elementos que categorizam em três grupos. O primeiro deles tem a ver com uma cultura escolar para a justiça social, que reflete o modo como as escolas partilham objetivos, valores e normas que sejam condizentes com a aprendizagem de cada um, distanciando-se de qualquer forma de exclusão, marginalização ou discriminação. O carácter redistributivo desta premissa concretizar-se-á se, por exemplo, for aplicado um apoio diferencial aos alunos que tenham mais dificuldades em conseguir o máximo desenvolvimento, seja por ordem das suas capacidades, nível socioeconómico familiar, género, origem cultural, língua materna. Um dos pontos evidenciados como fundamentais a esta cultura escolar é o trabalho cooperativo e de apoio mútuo que implique uma liderança cuja equipa diretiva seja distribuída motivando, portanto, um sentido de pertença e de comprometimento de toda a comunidade escolar. O segundo aspeto é o compromisso de toda a comunidade de aprender que transmite o compromisso de aprendizagem coletiva. Os professores trabalham conjuntamente sobre a forma como abordar conteúdos, uma metodologia ou melhoria de estratégias de forma a responder adequadamente à diversidade de alunos receando a mudança, ou a inovação. Ainda no eixo da cultura escolar, a terceira característica é o desenvolvimento de processos de ensino justos que implica o desenho das atividades docentes e tem em consideração a construção integral (cognitiva, afetiva, psicomotora) dos estudantes, tendo em conta a criatividade, o pensamento crítico e o desenvolvimento de valores democráticos. A

[44] Como argumentam Hernández-Castilla e Murillo (2014), nem todas as escolas são iguais. Algumas delas fazem contributos importantes para a promoção da justiça social. No entanto, muitas participam na manutenção das desigualdades. Tal resulta que o papel da escola no que diz respeito às desigualdades depende do seu desempenho, não sendo apenas uma questão exclusivamente estrutural.

índole redistributiva acarreta que o processo de ensino se ocupe da autoestima e da autovalorização de cada aluno. Tal pode ser feito tendo presente que o ensino e a sua avaliação sejam adaptados à diversidade – às características, capacidades, situação prévia ou necessidades de cada estudante - estando justificado sob a proposição de que não há nada mais injusto que o mesmo tratamento para pessoas diferentes. Com a avaliação há que ter especial atenção ao modo como é efetuada, pelo facto de ao mesmo tempo que referenda também sanciona e, portanto, pode levar a perpetuar as desigualdades sociais.

Partindo da dimensão de justiça como reconhecimento, Murillo e Hernández-Castilla (2014) asseguram que uma escola justa se empenha numa mudança cultural na sociedade que demanda uma elevação das identidades não respeitadas. Impreterivelmente, são reconhecidas, respeitadas e valorizadas todas as diferenças, sejam de origem cultural, etnia, raça, identidade de género, expressão de género, orientação sexual. O reflexo educativo passa por a escola ter docentes conscientes da importância da diversidade, bem como da complexidade relativa às suas representações. Ao trabalhar-se para a construção de um currículo multicultural, está-se a participar na transformação das condições culturais e sociais que geram essas representações. Ainda de forma curricular, fomenta-se o pensamento crítico e o raciocínio ético quando se dá conta das situações de desigualdade atuais. Ao existir uma cultura escolar baseada no respeito e solidariedade na diferença, criam-se condições à responsabilidade individual e coletiva e ao empoderamento dos estudantes. É valorizada a bagagem (as suas histórias, experiências ou valores) dos alunos e mantido um vínculo verdadeiro com as famílias baseado numa mútua colaboração.

Sob o espetro da justiça como participação, a natureza organizativa é que mais se destaca da normatividade tradicional. Isto porque, uma escola socialmente justa requer como princípio básico a participação de toda a comunidade educativa quer em aspetos curriculares, quer de organização e funcionamento, refletindo-se em decisões e responsabilidades que se compartem na tomada de decisões de todos em conjunto (docentes, alunos, famílias, pessoal não docente). Face a este cenário, cuida-se a participação integral, tomando especial atenção ao envolvimento e representação dos grupos tradicionalmente marginalizados. Num campo mais específico, as aulas organizam-se democraticamente, tomando decisões conjuntas que envolvam a aprendizagem, seja no que diz respeito à forma de organização, dos conteúdos a desenvolver, de estratégias didáticas ou da avaliação.

A enumeração de todos os fatores fornece uma ideia de como se podem conjugar pedagogias socialmente justas com princípios de justiça social. Ainda assim, é possível elencá-los com seis fases,

sugeridas pelos mesmos autores, que servem para ajudar na conexão do currículo com o ensino da justiça social. Este algoritmo começa com o incentivo ao autoconhecimento e autoestima, pela valorização da identidade e história de cada um dos alunos, desmontando estereótipos negativos e cuidando da dignidade dentro da diversidade. A segunda fase é o respeito pelos outros, levando os alunos a escutar com interesse e empatia as experiências dos seus colegas, ajudando a quebrar mitos estereotipados. Em terceiro lugar, é importante abordar dentro do currículo, aspetos sobre injustiça social. Ao fazê-lo pode-se ajudar os alunos a entenderem melhor as formas como a opressão opera e, consequentemente, como valorizar as suas próprias experiências pessoais. Uma fase posterior seria criar uma ponte com a realidade, mostrando exemplos históricos de ações e lutas concretas contra as desigualdades levadas a cabo por pessoas emblemáticas ou por movimentos sociais. A intenção é despertar consciências e, com isso, colocar os próprios alunos a sensibilizar outros membros da comunidade, sendo esse passo precursor para aquilo que se propõe como última fase – a passagem à ação social – e que surge como um apogeu neste processo. Colaborar ativamente na luta contra as injustiças torna-se uma ideia concretizável se os alunos conseguirem adquirir competências para começar a transformá-las.

Por fim, outro contributo interessante de Murillo e Hernández-Castilla (2014) é a reflexão sobre as capacidades que deve ter um professor que educa para a justiça social. Delas, destaca-se o domínio dos conteúdos, pois apenas dessa forma os docentes são capazes de transmitir uma realidade baseada em factos, contextualizá-la e analisar o conteúdo aos níveis macro e micro. Esta ferramenta é insuficiente se não for apoiada pelo pensamento crítico e análise da opressão, assim como pela capacidade de reflexão pessoal. Esta autorreflexão surge no sentido de o professor ver-se, em si mesmo, como podendo fazer parte do sistema opressivo. A sensibilidade acerca das dinâmicas dos grupos multiculturais mostra-se uma potencialidade para criar um ambiente de aprendizagem que considere as diferentes identidades e perspetivas multiculturais.

3.4. A educação matemática como imperativo ético

Em tom de, por um lado, alarme e, por outro, de reivindicação, Stinson (2014) levanta uma série de questões que fazem recair uma responsabilidade moral e ética sob o educador de matemática. Exemplos disso são: "como pode um professor ajudar uma criança a ir além da consciência das injustiças em direção à análise das injustiças?" (Stinson, 2014, p. 3) e, uma vez que, ter consciência de um problema só por si não é suficiente para resolver o problema, como pode um professor propiciar um estudante a ultrapassar a análise da injustiça para passar a uma "ação de

autoempoderamento face às injustiças" (Stinson, 2014, p. 3)? A resposta que Stinson (2014) atribui a estas indagações remete para a sala de aula como um espaço propício à aplicação dos problemas das injustiças como um catalisador para a aprendizagem das ciências e da Matemática, no sentido de que a resolução de problemas requer fazer ciência e agir. De acordo com Boylan e Woolsey (2015), investigação recente tem identificado a necessidade de articular um quadro teórico que permita guiar os professores num ensino para a justiça social, indo ao encontro dos princípios desenhados pelas dimensões de justiça redistributiva, de reconhecimento e participativa. Porém, assim como é essencial a articulação do quadro teórico também o é de pedagogias que possibilitem um ensino da Matemática para a justiça social. Neste âmbito, o foco central é a importância do desenvolvimento da crítica e o envolvimento para com pedagogias contra-hegemónicas e as relações de sala de aula.

Na visão de Murillo e Hernández-Castilla (2014), a luta contra as desigualdades sociais tem de ser explícita, caso contrário estar-se-á, precisamente, a contribuir para a reprodução das mesmas. Aquiescem Rosa e Amaral (2014) ao insistirem na mitigação das desigualdades sociais através da minimização das desigualdades escolares e defendendo que a escola deverá ajudar na erradicação do determinismo social à nascença. Seguindo estes argumentos, autores como Gutierréz (2008) exploram o papel da Matemática como responsável por vedar o acesso a um nível educacional mais elevado, assim como o seu papel na reprodução da desigualdade e hierarquização social. Até porque, como recordam Jurdak (2016), as práticas utilizadas pelos professores para promover a equidade e uma educação matemática de qualidade são fortemente moldadas pelas políticas escolares, as quais, por sua vez, estão condicionadas pelas políticas governamentais. Há mesmo quem advogue que a ética e a justiça social são os conceitos-chave para a compreensão da equidade e da qualidade na educação matemática (Atweh, 2010). Skovsmose e Valero (2002b) designam por "dissonância intrínseca" (p. 11) ao argumento que o ensino tem, historicamente e em muitos países, uma função social de diferenciação e exclusão. Particularmente, a disciplina de Matemática desempenha um papel regulador na separação entre os aptos e os inaptos da sociedade (Skovsmose & Valero, 2002b), decidindo quem evolui e quem fica para trás.

Na linha destas conjeturas infere-se que o ensino da Matemática reproduz, de modo sistemático, as diferenças sociais, sejam elas de cariz sócio económico, de género ou etnia e, maioria das vezes, independentemente das competências matemáticas *a priori*[45] (Jurdak, 2016). Estas

[45] Exemplos disso são encontrados a vários níveis. Ao nível da linguagem, existem em estudos que aplicam a teoria de códigos de linguagem de Bernstein na prática pedagógica e que indicam que alunos com baixa situação económica são excluídos do sucesso na Matemática pelo uso generalizado de uma linguagem que é apenas compreensível para alunos com alto nível socioeconómico. Também no campo na sociologia, Bourdieu estuda como a preparação de manuais didáticos elaborados para alunos de alto nível socioeconómico é cuidadosa enquanto, para os restantes alunos, os manuais escolares promovem o reconhecimento submisso da superioridade das abordagens matemáticas (Jurdak, 2016).

desigualdades sociais são também espelhadas nas condições materiais em que se processa o ensino e a aprendizagem da Matemática, originando resultados diferenciados. Esta diferença tende a aumentar à medida que aumentam as desigualdades iniciais, fazendo emergir uma "persistente lacuna de desempenho" (Jurdak, 2016, p. 19) que é metodicamente identificada em estudos dirigidos a grupos de alunos provenientes de contextos desfavorecidos sejam eles de dimensão socioeconómica, etnia, raça, género ou de idioma. Embora tudo o referido seja verdade, também é verdade, segundo a OECD (2021), que alunos que revelam vantagens ao nível socioeconómico tendem a superar os seus colegas provenientes de lares ou contextos com carência socioeconómica, em maior escala do que quando comparados com outros grupos de alunos. Este cenário retrata que o peso do estatuto económico e social é mais significativo para explicar diferenças no desempenho matemático em comparação com outros fatores.

Colocando em destaque o peso do fracasso escolar no seio do ensino da Matemática, Pais et al. (2012) trazem à luz que este fracasso é uma questão ideológica e não de mau funcionamento do sistema. Justifica-o evidenciando que o desenvolvimento de competências matemáticas faz parte de um sistema de créditos na educação, que pode ou não converter em êxito escolar. Por outras palavras, o insucesso a Matemática traduz-se numa condição do próprio sistema que permite a separação clara de quem adquire valor dos que redundam em desvalorizados.

3.5. A procura de uma educação matemática que proporcione empoderamento[46]

A ligação da Matemática e da educação matemática à cultura, democracia, política ou poder começa a ser introduzida no início dos anos 80, do século passado, gerando um sobressalto académico, mas não só (Valero et al., 2015). Desassociar a importância do desenvolvimento de competências matemáticas nos cidadãos como competências imprescindíveis "à mão de obra necessária para os mercados e o sistema capitalista" (Valero et al., 2015, p. 291) foi um desafio nas correntes educativas à época. Existem, desde então, muitas referências que indicam que educação Matemática pode simbolizar empoderamento, mas que também pode significar supressão. Pode ajudar à inclusão ou, pelo contrário, levar à discriminação e exclusão (Skovsmose & Valero, 2002a). Daí que se possa concluir que os papéis sociopolíticos da matemática não são nem fixos, nem determinados, embora muitos sejam questionáveis (Skovsmose, 2020). Com este cenário, apresentam-se conceitos como *matemacia* ou *literacia matemática* para designar uma competência que inclui a leitura crítica de

[46] Existem diferentes referências que sugerem a possível relação entre aprendizagem Matemática e empoderamento (Skovsmose, 2020). Exemplos disso serão abordados ao longo deste capítulo.

um contexto sociopolítico (Alrø & Skovsmose, 2021; Frankenstein, 2012), bem como se abordam as influências da Etnomatemática para transcender uma perspetiva educacional matemática eurocentrista.

3.5.1. O poder emancipatório da educação matemática

Tendo presente que existe uma distinção entre *ensinar Matemática* e *educar matematicamente* (Matos, 2005), vários investigadores dedicam-se a aprofundar esta dualidade que muitas vezes pode ser antagónica. Tomando como inspiração os trabalhos de Paulo Freire, esgrimem-se os primeiros argumentos no sentido de aceitar que a aprendizagem e o ensino da matemática podem conceber-se como uma alfabetização matemática que permite ler o mundo criticamente com a Matemática (Valero et al., 2015). Além disso, também é estendida a noção de *não-neutralidade à educação matemática*, reconhecendo-se que a mesma cede, de alguma maneira, "a interesses ideológicos, políticos, económicos ou culturais" (Guerrero, 2008, p. 3). Olhando criticamente para o conhecimento matemático e a forma como transcendeu a ciência e a tecnologia para se tornar instrumento das estruturas de poder, faz com que seja impossível desconectar a Matemática de uma postura ética (Skovsmose et al., 2015).

Neste sentido, os movimentos que surgiram como uma reflexão às dimensões cultural, crítica e política da educação matemática, fizeram-se ressoar. Desenvolveram-se em várias direções, uns chamaram-lhe *matemática crítica*, outros *ensinar Matemática para a justiça social* e outros ainda lhe atribuíram o termo *Etnomatemática*. O primeiro ponto que têm, indiscutivelmente, em comum é reconhecerem que a EM é um domínio político (Frankenstein, 2009; Gutstein, 2018; Skovsmose, 2023). É de realçar que o referencial teórico pelo qual se guiam aglomera os aspetos sociais e políticos da aprendizagem matemática, embora os contextos geopolíticos através dos quais cada uma destas posições se desenvolveram tenham sido diferentes – três abordagens que partilham o pressuposto de que a educação matemática como prática social implica que não seja desconectada de valores democráticos, de equidade, justiça social ou inclusão e, portanto, dotam as competências matemáticas com um traço político que ajuda a desmontar as estruturas de poder na sociedade (Valero et al., 2015). A ser assim, requer levar a literacia a um nível mais alto do que apenas o desenvolvimento da competência da leitura e da escrita. Mais concretamente, o poder emancipatório inerente à literacia matemática deve-se às suas dimensões crítica e política que, ao permitirem "empoderar e tornar as pessoas conscientes da sua condição de classe, com o objetivo de poderem emancipar-se de tais relações" (Valero et al., 2015, p. 292), possibilitam que se faça frente às injustiças sociais.

Na década de 70, D'Ambrosio foi precursor do Programa Etnomatemática, fundamentando-o naquilo que afirma ser os dois principais objetivos da educação. Promover a criatividade nas pessoas ao mesmo tempo que se ajuda a elevar, ao máximo, as suas capacidades, salvaguardando, contudo, que não se incuta uma obediência cega e uma aceitação de regras ou condutas que violem a dignidade humana. Paralelamente, fomentar a cidadania através da transmissão de valores e mostrando direitos e responsabilidades na sociedade, sempre com o foco numa criatividade responsável. O autor exemplifica-o quase em tom de ironia: "não queremos que os nossos alunos se tornem cientistas brilhantes, criando armamentos e instrumentos de opressão e desigualdade", para reforçar as dinâmicas do capitalismo (D'Ambrosio, 2015) ou atuando "como *blade runners* da classe dominante" (p. 26).

Numa dimensão ética da educação matemática, D'Ambrosio (2015) propõe um currículo que condense três vertentes que considera fornecerem os instrumentos comunicativos, analíticos e tecnológicos necessários para a vida do século XXI. "Um novo *trivium*, estruturado para fornecer capacidades críticas de comunicação, capacidade crítica de lidar e analisar símbolos e familiaridade crítica com a tecnologia" (p. 27), a que chama *Literacia, Materacia e Tecnoracia*[47]. O Programa Etnomatemática surge como resposta à criação desse novo currículo, tendo por base o ideal da construção de "uma civilização que rejeite desigualdade, arrogância e intolerância" sob uma ótica educativa que priorize o "empoderamento dos setores excluídos das sociedades" (D'Ambrosio, 2007, p. 29). A Etnomatemática é, muitas vezes, denominada por *Programa Etnomatemática*, porque emerge de pesquisas. Caracteriza-se, resumidamente, por possuir, de forma intrínseca, a ética da diversidade, uma vez que contribui para reestabelecer a dignidade cultural e oferecer as ferramentas intelectuais para o exercício da cidadania. É também, por sua vez, um sistema de conhecimento que fomenta uma relação mais harmoniosa entre humanos e entre humanos e a natureza. Para entender as suas implicações pedagógicas, é necessário clarificar alguns conceitos, nomeadamente o de *cultura*. Aqui, a cultura abarca a arte, ciência, história, medicina, literatura, música, filosofia, religião, ciência ou tecnologia, bem como é entendida pela partilha entre sistemas de conhecimento, numa perspetiva transcultural e transdisciplinar. Acima de tudo, é fundamental, em Etnomatemática, reconhecer as contribuições de outras culturas e a importância da dinâmica dos encontros culturais. Tal pressuposto traduz-se numa tentativa de entender e explicar vários sistemas de conhecimento[48], em diferentes

[47] No original, "Literacy, matheracy and technoracy" (D'Ambrosio, 2007, p. 28)

[48] Como sistemas de conhecimento, D'Ambrosio exemplifica "matemática, religião, culinária, vestir, futebol e várias outras manifestações práticas e abstratas da espécie humana" (2007, p. 30).

realidades contextuais[49]. D'Ambrosio argumenta esta contextualidade desconstruindo a Matemática que vai para além da ideia ocidentalizada da matemática académica, invocando que "lidar com o espaço, o tempo, classificar, comparar" bem como "os códigos e técnicas para expressar e comunicar as reflexões sobre esses comportamentos são inegavelmente contextuais" (p. 30). Não é por acaso que François e Stathopoulou (2012) apresentam a ideia de que a Etnomatemática pode ser vista como uma reação ao eurocentrismo. Destaca-se, por último, que o reflexo deste projeto nas salas de aula de Matemática é notado quando se exige claramente que o pensamento crítico seja uma ação política (Appelbaum et al., 2022).

Na senda da imersão da educação crítica a partir da Teoria Crítica, origina-se, na Europa, o ambiente propício ao surgimento da educação matemática crítica ainda nos anos 70, do século passado. Uma sua versão estende-se aos Estados Unidos e, na década de 80, a primeira pessoa a publicar artigos científicos sobre o tema foi Marilyn Frankenstein[50]. Os estudos desta autora são particularmente importantes no que diz respeito à análise do uso da Matemática escolar como possíveis sistemas de opressão de classe e de raça. Neste sentido, é de salientar que a EMC é influenciada pela dimensão política da Etnomatemática, uma vez que procura a "descolonização que se dá em grupos sociais e o respeito pelas suas raízes e origens sem desrespeitar o outro" (Guerrero, 2008, p. 5)

Frankenstein (2012) usa a designação literacia matemática crítica para reforçar a ideia de que a literacia matemática é mais do que a capacidade para calcular, é a destreza de usar números para clarificar certos assuntos, sustentar ou refutar opiniões. Estas competências envolvem a análise crítica da forma como os números e os procedimentos matemáticos são utilizados. Uma das máximas que reflete os seus estudos é "precisamos saber o significado dos números que descrevem a realidade para aprofundar a nossa compreensão do mundo" (Frankenstein, 2012, p. 1). Mais do que isso, especifica que a Matemática tem de ser trabalhada ou vivida, ou ensinada, no contexto real, no contacto direto com os problemas reais, uma vez que "a diferença entre problemas matemáticos da vida real são reais problemas matemáticos da vida real" (Frankenstein, 2009, p. 114)

---

[49] Um dos exemplos de um projeto no campo da Etnomatemática foi o projeto Fronteiras Urbanas (FU) que surgiu em 2010 e foi desenvolvido por uma equipa de investigadores do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Apresentou-se como um movimento etnográfico crítico centrado no desenvolvimento de uma política educativa emancipatória por meio de uma observação de conhecimentos presentes em comunidades multiculturais. Neste caso, envolvia a população das Comunidades Piscatória e Bairro. Estas duas comunidades registaram, ao longo de meio século, diversos problemas de inclusão como a inexistência de água canalizada. Através do desenvolvimento de atividades do projeto FU, procurou-se atender as necessidades educacionais dessas populações *in situ*. E é com esses problemas do dia a dia que entra em ação a organização de parâmetros que suportam um currículo de educação multicultural, baseada na realidade sócio cultural e económica dessas comunidades. Este projeto proporcionou aos habitantes do Bairro aulas de Alfabetização Crítica, Inglês, Francês, Crioulo, Matemática ou Eletricidade. O currículo proposto baseou-se na literacia, materacia e tecnocracia, assumindo-se como uma estratégia de ação educativa que possibilita o domínio equitativo de conhecimentos necessários para uma sobrevivência ativa e participativa, que vai além do ler, escrever e contar.

[50] Em *Critical Mathematics Education: An Application of Paulo Freire's Epistemology,* Frankenstein (1987) analisa e aplica a teoria da educação de Paulo Freire no contexto de um currículo de Matemática para a classe trabalhadora adulta urbana.

Reforçando a ideia da não neutralidade na educação, Frankenstein (2009) advoga que a própria resolução de problemas matemáticos não é neutral, destacando a importância de perceber quais os aspetos das evidências quantitativas são factos matemáticos e quais são políticos. Para o justificar, sustenta-se no facto de que muitos dados são apresentados, pelos governos, por exemplo, como se fossem descrições neutras da realidade, ofuscando, no entanto, as escolhas políticas que produziram esses mesmos dados[51].

Em solo europeu, Skovsmose[52] foi pioneiro em agregar três influências distintas e reproduzir estudos que forjaram as raízes da educação matemática crítica, a saber: a já mencionada teoria crítica da escola de Frankfurt, as obras de Paulo Freire, a pedagogia da libertação e a educação bancária e a Etnomatemática (Valero et al., 2015). Skovsmose inicia os seus trabalhos na década de 1980, tendo publicado o seu primeiro livro em inglês, "*Towards a philosophy of critical mathematics education*[53]", em 1994. Nesta obra, o autor discorre, primeiramente, sobre a noção de crítica, conectando-a não só com a sua origem semântica, crise[54], mas também com a sua raiz histórico-filosófica[55]. Nesta incursão, Skovsmose (1999) aponta caminhos interpretativos para chegar a uma ponte em que analisa o facto de uma crise poder desembocar numa situação crítica e daí advir a necessidade de reação[56] (Skovsmose, 1999, p. 16). E é nesta reação que reside a condição para o compromisso ético de qualquer tipo de crítica (Skovsmose, 1999, p. 20), bem como o objetivo de uma atividade crítica perspetiva uma emancipação. Adquirir liberdade contra estereótipos de pensamento é entendido como uma liberdade emancipatória e esse deve ser um princípio subjacente à educação. Deste ponto até à educação crítica é um pequeno passo, dado que será a premissa para a resposta à questão colocada, por Skovsmose (1999, p. 22), "que instituições sociais deverão reagir face à natureza crítica da sociedade"? Desta ideia deriva a seguinte tese: "se as práticas e a investigação educativas são críticas, então devem abordar os conflitos e as crises na sociedade. A educação crítica deve revelar as desigualdades e a repressão de qualquer tipo" (p. 22). Imbuído nas ideias de Giroux (que, por sua vez, se inspira nas ideias freireanas) quanto à teoria emancipatória da alfabetização, que assinala um

[51] Para exemplificar este argumento, Frankenstein (2009) descreve que, quando o Governo distingue os trabalhadores que pertencem à força de trabalho dos trabalhadores que contam como desempregados, reescrever esta informação em percentagem é um algoritmo matemático que tem uma única resposta e não levanta qualquer questionamento. A política sobre a qual se deve questionar tem a ver com a decisão do Governo de contabilizar trabalhadores a *part-time* como trabalhadores a tempo inteiro e, simultaneamente, não contabilizar trabalhadores que procuraram trabalho durante mais de um ano e não encontraram, como desempregados (p.119).

[52] Ole Skovsmose é um investigador de nacionalidade dinamarquesa cujos trabalhos tornaram-se uma referência para muitos investigadores. Valero (1999) descreve-o como um "livre pensador multifacetado" (Prefácio, p. VIII).

[53] Na verdade, este livro recolhe o trabalho de mais de uma década do autor, reunindo artigos como *Mathematical education versus critical education* de 1985, *Mathematical education and democracy* de 1990 ou *Democratic competence and reflective knowing in mathematics* de 1992.

[54] Skovsmose (2007) relaciona, etimologicamente, *crise* e *crítica*, que derivam da palavra grega *krinein*, evoluindo, mais tarde para, respetivamente, *krisis* e *kritikos.*

[55] O autor percorre os estudos da era Iluminista, aprofundando obras de filósofos como Kant ou Hume. Dá especial atenção à obra de Marx até chegar Teoria Crítica da Escola de Frankfurt (Skovsmose, 1994).

[56] Skovsmose (2007) escreve que "uma situação crítica ou uma crise conduz a uma necessidade de ação e envolvimento, isto é, uma necessidade de crítica" (p.73).

desenvolvimento de condições para que as pessoas se situem na história e reconheçam a sua posição na sociedade, Skovsmose (2007) formula a hipótese de se introduzir o termo *alfabetização matemática* ao mesmo tempo que questiona se com ele se poderá obter o propósito desta potenciação. Além disso, qual será a importância de uma educação matemática como base para a participação dos estudantes numa vida democrática? Ao partir para este questionamento, Skovsmose (2007) incorre numa saga cronológica à procura de respostas para ideias democráticas básicas e competências democráticas até chegar à questão fulcral "que instituições sociais podem assumir o trabalho de desenvolver uma competência democrática" (p. 45)?

Veja-se, então, como se quadram quer a teoria crítica, quer a freireana para dar origem ao termo que Skovsmose (2007) designa por *matemacia* e que, no seu sentido lato, se traduz por como uma competência pela qual nos tornamos capazes de interpretar e entender as características da nossa realidade social. No seu sentido estrito, destaca-se o paralelismo, na sua essência, com a noção de aptidão literária de Freire, cuja intencionalidade com o seu programa de alfabetização foi ir mais além do que ensinar pessoas analfabetas a lerem e escreverem, senão também criar um suporte para o desenvolvimento de cidadãos críticos capazes de interpretarem uma situação social como estando aberta à mudança. De igual modo, poder-se-á pensar a matemacia como uma competência que inclui não apenas referências à Matemática, como também sustenta uma base para a cidadania crítica. A matemacia surge como resposta à formulação levantada por Skovsmose (2007) para representar, essencialmente, três competências. A primeira é lidar com noções matemáticas, a segunda aplicar essas noções em diferentes contextos e, a terceira, refletir sobre essas aplicações, não esquecendo que a componente reflexiva é essencial para "conferir à matemacia um poder radicalizado" (Skovsmose, 2020, p. 41). Retomando a teoria emancipatória de Giroux, Skovsmose (2020) sintetiza, eloquentemente, que a literacia matemática, como constructo radical, tem de ser enraizada num espírito crítico e num projeto de possibilidades que permita aos indivíduos o entendimento e a transformação da sua sociedade, tornando-se numa pedra basilar para a emancipação social e cultural (Skovsmose, 2020). Outro ponto de vista, que ajuda à caracterização desta noção, tem a sua inspiração num dos conceitos desenvolvidos por Adorno, da Escola de Frankfurt, *Mündigkeit*[57], cuja essência está conectada quer com a ideia de crítica, quer com a de democracia. Portanto, a ligação vinculada entre a competência democrática e a capacidade crítica, que se traduz num único termo por *Mündigkeit*, é um objetivo essencial a uma educação crítica. Daí que Skovsmose (2007) saliente o

[57] Este conceito tem um duplo sentido, como explica Skovsmose (1999). O primeiro refere-se aos direitos legais e responsabilidades adquiridas por uma pessoa ao atingir a maioridade. O segundo sentido tem a ver com ter a capacidade de uma pessoa falar por si mesmo.

sentido de educar para a *Mündigkeit,* relacionando-o com a posição que a alfabetização matemática pode tomar neste contexto.

3.5.2. A inquietação ética da educação matemática crítica

Considerando que a função da educação matemática não pode ser determinada pela mera introdução de diretrizes gerais na elaboração do currículo, Skovsmose (2000) atreve-se assumir que a grande incerteza que representa a natureza crítica da educação matemática é o primeiro passo até à educação matemática crítica. Daí que o autor fundamente a educação matemática cítica (EMC) nos desafios inerentes a uma posição crítica da educação matemática e rejeite que a mesma possa ser entendida como um ramo da educação matemática, uma metodologia de sala de aula ou constituída por um currículo específico. Entre as várias formulações que Skovsmose (2007) levanta, uma delas surge como representativa das inquietações da EMC e tem a ver como o ensino da Matemática é parte de um processo de globalização e *guetorização*. Por outras palavras, quais são os papéis possíveis que a educação matemática pode desempenhar tendo em conta o contexto sociopolítico e que tipo de oportunidades pode oferecer aos alunos. Neste plano, Skovsmose (2007) aponta o modo como a Matemática pode ser legitimadora, simultaneamente, de inclusões e exclusões. A EMC pretende analisar este paradoxo, preocupando-se como se estabelecem as relações no seio das escolas sujeitas a um processo de globalização, principalmente, junto dos potencialmente excluídos.

O conceito de globalização pode-se referir a todos os aspetos da vida, mas é, desde logo, uma mistura de tendências políticas, económicas, culturais e da comunicação. Como não podia deixar de ser, Skovsmose (2007) sustenta-se em Baumann (1999) para retratar o facto de a globalização deter conotações tanto negativas quanto positivas, para alguns, a globalização é o que nos une quando estamos felizes, para outros é a causa da nossa infelicidade. Já a noção de guetorização correlaciona-se com exclusão social e a que Skovsmose (2007) recorre a Castells para definir como "o processo pelo qual certos indivíduos e grupos são sistematicamente barrados ao acesso às posições que poderiam capacitá-los a uma vida autónoma dentro dos padrões sociais delimitados pelas instituições e valores num dado contexto" (2007, p. 73). Skovsmose (2007) acrescenta que o gueto moderno funciona como "um depósito de lixo para pessoas que não têm nenhum papel a desempenhar na economia informacional" (p. 63), o que traduzindo na linguagem baumaniana, são pessoas *descartáveis*. Assim sendo, globalização implica inclusão ao conectar grupos, regiões, empresas, mas também significa exclusão uma vez que as conexões feitas são parciais e servem interesses particulares, pelo que se induz que globalização e guetorização são aspetos do mesmo processo. E,

neste contexto, as escolas materializam-se como locais para o binómio inclusão e exclusão. Por essas razões, é chegado o ponto de Skovsmose (2007) se apoiar em Volmink para concatenar estas ideias com o facto da educação matemática desempenhar uma divisão entre aqueles que se tornarão incluídos e os que serão excluídos da sociedade informacional. A Matemática passa a funcionar como uma espécie de guardiã da porta de entrada, que decide quem pode ou não passar, quem serão os que participam e serão, portanto, privilegiados ou, pelo contrário, os que serão excluídos.

Na prática, não é de estranhar que as principais linhas de investigação da EMC se prendam, precisamente, com os desafios inerentes à natureza crítica da educação matemática. Estes assuntos estão relacionados ora com o contexto social dos alunos, as salas de aula multilingues e multiculturais, os padrões comunicativos em sala de aula, a ideologia da certeza[58] ou a distribuição de recursos (Skovsmose & Borba, 2004). Transversalmente, eclodem três direções de trabalho: a primeira tem a ver, precisamente, com a crítica à Matemática na sociedade; a segunda, com a relação entre educação matemática, democracia, equidade e inclusão *versus* exclusão; a terceira, com a criação de novos cenários educativos (Skovsmose, 2020). Isto porque, na visão de Skovsmose (2007), a EMC deve ser indissociável das questões de igualdade e, ao considerar quer os "solos pretéritos" quer os "horizontes futuros dos alunos" (p. 76), tornar-se na pedagogia da esperança.

Dependendo do contexto geopolítico, a abordagem da Matemática crítica tem tido outros ângulos do que apenas os já referidos, reforçando, por esse motivo, o peso político, histórico, económico, cultural no próprio conhecimento matemático. Valero et al. (2015) mapeiam alguns exemplos: na África do Sul, os estudos de Vithal (2003) incidem sobre o papel da educação matemática no contexto da transformação democrática do país, depois do regime do *Apartheid.* Na Colômbia, um grupo de professores criou um cenário de investigação através do qual abordaram os problemas de um grupo de crianças, de sétimo ano, de uma escola pública, numa zona de fronteira social, na cidade de Bogotá. Nesse projeto, partiram das experiências pessoais dos alunos para interligá-las com elementos do currículo de Matemática, permitindo-lhes, dessa forma, munir a Matemática de significado, na medida que foi dada a oportunidade de se estabelecer uma ponte com a sua realidade social. Na Catalunha, Gorgorió e Planas (2005) analisam as interações sociais em turmas com uma percentagem alta de imigrantes. Nos seus estudos, as investigadoras preconizam que nas salas de aula de Matemática são valorizados alguns comportamentos, em detrimento de outros, nas práticas discursivas. Porém, os resultados demonstram que, numa turma multicultural, coexistem

[58] A ideologia da certeza é, para Skovsmose (2007), uma atitude para com a Matemática, "um respeito exagerado em relação aos números". (p. 81)

diferentes modelos quer no que diz respeito à interpretação, quer no uso de normas sociais e sociomatemáticas.

3.6. Educação matemática para a justiça social

A transição da educação matemática crítica para a educação matemática para a justiça social (ainda que a segunda mantenha a primeira como pano de fundo) dá-se quando a "matemática é especificamente usada como uma ferramenta analítica para examinar e desafiar as injustiças sociais" (Stinson et al., 2012, p. 79).

Ensinar matemática para a Justiça Social é um conceito que adquire os seus primeiros contornos num contexto onde a segregação racial é vivida, em larga escala, no dia a dia escolar, como é o caso de professores e investigadores, nos Estados Unidos, que trabalham com jovens sino-americanos e afroamericanos ou famílias de imigrantes latinos (Valero et al., 2015).

Torna-se, por conseguinte, importante descortinar que ao ser a Matemática uma prática do conhecimento, é inerentemente política, logo, como todas as outras práticas humanas, está enredada numa teia de dominação e poder. Com esta perspetiva, Gutiérrez (2013) fundamenta, seguindo o pendor girouxiano, que as práticas de ensino e de aprendizagem da Matemática não são neutras, uma vez que transmitem uma série de conhecimentos, socialmente valorizados, e que geram, no entanto, não só diferenciações, mas também distinções entre os que conseguem alhear-se com esses valores e os que não.

De forma sucinta, a matemática para a justiça social baseia-se em desenvolver duas premissas: uma delas é a matemática crítica, a qual inclui criar consciência sociopolítica que permita analisar criticamente assuntos sociais através da matemática, a segunda incide na matemática dominante, que possibilite incrementar a proficiência dos alunos que os ajude a serem certificados em testes padronizados e a manter o *status quo* (Bartell, 2018; Gutiérrez, 2012).

3.6.1. Objetivos e componentes pedagógicos

Acreditando que as circunstâncias o exigem, Gutstein (2016) clama a necessidade de propiciar as condições para que a cidadania faça uso da Matemática como uma arma na luta pela justiça social e pela transformação do mundo. Incidindo neste conceito, Gutstein (2006) defende que a Matemática deve ser um meio para os alunos aprofundarem a compreensão dos contextos sociopolíticos dos quais fazem parte. Através do processo de estudarem as suas realidades – usando a Matemática – os alunos fortalecem a compreensão conceptual e procedimentos matemáticos. Assim, uma das componentes

de ensinar matemática para a justiça social é o intuito de usar a Matemática para reconfigurar a sociedade no sentido de a tornar mais justa.

Fundamentando-se em Freire, Gutstein (2006) defende que a educação matemática deve servir o propósito da "libertação da opressão" (p. 7) e argumenta que o ensino deve ser o veículo para a emancipação e mudança social. Paralelamente a Gutiérrez, Gutstein (2006) identifica dois conjuntos dialeticamente relacionados de objetivos pedagógicos: um conjunto incide na justiça social e o outro concentra-se na Matemática. Apresenta como objetivos pedagógicos de justiça social: ler o mundo com a Matemática; escrever o mundo com a Matemática; e desenvolver identidades sociais e culturais positivas. *Ler o mundo com a Matemática* significa usar a Matemática para entender as relações de poder, as desigualdades de recursos e de oportunidades, as discriminações explícitas entre diferentes grupos sociais (raça, género, língua). *Escrever o mundo com a Matemática* entende-se como usar a Matemática para reescrever o mundo – transformar o mundo (Gutstein, 2006). *Desenvolver identidades culturais e sociais positivas* significa associar a instrução Matemática ao meio sociocultural dos alunos, fornecendo-lhes simultaneamente o conhecimento matemático necessário para sobreviver na cultura dominante.

Quanto aos objetivos pedagógicos matemáticos, Gutstein (2006) define duas ramificações, a primeira é o poder matemático por meio da dedução de generalizações, da compreensão conceptual e da exploração de problemas com múltiplas soluções; a segundo é a obtenção o sucesso académico dos alunos do ponto de vista tradicional, bem como a mudança de postura face à Matemática. Isto é, visa o entendimento da Matemática, por parte dos alunos, não como uma série de regras e leis desconexas, com tendência à mecanização, mas como uma ferramenta analítica para a interpretação de fenómenos complexos do mundo real.

Por sua vez, Gonzalez (2009) apresenta uma definição para EMJS que compreende quatro vertentes. A primeira delas é o acesso a um ensino da Matemática de qualidade para todos os alunos; a segunda componente que Gonzalez advoga consiste em recentrar o currículo matemático nas experiências dos alunos, tomando relevo as vivências dos alunos de contextos historicamente marginalizados; em terceiro lugar, e de modo idêntico a Gutstein, é destacada a importância de se constituir a Matemática como uma ferramenta à crítica sociopolítica; por fim, uma quarta vertente é usar a Matemática para reorganizar radicalmente e reconfigurar a sociedade de forma a tornar-se mais ética e justa.

Num estudo francês (IREM de Grenoble, 1980), foi colocada a uma criança de 7 anos a seguinte questão: "tens 10 lápis vermelhos no teu bolso direito e 10 lápis azuis no teu bolso esquerdo.

Quantos anos tens?" Ao que a criança respondeu: "Tenho 20 anos." Isto não significa que a criança não saiba quantos anos tem, nem que não tenha entendido o conceito matemático. No entanto, parece existir uma espécie de contrato social entre a Matemática e os estudantes que implica a necessidade de usar os números apresentados, para resolver quaisquer problemas (Frankenstein, 2009, p. 113).

Parafraseando Matos (2005), equacionar o ensino escolar como a mera transmissão de factos matemáticos já não faz sentido no mundo atual, o que leva este autor a distinguir "*ensinar matemática*" (p. 5) da ideia de "*educar matematicamente*" (p. 5), confrontando estas duas perspetivas. A primeira, define o ensino da Matemática como a tarefa de fazer com que os alunos aprendam Matemática apenas como um conjunto de factos recontextualizados, na prática escolar, alegando a sua utilidade a outras disciplinas ou na vida futura. Este argumento é designado por "ressonância intrínseca" por Skovsmose e Valero (2002b, p. 24) e representa a crença de que as aprendizagens matemáticas tradicionais farão, pelo menos algum dia, ressonância no desenvolvimento pessoal e social dos alunos. Educar matematicamente constitui um instrumento que confere aos modelos socialmente criados e adotados uma dimensão muito importante, com o intuito de incluir formas de aprender a lidar com esses modelos. Então por que será que se articula, com facilidade, a Matemática e as ciências exatas e raramente a Matemática e as ciências sociais? Tentando responder à questão destaca-se, primeiramente, a mensagem de alerta, lançada por Peterson (2013), quanto ao isolamento da Matemática, ou seja, a mesma pode ser transmitida como algo irrelevante, exceto para atingir o sucesso escolar, tornar-se um investigador, um matemático ou um gestor. Em segundo lugar, os alunos aprendem a encarar a Matemática como algo abstrato, ou não são encorajados a considerar seriamente as consequências sociais e éticas, como a Matemática é frequentemente usada na sociedade. Por último, se os alunos não forem ensinados como a Matemática é aplicada nas suas vidas, é-lhes privada uma ferramenta importante que os ajuda a participar plenamente na sociedade. Segundo Gutstein (2003), tendo como base o currículo nacional, é possível desenvolver projetos que utilizem o mundo real, para que os alunos possam desenvolver uma orientação diferente em relação à Matemática e se tornem mais motivados para estudá-la e usá-la.

Tendo em consideração uma certa natureza de tendência baumaniana e dependente das experiências dos alunos, vividas em contexto de privilégio ou de marginalização, Kokka (2019) efetua uma investigação que pretende analisar a influência do *background* social numa educação matemática para a justiça social. Os resultados indicaram que os alunos provenientes de um meio privilegiado aprenderam a ser mais empáticos e ganharam, de facto, uma maior compreensão, embora teórica, de justiça social. Os alunos com origens historicamente marginalizadas responderam às atividades com

fortes reações emocionais revelando, precisamente, que as questões sociais invocadas pelas mesmas correspondiam às suas próprias vidas. Desta forma, para que a Matemática para a justiça social faça sentido, Kokka (2019) propõe que se adotem diferentes suportes dependendo dos diferentes contextos, pelo que a consciência sociopolítica do professor é fundamental para que sejam desenvolvidas atividades de Matemática e justiça social relevantes e sensíveis às origens dos alunos.

3.6.2. Uma pedagogia de múltiplos recursos

Como denota Jurdak (2016), a noção de ativismo na educação matemática tem as suas bases teóricas na educação matemática crítica e, portanto, está fortemente associada à ideia da dialética entre ação e reflexão[59]. Esta abordagem pedagógica expressa-se de diferentes formas, seja baseada em projetos, problemas orientados ou resolução de problemas, modelação matemática, entre outras e visa conectar a educação matemática à sociedade com o intuito de gerar consciência e ação. Manifesta-se, tendencialmente, em grupos específicos de alunos e professores de maneira a contrariar a marginalização e procura viabilizar um vínculo claro com o currículo e as práticas educativas de Matemática.

Turner (2003) relatou como os alunos, do ensino básico, desenvolveram a sua compreensão de medida e razão, investigando a densidade geográfica dos alunos da escola, comparativamente com escolas de outros distritos e, interpretaram como essa situação os afetava. Posteriormente, Tracey (2007) descreve como os alunos pertencentes ao clube de matemática usaram a mesma, como uma ferramenta para lutar contra um plano de fechar a escola. Para isso, avaliaram os custos de construção de uma nova escola e subsequente sobrelotação.

Em Gutstein (2016), encontram-se exemplos de como pode tomar forma o conceito de *ativismo* na educação matemática. O investigador estrutura um modelo capaz de aglutinar três formas de conhecimento: da comunidade, crítico e clássico[60]. Com base neste modelo, Gutstein (2007) põe em prática projetos que incorporem "os três C's" (p. 110), pelo que estes projetos estão enraizados em sólidas ideias matemáticas (Clássico), exploram assuntos de justiça social (Crítico) e valorizam a história e experiência dos alunos (Comunidade). Gutstein (2016) exemplifica esta conexão através da

[59] Greer e Skovsmose (2012) usam o termo "agência crítica" para traduzir a dialética entre ação e reflexão (p. 6).

[60] Por *conhecimento da comunidade*, Gutstein (2007) entende a componente do conhecimento que está relacionada com a cultura, aquilo que as pessoas já sabem e trazem com elas para a escola. Este conhecimento inclui o conhecimento que está presente individualmente e nas comunidades e que, normalmente, foi aprendido fora da escola. O conhecimento da comunidade envolve como as pessoas entendem as suas vidas, as suas comunidades, relações e própria sociedade. O conhecimento crítico é o conhecimento acerca das condições sociopolíticas de cada um, incluindo o conhecimento sobre o porquê de algo ser como é e sobre as raízes históricas, económicas, políticas e culturais de vários fenómenos sociais. O conhecimento clássico geralmente refere- se ao conhecimento abstrato, formal, da escola. Ao conhecimento matemático clássico é reconhecido o seu poder e capital cultural, o qual os alunos deverão desenvolver por diversas razões. Os alunos precisam desse conhecimento para sobrevivência pessoal, familiar e da comunidade, especialmente os alunos que provêm de grupos historicamente marginalizados.

descrição do trabalho que desenvolveu com um grupo de alunos de uma escola pública de Chicago. A escola a que se refere foi construída em 2005, após uma longa luta dos residentes (que culminou com uma greve de fome de 19 dias, por parte de um grupo de imigrantes mexicanos, em 2001) que reivindicavam pela construção de uma nova escola para a comunidade. Esta escola está dividida em quatro mais pequenas, cada uma com um número compreendido entre 350 a 400 alunos. A escola que Gutstein (2016) descreve intitula-se "SOJO"[61] (p. 454) e a sua comunidade escolar abrange duas comunidades cujos bairros são fronteiriços: *Little Vilage* e *North Lawndale*, comunidades latina e afroamericana, respetivamente, sendo que a proporção que frequenta a escola é 30% de Afroamericanos e 70% de Latinos. Devido à componente histórica de Chicago de segregação e exclusão racial, a distinção racial é uma realidade. Embora, na escola, os alunos convivam, existem tensões reais, no exterior, entre ambas as comunidades. Em 2006, um político latino local propôs um referendo para que os limítrofes do bairro fossem redesenhados e cujo objetivo seria excluírem da escola os estudantes Afroamericanos de *North Lawnlade*. Estes alunos, compreensivelmente assustados, falaram com os professores sobre a situação. A equipa de professores de Matemática desenvolveu, como resposta, um projeto matemático intitulado *Boundaries Project,* cuja questão central era "Qual a solução justa para ambas as comunidades?" Apesar de todas as contrariedades, os alunos envolveram-se — conhecimento da comunidade. No âmbito do desenvolvimento do conhecimento crítico, os dois pontos que se pretendia que examinassem eram: quando é que as diferenças entre as comunidades passaram a prevalecer às semelhanças e, principalmente, quando é que as escolas para todos os alunos deixaram de ter suficiente qualidade? Matematicamente, as questões incidiram sobre vários aspetos. Os alunos estudaram alguns dados do Censos para averiguarem como seria possível alargar os limites do bairro *North Lawndale*, de forma a que os alunos provenientes desse bairro tivessem a mesma possibilidade de serem aceites que os alunos de *Little Village.* Com este propósito, calcularam as probabilidades das possibilidades de admissão para ambas as comunidades, usando diferentes razões de alunos Afroamericanos e Latinos. Examinaram dados de outras escolas próximas, assim como mapas de área local. Finalmente, matematizaram o problema sobre terem um novo edifício para todos os alunos das duas comunidades.

Questões de importância global e local exigem perspetivas críticas em várias disciplinas, nomeadamente na Matemática (Nicol et al., 2019). Por esse motivo, a abordagem para integrar assuntos de justiça social deve ser feita encontrando referências no currículo nacional ao pensamento crítico ou à resolução de problemas (Gutstein & Peterson, 2013), e praticá-la, se possível, com a

[61] "Greater Lawndale/Little Village School for Social Justice", também conhecida como SOJO (Gutstein, 2016, p. 454)

periodicidade de dois a três projetos ou atividades por período. Neste âmbito, poderá existir uma lista quase infindável. Gutstein (2013)[62] desenvolveu um projeto no qual os alunos analisavam os dados da separação ou discriminação racial nas operações *stop*. Ao nível matemático estão implícitos os conceitos de proporcionalidade, probabilidade, aleatoriedade, tamanho da amostra, a lei dos grandes números e valor esperado. Sem compreender esses conceitos, é difícil perceber que são parados mais motoristas latinos e afroamericanos do que seria de esperar. Dentro do campo político, económico e social, Gutstein (2006) propõe a exploração de assuntos como os seguintes: perceber se as eleições presidenciais de 2004 dos EUA foram "roubadas", estudar o afastamento geográfico de populações de minorias, proceder à análise de género dos deputados de Assembleia (Municipal, Parlamentar), usar a Matemática para olhar criticamente o modo como é determinada a taxa de desemprego. Peterson (2013) relata a forma como inicia o ano letivo, pedindo aos seus alunos, do 5.º ano, que explorem o modo como é usada a Matemática nas suas casas e comunidades, aliciando-os a elaborarem uma autobiografia. Como ponto de partida, os alunos escrevem um ensaio a que intitulam de "o eu numérico" (p. 11) através do qual tentam descrever como os números estão conectados às suas vidas. Posteriormente, constroem algumas linhas cronológicas para representar quer datas de aniversários, quer representar as suas atividades diárias e cronologias de vida. Com estas atividades os alunos desenvolvem competências de raciocínio lógico e crítico, para entenderem as relações que se estabelecem entre os números, distância, tempo, frações, decimais. Além disso, Peterson (2013) implementa vários projetos ao longo do ano, com os seus alunos, os quais incidem sempre na ligação entre a Matemática e assuntos de justiça social: pobreza e saúde mundial; desemprego e tendências de trabalho; salário mínimo; assuntos com os quais os alunos trabalham percentagens, estabelecem comparações, desenham gráficos, tiram conclusões. Outro interesse por parte deste investigador é utilizar a Matemática para entender a História, pelo que leva os alunos a analisar as contribuições de várias culturas e civilizações não europeias para o pensamento matemático. Ainda com este objetivo, Peterson (2013) considera que é importante que os alunos compreendam que os números não são acessórios permanentes da nossa estrutura social, mas que podem variar ao longo do tempo como resultado dos movimentos sociais, tais como os movimentos dos direitos civis ou dos direitos das mulheres. Sob o jugo "Viver a álgebra, viver o salário", Dean (2013, p. 67) apresenta este projeto para alunos do 8.º ano, através do qual os objetivos eram, primeiramente, levar os alunos a aplicarem as competências matemáticas, seguindo uma postura ética, em assuntos de justiça social conectados às

[62] A este projeto Gutstein (2013, p. 16) intitulou de "*Driving while black or Brown*".

suas vidas como é o caso de um salário decente. Em segundo lugar, motivar os alunos para a aprendizagem da Álgebra, concretamente para o estudo de funções.

Berg et al. (2018) dedicaram-se à fusão pedagógica entre Estatística e assuntos de justiça social desenvolvendo, nesse âmbito, um projeto que tivesse por base a interseção de ambos os conteúdos. As atividades que criaram para esse fim envolveram construção e interpretação de gráficos retirados de artigos reais, através dos quais os alunos tinham de comparar distribuição de riqueza em determinados países, analisar densidades de tráfego numa cidade do Brasil, pensar sobre a justiça implícita no caso do julgamento de um jovem negro constituído por um júri totalmente branco.

Como argumentado por Gutstein (2007) e Gutstein e Peterson (2013), os benefícios de integrar assuntos de justiça social no currículo de Matemática são múltiplos e significativos, quer para os alunos, quer para os professores. Os alunos poderão reconhecer o poder da Matemática como uma ferramenta analítica para perceber e potencializar a mudança do mundo, em vez de olhar a Matemática meramente como uma coleção de regras desligadas para ser memorizada; aprofundar o seu conhecimento de assuntos locais, nacionais ou globais; tornarem-se mais motivados para desenvolver o pensamento crítico e a capacidade para resolver problemas. Para os professores, as potencialidades dessa integração vão para além de diferenciar o currículo ou a criação de um currículo interdisciplinar. Ao desenvolver a aprendizagem de uma forma contextualizada, os professores poderão aprender sobre os seus alunos e sobre as comunidades onde ensinam, facilitando e promovendo, desta forma, o envolvimento dos alunos. Nunca descurar que defender os valores da sociedade e fornecer perspetivas sociais global autênticas é fulcral para incentivar os alunos a pensar globalmente e a agir localmente (Voss & Rickards, 2016).

3.6.3. Desafios em aprender a ensinar matemática para a justiça social

Uma das implicações, segundo Kokka (2019), de pôr em prática justiça social e competências para o século XXI como pensamento crítico, resolução de problemas, criatividade, inovação, liderança ou compreensão intercultural, reside em criar salas de aula onde os alunos têm autonomia para investigar o seu mundo em comunidade. Para providenciar essas salas de aula, é prioritário elaborar e adaptar tarefas nesse sentido para os alunos, constituindo um aspeto da prática pedagógica que requer formação profissional contínua. Por conseguinte, Nicol et al. (2019) questionam acerca das possibilidades e dos desafios envolvidos quando se aprende a ensinar Matemática por meio da justiça social. Para responderem a esta questão, os autores empreenderam um estudo centrado nessa temática, tendo chegado a três principais conclusões. A primeira delas tem a ver com navegar entre

questões locais e globais e entre a Matemática e assuntos interdisciplinares, bem como os desafios que são colocados aquando o desenho de tarefas a desenvolver. Os resultados demonstram que, enquanto uns criam problemas começando com um conceito matemático e só posteriormente desenvolvem um contexto, outros há que dão origem a um problema que tenha por base uma questão social, examinando, *a posteriori*, quais os procedimentos matemáticos que se ajustam à resolução da questão. Além disso, verificou-se que o objetivo de desenvolver problemas locais e conectados com os interesses e realidades dos alunos levou a privilegiar questões locais sobre questões globais. A segunda conclusão prendeu-se com o papel da justiça social ao longo dos níveis de ensino. Nicol et al. (2019) averiguaram que os professores de Matemática de nível superior manifestaram que as oportunidades em compatibilizar o currículo com questões sociais eram limitadas, assim como o tempo para cumprimento do mesmo. Por último, os resultados apontam que um dos desafios é equilibrar a experiência do educador com um possível desconforto. Como relembram os autores, explorar a Matemática por meio de questões interdisciplinares e sociais requer aquilo que na ótica freireana se designa por "curiosidade epistemológica" (p. 1014) o que, neste caso, se traduz em estar aberto para aprender a ler e a escrever o mundo com a Matemática. A vertente de desconforto pode surgir quando existe um pêndulo a balançar entre as possibilidades de obter um ensino matemático para a justiça social que se torna, simultaneamente, "curativo e perturbador" (Nicol et al., 2019, p. 1014), no sentido de estar em diálogo e em conflito, como refere Vithal (2012). Isto porque uma pedagogia que pretenda reescrever o mundo pode gerar, ocasionalmente, formas contraditórias de o fazer. Ao que Nicol et al. (2019) acentuam, recorrendo à máxima freireana, que "não há ensino sem aprendizagem" (p. 1014), pelo que os professores iniciantes nesta pedagogia são, à vez, alunos e professores.

De uma forma geral, Simic-Muller (2019) adverte para os reptos de aprender e de ensinar Matemática para a justiça social, salientando a necessidade de reconhecer os desafios que, muitas das vezes, obstaculizam este trabalho. Um deles é que a construção de atividades baseadas em dados do mundo real consome tempo e, portanto, muito investimento por parte do professor, tendo presente também que nem sempre é simples conectar certos tópicos matemáticos com as experiências reais. O fator tempo é ainda destacado no que diz respeito ao tempo necessário para abordar os contextos ou, de modo inverso, o diálogo de sala de aula pode ficar muito focado na questão do mundo real e pouco na Matemática. Por fim, pode surgir resistência, por parte dos alunos, em abordar contextos reais, pois consideram que a Matemática deve ser mantida afastada das questões sociais.

Voss e Rickards (2016) realizaram um estudo, com uma turma de nono ano, com o intuito de analisar a aplicação de uma pedagogia de ensino da Matemática, usando temáticas de justiça social.

Sobre esta base, construiu-se um projeto que consistia em que os alunos comparassem os seus estilos de vida com famílias de outros países e que usassem a Matemática para investigar sobre as desigualdades. Os resultados indicaram que a par de um maior envolvimento dos alunos na sua aprendizagem, melhoria do desempenho académico assim como capacidade de conexão da Matemática com a realidade social, também surgiram alguns desafios no que diz respeito à prestação dos professores. Entre eles, destacam-se realizar o projeto e, simultaneamente, abranger o currículo bem como o tempo extra, necessário para preparar os recursos didáticos. No que diz respeito ao tempo disponível para a realização do projeto, o departamento de Matemática da escola apenas concedeu um tempo por semana. Por sua vez, esta condição gerou nos alunos uma certa confusão, pois tinham alguma dificuldade em vincular os conteúdos de uma aula para a seguinte. Ainda assim, como existia a pressão do cumprimento do programa para a preparação de um exame final nacional, a decisão do departamento foi irrevogável. Os resultados do estudo demonstraram que, dado este constrangimento, o projeto foi concluído em amplitude, mas não em profundidade, aferindo-se que os professores podem encontrar resistência na implementação desta pedagogia, devido a um currículo sobrecarregado, sendo obrigados a negociar e a fazer concessões. Noutro plano, o tempo requerido para a planificação e preparação de materiais surge como uma eventual adversidade encontrada ao ensinar usando pedagogias de justiça social, havendo relatos que indicam que a quantidade de tempo dedicada à preparação destas aulas é três vezes superior às restantes.

3.7. A marca normativa da educação matemática para a justiça social nos documentos nacionais

É inquestionável que o reflexo normativo dos valores de justiça na educação tem um pendor europeísta, com os documentos de primeira linha a serem produzidos pela União Europeia e pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE). Ambas as instituições lançam publicações e relatórios que ora estabelecem metas e objetivos, ora analisam os resultados e situações atuais dos diversos Estados-Membros, salvaguardando, porém, que "cada país da UE é responsável pelos seus próprios sistemas de educação e formação. A política europeia neste domínio visa apoiar a ação a nível nacional e ajudar a fazer face a desafios comuns" (OECD, 2024).

Passando, então, a território nacional, é preciso não esquecer que a orientação oficial máxima pela qual se rege a democracia portuguesa é a Constituição da República Portuguesa, na qual são pormenorizados direitos educativos inalienáveis, enumerados num vasto rol de artigos. Nesta linha, surge a *Lei de Bases do Sistemas Educativo Português*, de 1986, definindo, no seu ponto 2, do Artigo

1.º, o direito à educação como um dos princípios básicos para o progresso social e a democratização da sociedade, e advogando a garantia do direito a uma justa e efetiva igualdades de oportunidades no acesso e sucesso escolares. Da parte dos sucessivos Ministérios de Educação e Ciência (MEC), o discurso educacional foi sendo vinculado às orientações oficiais que iam sendo produzidas, matizando, mais ou menos indelevelmente, as ideologias partidárias. De substrato comum, pelo menos a partir de década de 90, os diferentes Governos manifestaram responsabilidade pela melhoria da qualidade da educação, ainda que em termos avaliativos, e preocupação pelo combate ao abandono escolar precoce e à exclusão escolar (Seiça, 2016), no seio de um Estado que continuou a exercer, de modo centralizado, as funções reguladora e distributiva. Já em inícios do novo milénio, as políticas educativas viram-se para uma tentativa de minimização do papel do Estado e, a acrescentar à modernização das escolas e à ideologia da inclusão, ergue-se a bandeira da autonomia escolar e da necessidade de maior flexibilização do sistema educativo (Estêvão, 2012). Fruto desta conjuntura, sobressaem um conjunto de projetos de diferenciação pedagógica e medidas de promoção do sucesso escolar que harmonizam o ramalhete composto pelas orientações curriculares e normativos legais. Um dos exemplos é a implementação do programa Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP), que surge inicialmente em 1996, mas é gradualmente estendido, em 2009, a todo o país (Despacho Normativo 55/2008), destinado a comunidades educativas particularmente desfavorecidas económica ou socialmente, eventualmente marcadas pela pobreza e exclusão social, mais expostas a casos de violência, indisciplina ou insucesso escolar. Na base encontra-se uma perspetiva compensatória e de territorialização, dirigida para uma atenuação das vulnerabilidades sociais presentes em ambiente educativo. Compensatória, porque parte da discriminação positiva para trabalhar no sentido de instaurar equidade na redistribuição de recursos e da garantia de um mínimo de competências. O princípio de territorialização das políticas educativas remete para a tendência de descentralização do poder do Estado nas tomadas de decisão das escolas, sublevando a transferência de competências para o poder local – autarquias e agrupamentos –, permitindo a mobilização dos atores locais numa ação conjunta que dê sentido a um projeto comum (Roldão et al., 2011). A par do programa TEIP, surgiram outras medidas de promoção do sucesso educativo como a metodologia Fénix, a metodologia Turmas Mais, ou o projeto-piloto de inovação pedagógica, mecanismos estes que visavam fomentar o sucesso e a qualidade das aprendizagens dos alunos, tendo como veículo principal a autonomia escolar.

Na área da Educação para a Cidadania, o MEC (2017a) fez transparecer, por decreto, a preocupação para com a existência de uma transversalidade que envolve diferentes dimensões da

educação para a cidadania, partindo da ideia que, enquanto processo educativo, a educação para a cidadania contribui para a formação de pessoas responsáveis, autónomas e solidárias. O documento reforça a importância de introduzir as diferentes componentes da educação para a cidadania, quer nas áreas disciplinares, quer nas atividades e projetos (Santos, 2015).

Quanto ao referencial educativo mais recente, o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (2017b) tem como imperativo assegurar a coerência do sistema educativo, após ter sido alargado o número de anos de escolaridade obrigatória. Este quadro de referência fundamenta-se em oito princípios. Um deles é a sua base humanista, defendendo que a "escola habilita os jovens com saberes e valores para a construção de uma sociedade mais justa" (MEC, 2017b, p. 8). Destaca-se ainda o princípio da inclusão, apresentando a "escola obrigatória como sendo de e para todos, promotora da equidade e democracia" (MEC, 2017b, p. 8). Com este documento depreende-se a necessidade de espelhar os valores e as competências que se pretenderia que o jovem tivesse, à saída da escolaridade obrigatória, e através dos quais se tornasse um cidadão "munido de múltiplas literacias que lhe permitam analisar e questionar criticamente a realidade, avaliar e selecionar a informação, formular hipóteses e tomar decisões fundamentadas no seu dia a dia" (MEC, 2017b, p.10). Verifica-se, com este documento, que continua a haver preocupação para com o desenvolvimento de valores de equidade, justiça, democracia, pensamento crítico. No entanto, este referencial parece ser mais revelador de uma sólida base humanista, comprometido com o ideal de cidadão livre, crítico e autónomo. Mais ainda, apresenta aos professores a responsabilidade de tornarem os jovens nesse cidadão ideal, enumerando um conjunto de ações determinantes a esse florescimento.

Por tudo o precedido, para todos os professores, que assumem uma postura ética preconizada pelo *Estatuto da Carreira Docente*, será um objetivo adequar uma pedagogia de equidade e justiça social ao cumprimento dos currículos nacionais (Santos, 2014). Da mesma forma que, como sublinha Bartell (2018), um dos objetivos da EMJS é fornecer os conteúdos obrigatórios abrangidos pelo currículo nacional. Ora, este princípio vai ao encontro, precisamente, do que é estabelecido pelo *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO)*, quando apresenta um conjunto de ações relacionadas com a prática docente que pressupõem uma mudança nas práticas pedagógicas e didáticas presentemente. Uma dessas ações é "abordar os conteúdos de cada área do saber, associando-os a situações e problemas presentes no quotidiano da vida do aluno ou presentes no meio sociocultural e geográfico em que se insere, recorrendo a materiais e recursos diversificados" (MEC, 2017b, p. 24). Destaca-se, de igual modo, a referência à organização do ensino, estimulando a

utilização crítica de distintas fontes de informação. Por fim, é de salientar, que uma das ações sugeridas é a de "promover de modo sistemático e intencional, na sala de aula e fora dela, atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores" (MEC, 2017b, p. 24).

Nas Aprendizagens essenciais da Matemática AEM (MEC, 2021) para o 3.º CEB, que entram em vigor no ano letivo 22/23, definem-se uma multiplicidade de objetivos de aprendizagem consoante seis tópicos de capacidades matemáticas transversais. Neste documento, definem-se quatro objetivos relacionados com as conexões matemáticas que pontuam pela valorização dada à interpretação matemática do mundo real e o seu poder para prever e intervir sobre situações do mundo real.

3.8. Interseção entre a educação matemática para a justiça social e a modelação matemática crítica

O itinerário até aqui percorrido pretendia tornar visível a multiplicidade de vertentes e intersecionalidades que se podem estabelecer ao trabalhar no campo da EMJS, as quais só são possíveis no seio de um quadro de diálogo entre investigadores que, partindo de diferentes situações de marginalização não só educativas, contribuem para a análise de formas de mitigação e combate às injustiças estruturais. Dado que os pontos de contacto entre a EMJS e a modelação matemática Crítica não se podem negar, julga-se conveniente assinalar quatro características que, indiscutivelmente, as conectam. Parte-se da ideia de que ambas assentam na abordagem de Wright (2016) que defende que o ensino da Matemática deve fornecer experiências relevantes, significativas e que envolvam os alunos para a Matemática, ao mesmo tempo que possibilitam maiores oportunidades para os alunos mais desfavorecidos a poderem realizar, em alternativa a um ensino da Matemática que contribua para a reprodução das desigualdades e perpetuação dos privilégios na sociedade.

Uma das características que detêm em comum é inserirem-se numa perspetiva sociopolítica que, como Jurdak (2016) põe em evidência, estabelece a relação entre Matemática, discurso e poder. Recorrendo, uma vez mais, a Skovsmose (2024), a ambição educativa imprimida pelo termo *matemacia* é tornar a Matemática numa linguagem de desconstrução social, encontrando-se em Araújo (2009) que o uso dos modelos matemáticos pode contribuir nesse sentido. Como enfatiza Simic-Muller (2019), a expressão gutsteiniana, *ler o mundo com a Matemática* não vem com um manual de instruções, no entanto, a modelação matemática parece ser uma boa forma de o abordar em sala de aula, em vez de um conjunto de algoritmos predeterminados. Ainda neste sentido, as pesquisas indicam que, dentro da perspetiva de modelação sociocrítica, a investigação recai não sobre as

competências matemáticas dos alunos, mas, precisamente, nas capacidades dos mesmos para serem modeladores críticos e reconhecerem o seu próprio poder (Abassian et al., 2019).

Incorporar as experiências dos alunos para enfatizar a relevância cultural da Matemática (Wright, 2015) é um dos objetivos de uma educação crítica, assim como permitir que as suas vozes sejam ouvidas e as suas histórias sejam contadas também é justiça (Simic-Muller, 2019). A modelação matemática crítica junta-se a esta premissa ao postular o desenvolvimento do pensamento crítico através do uso da Matemática em situações reais e não fictícias, privilegiando discussões reflexivas que se dão em espaços de interação, em que professores e alunos interagem verbalmente sobre uma atividade de modelação. Na base desta potencialidade encontra-se aquilo que é descrito, em pedagogia progressista, como pedagogia culturalmente relevante (Rubel & Nicol, 2020), que se traduz por uma perspetiva cultural de aprendizagem, substanciada pelo princípio de que o currículo e o ensino devem basear-se nas experiências socioculturais dos próprios alunos e não numa padronização cultural branca de classe média. Esta ação pedagógica procura trazer o *background* dos alunos para a sala de aula, construindo atividades curriculares orientadas e induzidas a partir do contexto cultural dos alunos, conhecidos como fundos de conhecimento dos alunos (Oliveira et al., 2016).

Um pendor crítico associado a um ambiente educativo pressupõe que o mesmo combine ação e reflexão e, por esse motivo, a educação matemática para a justiça social e a modelação matemática crítica estão assentes na ideia de agência crítica. O termo é usado por Greer e Skovsmose (2012) para designar o diálogo concomitante entre a ação e a reflexão. Ora, um dos objetivos da educação matemática para a justiça social é utilizar o poder da Matemática para reconfigurar a sociedade, tornando-a mais ética e justa. A mesma tendência é assumida pela modelação matemática crítica ao embandeirar o pressuposto de que a Matemática pode influenciar ativamente a tomada de decisões na sociedade, tendo como linha orientadora o papel social que a educação matemática pode desempenhar. É preocupação de ambas as vertentes proporcionar investigações matemáticas que desenvolvam a agência crítica e permitam os alunos participar de uma cidadania ativa. Num plano mais etéreo, Skovsmose (2007) considera problemático quando a modelação e aplicações são descritas em termos de representação, na medida em que a conceção de modelação matemática como representação está relacionada com uma perspetiva dual do mundo, na qual o modelo matemático apenas representa uma parte dessa realidade. Ao invés disso, o autor defende que a modelação deveria não só cartografar a realidade, mas estabelecer-se como uma "Matemática em ação" (p. 116), uma Matemática que faça parte de uma tomada real de decisões. Os motivos

assinalados revelam potencialidades comuns para a conjunção dialética onde Matemática e poder interagem e de onde emergem os conceitos de envolvimento, ação e mudança.

Por último, ambas respondem à demanda de um enquadramento normativo cujo reflexo curricular é a reivindicação do sucesso e qualidade das aprendizagens com base numa educação que garanta a igualdade de oportunidades. Em consonância com esta linha, de que forma pode o ensino da Matemática atender a esta chamada? Veja-se que o documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) destaca que "os contextos dos problemas poderão variar desde experiências familiares dos alunos, relativas às suas vidas pessoais ou ao dia a dia escolar, até aplicações envolvendo as ciências e o mundo do trabalho" (p. 57). Não obstante, relatórios nacionais, baseados em estudos internacionais de avaliação de desempenho dos alunos, mostram que os resultados dos alunos portugueses são particularmente fracos em itens que mobilizam a capacidade de encontrar estratégias para a resolução de problemas, como o são em itens onde se solicita a construção de textos de carácter argumentativo (IAVE, 2015). No que diz respeito ao contexto familiar, os dados recolhidos em estudos internacionais, mostram que ter mais recursos disponíveis em casa traduz-se em efeitos significativos nos desempenhos dos alunos, bem como encarregados de educação mais escolarizados produz alunos com melhores desempenhos. Assim, a EMJS e a modelação matemática crítica encontram-se necessariamente unidas na construção educativa, mas também social, de um caminho que mitigue as desigualdades iniciais e que responda, efetivamente, a uma maior igualdade de oportunidades, ao mesmo tempo que apresentam uma saída para a descontextualização do ensino da Matemática.

3.9. Síntese do capítulo

Nas palavras de Giroux (2014), a educação contemporânea tornou-se um conjunto de políticas que desvalorizam a aprendizagem, uma educação colapsada no treino. O autor é categórico em denunciar que o sistema neoliberal produziu a ideia de que o currículo deve ser organizado em torno de testes, na criação de alunos passivos e na aplicação de uma pedagogia de repressão. Por seu lado, Lima (2019) critica a subordinação da educação à economia e à competitividade, mas também a circunscrição do próprio conceito de cidadania a um mercado de liberdades económicas, orientado para a constituição dos consumidores. Com este cenário, levanta-se a questão: que relação educativa poderá existir que não implique unicamente o endoutrinamento? Procurando perceber se existe uma resposta contra-hegemónica que vá nesse sentido, situou-se a discussão no plano da pedagogia crítica.

Na última década, o termo justiça social popularizou-se entre o discurso mediático, perpassando a sua habitual esfera sociofilosófica e degenerando, com frequência, numa vulgarização do seu conceito. Deste modo, lançou-se um périplo pelas teorias de justiça, perspetivando obter uma linha ariadniana que conseguisse trazer à luz as contribuições para o plano da educação. Deste modo, tendo sido analisada a multidimensionalidade do valor de justiça, reconhece-se como sustentação fundamental à prática educativa as suas vertentes de redistribuição e de reconhecimento. Direcionando o olhar, primeiramente, para a justiça sobre a forma de equidade, de Rawls extraem-se três pontos que se consideram essenciais para a responsabilidade educativa, tendo por base a igualdade de oportunidades: i) igualdade no acesso; ii) igualdade no ensino; iii) igualdade no conhecimento. Estas igualdades só serão possíveis segundo o Princípio da Diferença, sob a dimensão de redistributiva. Da justiça reconhecimento (Fraser, 2009) entendem-se os alunos como sujeitos principais da aprendizagem, num ambiente de sala de aula que fomente um sentido de comunidade e identidade onde todos partilhem opiniões, com recurso à resolução de problemas que valorizem diferentes contextos socioculturais.

Assim, entrelaça-se o anterior descrito com a especificidade da educação matemática (EM), no seio de uma perspetiva crítica. Na verdade, nem toda a referência da EM como ferramenta à cidadania está enquadrada de uma visão crítica. Isto, porque esta interpretação crítica consiste em muito mais do que a participação cívica na sociedade. O repto está em questionar o funcionamento do poder e da utilização da própria Matemática como elemento de diferenciação, e, portanto, de segregação de alunos e pessoas que, por sua vez, constituem injustiça e exclusão (Valero et al., 2015). Diferentes nomes são dados ao estudo crítico dentro da EM: matemática radical (Frankenstein, 1987); matemacia (Skovsmose, 2020); literacia matemática (Gutstein, 2006). Estes autores conjugam-se no sentido de defender que é possível conectar o currículo com as realidades sociais dos alunos e que, por conseguinte, os alunos melhorarem as suas capacidades para utilizar as representações matemáticas em situações do quotidiano (Gutstein, 2016), num caminho que espelhe, verdadeiramente, a multidimensionalidade da justiça na educação.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Este capítulo tem por finalidade, de acordo com os objetivos de investigação, apresentar e sustentar teoricamente as opções metodológicas que delinearam o presente estudo, identificar e caracterizar os seus participantes, bem como clarificar os procedimentos de recolha de dados adotados. Reserva-se um espaço para fundamentar as tarefas de modelação como suporte do estudo. Por fim, são elencadas as técnicas de análise dos dados.

4.1. Opções metodológicas

Com este estudo procura-se averiguar o contributo da modelação matemática e da Justiça Social na aprendizagem de funções de alunos do 3.º CEB. Com essa intenção são traçados objetivos específicos relativos ao significado que os alunos atribuem à aprendizagem de funções, através da modelação matemática, pautada por assuntos ligados a questões de equidade e cidadania. Para responder aos propósitos definidos adotou-se uma metodologia de índole qualitativa assente na prerrogativa de posicionar o investigador no seu contexto natural, implicando uma atividade construída num conjunto de práticas interpretativas, auxiliando-se de uma série de representações, com vista a examinar, detalhadamente, os fenómenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem (Denzin & Lincoln, 2018). Em termos concretos, parte-se de um quadro teórico que reúne princípios axiológicos de justiça, pedagogia crítica e modelação matemática que permita orientar a observação e interpretação das relações estabelecidas entre os atores em estudo e das práticas ocorridas no seio escolar, atribuindo-lhes um significado, ou como indica Flick (2009), que proporcione "examinar interações e comunicações que se estejam a desenvolver através da sua observação e do registo" (p. 8). A pesquisa qualitativa reveste-se, assim, de um diálogo permanente entre a epistemologia e a metodologia, assentes em cinco níveis de atividade, como asseguram Denzin e Lincoln (2018): investigador e investigado cruzam-se enquanto sujeitos multiculturais; aplicação de paradigmas teóricos e perspetivas interpretativas; definição de estratégias de investigação; fase de métodos de recolha e análise do material empírico; e, por fim, a arte da interpretação e apresentação dos resultados. Neste sentido, a abordagem qualitativa ajusta-se a este estudo na medida em que lança o trajeto a percorrer para caracterizar o contributo da modelação matemática na valorização da justiça social durante a

aprendizagem de funções. Até porque as nove características da pesquisa qualitativa elencadas por McMillan e Schumacher (2014) encaixam-se no perfil da presente investigação, criando diretrizes para a sua concretização, tendo sido seguidas: estudo do comportamento no seu contexto natural; consideração dos vários fatores do contexto; recolha dos dados diretamente da fonte onde ocorrem; descrição detalhada da narrativa; ênfase dada ao processo; análise indutiva dos dados; perspetivas dos participantes; um *design* emergente e dinâmico; e, por último, a noção da complexidade da compreensão dos acontecimentos (McMillan & Schumacher, 2014).

Atendendo à visão de assumir a construção do conhecimento como um produto crítico dos significados que os alunos outorgam aos conceitos apreendidos com o cenário de aprendizagem, este estudo assume um paradigma interpretativo (Amado, 2017; Erickson, 1986). Indo ao encontro do apresentado por Aires (2015), uma abordagem interpretativa abre espaço à construção de conhecimento no seio de uma ontologia relativista, de uma epistemologia subjetiva e de um conjunto naturalista de procedimentos metodológicos. Por outras palavras, valoriza a existência de múltiplas realidades mediadas por fatores que podem ser, à vez, intrínsecos e extrínsecos à escola, onde investigador e participantes criam conhecimento no seu contexto natural, na medida em que o estudo pretende ser compreensivo e não transformativo. Mais especificamente, com esta abordagem, reconhece-se que a realidade escolar dos alunos perpassa os muros da sala de aula e coexiste com uma variedade de elementos e identidades próprias, como sendo a relevância do contexto social, cultural, económico e até demográfico, passando pelos percursos e relações que detêm com as escolas que frequentaram, à importância atribuída ora à escola, ora à Matemática. Nesta investigação, conjugam-se alguns destes fatores para enquadrar a realidade escolar vivida por cada um dos grupos de alunos que são foco de estudo. Entende-se aqui a palavra grupo, numa perspetiva sociológica, como advogam Bodgan e Biklen (2013), para referir "pessoas que interagem, que se identificam umas com as outras e partilham expectativas em relação ao comportamento umas das outras" (p. 91). Este enquadramento multifatorial permite, sob uma lente interpretativa, perscrutar sobre os significados que os alunos atribuem à aprendizagem de funções segundo tarefas de modelação com contextos que analisam situações de justiça social. De modo inverso, os significados decorrem das experiências e interações vividas pelos alunos, mediados pelos seus contextos. É, portanto, neste cenário, que a investigadora se posiciona enquanto descritora destes processos, reconstruindo as ações em que cada um dos elementos vai criando significados e induzindo a análise dos dados recolhidos (Erickson, 1986). A procura de objetividade a partir de interpretações que dependem quer de quem narra, quer de quem interpreta é, segundo Ricoeur (2016), um dos problemas centrais da hermenêutica. Por este

motivo, para minimizar os riscos associados a uma possível obliteração de dados relevantes, tenta-se equilibrar esta subjetividade intrínseca ao processo, procurando seguir uma triangulação proveniente de material de fontes diversas, que sustente e valide o estudo (Yin, 2017).

Ao colocar o paradigma investigativo em 'movimento' é necessário encontrar uma estratégia de pesquisa que o acompanhe. Deste modo, parece pouco discutível que os procedimentos inerentes a esta investigação desemboquem na apropriação de um processo que examine, em profundidade, as interações que têm lugar num determinado quotidiano escolar, sujeitas às representações dos seus protagonistas (Bodgan & Biklen, 2013), e que seja consonante com a conjugação de quatro fatores, aos quais o estudo de caso dá resposta: (i) a importância de um enquadramento teórico que sustente e da constante reflexão em terreno, estabelecendo uma ponte sincronizada entre a teoria e a *empiria;* (ii) ser um processo multisistémico que combina o modo como se desenvolve e o contexto em que decorre, pormenorizando-o e retratando-o com maior proximidade; (iii) a versatilidade das fontes múltiplas de informação; e (iv) possuir um alcance analítico que dote o estudo de um contacto direto entre a teoria já existente e a que pode emanar (Ponte, 2006).

No desenho do estudo adotou-se uma metodologia de estudo de caso, ao permitir estudar o caso no seu contexto real (Yin, 2017), seguindo orientações descritivas ou exploratórias, usando múltiplas fontes de evidência, enquadrando-se numa lógica epistemológica e integrando a subjetividade do investigador, sendo, precisamente, a sua principal característica a análise intensiva do caso. Para Cohen et al. (2018), nos estudos de caso traçam-se limites bem definidos, sejam de ordem temporal, geográfica, organizacional ou institucional, assim como pelas características dos indivíduos envolvidos ou pelos papéis e funções atribuídas aos participantes do caso. O facto de o caso ser limitado é, precisamente, para McMillan e Schumacher (2014), o que "o torna único, de acordo com o lugar, tempo e características dos participantes" (p. 370).

Por conseguinte, no presente estudo é seguida uma metodologia qualitativa com um *design* de estudo de caso, sendo cada caso composto pelos alunos de duas turmas, uma de 8.º ano e outra de 9.º ano, de escolas distintas da rede pública de ensino, da região sul do país. Ao acompanhar as orientações descritas por Cohen et al. (2018), McMillan e Schumacher (2014) e Yin (2017), a pesquisa empírica incide sobre uma entidade bem definida, decorrendo cada um dos casos ao longo de dois períodos letivos, tempo que permite uma extensão que privilegia o conhecimento dos intervenientes e possibilita uma análise mais detalhada. O contexto natural em que ocorre é, essencialmente, a sala de aula de Matemática, na medida em que é, nesse meio, onde são implementadas as tarefas de modelação. Contudo, este espaço físico é alargado a outros espaços da escola como sendo a biblioteca

ou gabinetes de trabalho dos professores, uma vez que, entre as professoras das turmas e a investigadora, foram codesenvolvidas tarefas que conjugam a unidade temática de funções e assuntos de justiça social. Em cada um dos casos procede-se a uma combinação de materiais, técnicas de recolha e análise de dados diferenciadas, assentes num quadro concetual construído pela literatura, que permitisse a concretização de um trabalho de campo de carácter reflexivo, sólido e crítico. Ainda assim, para caracterizar o contributo da modelação matemática contextualizada por fenómenos sociais na aprendizagem dos alunos, é necessário ter em vista não tanto o produto final se não as atividades, opções, significados e interações que se desenvolvem ao longo deste processo, criando uma filigrana analítica que faça o estudo dar um passo epistemológico.

No que diz respeito à importância do contexto, Stake (2008) distingue os estudos de caso em três tipos: intrínseco, instrumental ou múltiplo. O que os faz diferir é precisamente a intenção do investigador ao abordar o caso. Se a intenção recair mais na compreensão do caso em si do que a construção de teoria, o estudo é intrínseco. Stake (2008) considera que o estudo é instrumental se, apesar de investigar um objeto de estudo em profundidade, o fenómeno for analisado tendo em vista a resposta ao problema de investigação, e a qual se reflita na construção de um conhecimento mais exaustivo. Ainda para este autor, se for vantajoso a abordagem, a par de um estudo instrumental, de vários casos em conjunto, estudando dois ou mais sujeitos, situações ou fenómenos, o estudo de caso é múltiplo. Sob estas premissas, a presente investigação orienta-se segundo o cânone do estudo de caso instrumental dado que os casos funcionam como uma espécie de veículo para direcionar e compreender o objetivo de investigação, constituindo um instrumento de suporte para a perceção do contributo da modelação matemática na aprendizagem de funções seguindo uma prática de ensino da Matemática para a justiça social, em alunos do 3.º CEB. Mas, é também, com o aprofundamento do caso que a construção de conhecimento é possível. Por conseguinte, são premiadas as perspetivas de vários elementos que singularizam os casos: diretores dos Agrupamentos a que pertencem as duas turmas, as respetivas professoras de Matemática bem como os restantes docentes de Matemática que compõem o grupo disciplinar, culminando com as perspetivas dos alunos, assim como a reflexão e avaliação que fazem da experiência.

Segundo Merriam e Tisdell (2016), na pesquisa qualitativa, é provável surgirem relativamente à recolha de dados e de divulgação dos resultados, dilemas éticos. Especificamente, no papel assumido pelo investigador, bem como referem Creswell e Guetterman (2020), ao ser a pesquisa qualitativa e interpretativa, o investigador encontra-se numa experiência intensiva com os participantes, o que pressupõe uma série de questões éticas e pessoais sendo, aliás, reconhecido por Erickson (1986) o

"princípio ético básico proteger os interesses particulares dos participantes, especialmente vulneráveis no contexto" (p. 141). Por conseguinte, foram enviados aos encarregados de educação dos alunos participantes informações relativas ao estudo, assim como o respetivo pedido de consentimento de colaboração (Apêndice 19). Ainda neste sentido, no presente estudo foram seguidos alguns dos princípios éticos recomendados por Bodgan e Biklen (2013) no âmbito de uma investigação qualitativa. O primeiro, recomenda a proteção da identidade dos sujeitos, tendo-se mantido a confidencialidade e o anonimato tanto na recolha dos dados como na escrita. Outro dos princípios advogados é o respeito pela cooperação na investigação e, nesse sentido, foram esclarecidos, verbalmente e por escrito, todos os participantes da natureza do estudo (Apêndice 20) e obtidos consentimentos informados aos respetivos encarregados de educação dos alunos.

A autenticidade da escrita dos resultados é um princípio fundamental em qualquer investigação, sendo reflexo da validade e fidedignidade do estudo (McMillan & Schumacher, 2014). Neste documento, o registo dos estudos de caso segue um estilo narrativo dentro de um quadro interpretativo que confira imunidade aos riscos e minimize os imprevistos para, a partir a exploração crítica dos dados, ser possível a construção de um retrato que reproduza, de forma autêntica, o mecanismo desencadeado ao promover um ensino da Matemática com enfoque na Justiça Social e com o contributo da modelação matemática.

4.2. Participantes no estudo

Bogdan e Biklen (2013) apontam que, na fase inicial da investigação, os investigadores procuram locais ou pessoas que possam ser objeto de estudo ou fontes de dados. Em seguida, procuram indícios de procedimentos a serem realizados e analisam a possibilidade de concretização do estudo. Deste modo, procedeu-se ao esclarecimento a vários professores com quem a investigadora trabalhou, da intenção de criar um cenário de aprendizagem de funções assente em tarefas de modelação cujos contextos se baseassem em fenómenos sociais para, com isso, analisar a influência nos alunos. Após esta primeira abordagem e com a disponibilidade demonstrada por parte de professores, idealizou-se uma pesquisa empírica que envolveu três turmas de implementação do ambiente de aprendizagem descrito. Cada um dos casos foi ancorado numa turma de cada nível de ensino de 3.º CEB e partiu de um trabalho conjunto com duas professoras de três escolas distintas, repartidos por dois anos letivos, uma vez que uma das docentes mudou de escola. Importa referir que para selecionar as professoras participantes recorreu-se aos seguintes critérios: (i) a preocupação e o interesse em trabalhar com a filosofia de ensino evidenciada; (ii) a proximidade geográfica dos

Agrupamentos que as respetivas professoras trabalham, face às disponibilidades da investigadora; (iii) a recetividade dos diretores dos Agrupamentos relativamente ao estudo; e (iv) as características específicas abrangentes das escolas em que lecionavam. Concluída a definição das escolas e das docentes, partiu-se para o processo de seleção das turmas, o qual obedeceu a critérios primeiramente indutivos e, posteriormente, orientados por eixos teóricos. A primeira turma a ser selecionada foi a turma de 8.º ano, enquadrada na intitulada Escola Lídia Jorge, tendo como professora Marta. A decisão para a sua participação recaiu sobre o facto de ser essa turma a direção de turma da professora e, por esse motivo, haver mais um tempo semanal disponível para a realização da observação de aulas, caso fosse necessário, e ainda, o acesso privilegiado aos encarregados de educação para a concretização dos trâmites de salvaguarda ética já mencionados.

Já no que diz respeito às turmas de 7.º e 9.º ano, a escolha foi determinada pela visão do princípio da diferença. Isto é, a preferência seria dada à turma que apresentasse um maior número de níveis inferiores a três no 1.º período.

Após a delineação dos grupos de trabalho, considerou-se relevante a integração dos contextos de cada caso, incluindo, assim, os professores do grupo disciplinar de Matemática e os diretores de cada uma das escolas. Esta opção prendeu-se com o facto de os participantes poderem definir a própria realidade social e, portanto, para compreender a especificidade do contexto. Como referem Cohen et al. (2018), compete aos investigadores compreender e explicar a realidade social através do olhar de diferentes participantes, procedendo à obtenção de dados de várias fontes para captar o caso em estudo na sua totalidade e complexidade (Merriam & Tisdell, 2016; Stake, 2008; Yin, 2017). Estas diretrizes levaram a uma criteriosa seleção dos participantes que fortalecessem a compreensão do contexto dos casos, enfatizando uma das características dos estudos de caso – a holística. Tendo em conta a característica holística, valoriza-se a interrelação entre o fenómeno e os seus contextos (Stake, 2008), o que, nesta investigação, faz realçar as políticas da escola e as práticas dos professores, pela mão dos seus representantes. Em concreto, de forma a compreender quer a predisposição, quer o desempenho dos alunos para a aprendizagem de funções através de tarefas de modelação que analisem fenómenos sociais, é necessário entendê-lo como produto dos seus contextos.

Posteriormente, optou-se por focalizar o estudo em dois estudos de caso, mantendo o trabalho com as duas docentes em duas escolas diferentes, sendo que a turma de 9.º ano pertencia à escola denominada por Escola Secundária Mariana Alcoforado. Justifica-se este posicionamento, primeiramente, pela dificuldade em preservar a observação de aulas simultânea nas turmas de 7.º e 9.º anos, visto que pertenciam a escolas em regiões distintas. Ainda que esta situação se tenha

mantido, a observação mais pormenenorizada foi conseguida na escola relativa à turma de 9.º ano. A par deste motivo, encontrou-se, aquando a análise dos dados, aquilo que Dooley (2002) refere como a produção de um grande volume de dados para análise, acrescentado que a complexidade inerente aos estudos de caso pode levar a que coexistam vários casos dentro de um estudo. Para evitar este conflito selecionaram-se os casos de 8.º e 9.º anos. A decisão para manter estes casos em detrimento do caso de 7.º ano, prendeu-se, precisamente, com a motivação para a sua seleção. Isto porque, por análise comparativa, ambos podem ser considerados, até certo ponto, de ambientes contrastantes, assim como privilegiou-se, também, o caso de 9.º ano por pertencer a um nível de final de ciclo. Com a prerrogativa desta escolha, entende-se que, doravante, os casos a serem citados serão, exclusivamente, os casos das turmas de 8.º e 9.º anos.

4.2.1. Caracterização das Escolas e Diretores

O contexto geográfico e socioeconómico das duas escolas envolvidas na investigação reforça a singularidade das turmas que lhe correspondem. A escola a que pertence a turma de 8.º ano, designada, ficticiamente, por Agrupamento de Escolas Lídia Jorge (LJ), localiza-se num meio urbano da costa litoral do barlavento algarvio, pertencendo a um concelho em crescimento demográfico, com uma elevada taxa de Crescimento Natural. Ainda que o Agrupamento seja composto por onze unidades orgânicas, do pré-escolar ao ensino secundário, com alunos de variados contextos socioculturais, a Escola Básica e Secundária Lídia Jorge contém jovens cujos agregados familiares correspondem a classes sociais médias altas em termos económicos e académicos (Projeto Educativo [PE], Escola LJ). No desempenho do cargo de diretora encontra-se Ana Maria, uma pessoa dinâmica que, no ano letivo que teve lugar o trabalho de campo, contava com 39 anos de serviço, dos quais 20 foram em direções de escolas. Do Agrupamento de Escolas a que se reporta este estudo de caso, é diretora há 8 anos. Ana Maria é licenciada em Química e não consegue apontar uma razão que a tenha levado a ser professora. No entanto, desde que começou a dar aulas sentiu que era um trabalho gratificante e sempre gostou da relação com os alunos (ED, LJ). Do seu discurso, ressalta a importância que atribui às relações humanas e o contacto que estabelece com todos os membros da comunidade educativa.

A escola que alberga a turma de 9.º ano, representada por Escola Secundária Mariana Alcoforado (MA), situa-se no interior do Baixo Alentejo, num concelho marcado pela ruralidade, com alta taxa de desemprego e migração sazonal, com perda de população desde a década de 50 do século XX (PE, MA), especialmente acentuada nas últimas duas décadas e envelhecida (PORDATA, 2023). Este panorama provoca assimetrias económicas, sociais e culturais em comparação com o

resto do país. Neste sentido, a instituição escolar coloca-se no centro do desiderato por uma vida melhor, com números que registam um aumento substancial do número de anos médio da habilitação escolar, na última década. A equipa de gestão da Escola Mariana Alcoforado é presidida por João Afonso pelo segundo ano consecutivo, embora o mesmo pertença à equipa diretiva desde 2010, tendo passado por adjunto da direção e exercido o cargo de subdiretor. A sua área de formação é Educação Física e apresenta a ligação à prática desportiva enquanto aluno de secundário e o facto de ter familiares professores de Educação Física como razões para o seu percurso formativo. Fez o estágio em 2000, possuindo dezoito anos de serviço à data do estudo. Da sua carreira profissional o diretor destaca dois momentos, o primeiro é relativo à sua mudança para o Alentejo, referindo que foi a mudança mais profunda, ao nível profissional e pessoal; o segundo foi quando foi convidado para a direção.

4.2.2. Caracterização do grupo disciplinar de Matemática

Os professores que compõem o grupo disciplinar de Matemática da Escola Lídia Jorge são quatro, incluindo a professora da turma de 8.º ano, cujos nomes são fictícios. Dois deles, Jorge e Cristina, eram professores cuja situação profissional era a de 'Contratados', por sua vez as professoras, Paula e Marta, eram professoras de 'Quadro de Escola', encontrando-se Marta em situação de 'Mobilidade Interna'. Quanto ao tempo de serviço docente, Cristina e Jorge possuíam 9 e 10 anos, respetivamente, enquanto Marta tinha 16 anos e Paula completava 17 anos de serviço. Todas as professoras referidas trabalharam sempre em escolas da rede pública de ensino, lecionando quer o ensino básico, quer o ensino regular, bem como cursos regulares e cursos profissionais. No âmbito das suas formações académicas superiores, algumas das razões que levaram estes professores a optarem pelo ensino da Matemática repetem-se entre si, apesar de cada um deles sugerir uma motivação pessoal. Embora nenhum refira ter sido uma opção *sine qua non*, todos acabaram por ilustrar eventos mutuamente exclusivos, sugerindo que uma coisa levou à outra e onde, desde logo, se sentiram confortáveis com a decisão. A menção à influência que exerceu algum antigo professor de Matemática do ensino secundário nas suas decisões é partilhada por dois professores. No que diz respeito às experiências mais relevantes durante o curso de formação de professores, os professores foram unânimes em destacarem o ano de estágio profissional como a verdadeira preparação pedagógica, corroborando a ideia de que o estágio foi o culminar da preparação para a docência, e tecem algumas críticas aos quatro anos que o precederam. Do ponto de vista de uma das docentes, o curso preparou-a cientificamente, no entanto, apenas o estágio lhe forneceu a parte pedagógica.

Quanto à promoção do desenvolvimento profissional, estes professores recorrem, em primeiro lugar, à participação em ações de formação, bem como identificam a importância de um trabalho de interajuda e partilha de experiências entre docentes. Neste âmbito, os professores Jorge e Cristina são os que mais realçam o papel da autoformação como sendo o motor do seu desenvolvimento profissional que, na ótica de Cristina, está diretamente relacionado com o empenho que coloca na investigação pessoal. Ainda no que concerne ao desenvolvimento profissional, e quando questionados face às razões que os levam a frequentarem ações de formação, são as professoras de 'Quadro' que mais evidenciam os seus motivos, os quais se encontram entre o facto de ser obrigatório para a progressão na carreira, a não estagnação dos conhecimentos ou a vontade de ver surgir novas teorias pedagógicas que possam pôr em prática com os seus alunos. Do ponto de vista de Marta, também é importante estar atualizada ao nível das ferramentas digitais, como as funcionalidades do quadro interativo ou algumas das aplicações educativas para dispositivos móveis.

O grupo de docentes de Matemática da Escola Mariana Alcoforado é constituído por Isabel, a professora da turma de 9.º ano, Odete, Margarida e Luís Freire, nomes, uma vez mais, fictícios. Neste grupo de docentes, ressalta o aspeto referente às suas situações profissionais, na medida em que todos possuem um vínculo com o Estado. Isabel e Margarida com a categoria de professoras QZP e Odete e Luís têm a categoria de professores QE. Por sua vez, diferem no que diz respeito ao tempo de serviço docente, tendo Isabel 12 anos de serviço e Margarida 14 anos. Já Luís afirma ter 32 anos de docência e no caso de Odete a professora confessa ser o seu 38.º ano. É transversal o facto de a experiência profissional deste grupo de professores ter sido sempre em escolas da rede pública e quase em todos os níveis de ensino. Odete e Luís têm mais experiência de secundário, embora desde que a escola começou a ter 3.º ciclo, passaram a ter cumulativamente turmas de 3.º ciclo. Isabel é a docente que conta com uma maior diversidade de percursos.

Em termos de formação académica, os quatro docentes coincidem no gosto pela disciplina que lecionam e daí a motivação por estudarem Matemática, embora no caso de Luís a sua formação superior seja em Engenharia Mecânica. Já as razões que levaram estes professores para a docência diferem. Dos quatro, apenas Odete relata que ainda enquanto aluna de Secundário queria ser professora de Matemática. A vivência de Luís é, segundo a sua narrativa, comum a muitos da sua época, uma vez que começou por exercer Engenharia e como havia falta de professores, começou a dar aulas, optando por esta profissão. Especificamente, no caso de Margarida existiu a motivação de ter o seu pai como professor de Matemática, embora admita que no 1.º ano da Faculdade ainda

pensou em desistir. Para Isabel, pendeu unicamente o gosto pela Matemática e a facilidade à disciplina durante o Secundário, sendo que o ensino foi uma escolha aleatória.

Da reflexão efetuada pelo grupo de professores acerca do modo como se desenvolvem profissionalmente, nomeadamente no que diz respeito à dimensão científico-pedagógica, os docentes destacam três formas em comum, a troca de experiências, as coadjuvações e as ações de formação. Isabel esmiúça o assunto e separa claramente a parte científica da pedagógica.

Todos os docentes conectam a motivação para frequentar ações de formação com a respetiva obrigatoriedade para a progressão na carreira, em simultâneo com o facto de ser uma forma de atualização das práticas docentes. Odete explica que, para mudar de escalão, são sempre necessários créditos de formação e, por isso, quase todos os anos faz formação. Por sua vez, Isabel esclarece que, ao serem de carácter obrigatório, tenta selecionar as ações que vão de encontro aos seus interesses.

4.2.3. Caracterização dos alunos

A turma de 8.º ano é constituída por vinte e dois alunos, dos quais oito são raparigas e catorze são rapazes. A idade média dos alunos é de 12 anos e varia entre os 12 e os 14. Todos os alunos têm nacionalidade portuguesa e em termos de ação social escolar, doze alunos beneficiam de um dos três tipos de escalão. Nenhum dos alunos é repetente, bem como nenhum tem acompanhamento por necessidades educativas específicas. Deste grupo, sete frequentam o ensino integrado e um o ensino articulado de Música. A maioria dos alunos possui como encarregado de educação a mãe, cujas formações académicas variam entre o 3.º Ciclo do Ensino Básico, Ensino Secundário, Licenciatura, Mestrado e Doutoramento e as situações profissionais revelam um grande número de trabalhadoras por conta de outrem.

No que diz respeito ao aproveitamento escolar, onze alunos não obtiveram qualquer nível inferior a três no ano transato, no entanto, sete alunos tiveram uma negativa, dois alunos obtiveram duas negativas e dois alunos tiveram três níveis inferiores a três. As disciplinas que mais contribuíram para este cenário foram Matemática e Inglês.

Quanto ao modo como encaram a escola, este grupo de alunos mostra-se desanimado, imprimindo na relação escolar um hábito e um meio para o convívio social. Da obrigatoriedade da frequência escolar esperam colher os frutos para um futuro bom. O grau de motivação para aprenderem Matemática é baixo, dado que oito alunos afirmam ser a disciplina que têm mais dificuldades e apenas três alunos revelam ser a disciplina preferida.

No que diz respeito aos alunos de 9.º ano, a turma compõe-se por vinte e nove alunos, entre os quais dezassete raparigas e doze rapazes. As idades variam entre os 13 e os 17 anos, sendo que a idade média é de 14,3. Deste grupo, quatro alunos não têm nacionalidade portuguesa e doze deles beneficiam de Ação Social Escolar. No plano académico, a turma tem dois alunos repetentes e seis alunos que apresentam uma retenção no seu percurso escolar. Nenhum dos alunos obtém acompanhamento por Necessidades Educativas Específicas. Quanto aos Encarregados de Educação são, maioritariamente, as respetivas mães, as quais apresentam como formação académica o 2.º Ciclo do EB, 3.º Ciclo do EB, o Ensino Secundário e Licenciatura e possuem como situação profissional contratos por conta de outrem, por conta própria, desempregadas e domésticas.

No âmbito do sucesso escolar, apenas doze alunos não apresentam qualquer nível inferior a três no final do ano letivo anterior. Dos restantes, oito alunos obtiveram uma negativa, seis tiveram duas negativas e três alunos obtiveram três níveis inferiores a três. Das disciplinas que mais se evidenciaram neste leque foram Matemática, Inglês e Físico-Química.

O posicionamento deste grupo de alunos face à escola é, em geral, de conforto. Dizem-se bem acolhidos e, apesar desse bem-estar nem sempre ser alargado à sala de aula e à relação com alguns dos professores, o sentimento da necessidade de estudarem é quase transversal. Relativamente à disciplina de Matemática sentem-se motivados, depositando na relação de abertura com a professora confiança para suprirem as suas dificuldades.

4.3. Procedimentos e técnicas de recolha de dados

Parafraseando Cohen et al. (2018), um dos aspetos essenciais do estudo de caso é a seleção da informação, orientado pela possibilidade da utilização de várias fontes de evidência (Yin, 2017), que devem estar em consonância com o caso e o seu contexto. Vários autores (por exemplo, Bogdan & Biklen, 2013; Denzin & Lincoln, 2018; McMillan & Schumacher, 2014; Yin, 2017) discorrem sobre a multiplicidade de métodos de recolha de dados na investigação qualitativa, partilhando a visão comum do estabelecimento de limites para o estudo e elencando os seguintes elementos de recolha de dados: observação; entrevistas; e documentos. Atendendo a estas diretrizes e após estabelecidos os protocolos que derivaram nas escolas envolvidas e na seleção das turmas que constituem a singularidade dos casos, o desenvolvimento da investigação empírica ocorreu em quatro fases (Tabela1).

Tabela 1

Fases do Processo Empírico e dos Instrumentos de recolha de dados

Fases	Atividade	Instrumentos de Recolha de Dados
1	Enquadramento do Contexto Educativo	Entrevista a professores Documentos internos da Escola
	Elaboração das tarefas de modelação	Observação de momentos de trabalho; Notas de Campo;
2	Caracterização dos alunos	Entrevista a alunos; Documentos
3	Momentos de aprendizagem	Observação de aulas Notas de Campo Produções dos alunos
4	Perspetivas finais dos Participantes	Entrevista a alunos e a professoras

Numa primeira fase, procurou-se, através de entrevistas, auscultar as experiências e práticas habituais dos professores de Matemática, bem como reconhecer a postura do representante do órgão de gestão face à missão e à responsabilidade educativa do Agrupamento e fundamentar o enquadramento do contexto educativo. Posteriormente, entre as professoras e a investigadora, foram codesenvolvidas tarefas que conjugam a unidade temática de funções e assuntos de justiça social. Estas tarefas assumiram diferentes contornos como sendo projetos sobre tópicos de funções que inseriam o tema, serviam de apoio ao seu desenvolvimento ou a proposta de projetos nos quais tiveram como autoria os próprios alunos.

Numa segunda fase, procedeu-se à caracterização dos alunos da turma relativos a cada um dos estudos de caso. Pretendeu-se com este levantamento perceber o desempenho escolar de cada um dos alunos, não só na Matemática como também nas restantes disciplinas. Através de entrevistas em grupo indagaram-se os alunos acerca das finalidades de aprender Matemática, tentando também, desta forma, perceber o que sabem de justiça social.

A fase três desta investigação encontrou-se reservada à observação das aulas e através das quais se procedeu à recolha de dados empíricos que, para além da observação direta não participante, englobaram entrevistas (a professores e a alunos) em diferentes momentos da componente empírica (início, durante e no final), gravações áudio e vídeo desses registos.

Numa fase final, efetuou-se uma análise documental com a qual se tencionou verificar a perceção dos alunos relativamente a todo o trabalho desenvolvido. Esta análise integrou as produções dos alunos, os registos das professoras participantes e os registos, sobre a forma de notas de campo, efetuados pela investigadora, bem como todos os documentos relevantes que fazem parte da escola (Projeto Educativo, Plano de Atividades, Regulamento Interno).

Em síntese, os instrumentos de recolha de dados utilizados neste estudo envolveram: (i) a realização de entrevistas; (ii) a observação de aulas; (iii) documentos (das escolas e resoluções dos alunos); e, por último, (iv) notas de campo.

4.3.1. Entrevistas

Nos estudos qualitativos, as entrevistas podem assumir uma estratégia dominante no decurso da investigação ou podem ser combinadas com outras técnicas de recolha de dados (Bodgan & Bicklen, 2013). Este método é revestido como um banco de dados descritivo que constitui um veículo direto à linguagem verbal dos próprios intervenientes, possibilitando-os expressar as suas perspetivas e modos de encarar situações e, acima de tudo, assume como central a interação humana na produção do conhecimento (Bodgan & Bicklen, 2013; Cohen et al., 2018). Adotando esta abordagem, utilizou-se a entrevista em profundidade, cujo carácter de perguntas de resposta aberta (McMillan & Schumacher, 2014; Yin, 2017) permitiu recolher dados sobre o significado que os alunos e professores atribuem a dois aspetos transversais ao tema em estudo, a saber: (i) modelação matemática e funções; e (ii) papel da Matemática na interpretação de fenómenos sociais. Com este lineamento, foram realizadas, ao longo deste estudo, entrevistas a todos os participantes – alunos, docentes do grupo de Matemática e diretores dos Agrupamentos.

A natureza das entrevistas depende, segundo McMillan e Schumacher (2014), da sua estruturação, profundidade, abertura de questões e extensão. Nesta investigação, foram elaboradas entrevistas com recurso a um guião orientador constituído por questões abertas, tendo em vista garantir a abordagem dos temas mais relevantes, ao mesmo tempo que se priorizaria as reflexões pessoais de cada um dos sujeitos acerca dos temas em análise. Concretamente, realizaram-se duas entrevistas a cada um dos alunos, uma inicial e uma final, uma entrevista a cada um dos docentes participantes, assim como a cada um dos diretores das escolas e, por fim, uma entrevista final a cada umas das docentes das turmas. É de referir que os respetivos guiões foram alvo de revisão e validação por parte de dois especialistas em Educação (Bodgan & Bicklen, 2013).

As primeiras entrevistas a serem realizadas foram aos docentes de Matemática de cada umas das escolas. Ocorreram, no dealbar do trabalho de campo, com o intuito de estabelecer uma relação de maior proximidade com os intervenientes, naquilo que Bodgan e Bicklen (2013) descrevem como "investigador e sujeito passarem a conhecer-se e o investigador pôr o sujeito à vontade" (p. 135). Deste modo, foram entrevistados, individualmente, quatro professores de Matemática por escola. No guião (Apêndice 17) que orientou as conversas encontram-se questões que pretendiam captar

informações, entendimentos e reflexões acerca da formação, prática profissional, ensino de funções, ensino da Matemática e a sua conexão com a justiça social.

Quanto às entrevistas iniciais feitas aos alunos, o guião (Apêndice 14) que lhes serviu de base contempla dois eixos orientadores – percurso escolar e aprendizagem na disciplina de Matemática. Neste sentido, as questões que propõem um itinerário flexível, pretendem captar a relação que os alunos detêm com a escola, bem como as motivações, interesses, objetivos de futuro e principais dificuldades sentidas na globalidade dos seus percursos escolares. No que diz respeito à aprendizagem da Matemática, o guião incide sobre a importância da Matemática na realidade, conteúdos privilegiados e que têm mais dificuldades, tipos de tarefas preferenciadas, aprendizagem de funções e a sua relação com o mundo real, noções que possuem de justiça social e relevância da Matemática para esta compreensão. É de referir que estas entrevistas foram efetuadas em pequenos grupos para encorajar os alunos a falarem sobre os temas (Bodgan & Bicklen, 2013), retirando, assim, um possível peso inquisitivo.

O relato verbal obtido dos diretores dos Agrupamentos foi conseguido com recurso a uma entrevista semiestrutura cujo guião (Apêndice 16) recai sobre a experiência profissional dos mesmos, a caracterização genérica do corpo docente do Agrupamento, nomeadamente, quanto à identificação do grau de motivação profissional e os constrangimentos que se sentem na atividade profissional desses docentes. Os princípios e valores que orientam a ação do Agrupamento são postos em relevo de modo a conhecer de que forma o corpo diretivo operacionaliza um ensino de qualidade, assente na igualdade de oportunidades, pautado por valores éticos e socialmente responsáveis e, também, que atividades desenvolve no domínio da intervenção social. Neste roteiro, são tidas em conta a visão sobre o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática e que propostas a direção da escola tem para combater o insucesso. Por último, num bloco de perguntas sobre o tema 'Matemática e Justiça Social', são levantadas questões de como conectar a Matemática à realidade e como combater a perpetuação na identificação da disciplina de Matemática como um fator determinante de desigualdade e exclusão escolar.

A condução das entrevistas finais às docentes de Matemática das turmas dos casos assentou num lineamento (Apêndice 18) em torno de dois aspetos: 'Modelação matemática no ensino de funções' e 'Integração de assuntos de justiça social, na prática de ensino'. O primeiro bloco de perguntas procura perscrutar, essencialmente, sobre as principais diferenças em trabalhar os conteúdos matemáticos através de tarefas de modelação, os constrangimentos que ocorreram na aplicação das tarefas ou como foram geridos os momentos de aula, bem como as dinâmicas. Num

plano focal no aluno, que processos privilegiaram os alunos no seguimento das aulas com recurso à modelação, quais as maiores dificuldades que os alunos evidenciaram na aprendizagem do tópico de funções através da modelação, que contributo teve a realização de tarefas de modelação para a avaliação dos alunos e, em jeito de síntese, o que destacar entre a aplicação de resolução de problemas e as tarefas de modelação e, ainda, quais foram os pontos fortes da integração da modelação matemática, na prática de ensino. O segundo bloco de questões, recai sobre a visão das professoras acerca das tarefas de modelação propostas que lhes pareceu que os alunos mais tenham gostado, em que medida o trabalho em grupo favoreceu o debate crítico, se a realização de tarefas com base no quotidiano permitiu uma maior conexão dos conceitos matemáticos com a realidade e se foi ao encontro dos interesses dos alunos. Em suma, se sentiram que os alunos desenvolveram o pensamento crítico e se houve alguma mudança de atitude relevante face à disciplina de Matemática, bem como quais os desafios que se colocam na continuidade da integração de tarefas de modelação no ensino do tópico de funções em alunos do 3.º CEB.

As perspetivas finais dos alunos (Apêndice 15) foram, novamente, ouvidas, em grupo, concentradas em três eixos: modelação matemática; modelação na aprendizagem de funções; e justiça social e aprendizagem de funções através da modelação matemática. Primeiramente, as questões atentaram nas principais diferenças em trabalhar os conteúdos matemáticos através da modelação, as vantagens do trabalho em grupo, o visionamento de uma conexão dos conceitos matemáticos com a vida real através da resolução de tarefas com situações da vida real. Mais concretamente, de que forma influenciou a utilização da modelação matemática para a aprendizagem do tópico de funções e à interpretação dos conteúdos em situações do quotidiano, bem como as principais dificuldades sentidas durante o processo de modelação. Por último, indaga-se qual a tarefa que mais significado atribuíram, assim como o maior contributo da resolução e debate de questões do quotidiano associadas a fenómenos sociais para a aprendizagem de funções.

Todas as entrevistas, tanto as iniciais como as finais, tiveram lugar nas respetivas escolas em momentos previamente combinados com os participantes. Salvaguardando a dimensão ética das entrevistas (Cohen et al., 2018) é de realçar que, no caso dos alunos, foi primeiramente, solicitada a permissão (Apêndice 19) de participação, por escrito, aos encarregados de educação. Neste âmbito, foram expostas a finalidade das entrevistas e da participação dos educandos no estudo, sublinhando a confidencialidade e a garantia de anonimato. Deste modo, todos os alunos e docentes contactados se mostraram cooperantes à colaboração. As entrevistas aos docentes foram todas áudio gravadas, enquanto as dos alunos, uma vez que decorreram em grupo, foram registadas em audiovisual. As

primeiras tiveram uma duração entre 50 e 90 minutos. Nas segundas, a sua durabilidade oscilou entre 45 e 90 minutos, por grupo, sendo notório que as entrevistas finais se aproximaram mais do extremo superior do intervalo.

4.3.2. Observação

Em qualquer estudo qualitativo, os investigadores introduzem-se nos contextos, dado que a fonte direta dos dados é o ambiente natural (Bodgan & Bicklen, 2013), daí que, para a triangulação dos métodos de recolha de dados, a observação surge, invariavelmente, como um instrumento privilegiado, ou nas palavras de McMillan e Shumacker (2015), "é o esteio da investigação qualitativa" (p. 376). Devido à natureza desta investigação, a observação assume-se como a técnica em relevo para cartografar os cenários de aprendizagem de funções que se desenvolvem com a aplicação de tarefas de modelação contextualizadas por fenómenos sociais. Atendendo a esta especificidade, este estudo não seria concretizável se não decorressem na sala aula evidências de aprendizagem.

O grau de envolvimento do investigador na observação é considerado uma das três dimensões deste tipo de intervenção. Apesar de todas as pesquisas terem alguma forma de observação participante, as mesmas diferem pelo posicionamento do observador numa escala que varia entre uma participação completa e o seu oposto que é um mero observador (Cohen et al., 2018). A observação é caracterizada por não intervencionista (Cohen et al., 2018) na medida em que, com ela, não se pretende 'manipular' a situação ou os acontecimentos nem estimular os sujeitos. Por sua vez, uma observação participante implica um envolvimento do investigador de forma a obter "as perceções das pessoas sobre eventos e processos expressos em ações, sentimentos, pensamentos e crenças" (McMillan & Schumacher, 2014, p. 378). Torna-se, pois, importante, estabelecer um equilíbrio observacional que estabeleça validade e fiabilidade ao estudo.

Nesta investigação, a observação decorreu no seu contexto, definindo-a como naturalista, observando os atores a interagir no processo natural do quotidiano (Cohen et al., 2018). Para isso, os cenários selecionados foram as aulas e os momentos de trabalho com as docentes das turmas. O papel assumido pela investigadora variou entre a observação participante e a não participante, dentro de um carácter flexível e aberto. Esta opção encontra-se fundamentada pelas características de um estudo qualitativo que abarca diversos níveis de envolvimento do investigador em função das situações a observar. Por estes motivos, recorreu-se a uma observação participante em sessões de trabalho conjunto com as professoras e à observação não participante nas aulas.

Observação de aulas

A observação de aulas teve lugar nas turmas que compõem os estudos de caso e acompanharam o trabalho desenvolvido pelos alunos e respetiva professora de Matemática na aprendizagem do tópico de funções e da implementação das tarefas de modelação. O teor deste estudo pressupõe que os registos a recolher sejam produto de construções que se prolongam no tempo e, por esse motivo, optou-se pela observação de aulas a decorrer em anos letivos distintos, escolha essa reforçada pelo facto das turmas pertencerem a escolas situadas em diferentes regiões do sul do país. Deste modo, a observação de aulas da turma de 8.º ano deu-se no ano letivo 2017/2018, tendo-se iniciado durante o 2.º período e prolongado até ao final do 3.º período, num total de 32 aulas de 50 minutos. Por sua vez, as aulas da turma de 9.º ano foram observadas no ano letivo 2018/2019, durante o 2.º período, num total de 26 aulas de 45 minutos. Salienta-se que esta diferença do número de aulas observadas se deve à metodologia definida, previamente, entre a investigadora e as docentes das turmas para a prática das mesmas. No plano concreto, o intervalo de tempo em que as aulas da turma de 8.º ano foram observadas correspondeu à totalidade da lecionação de todos os conteúdos relativos ao tema de funções de 8.º ano, tendo ainda abrangido aulas referentes ao tema de sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. No decurso das mesmas foram resolvidas as tarefas de modelação à medida que se progredia nos conteúdos de funções. Quanto às aulas observadas de 9.º ano, foram integralmente dedicadas à resolução das tarefas de modelação, na medida em que o tema de funções de 9.º ano havia sido já lecionado na parte final do 1.º período e, portanto, prévio à observação, conforme predeterminado pela investigadora e docente da turma.

Durante a observação de aulas, focou-se, essencialmente, o olhar sobre o trabalho dos alunos, tentando perscrutar as reações, os diálogos e as interações que se iam desenrolando. Com este propósito, e apesar de a investigadora tentar minimizar o impacto da sua presença, houve vários momentos que circulou pelos grupos de alunos para notabilizar de forma mais pormenorizada o trabalho que os mesmos realizavam.

Os instrumentos de registo utilizados foram a câmara de vídeo colocada na sala, gravadores de voz distribuídos pelos grupos e notas de campo. Assim, todas as aulas foram videogravadas, tendo este registo permitido captar uma panorâmica global do que ocorria. Os registos áudio efetuados em diferentes momentos pretendiam capturar uma parte significativa dos discursos orais entabulados pelos grupos de alunos. A par destes registos, as notas de campo, nas quais se procedia ao registo do dia, hora e participantes, constituíram um elemento fundamental para criar uma base de análise para a estruturação da análise de conteúdo.

Em síntese, a conjunção das transcrições dos registos audiovisuais, das gravações áudio e das notas de campo forneceu o suporte chave para a identificação e compreensão do contributo da modelação na aprendizagem de funções com o recurso a temáticas sociais.

Momentos de trabalho

O trabalho colaborativo mantido com ambas as professoras das turmas dos casos ao longo do trabalho de campo teve um momento que importa destacar. Com cada uma destas docentes, estabeleceu-se uma sessão de trabalho que pressupôs uma observação participante da investigadora. Estas sessões, que decorreram, em termos cronológicos, antes do início da observação de aulas, tinham como objetivo primeiro, familiarizar as docentes com alguns dos elementos que compõem o quadro concetual do presente estudo, como a pedagogia crítica e a educação matemática para a justiça social, apresentando-lhes exemplos concretos. Por consequência, este diálogo levou à seleção das turmas que comporiam os casos (com os critérios anteriormente mencionados). Com cada uma das professoras analisou-se o programa de Matemática do respetivo ano escolar, bem como as metas curriculares e aprendizagens essenciais, e a planificação a médio prazo realizada pelo grupo disciplinar da escola. No seguimento desta análise, conectaram-se os conteúdos matemáticos a abordar com ideias de uma educação para a justiça social. Neste sentido, elaboraram-se listas de possíveis temas sociais a abordar de acordo com o modelo que se poderia ajustar, assim como estratégias metodológicas a adotar. Este trabalho permitiu, à *posteriori*, detetar nas práticas das docentes um reconhecimento das suas participações na elaboração das tarefas.

Nestas sessões, a investigadora foi uma participante ativa do processo uma vez que esteve envolvida num trabalho conjunto com as professoras, contudo procurou dar espaço à participação das docentes, ao mesmo tempo que amenizava os seus receios ou respondia às suas dúvidas. O registo destas sessões ocorreu em gravação áudio e procedeu-se à elaboração de notas de campo durante e após a observação.

4.3.3. Documentos

McMillan e Schumacker (2014) salientam que "as estratégias de recolha de artefactos não são interativas, contudo, requerem um trabalho de campo imaginativo para localizar dados relevantes" (p. 386). Assim, a recolha documental materializou-se numa variedade de documentos que se dividem em duas vertentes: i) documentos internos das escolas; e ii) produções dos alunos.

No primeiro conjunto de instrumentos encontram-se os documentos oficiais de cada uma das escolas, como o 'Projeto Educativo', o 'Plano de Intervenção', o 'Regulamento Interno', bem como num plano mais detalhado, os documentos orientadores como os 'Projetos Curriculares de Turma', planificações da disciplina de Matemática, critérios de avaliação definidos pelo Departamento e, ainda, registos sobre os alunos como listas de alunos ou pautas de avaliação. Com estes documentos pretendeu-se extrair informações que permitissem a análise aprofundada de cada um dos casos, nomeadamente na caracterização do contexto.

A principal fonte de dados recolhidos neste estudo foram os elementos relacionados com as produções dos alunos, especificamente, as resoluções escritas de todas as tarefas propostas. Nelas, contêm as respostas individuais dos alunos constituindo registos fundamentais à compreensão de dois pontos-chave desta investigação: a clarificação dos processos privilegiados pelos alunos no estudo de funções com tarefas de modelação; e a avaliação das dificuldades reveladas no decorrer desta atividade cognitiva. Neste âmbito, são analisadas todas as indicações contidas nestes registos, sejam de ordem simbólica, pictórica, algébrica ou gráfica. Ainda neste sentido, encontram-se reflexões individuais dos alunos como respostas às questões relacionadas com a vertente sócio crítica das tarefas.

4.3.4. Notas de campo

As observações que ocorrem enquanto o investigador está no terreno podem ser registados sobre a forma de notas de campo (McMillan & Schumacker, 2014) datando e identificando o respetivo contexto. As vantagens da sua utilização têm, pelo menos, duplo sentido. Um deles, é a descrição pormenorizada de pessoas, lugares, situações, atividades e conversas, a par de ideias e estratégias ou intuições, dados que não são captados nas audiogravações (Bodgan & Bicklen, 2013). A outra vantagem é a orientação reflexiva que as notas de campo podem originar através do acompanhamento das descrições efetuadas ou no local, ou imeadiatamente após a saída do local, as quais sumarizam "as principais interações e cenas observadas e, mais importante ainda, avaliam a qualidade dos dados e sugerem questões e tentativas de interpretação" (McMillan & Schumacker, 2014, p. 380). Deste modo, reconhecendo a utilidade das notas de campo, nesta investigação procedeu-se à sua elaboração no decorrer das entrevistas, com carácter mais descritivo, ao longo dos momentos de trabalho com as professoras e na observação das aulas, com cariz descritivo mas também reflexivo (Bodgan & Bicklen, 2013).

4.4. As tarefas de modelação como suporte do estudo

As tarefas de modelação que fornecem a base para este estudo encontram a sua sustentação teórica num quadro conceptual que combina modelação matemática e educação matemática para a justiça social.

No foro metodológico, para a elaboração das tarefas confluem alguns dos documentos que compõem o atual currículo nacional, nomeadamente, o Perfil dos Alunos (PASEO), as Aprendizagens Essenciais de Matemática (AEM) (MEC, 2021), do 3.º Ciclo do Ensino Básico, a Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania (ENEC) (MEC, 2017a) e ainda os referenciais de Educação Ambiental para a Sustentabilidade (EAS) (MEC, 2018b) e de Educação para os Media (MEC, 2023). Deste modo, as tarefas de modelação seguiram a premissa de ser possível conjugar o currículo nacional com as realidades sociais dos alunos, tendo encontrado no ensino das funções o ambiente adequado à sua concretização (Greefrath & Carreira, 2024). Para além das tarefas representarem situações da realidade, pretendia-se que a contextualização das mesmas se baseasse em fenómenos sociais que levassem os alunos a reconhecer o poder da Matemática como uma ferramenta analítica para perceber e potencializar a mudança do mundo (Gutstein, 2007). Com estas diretrizes, do trabalho conjunto com as professoras resultou um conjunto de possíveis temas a desenvolver e que respondessem às características definidas (Tabela 2). De entre eles, encontram-se alguns cujo reconhecimento é num plano mais alargado, enquanto outros indiciam uma maior aproximação às suas realidades sociais (como é o caso dos acidentes na EN125 ou a quantidade de água consumida pelos campos de Golf).

Tabela 2

Possíveis temas e modelos matemáticos a serem trabalhados

Fenómenos sociais	Modelos
Acidentes de Viação na EN125	Função afim, função de proporcionalidade inversa, função quadrática
Redistribuição de salário e diferença salarial de género	
Resultados eleitorais autárquicos do concelho	
Incêndios como resultado de vários fatores	
Quantidade de água gasta pelos campos de golf	
De onde vem a roupa que vestimos?	
O consumo dos produtos e consumo de água	

Para a elaboração definitiva das tarefas foi seguido, para além do já referido, aquilo que o quadro teórico chama por autenticidade do contexto das tarefas, dada pela sua dimensão pragmática e

crítica. Importa aqui relembrar três categorias atribuídas por Villa-Ochoa et al. (2017) à autenticidade do contexto que pode ser pessoal, de impacto ou de valor. De forma a respeitar estas diretrizes, as tarefas de modelação foram construídas, para cada ano de ensino, segundo um tema social que lhes fosse transversal, conferindo-lhes um carácter de projeto. Nesta linha de pensamento, criaram-se dois temas globais, um de 8.º ano e outro de 9.º ano, sendo que ambos vão ao encontro das áreas de competências do Perfil dos Alunos, a saber: A – Linguagens e Textos; B – Informação e Comunicação; C – Raciocínio e resolução de problemas; D – Pensamento crítico e pensamento criativo; E – Relacionamento interpessoal; F – Desenvolvimento Pessoal e autonomia; G – Bem-estar, saúde e ambiente; I – Saber científico, técnico e tecnológico. De igual modo, foram estruturadas segundo os tópicos das capacidades matemáticas transversais a todos os anos de escolaridade: resolução de problemas; raciocínio matemático; comunicação matemática; representações matemáticas; e conexões matemáticas.

Na Tabela 3 são elencadas as tarefas de 8.º ano, enquadradas pelos objetivos de aprendizagem e pelas capacidades matemáticas transversais. Em todas as tarefas estão contemplados os objetivos de aprendizagem relativos ao nível de ensino, no que diz respeito ao tópico de funções afins e modelação, sendo, ainda, que a tarefa 'Comparação da Pegada hídrica entre países' aborda o tópico de Sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas.

Tabela 3

Tarefas de modelação de 8.º ano de acordo com as AEM

Tarefas de 8º Ano	**Tema e Tópicos**	**Objetivos de aprendizagem**
Distribuição de água no planeta Distribuição real de água em diferentes países Água e desigualdade de género Previsão da Escassez Hídrica Por que motivo os preços importam? Comparação da Pegada Hídrica entre países	Álgebra - Funções afins - Modelação - Sistemas do 1.º grau a duas incógnitas	Representar uma função afim usando representações múltiplas; Interpretar e modelar situações da realidade com função afim e fazer previsões; Modelar situações da realidade através de funções afins; Desenvolver capacidades matemáticas, nomeadamente, com utilização de tecnologia e/ou metodologia de projeto.

No 8.º ano, elegeu-se um tema aglutinador que se encontra definido como um dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS 6 – Água potável e saneamento), 'Defender a água'. O carácter de

proximidade social é tido em conta devido a dois fatores que decorreram à época do trabalho de campo: surgem as primeiras notícias nos *media* de Portugal estar a entrar num problema de seca severa, nomeadamente na região do Algarve; e haver falta de informação nesse sentido.

A tarefa 'Distribuição de Água no Planeta' (Apêndice 1) tem por objetivo introduzir o tema, levando os alunos a pesquisar sobre a forma como está distribuída a água no Planeta. Após essa abordagem, a proposta de modelação consiste em encontrar uma forma da UNICEF conseguir o montante relativo ao investimento para melhorar as condições de acesso à água num campo de refugiados na Síria, com base numa percentagem do orçamento militar dos cinco países que mais gastam.

Quanto à tarefa 'Distribuição real de água em diferentes países' (Apêndice 2), pretende-se que, a partir do valor mínimo necessário de água para atender as necessidades básicas diárias de um indivíduo, determinado pela OMS, os alunos criem um modelo de previsão que relacione o número de habitantes de um dado país com a quantidade de água necessária.

A terceira tarefa 'Água e Desigualdade de género' (Apêndice 3) foca a desigualdade existente em países como o Benim, Gana, Guiné ou Madagáscar relativamente ao tempo despendido na recolha de água, entre uma mulher e um homem. Pretende-se que os alunos traduzam esta relação por um modelo matemática e que, de seguida, o utilizem para comparar situações.

A tarefa 'Previsão da escassez hídrica' (Apêndice 4) relata o ritmo do declínio hídrico a que o Planeta se encontra sujeito. Com base nestes dados, os alunos deverão encontrar um modelo de previsão que permita determinar o número de pessoas que estarão sujeitas a recursos de água muito limitados, no ano de 2050.

A tarefa 'Por que motivo os preços importam?' (Apêndice 5) retrata a diferença relativa à divisão da riqueza quanto ao preço da água, mostrando que pessoas carenciadas em diferentes partes do mundo estão sujeitas a pagar mais pelo acesso à água. O modelo matemático solicitado servirá para comparar situações e inferir conclusões com os resultados.

A última tarefa 'Comparação da Pegada hídrica entre países' (Apêndice 6) incide sobre a comparação da pegada hídrica entre habitantes de países distintos, pretendo-se encontrar um modelo descritivo da situação.

No que diz respeito ao tema de 9.º ano, a escolha recaiu sobre o 'Mundo do Trabalho', sendo este também um dos objetivos preconizados para um mundo mais justo e sustentável (ODS 8 – Trabalho Digno e Crescimento Económico). Na Tabela 4 são apresentadas as tarefas de 9.º ano de acordo com as respetivas aprendizagens essenciais.

Tabela 4

Tarefas de modelação de 9.º ano de acordo com as AEM

Tarefas de 9º Ano	Tema e Tópicos	Objetivos de aprendizagem
O trabalho e as Mulheres O trabalho e a conquista das 8 horas As mutações do trabalho Retratos da vida de trabalho Redistribuição da riqueza A uberização do trabalho	Álgebra - Funções afins - Funções de proporcionalidade inversa - Funções quadráticas - Resolução de equações de 2.º grau a uma incógnita	Interpretar e resolver problemas que envolvam proporcionalidade inversa; Identificar variáveis inversamente proporcionais e calcular constante de proporcionalidade; Representar e reconhecer uma função de proporcionalidade inversa através de representações múltiplas e estabelecer conexões entre estas; Resolver problemas com recurso a funções de proporcionalidade inversa; Interpretar e modelar situações de outras áreas do saber que envolvam a proporcionalidade inversa; Reconhecer funções quadráticas no mundo real; Resolver problemas que envolvam equações do 2.º grau, em diversos contextos.

A tarefa 'Trabalhadoras de ontem e de hoje' (Apêndice 7) tem por objetivo introduzir o tema, levando os alunos refletir sobre as principais diferenças existentes no Mundo Laboral, sendo, portanto, uma tarefa introdutória.

A primeira tarefa de modelação de 9.º ano 'O trabalho e as mulheres: Desigualdade salarial de género' (Apêndice 8) assinala as desigualdades salariais existentes entre género, exemplificando-o através da instituição, na União Europeia, do dia da Igualdade Salarial. É solicitado aos alunos que determinem um modelo matemático que permita prever quantos anos serão precisos para atingir igualdade de género económica a nível mundial.

Na tarefa 'O trabalho e a conquista das 8 horas' (Apêndice 9) mostra a evolução da redução do número de horas de trabalho semanal a partir do séc. XIX. Os alunos terão de descrever matematicamente a situação e fazer inferências acerca da possível existência de uma relação de proporcionalidade.

Na tarefa seguinte, 'As mutações do trabalho' (Apêndice 10), aborda a indústria têxtil da região do Vale do Ave, panorama que se utiliza para criar um modelo que descreva o número de trabalhadores necessários à produção do volume de encomendas, desde o ano de 1850, fazendo variar o número de horas semanal.

A tarefa 'Retratos da vida de trabalho' (Apêndice 11) é emoldurada pela comparação salarial entre os trabalhadores de uma empresa internacional sediada em Portugal, evidenciando, através de modelos matemáticos, as desigualdades sociais provocadas pelas diferenças salariais.

Na tarefa 'Redistribuição da riqueza' (Apêndice 12) os alunos são levados a criar modelos que ensaiem possíveis redistribuições de lucros de dadas empresas, de acordo com dois modelos económicos.

Por fim, a tarefa 'A uberização do trabalho' (Apêndice 13) enfoca a precariedade associada ao trabalho na área do transporte privado urbano, associado a empresas multinacionais. A construção do modelo possibilita determinar o ganho diário de um motorista desta plataforma eletrónica e inferir algumas situações associadas a essa remuneração.

4.5. Procedimentos e técnicas de análise dos dados

Os dados recolhidos foram sujeitos a uma análise, o que pressupôs trabalhar com o material que foi acumulado seguindo uma estrutura cronológica que envolveu "a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos importantes e do que deve ser apreendido" (Bodgan & Biklen, 2013, p. 205). Dito de outra forma, começou por se realizar um processo de familiarização com os dados de modo a proceder-se ao reconhecimento de padrões tendo, com este propósito, sido adotada a análise de conteúdo (Bardin, 2016). Para se proceder a essa categorização foram objeto de análise as aulas observadas, as notas de campo elaboradas ao longo dos momentos de trabalho, o conteúdo das entrevistas, as produções dos alunos e os documentos internos e reguladores das escolas. De modo equivalente, Miles et al. (2020) sugerem que a análise de conteúdo se divide numa sequência de três passos: redução dos dados; apresentação dos dados; e conclusões. Neste mesmo sentido, Bardin (2016) propõe a análise temática como um dos modelos da análise de conteúdo, a qual envolve, pelo menos, três fases, a saber: i) Pré-análise; ii) Exploração do material; e iii) Inferência e interpretação. Orientando a análise segundo estas diretrizes, começou-se por se estruturar o *corpus* documental efetuando, primeiramente, uma chamada leitura flutuante com o intuito de que a escolha dos documentos que o comporiam fossem ao encontro de respostas significativas aos objetivos de investigação. Com efeito, os instrumentos reunidos para constituir o *corpus* da pesquisa definem-se por registos orais como sendo as entrevistas efetuadas aos participantes do estudo, registos orais das aulas observadas que passam por gravações áudio e vídeo, registos escritos das tarefas elaboradas pelos alunos e documentos oficiais dos Agrupamentos de Escolas tais como 'Projetos Educativos' e 'Planos Anuais de Atividades'.

É de salientar que tanto os registos de observação de aulas como as transcrições das entrevistas foram alvo de leituras atentas, com vista à identificação de excertos e segmentos que se coadunassem com uma categorização referente às dimensões do estudo numa perspetiva dedutiva ou, eventualmente, indo ao encontro de características que se vislumbrassem apenas na sua análise, segundo uma perspetiva indutiva.

Numa segunda fase do processo, que corresponde à exploração do material, partiu-se para o aprofundamento do estudo do *corpus* documental com vista à sistematização das decisões previamente tomadas (Bardin, 2016), começando por definir como unidade de registo o tema. No que diz respeito a essa análise, a procura na identificação de regularidades incidiu, em torno de quatro unidades de análise: (i) posicionamento dos alunos, professores, diretores e documentos internos dos Agrupamentos face à temática da modelação matemática e da Justiça Social; (ii) aprendizagem de funções com tarefas de modelação; (iii) aprendizagem de funções com tarefas contextualizadas por questões sociais; e, por fim, (iv) contributos da aprendizagem de funções com tarefas de modelação com temáticas de justiça social. Este enquadramento perspetivou-se *a priori* em torno da utilização de assuntos de justiça social e da modelação matemática na prática letiva, mas ocorreu, essencialmente, *a posteriori*, a partir dos próprios dados obtidos, segundo uma natureza interpretativa.

De forma a operacionalizar os procedimentos de análise, impõe-se uma preparação quer dos textos a tratar, quer dos restantes instrumentos recolhidos (Bardin, 2016), surgindo, assim, a codificação que lhes corresponde. Na Tabela 5 encontram-se descriminados os significados relativos a cada um dos códigos construídos.

Tabela 5

Significado dos códigos atribuídos aos materiais da recolha de dados

Código	Significado
ED_LJ/MA	Entrevista a(o) diretor(a) Escola Lídia Jorge/Mariana Alcoforado
E_Nome_LJ/MA	Entrevista professor(a)) Escola Lídia Jorge/Mariana Alcoforado
EI/F_Nome_LJ/MA	Entrevista Inicial/Final professora turma Escola Lídia Jorge/Mariana Alcoforado
EI/F_Aluno,Gx_LJ/MA	Entrevista Inicial/Final alunos, Grupo x, Escola Lídia Jorge/Mariana Alcoforado
EI/F_Gx_LJ/MA	Entrevista Inicial/Final Grupo x, Escola Lídia Jorge/Mariana Alcoforado
GOAx	Gravação de observação de aula número x
GOAx_Gx	Gravação de observação de aula número x, relativa ao Grupo x
GOAx_Professora	Gravação de observação de aula número x, professora
GOAx_Aluno,Gx	Gravação de observação de aula número x, relativa aoAluno/a Grupo x
RE_Aluno,Gx	Registo Escrito aluno, Grupo x
NCEI/F_data	Nota de campo de entrevista inicial/final, alunos/professores, data
NCOA_data	Nota de campo observação de aula, data
NCMT_data	Nota de campo momentos de trabalho, data

Nota: A letra x contempla vários valores: No que respeita ao número de grupos em que se organizaram os alunos, na Escola Lídia Jorge varia entre 1 – 5 e na Escola Mariana Alcoforado varia entre 1 – 7. Quanto ao número de aulas observadas, na Escola Lídia Jorge varia entre 1 – 32 e na Escola Mariana Alcoforado varia entre 1 – 26.

Profundamente ligado ao processo de codificação, encontra-se a categorização dos dados que permite operacionalizar a correspondência entre um determinado código e a categoria em que se considera incluí-lo (Amado, 2017). Para esta constituição foram tidos em conta alguns critérios e regras sugeridos por Bardin (2016), como foi o caso de agrupar as unidades por temas, cumprindo o critério semântico; a regra da exaustividade que impele a, uma vez definido o *corpus*, ter em conta todos os elementos desse corpus, algo que se verificou; a regra da homogeneidade uma vez que foi utilizado um único princípio de categorização; a regra da pertinência na medida em que as dimensões analisadas pertencem ao quadro teórico; a regra da objetividade e fidelidade, pois as categorias revestem-se de clareza na sua definição e utilização; e, por fim, a regra da produtividade uma vez que a partir das categorias obtiveram-se resultados profícuos e inferiram-se conclusões relevantes.

Importa reconhecer que a última etapa surge com o trabalho minucioso do tratamento dos dados, inferência e interpretação (Gibbs, 2018). Nesta ótica essencialmente interpretativa, foi criado o diálogo comparativo entre as categorias já definidas e, novamente, revisitada a literatura. Salienta-se que para cada tema foi reelaborado um sistema de categorias, após o refinamento dos dados. Nesta reestruturação assenta a forma como estão elaborados os casos.

Quanto ao primeiro tema, 'Caracterização do contexto escolar' (Tabela 6), definiram-se três categorias: i) horizonte escolar; práticas profissionais dos docentes e trajetórias e vivências escolares dos alunos; ii) perspetivas sobre modelação matemática; e iii) noções de educação e justiça social.

Tabela 6

Categorias e dimensões relativas ao tema Caracterização do contexto escolar

Categorias	**Subcategorias**	**Dimensões**
Horizonte escolar	Missão escolar	Responsabilidade social Princípios
	Práticas Organizativas e Gestão	Visões e desafios Intervenção na Comunidade
	Prática Docente	Posicionamento face à Matemática Prática profissional Ensino de funções Práticas de modelação
	Trajetórias escolares dos alunos	Motivações escolares Contrariedades Relação com a Matemática
Perspetivas de Modelação Matemática		Matemática e Realidade Tarefas de Modelação Contexto das tarefas
Noções de Justiça social		Implicações da Matemática na exclusão escolar e desigualdade social Valorização dos diferentes contextos de partida Avaliação das desigualdades existentes

As subcategorias relativas à categoria 'Horizonte escolar' emergiram dos dados, numa perspetiva indutiva, fruto da análise dos documentos orientadores dos Agrupamentos e do registo das entrevistas.

A categoria 'Perspetivas de modelação matemática' é dimensionada a três unidades de análise com influências da literatura (Barbosa 2006; Brandt et al., 2016; Maaβ, 2010).

De igual modo, a categoria 'Noções de justiça social' é analisada, segundo o enquadramento teórico, priorizando as implicações da Matemática na exclusão escolar e desigualdade social (Rawls, 2013; Skovsmose, 2021; Young, 2022); a valorização dos diferentes contextos de partida (Valero, 2023; Fraser, 2022) e a avaliação das desigualdades existentes (Gutiérrez, 2018).

No que diz respeito ao tema 'Momento de Aprendizagem' (Tabela 7) definiram-se três categorias: i) narrativa da intervenção; ii) processos em torno das tarefas de modelação; e iii) aprendizagem matemática contextualizada por fenómenos sociais.

Tabela 7

Categorias e dimensões relativas a Momentos de aprendizagem

Categorias	Subcategorias	Dimensões
Narrativas da Intervenção	Panorama cronológico	Motivação Trabalho em grupo Autonomia de trabalho
Tarefas de modelação	Processos estabelecidos nas etapas de modelação	compreensão, simplificação e estruturação da tarefa matematização e trabalho com o modelo interpretação dos resultados e validação do modelo
	Barreiras cognitivas Tipos de representação	
Aprendizagem de funções contextualizada por fenómenos sociais	Conhecimento reflexivo	Importância dos resultados para a interpretação
	Espaços de interação	Debate crítico

A categoria 'Narrativas de Intervenção' é relatada numa visão cronológica e analisada nas vertentes da motivação, trabalho em grupo e autonomia de trabalho, indicadores provenientes da investigação sobre implementação da modelação matemática em contexto educativo (Blum & Ferri, 2009; Blum, 2015).

Com a finalidade de analisar a subcategoria 'Processo estabelecidas nas etapas de modelação' é seguido o modelo de Verschafell et al. (2000) e o ciclo de modelação de Blum e Leiss (2007), a partir dos quais se descrevem as etapas do processo de modelação, guiadas pela análise das atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação, ao longo de um conjunto de ações que se condensam em três etapas: (1) compreensão, simplificação e estruturação da tarefa; (2) matematização e trabalho com o modelo matemático; e (3) interpretação dos resultados e validação do modelo matemático. A par desta análise, elencam-se as atividades cognitivas associadas às transições entre as diferentes fases do processo de modelação de Stillman e Galbraight (2012), bem como as representações privilegiadas pelos alunos (Amado, 2022).

A categoria 'Aprendizagem de funções contextualizada por fenómenos sociais' é dividida em duas subcategorias de análise: o conhecimento reflexivo; e espaços de interação. Por sua vez, estas subcategorias são percecionadas por elementos da literatura que conduzem à importância que os alunos atribuem à aplicação da Matemática para a resolução da tarefa (Gutstein, 2018; Rubel et al., 2021; Skovsmose, 2023); e o debate crítico que é gerado (Barbosa, 2006; Simic-Muller, 2019).

Relativamente ao tema 'Contributos das tarefas de Modelação' (Tabela 8), circunscreve-se a análise às categorias: i) perspetivas dos alunos; e ii) perspetivas das professoras da turma.

Tabela 8

Categorias e dimensões relativas a Contributos das tarefas de modelação

Categorias	**Dimensões**
Perspetivas dos alunos	Importância das Pesquisas
	Trabalho em grupo
	Benefícios das tarefas
	Dificuldades
	Contributo do debate das questões sociais
	Matemática como ferramenta de apoio à interpretação das desigualdades
Perspetivas da professora da turma	Mudança de atitudes nos alunos
	Dificuldades no processo de modelação
	Motivação e autonomia dos alunos
	Constrangimentos

As duas categorias relativas ao tema Contributos das tarefas de modelação foram analisadas segundo dimensões que emergiram dos dados, como forma de balanço dos produtos finais.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DE CASO SOBRE A TURMA DE 8º ANO

O capítulo do caso de uma turma de 8.º ano encontra-se organizado em quatro secções. Na primeira, procede-se a uma descrição do contexto escolar e a um retrato preambular dos intervenientes, que pretende situar o caso no seu ambiente. Ainda nesta secção é dada a conhecer a voz dos alunos (assim como da diretora e dos docentes do grupo de Matemática) sobre o sentido que atribuem à importância de aprenderem Matemática e às situações de ensino que lhes são inculcadas com esse fim, procurando, desta forma, analisar as condições de partida e o grau de recetividade dos alunos à indução de atividade de modelação matemática, bem como as suas perspetivas sobre uma Educação Matemática para a Justiça Social. Na segunda secção é descrita a atividade dos alunos referenciada às tarefas de modelação matemática baseadas em questões sociais. De seguida, é percecionado o benefício da introdução de atividades de modelação que relacionem o tema de funções com temas extraescolares do mundo real, primeiramente, sob o ponto de vista dos alunos, seguido da posição da professora. Por fim, é apresentada uma síntese do capítulo com o propósito de refinar as dinâmicas estabelecidas em torno das tarefas de modelação circunstanciadas ao ambiente em que se desenvolveram e aos produtos que originaram.

5.1. O horizonte escolar e as vozes de intervenientes da comunidade educativa

O enquadramento do ambiente educativo vivido pelos alunos que são o foco investigativo é aqui apresentado, em primeiro lugar, pelo modo organizativo da escola e pelos seus principais eixos de ação, emergentes quer dos seus principais documentos, quer do discurso da representante do órgão de gestão. A escola composta por diferentes agentes educativos é um dado adquirido desde a democratização da mesma. Julga-se, portanto, incontornável dar a conhecer a perceção dos seus principais intervenientes, pela mão da representante do órgão de gestão da instituição, pelos professores do grupo de Matemática e pelos alunos da turma de 8.º ano.

O objetivo desta abordagem é conhecer algumas das inquietações éticas e das práticas relativas à profissão, no caso da diretora e dos professores de Matemática. No caso dos alunos, tenta-se compreender como equacionam e vivem as práticas educativas, a par das noções que detêm sobre Matemática e a realidade bem como o enfoque dado à disciplina relativamente a assuntos de carácter social.

5.1.1. A escola e a sua missão

O Agrupamento de Escolas da turma que integra este estudo de caso, doravante designado por Agrupamento de Escolas Florbela Espanca, situa-se num dos concelhos do Barlavento algarvio e abrange três das suas freguesias. Embora a escola sede date do ano letivo 2010—2011, as restantes escolas que a compõem têm décadas. Conta, no momento, com cerca de 1900 alunos, distribuídos por onze estabelecimentos, desde o ensino pré-escolar ao ensino secundário. A escola a que se reporta o presente estudo é a escola sede, escola de Ensino Básico de 2.º e 3.º ciclos e Ensino Secundário, localizando-se em meio urbano o que, desde já, a faz distinguir das outras duas escolas similares do Agrupamento, uma vez que uma delas se situa num meio piscatório e a outra num meio rural. Cada uma das escolas apresenta realidades singulares não só pela sua dispersão geográfica como também pelo facto de a população escolar que a frequenta derivar de diferentes contextos socioeconómicos (Projeto de Intervenção 2019-2023, p. 7). Quanto à resposta educativa, o Agrupamento de Escolas aposta no Ensino Básico, para além dos currículos regulares, na promoção da inclusão social com a oferta do Programa Integrado de Formação e Educação (PIEF) numa das suas escolas, tendo também na escola sede turmas de ensino integrado de Música. O Ensino Secundário funciona apenas na escola sede e encontra-se totalmente dedicado ao Ensino Profissional nas áreas da Música e Artes do Espetáculo. O Agrupamento possui uma unidade de apoio especializado à educação de alunos com multideficiência. Em termos genéricos, a missão do Agrupamento incide na promoção do sucesso individual dos alunos, tal como é preconizado no seu Projeto Educativo (PE), bem como, pretende que o ensino seja de qualidade, assente na igualdade de oportunidades, pautado por valores éticos e socialmente responsáveis. Para operacionalizar estes princípios o corpo diretivo apoia-se numa oferta educativa diferenciada, como explicita a diretora:

> Ao nível do agrupamento, nós oferecemos dentro do 1.º, 2.º e 3.º ciclos, no secundário, diferentes oportunidades. Por exemplo, numa das escolas do agrupamento temos PIEF que é uma oportunidade que contribui de facto para a inclusão, isto é, aqueles alunos que estavam no fim de linha o agrupamento dá-lhes respostas e com o tempo tem vindo a funcionar muito bem, a dar as respostas adequadas. Nós conseguimos dar aos nossos alunos que têm um percurso mais irregular esse encaminhamento, que lhes permite concluir o 3.º ciclo com sucesso e que lhes permite depois seguir o seu percurso educativo. (ED)

Para além do já referido, um dos objetivos da escola é assumir-se como um espaço de intervenção social (PE), e, neste sentido, o Agrupamento desenvolve um conjunto de atividades que se possam inscrever neste domínio; nomeadamente, na interação dos alunos com instituições de

solidariedade, quer seja no campo da recolha e doação de bens materiais: "agora, por exemplo, não tarda, vão realizar uma atividade que tem a ver com os animais, tudo aquilo que conseguirem angariar vão entregar à associação dos animais" (ED), quer seja numa ótica de partilha de saberes: "também, por exemplo, os alunos vão aos lares de idosos, vão trabalhar com eles, tocar, cantar..." (ED).

Em termos diretivos, o órgão de gestão da escola é formado por uma equipa coesa e com experiência de trabalho conjunto, que dá início ao funcionamento da escola sede no ano letivo 2010—2011, empenhado em construir o Agrupamento com base na "diversidade de todos quantos o integram, com a atenção e acompanhamento devidos, no respeito pelas especificidades e preservação de cada identidade" (Projeto de Intervenção 2011-2015, p. 3).

Nas palavras da diretora, corroboradas pelo PE, o corpo docente é estável, verificando-se, recentemente, um aumento significativo de professores pertencentes aos Quadros. As idades dos professores concentram-se entre os 35 e os 50 anos, o que, segundo a diretora, se caracteriza por um corpo docente jovem.

> Não temos muitas pessoas em idade de aposentação, temos muitas pessoas jovens. Ainda outro dia estive a consultar os escalões e não há muitas pessoas no 8.º ou 9.º escalão. Há uma grande quantidade de professores contratados, tem vindo a diminuir, mas especialmente na escola sede, que tem características diferentes, que é o facto de ter ensino artístico especializado, nomeadamente nos cursos profissionais porque temos cursos de jazz e teatro e aí leva-nos a ter um conjunto de professores contratados jovens. Fora isso, é um corpo minimamente estável, com as mudanças naturais. (ED)

No que se refere ao ambiente da escola em termos profissionais, a diretora define-o como "agradável, as pessoas sentem-se bem, acho que se sentem livres, confortáveis" (ED). Já no que diz respeito à motivação do corpo docente, apesar de não sentir que exista mais desmotivação que há uns anos, reconhece que os professores revelam desgaste e cansaço e aponta uma possível razão: "o que eu acho que são exigidas muitas tarefas fora de sala de aula. Enquanto diretora tento, dentro dos normativos legais, ao abrigo do artigo 79, por exemplo, retirar o excesso, tudo o que sirva para apaziguar" (ED).

Relativamente aos resultados do desempenho escolar dos alunos, tanto na avaliação interna como na avaliação externa proveniente dos exames nacionais às disciplinas de Português e Matemática, a diretora, Ana Maria, mostra-se orgulhosa:

> Na avaliação externa que tivemos fomos avaliados com Muito Bom nessa área, como, aliás em todas as outras áreas. Nós, neste r*anking* que saiu, tendo eu muitas reticências em relação aos *rankings* porque eles dependem exatamente dos contextos, ficamos em primeiro lugar no concelho. Em relação à média nacional também julgo que estamos bem. (ED)

Com esta afirmação depreende-se uma certa preocupação com a avaliação externa e posicionamento nos *rankings* escolares que acaba por ir ao encontro da missão do agrupamento que incide na promoção do sucesso individual dos alunos (PE).

No que diz respeito aos resultados alcançados pelos alunos do Agrupamento à disciplina de Matemática na avaliação externa, Ana Maria remete para o Muito Bom obtido na avaliação externa do próprio Agrupamento, no que se refere a esse indicador, e acrescenta que a escola ficou em primeiro lugar relativamente às outras escolas do concelho. Ainda assim, salienta que, dentro do Agrupamento, os resultados das três escolas foram distintos porque os contextos também o são, alertando, por isso, para o cuidado a ter na leitura deste tipo de estudos, explicitando:

> Eu tenho muitas reticências em relação aos *rankings*, porque eles dependem exatamente dos contextos. Por exemplo, os professores que nós temos aqui são os mesmos que temos em B e C, e lá os resultados são diferentes. Eu não posso comparar a escola A com a B ou a C porque o estrato social a nível socioeconómico e cultural dos pais é diferente. (ED)

Nos corredores da escola, o ambiente é tranquilo, onde a reverberação do som de alguns instrumentos cria uma atmosfera intimista. As paredes cobrem-se de desenhos, pinturas e inúmeros trabalhos são expostos um pouco por todo o lado, denotando uma participação ativa dos alunos na comunidade escolar. Num dos acessos à sala dos professores, em lugar de destaque, encontra-se uma plataforma de exposição dedicada à floresta, sendo a mesma preenchida por trabalhos de vários alunos e cujo tema central é a importância de defender a floresta[63] (NC_fev 2018).

5.1.2. A diretora do Agrupamento

Nesta subsecção é dado lugar ao posicionamento individual da representante do órgão de gestão no que diz respeito às representações que estabelece quanto a um possível imperativo ético da disciplina de Matemática, razões do seu insucesso e propostas de reorientações curriculares.

[63] No ano de 2017 deflagraram, em dois momentos distintos, incêndios devastadores, sobretudo, na região centro de Portugal.

Apesar de contar com muito tempo de serviço na direção, a diretora do Agrupamento reconhece que os desafios colocados em termos de políticas educativas são uma constante. O último deles surge com a operacionalização do referencial Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, cujo imperativo é assegurar a coerência do sistema educativo, após ter sido alargado o número de anos de escolaridade obrigatória, e que, nas palavras da diretora: "é um documento excelente, exemplar, temos especialistas muito bons a trabalhar nestas áreas" (ED). Os reptos colocados atualmente são, segundo Ana Maria, fazer com que todos os alunos consigam permanecer na escola e garantir o seu sucesso, tendo como atrito o reflexo de alguns dos problemas da sociedade: "nós temos um desafio muito grande à nossa frente, e o que vem acontecendo é que é muito difícil porque os próprios problemas da sociedade têm vindo a fazer que nem todos consigam" (ED). A diretora especifica estas adversidades referindo-se a "famílias desfavorecidas, monoparentais, famílias desestruturadas, ambientes difíceis", acrescentando que "o espelhamento desta conjuntura numa escola democrática torna a tarefa hercúlea" (ED). Como resposta, a representante do órgão de gestão defende que "o desafio passa por encontrar uma escola em que os alunos não passem tanto tempo na escola" (ED) aludindo à necessidade de que sejam implantadas medidas que garantam o sucesso, enquanto deixam mais tempo livre aos jovens e às famílias para que se possam reencontrar.

Quanto aos motivos que levam ao elevado insucesso escolar registado pela disciplina de Matemática, a diretora remete para o facto de "os próprios especialistas não conseguem dar uma resposta, portanto eu também não consigo ter uma resposta para isso" (ED). No entanto, para além de destacar algumas inquietações que os professores do Agrupamento que dirige apontam em sede de Departamento, como o "não conseguirem cumprir integralmente o programa ou o nível de abstração exigido para cada nível de ensino não ser compatível com a faixa etária" (ED), Ana Maria assinala a existência daquilo a que denomina por "uma espécie de aceitação cultural" (ED), justificando-o com as seguintes palavras:

> Há aqui uma questão que não é genética de certeza, mas eu acho que é cultural. Os próprios encarregados de educação se alguém lhes perguntar como correram os resultados dos seus educandos dizem - Ah, correu bem, só teve negativa a Matemática, mas aquilo também é tão difícil e eu também já tinha negativa! - É assim uma coisa que se aceita, ter negativa a Matemática é uma coisa normal, portanto, não tem problema nenhum e enquanto isto for cultural é difícil mudar. Mas eu, de facto, não tenho essa capacidade, posso ter algumas ideias, mas aquilo que tem acontecido é que ao longo dos diferentes ministros e com os diferentes governos ainda ninguém conseguiu mudar isto, encontrar solução, se calhar não há ou haverá várias soluções. (ED)

Sob o ponto de vista da diretora, é difícil contrariar esta idiossincrasia enraizada na sociedade, vincando que seria necessário reformular os currículos no sentido de tornar o ensino menos compartimentado. Nesse sentido, menciona que, na ausência desse modelo, a escola tenta ir pela via, dentro do possível, da interdisciplinaridade, explicitando que "o nosso PAA já está feito de modo que as nossas atividades sejam planeadas por várias disciplinas, pelas Ciências, pela Matemática, pela Físico-Química, pelos 2.º e 3.º ciclos" (ED). Neste sentido, a representante do órgão de gestão considera que seria importante transformar não só o programa de Matemática, mas o currículo em geral, principalmente de 2.º e 3.º ciclos, em algo compatível com uma natureza prática do conhecimento. Justifica esta posição remetendo para dados empíricos, como os resultados da última prova de aferição de Matemática realizada a nível nacional, com o que esclarece:

> Quando falamos dos resultados da prova de aferição e nalguns domínios, salvo erro, nos números e operações os resultados são muito maus. Mas, se formos, por exemplo, para a Estatística, os alunos demonstram capacidade para responder bem porque é uma coisa que tem mais a ver com a prática. (ED)

Na continuidade deste relato, Ana Maria reflete sobre a utilidade da Matemática no quotidiano e conecta-a à necessidade de transmitir aos alunos a relevância desta disciplina para interpretar os números:

> Nós todos temos dificuldades e não estou a falar só dos alunos, em interpretar números e em interpretar resultados e, sim, isso tem que ser na prática, na realidade, convivendo com eles. Eu quando dava aulas de Físico-Química tentava chamá-los muito à atenção para a importância de saberem e conseguirem interpretar os resultados e isso é saber interpretar o número, com o rendimento de uma máquina, o rendimento de um carro. É a interpretação dos próprios números que é muito complicada e aquela história que se diz que é x e y, as pessoas não conseguem perceber que aquelas letras são números. (ED)

De acordo com a diretora, a dificuldade na compreensão da Álgebra está estruturalmente associada à ausência de conexão com a realidade, contrapondo-a à aptidão dos alunos para a área da Estatística, com o argumento de que as oportunidades proporcionadas para a aprendizagem desta são articuladas com o mundo real.

Com a intenção de percecionar a posição da presidente do órgão que coordena e supervisiona a ação educativa do Agrupamento, tenta apurar-se, junto da mesma, qual a importância que atribui à introdução das diferentes componentes da Educação para a Cidadania nas disciplinas escolares e

como parte integrante do currículo, advogada pelas sucessivas tutelas. Mais especificamente, até que ponto considera possível uma transversalidade de uma educação que englobe estes elementos e a disciplina de Matemática, com fim à abordagem de temas como igualdade de género, direitos humanos, ambiente, sustentabilidade, interculturalidade ou equidade. Sobre este assunto, a diretora deixa claro que "existe uma excessiva compartimentação do ensino em geral" (ED). Ao mesmo tempo que reconhece que são "assuntos primordiais relativamente à formação do aluno enquanto pessoa" (ED) e que os próprios referenciais de educação para a cidadania defendem que exista uma transversalidade a várias disciplinas, a diretora tece críticas ao que sucederia idealmente e ao que acontece na realidade, como fica patente nas suas palavras: "tudo isto devia ser transversal, mas como na prática é difícil então o que se fez foi criar a gaveta da cidadania" (ED). O seu discurso sugere que a existência desta fragmentação também leva a que haja uma legitimação para a não concretização dessa abordagem nas aulas de Matemática:

> Eu acho que todas essas coisas podem ser abordadas na aula de Matemática, sem dúvida. Mas aí põe-se o mesmo problema, o professor tem um programa para cumprir e dar as duas coisas não é possível dado este constrangimento. Agora não temos tempo para isso, não pode ser, só na aula de cidadania... estamos na aula de Matemática. (ED)

No campo da ação mormente atribuída ao conselho pedagógico relativo ao combate à identificação da disciplina de Matemática como um fator determinante de desigualdade e exclusão escolar, a diretora discerne sobre o problema aludindo ao facto de não ter sido encontrada ainda nenhuma solução: "eu acho que é extremamente difícil, se não o fosse já alguém teria encontrado a solução ou, pelo menos, um bocadinho da solução" (ED). Considera que não é um problema que possa ser resolvido com um Projeto Educativo diferente, visto que "os melhores resultados que se conseguem nas escolas privadas não é porque essas escolas tenham PE diferentes ou estratégias diferentes é porque têm alunos diferentes" (ED). Aponta a coadjuvação em sala de aula como uma possível resposta educativa ao problema da disciplina de Matemática, no entanto, salienta que os alunos espelham "a grande diferença existente na sociedade" (ED) e que, por esse facto, ao serem de contextos diferentes as suas aprendizagens também se vão processar de forma distinta: "para isso, é preciso trabalhar com esses alunos de acordo com o seu contexto, mais individualmente, de outra maneira acho que não há milagres" (ED). Na sua elucubração, a diretora assume sentir alguma frustração relativamente à dificuldade em dar respostas à demanda que é exigida à escola para além das respostas educativas, refletindo-o nas suas palavras: "temos que dar respostas sociais, temos de

dar respostas médicas, temos de dar um conjunto de respostas para as quais não estamos preparados e não conseguimos" (ED). Finaliza o seu discurso retomando um argumento anteriormente dado no que diz respeito ao background dos alunos: "muitas vezes o aluno não tem sucesso, não tem só a ver com a escola, tem a ver com um conjunto de circunstâncias da vida dele que para isso a escola não tem solução" (ED).

Síntese

Da voz da diretora do Conselho Pedagógico e representante do órgão de gestão deste Agrupamento de Escolas são reconhecidos desafios atuais à operacionalização da promoção do sucesso individual educativo revestida por um ideal de ensino de qualidade, com raízes em valores éticos e com uma práxis de intervenção social. Com efeito, segundo a diretora, dar resposta ao que se encontra preconizado no documento Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatório coloca as instituições escolares num papel de maior centralidade social, mas também mais expostas a conflitos externos provenientes de alguns dos problemas existentes na sociedade.

Ao nível da disciplina de Matemática, a docente advoga uma transformação não só do programa de Matemática, mas do currículo nacional como forma de revestir o conhecimento escolar de uma natureza mais prática sustentando-o com o argumento de que as dificuldades na compreensão da Álgebra estão precisamente associadas à ausência de conexão com a realidade.

Do discurso da diretora do Agrupamento sobressai uma crítica conectada à responsabilidade civil que é, do seu ponto de vista, excessivamente outorgada à escola enquanto instituição. Outra das ideias que fica patente nas suas palavras é a existência de uma certa idealidade *versus* realidade no que toca à concretização de um currículo que visa fomentar nos alunos a Cidadania e torná-lo transversal a todas as disciplinas. Apesar da diretora estar totalmente de acordo com esse princípio, reconhece que, na prática não é assim que sucede. Quanto ao facto da disciplina de Matemática se estabelecer como um motivo de exclusão escolar a até social, Ana Maria considera que o ciclo é criado antes mesmo de o problema chegar à escola e o *background* dos alunos é decisivo para o seu despiste. Para minimizar as discrepâncias, a mesma sugere que seria necessário trabalhar de forma mais individualizada com cada aluno e, por esse motivo, indica a coadjuvação em sala de aula como o único meio existente ao momento para ir ao encontro do que defende.

5.1.3. O grupo disciplinar de Matemática de 3º Ciclo

Uma das múltiplas realidades que coexistem no interior de uma escola está, indubitavelmente, ligada ao perfil docente que a compõe. Com base nesta proposição, procura-se, nesta parte do capítulo, dar a conhecer as perspetivas e idealizações dos professores que compõem o grupo disciplinar de Matemática, abordando aspetos relacionados com as suas práticas profissionais habituais, especificamente, no campo do ensino de funções e a relevância dada à conexão com a realidade quer do conteúdo, quer da disciplina. Na continuidade, os docentes de Matemática dão conta dos modos como entendem que a Matemática pode ser entendida sob a lente da justiça educativa, pronunciando-se sobre a responsabilidade social que a própria acarreta.

Dos professores de Matemática participantes neste estudo, inclui-se a professora da turma de 8.º ano que constitui este caso, Marta, e três outros professores: Cristina, Jorge e Paula. No plano relativo à prática docente, pode ler-se na Tabela 9, que, no que diz respeito ao processo de planificação, os professores privilegiam quase exclusivamente o programa em vigor, focando-se na planificação que elaboram, no início do ano letivo, para a tentarem executar sem grande margem para desvios. Justificam este princípio explicando que a existência de um exame final de ciclo condiciona os docentes a serem rigorosos no cumprimento integral da planificação de acordo com as palavras expressas por Marta: "Tenho tendência a focar-me no programa e na planificação, pela preocupação da realização do exame final. Sentimos muito a necessidade do cumprimento da planificação. A Matemática e o Português têm muito essa preocupação, mais que as outras disciplinas" (EI). Paula acrescenta que "tenho em conta todo o currículo e a interdisciplinaridade, mas obviamente dou mais importância ao programa de Matemática" (E), não exemplificando de que forma estabelece na sua prática a interdisciplinaridade que refere.

Tabela 9

Respostas relativas à Prática Profissional dos Professores de Matemática do Agrupamento LJ

Subcategorias	**Tipos de Resposta**	**Participantes**			
		M	**P**	**J**	**C**
Planificação das aulas	Maior foco no programa relativamente ao currículo				
	Cumprimento integral da planificação				
Materiais didáticos utilizados	Materiais manipuláveis				
	Tecnologias digitais (computador, quadro interativo)				
	Manual adotado				
	Sites especializados				
	Software geométrico e/ou calculadoras gráficas				

Tipo de tarefas privilegiadas	Resolução de exercícios				
	Resolução de problemas				
	Tarefas de investigação				
Características da prática letiva	Aulas dinâmicas				
	Aulas expositivas				
	Aulas práticas				
	O aluno assume um papel central				
Avaliação dos alunos	Segue os critérios de avaliação do grupo disciplinar				
	Importância aproximação dos resultados da avaliação interna versus externa				
Cargo de diretor de turma	Maior proximidade e conhecimento do contexto dos alunos				
	Lecionação da disciplina de Cidadania				
	Maior grau de responsabilidade				
	Excessiva carga burocrática				
Dinâmicas de trabalho em que se envolve	Trabalho colaborativo				
	Trabalho entre colegas de um mesmo Conselho de Turma				
	Trabalho com Serviços de Psicologia e/ou Educação Especial				
	Projetos transdisciplinares				

Tendo em conta os materiais que integram nas suas estratégias de ensino, como se pode verificar na Tabela 9, os professores diversificam as mesmas, essencialmente, dentro da esfera digital, sugerindo uma relevância incontornável às plataformas educativas. Admitem, no entanto, que por falta de tempo as estratégias não são tão diferenciadas quanto gostariam. É o caso de Marta quando considera que deveria diversificar mais os materiais didáticos como estratégia de ensino, mas justifica-o com "a preocupação constante com a concretização e cumprimento integral do programa, não deixa muito tempo nem espaço" (EI_Marta). Paula corrobora este ponto de vista argumentando que nem sempre é possível adotar novas estratégias "por uma questão de logística" (E_Paula). Ambas enumeram alguns exemplos dos materiais que utilizam:

> Uso muito a plataforma da Porto Editora, Escola Virtual, como um material de auxílio. Recorro aos episódios da série "Isto é matemática", por exemplo, para explorar um certo tema. Com esta formação que estou a fazer estou a descobrir materiais novos. Por exemplo, há uma aplicação que se chama *PhotoMat*, que fiquei fascinada, em que se tira uma fotografia e o programa resolve. Estou ansiosa por mostrar aos alunos porque acho que é uma forma didática de utilizar os telemóveis. Também utilizo o Quadro interativo e o manual adotado é sempre utilizado em sala de aula. (EI_Marta)
>
> Tento usar as tecnologias, nomeadamente o computador. Dependendo dos conteúdos que pretenda transmitir, uso diferentes plataformas, entre elas a Aula Digital do grupo Leya, a Escola Virtual da Porto Editora. Na área de Estatística explorámos a página do projeto ALEA. Comecei, há pouco, a trabalhar com a *Khan Academy*. Algumas vezes utilizo o programa *GeoGebra*. Infelizmente, não ponho os alunos a trabalhar com o programa porque requer muito tempo até que dominem minimamente as ferramentas. Estes materiais utilizo com o intuito quer de exemplificar a aplicação dos conteúdos

> matemáticos, quer com o objetivo de motivá-los. Claramente também uso o manual adotado e também apresentações *PowerPoint*. (E_Paula)

Do discurso das duas professoras depreende-se preocupação para com a adoção de estratégias que estimulem os alunos para a visualização dos conteúdos matemáticos apoiadas por suporte tecnológico. As docentes terminam as suas intervenções, relativamente a este tema, fazendo referência ao manual adotado, sugerindo uma inevitabilidade no seu uso. De forma semelhante, também para Cristina, o manual é usado como suporte às aulas, sustentando que "para que as mesmas sejam mais fluidas e para que os alunos possam consolidar os temas lecionados" (E_Cristina). Esta docente exemplifica ainda os materiais adotados, com a utilização de materiais manipuláveis na lecionação de conteúdos de Geometria, defendendo a importância da visualização, bem como "também, por vezes, recorro à apresentação de gráficos reais, nomeadamente nos tópicos de funções, com o intuito de mostrar aos alunos a aplicabilidade da matemática" (E_Cristina). Por sua vez, Jorge assume que usa com mais regularidade o manual e a calculadora gráfica, salientando que, quando se proporciona, sente-se "confortável na utilização de *softwares* geométricos como o GeoGebra" (E_Jorge).

Quanto ao tipo de tarefas levadas à sala de aula, sobressai, das respostas destes professores, o formato de exercícios seguido dos problemas, como evidenciado na Tabela 9. Todos eles admitem que a utilização de projetos é interessante, mas pouco exequível, tal como aponta Jorge: "os projetos são aliciantes, mas obriga a muita preparação e a estar relativamente integrado no meio, o que no meu caso é difícil visto que ando sempre a saltar de escola, as tarefas que uso centram-se muito em problemas" (E_Jorge). Explicitando o motivo da sua escolha, Marta afirma que "a resolução de exercícios é a prática mais habitual, na medida em que surge como uma aplicação dos conteúdos que lhes foram apresentados. Acabam por ser as tarefas que o manual apresenta e estas tarefas são mais sobre a forma de exercícios" (EI_Marta). Analogamente, Cristina descreve a finalidade das tarefas que integra, salientando que:

> Utilizo muito as fichas de trabalho com exercícios. Essa é a base de tarefas que compõem as minhas aulas. No entanto, com frequência, proponho a resolução de problemas a realizar pelos alunos em pares e também, pontualmente, para introduzir um determinado tema, recorro ao trabalho de investigação a realizar pelos alunos em pares ou em grupos. (E_Cristina)

A justificação de recorrerem apenas pontualmente à inclusão de tarefas de investigação incide na falta de tempo para a lecionação integral do programa, bem como para a planificação das tarefas, como é evidenciado por Paula:

> As tarefas de investigação uso de longe a longe, com o intuito de pesquisar e enquadrar historicamente. Por uma questão de tempo, o programa é muito extenso e tem de ser cumprido na íntegra. No final do ano os alunos são avaliados com uma prova externa e, no fundo, nós também. Porque se alguém nos questiona por que não lecionamos determinado conteúdo, ficamos em xeque. Corre-se contra o tempo e uma tarefa de investigação é algo que leva muito tempo. Primeiramente, tem de se preparar os alunos para estarem predispostos a pensar, depois desenvolverem e explorarem em sala de aula. (E_Paula)

Na visão desta professora, a utilização de exercícios e de problemas é assim privilegiada com vista a uma maximização do tempo para o cumprimento do programa, sustentando-as na convicção de que são "tarefas que encaminhem o aluno ao resultado pretendido" (E_Paula).

As reflexões condizentes com a caracterização que este grupo de professores efetua da sua prática letiva assenta na descrição do modelo de aula que seguem. De acordo com o exposto no Quadro 1, as observações sugerem uma parte de aula expositiva seguida de uma parte mais prática e dinâmica, como indica a afirmação de Paula: "dou a matéria, faço a exposição, tento ser breve e depois mais prática. Insisto sempre na parte prática dos conteúdos" (E_Paula). Por sua vez, Marta procura que as suas aulas não sejam muito expositivas, salientando que "isso é cansativo principalmente na faixa etária do 3.º ciclo" (EI_Marta). Ainda assim, admite que, para introduzir um determinado conteúdo, haja momentos de um certo monólogo, nos quais a professora refere que "recorro a vídeos, vou parando e vou eu introduzindo o tema, para que não seja muito monótono e logo a seguir faço um exercício, a aplicação" (EI_Marta). A docente depõe o foco na dinâmica entre professor aluno, declarando que instiga os alunos a questionarem e a colocarem as suas dúvidas e ilustra-o quando afirma:

> Quando introduzo um conteúdo com recurso à realização de uma tarefa aí o papel dos alunos é chegarem eles mesmos à conclusão do que lhes é pedido e apresentarem essas conclusões à turma quando efetuamos a correção. E quando sou eu que apresento vou-os questionando a todo o momento. (EI_Marta)

Apesar de manifestarem recorrer à exposição dos conteúdos, os professores afirmam que outorgam o papel central aos alunos relativamente ao papel que desempenham. Para reforçar esta

ideia, Jorge exemplifica que "dou a tarefa aos alunos e depois eles têm que desenvolver a atividade, orientada por mim, eu estou lá para ajudar e esclarecer, mas são eles o ponto central. Esta é a linha que pretendo seguir sempre" (E_Jorge). Assim como Paula esclarece que: "gosto de aulas dinâmicas, portanto, tento que assim o sejam" (E_Paula). Embora assuma que conduza o ritmo da aula, salvaguarda que "indico as tarefas a realizar pelos alunos e verifico como o fazem, estando sempre disponível para os ajudar. Os alunos assumem um papel ativo, intervêm, dão opinião e dou-lhes sempre oportunidade de comentar" (E_Paula).

A avaliação dos alunos é descrita por este grupo de professores, e de forma unânime, como seguindo os parâmetros estabelecidos em sede de grupo disciplinar (Tabela 9) e no qual são criados os critérios de avaliação das aprendizagens que vão ao encontro dos normativos legais atualizados, sem referirem qualquer processo de consensualização a que possam, eventualmente, ter estado sujeitos. De entre eles, Paula enumera os instrumentos de avaliação que são aplicados e fundamenta a sua adequação, do seguinte modo:

> Regra geral, o maior peso encontra-se na parte escrita, o que se consegue quantificar, testes e minitestes, questões de aula, algum trabalho de pesquisa. Isso, é a parte principal, quantitativa. Também com a avaliação externa é importante balizar. Cerca de 20% da avaliação final é para o domínio das atitudes e valores, ou seja, comportamento, empenho. (E_Paula)

O ponto de vista de Paula sugere a valorização de uma clareza de evidência no desempenho dos alunos com a aplicação de critérios de avaliação que vão ao encontro da avaliação externa. De igual forma, Marta advoga que "ainda se continua a utilizar os testes, pela questão da existência da prova final. Admito que não me é muito confortável existir uma discrepância significativa entre a avaliação interna e externa. Sinto que algo correu mal se isso acontecer" (EI_Marta). No entanto, e pelo motivo referido, esta docente revela um sentimento de incapacidade em transformar estas dinâmicas muito enraizadas nas escolas, pondo em relevo o potencial discriminatório deste tipo de avaliação, admitindo que "com este modelo nos apercebemos mais facilmente quem vai conseguir cumprir com o que é previsto, visualiza-se o que pode acontecer na realização da prova. Vê-se que os alunos com mais dificuldades são perdidos à partida" (EI_Marta).

Do cargo de diretor de turma, este grupo de professores destaca, em comum, a excessiva burocracia que recai sobre os mesmos no exercício da função e o grau de responsabilidade acrescida à prática docente. As duas professoras de Quadro revelam ter muitos anos de experiência como diretoras de turma, enquanto os professores sem vínculo à escola dizem ser o primeiro ano em que lhes foi

atribuída essa função. Estes dois professores reconhecem que a experiência é, à data, muito parca, e, talvez por esse motivo, apenas salientam aspetos que se intuem negativos como o trabalho burocrático, a elevada responsabilidade e, como acrescenta Cristina, o tempo despendido: "o tempo letivo da própria disciplina é perdido tratando de assuntos da direção de turma" (E_Cristina). Por outro lado, Paula parece assumir como algo positivo o facto de aumentar o seu compromisso face aos alunos, uma vez que considera que "sem dúvida que se estreita a relação com os alunos, é mais profunda. Conheço os seus contextos familiares, se tiverem algum problema falam comigo. Mesmo eu, sinto maior preocupação por eles" (E_Paula). De igual forma, é para Marta importante esta proximidade, reiterando que "ao conhecer os pais e encarregados de educação dos meus alunos, na existência de algum problema consigo entender mais facilmente a sua possível causa" (EI_Marta). A professora evidencia ainda a vantagem de enquanto diretora de turma lecionar a disciplina de Cidadania, referindo-se à possibilidade de desenvolver um conhecimento mais próximo da turma.

> Na disciplina de Cidadania, acaba-se por ter uma relação diferente com os alunos, que permite conhecê-los melhor. Como professora de Matemática cingimo-nos ao cumprimento de um programa, de uma planificação, pela preocupação de os preparar para a prova final e acabamos por nos desligar da parte emocional dos alunos e dos seus interesses. (EI_Marta)

O trabalho colaborativo no seio do grupo disciplinar de Matemática é referenciado como a dinâmica em que estes professores se envolvem na comunidade escolar, sendo que dois deles dizem ser mesma a única (ver Tabela 9). Com esta atividade conjunta os docentes indicam que efetuam trabalho de planificação, preparação letiva e construção de instrumentos de avaliação, com uma periodicidade semanal ou quinzenal, consoante esteja atribuído no horário dos professores. Outras referências são feitas por Marta, relatando que tenta articular os conteúdos matemáticos com professores de outras disciplinas, sempre que for possível, como indica: "trabalho principalmente com os professores da disciplina de Físico-Química e também Geografia, estes últimos com a leitura e interpretação de gráficos. Em Físico-Química é mais no cálculo, na notação científica, nas equações literais, nos vetores" (EI_Marta). Além disso, menciona gostar de se envolver em projetos transdisciplinares, como exemplifica: "O ano passado trabalhei, no dia do PI, conjuntamente com a professora de Português, na escrita de poemas, na parte da métrica" (EI_Marta). Ainda outra docente indica que, na dinâmica entre pares, importa referir que "os professores têm de estar em constante comunicação com os Serviços de Psicologia e com a equipa multidisciplinar que agrega a Educação Especial" (E_Cristina).

Ao indagar sobre as dinâmicas de aula implementadas e tipos de tarefas desenvolvidas no ensino de funções, tenta-se, também, aferir junto dos professores quais as principais dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem deste conteúdo, e de que forma os docentes associam o ensino de funções à vida real e/ou à modelação de situações de diversos contextos. Atendendo à descrição que os professores fazem do modo como ensinam a temática de funções, evidencia-se, nas suas respostas (Tabela 10), um cunho próprio que adquiriram com a experiência. É o caso de Marta, que informa que "quando se introduz a Álgebra os alunos perdem-se, principalmente no 7.º ano" (EI), daí que opta por introduzir a noção de correspondência associada ao conceito de função através da utilização dos diagramas sagitais para, posteriormente, conectar outras formas de representação. A professora realça, ainda, que "trabalho muito com gráficos que representem situações do dia a dia" (EI_Marta), justificando-o pela importância de os alunos perceberem a utilidade das funções. Nesta linha de pensamento, Jorge narra a forma como introduz o conceito de função:

> Ensino as funções a partir do conceito que define uma função e, a partir daí, dou aos alunos um trabalho, normalmente, desenvolvido em grupo, no qual eles têm de encontrar pares de variáveis que se relacionem de forma que uma variável dependa da outra e cada termo da variável independente corresponda apenas um e um só termo da variável dependente. Procuro que eles encontrem essas variáveis em coisas que lhes sejam familiares, coisas do dia a dia deles e sinto que é uma experiência que tem corrido bem ao longo dos anos. (E_Jorge)

Desta declaração depreende-se também que, para além de ser técnica desenvolvida com a prática, existe uma preocupação para com a associação das funções ao quotidiano, sendo que essa conexão é ainda percecionada na resposta de outra das docentes. Já para Paula o fator tempo é salientado para explicar o uso de *softwares* de matemática dinâmica para poder rentabilizar o tempo dedicado ao estudo de funções, descrevendo que "não concordo, mas se virmos bem, o programa atribui muito pouco tempo ao ensino de funções, por isso, através do *GeoGebra* consigo rapidamente mostrar-lhes as diferentes formas de representar uma função, que é o mais importante" (E_Paula).

Tabela 10

Respostas relativas ao ensino de funções e integração de tarefas de modelação

Subcategorias	**Tipos de Resposta**	**Participantes**			
		M	P	J	C
Características do ensino funções	Explorar o conceito inicial de função através de diagramas sagitais	■			
	Estabelecimento de relações entre a diversidade representacional	■	■		
	Uso do *GeoGebra* e outros aplicativos		■		■
	Analogias com o quotidiano através da leitura de gráficos	■			■
	Trabalho de investigação em grupo			■	

Dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem de funções	Agravaram-se com a entrada das metas curriculares				
	Expressão analítica				
	Operações com funções				
	Identificar e relacionar os tipos de função				
	Utilidade das funções				
Conexões entre funções e realidade	Variação das marés				
	Variação dos preços				
	Exemplos associados aos interesses dos alunos				
Práticas de modelação	Inexistentes				
Fenómenos sociais passiveis de serem modelados	Questão de género				
	Desporto				
	Economia				
	Despesas do orçamento familiar				

No que diz respeito às dificuldades, percecionadas pelos professores, que os alunos manifestam na aprendizagem do tema de funções, as respostas mostram uma unanimidade na constatação de que estas dificuldades se agravaram com a entrada em vigor das Programa que contempla as Metas Curriculares. Marta refere expressamente que "com este programa das metas curriculares introduziram-se operações com funções no 7.º ano, somar, subtrair funções... os alunos perdem-se e alheiam-se completamente" (EI_Marta). Mencionam também que um dos principais bloqueios revelados pelos alunos é na definição de uma função através da expressão algébrica (Tabela 10), bem como em percecionar a sua utilidade. Na perspetiva de Paula, um dos grandes problemas encontra-se na relacionação entre os tipos de função, "não conseguem relacionar os vários tipos de função, distinguir se é uma função linear, quadrática, não têm a agilidade que seria desejável. Não é nada intuitivo para eles" (E).

Relativamente às questões como pode ser o ensino das funções relacionado com o meio envolvente e com os interesses dos alunos, as respostas dos professores (Tabela 10) colocam em evidência a complexidade do assunto, sobretudo no que concerne aos interesses dos alunos, como exemplificam as afirmações de Paula e de Jorge:

> Os materiais que nos são disponibilizados não estão muito virados para aí (E_Paula);
>
> Não costumo recorrer porque para ter tarefas de modelação necessitaria ter dados reais e isso não é muito fácil e, de facto, como não estou habituado a trabalhar dessa forma, também é difícil, embora reconheça que seria muito interessante (E_Jorge).

Destas afirmações ressalta um ponto de vista comum que passa pela compreensão dos benefícios da integração de tarefas de modelação sem, no entanto, o praticarem. Ainda assim, este grupo de docentes aponta alguns exemplos de fenómenos sociais que poderiam ser relevantes nas

atividades de modelação, como ilustra a Tabela 10, destacando aspetos como a desigualdade de género, o Desporto, a Economia e o orçamento familiar.

A posição relativa à existência de uma responsabilidade social associada ao ensino da Matemática é analisada segundo uma vertente reflexiva e sob uma ótica de 'práxis' educativa. Assim, a concordância dos professores para com uma responsabilidade acrescida do ensino da Matemática devido ao grande insucesso escolar que revela é unânime, sendo que os fatores apontados para que tal suceda diversificam-se (Tabela 11). Entre eles, a existência de uma desconexão da Matemática com a realidade, ser uma disciplina que requer mais esforço e a impressão de um certo estigma social, como argumenta Marta: "a questão do insucesso da Matemática ainda se centra muito no estigma social de que se os pais não percebem de Matemática então é normal que os filhos também não. Como professores de Matemática devemos tentar inverter essa situação" (EI). Neste sentido, estes professores declaram adotar um conjunto de estratégias que fomentem a autoestima dos alunos em relação à disciplina, das quais se destacam a implementação de um ensino mais individualizado "que vá ao encontro das principais dúvidas reveladas" (E_Paula); que incuta a não desistência, o esclarecimento das dúvidas e a persistência, como advoga Marta: "tento que eles percebam que o estudo da Matemática tem que ter prática, que não desistam e quando têm dúvidas que questionem. Nem sempre nos apercebemos no meio de turmas com 25 a 30 alunos quem tem dúvidas" (EI). Ainda de referir, encontra-se a promessa aos alunos de que os conhecimentos matemáticos apreendidos serão necessários e também farão sentido no futuro, como fica patente nas palavras de Jorge: "converso muito com eles, e digo-lhes que aprenderem Matemática só lhes vai trazer coisas boas e importantes, é duro, é difícil, mas que isso lhes trará muitos benefícios" (E).

Tabela 11

Respostas relativas ao ensino da Matemática e responsabilidade social

Subcategorias	**Tipos de Resposta**	**Participantes**			
		M	**P**	**J**	**C**
Causas para o insucesso escolar na Matemática	Desconexão da matemática com a realidade				
	Requer mais esforço				
	Estigma Social				
Práticas que elevem a autoestima dos alunos relativamente à matemática	Tentativa de um ensino mais individualizado				
	Promessa de que os conhecimentos matemáticos farão sentido no futuro				
	Motivação através do incentivo em obterem sucesso				
	Aprendizagem matemática requer prática				
	Incutir a não desistência e o esclarecimento total das dúvidas				
Distinção entre ensinar e educar matematicamente	Transmissão de factos vs exploração				
	Mecanização vs levá-los a pensar matematicamente				
	Treino de habilidades e competências vs pensamento crítico				

Prática educativa assente na equidade e inclusão social	Ninguém fique para trás				
	Tentar explicar mais a quem não tem explicações extraescola				
	Ter maior tolerância com os alunos que vêm de contextos difíceis				
Matemacia no atual ensino de matemática	Não acontece				
	Um grupo muito reduzido de alunos conseguem captar essa ferramenta				

Do ponto de vista destes professores, existe uma clara distinção entre ensinar e educar matematicamente, resumindo esta diferenciação com a comparação entre transmitir factos e estimular o pensamento crítico, como fica latente com as considerações de Paula e Marta:

> Ensinar Matemática tem apenas a ver com os procedimentos, já educar matematicamente iria mais além, fazê-los adquirir pensamento matemático (E_Paula);
>
> Há uma diferença clara, porque penso que o ensino está muito centrado no cumprimento do programa, planificação, do que está no manual, educar matematicamente seria mais libertador, tentar criar um espírito critico (EI_Marta).

Pelos motivos esgrimidos, não acreditam que o atual ensino forneça aos alunos a *matemacia* defendida por Skovsmose (2012b), na medida em que consideram que apenas um grupo de alunos muito restrito poderá, eventualmente, adquirir essa competência (NCEI_fev2018).

Nas suas práticas letivas, os docentes procuram ter presente um dos princípios consagrados pela LBSE que defende a construção de uma escola pública assente na equidade e inclusão social, embora todos admitam que é um trabalho que tem de ser feito, essencialmente, por toda a sociedade. Ainda assim, procuram esgrimir alguns exemplos pelos quais seguem a sua conduta, como é o caso dos seguintes professores:

> Com os alunos de contextos mais difíceis sou, à partida, mais tolerante, para além de que tento encontrar estratégias para os poder ir buscar, para os fazer sentir parte (E_Jorge);
>
> Há alunos que têm explicações de Matemática. Mas há muitos pais que não têm essa possibilidade e a escola tem que ter essa responsabilidade porque isso aumenta as desigualdades escolares. Quando me apercebo disso tento chegar mais aos que não têm essa possibilidade. Estarei errada nesta forma de atuar? (EI_Marta).

Do discurso destes professores intui-se que ambos assumem a diferenciação pedagógica como uma componente chave na aceitação de todos os alunos e como suporte à redistribuição do sucesso escolar de alunos provenientes dos mais variados contextos socioeconómicos.

Síntese

O discurso dos docentes no que diz respeito à prática profissional é dominado por uma preocupação notória para com a planificação circunscrita, por sua vez, ao programa de Matemática e condicionada ao seu total cumprimento, numa espécie de pêndulo compassado pelo tempo que decorre desde o início do ano letivo e de ciclo até à realização do exame final. De igual forma, é justificada a limitação dos materiais didáticos utilizados ao manual adotado e às plataformas educativas existentes, reconhecendo o fator tempo como motor de embate à diversificação de estratégias. Os professores optam pela resolução de exercícios e de problemas como as tarefas privilegiadas em sala de aula, bem como caracterizam as suas aulas como aulas maioritariamente expositivas, apesar de pretenderem que o aluno detenha o papel central. Embora se intua contraditório, alguns docentes justificam esta prática sob uma dinâmica primeiramente teórica onde, de seguida, é dado total foco às atividades dos alunos. Quanto à avaliação dos discentes é efetuada aplicando taxativamente os critérios definidos pelo Departamento Curricular. Com respeito ao desempenho do cargo de diretor de turma perceciona-se duas vertentes, uma de crítica à 'máquina' burocrática, e outra, de valorização do papel social relativo a um maior conhecimento do contexto familiar de cada aluno. O trabalho colaborativo é nomeado para exemplificarem as dinâmicas de trabalho em que os docentes se envolvem, assim como o trabalho próximo com as equipas de Educação Especial e os serviços de Psicologia.

Apesar de conscientes de que é imprescindível conectar o ensino da Matemática à quotidianidade, os docentes aqui evidenciados mostram uma certa impassibilidade na sua concretização. Na ótica dos professores os alunos manifestam muitas dificuldades na aprendizagem da Álgebra e, concretamente, no caso das funções, que dizem terem-se agravado com a implementação das metas curriculares. No entanto, as práticas que referem para adotar para o seu ensino de funções indiciam o mesmo *modus operandi* que para os restantes conteúdos, sendo que apenas dois dos docentes afirmam efetuar analogias com o quotidiano através da leitura de gráficos. Talvez pela evidente complexidade revelada em dar resposta ao modo de operacionalizar os conteúdos de funções com a realidade, os professores assumam na sua prática docente a modelação matemática como sendo inexistente. Nas justificações dadas surge, novamente, a falta de tempo, o facto de o programa ser muito extenso assim como o número de aulas que o mesmo atribui às funções ser reduzido.

De uma forma global, quando chamados a refletir sobre os princípios basilares que constituem a génese da escola democrática e o papel que a disciplina de Matemática desempenha no seu funcionamento, os docentes mostram alguma dificuldade em apresentarem as suas posições. As

principais causas que apontam para o insucesso da Matemática são uma desconexão da mesma com a realidade, ser uma disciplina que requer mais esforço e a existência de um certo estigma social. De forma a contrariá-lo, estes professores procuram, acima de tudo, incutir a não desistência, implementar um ensino mais individualizado e tentar mostrar aos alunos que os conhecimentos apreendidos serão, mais tarde, aplicados nos seus futuros. Todos os professores são da opinião que existe uma diferença entre ensinar e educar Matemática, depondo o foco na distinção entre a primeira ser mera transmissão de factos com vista à mecanização e a segunda requerer a exploração e o desenvolvimento do pensamento matemático. A maneira como na sua 'práxis' educativa tem presente práticas inclusivas difere dos princípios que priorizam e que passam pela diferenciação pedagógica de acordo com proveniência do contexto dos alunos. A unanimidade na reflexão de que no sistema atual de ensino não é fornecida a ferramenta da *matemacia* aos alunos é total neste grupo docente.

5.1.4. A turma do 8º ano

Procede-se a uma análise sucinta da turma de 8.º ano que, para além de dar conta de características como a distribuição etária ou de género, trata também alguns aspetos relacionados com o desempenho escolar dos alunos. Segue-se um enfoque das inquietações relativas às aprendizagens escolares, tentando compreender como se equacionam e vivem as práticas educativas, esmiuçando as representações que fazem acerca da utilidade da Matemática nas suas vidas. Termina-se com uma reflexão dos alunos sobre a interpretação que detêm de justiça social, das suas implicações na distribuição de recursos básicos e do possível empoderamento que a Matemática pode fornecer no conhecimento destas problemáticas.

A turma de 8.º ano sobre a qual incidiu este estudo de caso compõe-se por 22 alunos, oito raparigas e catorze rapazes, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos, com uma idade média de 12 anos, todos de nacionalidade portuguesa. Nenhum dos alunos é repetente e apenas um aluno apresenta uma retenção no seu percurso escolar. Em termos de ação social escolar, oito alunos beneficiavam do escalão A, três alunos do escalão B e um aluno do escalão C. No que diz respeito ao aproveitamento escolar, no ano letivo transato um aluno integrou o Quadro de Excelência e três alunos integraram o Quadro de Mérito. Dos vinte e dois alunos da turma, sete frequentavam o ensino integrado e um o ensino articulado.

Da análise do Projeto Curricular de Turma (PCT, 8.º ano) analisa-se que, como resultado da troca de opiniões, experiências e atividades realizadas, os docentes do Conselho de Turma enumeraram como pontos fortes deste grupo turma o bom ritmo e competências de trabalho na aula,

a participação, a criatividade e a boa capacidade de trabalho em grupo. No que respeita ao desempenho académico da turma, ao longo do 1.º período, os professores do Conselho de Turma consideraram-no de satisfaz, uma vez que cinco alunos obtiveram três ou mais níveis inferiores a três, mas nenhum destes alunos reuniu, simultaneamente, nível dois a Português e a Matemática (PCT). Os professores justificaram estes referidos resultados argumentando que alguns dos alunos revelam baixos níveis de concentração em sala de aula e não apresentam hábitos e métodos de trabalho, manifestando também pouco empenho na realização das atividades escolares, bem como dificuldades na expressão escrita (PCT). Como estratégia de superação, na reunião de avaliação do 1.º período, foram criados Planos de Promoção de Sucesso Escolar (PPSE), num total de 12, para os alunos com maiores dificuldades, os quais pressupunham um conjunto de acomodações de cariz motivacional, curricular e de avaliação, específicas a cada aluno.

Do ponto de vista da professora Marta, o grupo turma era cooperante e interessado, embora existam alguns alunos um pouco conflituosos e outros com muitas lacunas nas aprendizagens (NCEI_fev 2018). Como diretora de turma destes alunos, a professora reconhece que consegue conhecê-los melhor e que "acaba-se por ter uma relação diferente, mais próxima" (EI_Marta), ao mesmo tempo que, por ser a responsável da área curricular de Cidadania e Desenvolvimento, consegue trabalhar com os alunos valores de respeito mútuo e autoestima, "muito essenciais para esta turma" (EI_Marta).

As trajetórias escolares deste grupo de alunos estão marcadas, de uma maneira geral, por um passado em conjunto, visto que a maioria deles frequentou a mesma escola do 1.º ciclo (NCEI_fev2018). O sentimento de pertença a um coletivo é, assim, denotado por uma conjuntura próxima. Já no que diz respeito a um cenário macro esta apropriação parece esvanecer-se quando analisados quer o vínculo emocional que conservam da escola, quer o que os motiva em frequentar a mesma. A frequência relativa à relação que detêm com as escolas por onde passaram revela que grande parte destes alunos a caracteriza como ambígua ($n = 11$), como se pode ler na Tabela 12. Nas justificações desta resposta, alguns estudantes descrevem a relação com a escola como um hábito ao qual acabaram por se acostumar, enquanto outros salientam que gostam de vir à escola para estarem com os amigos e não tanto pelas aulas ou pelo gosto das disciplinas, tal como expressa a aluna Ângela: "gosto de vir à escola para estar com os meus amigos, acho algumas aulas interessantes e outras uma seca e gosto dos intervalos" (EI_G6). Há, ainda, quem evidencie que já gostou da escola, mas que, com o avançar dos anos, deixou de gostar, como exemplificam as afirmações de Frederico e Pedro: "Acho aborrecido. Quando era mais pequeno gostava, mas depois ao

longo dos anos deixei de gostar, por volta do 6.º ano, talvez isso tenho acontecido pelas disciplinas serem mais difíceis" (EI_Frederico, G4); "Quando era pequeno gostava e agora não gosto. Eu gosto de vir à escola, não gosto é de estar enfiado numa sala de aula. Não gosto de andar carregado, são várias disciplinas num dia!" (EI_Pedro, G6).

Tabela 12

Frequências relativas ao percurso e motivação escolares da turma de 8.º ano

Subcategorias	**Perceções**	**Frequência**
Relação com a escola	Boa	5
	Mais ou menos	11
	Má	4
Motivação para a escola	Estar com os amigos	16
	Tirar boas notas	8
	Ter um futuro bom	6
Fatores de desmotivação	Ter que estudar muito	8
	As aulas começarem cedo	5
	Muitas disciplinas	7
	A longa duração das aulas	5
Disciplinas preferidas	História	12
	Físico-Química	7
	Educação Física	6
	Educação Visual	4
	Geografia	4
	Português	3
	Matemática	3
Disciplinas menos apelativas	Ciências Naturais	12
	Português	8
Disciplinas que revelam mais dificuldades	Ciências Naturais	6
	Português	4
	Matemática	8
	Inglês	8
Área que gostariam de estudar no futuro	Medicina	5
	Fisioterapia	4
	Engenharia	5
	Representação	2
	Informática	4
	Desporto	3
	Educação de Infância	2
	Música	2

Do que mais os motiva a estarem na escola, como apresentado na Tabela 12, é, em primeiro lugar, o convívio social, seguido do estímulo encadeado em conseguir bons resultados para ter um bom futuro, como relatam Tomás e Rodrigo:

> O que mais motiva é saber que se me empenhar na escola, quando for adulto posso ter uma profissão normal e um dinheiro razoável, em vez de estar a ganhar o ordenado mínimo (EI_G2);
> O que mais motiva são os amigos, mas também vir para a escola, tirar boas notas para ter um futuro melhor. Quero arranjar um trabalho em que me sinta bem e que receba bem e que goste (EI_G1).

Bastante consensual, como se pode ler na Tabela 12, são os argumentos daquilo que menos lhes agrada na escola, elencando, em primeiro lugar, terem que estudar muito, bem como terem muitas aulas, que estas comecem cedo e que são muito longas.

Quanto às disciplinas que mais despertam o interesse dos alunos diferem tanto pela identificação como pela justificação, embora no que diz respeito a esta última as respostas convirjam para dois fatores: a relação que estabelecem com os professores e o interesse pelos conteúdos. Das disciplinas citadas, vários alunos qualificam a disciplina de História como a mais interessante ($n = 12$), remetendo para a forma como o professor ensina, como indica um dos alunos – "a que gosto mais é História, porque o professor é fixe e explica bem" (EI_Miguel, G5) –, sendo que a disciplina de Físico-Química, embora com menos ênfase, é referenciada pelos mesmos motivos. Para além destas, surgem menções a Educação Física, Educação Visual, Geografia, Português ou Matemática.

Relativamente à disciplina que depositam menor interesse os estudantes são perentórios em nomearem Ciências Naturais, assinalando, em grande número, como é o caso de Miguel, que "este ano a disciplina que não gosto é Ciências porque não percebo o que o professor explica e, por isso, perdi o interesse" (EI_Miguel, G5). Já em relação às disciplinas nas quais têm mais dificuldades, aparecem no topo da lista Matemática, Inglês e Ciências Naturais. Desta última enfatizam, novamente, a relação com o professor, como possível causa das dificuldades sentidas, como indica Andreia: "sinto mais a Ciências pela maneira como o professor explica, não entendo muito bem e a matéria torna-se complicada e também aborrecida" (EI_Andreia, G4). O motivo mais apresentado quanto à Matemática e a Inglês reside na falta de domínio dos conteúdos e como isso se reflete nas respetivas avaliações. Ao assumirem estas causas, alguns alunos admitem também que acabam por perder o interesse nestas disciplinas depois de anos de tentativas infrutíferas, como apontam duas alunas:

> Em Matemática, acho a matéria complicada e desde o 5.º ano que tenho muitas dificuldades, esforço-me, mas não consigo nunca e às vezes perco o interesse (EI_Bruna, G3);
> A minha é Inglês porque tenho falta de vocabulário, há perguntas que não percebo uma palavra, fico logo sem saber o resto (EI_Ângela, G6).

A propósito da profissão que gostariam de exercer no futuro, as respostas destes jovens passam por medicina, fisioterapia, engenharia, atriz, informático, jogador de futebol, educadora de infância, músico profissional ou guitarrista. Dos indecisos, é de notar a importância que dão em seguir áreas ligadas à Matemática, Ciências, Físico-Química ou Economia. Verifica-se que, neste âmbito, as relações familiares são também uma influência, como afirmam Ângela e Tomás:

> Não sei, porque perguntei ao meu pai e a área de ciências é mais difícil, mas Humanidades que tem História e Filosofia disse que não era muito bom porque depois ia ficar desempregada (EI_Ângela, G6);
> Eu não sei, mas a minha mãe diz que fisioterapia é muito bom (EI_Tomás, G1).

No que diz respeito às perspetivas relativas à aprendizagem da Matemática, pode ler-se na Tabela 13 que, tendo como base os tipos de tarefas que privilegiam na sua aprendizagem matemática, os alunos salientam os exercícios e os problemas, prevalecendo os que indicam os exercícios ($n = 18$). Dentre as atividades que resultam destas tarefas, os alunos que preferem resolver exercícios justificam-no com o "estamos mais habituados" (EI_João, G4), serem "mais diretos" (EI_Beatriz, G1) ou porque "os problemas são mais complicados e a maior parte das vezes tem que se relacionar matérias" (EI_Frederico, G4). Os poucos alunos ($n = 4$) que escolhem os problemas fazem-no explicando que é mais estimulante, como salienta Pedro, por os desafiar a "ter que puxar mais pela cabeça, mas é mais divertido e motivante" (EI_G6).

Tabela 13

Frequências relativas à aprendizagem da Matemática

Subcategorias	Perceções	Frequência
Tarefas	Exercícios	18
	Problemas	4
Conteúdos matemáticos mais interessantes	Equações	5
	Vetores	10
	Teorema de Pitágoras	8
Conteúdos matemáticos com mais dificuldades	Expressões numéricas	4
	Raiz quadrada e raiz cúbica	3
	Equações	5
	Tudo	6

Quanto aos conteúdos matemáticos que lhes despertaram mais interesse está presente, para alguns alunos, a ideia de compreensão desses conteúdos – equações, vetores, Teorema de Pitágoras:

> Os vetores, porque não é tão complicado (EI_Andreia, G4);
> Os vetores, porque é uma matéria fácil (EI_Ana, G1);
> Os vetores porque é uma matéria mais fácil, não precisa de contas (EI_Frederico, G4);
> O teorema de Pitágoras, porque consigo calcular o perímetro do triângulo ou algum problema. Gosto de fazer problemas dessa matéria (EI_Vítor, G2);
> O que mais despertou interesse foram as equações, porque são fáceis aprendi, logo à primeira (EI_Ângela, G6).

Já, para outros alunos, invocam as dificuldades que detêm no passado para sustentarem que, por isso, desinteressaram-se dos conteúdos e até da disciplina de Matemática, como expressam Miguel e Daniela: "eu acho a matéria quase toda difícil, não tenho interesse e a minha dificuldade está na compreensão, às vezes os professores até explicam, mas eu não percebo" (EI_Miguel, G5); "gostei das tabuadas, tudo o resto é difícil (EI_Daniela, G5).

Perscrutando sobre o significado que os alunos da turma de 8.º ano atribuem à Matemática nas suas vidas e de que forma percecionam as suas aprendizagens na disciplina de Matemática, depreende-se, em primeiro lugar, que os alunos conferem valor à presença da Matemática nos seus futuros, seja qual for a profissão que desempenharem, tal como exemplificam as afirmações de Tomás e Vítor: "precisamos muito da Matemática, toda a gente precisa" (EI_Tomás, G3); "precisamos da Matemática para tudo, é como o Português. Sem a Matemática seria muito difícil encontrar um trabalho" (EI_Vítor, G2). No momento de justificarem as suas afirmações, os alunos revelam hesitação, tal como expressa Andreia: "precisamos sempre da Matemática, seja para construir coisas, por exemplo, para as compras, para ver os preços e mexer com dinheiro, tudo relacionado com dinheiro" (EI_Andreia, G4).

No que se refere à utilidade da Matemática no quotidiano, este grupo de estudantes revela ter ideias vagas em reportar essa utilidade para o seu futuro, como evidenciam Martim e Miguel: "até agora não ajuda, mas acho que no futuro ajuda" (EI_Martim, G5); "a nós não ajuda quase nada" (EI_ Miguel, G5). Os poucos alunos que dão algum exemplo remetem, exclusivamente, a aplicação dos conhecimentos matemáticos nas suas vidas para os domínios do cálculo como expressam Ângela e Ana: "todos relacionam a Matemática para contar dinheiro no dia a dia" (EI_Ângela, G6); "para pagar as contas, para fazer compras" (EI_Ana, G1). Solicitados a relatarem situações do dia a dia contidas nas tarefas que realizam nas aulas de Matemática, os alunos indicam apenas situações ligadas à

temática de Geometria e Medida, como afirmam dois alunos: "os teoremas, para calcular a altura da grua" (EI_Rodrigo, G1); "o Teorema de Pitágoras, por exemplo, para saber a altura da casa" (EI_Catarina, G3).

No campo dos conteúdos matemáticos, especificamente no tema das funções, estima-se que os conhecimentos de 7.º ano ficaram pouco latentes (Tabela 14), na medida em que um número significativo de alunos diz não se lembrar de nada ($n = 12$) e dos poucos que acrescentam algo está relacionado com os modos de representar uma função, como esclarecem Catarina e Ana: "lembro-me dos diagramas sagitais que a professora utilizou para explicar o que pode ser uma função" (EI_Catarina, G3); "analisamos gráficos e tabelas para ver o domínio e o contradomínio, disso gostava" (EI_Ana, G1). Já no que diz respeito às dificuldades sentidas neste domínio, mesmo os alunos que referiram não recordar nenhum conteúdo, mobilizaram o discurso em direção às contrariedades que surgiram aquando da introdução da expressão analítica, como evidenciado na Tabela 14. Caso disso encontram-se nas afirmações de Rodrigo e de Ângela: "lembro-me das tabelas e gráficos, as funções não eram muito difíceis, só quando começaram a entrar as letras" (EI_Rodrigo, G1); "apesar de não me lembrar de muita coisa, só de pensar naquilo que se chamava de expressão até fico assustada" (EI_Ângela, G6).

Tabela 14

Frequências relativas às aprendizagens dos conteúdos de funções

Subcategorias	Perceções	Frequência
Atribuição da importância da Matemática para o futuro	Sim	15
	Não	4
	Indiferente	3
Utilidade da matemática na vida quotidiana	Reflexo da matemática no futuro	14
	Compras	8
Conteúdos que recordam de funções de 7.º ano	Diagrama sagital	4
	Tabelas e Gráficos	4
	Não recordam nenhum conteúdo	12
Dificuldades em funções de 7.º ano	Expressão algébrica	8

No entendimento dos alunos, o significado que mais atribuem à noção de justiça social é o de igualdade ($n = 17$), sendo que alguns especificam de direitos ou de oportunidades, como indicado na Tabela 15, ilustrado com a afirmação: "só haveria justiça se houvesse igualdade e, para isso, todos teríamos que ter os mesmos direitos, em qualquer parte do Mundo" (EI_Andreia, G4). A generalidade

dos estudantes considera que existe desigualdade na distribuição de recursos básicos e especificam de educação, saúde ou discriminação de género, como o caso de Martim: "eu acho que não existe igual distribuição de recursos - nos países em desenvolvimento, eles não têm as coisas que nós temos aqui, como o acesso à educação ou à saúde" (EI_Martim, G5).

Tabela 15

Frequências relativas à noção de justiça social

Subcategorias	**Perceções**	**Frequência**
Noção de justiça social	Igualdade	17
	Igualdade de oportunidades	3
	Igualdade de direitos	2
Desigualdade na distribuição de recursos	Educação	5
	Saúde	6
	Discriminação por género,	4
Matemática permite debater problemas sociais	Não tem relação	19
	Análise de gráficos	3
Contributo das funções	Nenhum	22

No seguimento da temática, os alunos são levados a pensar se aquilo que aprendem nas aulas de Matemática lhes permite debaterem estas problemáticas e, eventualmente, se o tema das funções poderá ser um meio para que tal aconteça. As respostas convergem para o entendimento de que "a Matemática não tem relação com a interpretação destas situações" (EI_Catarina, G3), ainda que alguns destaquem, como é o caso de Andreia, "em questões de Estatística talvez, com a análise de gráficos" (EI_Andreia, G4).

Por último, se bem que nenhum aluno reconheça a ligação das funções à interpretação de situações sociais, alguns deles expressam as suas opiniões em relação às conexões que sentem importantes, como Pedro e Martim: "gostaria de aprender a trabalhar com números muito grandes, admito que tenho essa dificuldade e acho que para perceber estas situações precisamos saber entender os números, por exemplo, não sei quanto é sete mil milhões!" (EI_Pedro,G6); "eu acho que a Matemática podia contribuir se fizéssemos problemas do género – se cada cidadão da UE desse 10€ quantas pessoas conseguíamos ajudar nesses países" (EI_Martim,G5).

Síntese

A turma de 8.º ano encontra-se inserida num ambiente escolar cuja natureza social prima, na sua globalidade, pela presença de características económicas, sociais e culturais, mormente atribuídas a um contexto educativo privilegiado. A experiência escolar dos alunos é vivida, por cada um deles, com uma certa heterogeneidade principalmente no que se refere ao vínculo emocional que estabelecem, sendo claro que destacam duas motivações *major* – o convívio social e o seu posicionamento face à meritocracia, ou seja, o embandeiramento do empenho como meio para conseguirem bons resultados e não para uma fruição imediata senão para um almejado futuro próspero. De entre as contrariedades com que se deparam, os alunos exemplificam com o terem de estudar muito, o leque das disciplinas ser muito alargado, assim como a longa duração de cada aula. Do mosaico de disciplinas escolhem História como a sua preferida, apresentando como razões a relação estabelecida com o professor e os conteúdos revelarem-se interessantes. Mais de um terço dos alunos assume ter dificuldades a Matemática, que remontam a anos anteriores e que, por esse motivo, sentem muito difíceis de ultrapassar. Na aprendizagem da Matemática este grupo de alunos escolhe a resolução de exercícios como o tipo de tarefa privilegiado, atribuem primazia ao estudo dos vetores como conteúdo matemático mais interessante e colocam no seu antípoda o estudo de equações.

Os alunos tendem a associar a importância que atribuem à aprendizagem da Matemática com a utilidade que a mesma poderá ter no futuro, estabelecendo nesta premissa uma condição quase axiomática. Provavelmente, por essa razão, é difícil indicarem exemplos da utilidade da Matemática na vida real que não se relacionem com as compras. No que diz respeito aos conteúdos de funções que recordam, a maioria diz não se lembrar de nenhum e referem a expressão algébrica como a grande vulnerabilidade sentida.

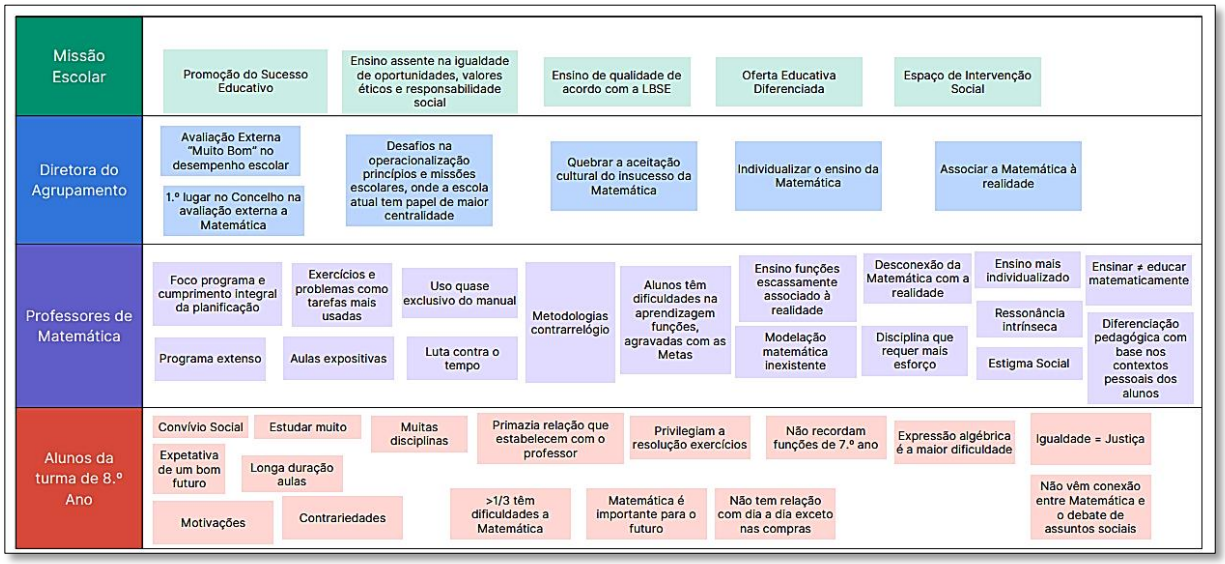
Na voz do grupo turma uniformiza-se a noção de justiça social com a de igualdade e a assunção da sua relação com a desigualdade na distribuição de recursos, sejam eles de saúde, educação ou de carácter identitário. Apesar deste reconhecimento, a grande generalidade dos alunos não vê conexão entre a disciplina de Matemática e o poder debater sobre estes assuntos, muito menos no caso específico do estudo de funções.

5.1.5. Interseccionalidade das vozes

Cruzando a multiplicidade dos elementos que compõem o cenário educativo deste caso, reconstitui-se o discurso dos intervenientes à luz de uma internalização visual (Figura 7).

Figura 7

Mapa concetual do discurso dos intervenientes da turma de 8.º ano



Na análise deste mapeamento verifica-se tanto uma conexão de discursos como uma individualização relativa ao grupo que representam. Exemplo disso encontra-se no reflexo da missiva escolar da promoção do sucesso educativo nas perspetivas da diretora e dos professores de Matemática, não extensível às dos alunos. A diretora sublinha os resultados escolares na avaliação externa, nomeadamente, apontando para o primeiro lugar da escola no *ranking* do concelho. No discurso dos professores ressalta a preocupação com o cumprimento temporizado de uma planificação que vá ao encontro do exame final. No entanto, do grupo de alunos, apenas a afirmação relacionada com o facto de terem de estudar muito seja indício de uma relação a este objetivo partilhado pelos docentes e diretora. Ainda neste sentido, infere-se que a motivação face aos resultados a atingir se repercute numa prática docente que adota metodologias convergentes e, talvez por isso, se caracterizem por pouco diversificadas e a contrarrelógio, privilegiando aulas expositivas, uso exclusivo do manual e resolução de exercícios e problemas como tarefas de aula, assumindo a Matemática como sendo uma disciplina que requer mais esforço. Este fenómeno reflete nos alunos uma pressão suplementar traduzida na dedicação ao tempo de estudo da disciplina e na preferência pela resolução de exercícios.

Na conexão estabelecida entre a Matemática e a realidade é advogado pela diretora a sua importância enquanto os professores assumem que o ensino da Matemática está desconectado dos assuntos da realidade e, concretamente, no ensino de funções poucos são os exemplos que traduzem essa conexão, admitindo ainda a modelação matemática como inexistente nas suas práticas. A

abordagem dos alunos exprime um total desligamento da Matemática à realidade exceto no que diz respeito aos pagamentos e compras, reforçada pela ausência de ligação às funções.

O espelho da inscrição constitucional de um ensino assente na igualdade de oportunidades, valores éticos e responsabilidade social encontra-se na voz da diretora quando destaca o papel central da escola, na referência à necessidade de desnaturalizar o insucesso na Matemática, bem como na proposta de individualizar o ensino da mesma. No discurso docente este eco é sentido na demanda de um ensino mais individualizado e no reconhecimento de práticas diferenciadoras de acordo com os contextos de cada aluno e acreditam que ensinar é diferente de educar matematicamente. Porém, transmitem aos alunos que é no futuro que irão entender a importância da aplicação da matemática. Nesta senda, fazendo destas palavras as suas, os alunos exibem a Matemática como sendo importante para os seus futuros e não vendo, portanto, qualquer ligação entre a Matemática e o debate de fenómenos sociais.

5.2. Momentos de aprendizagem

A aprendizagem dos alunos no estudo de funções com recurso à modelação é orientada segundo um conjunto de tarefas que pretendem traduzir fenómenos sociais existentes no mundo real e extra-matemático. Para dar conta dos resultados obtidos nas aulas observadas, esta secção inicia-se com um périplo pela forma como decorreram as respetivas aulas, tentando cartografar cronologicamente as principais atividades ocorridas, ao mesmo tempo que é dado enfoque a certas aulas, de acordo com a análise posterior a que é pretendido submetê-las. Segue-se, então, um olhar sobre as dinâmicas específicas criadas na exploração das tarefas segundo um itinerário submetido às etapas do processo de modelação. Por fim, e no que que diz respeito aos contributos de uma aprendizagem da Matemática com tarefas de justiça social, abordam-se apreciações das atividades desenvolvidas pelos alunos segundo duas vertentes: a importância que os mesmos atribuem à aplicação da Matemática para a resolução da tarefa e o debate crítico gerado.

5.2.1. Narrativa da intervenção

A observação de aulas teve início a meados do segundo período e prolongou-se até ao final do ano letivo 2018-2019, tendo existido um interregno, neste processo, de cerca de dois meses. Ao longo destas 32 aulas observadas, a professora reviu conceitos, anteriormente lecionados, como foi o caso da proporcionalidade direta, e conteúdos específicos de funções relativos ao 7.º ano, introduziu novos conteúdos sobre funções e concluiu com o ensino de sistemas de equações de 1.º grau a duas

incógnitas. No decurso do mencionado intervalo letivo, a professora Marta sustentou a sua prática através das tarefas de modelação. Por conseguinte, nas primeiras quatro aulas observadas foi trabalhada a Tarefa 'Distribuição de Água no Planeta' (Tabela 16) que visava, essencialmente, fomentar o envolvimento dos alunos nas atividades que lhes iam ser proporcionadas e sensibilizá-los para uma forma de trabalho para a qual não estavam habituados.

Tabela 16

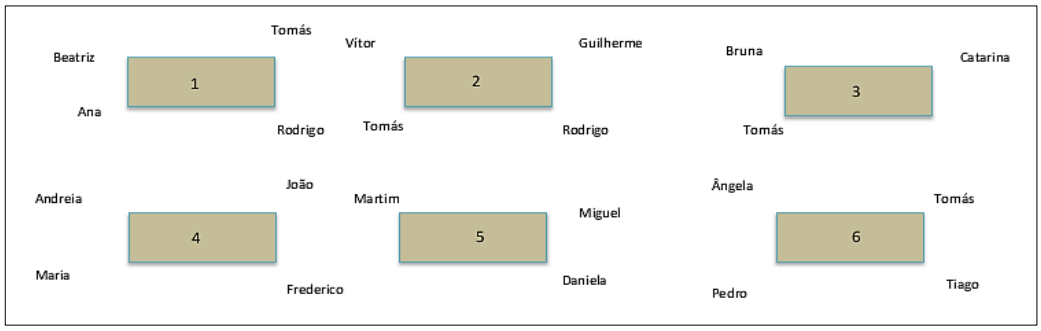
Relação entre o número de aulas e as tarefas de modelação de 8.º ano propostas

Nº de aulas	Tarefas de Modelação
4	T1: Distribuição de Água no Planeta
3	T2: Distribuição real de água em diferentes países
5	T3: Água e desigualdade de género
5	T4: Previsão da Escassez Hídrica
5	T5: Por que motivo os preços importam?
4	T6: Comparação da Pegada Hídrica entre Países

Nas primeiras duas aulas observadas, os alunos revelaram atenção e curiosidade quanto ao seu desenvolvimento, uma vez que sabiam que as aulas teriam contornos diferentes dos habituais, até porque, numa primeira instância, a professora pediu-lhes para se juntarem por grupos de trabalho, sendo a constituição elaborada, pelos alunos, em quatro grupos de quatro elementos e dois grupos de três alunos (Figura 8).

Figura 8

Distribuição dos alunos por grupos



Para iniciarem os trabalhos, a professora revelou que os conteúdos sobre funções iriam ser guiados por um conjunto de tarefas de modelação subordinadas a um tema aglutinador sobre a importância de defender a água (NCOA_fev2018). Desde logo, a professora começou por questionar se este tema foi tratado em disciplinas como Geografia ou Ciências, tendo surgido respostas afirmativas,

por parte dos alunos, como exemplifica a seguinte afirmação: "Sim, em Físico-Química falamos do problema da escassez da água" (GOA1_Beatriz, G1). Neste seguimento, a professora abre a discussão acerca dos cuidados com o consumo diário de água:

Professora: Vocês têm cuidados, no vosso dia a dia, e lá em casa, com a água que gastam?
Tomás: Sim, eu tenho.
Professora: Consegues dar-me algum exemplo?
Tomás: Quando estou a tomar banho, penso nisso e tento ser rápido.
Ana: Para lavar os dentes fecho sempre a torneira. Sei bem o quanto isso é importante! (GOA1)

Com a finalidade de avançar com a exploração do tema, a professora propõe a análise, em conjunto, da Declaração do Direito à Água de 1977 e o visionamento de uma reportagem sobre a falta de água existente no mundo não ocidental (Figura 9).

Figura 9

Os alunos observam uma reportagem



É criado diálogo entre a turma, sobressaindo o seguinte comentário: "Em muitos países africanos, por exemplo, o direito à água ainda não é uma realidade!" (GOA1_Tomás, G2). Com esta constatação, a professora juntou à análise uma notícia que indica que mais de 600 milhões de crianças viverão com falta de água até 2040, sendo os países mais pobres os mais afetados. Perante este dado, é percecionado um certo sobressalto nas reações dos alunos (NCOA_fev2018). Seguidamente, é introduzida a primeira tarefa T1 – 'Distribuição de Água no Planeta' (Apêndice 1) em que a professora propõe que os alunos trabalhem em grupo para realizarem a primeira parte da mesma. Alguns comentários oscilam, primeiramente, entre alguma confusão:

Maria: Professora, é isto que é para fazer?
Miguel: Podemos usar calculadora?
Pedro: Uiiii, isto são muitos zeros!
Bruna: Sim, professora, isto são números muito grandes. (GOA1)

No entanto, posteriormente, os alunos envolvem-se na realização da tarefa, ora questionando a professora, ora trabalhando em grupo, como se infere dos seguintes diálogos estabelecidos em grupo:

Pedro: Professora, nós metemos seis ou sete zeros?
Tomás: Não estou a conseguir calcular...
Ângela: Com tantos zeros é difícil de trabalhar. (GOA1_G6)

Vítor: Agora é a água doce, temos de fazer assim Tomás, olha...
Tomás: Ah, agora já estou a ver.
Vítor: Agora temos de colocar em notação científica.
Tomás: Podemos ou temos? (GOA1_G2)

Frederico: A água da superfície, o que é?
João: A mim dá-me 41700.
Andreia: A água da superfície é a água dos rios e dos lagos e acho que é 1% da água total do Planeta.
Maria: Mas ó João, isso é muito pouco, acho que te faltam zeros. (GOA1_G4)

Embora tenham demonstrado alguma dificuldade em trabalharem autonomamente, os alunos foram-se auxiliando reciprocamente e, de uma maneira geral, empenharam-se em conseguirem chegar aos resultados. Tendo-os visto tão genuinamente envolvidos e avançando na proposta de trabalho, a professora incentiva à apresentação coletiva, que se inicia com uma discussão acerca da leitura do valor que representa o volume total da Terra e perante a qual os alunos se mostraram confusos:

Professora: Como se lê este número?
Pedro: Um milhão 390 milhões (entre risos).
Ana: Mil trezentos e 90 milhões.
Rodrigo: Um bilião trezentos e 90 milhões.
Martim: Também estava a pensar que era isso. (GOA2)

Neste seguimento, o diálogo focou-se no contexto social que se encontrava na base da tarefa. Os comentários ouvidos entre os vários grupos indiciavam uma tomada de consciência acerca do problema em questão, onde os alunos interpretavam a referência à realidade de um modo refletido, como se deduz, com o seguinte excerto:

Andreia: Para garantirmos o futuro das próximas gerações, temos que proteger a água, para que não saiam prejudicadas.
Maria: E se a população aumenta, a água diminui e fica a existir menos água potável. (GOA2_G4)

As duas aulas seguintes foram destinadas à continuidade da exploração da primeira tarefa, que correspondia a um problema de modelação, no qual é proposto aos alunos que investiguem sobre uma dada situação, estabeleçam uma relação para, posteriormente, refletirem sobre o resultado obtido. A questão levantada consiste em encontrar uma forma da "UNICEF conseguir o montante relativo ao investimento para melhorar as condições de acesso à água num campo de refugiados na Síria, com base numa percentagem do orçamento militar dos cinco países que mais gastam" (Tarefa Distribuição de Água no Planeta). Apresentada a situação problema inicial, a professora levanta questões que permitam adentrar na interpretação da situação:

Professora: Lendo, com atenção, o que vos é pedido, o que vocês não conseguem tirar deste texto?
Tomás: A percentagem.
Professora: A percentagem de quê?
Tomás: A percentagem do orçamento militar.
Professora: Ok. E o que é que precisam para depois irem calcular essa percentagem?
(Silêncio)
Tomás: Precisamos de saber os cinco países que mais gastam.
Vítor: Em orçamento militar.
Professora: Ahhhh!!!
Tomás: E como vamos ter esses valores?
Professora: Era aí que eu queria chegar, vocês vão ter que ir pesquisar sobre isso. Antes disso, têm alguma ideia de quais possam ser?
Pedro: Estados Unidos?
Professora: Mais? (Ouvem-se intervenções de vários alunos, sugerindo China, Japão, Coreia, Iraque). (GOA3)

Ao ser o foco desta tarefa a compreensão do problema real, a professora guiou os alunos na procura da informação disponível, tentando que não se perdessem entre os valores que iam encontrando e fazendo-lhes sugestões: "como esses valores são muito grandes podem trabalhar em notação científica" (GOA3_Professora).

Empenhados em descortinarem a percentagem necessária que resolvesse a situação-problema, muitos alunos foram tentando esclarecer dúvidas relacionadas, na maioria dos casos, com leitura e escrita de quantidades elevadas: "mil milhões como se escreve, Beatriz?" (GOA3_Tomás, G1); ou com a moeda com a qual teriam de trabalhar: "professora, é em euros ou em dólares que calculamos?" (GOA3_Tiago, G6).

De seguida, e apesar de tardarem muito em reconhecerem estas quantidades, os alunos trabalham juntos para tentar matematizar a situação: "então vamos ter que somar o que gastam os cinco países juntos e depois fazemos a percentagem" (GOA3_Guilherme, G2). Praticamente todos os

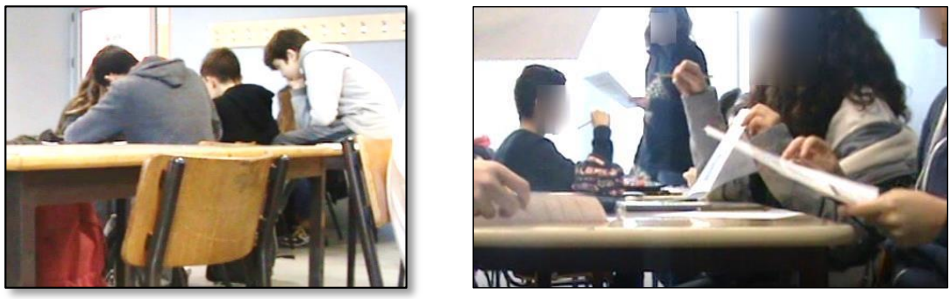
grupos evidenciaram dificuldades em trabalharem com os dados, principalmente, na fase de somarem os orçamentos militares. Para isso, auxiliaram-se da calculadora e fizeram muitas questões à professora. A aula terminou sem que os alunos conseguissem terminar a tarefa, comentando entre si: "passou muito rápido esta aula" (GOA3_Pedro_G6). No entanto, e revelando ritmos distintos, na aula seguinte, os alunos conseguiram verificar que 0,13% do orçamento militar dos cinco países é equivalente ao montante necessário para melhorar as condições de acesso à água das pessoas vítimas do conflito na Síria. Ao consegui-lo, interromperam-se para interpretarem estes resultados num diálogo coletivo:

David: Professora, para calcular a percentagem usa-se a regra de três simples?
Professora: Diz-me tu! Não achas que sim?
David: Então, dá-me 0,1.
Ângela: A mim também me dá isso, deve estar mal, é um valor muito baixo!
(A professora acena com a cabeça, confirmando o resultado).
Ana: Mas isso é insignificante.
Tomás: Nem chega a metade!
Professora: Metade Tomás? Não chega nem a 1%!
Pedro: Ó professora, e porque é que isto não acontece mesmo?
Tomás: Mas porque é que eles iriam ajudar? Em que é que isso os beneficiaria? É assim que eles pensam.
Beatriz: Mas podiam ajudar porque nem sequer os afetava!
Tomás: Não acredito que se juntassem para isto. O que é que receberiam em troca?
Beatriz: Pois..., mas eu acho que deviam! (GOA4).

Na quinta aula observada a professora começou por distribuir a tarefa T2 – 'Distribuição Real de Água em Diferentes Países' e por relembrar aos alunos que tinham de se distribuir por grupos de trabalho. De seguida, indicou-lhes que a respetiva tarefa tinha como intuito continuarem a explorar o tema a que se têm dedicado e, simultaneamente, reverem alguns dos conteúdos sobre funções que lecionaram no 7.º ano, nomeadamente sobre linguagem de funções. Destas três aulas, destacam-se que as interações verbais entre os alunos vão, gradualmente, aumentando à medida que se foram envolvendo nas tarefas que a professora propunha. O facto de terem trabalhado em grupo, proporcionou-lhes alguma autonomia, relativamente à professora, para irem discutindo processos e ideias. Ainda assim, a professora circulava pelos lugares e ia dando indicações (Figura 10).

Figura 10

Alunos a trabalharem em grupo e professora a circular pelos lugares



Contudo, e apesar de manifestamente envolvidos, denotou-se que os alunos ainda demoravam muito tempo a interpretarem a situação inicial. As vantagens do trabalho do grupo são evidenciadas pelas conversas informais e que revelavam reflexão quer acerca das questões sociais, quer sobre o teor matemático em que se baseavam (NCOA_mar2018).

Na 8.ª aula observada, a professora entregou aos alunos a tarefa T3 – 'Água e Desigualdade de Género'. Nesta tarefa, a situação exposta é a relação entre o tempo diário despendido para recolha de água por uma mulher e por um homem, nomeadamente, no Benim e no Gana, sendo os dados relativos a essa informação disponibilizados numa tabela. É pedido que os alunos representem esta relação, sugerindo que encontrem um modelo matemático que melhor a descreva. Com base nos dados que constam na tabela, os alunos tinham de selecionar a informação e representá-la graficamente recorrendo ao modelo matemático que melhor se adaptasse à situação. Seguidamente, tinham de responder às questões utilizando, para isso, o modelo encontrado. A tarefa foi resolvida em grupo e, neste processo, os alunos dispuseram de três aulas. Foi, portanto, na aula 12 que se iniciou a correção e a discussão em grupo turma. Como a professora optou por deixar os alunos trabalharem a tarefa de modo totalmente autónomo, tentando não condicionar e apenas interferir quando era, por eles, solicitada, no momento da correção começou por questionar a turma pelas principais dificuldades que tinham sentido:

Professora: Então, façam-me o ponto da situação para começarmos a corrigir a alínea a). Foi muito complicado chegar ao modelo? Em primeiro lugar, o que é que selecionaram?
Maria: Havia aqui duas variáveis. Tínhamos que ver o tempo gasto por uma mulher, em horas, comparativamente com o tempo gasto por um homem.
Ângela: Para o caso do Benim e do Gana, mas só no meio rural.
Professora: E depois? Alguém quer vir ao quadro, mostrar como fez?
(O Rodrigo registou no quadro a sua resolução)

Professora: Muito bem Rodrigo, fizeste dois gráficos. Houve alguém que tenha feito de outra forma?
Miguel: Professora, nós fizemos só um, mas com duas retas.
Professora: Ótimo! (GOA12)

No decorrer da correção da tarefa, toda a turma pareceu estar colaborativa e com entusiasmo, com os alunos a quererem demonstrar as suas resoluções no quadro e acompanhando o que os colegas foram transmitindo (NCOA_mar2018). Nas alíneas d) e e) a professora aproveitou para estabelecer o paralelismo da temática com o dia 8 de março, que se celebrou na semana anterior, instigando ao seguinte diálogo:

Professora: Lembram-se de termos falado, em Cidadania, do Dia Internacional da Mulher?
Vítor: Sim, professora, já me tinha lembrado disso!
Tomás: Mas a situação em Portugal é muito diferente.
Ana: Sim, mas aqui existem outras desigualdades de género
Vítor: Mesmo em relação às tarefas em casa, que deviam ser distribuídas igualmente.
Ângela: Não se esqueçam do acesso a lugares de chefias e de topo. O número de deputadas só tem aumentado nos últimos anos porque foram introduzidas quotas. (GOA12)

Antecipando a entrega da tarefa T4 – 'Previsão da Escassez Hídrica', a professora Marta dedica duas aulas a abordar o conceito de função afim, a representar e interpretar graficamente uma função afim e a relacionar a representação gráfica com a algébrica e reciprocamente. Depois da exploração destes conceitos, exemplifica com a resolução de um exercício, onde surge o cálculo do declive de uma reta dados dois pontos. Por fim, a professora insiste na determinação da equação de uma reta dados dois pontos ou um ponto e o declive. Seguidamente, na 15.ª aula observada foi iniciada a exploração da tarefa, tendo sido o texto introdutório lido em conjunto ao que se seguiu a sua resolução em grupos de trabalho. A professora circula pelos lugares e dá algumas diretrizes que se apercebe como necessárias e, apesar de ir indicando o que os alunos lhe vão questionando, findo algum tempo, regista no quadro aquilo que havia mencionado. Após esta ajuda, a professora Marta deixa os alunos trabalharem sozinhos e durante mais duas aulas. Na quarta aula de exploração da tarefa é feita a correção e discussão em grande grupo. Nela, os alunos dos vários grupos efetuam as suas resoluções no quadro procedendo às representações algébrica e gráfica. A professora aproveita esta última para elaborar várias questões de exploração. No fim, é deixado espaço de debate para a interpretação dos resultados obtidos no seio da turma, sendo que os alunos comunicam as suas

respostas acerca das razões que consideram interferir numa crescente escassez de água, principalmente, em alguns países do mundo.

Na 20.ª aula observada foi introduzida a tarefa T5 – 'Por que motivo os preços importam?'. No momento de exploração desta tarefa os alunos já estavam familiarizados quer com o processo de modelação, quer com a temática das tarefas, visto ser a quinta tarefa a ser resolvida. Por este motivo, todo o processo é desencadeado de uma forma mais natural e imediata, verificando-se que os alunos começaram por registar os dados, organizar e estruturar os dados e depois identificar estratégias.

A exploração da tarefa T6 – 'Comparação da Pegada Hídrica entre Países' dista dois meses de interregno da data da última tarefa de modelação, já no mês de junho. É de salientar que, neste tempo decorrido, a professora trabalhou com os alunos, nas aulas de Cidadania, a temática da Pegada Hídrica. Com a exploração deste tema, os alunos aprenderam a relacionar o consumo de água com o consumo de produtos e, através de um simulador, calcularam a pegada hídrica de cada um. De seguida, os alunos encontraram o modelo que relacionava os seus consumos diretos e indiretos de água, tendo, cada um deles, ilustrado graficamente essa relação para um mês (NCOA_jun2018).

A 25.ª aula observada iniciou-se com a professora a indicar orientações sobre a prova de aferição que se realizava na aula seguinte, o que justificava um certo ambiente de apreensão por parte da turma. Neste seguimento, a professora explicou que iriam concretizar a última tarefa de modelação, sendo que, previamente, introduziriam o tema de sistemas de equações "da maneira tradicional" (NCOA_jun2018). Assim, a turma dedicou quatro aulas à lecionação de sistemas de duas equações de 1.º grau com duas incógnitas, nas quais foram trabalhados, essencialmente, o método de substituição para a resolução de sistemas e, brevemente, o método gráfico.

Na 29.ª aula observada, após a escrita do sumário, os alunos juntaram-se em grupos de uma forma natural, enquanto foi distribuída a tarefa. A professora indicou que podiam consultar o manual para o caso de terem alguma dúvida ou o telemóvel: "já sabem que podem usar o livro, os telemóveis também podem usar se quiserem desenhar lá o gráfico, no Google" (GOA29). O ambiente era de trabalho independente e apoio mútuo, bem como de uma participação generalizada.´

5.2.2. Descrição dos processos estabelecidos na resolução das tarefas de modelação

Para dar conta das práticas e dos códigos que estão ligados ao processo de modelação, ao longo das etapas a percorrer analisa-se a exploração das tarefas 'Previsão da escassez hídrica', 'Por que motivo os preços importam?' e 'Comparação da pegada hídrica entre países' (Tabela 17).

Tabela 17

Tarefas de modelação de 8.º ano e modelo matemático

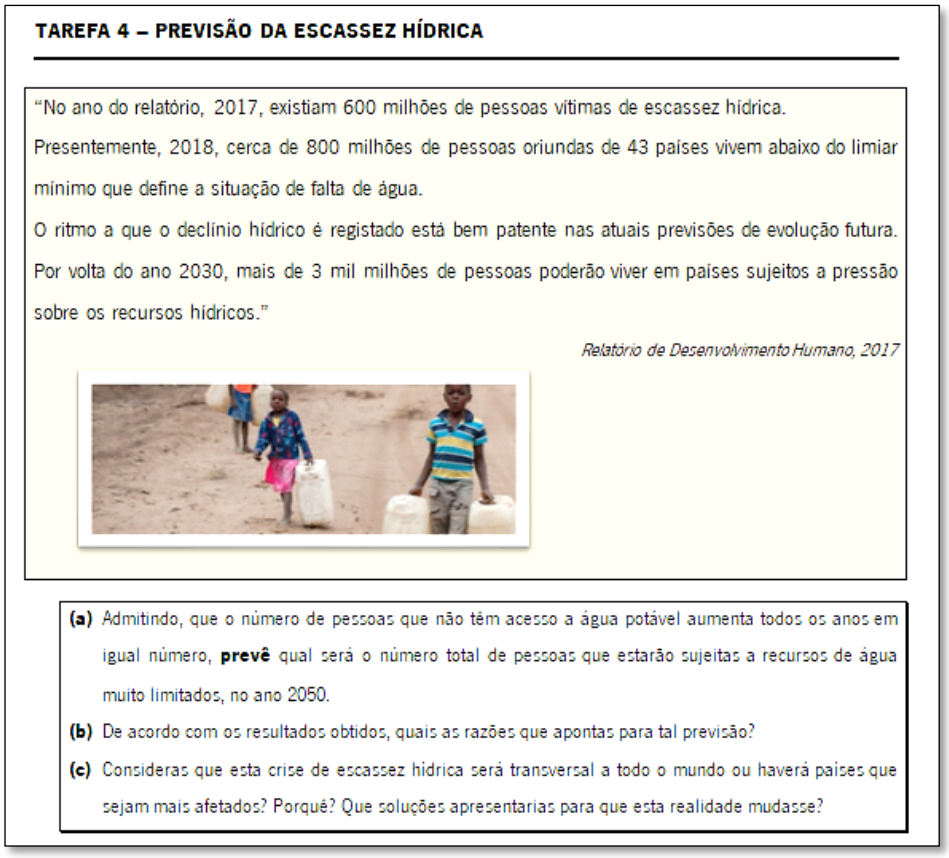
Tarefas de Modelação	Modelo Matemático
Previsão da Escassez Hídrica	
Por que motivo os preços importam?	Função Afim
Comparação da Pegada Hídrica entre Países	

5.2.2.1. Tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica'

Na tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' (Figura 11), a situação do mundo real é baseada no número de pessoas que, todos os anos, se encontram sujeitas a escassez hídrica. Sendo que esse número tem tendência crescente e linear, é pretendido que os alunos determinem a estrutura matemática que melhor represente a situação, usando, posteriormente, o modelo para estabelecer uma previsão da evolução da escassez hídrica ao longo do tempo.

Figura 11

Representação da tarefa "Previsão da Escassez Hídrica"



TAREFA 4 – PREVISÃO DA ESCASSEZ HÍDRICA

"No ano do relatório, 2017, existiam 600 milhões de pessoas vítimas de escassez hídrica. Presentemente, 2018, cerca de 800 milhões de pessoas oriundas de 43 países vivem abaixo do limiar mínimo que define a situação de falta de água.

O ritmo a que o declínio hídrico é registado está bem patente nas atuais previsões de evolução futura. Por volta do ano 2030, mais de 3 mil milhões de pessoas poderão viver em países sujeitos a pressão sobre os recursos hídricos."

Relatório de Desenvolvimento Humano, 2017

(a) Admitindo, que o número de pessoas que não têm acesso a água potável aumenta todos os anos em igual número, **prevê** qual será o número total de pessoas que estarão sujeitas a recursos de água muito limitados, no ano 2050.

(b) De acordo com os resultados obtidos, quais as razões que apontas para tal previsão?

(c) Consideras que esta crise de escassez hídrica será transversal a todo o mundo ou haverá países que sejam mais afetados? Porquê? Que soluções apresentarias para que esta realidade mudasse?

A tarefa foi resolvida em grupos de trabalho, ao longo de cinco aulas. Na Tabela 18, são apresentadas consoante as etapas de modelação e as atividades cognitivas geradas.

Tabela 18

Frequências das respostas dos alunos à Tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica'

Etapas de Modelação	**Atividades cognitivas**	**Secção na Tarefa**	**Evidências Escritas**					
			G1	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**
Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real	Clarifica o contexto	Texto	1				1	
	Organiza os dados	Alínea a)	1			1	1	
	Reconhece estratégias	Alínea a)	1				1	
Matematização e trabalho com o modelo matemático	Identifica variáveis	Alínea a)	1	1		1		
	Representa o modelo	Alínea a)				1	1	1
	Trabalha o modelo	Alínea a)	1	1	1	BL	1	1
Interpretação dos resultados e validação	Interpreta resultados	Alínea b)		1	1	1		
	Compara	Alínea c)						
	Valida	Alíneas a),b),c)				1		1

(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

Num primeiro momento, os alunos leram o texto que contextualizava a situação. Alguns alunos revelaram dificuldade em iniciar a interpretação da tarefa, o que, talvez pelo facto de não apontar tantas diretrizes como as anteriores, os levou a colocar algumas questões à professora:

> Tomás: Professora, aqui diz que temos de prever o número de pessoas que estarão limitadas a recursos de água, em 2050, mas não percebo o que temos de fazer para chegar até aí. E são muitos milhões.
> Professora: Tens de encontrar um modelo que te faça chegar aí. Qual será esse modelo é que têm de pensar. Mas, primeiro, ver que dados têm no enunciado e que são importantes.
> Tomás: Acho que estes números 600 milhões e 800 milhões são os importantes, não é?
> Professora: Façam um esquema se quiserem e registem na vossa folha.
> Ângela: Oh professora, mas depois também tem aqui 2030 e nós queremos em 2050, não em 2030, são muitas datas, não estou a perceber.
> Professora: Pois sim, tem muitas datas, se calhar têm de ver se existe aí um padrão.
> Ana: Acho que já estou a ver o que a professora quer dizer. (GOA15)

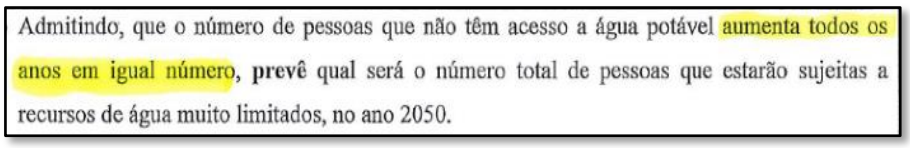
Deste diálogo, infere-se que alguns alunos tiveram alguma dificuldade em analisar a situação para conseguirem interpretar o problema real, bem como se intui que a complexidade da informação revelada no texto não facilitou essa compreensão, como parece ser o caso do seguinte aluno: "Vocês, sabem o que é declínio hídrico? E limiar mínimo"? (GOA15_Vítor, G2).

A par destas dificuldades, a barreira maior surgiu na seleção da informação e no reconhecimento das quantidades que seriam importantes para conseguirem chegar ao modelo.

Por sua vez, das resoluções escritas, verifica-se que alguns alunos sublinharam a informação que consideraram relevante para a compreensão do problema, como o fez Daniela (G5) (Figura 12).

Figura 12

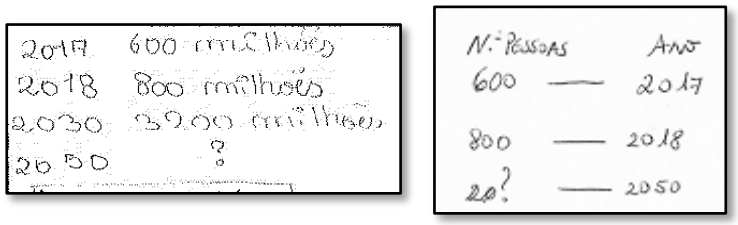
Forma de destaque de informação relevante de Daniela (G5)



Outros alunos registaram dados que os auxiliaram a estruturar a tarefa, como expressam as resoluções de Andreia (G4) e Rodrigo (G1) (Figura 13).

Figura 13.

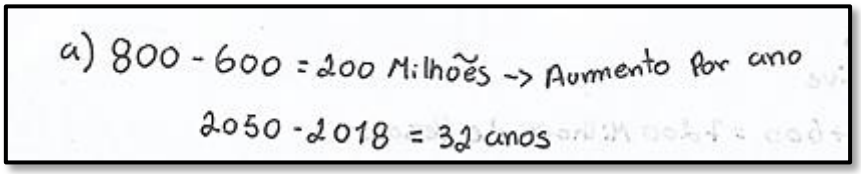
Estruturação da informação por Andreia (G4) e por Rodrigo (G1)



São poucos os resultados que evidenciam que os alunos estabelecem relações entre as quantidades. Ainda assim, no caso de Ana (G1), confirma-se, através da sua resposta, que conseguiu estruturar, simplificar e interpretar o contexto (Figura 14), apoiando-se, primeiramente, dos dados quantitativos para inferir uma hipótese que permitisse sustentar a passagem à estrutura matemática.

Figura 14

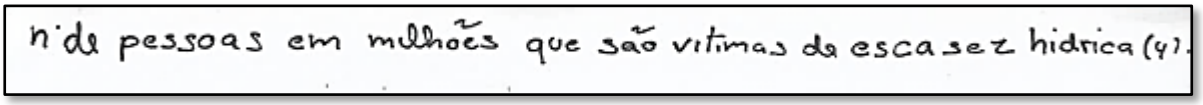
Representação matemática da situação real de Ana (G1)



Contudo, afere-se, pelas respostas dadas pelos diferentes grupos de alunos, que foi apenas um número reduzido de alunos ($n = 7$) que, através da informação disponível, identificou as variáveis (Figura 15).

Figura 15

Identificação das variáveis na resposta de Guilherme (G2)



Em suma, na passagem da compreensão da situação real para a sua representação, os alunos mostraram serem capazes de interpretar a situação real. No entanto, na simplificação da tarefa encontraram-se alguns entraves, talvez por não terem por hábito trabalhar com quantidades elevadas. No que diz respeito à estruturação com a identificação e construção de relações entre as variáveis, não se afigurou que a maioria dos alunos tivesse realizado esta atividade.

(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

Na alínea a) é ainda pretendido que os alunos desenvolvam o modelo com o qual irão trabalhar. Na passagem da representação para o modelo, os alunos simplificaram o problema, verificando a existência de duas variáveis que se relacionam, o número de pessoas que existem no mundo sujeitas a falta de água e o tempo em que tal situação ocorre, em anos. Porém, constata-se que os alunos refletem pouco na hora de estabelecerem relações entre as variáveis, como se deduz da seguinte discussão em grupo:

Tomás:	Quais são os anos que temos de escolher para chegar ao modelo? Vocês sabem?
Vítor:	Eu acho que temos de começar com o ano de 2017 e os 600 milhões de pessoas.
Tomás:	Sim, e depois, que fazemos com isso?
Guilherme:	Depois acho que temos de contar os anos que passam até 2050.
Vítor:	Mas isso é só contar os anos, eu não sei é o que se faz depois...
Guilherme:	Então se a diferença são 33 anos, depois é só multiplicar por 600.
Vítor:	Humm, não sei se é assim. Isso dá 19 800. (GOA16_G2)

Deste diálogo, infere-se que os alunos tiveram dificuldades em averiguar qual seria o modelo que melhor se ajustaria à situação. Observando estas impossibilidades, a professora questionou o grupo turma:

Professora: Será que o modelo pode seguir uma função linear?
Alunos: Sim!
Professora: Então, qual vai ser a constante de proporcionalidade?
Alunos: Vai ser de 200 milhões. (GOA16)

No entanto, deduz-se que a professora pretendia que se aproximassem da representação matemática e pediu-lhes que descrevessem a situação recorrendo às funções que conheciam:

Professora: Então, nesta perspetiva, se vocês estão a considerar que é uma função linear, em que o aumento é de 200 milhões e já está? Então tentem chegar à expressão.
Ana: À expressão algébrica?
Pedro: Eu acho que basta usar a regra de 3 simples, é isso?
Professora: Mais ou menos, há aqui mais qualquer coisa. Pensem nos anos. O estudo foi realizado em que ano? Olha, pensem no exemplo que eu vos dei quando entrámos num táxi, lembram-se?
Ângela: Oh professora, mas isso não é para a função afim?
Professora: Eu não digo mais nada, agora são vocês que têm de fazer, mas diria Ângela que pode ser um bom caminho. (GOA16)

Com este diálogo conjetura-se que, caso a professora não tivesse direcionado a representação até à função afim, dificilmente os alunos iriam matematizar a situação com recurso ao modelo matemático pretendido. A partir do momento em que se estabeleceu este diálogo, os alunos começaram à procura da expressão algébrica da função afim que modela a situação, como se pode inferir com a discussão entre um dos grupos:

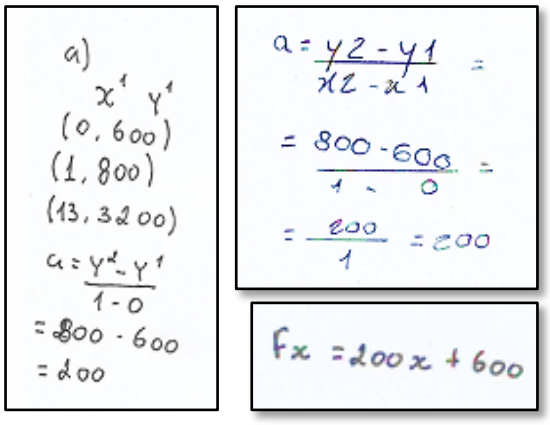
Andreia: Se a professora diz que é afim é uma função do tipo $y = mx + b$ e então só temos de calcular o declive e ver qual é o b.
Frederico: Então o declive não é 200?
Andreia: Não sei, temos de calcular.
Maria: Mas essa é a variação, não precisamos de calcular, é isso.
Andreia: Mas vamos calcular o declive porque assim é certo.
João: Ui, e como calculamos isso, já não percebo nada.
Andreia: Temos de encontrar dois pontos e depois dividimos um pelo outro. (GOA16_G4).

Perante as respostas que estes alunos deram, confirma-se que a resposta escrita reflete o discurso verbal. Aplicando a definição de declive de uma reta a partir das coordenadas de dois dos seus pontos, o grupo determinou o declive efetuando o quociente entre a diferença das ordenadas e a diferença das abcissas de dois pontos, de coordenadas $(0, 600)$ e $(1, 800)$, justificando com

representação matemática que $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, o que lhes permitiu obter $a = \frac{800-600}{1-0} = 200$. Posteriormente, concluíram que $f(x) = 200\,x + 600$ (Figura 16).

Figura 16

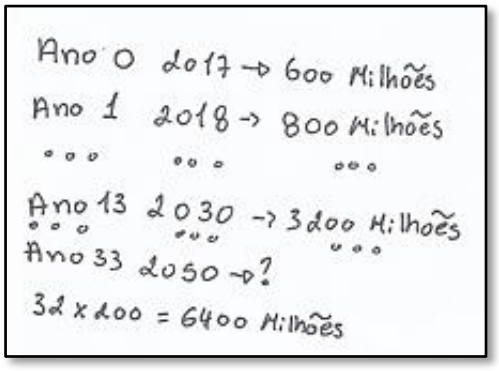
Respostas dados pelos alunos Andreia, Maria e Frederico (G4)



Como fica patente através da leitura da Tabela 18, muitos alunos não conseguiram definir a situação através de um modelo. Exemplo disso encontra-se na resposta de Ana e dos restantes elementos do seu grupo, que, como não conseguiram criar o modelo algébrico, tentaram criar um processo numérico que os conduzisse à solução do problema (Figura 17).

Figura 17

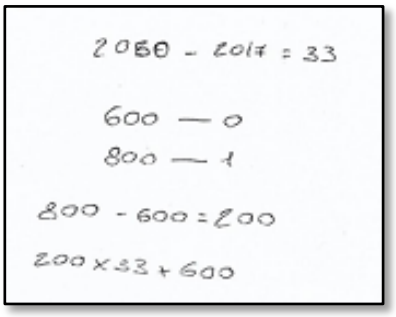
Resposta de Ana (G1) à alínea a)



Porém, no caso do Grupo 6, verificou-se que, apesar de não terem criado o modelo matemático recorrendo à representação algébrica, conseguiram construir uma representação válida, como evidencia a resposta de um dos elementos, visível na Figura 18.

Figura 18

Resposta de Pedro (G6) à alínea a)



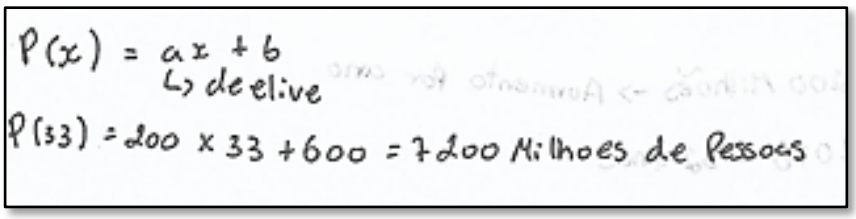
Nesta fase do processo, depreende-se que a falta de competências manifestadas se prende com dificuldades ao nível da mobilização do raciocínio algébrico ou ainda pelo facto de muitos alunos não dominarem o conceito de função afim.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Através do modelo, os alunos chegariam à conclusão de que, em 2050, o número de pessoas com acesso limitado a uma fonte de água segura será de 7200 milhões, o que se traduziu nas respostas de alguns grupos (Tabela 5), como constam as respostas dadas pelos elementos do Grupo 2 à alínea b) e registada por Guilherme (Figura 19), que indica $f(33) = 200 \times 33 + 600 = 7200$.

Figura 19

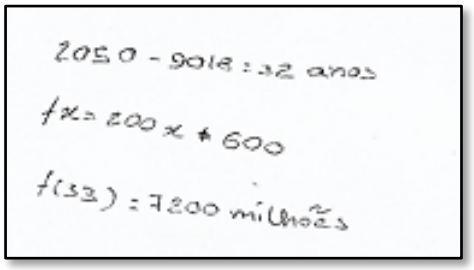
Modelo matemático de Guilherme (G2)



Resultados similares são encontrados noutras respostas. Porém, em algumas delas detetam-se incongruências, como evidencia o registo de Frederico (Figura 20).

Figura 20

Resposta de Frederico (G4) à alínea b)



Em outros casos, infere-se que os alunos do Grupo 4 validaram o modelo efetuando a transferência ao domínio extra-matemático, como se infere no seguinte diálogo:

Andreia: Eu não tenho a certeza, mas parece-me que é preciso somar o ano de 2017.
Frederico: Já está aqui o 600 milhões. Agora é só substituir o x por 32.
Andreia: Por 32 ou por 33?
Frederico: Por 32, que é a diferença do número de anos.
Andreia: Olha que eu estou a ouvir por aí falarem de 33.
Frederico: Não, são 32, já tínhamos feito a conta.
Maria: Eu vou contar. (GOA17_G4)

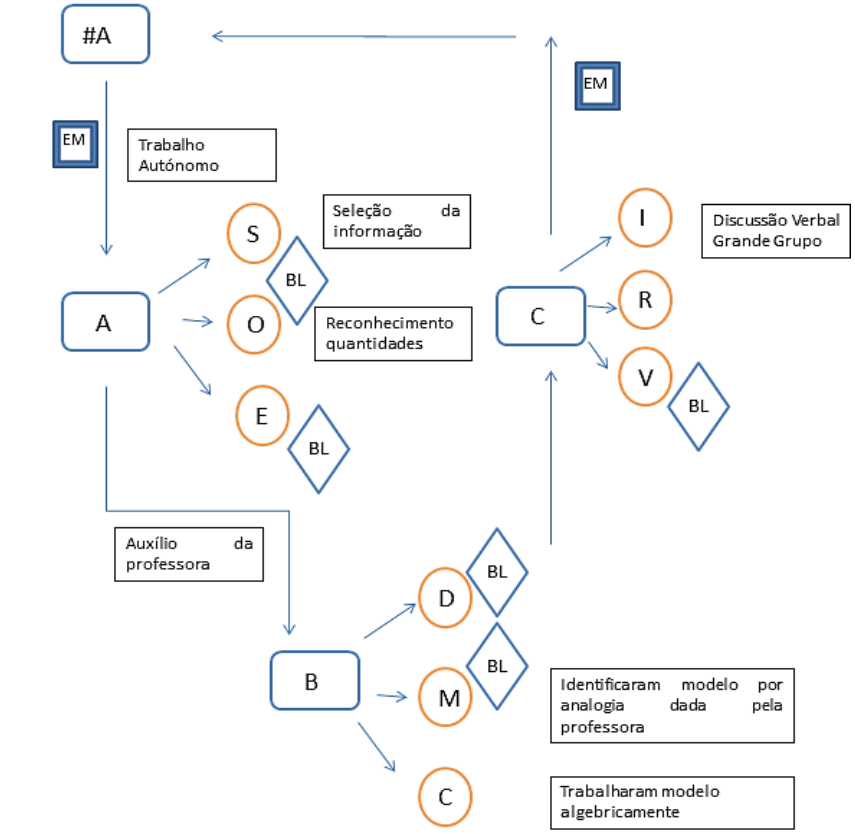
Num momento de discussão coletiva, a professora instiga-os a refletirem sobre o valor obtido assim como a apresentarem razões que sustentem a sua previsão (NCOA_mar2018). Do diálogo seguinte, depreende-se que os alunos não mobilizaram os resultados matemáticos que obtiveram para auxiliarem a argumentação. Apesar de apontarem causas para a crescente escassez hídrica, não parecem apoiarem-se nos resultados matemáticos.

Professora: Como vocês estão a ver aí na tarefa, de acordo com os resultados obtidos, quais as razões que vocês apontam para esta previsão? Já repararam na quantidade de pessoas que não terão acesso a água potável? É só um pouco mais ou é muito mais?
Andreia: É muito mais. Eu acho que tem a ver com a pecuária. Não podemos esquecer que contamina muito, os rios, os lençóis freáticos. Isso leva à diminuição da água potável.
Daniela: Sim, a poluição que cada vez é maior.
Professora: Mais alguma ideia?
Pedro: Oh professora, será que pode ser o aumento de população? E também as mudanças climáticas?
Tomás: Sim, o aquecimento global. (GOA18)

No desenvolvimento da tarefa de modelação 'Previsão da escassez Hídrica' mapeou-se a seguinte tendência de atividades cognitivas e processos privilegiados pela grande parte dos alunos, no decurso das etapas de modelação (Figura 21).

Figura 21

Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Previsão da escassez hídrica'



Legenda: #A - Problema Real; A – Modelo Real; B – Modelo Matemático; C – Interpretar Resultados; EM – Conhecimento Extramatemático, BL - Bloqueio
S – Simplificar; O – Organizar; E – Reconhecer Estratégias; D- Definir Variáveis; M – Modelo Matemático; T –Trabalhar matematicamente; I – Interpretar modelo; R – comparar Resultados; V - Validar

De uma maneira global, na resolução da tarefa de modelação percecionaram-se algumas dificuldades do foro interpretativo, nomeadamente, na clarificação do contexto e na seleção da informação, o que gerou dificuldades na definição de estratégias e na identificação das variáveis. No que diz respeito ao ajuste da situação ao modelo foi necessária a intervenção da professora que forneceu um exemplo comparativo. Esta intervenção possibilitou que os alunos conseguissem representar e trabalhar com o modelo de forma algébrica e, posteriormente, validá-lo.

5.2.2.2. Tarefa 'Por que motivo os preços importam?'

Na tarefa 'Por que motivo os preços importam?' (Figura 22), o contexto real da tarefa baseia-se na descrição de duas situações distintas relativas ao preço a pagar pelo consumo de água em cada um dos casos.

Figura 22

Representação da tarefa "Por que motivo os preços importam?"

TAREFA 5 – POR QUE MOTIVO OS PREÇOS IMPORTAM?

Existe uma dimensão internacional relativamente à divisão da riqueza quanto ao preço da água. As pessoas mais carenciadas nas áreas urbanas dos países em desenvolvimento não só pagam, pela aquisição de água, mais do que os residentes da mesma cidade que auferem rendimentos mais elevados, como também despendem mais por este bem do que as populações dos países mais ricos. Algumas das pessoas mais pobres do mundo que vivem nos bairros degradados de Acra e Manila pagam mais pela aquisição de água do que as pessoas que vivem em Londres, Nova Iorque ou Roma. Em Acra, capital do Gana, e em Guayaquil, no Equador, todas as manhãs há grandes frotas de tanques de água que partem para as povoações pobres, onde a vendem aos lares e a intermediários.

Relatório de Desenvolvimento Humano



Analisa as seguintes situações:

Situação 1

Em Barranquilla, na Colômbia, o preço médio da água é de 0,55 euros por metro cúbico, junto dos prestadores de serviços, ao qual adiciona-se o valor de 4 euros pelo aluguer do contador enquanto que, junto dos camionistas, é de 5,50 euros por metro cúbico.

Situação 2

Nos bairros degradados de Acra, capital do Gana, as pessoas que compram água aos vendedores normalmente gastam 3 euros por uma taxa fixa paga ao vendedor e 3,20 euros por cada metro cúbico de água.

Um habitante de Nova Iorque, cidade dos Estados Unidos da América, paga 1,2 euros por metro cúbico de água consumido e 5 euros pelo aluguer do contador.

(a) Encontra um modelo que descreva ambas as situações e que permita obter quanto terá de pagar um consumidor cujo gasto de água tenha sido 10 metros cúbicos.

(b) Os resultados obtidos estão de acordo com o excerto do Relatório de Desenvolvimento Humano? Porquê?

(c) Quem paga mais em cada uma das situações? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

(d) Cerca de um terço das pessoas sem acesso a uma fonte de água potável vivem com menos de um 1 dólar por dia. E o dobro destas pessoas vive com menos de 2 dólares por dia, como é o caso, de parte, da população do Gana. Compara estes dados com os da situação 2. Que concluis?

Com base nos dados que constam em cada uma das situações, os alunos tinham de selecionar a informação e representá-la recorrendo ao modelo matemático que melhor se adaptasse. Seguidamente, tinham de responder às questões utilizando, para isso, o modelo encontrado. A tarefa foi resolvida em grupo, ao longo de cinco aulas, e na Tabela 19 estão registadas as respostas dadas pelos alunos segundo os momentos de modelação.

Tabela 19

Frequências das respostas dos alunos à Tarefa "Por que motivo os preços importam?"

Etapas de Modelação	Atividades cognitivas	Secção na Tarefa	Evidências Escritas					
			G1	G2	G3	G4	G5	G6
Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real	Clarifica o contexto	Texto	1		1	1	1	
	Organiza os dados	Texto, Alínea a)	1	1				1
	Reconhece estratégias	Texto, Alínea a)	1					1
Matematização e trabalho com o modelo matemático	Identifica variáveis	Alínea a)		1				1
	Representa o modelo	Alínea a)	1			1		1
	Trabalha o modelo	Alínea a)	1	1	1	1	1	1
Interpretação dos resultados e validação	Interpreta resultados	Alínea b)	1	1	1	1		1
	Compara	Alínea c), d)	1	1	1	1		
	Valida	Alíneas a),b),c)						

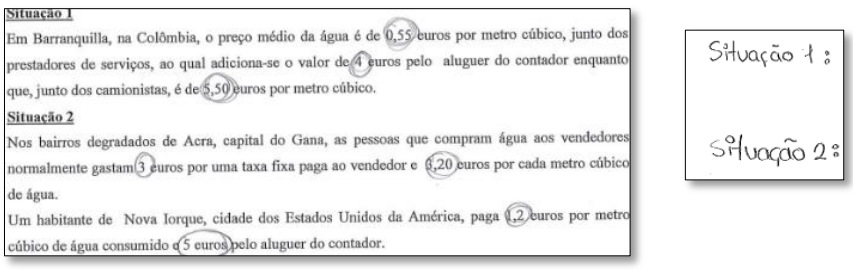
(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

Os alunos procuraram compreender a tarefa, transitando da situação real para a representação da situação, denotando-se concentração na leitura do excerto do 'Relatório de Desenvolvimento Humano' e tecendo alguns comentários no seio dos grupos (NCOA_mar2018).

Nas respostas escritas dos alunos são encontradas formas de destaque da informação relevante, como indica a Figura 23, onde os alunos sublinharam os elementos que consideraram pertinentes.

Figura 23

Forma de destaque Andreia (G4) e Definição de estratégia Ana (G1)



Situação 1

Em Barranquilla, na Colômbia, o preço médio da água é de 0,55 euros por metro cúbico, junto dos prestadores de serviços, ao qual adiciona-se o valor de 4 euros pelo aluguer do contador enquanto que, junto dos camionistas, é de 5,50 euros por metro cúbico.

Situação 2

Nos bairros degradados de Acra, capital do Gana, as pessoas que compram água aos vendedores normalmente gastam 3 euros por uma taxa fixa paga ao vendedor e 0,20 euros por cada metro cúbico de água.

Um habitante de Nova Iorque, cidade dos Estados Unidos da América, paga 1,2 euros por metro cúbico de água consumido e 5 euros pelo aluguer do contador.

Na estruturação do problema, os alunos simplificaram-no, verificando, em primeiro lugar, que o problema se divide em duas partes, que refletem duas situações diferentes (Figura 23). Esta ocorrência é verificada nas respostas de apenas dois grupos, como se encontra registado na Tabela 19.

Na tentativa de identificarem estratégias para prosseguirem com a identificação do modelo, um dos grupos, grupo G6, questiona a professora nesse sentido:

Ângela: Professora, eu acho que há quatro situações, no fundo. Será possível?
Pedro: Sim professora, também acho. Porque na Colômbia as situações são duas e depois em Gana há mais uma situação e em Nova Iorque há outra.
Ângela: Estamos a pensar bem? É isso?
Professora: É mesmo isso. Perfeito! (GOA20)

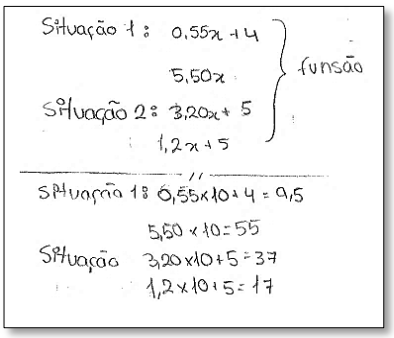
Deste diálogo, infere-se que os alunos conseguiram estruturar o problema e definir uma estratégia a seguir para encontrar o modelo.

(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

Na alínea a) é pedido que os alunos encontrem um modelo que descreva ambas as situações e que permita obter o preço a pagar pelo consumidor cujo gasto de água tenha sido de 10 metros cúbicos. Os alunos verificaram, neste ponto, a existência de duas variáveis que se relacionavam, a quantidade de água comprada ou consumida e o preço a pagar por esse consumo. No entanto, apesar de se deduzir que os alunos passaram este passo intuitivamente, apenas dois grupos identificaram nas suas respostas cada uma das variáveis. De seguida, estabeleceram a relação do preço a pagar em função da quantidade de água consumida. Perceberam que há uma taxa que se mantém fixa em ambas as partes do problema. Estes passos foram concretizados e registados nas respostas da maioria dos alunos. A seguinte resposta (Figura 24) sintetiza o modelo encontrado por Ângela para cada uma das situações, bem como o trabalho matemático efetuado com o mesmo.

Figura 24

Representação do modelo matemático de Ângela (G6)



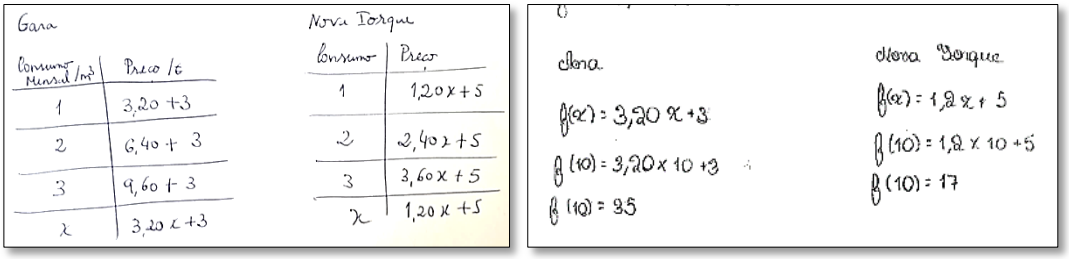
Durante o processo da procura do modelo, alguns alunos confrontaram-se com a necessidade de transcreverem os dados assim como a melhor forma para os representar, como aponta o seguinte diálogo:

Vítor: Professora, podemos construir uma tabela, para cada um dos casos?
Professora: Tu é que vês qual a maneira que preferes para registares os valores.
Tiago: E se for um gráfico, também posso?
Vítor: Eu acho que isso deve ser mais complicado.
Ana: Oh professora, mas eu não fiz nada disso, pode vir ver?
Professora: Ouçam com atenção, vocês é que vão escolher a maneira que se sentem mais confortáveis para representar as duas situações. (GOA20).

Alguns alunos optaram por utilizar uma tabela, como foi o caso de Maria (Figura 25), mas a maioria recorreu à representação algébrica, como evidencia a resposta do Rodrigo (Figura 25).

Figura 25

Representação de Maria (G4) e de Rodrigo (G1)

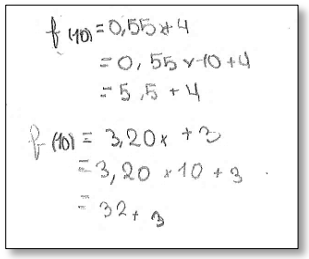


Em ambos os casos, os alunos conseguiram relacionar as duas variáveis e perceberam a lei de formação implícita, $f(x) = mx + b$, que traduz o preço a pagar, em euros, em função do número x de metros cúbicos de água consumidos.

Na continuidade do trabalho com o modelo, grande parte dos alunos substituiu a variável independente por $x = 10$, para determinarem, em cada caso, o valor de $f(x)$, como indica a resolução de Andreia (Figura 26), obtendo a substituição $f(10) = 0{,}55 \times 10 + 4$ *e* $f(10) = 3{,}20 \times 10 + 3$.

Figura 26

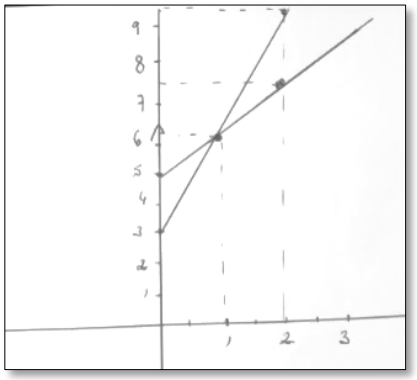
Trabalho com o modelo de Andreia (G4)



É de notar que os alunos do grupo G1 procederam à representação gráfica de ambas as situações, sob o mesmo referencial cartesiano (Figura 27). Deduz-se que este grupo de alunos pretendeu contrastar as duas situações sob uma perspetiva mais visual. Assim, na resolução de Beatriz encontram-se as duas retas. No entanto, não identifica os eixos coordenados nem as retas.

Figura 27

Representação gráfica de Beatriz (G1)



O esboço da representação gráfica da aluna mostra que as duas retas intersetam-se no ponto (1;6,2), porém não surge nenhum registo do seu significado.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Ao partirem do modelo matemático para a solução matemática, os alunos tinham que comparar os resultados obtidos com a informação contida no 'Relatório de Desenvolvimento Humano'. Grande parte dos alunos reconhece, quer nos seus registos, quer na discussão oral, que, de facto, existe desigualdade no preço a pagar pela aquisição de água e verificam que essa diferença atinge mais as pessoas que vivem em situações mais desfavorecidas à partida, como nos casos retratados no problema. Veja-se o seguinte diálogo estabelecido pelo grupo turma que decorre do questionamento da professora sobre as alíneas b) e c):

Professora: Então, qual é a vossa opinião relativamente aos resultados que obtiveram? Vão ao encontro daquilo que está no Relatório?

Ângela: Claramente! Porque até na Colômbia, a diferença daquilo que pagam aos prestadores de serviços e aos camionistas é incrível. E as pessoas que não têm água em casa é porque são mais pobres.

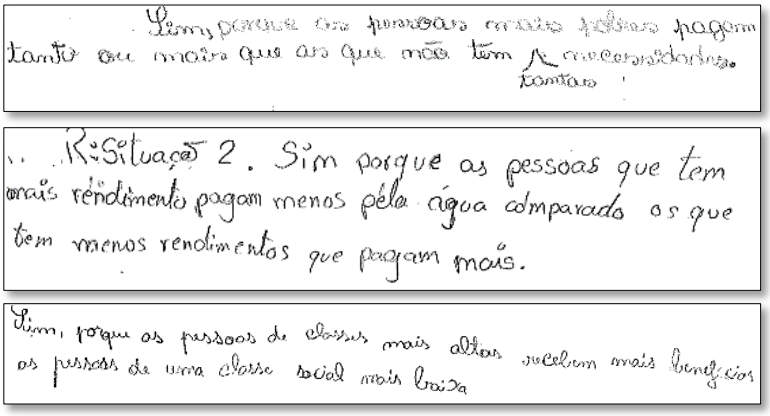
Tiago: Mas eu não percebo como a diferença é assim tão grande. Para 10 metros cúbicos, uns pagam 9 euros e quarenta e os outros pela mesma quantidade, pagam 55 euros. Na mesma cidade?

Miguel: É a diferença entre seres pobre e seres rico.
Guilherme: Mas eu nem acho que ter uma casa com água canalizada seja coisa de rico, vocês acham?
Miguel: Pois, na verdade, não! (GOA23)

Na alínea c) era pedido aos alunos que comparassem os valores encontrados para cada umas das situações. Nos registos escritos são encontradas muitas respostas ($n = 18$) que ilustram uma opinião que tende para o mesmo sentido, como é o caso de Tomás (G2), de Ana (G1) ou de Catarina (G3) (Figura 28).

Figura 28

Resposta de Tomás (G2), da Ana (G1) e da Catarina (G3) à alínea c)

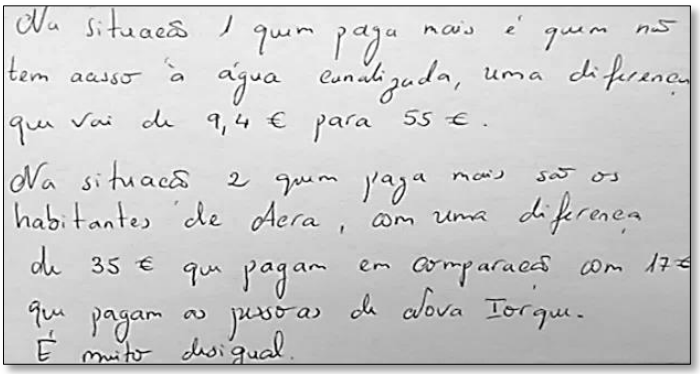


Deduz-se que, no momento de registarem as suas opiniões, estes alunos não tiveram muito cuidado em contrastarem e refletirem sobre o assunto, na medida em que não partiram dos resultados matemáticos para argumentarem as suas respostas.

No entanto, a resposta de Beatriz (G1) indicia que a aluna comparou, criticou e utilizou os resultados para sustentar a sua resposta (Figura 29).

Figura 29

Resposta de Beatriz (G1) à alínea c)



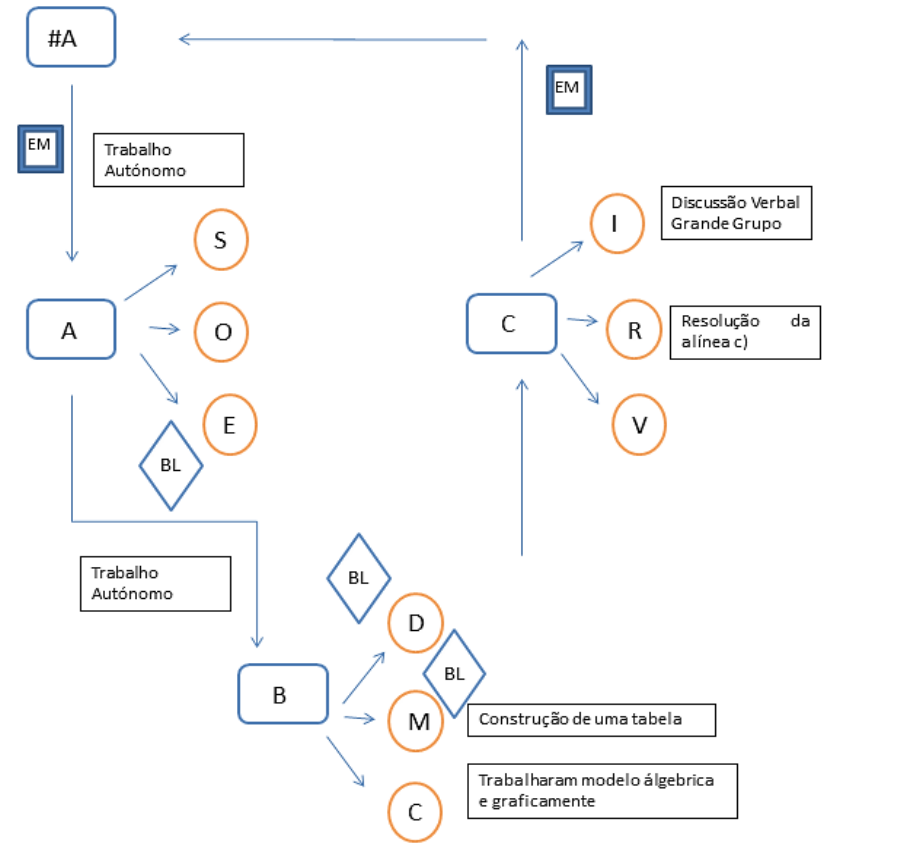
Na sua resposta, a aluna compara, para cada situação, os valores encontrados. Para concluir, mobilizou o conhecimento reflexivo para deduzir acerca da justiça desses resultados matemáticos.

É de supor que a atividade de validação dilui-se nas alíneas a), b) e c), na medida em que não se verificaram registos escritos dessa atividade.

Na resolução da tarefa de modelação 'Por que motivo os preços importam' desenhou-se a seguinte tendência de atividades cognitivas e processos privilegiados pela grande parte dos alunos, no decurso das etapas de modelação (Figura 30).

Figura 30

Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Por que motivo os preços importam?'



Legenda: #A - Problema Real; A – Modelo Real; B – Modelo Matemático; C – Interpretar Resultados; EM – Conhecimento Extramatemático, BL - Bloqueio
S – Simplificar; O – Organizar; E – Reconhecer Estratégias; D- Definir Variáveis; M – Modelo Matemático; T –Trabalhar matematicamente; I – Interpretar modelo; R – comparar Resultados; V - Validar

Na tarefa 'Por que motivo os preços importam', a turma de 8.º ano conseguiu interpretar o contexto, lendo a tarefa de forma autónoma e organizando alguns dados, porém demonstraram algumas dificuldades na hora de reconhecer estratégias a seguir. Poucos alunos identificaram as variáveis e a maioria necessitou do auxílio da professora para definir o modelo. Na representação do modelo, os alunos optaram pela representação algébrica e um dos grupos pela representação gráfica. Os grupos trabalharam o modelo de forma mais ou menos autónoma. A interpretação dos resultados obtidos foi motivada pela discussão em grupo turma e pela resolução das alíneas b), c) e d) da tarefa.

5.2.2.3. Tarefa 'Comparação da Pegada Hídrica'

A tarefa 'Comparação da Pegada Hídrica' pretendia introduzir a resolução de sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas e a interpretação gráfica da sua solução, estabelecendo um paralelismo com as funções afim, através de uma tarefa de modelação. A situação real consistia na comparação da pegada hídrica entre países (Figura 31).

Figura 31

Representação da tarefa "Comparação da Pegada Hídrica"

TAREFA 6 – COMPARAÇÃO DA PEGADA HÍDRICA ENTRE PAÍSES

Um habitante do Suriname tem acesso, em média, a 292 m^3 de água, por ano. Por outro lado, no Kuwait, país do Médio Oriente, este valor desce para 10 m^3, por ano.

Ashna é uma menina que vive em Albina, uma cidade do Suriname, localizada no distrito de Marowijne, que possui cerca de 10.000 habitantes.

Sören é um jornalista norueguês que percorre o mundo a fazer reportagens. Desta vez, foi enviado como principal correspondente de um jornal nacional para cobrir os últimos acontecimentos que ocorrem no Kuwait. Consigo, leva todo o equipamento necessário ao seu trabalho.



(a) Encontra um modelo que permita determinar a pegada hídrica diária em ambas as situações. Nota: Ashna apresenta um consumo indireto de água de 5 m^3 e Sören tem um consumo indireto de água de 30 m^3.

(b) De acordo com o modelo encontrado, ao fim de quantos dias a pegada hídrica de Ashna é superior à de Sören?

(c) Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

A tarefa foi resolvida em grupo de trabalho, ao longo de quatro aulas, seguida de duas aulas de lecionação dos conteúdos relativos ao tópico de sistemas de duas equações de 1.º grau com duas incógnitas. Durante a resolução da tarefa os alunos recorreram ao manual didático e ao auxílio da professora.

Na seguinte tabela (Tabela 20) encontram-se registadas as respostas dos alunos de acordo com as etapas de modelação e as atividades cognitivas produzidas.

Tabela 20

Frequências das respostas dos alunos à Tarefa "Comparação da Pegada Hídrica"

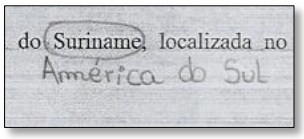
Etapas de Modelação	Atividades cognitivas	Secção na Tarefa	Evidências Escritas					
			G1	G2	G3	G4	G5	G6
Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema	Clarifica o contexto	Texto	1	1		1		
	Organiza os dados	Texto, Alínea a)			1	1		
	Reconhece estratégias	Texto, Alínea a)	1	1	1		1	1
Matematização e trabalho com o modelo matemático	Identifica variáveis	Alínea a)						
	Representa o modelo	Alínea a)	1		1	1		1
	Trabalha o modelo	Alínea a)	1	1		1	1	
Interpretação dos resultados e validação	Interpreta resultados	Alínea b), c)	1	1	1			1
	Compara	Alínea b)	1					1
	Valida	Alíneas a),b),c)	1		1			1

(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

Na clarificação do contexto do problema observou-se uma desenvoltura, com os alunos a lerem a situação em grupo, discutirem ideias, recolherem os dados e a esquematizá-los (NCOA_jun2018). Ouviram-se vários alunos a perguntar: "professora, onde fica o Suriname?" (GOA29_Tomás, G2), assim como nos registos escritos se encontram essas anotações, como exemplifica a da Andreia (Figura 32).

Figura 32

Anotação de Andreia (G4) na Tarefa 6



No entanto, apesar de se ter observado que os elementos de três grupos avançaram na resolução do problema sem a ajuda da professora para a compreensão da situação, os restantes

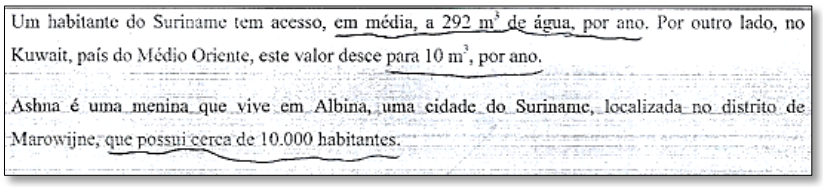
expressaram dificuldades na análise do contexto real. Veja-se o seguinte diálogo mantido pelo grupo de Daniela:

Martim: Vou pesquisar onde fica o Suriname e o Koweit.
Daniela: Sim, faz isso.
Miguel: Quem é que tem mais água?
Martim: É o Suriname, mas também não é muito mais é só mais 10.
Daniela: Não, não, então de 10 para 293 é muito mais.
Martim: Mas isso é por ano.
Miguel: Temos de encontrar um modelo que nos indique a pegada hídrica de cada um, é isso que aqui pede.
Martim: Então, da Ashna é fazer 30 vezes 10.000, porque todos os habitantes devem usar mais ou menos o mesmo.
(Entretanto, ouvem uma sugestão dada pela professora a outro grupo de alunos)
Miguel: Olhem que temos de somar o consumo direto e o indireto. Temos de fazer uma função com isto.
Daniela: Então da...qual é que é o nome? Da Ashna, é os 293 mais 5 e o do Soren é 10 mais 30.
Miguel: Pois, também acho. (GOA29_G5)

Do diálogo, infere-se que os alunos, auxiliados pela professora, conseguem progredir na compreensão do problema, no entanto, não mostram ir ao encontro do que é pretendido talvez por não terem efetuado uma leitura atenta do problema, o que também se infere pela seleção de informação encontrada em alguns registos ($n = 6$) como é o caso ilustrado na Figura 33.

Figura 33

Seleção de informação de Tomás (G3) na Tarefa 6

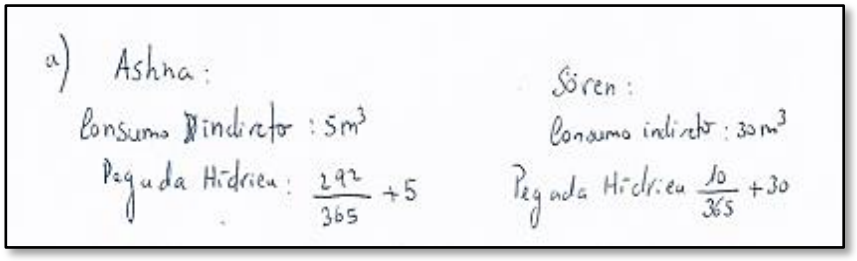

Um habitante do Suriname tem acesso, em média, a 292 m³ de água, por ano. Por outro lado, no Kuwait, país do Médio Oriente, este valor desce para 10 m³, por ano.

Ashna é uma menina que vive em Albina, uma cidade do Suriname, localizada no distrito de Marowijne, que possui cerca de 10.000 habitantes.

No que diz respeito às resoluções escritas, os alunos da turma organizaram os dados e identificaram estratégias a seguir, como exemplifica a delineada por David (Figura 34), na qual o aluno regista as informações e apresenta uma relação entre as variáveis embora sem as nomear, justificando esse procedimento com base naquilo que conhece sobre pegada hídrica.

Figura 34

Parte da resposta de David (G3)



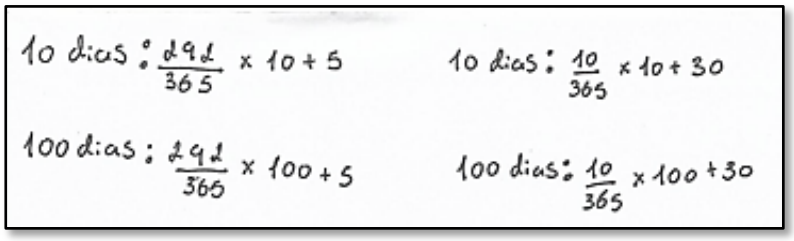
Apesar da maioria dos alunos ter avançado com hipóteses de resolução ($n = 18$), nenhum deles identificou as variáveis. Nesta fase do processo não se consegue comprovar se os alunos distinguem a variável dependente da variável independente.

(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

Na passagem da situação real para o modelo matemático os alunos apresentaram estratégias diferentes. Alguns alunos recorreram ao método de tentativa e erro para encontrarem o número de dias em que a pegada hídrica de Ashna será superior à de Soren, sem, primeiramente, encontrarem o modelo, como ilustra a resolução da Ângela (Figura 35).

Figura 35

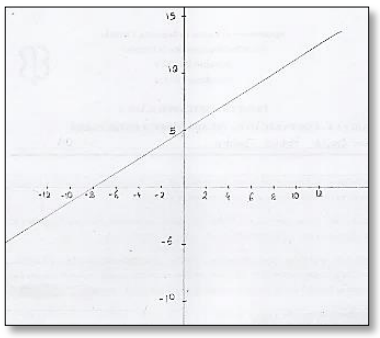
Resolução proposta por Ângela (G6)



Outros alunos do grupo G3 recorreram à representação gráfica (Figura 36), mas não identificaram os eixos e as respetivas variáveis e apenas desenharam a reta que corresponde à situação da pegada hídrica de Ashna, tal como se observa na resolução do Tomás.

Figura 36

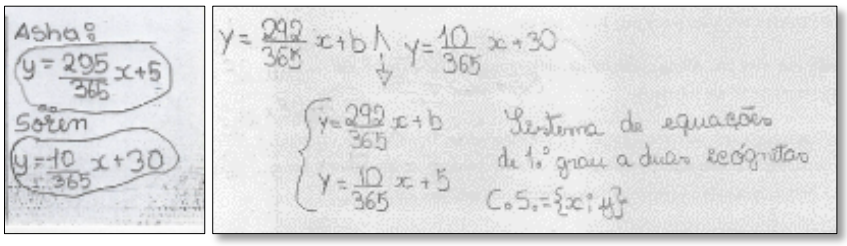
Representação gráfica elaborada por Tomás (G3)



Uma das alunas do grupo G4, assim como uma das alunas de grupo G1, chegou ao modelo através da expressão algébrica (Figura 37). Realça-se que ambas as alunas não indicam a designação das variáveis nem a relação entre ambas. Uma delas, apresentou o modelo recorrendo a um sistema de equações do 1.º grau a duas incógnitas, mas não o concretiza, tal como expressam as seguintes resoluções.

Figura 37

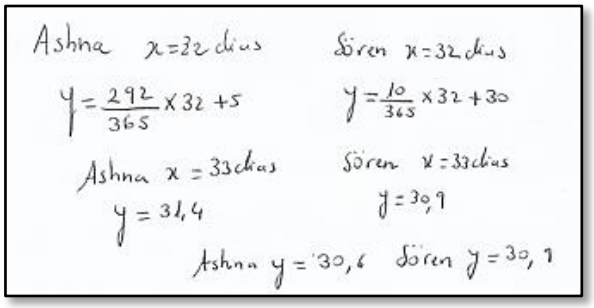
Modelo proposto por Andreia (G4) e por Ana (G1)



Seria de esperar que ao matematizarem o modelo algebricamente conseguissem desenvolver e trabalhá-lo pelo método de substituição. No entanto, tal não se verificou em nenhuma das respostas anteriores e a solução que obtiveram foi, em ambos os casos, por tentativa e erro (Figura 38). A resolução de Ana (G1) evidencia que apenas tentou expressar o resultado. É de supor que estas alunas aplicaram os conhecimentos necessários que lhes permitiram encontrar o modelo, no entanto, revelaram dificuldades em utilizar o método de substituição para resolver o sistema de equações.

Figura 38

Resultado de Ana (G1)



De uma forma geral, os alunos permaneceram bastante tempo nesta fase do processo de modelação, bem como solicitaram a intervenção da professora diversas vezes (NCOA_jun2018). Apercebendo-se das dificuldades, ou talvez por recear que os alunos não conseguissem resolver o sistema de equações, a professora sugere-lhes que pensem na definição de equação literal: "não se esqueçam que uma equação literal se obtém igualando dois polinómios e embora y seja um monómio também é um polinómio" (GOA30). Apesar desta sugestão, a professora insiste na orientação:

Professora: Quando estamos perante uma equação literal, precisamos de a resolver em ordem a uma das letras, neste caso, tanto uma como outra estão resolvidas em ordem a que letra?
Vítor: A y.
Professora: Ou seja, em relação à variável que representa o quê?
Vítor: A pegada hídrica. (GOA30)

Para além desta sugestão, a professora relaciona as equações obtidas com a equação de uma função afim e respetiva representação gráfica (NCOA_jun2018).

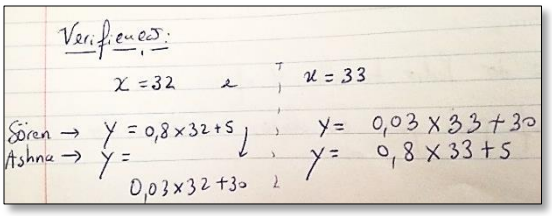
Porém, da análise das resoluções dos alunos verifica-se que todos os grupos transitaram do modelo real para o modelo matemático, mas, na sua maioria, não conseguiram trabalhar o modelo matematicamente. Por isso, retornaram ao modelo real e tentaram, desde aí, encontrar a solução.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Como grande parte dos alunos encontraram o resultado transitando do modelo matemático para o modelo real, quando determinaram a solução já a testaram primeiramente. Na resposta de Beatriz (G1) (Figura 39) é evidente que a aluna validou o resultado e interpretou-o confrontando ambas as situações reais.

Figura 39

Verificação dos resultados de Beatriz (G1)



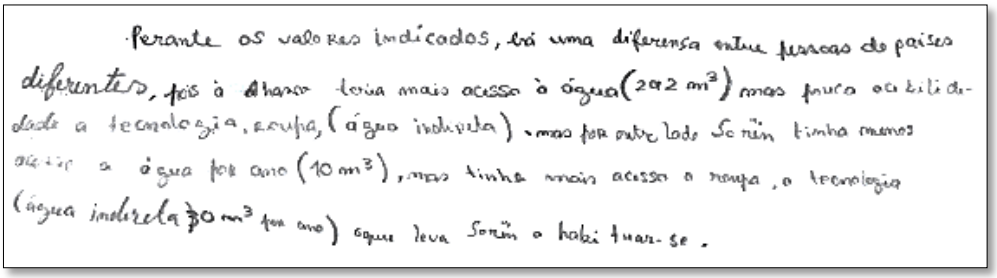
Constatando as lacunas demonstradas ao longo da resolução da tarefa, a professora explora, um pouco, os conceitos matemáticos subjacentes ao modelo e tenta levar os alunos a relacioná-los:

Professora: É certo que eu posso resolver um sistema algebricamente, mas qual é a forma de resolvê-lo graficamente? Eu sei que cada uma destas equações, graficamente são uma reta.
Pedro: Duas retas, não é?
Professora: Sim, claro, duas retas. E qual vai ser a solução deste sistema, graficamente? As coordenadas de que ponto?
Vítor: Do ponto de interseção das duas retas.
Professora: Exatamente. E agora, pensem, o que representa este 33?
Ângela: É o dia em que a pegada hídrica de Asnha começa a ser superior à de Soren.
Professora: Se a Ashna vive num país que tem acesso a mais água do que onde está o Soren, por que é que a sua pegada hídrica só ultrapassa a de Soren ao fim de tantos dias?
Andreia: Eu acho que é devido à diferença entre o consumo direto e o consumo indireto. Deve ter a ver com a roupa, o computador, o telemóvel que o Soren tem. Isso é o consumo indireto. (GOA31)

Deste debate infere-se que após obterem os resultados, os alunos conseguem explicá-lo no seu contexto real, mobilizando os conhecimentos extra-matemáticos para chegarem a uma conclusão. Da resposta dada por Pedro, verifica-se que o aluno consegue comunicar e argumentar as suas conclusões (Figura 40), através da comparação dos resultados matemáticos.

Figura 40

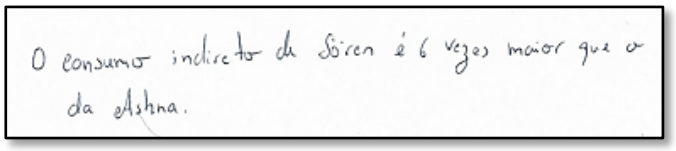
Justificação apresentada por Pedro (G6)



Ainda no que diz respeito à interpretação dos resultados, também se verificou que obtiveram resultados paralelos que permitiram melhor interpretar a solução, como evidencia a resposta de Ana (Figura 41).

Figura 41

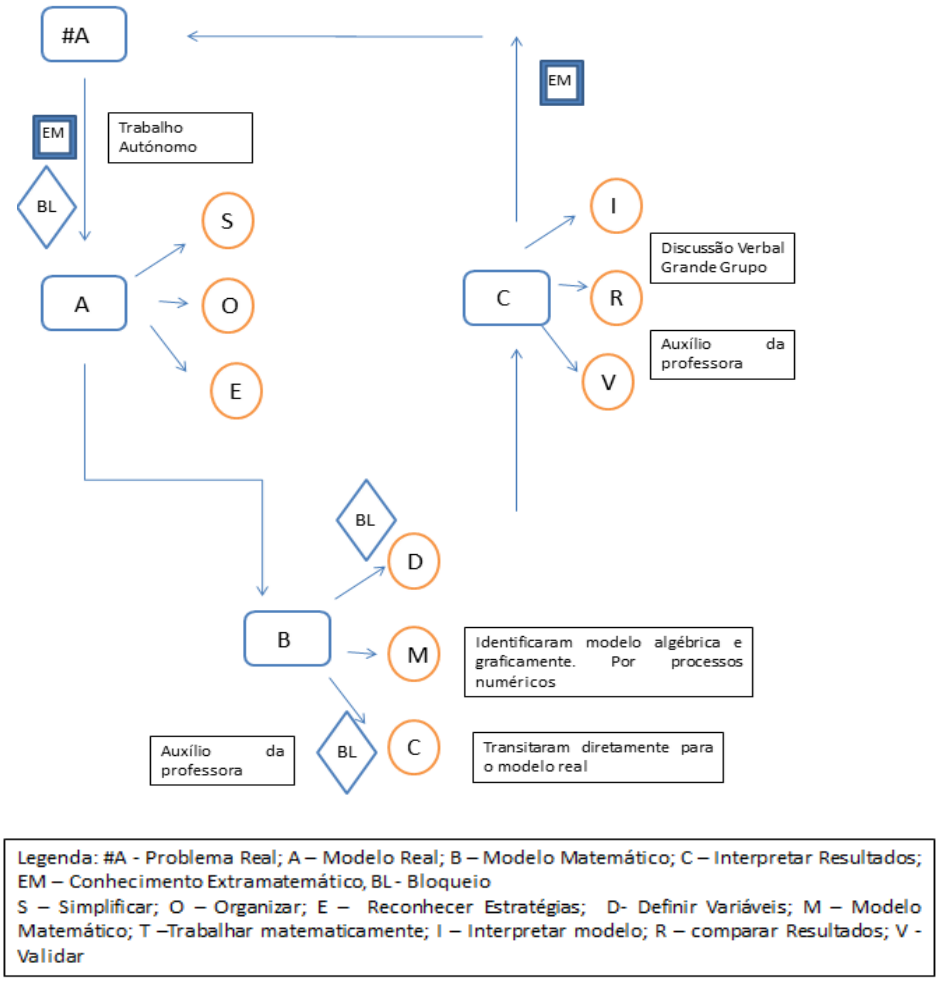
Justificação apresentada por Ana (G1)



Ao analisar as etapas percorridas pelos alunos ao longo da tarefa de modelação, esquematizou-se o seguinte percurso traçado pela generalidade dos alunos (Figura 42).

Figura 42

Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Pegada Hídrica'



Em resumo, na tarefa 'Comparação da pegada hídrica' os alunos da turma de 8.º ano, a compreensão da situação foi conseguida com o recurso a pesquisas, intervenção da professora e debate em grupo. Ao que se seguiu trabalho autónomo para a organização dos dados e o reconhecimento de estratégias. Já na matematização existiram alguns bloqueios, nomeadamente, quase inexistência de identificação das variáveis e no trabalho com o modelo, sendo necessário o auxílio da professora. A interpretação dos resultados matemáticos ocorrem sem grandes obstáculos, mas ainda assim com algum direcionamento da docente.

5.2.2.4. Síntese

Da exploração das tarefas propostas infere-se que a atividade dos alunos escalonou as fases do processo de modelação, embora se conclua que existiram várias barreiras cognitivas, as quais se elencam no Tabela 21.

Tabela 21

Relação entre as barreiras cognitivas, tipos de representação e dificuldades na mobilização do conhecimento matemático por Tarefa

	Tarefa 1	**Tarefa 2**	**Tarefa 3**
Barreiras cognitivas	Simplificar	Reconhecer estratégias	Simplificação
	Reconhecer estratégias	Identificar as variáveis	Identificar as variáveis
	Identificar as variáveis	Representar o modelo	Trabalhar com o modelo
	Representar o modelo		
	Interpretar, criticar e validar		
Tipos de representação	Verbal	Verbal	Algébrica
	Algébrica	Algébrica	Gráfica
		Tabelar	
		Gráfica	
Dificuldades na mobilização de conhecimentos matemáticos	Quantidades elevadas	Identificação das variáveis	Identificação das variáveis
	Noção de variável	Conceito de função afim	Conceito de função afim
	Conceito de função		
	Conceito de função afim		

No que diz respeito à tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica', surgiu um certo bloqueio na simplificação e reconhecimento de estratégias, na medida em que se verificaram dificuldades na delimitação das quantidades das variáveis suscetíveis de serem modeladas, ou seja, de selecionarem apenas a informação necessária. Na continuidade do processo, a atividade de identificar as variáveis foi

notoriamente perdida. No momento da procura do modelo, muitos alunos enveredaram por um processo aritmético que não os levou ao mesmo. Como tal, tiveram muitas dificuldades em definir o modelo, em trabalhar com ele e também usá-lo para interpretar os resultados e criticá-los.

Na tarefa 'Por que motivo os preços importam?', constatou-se que as dificuldades se reduziram. Ainda assim, os alunos demonstraram insegurança em atividades como reconhecer estratégias, identificar as variáveis e representar o modelo.

Da tarefa 'Comparação da Pegada Hídrica', há a realçar uma evolução no sentido de fluidez da orgânica do processo de modelação, tendo-se as barreiras cognitivas concentrado em, essencialmente, simplificar a situação real, identificar as variáveis e trabalhar com o modelo.

Quanto aos tipos de representação, são encontradas a verbal, algébrica, tabelar e gráfica, consoante os conteúdos matemáticos subjacentes às tarefas, percecionando-se nos alunos uma certa dificuldade em transitar entre representações.

Relativamente à mobilização dos conhecimentos matemáticos agrilhoam-se as dificuldades reveladas e não tendo as mesmas sido isoladas por tarefa. Da análise da exploração das tarefas sobressaem duas dificuldades *major,* em geral, a noção de variável e como se relacionam e, em particular, o conceito de função afim.

5.2.3. A vertente sociocrítica das tarefas de modelação

Nesta subsecção é analisada a importância que os alunos atribuem aos resultados matemáticos na interpretação e resolução de uma questão de ordem social, no que diz respeito ao conhecimento reflexivo. Para refletir sobre os espaços de interação é dada especial atenção às discussões verbais que ocorrem quer entre grupos de alunos, quer entre grupo turma e que emerjam de experiências socioculturais dos próprios alunos.

5.2.3.1. A importância da Matemática para interpretar a situação

A capacidade de mobilização dos conhecimentos matemáticos para a interpretação da prática social é manifestada, pelos alunos, na forma verbal e escrita em diversos momentos. Analisam-se esses momentos seguindo a base cronológica de exploração das tarefas (Tabela 22).

Tabela 22

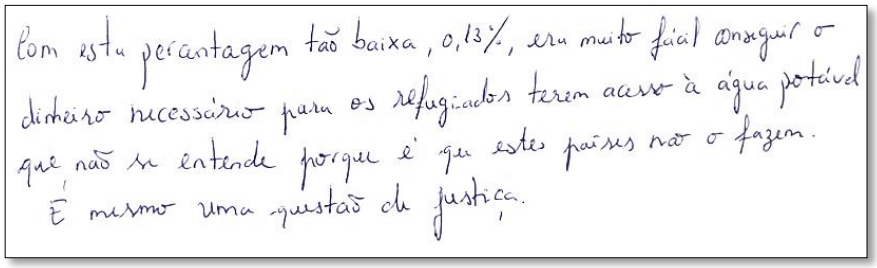
Relação entre as tarefas propostas de 8.º ano e as questões sociais

Tarefas	Questões sociais
Distribuição de Água no Planeta	Como pode a UNICEF conseguir o montante relativo ao investimento para melhorar as condições de acesso à água com base numa percentagem do orçamento militar dos 5 países que mais gastam?
Distribuição real de água em diferentes países	Qual seria a forma mais justa de distribuir a quantidade de água por cada país, tendo em conta o valor acima encontrado?
Água e desigualdade de género	Uma mulher do meio rural de Benim demora 56 minutos a recolher água, quanto tempo gasta um homem, na mesma tarefa? Consideras que esta desigualdade é um fator de desenvolvimento humano? Porquê?
Previsão Escassez Hídrica	De acordo com os resultados obtidos, quais as razões que apontas para tal previsão?
Por que motivo os preços importam?	Quem paga mais em cada uma das situações? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social?
Comparação da Pegada Hídrica	Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Por que motivo?

Na tarefa 'Distribuição de água no planeta' foi pedido que os alunos refletissem sobre o valor encontrado, relativo ao montante necessário para melhorar as condições de acesso à água, num campo de refugiados, com base numa percentagem do orçamento militar dos cinco países que mais gastam. Para além da reflexão verbal apresentada em grupo-turma, encontram-se algumas dessas reflexões nos registos escritos, tendo como exemplo a resposta de Beatriz (Figura 43). Através da sua reflexão, a aluna justifica a sua opinião recorrendo ao resultado matemático obtido e utiliza-o para questionar as relações de poder.

Figura 43

Reflexão de Beatriz (G1) sobre uma forma justa de distribuição de água na 'Tarefa Distribuição de água no Planeta'

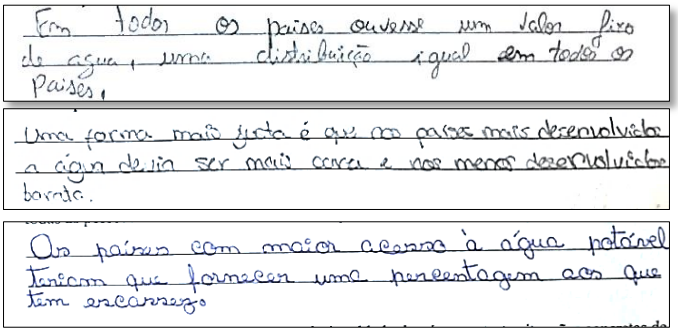


Na tarefa 'Previsão da disponibilidade de água' foi proposto aos alunos que pensassem numa forma mais justa de distribuir a quantidade de água por cada país. Nos seus registos são patentes

algumas ideias que traduzem a implicação do resultado matemático, como figuram as respostas de Vítor, Catarina e de Ana (Figura 44). Com uma visão ora igualitária, ora redistributiva os alunos discernem-na com base no conhecimento matemático intuitivo de uma constante finita.

Figura 44

Respostas de Vítor, Catarina e de Ana na tarefa 'Previsão da disponibilidade de água'



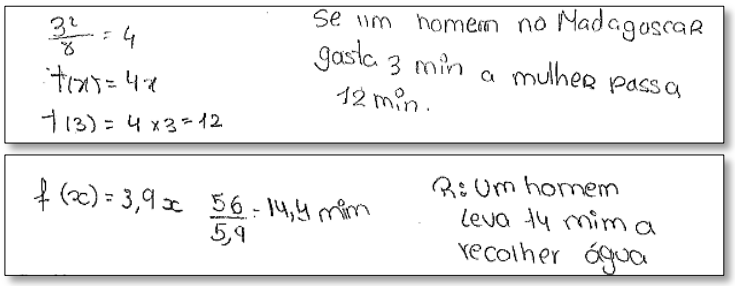
A forma como foi explorada a tarefa 'Água e Desigualdade de género' indicia que fomentou a participação generalizada dos alunos, tendo os mesmos mobilizado, com frequência, o pensamento crítico para sustentar opiniões (NCOA_mar2018), como exemplifica o diálogo estabelecido entre os membros do grupo G4:

Andreia: Não entendo como isto é possível, em todo o mundo as que são mais prejudicadas são sempre as mulheres e as crianças.
Frederico: Os homens também vão buscar, mas é verdade que é muito menos tempo. Já sabemos que é assim por todo o lado.
Maria: Reparem nisto, em Benim enquanto uma mulher gasta 62 minutos, que é uma hora, um homem só gasta 16 minutos. Ora façam aí a conta...
Frederico: Como calculo?
Maria: É só dividires 62 por 16.
Frederico: Dá 3,875.
Maria: Vejam lá, quase 4 vezes mais de tempo. (AO11_G4)

As reflexões dos alunos indiciam que foram matizadas pela questão que estabelece a comparação entre o tempo despendido na tarefa diária de recolha de água, por uma mulher e por um homem, no meio rural de Benim ou de Madagáscar. Com as respostas dadas por Ângela (G6) e por Bruna (G3) (Figura 45) depreende-se que as alunas entendem as relações matemáticas na base destas questões e as utilizam para argumentarem as suas posições.

Figura 45

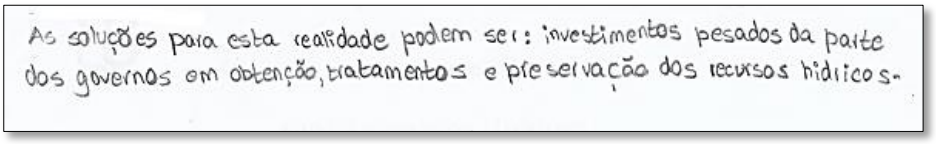
Determinação da relação entre o tempo gasto para recolha de água por uma mulher e por um homem, por Ângela (G6) no Madagáscar e por Bruna (G3) no Benim



Relativamente à tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica', depois de descoberto o modelo preditivo, era pretendido que, com base nos resultados, os alunos refletissem sobre os motivos que levassem aquela previsão, que indiciavam uma agudização da escassez hídrica ao longo dos anos. Nos registos escritos são encontradas algumas respostas nesse sentido, embora desconectadas do resultado matemático. Nas suas conclusões, duas alunas referem "o aumento da população mundial" (Catarina, G3, RE), ou "poluição e mudanças climáticas" (Beatriz, G1, RE) para sustentarem os resultados. No caso de David, o aluno procura apresentar soluções para que esta realidade se alterasse, como evidencia a sua resposta (Figura 46).

Figura 46

Resposta de David (G3) à questão reflexiva da Tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica'

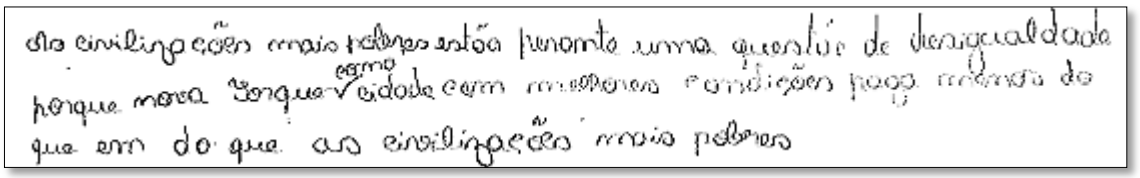


Uma das questões na tarefa 'Por que motivo os preços importam?' é que os alunos concluam quem paga mais pelo acesso à água em duas situações contrastantes e que, com esse valor, justifiquem se consideram estar-se perante uma situação de desigualdade social. Os registos escritos correspondentes às suas respostas concentram-se na prerrogativa de que "o preço da água devia ser igual em todo o mundo" (Tomás, G2, RE) e que "as pessoas de uma classe mais baixa têm que pagar mais para terem acesso à água potável" (Vítor, G2, RE) ou ainda "as pessoas que têm mais dinheiro pagam menos água" (Ângela, G6, RE). Nestes casos, os alunos não manusearam os resultados matemáticos obtidos para argumentarem o seu ponto de vista. Na resposta de Rodrigo (Figura 47), assim como nas dos restantes elementos do seu grupo, já é mais evidente uma plausibilidade no

domínio do raciocínio matemático para justificar a sua opinião, na medida em que compara as duas situações dadas.

Figura 47

Justificação de Rodrigo (G1) à questão reflexiva da Tarefa 'Por que motivo os preços importam?'



Na tarefa 'Comparação da pegada hídrica' estava previsto que os alunos, depois de identificado o modelo que relacionava a pegada hídrica entre pessoas de países diferentes, comparassem os valores encontrados e os interpretassem à luz do contexto social que retratam. As resoluções mostram que os alunos utilizaram os resultados matemáticos para sustentarem as suas considerações. Exemplo disso encontra-se na resposta de Martim, que refere "estamos perante uma desigualdade social porque o consumo indireto de Soren é 6 vezes maior que o da Ashna" (Martim, G5, RE). Esta reflexão revela que o aluno consegue sustentar o seu argumento com base na comunicação matemática. Andreia (G4) partilha dessa ideia, mas acrescenta que "na minha opinião é uma desigualdade social porque pelo consumo indireto podemos concluir que Sorën gasta muito mais que Ashna, pelos seus equipamentos e também por outras coisas" (Andreia, G4, RE).

Após as suas argumentações da implicação de desigualdade social os alunos foram mais longe dando ideias de formas de intervenção no combate à desigualdade do acesso à água. As suas posições debruçam-se sobre a responsabilidade das organizações governamentais e não governamentais na recolha de fundos. Na perspetiva de Ana, "os governos deveriam realizar campanhas, angariarem dinheiro para doarem a água aos países que não a têm" (Ana, G1, RE); e de Tiago, "para que não seja só uma parte da população a ter acesso à água, as organizações têm de lutar contra essa desigualdade, e fazerem uma distribuição mais justa pela população mais desfavorecida" (Tiago, G6, RE).

5.2.3.2. Espaços de interação

A apropriação, pelos alunos, do conhecimento matemático para entenderem situações de desigualdades de recursos ou oportunidades motivaram à mobilização das suas próprias experiências socioculturais gerando, desta forma, interações maioritariamente verbais que traduzem uma reflexão crítica sobre essas experiências. Ao longo da exploração das tarefas foi observado o processo

comunicacional que se estabelecia entre os alunos, que evidenciasse a conexão entre as suas experiências e a utilidade da matemática no desenvolvimento de atividades de modelação. Para o efeito, notabilizaram-se as intervenções efetuadas em grande grupo (GG) e em grupos de trabalho (GT) elencadas segundo as tarefas propostas (Tabela 23).

Tabela 23

Frequência de intervenções efetuadas pelos alunos de 8.º ano

Tarefas	**Registo de Intervenções**	
	GG	**GT**
Distribuição de água no Planeta	2	4
Distribuição real de água	1	3
Água e desigualdade de género	3	5
Previsão da Escassez Hídrica	2	5
Por que motivo os preços importam?	2	6
Comparação Pegada Hídrica	1	8

É de sublinhar que estas atividades interativas ocorreram, maioritariamente, em pequeno grupo, assim como se verificou um aumento dos discursos ao longo da aplicação das tarefas de modelação. As comunicações percecionadas em pequeno grupo caracterizaram-se por envolverem praticamente todos os elementos do grupo. Tome-se como exemplo o diálogo encetado entre os alunos do grupo G6, após a visualização da reportagem passada pela professora sobre a crise alimentar no Níger devido à falta de água.

Pedro: Realmente isto do problema da seca é uma bola de neve... falta a água, falta tudo.
Ângela: Pois é. Já viram a quantidade de crianças subnutridas e com tantas doenças?!
Pedro: É como aqui em Portugal no verão. Há uma seca tão grande que depois provoca incêndios como os deste ano.
Tomás: Mas o pior é que neste caso não podemos fazer nada enquanto no caso destes países se pode enviar ajuda.
Pedro: Não é bem assim, não sei se não podemos fazer nada nos incêndios. Tu já viste os quilómetros de floresta que arderam? As casas que foram destruídas e já nem falo do resto. Achas que não se pode fazer nada? Não acredito. (GOA1_G6).

Um retrato de autonomia, trabalho de investigação e envolvimento é demonstrado no seguinte relato desenvolvido pelo grupo G4, na exploração da Tarefa 'Distribuição real de água pelos países':

Andreia: Não se esqueçam que, em primeiro lugar, temos de ir ver quantas pessoas tem cada país.

Frederico: Eu vejo isso aqui no telemóvel, a professora disse para usarmos.

Andreia: Então qual é a população do Brasil, do Gana, o que é isto? Professora, Gana, o que é? Ah, é um país. Vê aí Frederico, então.

João: E depois, o que fazemos?

Andreia: Espera, deixa o Frederico ver de todos os países.

Maria: Já está. E agora? Uiii, acho que vamos ter que multiplicar tudo isto, por 50, não acham?

Andreia: Deixa ver, sim. É isso.

Frederico: Mas isso não cabe aqui, nesta tabela.

Maria: É na alínea b, tens aí outra tabela, preenchemos aí.

Frederico: Calculadora, quem tem? Tenho no telemóvel eu.

João: Ajudem-me que eu já estou perdido!

Maria: Temos que preencher esta tabela, é só multiplicar estes valores, a população total de cada país por 50 litros.

Frederico: Depois temos que representar graficamente, ah, vou aqui à playstore pôr uma régua. Andreia, já fizeste o gráfico?

Andreia: Sim, já estou na alínea c, mas preciso do teu telemóvel, vamos ter de pesquisar o consumo de água diário de cada um dos países.

Maria: Mas não fizemos já isso?

Andreia: Não, o que fizemos foi a população.

Andreia: Ui, isto dá uma diferença, olhem só, olhem na Etiópia, só têm 15 litros por dia. Onde têm é no Canadá, Portugal também não está mal, tem 120 litros. Se compararmos com os 50 litros está bem bom... (GOA6_G4).

Outro exemplo das interações verbais que ocorreram durante as atividades de modelação foi a troca de opiniões sobre o impacto da pegada hídrica realizada pelo grupo G1:

Beatriz: Eu tenho sempre cuidado em casa com a água que gasto e estou sempre a chatear a minha irmã porque demora muito tempo a tomar banho.

Rodrigo: Eu também tenho, mas olha que não é só com esse consumo que se poupa água. Olha que o consumo indireto gasta muito mais água do que aquele que usamos ao tomar banho, lavar os dentes, beber água.

Ana: Pois, por exemplo, olha o que aqui diz Ângela, para fazer umas calças de ganga gastam-se 10 000 litros de água. Pfff, que exagero. E uma tshirt 2700 litros, se for de algodão. Num par de sapatilhas, 8000 litros. E um computador, já viram? E a andar de carro? Uiii, é por isso que nós aqui em Portugal temos uma pegada tão grande.

Rodrigo: Pois é. E olha aqui o que encontrei, para produzir um quilo de carne de vaca são precisos 17 000 litros. Gasta mesmo muito. (GOA7_G1).

Emerge desta discussão a ideia de que este grupo de alunos perscrutou o contexto da tarefa de modelação recorrendo às suas próprias experiências pessoais e explorando colaborativamente o tema da pegada hídrica, possivelmente, para poderem concluir sobre o seu papel na criação do modelo ou na representação dos dados.

Outra amostra do discurso de sala de aula proporcionado pelas atividades de modelação surge no decorrer do desenvolvimento da tarefa 'Água e desigualdade de género', do qual sobressai a seguinte conversação instigada pela professora:

Professora: Então quer dizer enquanto no Benim uma mulher passa 56 minutos do seu dia a recolher água, um homem apenas dispõe de 14 minutos, não é? Acham que isto é igualdade?
Alunos: Não.
Professora: Acham que faz sentido falarmos neste caso em igualdade de género? Acham que é importante falarmos sobre isso? Existe igualdade de género?
Pedro: Nesses países não.
Professora: Nesses países não. E no nosso existe?
Tomás: Sim.
Andreia: Não!
Professora: Discussão com ordem, por favor. Diz lá Tomás.
Tomás: Existe porque nós todos temos os mesmos direitos, todos podem votar, toda a gente pode ir à escola, os homens e as mulheres.
Professora: Sim, isso é certo. Mas, por exemplo, em relação aos ordenados, para os homens e para as mulheres no nosso país?
Pedro: Depende do trabalho.
Professora: Para a mesma função, no nosso país, há desigualdade de salarial?
Andreia: Sim há, claro que há.
Professora: Há, pois, embora esteja legislado que não pode acontecer. Diz? Quem é que te parece que recebe mais pela mesma tarefa?
Vítor: É o homem.
Professora: Claro que a primeira reação é dizermos que não existe desigualdade na Europa, principalmente, quando estamos a falar de outros países. Mas não é assim. Claro que se comparamos a situação de Portugal com a realidade de qualquer um destes países que tivemos a ver...
Vítor: Também se nota essa desigualdade nas tarefas do quotidiano.
Professora: E o que são essas tarefas?
Vítor: As tarefas domésticas.
Professora: E lá em casa, as tarefas são divididas? Por todos, por vocês também?
(Todos querem participar, o ruído torna as intervenções impercetíveis. A professora espera e depois volta a questionar).
Ana: Professora, na realidade lá em casa quem faz mais é a minha mãe.
Vítor: Na minha também.
Tomás: Mas eu acho isso errado, o homem e a mulher têm mãos para trabalhar, têm que fazer igual.
Professora: No fundo tudo isto é só para chamar à atenção que, às vezes, nós nem temos noção de quantas situações desiguais existem. E quando falamos em igualdade de género falamos em relação a vários papéis que são desempenhados em sociedade: sociais, políticos, familiares. (GOA12_GrupoTurma)

Pode inferir-se do diálogo desenrolado em grupo turma que, talvez pelo facto de ter sido promovido pela professora, os alunos adotaram uma postura mais passiva na partilha dos seus pontos

de vista. Apesar de terem participado na discussão e partilhado algumas ideias, notou-se que, de uma forma geral, os alunos tiveram dificuldade em apresentar argumentos, possivelmente por não se terem apoiado na tarefa.

Em suma, os produtos que se originaram revelam que os alunos se sentem mais confiantes ao debaterem em pequeno grupo, ao passo que nas discussões orquestradas pela professora denota-se uma certa hesitação na apresentação dos seus argumentos.

5.2.3.3. Síntese

Para que o desenvolvimento da capacidade reflexiva dos alunos seja promovido é necessário que os mesmos se envolvam em discussões reflexivas sobre a situação problema apresentada durante o processo de modelação (Rosa & Orey, 2012). Ao longo desta secção foram demonstradas várias ocorrências nesse sentido, alternadas entre o registo escrito dos alunos e as discussões verbais entabuladas no seio grupal ou em grupo turma. Os resultados obtidos mostram que os alunos tiveram algumas dificuldades para conseguirem mobilizar os conteúdos matemáticos na interpretação reflexiva, nomeadamente ao nível da autonomia e na competência argumentativa. Não obstante, verificou-se uma certa compreensão da necessidade da implicação matemática como forma de interpretar e refletir sobre o mundo, que emergiu através dos registos escritos de alguns alunos.

Ainda neste subcapítulo, observou-se que, ao serem propiciados espaços de interação com abertura para o diálogo e discussão, os alunos foram capazes de analisar a realidade, muitas vezes, conjugada com as suas próprias experiências, e construir raciocínios condizentes com um pensamento crítico que invoca uma compreensão matemática para o reconhecimento de situações de conflitos e desigualdades sociais.

5.3. Contributos das tarefas de modelação com recurso a questões de justiça social na aprendizagem de funções

As estratégias e dinâmicas efetuadas no sentido de proporcionarem um ambiente de aprendizagem de tópicos de Funções, baseado em tarefas de modelação com foco em questões sociais, merecem um balanço final.

5.3.1. Perspetivas dos alunos

Procurou-se averiguar qual o posicionamento dos alunos face à realização das tarefas de modelação, qual o entendimento acerca das mesmas para a sua aprendizagem de Funções e qual a

relevância que atribuem às atividades sobre assuntos de justiça social. Na visão deste grupo de alunos, os contributos não se restringem à sua vertente motivacional, ainda que dela emerjam benefícios inequívocos, saindo reforçada a importância de trabalhar com situações de contexto real para a compreensão da utilidade da Matemática.

As referências a uma aprendizagem mais interativa e com aproximação à realidade sobressaem no discurso dos alunos quando questionados acerca da *principal diferença* entre aprenderem os conteúdos matemáticos com recurso à modelação comparativamente com a resolução de exercícios (Tabela 24).

Tabela 24

Frequências relativas à aprendizagem por tarefas de modelação matemática

Subcategorias	Tipos de Resposta	Frequência
Principais Diferenças	Maior interação	6
	Aproximação à realidade	8
	Mais estimulante	2
	Mais divertido	5
Trabalho em grupo	Ajudarem-se mutuamente	20
	Promoveu a compreensão das situações	5
Importância das pesquisas	Encontrar estratégias para superação dificuldades	4
	Mais noção da realidade	14
	Maior autonomia	2

É o caso dos elementos do grupo G1, quando consideram que a necessidade de interpretação leva a uma interação e discussão de ideias, como afirmam Ana, Rodrigo e Tomás:

> "com estas tarefas interagimos melhor, nas aulas ditas normais só fazemos exercícios, não discutimos ideias" (EF_Ana, G1);
>
> "nestas tarefas tínhamos que interpretar, por exemplo, nos exercícios do manual é praticamente só aplicar ou resolver" (EF_Rodrigo, G1);
>
> "eu acho que aprendemos melhor assim porque temos de pensar mais do que ser só resolver o exercício que já está tudo feito e é só executar. Eu acho que assim raciocinamos e, se calhar, aprendemos melhor" (EF_Tomás, G1).

Por sua vez, a aproximação das tarefas de modelação à realidade é um fator que se depreende ter sido importante na hora de salientar as principais diferenças ($n = 8$), como aquiesce Pedro: "tínhamos que puxar mais pela cabeça, achei mais estimulante. Quando vinha para as aulas de Matemática já não era uma seca, sabia que não íamos falar do Zezinho que foi à mercearia, que íamos

falar de coisas que interessavam" (EF_Pedro, G6). Nas palavras de Catarina, "os exercícios do livro nunca falam do mundo real. Mas agora percebemos bem o quanto a Matemática pode ser importante, em coisas importantes" (EF_Catarina, G4). Também para Andreia, "resolver estas tarefas foi mais divertido do que resolver exercícios" (EF_Andreia, G2). Além disso, os alunos do Grupo 2, ao se expressarem sobre as diferenças deste tipo de tarefas, foram complementando as ideias uns dos outros:

> Tomás: Com estas tarefas aprendemos coisas que são reais, como a falta de água.
> Beatriz: As dificuldades de outras pessoas, as suas necessidades.
> Andreia: E conseguimos ver as coisas de forma diferente.
> João: De uma forma real. (EF_G2)

Do *trabalho em grupo*, quase unanimemente, os alunos destacaram o facto de poderem ajudar-se mutuamente ($n = 20$), tal como refere Catarina – "ajudarmo-nos uns aos outros, cada um dava a sua opinião e era mais fácil interpretar as perguntas" (E_Catarina, G4) –, embora admitissem que dependia do grau de envolvimento que cada um dos estudantes depositava na realização das tarefas. Como desvantagem desta metodologia de trabalho apresentaram a diferença no empenho, como afirma David: "conseguíamos evoluir com o trabalho em equipa, em conjunto dá mais vontade de trabalhar, mas não era bom se havia alguém que não dizia nada e só copiava" (EF_David, G3). Segundo Tomás, "existem diferenças de opiniões, mas eu acho que isso é bom. Se não chegarmos a um consenso é que é uma desvantagem" (EF_Tomás, G2). Ainda assim, de uma maneira global, os estudantes realçaram que o trabalho em grupo promoveu a compreensão das situações retratadas nas tarefas, como exemplifica Rodrigo: "[o trabalho em grupo] ajudou, eram várias cabeças a pensar. Às vezes tínhamos alguma dificuldade, mas como éramos vários a pensar!" (EF_Rodrigo, G1); ou como acrescenta Frederico: "se algum não percebe o outro vai-lhe explicar o que sabe e ajudar a compreender" (EF_Frederico, G4). Por seu lado, Andreia especifica o modo como o fizeram: "se os textos tinham mais informação, tínhamos que nos concentrar e perceber como selecionar o que precisávamos" (EF_Andreia, G4), ao que Beatriz acresce: "algumas vezes tivemos dificuldade em interpretar as situações, aquelas que eram mais difíceis de encontrar podíamos fazer uma pesquisa" (EF_Beatriz, G4). Esta última afirmação remete diretamente para as situações em que os alunos tiveram que pesquisar informações que as tarefas não continham e a forma como se desembaraçaram, sendo que alguns alunos ($n = 4$) focaram *a importância das pesquisas* como estratégia para superarem dificuldades. Por outro lado, a polémica da importância dessas pesquisas

para uma melhor conexão dos conceitos matemáticos com a realidade fica registada através do seguinte diálogo:

> Rodrigo: Sem a Matemática não tínhamos bem a noção como é que se distribuía a água pelo planeta, quem tinha menos quem tinha mais.
> Tomás: Mas isso já se sabia, não vês as notícias?
> Rodrigo: Sim, mas sem a Matemática era impossível saber da forma que sabemos agora. Agora sabemos como que provar que é assim.
> Tomás: Mas eles a falarem nas notícias dizem logo tudo.
> Ana: Não, não é bem assim, tu sabes que há pessoas que têm muito menos, mas agora sabes quanto menos e consegues aplicar o que aprendemos a outros casos. E associar isso, por exemplo, à pobreza ou à falta de oportunidades iguais. (EF_G1).

Infere-se deste discurso que não foi unânime a vantagem do uso da investigação de informação do mundo real para a realização das tarefas. O argumento mais utilizado ($n = 14$) para justificarem a relevância das pesquisas foi que, desta forma, tiveram mais noção da realidade ou como diz Tomás: "porque conseguimos ter mais autonomia para perceber como as coisas podem ser resolvidas" (EF_Tomás, G6).

No que diz respeito à utilização da modelação matemática para a aprendizagem de Funções, manifesta-se consensual o seu efeito ter sido positivo ($n = 19$), como se pode ver na Tabela 25, tendo como justificação o facto de ter ajudado a melhor apreenderem os conteúdos, como ilustram as declarações de Tomás, Vítor e a de Rodrigo:

> A mim ajudou-me muito, percebi muito melhor (EF_Tomás, G6);
> Se não tivéssemos usado estas tarefas teria sido muito mais complicado. O ano passado não percebi nada de Funções. E foi mais desinteressante (EF_Vítor, G2);
> Porque eu antes não percebia e agora fiquei a perceber, era a matéria que tinha mais dificuldade, nas Funções (EF_Rodrigo, G1).

Corroboram esta ideia com a justificação de que, desta forma, conseguiram visualizar a aplicação das Funções em situações do quotidiano, bem como reconhecem nas tarefas de modelação uma alavanca a essa compreensão. Caso disso figura nas palavras de Andreia: "estas tarefas ajudaram-nos a olhar para a realidade e ver como se podiam interpretar com a ajuda das Funções, por exemplo, quando tivemos que encontrar o modelo que serviu para verificarmos uma maneira mais justa de distribuir a água" (EF_Andreia, G4).

Tabela 25

Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação matemática

Subcategorias	Tipos de Resposta	Frequência
Efeito	Positivo	19
	Indiferente	3
Benefícios das tarefas	Ajudarem a perceber melhor os conceitos	14
	Aplicação das funções em situações do quotidiano	8
Dificuldades nas etapas do processo	Interpretação da situação	7
	Delineação de estratégias	8
	Encontrar o modelo	15
	Trabalhar com o modelo	6

No que diz respeito às *etapas do processo de modelação*, alguns alunos da turma assinalam a dificuldade em selecionarem a informação como a maior *dificuldade* inicial à realização de tarefas de modelação, argumentando que não estavam preparados para este tipo de tarefas, como alega Ângela: "até agora como fazíamos sempre exercícios, para selecionarmos a informação foi difícil perceber como o fazíamos, acho que não estávamos preparados" (EF_Ângela, G6), enquanto para outros foi a própria Matemática, como se verifica na afirmação de Vítor: "sim [senti dificuldades], como aplicar a Matemática nas tarefas, saber o que era preciso fazer" (EF_Vítor, G2). Martim demonstra, indubitavelmente, a sua posição que passa pela simplificação das assunções iniciais:

> A maior dificuldade que eu tenho sempre é a interpretação. Nos exercícios normais como são mais diretos é mais fácil. Aqui tínhamos que interpretar bem para depois irmos à procura do modelo. Enquanto não percebi bem o que era isso, foi difícil. Com o tempo, consegui perceber. Com o passar das tarefas. (EF_Martim, G5)

No decorrer das atividades uma grande parte dos estudantes reconhece que surgiram adversidades no momento de encontrarem o modelo apropriado, como exemplificam as considerações de Ana: "para começar, não sabíamos o que era um modelo nem para o que servia. Depois tivemos dificuldade em perceber o que tínhamos de usar. Se fosse um gráfico, um esquema íamos conseguindo, mas com a expressão é sempre difícil" (EF_Ana, G1). Da mesma maneira, Pedro declara que "recolher os dados foi fácil, chegar ao modelo, nem sempre. Tive dificuldade em perceber o que era um modelo" (EF_Pedro, G6). Destas reflexões emerge a dificuldade de usar processos de simplificação algébricos para trabalhar com o modelo, como também fica patente nos comentários de Vítor: "no início, quando ainda não estamos relembrados das Funções, foi perceber como se aplicavam

as Funções, com a expressão algébrica, em colocar as letras e identificar o que eram" (EF_Vítor, G2). Concatenando os comentários que os alunos teceram sobre este tema verifica-se que as maiores dificuldades por eles sentidas na aprendizagem de Funções com recurso a tarefas de modelação oscilam entre a interpretação ($n = 7$) e identificação de estratégias ($n = 8$), a apropriação do modelo ($n = 15$) e, por vezes, trabalhar com o modelo ($n = 6$), como espelham as afirmações de Tomás, de Andreia e de Catarina:

> A maior dificuldade foi saber o que era preciso (EF_Tomás, G3);
> O mais difícil foi saber como íamos aplicar os conteúdos, nas tarefas (EF_Andreia, G4);
> Na Função afim tivemos algumas dificuldades. Era difícil encontrar o modelo principalmente com as expressões algébricas (EF_Catarina, G3).

De modo a ultrapassarem estes bloqueios os estudantes admitem que tiveram a ajuda do grupo e também da professora como fica patente nos testemunhos de Martim e de Ângela: "debatíamos os problemas e tentávamos procurar uma solução" (EF_Martim, G5); "às vezes a professora ajudava apenas com uma palavra ou com um pequeno esclarecimento" (EF_Ângela, G6).

Na vertente relativa à aprendizagem de Funções através da modelação matemática com foco em problemáticas sociais, denotou-se que os alunos conseguiram justificar as suas opiniões relativamente às tarefas privilegiadas, bem como as situações sociais que destacaram, como ilustram as seguintes declarações:

> A tarefa que gostei mais foi a da previsão da escassez hídrica, porque senti que estávamos a explorar mais o tema e a propor uma solução (EF_Tomás, G3).
> Eu gostei de todas as tarefas, principalmente de algumas perguntas de cada tarefa. A que mais me sensibilizou foi talvez a da desigualdade de género, porque verificamos que existe muita desigualdade e também me marcou a tarefa que focava na distribuição da água nos diferentes países, que há muita gente que não tem (EF_Ana, G1).
> Eu gostei muito da comparação da pegada hídrica porque senti que foi a mais fácil, talvez porque já estava mais familiarizado com o assunto e também com a forma de trabalhar (EF_Martim, G5).
> Eu gostei mais da primeira porque foi a mais fácil para mim. Também gostei da última. Falamos de pessoas de países que eu nem conhecia (EF_Pedro, G6).
> Para mim, também foi a primeira porque tínhamos de pesquisar e eu gosto disso, quando tinha que pesquisar e também gosto de fazer gráficos (EF_Daniela, G5).

Na primazia dada às tarefas, os argumentos distinguem-se pela relevância do contexto social inerente à tarefa ($n = 10$), pela clareza na interpretação ($n = 6$) ou pelo tipo de estratégia a adotar

($n = 6$), visíveis na Tabela 26. Já no que concerne aos valores intrínsecos à justiça social que foram mais debatidos os alunos exibem um espectro mais reduzido de pareceres, como sendo o consumo de água desigual, a desigualdade económica ou a desigualdade de género, resumidas em exclamações como a seguinte: "fortes desigualdades que existem no acesso à água, a desigualdade de género. O que implica a falta de água quando as pessoas têm de passar parte do dia a resolver essa questão que aqui para nós é tão fácil" (EF_Bruna, G3).

Tabela 26

Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação com base em assuntos de justiça social

Subcategorias	Tipos de Resposta	Frequência
Preferência tarefas	Relevância do contexto social	10
	Interpretação simples	6
	Tipo de estratégias a adotar	6
Contributo do debate questões sociais	Capacidade associar conteúdos matemáticos à realidade	9
	Aumenta interesse objetivos aprendizagem	5
	Reflexo futuro	2
	Pensamento crítico	4
Espaço à análise das desigualdades	Afirmativo	20
	Indiferente	2
Matemática como ferramenta	Interpretar situações injustiça com mais clareza	8
	Definir um plano de ação	4

Em termos do maior contributo da resolução e debate de questões do quotidiano associadas à igualdade de oportunidades, à proteção ambiental ou à justiça social para a aprendizagem de Funções, alguns alunos identificam ser o de desenvolverem uma maior capacidade de associação dos conteúdos à realidade, assim como aumentarem o interesse pelos objetivos de aprendizagem, como indica o discurso dos seguintes alunos:

> Assim, enquanto aprendemos Funções também aprendemos assuntos da vida real, é uma matemática mais prática, uma matemática da vida real (EF_Tomás, G3);
>
> Isto foi baseado em factos reais, se estudássemos as Funções com o manual são coisas fictícias que não nos puxam para a realidade, são coisas longínquas (EF_Vítor, G2);
>
> Assim, temos mais noção do que se passa no mundo e também na nossa realidade, desta forma, interesso-me mais pela matéria como as Funções e também consigo comparar. E não é só para o meu presente, mas também sinto que é mais importante para o meu futuro poder falar sobre estes assuntos (EF_Martim, G5).

Para outros, no entanto, é precisamente o reflexo dos conteúdos do tema de Funções na sua vida futura, seja pela importância da generalização, como é o caso de Ângela: "assim vamos lembrar-nos muito mais dos conteúdos no futuro, vamos associar, ao relacionarmos estes assuntos conseguimos ligar com as Funções ou numa situação parecida" (EF_Ângela, G6), seja por valorização do pensamento crítico, como indica o ponto de vista de Andreia:

> Por exemplo, no caso concreto deste tema conseguimos defender que todas as pessoas devem ter acesso a um mínimo diário de água para poderem ter satisfeitas as suas necessidades e levarem uma vida justa. Agora conseguimos estar por dentro deste assunto e falar dele com conhecimento. Nunca pensei que isto pudesse ser feito numa aula de Matemática. Ao estudarmos a escassez hídrica com as Funções percebemos bem a importância das duas coisas e também como as Funções são importantes para prever o futuro. (EF_Andreia, G4)

Quando lhes é colocada a questão se as aulas de Matemática podem ser um ambiente propício à análise das desigualdades existentes no mundo, a maioria dos alunos ($n = 20$) é perentória em anuir, havendo quem acrescentasse: "infelizmente esta não é forma como costumamos aprender, claro que se não tivéssemos falado sobre isto nestas aulas nem nos lembrávamos" (EF_Martim, G5). Ao entabular esta pergunta com o desafio de pensarem como poderiam contribuir, enquanto futuros cidadãos, para minimizar estas diferenças, as apreciações de alguns alunos passam por fazerem referência à Tarefa 'Distribuição de água no Planeta', exemplificando aquilo que consideram ser uma ajuda concreta, como é o caso de Rodrigo e de Martim: "na primeira tarefa fomos arranjar uma forma de conseguir o dinheiro necessário para levar água ao campo de refugiados" (EF_Rodrigo, G1); "podíamos ajudar economicamente. As aulas de Matemática podem ajudar, também chegámos a uma conclusão de como arranjar orçamento suficiente para um campo de refugiados através do orçamento militar dos países que fomos pesquisar que gastavam mais" (EF_Martim, G5).

A tomada de posição relativamente à Matemática ser uma ferramenta essencial para a interpretação do mundo é avançada pelas palavras de Andreia, que denotam um certo ativismo: "a Matemática ajudou-nos a perceber que não é impossível quebrar as barreiras. A provar e a conseguirmos definir um plano de ação, como no caso do orçamento militar" (EF_Andreia, G4); ou pela opinião de Vítor: "com a Matemática vemos até que ponto existe essa desigualdade, não é uma coisa vaga, é uma coisa concreta que conseguimos discutir e dar a nossa opinião" (EF_Vítor, G2). Também para Tomás e para Ana é importante realçar a vertente emancipatória do conhecimento matemático:

> Agora temos melhor ideia como podemos ajudar, de que forma e concreta, por exemplo, na tarefa seis, que tínhamos de fazer a previsão da escassez da água, aí estamos a utilizar a Matemática como uma ferramenta para compreender uma situação real (EF_Tomás, G3);
>
> Eu volto ao exemplo da tarefa quatro em que a Matemática nos ajudou a provar a desigualdade que existe no tempo que as mulheres e os homens perdem em irem buscar água. Assim poderemos utilizar e saber como usar esta informação em concreto (EF_Ana, G1).

Estas considerações sugerem a ideia de reflexão crítica que fica ainda mais notória no raciocínio de Pedro: "vemos nas notícias aquilo que os jornalistas dizem, mas agora pensamos de uma maneira mais ativa, podemos por nós próprios pensarmos" (EF_Pedro, G6). Esta forma de entender a Matemática sugere um dos primeiros passos à ação: "até porque agora vemos que a Matemática não serve só para irmos às compras, também serve para pensarmos sobre as pessoas que não têm dinheiro para irem às compras e porquê" (EF_Pedro, G6).

5.3.2. Perspetivas da Professora da turma

A mudança de atitude dos alunos face à Matemática deve-se, do ponto de vista da professora da turma, a vários fatores, "isto foi uma verdadeira mudança de mentalidades relativamente à disciplina" (EF_Marta). No seu discurso, estabeleceu a ponte com os domínios de Educação para a Cidadania, operacionalizando a sua abrangência no currículo, especificamente com a disciplina de Matemática, tendo-se tratado de "uma mais-valia para os alunos, porque puderam juntar o aprenderem Matemática com o que era esperado na disciplina de Cidadania" (EF_Marta). Do destacado, ainda mais importante que isso parece ter sido a abordagem interdisciplinar, pois "finalmente os alunos conseguiram perceber que afinal pode haver interdisciplinaridade entre a Matemática e outras disciplinas, e eu acho que isto foi importante para eles, acho que tiveram a perceção de que podiam aprender várias coisas ao mesmo tempo" (EF_Marta). Em segundo lugar, apesar de ter inicialmente sido uma limitação na introdução das tarefas, na opinião de Marta, foi notória a evolução da autonomia.

> Como são alunos que, na sua grande maioria, têm muitas dificuldades à disciplina, pensava que iam desistir facilmente. E, se no início, foi difícil, estavam sempre a chamar-me e parecia que não iam fazer nada sozinhos, com o passar do tempo foi impressionante! Chegavam, juntavam-se logo em grupos, e se já tivessem terminado a tarefa, perguntavam-me o que tinha mais para eles. Por vezes, ainda era preciso dar um empurrãozinho, mas lá iam. E por incrível que pareça até notei isso nos que tinham mais dificuldades, porque há alguns, poucos, mas há dois ou três, que já estou habituada a que trabalhem sozinhos, sem precisarem da minha ajuda. (EF_Marta)

Desta intervenção depreende-se que, na sua generalidade, os alunos procuraram mecanismos que os conseguissem dotar de maior independência, tendo, talvez, para isso contribuído o interesse pelas tarefas e o trabalho em grupo. Por último, o reflexo na avaliação. A professora admite que teve em consideração para a avaliação dos alunos as atividades dos alunos, aquilo que faziam e diziam durante as aulas salientando que: "o que tentei fazer já aquando da planificação foi que iria ter em atenção o todo e, por isso, registei frequentemente aquilo que faziam numa grelha de observação" (EF_Marta). Marta justifica esta opção com a prerrogativa de que "então se estamos a dar primazia à autonomia e a eles conseguirem chegar às conclusões por eles próprios, esse trabalho teria que ser avaliado e teria que entrar na avaliação deles" (EF_Marta). Além disso, a professora salienta que os alunos tiveram esse facto presente no momento da realização da autoavaliação de final de período, relatando o acontecimento:

> Foi engraçado que houve miúdos que na autoavaliação, miúdos com mais dificuldade, que chamaram à atenção e disseram "Professora, lembra-se que a gente trabalhou, a professora até disse que trabalhámos muito bem, fizemos as tarefas, tudo direitinho e acho que participámos bem". E digo-te mais, até há um aluno que é bem provável que fique retido este ano, mas eu vou dar-lhe o 3. Foi dos que mais interessado e participativo esteve, só que é um miúdo que tem muitas dificuldades e inseguranças, mas pronto para ele estas tarefas foram chamativas, mostrou-se mesmo interessado, não tenho qualquer problema em dar-lhe positiva. (EF_Marta).

Tendo como base de reflexão as dificuldades que os alunos evidenciaram na aprendizagem de Funções através da modelação, a professora identifica a falta de competência para mobilizar os conhecimentos sobre Funções, anteriormente adquiridos, como tendo sido o maior obstáculo:

> Como o objetivo era que trabalhassem sozinhos, no início foi muito complicado porque eles tinham que ir buscar os conhecimentos do ano passado. E estão geralmente habituados a que lhes damos logo a papinha toda, não é. Mas eu tentei não o fazer. Só que conceitos como a função linear, afim, constante, já tinham sido trabalhados e eles, supostamente, já deviam dominar. Mas não. E isso acarreta dificuldades. Então, a dada altura tive mesmo que fazer marcha atrás e rever uma série de conceitos. Senão as coisas não teriam avançado. (EF_Marta).

Ainda na linha dos constrangimentos, a professora acrescenta duas situações. A primeira teve a ver com a alta expetativa inicial que foi um pouco gorada, referindo que "no início apesar de hesitantes estavam muito entusiasmados, a novidade levou a isso. Mas depois, quando perceberam que iam ter que ir buscar conhecimentos antigos e que tinham que dispensar trabalho, as coisas arrefeceram um pouco" (EF_Marta). Marta justifica-o argumentando a falta de hábito de trabalho

autónomo: "porque é mais fácil eles ouvirem – faz-se assim e assim, para eles é mais simples" (EF_Marta). A professora reforça que foi algo que os alunos conseguiram ultrapassar quando se começaram a sentir envolvidos pelo contexto e pelos temas que foram debatidos, dando o seguinte exemplo:

> Eu acho que eles ficaram extremamente surpreendidos com a quantidade de dinheiro que os países gastam no seu orçamento militar, por exemplo. Foi-lhes assim um abre olhos perceberem que nos países desenvolvidos, por exemplo, o preço da água é muito barato do que em países em que haja mais dificuldades. Mas o que ficaram mesmo espantados foi como é que eles próprios conseguiram chegar à conclusão e aí houve um desbloqueio. (EF_Marta)

O segundo constrangimento detetado pela professora foi o cansaço final, aludindo ao facto de ter havido uma pausa e depois se ter retomado com a realização da última tarefa. Para a professora "fez todo o sentido, eu tinha que prepará-los para a prova de aferição e depois associávamos a tarefas aos sistemas de equações, era perfeito" (EF_Marta). No entanto, na visão da docente, ao haver um intervalo de tempo em que os alunos voltaram a trabalhar sobre a forma de exercícios, aquando da retoma das tarefas de modelação assistiu-se a um hiato que, do ponto de vista de Marta, se demonstrou difícil de recuperar.

Na narrativa da professora ressalta o contributo do trabalho em grupo e o debate gerado pelo contexto das tarefas, destacando que: "tiveram uma unidade inteira a trabalharem em grupo, tiveram que saber lidar uns com os outros, com a dinâmica de que um trabalha mais, ou menos. Mas ao fim de algum tempo já se organizavam muito bem, dividiam tarefas" (EF_Marta). No respeitante ao diálogo gerado pelas tarefas a professora não vacila em dizer: "foi gratificante vê-los a dialogarem sobre estas situações, embora eles sejam tímidos e tenham algum receio de expor as ideias deles, ver que eles conseguiam e que iam tentando dar aqui o seu contributo" (EF_Marta). Mas é quando se refere ao interesse dos alunos quanto aos assuntos de justiça social abordados que Marta não se coíbe em mencionar uma série de acontecimentos. De entre eles, emerge o sentimento de, simultaneamente, ter conseguido levar os alunos a analisar e refletir sobre situações do mundo real e lhes ter mostrado a aplicação dos conhecimentos matemático com a realidade, tal como se infere com o seguinte excerto:

> Eu lembro-me, perfeitamente, de eles dizerem: "Professora não é possível, então em Nova Iorque é mais barato que no Gana?" Para eles aquilo foi... Não, não pode ser! Se calhar, aperceberem-se que a água... Que nem todas as pessoas chegam a casa, abrem a torneira e têm acesso a água potável. Tudo isso para eles...! Alguns deles, eu acho que se calhar nunca tinham pensado nisso. Outra coisa que eu achei

> interessante foi eles começarem a perceber que tudo o que tinham, desde o lápis, da roupa, da sapatilha, tudo despendia gasto de água. Nunca lhes passou pela cabeça. Para além disso, acabaram por perceber como se usa a matemática em algo real, para que servia fazer cálculos para chegarem a conclusões, conclusões essas sobre as desigualdades que ainda existem. (EF_Marta).

Síntese

A visão dos alunos da turma de 8.º ano sobre a aprendizagem de Funções assente num cenário sustentado por tarefas de modelação está de acordo com a promoção desta prática. A ideia, por eles transmitida, é a de valorização de uma pedagogia diferenciada, marcada pela interatividade e mais estimulante, cujos argumentos esteados foram uma maior conexão dos conteúdos matemáticos com a realidade, a ajuda mútua na compreensão das situações e na procura de estratégias e o trabalho autónomo. No plano mais pormenorizado, este conjunto de alunos salienta o benefício do estudo de Funções através das tarefas de modelação, na medida em que conseguiram alicerçar a aprendizagem deste tópico em situações do quotidiano, o que os ajudam a uma melhor compreensão do mesmo. Relativamente às dificuldades sentidas durante o processo de modelação, os alunos referem o encontrar o modelo como o maior obstáculo. Seguiram-se as etapas de definição de estratégias, interpretação da situação e trabalhar com o modelo como as adversidades relacionadas que os alunos também tiveram que enfrentar. De uma forma geral, a resolução das tarefas com base na vida real motivou estes alunos para a aprendizagem de Funções, frisando a relevância do contexto social das mesmas como o maior estímulo, bem como consideraram útil o debate de questões sociais no aumento do interesse para os objetivos de aprendizagem. A maioria dos alunos não foi indiferente ao facto de anuírem na apreciação de que as aulas de Matemática podem ser um ambiente propício à análise das desigualdades existentes no mundo, mas também da própria Matemática poder ser uma ferramenta à interpretação de situações de injustiça e de ação.

O ponto de vista da professora sugere que a intervenção pedagógica efetuada favoreceu, nos alunos, em primeiro lugar, a compreensão da aplicação da Matemática no mundo real e a sua interdisciplinaridade. A esse contributo, a professora Marta agrega-lhe também o interesse dos alunos pela disciplina, o incremento da autonomia e o reflexo positivo na avaliação. Para a aprendizagem do tópico de Funções através das tarefas de modelação a docente enfatiza o grau de positividade do trabalho em grupo como forma de os alunos superarem as adversidades que pudessem surgir, bem como o debate gerado em torno das questões sociais como forma de reconfiguração da perceção dos alunos relativamente à própria Matemática.

5.4. Síntese do capítulo

O contexto escolar em que a turma de 8.º ano se insere caracteriza-se por ter uma imagem social coadunada com um contexto local onde não figuram clivagens acentuadas, e por uma missão escolar de promoção da qualidade e sucesso individual educativo. É, portanto, nesta conjuntura que os docentes de Matemática da escola discorrem sobre as suas práticas, e de onde sobressai uma verdadeira corrida contra o tempo no cumprimento integral do programa da disciplina, justificando, assim, a escassa adoção de estratégias e/ou metodologias diversas. Numa primeira caracterização dos alunos da turma é verificada alguma desmotivação face àquilo que a escola enquanto instituição tem para oferecer, embora tenham a expetativa de que a sua obrigatória frequência represente, no futuro, produtos satisfatórios. Uma grande parte deste grupo de alunos qualifica a disciplina de Matemática como sendo difícil, manifestando preferência por tarefas diretas, sobre a forma de exercícios.

A perscrutação sobre a visão dos participantes acerca da importância da resolução de tarefas de modelação que envolvam situações do quotidiano revelou que apesar de lhe atribuírem interesse, poucas são as práticas que exemplificam. A diretora do Agrupamento atribui essa responsabilidade a uma necessária transformação do currículo nacional, e os professores associam a falta de tempo e a extensão do programa de Matemática para a justificação da não adoção da modelação nas suas práticas docentes. Os alunos depõem, uma vez mais, a utilidade da Matemática nos seus futuros e encaram a sua utilização na vida real como algo que se cinge à vulgar demanda da literacia financeira.

Na vertente de uma ética profissional comprometida com princípios de equidade e justiça social, a disciplina de Matemática surge, segundo a diretora, como um problema de espectro social ainda antes de os alunos ingressarem no 2.º ciclo do ensino básico. Da voz dos professores do grupo disciplinar saem três causas para essa constatação: a desconexão da disciplina com a realidade; o ser uma disciplina que requer, de facto, mais dedicação; e a existência de um estigma social. Na atividade docente, estes professores esforçam-se por assumir a diferenciação pedagógica como forma de minimizar as desigualdades escolares iniciais, embora sustentem este princípio com reduzidos exemplos. O *feedback* dado pelos alunos quanto à conexão da Matemática com assuntos de foro social é inexistente, menos ainda quando associado ao campo das Funções.

Nas dinâmicas criadas ao longo da exploração das tarefas, os alunos responderam às diferentes etapas de modelação, adentrando na aprendizagem de Funções e apreendendo os conceitos por meio de tarefas cujo contexto real pressupunha questões de equidade e cidadania. Nesta conjuntura, os obstáculos encontrados prenderam-se, essencialmente, com as fases do processo de modelação, das quais se destacam a simplificação da situação real, identificação das variáveis e o

encontro e trabalho com o modelo. Este grupo de alunos privilegiou o registo de representação numérica e algébrica, tendo dificuldades para transitarem entre outro tipo de representações, bem como tenham demonstrado algumas dificuldades na convocação dos conhecimentos matemáticos no desenvolvimento da resolução das tarefas. Por outro lado, na hora de invocarem esse conhecimento para interpretarem a situação, os alunos responderam com essa capacidade.

Ainda na linha da resolução das tarefas, os alunos demonstraram competências de interação e discussão verbal, preferencialmente estabelecida em pequeno grupo, como forma de construção de raciocínios de análise de situações de desigualdade, recorrendo à argumentação matemática.

Por fim, ao refletirem sobre o trabalho desenvolvido, os alunos qualificaram esta forma de aprendizagem como diferenciada, interativa e estimulante. Na ótica destes alunos, a exploração das tarefas permitiu não só o trabalho autónomo e a interajuda, mas também a perceção da utilidade da Matemática, bem como a associação do tópico de Funções a situações da realidade. No campo da análise de situações de injustiça social, os alunos reconheceram – corroborado pela perspetiva da professora – a importância dos conhecimentos matemáticos como forma de compreender e enfrentar esses problemas.

CAPÍTULO 6

ESTUDO DE CASO SOBRE A TURMA DE 9º ANO

O presente capítulo é dedicado ao caso de uma turma de 9.º ano, encontrando-se dividindo em quatro partes, ao longo das quais são dados a conhecer elementos que possibilitem a compreensão dos fenómenos em estudo. Assim, num primeiro momento, situam-se os participantes no seu contexto, bem como se evidenciam algumas das perspetivas iniciais dos mesmos sobre conceitos mais gerais como educação matemática ou justiça educativa e social e aspetos mais particulares como modelação matemática ou funções. Seguidamente, traça-se uma narrativa da proposta educativa incidente na modelação matemática contextualizada por fenómenos sociais e reaprecia-se, no pós-intervenção, as opiniões dos alunos e da professora da turma sobre o trabalho desenvolvido. A síntese do capítulo surge, por último, com a finalidade de estabelecer o fio condutor entre as condições de partida, os processos desenvolvidos com as tarefas de modelação e os efeitos que geraram.

6.1. O horizonte escolar e as vozes de intervenientes da comunidade educativa

A marca provocada pelos contextos e percursos educativos que os alunos foram acumulando é de tal modo distintiva que se analisam alguns dos elementos que confluem para este registo. Para o efeito, é orientada a visão para a escola que frequentam, procurando caracterizar a sua missão e princípios orientadores, suportada pelos seus principais documentos e complementada pelo discurso do diretor. Segue-se a descrição dos percursos académicos e profissionais do diretor da instituição e dos docentes de Matemática, passando pelas suas práticas e tarefas inerentes ao desempenho profissional, bem como orientações éticas. No caso dos alunos, é feito um primeiro retrato com base nas suas vivências escolares, motivações, objetivos futuros e, mais especificamente, na relação que criaram com a Matemática. Neste trajeto são também escutados os significados que atribuem à aplicação da Matemática na realidade e a sua ligação a assuntos de Justiça Social.

6.1.1. A escola e a sua missão

A Escola Secundária Mariana Alcoforado provê o cenário educativo da turma de 9.º ano, circunstanciado a um concelho da região do Baixo Alentejo cuja área se localiza na Margem Esquerda do Guadiana e se divide em cinco freguesias. O núcleo urbano a que pertence posiciona-se como o segundo maior da região, embora o processo de perda de população se verifique desde a década de

50 do século transato, facto este que se faz ressentir ao nível económico e social, traduzindo-se numa zona "subdesenvolvida, ruralizada e envelhecida" (Projeto Educativo 2014-2017, p.7), fortemente marcada pelo desemprego da população ativa e pela migração sazonal. A escola em destaque ainda se conserva, à data do estudo[64], fora da rede dos Mega-Agrupamentos tendo, portanto, um número moderado de alunos, 174 alunos de 3.º ciclo, distribuídos por oito turmas e 319 alunos de ensino secundário, os quais se distribuem por onze turmas de percurso regular e três de ensino profissional. Assim, a oferta educativa da escola incide em três domínios: um de prosseguimento de estudos na vertente dos Cursos Científico Humanísticos, outro de índole profissional e vocacional, com os Cursos Profissionais e Vocacionais coexistem com uma oferta que abrange o público adulto com os Cursos de Educação e Formação de Adultos (EFA), e o ensino recorrente de nível Secundário.

No plano que orienta a ação educativa, a Escola Secundária Mariana Alcoforado alicerça a sua conduta ética em valores que visem promover aprendizagens com qualidade, o estudo, o espírito crítico e o esforço, valorizar o conhecimento, respeitar a cultura, a cidadania e o outro (PE). Regendo-se pelo DL n.º 75/2008, a Escola apresenta como a sua missão dotar os alunos das "competências e conhecimentos que lhes permitam explorar plenamente as suas capacidades, integrar-se ativamente na sociedade e dar um contributo para a vida económica, social e cultural do País" (PE, p. 16).

Mais concretamente, o estabelecimento escolar traça a sua estratégia segundo seis eixos coincidentes com um conjunto de objetivos, com a finalidade de atingirem metas bem definidas. Neste percurso encontram-se os resultados escolares dos alunos, a promoção da educação para a Cidadania, o desenvolvimento de projetos, a comunicação e a interação com o meio, o clima da Escola e a participação da comunidade na Escola (PE).

Deste cenário teórico emerge, de facto, uma *praxis* fortemente conectada aos projetos, sejam eles de cariz escolar, municipal ou europeu. Esta opção é justificada pelo diretor ao expor duas condições existentes na realidade escolar: uma tem a ver com a situação geográfica, afastada dos grandes centros e a outra com as grandes carências económicas e sociais da grande maioria das famílias (ED). Com este relato o diretor procura mostrar a "necessidade de abrir horizontes e que os alunos vejam outras realidades porque a grande maioria não tem essa possibilidade. Depois, com todas as condicionantes do meio, leva a que a própria população fique muito fechada aqui..." (ED). Por estes motivos, a Escola aposta nas visitas de estudo nacionais e internacionais e no projeto Erasmus como forma de proporcionar aos alunos a possibilidade de se sentirem cidadãos do Mundo. No âmbito

[64] No ano letivo seguinte, 2019/2020, a escola passou a designar-se Agrupamento de Escolas Mariana Alcoforado, passando a Escola Secundária a sede do Agrupamento.

da intervenção social, a Escola demonstra uma prática bem definida de levantamento de necessidades, aos vários níveis, e o correspondente suporte às famílias. Como descreve o Diretor:

> Para além dos alunos que têm escalão A e B, identificamos a existência de todos os alunos que têm muitas dificuldades, alguns que até passam fome ou não têm o que vestir. Já têm a possibilidade de almoçarem na escola, nas situações mais críticas também fornecemos o pequeno almoço e quando têm aulas de tarde, o lanche. Este ano, identificamos 18 famílias e para além do que já referi também lhes oferecemos cabazes com roupa, calçado, produtos de higiene e alimentação (ED).

Esta narração demonstra que o objetivo de interação com o meio está diretamente vinculado ao suporte social.

No que diz respeito à equipa diretiva o trabalho desenvolvido é recente, sendo que o diretor se encontra no cargo apenas pelo segundo ano. Ao nível do corpo docente, o diretor define-o como "muito estável, deve haver poucas escolas tão estáveis como nós" (ED), justificando-o com o facto de serem uma Escola Secundária e não um Agrupamento de Escolas. Nas suas palavras, "cerca de 80% são professores efetivos na escola, de Quadro, professores que dão aulas cá na escola há 30 anos, alguns mais. Os professores Contratados são poucos, este ano temos seis" (ED). No entanto, a esta estabilidade é associada uma idade média dos professores acima dos 55 anos, sendo que têm vários professores com 60 anos ou mais. Na óptica do representante do órgão de gestão, o grau de motivação dos docentes é baixo, referindo que "numa escala de 1 a 10, diria 3" (ED). Na sua perspetiva tal acontece porque os últimos dez anos a carreira docente foi fustigada com cortes salariais e falta de progressão, o que contribuiu para os professores se sentirem desmotivados. Outro dos argumentos que avança é o fosso geracional que se sente para os discentes.

Em linha com um dos eixos estratégicos preconizados no Projeto Educativo, que contempla a melhoria das taxas de sucesso relativamente aos resultados escolares dos alunos da escola, o Diretor assegura que, no ano transato, o desempenho nos exames nacionais de Matemática foi razoável, crendo que o malabarismo que executa com o recurso aos projetos nacionais existentes, possa contribuir para este cenário: "ao sermos uma escola com um corpo docente com muita experiência que têm redução do horário, ao abrigo do 79 conseguimos implementar projetos como o Fénix e as coadjuvações de sala de aula" (ED). O representante do órgão de gestão elucida que "faz uma ginástica" com os horários dos professores para conseguir que as turmas tenham, pelo menos, um dos apoios, enfatizando que: "as turmas de 3.º ciclo são todas muito grandes, com uma média de 28 alunos por turma e nós gostávamos de mudar isso, mas não depende de nós, é da tutela" (ED). Face a

este cenário, acredita que trabalhar com um grupo reduzido de alunos, no âmbito do projeto Fénix, ou as coadjuvações em sala de aula marquem a diferença em termos de resultados escolares à disciplina de Matemática.

A preocupação com o ambiente escolar é sentida com a leitura do seu Projeto Educativo, na medida em que possui objetivos específicos como "melhorar o clima de escola ou contribuir para uma maior participação da comunidade na escola e da escola na comunidade" (PE, p.32-33). Estes objetivos encontram-se implícitos no discurso do diretor pela vontade com que se adentra em qualquer projeto que lhe pareça fazer sentido aportar para a escola (NCED_jan2019).

6.1.2. O diretor da Escola

Nesta subseção debruça-se o olhar sobre o diretor da Escola Secundária Mariana Alcoforado, procurando compreender como se posiciona face ao acesso e sucesso educativos, à responsabilidade social ligada à disciplina de Matemática e à apresentação de propostas mitigadoras do seu insucesso escolar.

No exercício do cargo pelo segundo ano consecutivo, o representante do órgão de gestão realça o grau de exigência e de responsabilidade, enfatizando as elevadas solicitações a que está sujeito. Na sua opinião, ter de gerir todos os recursos, sejam materiais, pedagógicos ou humanos de forma a responder ao número máximo de pedidos é uma tarefa rigorosa que enfrenta com seriedade, explicitando que "nem sempre temos as condições que desejávamos para fazer um trabalho melhor e isso é a parte mais complexa de gerir" (ED).

Com o alargamento do número de anos de escolaridade obrigatória, João Afonso confessa que os desafios que se colocam são enormes no que diz respeito aquela realidade escolar. O professor admite que historicamente havia uma triagem que era aceite como natural, principalmente, numa escola que até há pouco era apenas de nível secundário, acrescentando que:

> Essa bagagem de antigo liceu ainda se sente aqui na escola e é muito difícil de apagar porque, como já referi, há aqui muitos professores que já aqui estão há 30 e mais anos. A maioria dos professores como tem ainda esse ritmo de trabalho acham que os alunos que chegam ao secundário são aqueles que querem, à partida, ir para a faculdade. E agora não é assim, temos de trabalhar de uma forma diferente, temos que receber todos os aunos, não podemos rejeitar ninguém. Temos que ter ofertas diferentes como os cursos profissionais, que a escola não estava habituada e tem que se adaptar. Mas isto leva muito tempo. (ED)

Depreende-se desta declaração que os professores com mais tempo de serviço são os que mais dificuldade têm em se adaptar à mudança inculcada pela matriz comum lançada no âmbito da escolaridade obrigatória. Para além deste repto existe a "diversidade de alunos que enche as salas de aulas de secundário que antigamente não se verificava, mesmo no ensino regular e isso é muito recente" aclara o docente, indiciando que se refere à implementação do DL n.º 54/2018 que estabelece os princípios e normas da Educação Inclusiva. O diretor refere também que o desequilíbrio existente entre as posturas dos alunos gera problemas em sala de aula "porque há alunos que querem estudar, tirar boas notas e depois há outros que não estão para aí virados e esse alunos, antigamente, ficavam-se pelo 9.º ano" (ED). Estes problemas são exacerbados pelo facto dos professores terem um programa a ser cumprido e a existência de um exame nacional e, neste sentido, João Afonso salienta "constato que há muitos professores que trabalham como há 20 anos, em que se focam exclusivamente no programa e então é teste, exame nacional, teste e estão neste *loop* contínuo" (ED).

Do ponto de vista do diretor, um dos reflexos daquilo que o insucesso à disciplina de Matemática provoca no percurso escolar dos alunos é, claramente, visível na opção que tomam aquando a transição para o ensino secundário. Nas suas palavras:

> No secundário notamos muito a escolha que eles fazem do percurso com base na relação que têm com a Matemática. Muitos vão para o ensino profissional não porque queiram ou gostem, mas porque sabem das enormes dificuldades que têm a Matemática e que não vão conseguir ultrapassar. (ED)

Na sua ótica, um dos motivos que refere para este panorama continuamente associado ao insucesso ou ao desânimo pela Matemática é a pouca capacidade de abstração dos alunos para a aprendizagem da disciplina, ou, por outras palavras, detêm um raciocínio ainda concreto intuitivo, que concretiza da seguinte forma:

> Em primeiro lugar a Matemática tem um excesso de conteúdos, o ensino continua muito virado para o abstrato e não para a prática do dia a dia e eu percebo que os mais pequenos, principalmente, têm muita dificuldade com a abstração. Mais uma vez vou dar o exemplo do meu filho, ele quando começou a dar as frações e não estava a perceber e eu ajudei-o utilizando uma pizza que estávamos a comer e nessa situação prática ele conseguiu. E a professora na escola até deu esse exemplo, o engraçado é que ele só percebeu quando tinha a pizza à frente na realidade. (ED)

Deduz-se do seu discurso que uma das formas de ajudar os alunos seria diminuindo o programa e tornar as aprendizagens mais próximas da realidade, para que a linguagem simbólica estivesse mais associada à experimentação.

Enquanto voz que preside o Conselho Pedagógico, relembra que a participação em projetos escolares pode ser positiva para uma mudança ao nível da literacia quantitativa e financeira. Nesse sentido, relata dois exemplos, o primeiro de carácter municipal e o segundo nacional:

> Temos uma parceria com a Câmara que se chama PSE, tem a ver com a promoção do sucesso escolar, a cidadania e também de dar voz aos alunos e nesse sentido há algumas atividades. Sentirem-se como parte integrante da escola e darem o seu contributo para que as coisas melhorem. Depois temos o projeto nacional do orçamento participativo em que os alunos dão a sua opinião acerca de um valor atribuído, em que eles podem dizer o que gostariam que a escola faça. Durante este ano letivo a proposta vencedora foi melhorarem a sala dos alunos e nós avançamos com isso. Com essas atividades estimulamos a participação dos alunos na escola, podemos desenvolver o gosto pela Matemática e tentamos com isso que sejam melhores cidadãos (ED).

Outra aposta lançada pelo diretor com vista a contribuir para a mudança de paradigma dos resultados à disciplina é a criação de um laboratório da Matemática que vise estimular o gosto pela mesma[65]:

> Estamos a pensar fazer, que queríamos criar um clube da matemática, ou laboratório, pretendíamos aí ter jogos de estratégia, de cálculo, queríamos que os alunos tivessem contacto com a matemática de uma forma lúdica, e através disso incutir-lhes o gosto e mostrar-lhes a importância da matemática. E que também ganhem competências matemáticas. (ED)

Uma das frases que o diretor da escola mais propugna é "a necessidade de abrir horizontes" (NCED_jan2019), pelo que ao questionamento de quais foram os projetos em que se envolveu a escola no âmbito da Matemática, nos últimos anos, e quais desses projetos incidiram sobre questões sociais, o docente em funções diretivas responde com dois exemplos concretizados no ano letivo transato: "no ano passado participamos nas Olimpíadas da Matemática e os alunos foram a uma visita de estudo a Lisboa, no âmbito da Matemática, ver aquela exposição do Escher" (ED). No seguimento da explicação, João Afonso acrescenta que "ao nível social, nessa visita de estudo, tivemos uma turma que tem muitos alunos com carências económicas, inclusivamente, um aluno que tem diversidade

[65] No ano letivo seguinte, a escola abre o Clube de Ciência e Robótica, coordenado pela Prof.ª Isabel

motora, mas estes alunos foram nessa viagem, a escola tratou disso". Com esta declaração o diretor demonstra uma prática redistributiva com uma finalidade equitativa não só ao nível pedagógico mas também social.

Na visão do diretor, uma possível resposta e, simultaneamente, desafio ao desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos que lhes permitissem interpretar fenómenos sociais ou económicos está na literacia financeira, como fica patente no seguinte registo:

> Eu acho que era fundamental que os miúdos desde pequenos soubessem o que é o dinheiro, saberem como o gerir, poupar, saber que se pode fazer com o dinheiro. Porque aquilo que verificámos é que se tiverem dez euros gastam os dez euros. Falta perceberem que têm de gerirem o dinheiro de forma eficiente para, um dia mais tarde, integrados na sociedade, saberem-no fazer e também para poderem ajudar aqueles que mais necessitam. (ED)

Estas palavras sugerem uma pedagogia assente numa ótica assistencialista, com a disciplina de Matemática a servir de apoio contabilístico, e que se encontra reforçado na afirmação: "E isto é uma bola de neve, porque se aprenderem a poupar e a cuidar a escola e os espaços públicos, sobram mais recursos para ajudar quem mais necessita. A Matemática pode ajudar na questão dos cálculos e da organização" (ED). Por parte da liderança da escola, esta vertente socioculturalmente deficitária pode ser compensada recorrendo ao próprio *corpus* curricular que preconiza a introdução das diferentes componentes da Educação para a Cidadania nas disciplinas escolares. Para o efeito, remete esse dever, sobretudo, para a autonomia dos professores, como se perceciona com a seguinte frase: "especificamente na Matemática, aquilo que pretendemos e engloba todas as disciplinas é que a Cidadania passe por todas elas e por cada um dos professores, onde cada um tem a obrigação de dar o seu contributo" (ED). Na sua perspetiva também cabe à autonomia institucional assegurar que "aquilo que desejamos é que os alunos saiam da escola, pelo menos, um pouco melhores do que aquilo que entraram" (ED), sendo que, uma vez mais, exemplifica com a implementação de um projeto:

> Temos um projeto pioneiro, em que só participaram 6 escolas, com a colaboração do tribunal de contas e cujo tema era a corrupção e a ideia era trabalhar este tema com os nossos alunos. O que era esperado era trabalhar pequenos gestos cívicos, dando um exemplo: estamos na fila do bar e há um miúdo que chega e passa à frente dos outros todos, está a corromper o normal funcionamento daquele local. Isso leva a que vá outro e faça o mesmo e passado algum tempo é o caos e já ninguém respeita. Também se falou foi na igualdade de género. São pequenos gestos. (ED)

Do seu discurso sobressai uma prática mobilizadora de projetos que possibilitem operacionalizar aquilo que entende como responsabilidade social da escola de "abrir horizontes".

Já no que diz respeito à problemática da perpetuação da disciplina de Matemática como um fator determinante de desigualdade e exclusão escolar, o diretor mostra-se dominado por uma realidade que assume "muito difícil transpor" (ED). As suas palavras são reveladoras da dificuldade em mudar as desigualdades de partida: "aquilo que verificámos é que quem nasce num ambiente económico mais desfavorecido parte logo em desvantagem em relação aqueles que tem um ambiente mais favorecido. Isso é muito difícil para não dizer impossível de mudar porque parte logo de nascença" (ED). Apesar de reconhecer "que cabe à escola minimizar essa dificuldade, desses grandes degraus que têm que subir", o diretor não acredita que só a escola tenha capacidade para "colocar todos no mesmo ponto de partida. Por exemplo, os mais favorecidos podem ter um apoio extra fora da escola, que é muito usual na Matemática, e os outros não têm essa possibilidade" (ED). Também salienta a diferença nos alunos da sua escola para os grandes centros urbanos, "os alunos desta escola não estão no mesmo ponto de partida do que os alunos de uma escola de Lisboa ou do Porto" (ED). Na visão de João Afonso a escola deverá fornecer apoio escolar e dar mais atenção aos alunos mais desfavorecidos, sugerindo uma educação compensatória cuja finalidade pressupõe que "quanto mais para cima estiverem os mais fracos, mais acima os outros também vão estar" (ED).

Síntese

Um dos maiores reptos que o diretor da Escola Secundária Mariana Alcoforado assume no cargo de coordenação é o da gestão dos recursos disponíveis, bem como se mostra atento à relação pedagógica que o corpo docente da escola mantém com os alunos. Do discurso do diretor da Escola depreende-se uma certa vontade de desmobilizar os espaços de aprendizagem tradicionais, uma vez que deposita nos projetos envolvidos e nas visitas de estudo uma confiança notória, alinhados com uma abertura de horizontes.

Relativamente aos resultados da escola à disciplina de Matemática, o presidente do Conselho Pedagógico salienta a importância das coadjuvações e do programa Fénix para garantir valores positivos. Neste sentido, é consciente da influência do enquadramento familiar para o sucesso na disciplina de Matemática, assim como sobre as repercussões associadas ao seu insucesso. Das propostas que apresenta para minimizar esta constatação, realça-se a diminuição do programa de Matemática, a aproximação do mesmo à realidade, a participação em projetos relacionados com literacia quantitativa e financeira e a criação de um laboratório de Matemática. Quanto à

responsabilidade ética induzida pelas consequências de uma possível exclusão escolar e social associada à Matemática, o diretor da Escola defende uma maior distribuição dos recursos aos alunos mais desfavorecidos.

6.1.3. O grupo disciplinar de Matemática de 3º Ciclo

Nesta parte do capítulo, transmuta-se a atenção para o grupo docente de Matemática da Escola Secundária Mariana Alcoforado, procurando mostrar as ações tomadas quando à planificação, opções metodológicas, avaliação, características específicas do ensino de funções, práticas de modelação e conexão à realidade. O modo como este grupo enfrenta os desafios contemporâneos associados aos resultados escolares a Matemática e à possível conexão com desigualdades sociais, ora de proveniência, ora de consequência é aqui evidenciado.

O retrato relativo ao percurso formativo e às práticas profissionais dos professores de Matemática de 3.º ciclo da Escola Secundária Mariana Alcoforado é dado por Isabel, a professora da turma de 9.º ano, Odete, Margarida e Luís Freire.

O primeiro ponto da prática docente é reconhecido, em grande parte, pela planificação da atividade letiva, que se encontra elencada na Tabela 27. Para três professores deste grupo, a planificação das aulas foca-se no programa em vigor, como referencia Odete:

> Há muitos anos que ando nestas andanças e o programa de Matemática sofre muitas alterações, por isso, é a ele que, basicamente, me tenho que cingir. Tanto no básico como no secundário mas, principalmente, no secundário que não podemos mesmo andar a perder tempo. (E)

Esta opinião é partilhada pelos seus colegas, exceto por Isabel. Esta docente clarifica a opção de planificar a atividade letiva tendo em conta todo o currículo "não posso aceitar a interdisciplinaridade, a inclusão, a educação para a cidadania, a multiculturalidade e depois basear-me unicamente no programa como fazem parte dos meus colegas. Pior que isso, muitos apenas seguem os manuais e nem o programa leem" (EI_Isabel). A professora reforça esta ideia expondo que não seria eticamente aceitável se não tivesse sempre presente vários fatores na hora de planificar as aulas, como sendo o Perfil dos Alunos, as Aprendizagens Essenciais e até a génese curricular como a Lei de Bases do Sistema Educativo (EI_Isabel).

Tabela27

Respostas relativas à Prática Profissional dos Professores de Matemática da Escola MA

Subcategorias	Tipos de Resposta	Participantes			
		I	M	O	L
Planificação das aulas	Programa em vigor				
	Currículo				
Materiais didáticos utilizados	Materiais manipuláveis e/ou calculadoras gráficas				
	Tecnologias digitais (computador, quadro interativo, telemóvel)				
	Manual adotado				
	Plataforma de jogos de aprendizagem				
	Software geométrico				
	Plataforma educativa digital				
Tipo de tarefas privilegiadas	Exercícios				
	Problemas				
	De descoberta e guiadas				
	Investigação				
Características da prática letiva	Os alunos como agente principal				
	Ensino debitário				
	Professor orientador				
	Importância dada à autonomia dos alunos				
	Antiautoritária				
Avaliação dos alunos	Questão aula como instrumento privilegiado				
	Trabalho em sala de aula				
	Tarefas e trabalhos de grupo				
	Utilização dos critérios de avaliação do grupo disciplinar				
Dinâmicas de trabalho em que se envolve	Professores grupo de Matemática				
	Projetos transdisciplinares				
	Trabalho com a equipa de Educação Especial				
	Professores dos Conselhos de Turma				

Ao nível dos materiais didáticos preferenciais, as abordagens dos docentes oscilam entre o método tradicional, com o manual da disciplina à cabeceira e o uso da calculadora e as vias digitais, abrindo caminho a materiais mais inovadores. Nesta referenciação sobressai a relutância de um dos docentes em diversificar os materiais para além do manual e da calculadora, admitindo que:

> Reconheço que há mil e uma páginas *web* que poderia utilizar, plataformas e outras coisas, mas o que eu acho mesmo importante é os alunos saberem trabalhar a Matemática analítica e graficamente e, para isso, só precisamos do livro para os exercícios, papel, lápis e calculadora gráfica. (E_Luís)

Esta afirmação evidencia o reconhecimento, por parte do docente, da utilização de materiais pouco diversificada, argumentada pela adoção de uma metodologia de ensino que primazia a raiz da Matemática. Por outro lado, as restantes professoras apresentam um rol de materiais que vão desde os

materiais manipuláveis, o material digital, as plataformas de jogos, as plataformas educativas ou o *software* geométrico, como registado na Tabela 27. Uma destas docentes é entusiasta da inovação de materiais, justificando-o, fundamentalmente, com o rápido avanço da tecnologia, expondo o seu pensamento da seguinte forma:

> Quando andava na Faculdade começava-se a falar das Novas Tecnologias e sabes o que era? Era o *Sketchpad* e o *Geogebra*, tínhamos que fazer trabalhos para cadeiras baseados nisso e nas Calculadoras Gráficas. No ano de estágio ainda utilizei acetatos e ter competências digitais passava por fazer apresentações em power point. Já viste o mundo a explorar que temos agora? E eu acho muito importante utilizá-lo porque não devemos ficar para trás. Para além disso, é uma forma de chegarmos aos miúdos quando a vida deles passa por estarem agarrados ao telemóvel. Quer queiramos ou não, eles adoram os *Kahoot*, o *Milage* e isso é uma mais-valia. (E_Margarida)

Numa visão semelhante, Isabel corrobora a integração na sua prática de ensino dos *softwares* geométricos e de plataformas educativas e de jogos, acrescentando os materiais manipuláveis com recurso à programação, descrevendo-o do seguinte modo:

> O manual é muito raro usar porque utilizo tarefas feitas por mim, de acordo com os conteúdos a desenvolver no momento. Claro que preciso sempre do computador, com alguns programas como o *Geogebra*, os *kahoots* e, principalmente, na Geometria gosto muito de usar material manipulável. Agora quero construir um cubo com *leds* e programável em Arduino. Também admito que uso alguns vídeos da Escola Virtual, que ache interessantes, especialmente, aqueles que se focam na aplicação da Matemática no quotidiano. (EI_Isabel)

É de salientar da sua descrição o uso de tarefas construídas pela própria docente e o pouco uso do manual escolar.

O tipo de tarefas que mais povoam as salas de aulas deste grupo de professores é, sem dúvida, em primeiro lugar, os exercícios, seguidas dos problemas. Três dos docentes afirmam ser, de facto, estes dois tipos de tarefas com que se "sentem confortáveis" (E_Odete), sendo que um deles reforça-o ao comentar:

> Por mais voltas que se dê, a Matemática vai sempre recair nos exercícios e nos problemas. Mais ou menos floreado, acho que é isto. E aprendi ao longo dos anos que quanto mais objetivo for, melhor para os alunos perceberem. É um pouco repetitivo? É possível! Mas ainda acho ser esta a melhor maneira. (E_Luís)

Por sua vez, Isabel, refere igualmente as tarefas com exercícios e problemas, enfatizando a importância das mesmas na consolidação da aprendizagem bem a resolução de problemas com aplicação na realidade (EI). Para além disso, menciona as tarefas que intitula descoberta e outras de investigação, como resulta do seu relato:

> Fiz agora uma [tarefa] de descoberta em que utilizavam o *Geogebra* e tinha a ver com a função afim e o cálculo dos parâmetros, eu não disse nada, era uma tarefa introdutória. Estava sequenciada, mas eles é que calculavam o declive.
> Também fiz há pouco uma no 7.º ano que era de investigação com a temática do número de ouro na arte. O grande intuito é que os alunos vejam a aplicabilidade da Matemática, sobretudo os do 3.º ciclo. Quando me perguntam para que é que isto serve gosto de ter sempre a resposta pronta com exemplos concretos que eles também conheçam. (EI_ Isabel)

Partindo do papel que desempenham os alunos na prática educativa, os professores do grupo de Matemática caracterizam as suas próprias práticas letivas. Dois deles reconhecem que estão um pouco presos à figura tradicional de professor-aluno, que as suas aulas seguem um modelo, como exclama Odete, "debitário do conhecimento" (E). No entanto, a docente realça que esta situação advém da atual necessidade de preparação para um exame nacional associada aos poucos tempos letivos dados à disciplina. Luís corrobora este cenário mas acrescenta a sua preocupação para com as "necessidades específicas de cada aluno, tento ir mais devagar sempre que algum não está a entender" (E_Luís). Já no caso das professoras com menos tempo de serviço o discurso difere. Denota-se a atenção para com o aluno ser o "agente principal do processo" (EI_Isabel) e para com "o papel fulcral em desenvolver a autonomia dos alunos"(E_Margarida). Neste sentido, uma delas conta que se sente uma "espécie de orientadora", que apenas conduz os alunos a desenvolver as competências em vez de "impingir a matéria" e "tento aprofundar aquilo que sinto que têm mais dificuldades para que as consigam ultrapassar" (E_Margarida). Já Isabel faz questão de divulgar a sua posição antiautoritária, na medida em que pretende fomentar a autonomia dos alunos com vista a que sejam "os próprios a suprir os obstáculos"(EI). Até porque, a professora desmonta esta ideia referindo que "posso passar várias aulas sem corrigir exercícios no quadro, só quando todos já os tiverem feito. E muitas vezes nem isso, porque já corrigi no lugar, um a um" (EI_Isabel).

No parâmetro da avaliação das aprendizagens dos alunos, a utilização dos critérios de avaliação definidos em Departamento é apresentada por todos os docentes. Parece ser evidente que o grupo se baseia nos instrumentos que visam uma classificação para selecionar o que os alunos sabem

e são capazes de fazer, no fundo, hierarquizando as suas competências (ver Tabela 27). Exemplo disso encontra-se no seguinte discurso:

> É certo que no 3.º ciclo a avaliação é um pouco diferente. Mas eu venho com tantos anos de aulas só no secundário que é um pouco difícil fugir a isso. Uso instrumentos variados, como questões aula, minitestes e testes. Faço várias questões na aula para ver se estão a acompanhar e ver o interesse em sala de aula, com a intenção de se responsabilizarem pela sua aprendizagem. Claro que é verdade que logo aí se vê quem vai chegar ao exame e tirar nível 1 ou 2. Para além do que referi também tento fazer uma autorregulação das aprendizagens no final de cada capítulo. (E_Luís)

Apenas uma das docentes, ainda que na sua génese conflua com a aplicação de uma avaliação normativa, discorre sobre uma avaliação ponderada, como se infere das suas palavras:

> As tarefas e trabalhos de grupo são alvo de avaliação, os testes, minifichas. Mas é com as questões aula que eu consigo mais rapidamente ver se eles perceberam. Então, posso voltar atrás, repetir. A avaliação não pode ser só uma nota, não é estanque, é para saber se sabem o que é pretendido, se chegaram lá ou não. Se eles agora não sabem e mais adiante ficam a saber, então porque é que eu não posso mudar a nota deles? Mas os critérios desta ecola perimitem fazê-lo já que os testes apenas contam 30%, no 3.º ciclo, o restante é distribuído pelas minifichas e pelo trabalho em sala de aula. (EI_Isabel)

A relação de cada um dos professores com a comunidade escolar passa, fundamentalmente, pelas dinâmicas de trabalho em que se envolvem. Neste âmbito, como se pode ler na Tabela 27, a enumeração deste trabalho foca-se nas relações estabelecidas em grupo disciplinar. É Margarida quem mais salienta este ponto, ilustrando-o: "no trabalho com os restantes colegas de matemática fazemos todos os materiais que são a base da nossa docência. As planificações, os critérios de avaliação até os testes e as fichas" (E). Por sua vez, outra das docentes acrescenta: "este ano, ao abrigo do projeto Fénix, temos reuniões semanais com todo o grupo de Matemática. Se vale a pena, não responder, porque a partir do momento em que só se pega no manual..." (EI_Isabel). Deste registo, deduz-se uma crítica ao trabalho conjunto, embora fique claro que o mesmo existe. É também referido o trabalho com as professoras de apoio aos alunos com Necessidades Educativas, patente nas seguintes palavras: "Ao ter alguns alunos que usufruem de apoio educativo, em sala de aula, trabalho muito com as professoras de apoio. Sempre que tenho alguma dúvida, recorro muita a elas" (E_Odete). Ainda neste seguimento, Isabel fala sobre os projetos que detém com professores de outras disciplinas, o que esclarece da seguinte forma:

> Tenho a sorte de ter uma colega de Português com quem trabalho muito. Desenvolvemos tarefas em conjunto, uma, por exemplo, que consistia em ler textos de Manuel António Pinho, que tem um livro de Matemática. No 7.º ano fizemos uma poesia visual com o número de ouro. Também temos trabalhado no âmbito da flexibilidade curricular, mas já fazíamos antes e se não fosse isto, faríamos na mesma. (EI)

Este parágrafo sugere uma dinâmica estabelecida com base na convergência da mesma visão pedagógica entre as docentes.

Ao adentrar nas práticas do ensino de funções, reconhece-se uma certa dificuldade para que os docentes exponham as principais características desse ensino. Essa insegurança é talvez reflexo daquilo a que, unanimente, dizem ser o conteúdo no qual os alunos sentem mais dificuldades, como se intui das seguintes frases: "e isso é transversal do 7.º ao 12.º ano, embora se note mais claramente no básico, porque no secundário já houve um grande filtro" (E_Odete); "acho que é uma forma que, por caso, tenho de melhorar porque é dos tópicos onde os alunos têm mais dificuldades" (EI_Isabel). Questionados quanto ao modo como ensinam o tópico de funções, os professores dão, em geral, respostas vagas (Tabela 28) e que denotam alguma hesitação (NCEI_jan2019). Um dos respondentes avança com a seguinte declaração:

> Por mais que se queira fugir ao manual é difícil, portanto, o que faço, por exemplo, no 9.º ano é rever todos os conceitos que aprenderam desde o 7.º ano, até chegar à proporcionalidade inversa. Aí, trabalho com exercícios que envolvam gráficos, tabelas. (E_Luís)

Outra das docentes relata que nas suas aulas de funções separa a parte teórica dos exercícios práticos e recorre a alguns exemplos:

> Primeiro, dou aquela parte mais teórica, depois tento aliar uma mais prática, mesmo na introdução do conceito de função, com exemplos – uma pessoa não pode ir para dois sítios ao mesmo tempo, no entanto, duas pessoas podem ir para o mesmo sítio. No 9.º ano, normalmente, começo com uma tarefa de exploração porque a linguagem de funções já está interiorizada e nessa parte não há grande dúvidas, os grandes problemas vêm depois. (EI_ Isabel)

Tabela 28

Respostas dos docentes relativas ao ensino de funções e integração de tarefas de modelação

Subcategorias	**Tipos de Resposta**	**Participantes**			
		I	M	O	L
Características do ensino funções	Tarefas de exploração				
	Variação de funções com o Geogebra				
	Exercícios com gráficos e tabelas				
Dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem de funções	Trabalhar com as expressão algébricas				
	Funções de 8.º ano				
	Transição entre tipos de funções				
	Fazer corresponder diferentes representações				
Conexões entre funções e realidade	Modelação				
	Exercícios que envolvam PD e PI				
Práticas de modelação	Inexistentes				
	No secundário, uso de modelos para obter previsões				
Fenómenos sociais passiveis de serem modelados	Distribuição e defesa do património natural				
	O trabalho e a precariedade				
	Orçamento participativo da escola				
	Biologia e Economia				

Já no que concerne às dificuldades demonstradas pelos alunos na aprendizagem de funções, todo o grupo esclarece que a representação das funções e a análise das situações através da simbologia algébrica é um grande obstáculo na aprendizagem deste tópico, pelo que ressalta das seguintes declarações:

> Logo no 7.º ano, quando se chega à parte da representação das funções através da expressão analítica, nota-se que os alunos ficam um pouco 'à-toa'. Mas quando se chega ao 8.º ano e se insere a equação y = mx + b, então acabou. Eu já tentei de diversos ângulos e formatos, mas não há maneira de entrar à generalidade dos alunos. (E_Margarida)
>
> É sem dúvida nas expressões algébricas e é engraçado que nas sequências, com o termo geral eles percebem bem, mas depois nas funções não conseguem. (EI_Isabel)
>
> Eu acho que eles nunca chegam a entender o conceito de variável e, por isso, essa dificuldade com a simbologia é arrastada até às expressões. Quando se fica pelos gráficos e pelas tabelas não há problemas, mas quando têm que trabalhar com as expressões algébricas, aí estão todas as dificuldades. (E_Odete)

Depreende-se que a manipulação simbólica é uma condição que os alunos têm pouco desenvolvida e que influencia, consequentemente, a capacidade para associar as expressões algébricas ao contexto da situação.

Ainda neste sentido, os professores apontam o tópico de funções, concretamente de 8.º ano, como exemplo de outra grande adversidade, como fica claro com o seguinte parágrafo:

> O nível de abstração a mobilizarem é muito maior porque a conexão com a realidade é menos usada, principalmente quando têm de trabalhar com a equação da reta. Ou seja, através do gráfico chegarem à equação, têm de calcular o declive e a interseção com o eixo das ordenadas. (E_Odete)

Também são referenciadas a dificuldade para transitar entre tipos de funções: "ficam completamente à nora, na passagem da função linear para a afim, porque não percebem o que significam os parâmetros" (EI_Isabel), bem como estabelecer paralelismo entre as diferentes representações: "o que eu sinto é que eles chegam ao 9.º ano sem perceberem que uma tabela pode corresponder a um gráfico e a uma expressão analítica, algo tão simples quanto passarem da tabela para escreverem a expressão" (E_Luís).

Perante a questão: como pode ser o ensino de funções relacionado com o meio envolvente e/ou com o interesse dos alunos? – os professores mostram relutância em responder (NCEI_jan2019), tendo três dos docentes, partilhado a ideia de que estabelecem conexões com a realidade na lecionação das funções de proporcionalidade direta e nas funções de proporcionalidade inversa, como exemplificam as afirmações: "uso muitos exemplos concretos no 7.º ano para dar a proporcionalidade direta, no 9.º ano também é fácil fazê-lo com a proporcionalidade inversa" (E_Margarida); "por acaso nesta parte da matéria, os livros trazem muitos exemplos ligados ao dia a dia" (E_Odete). Destas declarações induz-se que a aplicação das funções no quotidiano é parcamente inserida no ensino de funções destes professores, ainda que introduzam alguns exemplos que constam no manual. No caso de outra docente, reconhece que deveria existir essa conexão com o meio envolvente, mas não necessariamente com o interesse dos alunos, e que a mesma deveria passar pela modelação: "tem de passar pela modelação e com as problemáticas que os envolvem, não é só com os seus interesses porque nós temos que os alertar para a vida" (EI_Isabel). No entanto, esta professora admite que não usa tarefas de modelação na sua prática, justificando-o da seguinte forma:

> Não uso porque – e tem a ver com o chavão – os nossos manuais não têm nem uma e uma tarefa destas demora – sabes bem – imenso tempo a fazer. Até porque já pesquisei sobre o assunto, mas não encontrei nada em que me pudesse basear, teria de criar tudo de raiz. Mas é algo que eu quero aprofundar (EI_Isabel).

Dos restantes professores, dois deles dizem utilizar a modelação matemática apenas no ensino secundário com os modelos de previsão, como é o caso de Luís: "no 12.º ano há inúmeros exercícios [no manual] que pretendem que os alunos trabalhem com modelos para obter previsões, principalmente, com as funções logarítmicas e exponenciais" (E).

No seguimento desta temática, pede-se que o grupo dê exemplos de fenómenos sociais que lhes pareçam passíveis de serem modelados, ao que as respostas convergem, novamente, para uma certa hesitação (NCEI_jan2019), pelo que dois deles referem apenas a área da Biologia e Economia, outra professora adianta o orçamento participativo da escola e a outra docente expressa-se da seguinte forma:

> Em relação a este meio, acharia muito interessante estudar a distribuição do património natural, na agricultura, que estão a substituir oliveiras centenárias pelo amendoal e olival intensivo, que consome imensa água. Esta é uma terra com muita água, até quando? Outro assunto seria o meio do trabalho e a precariedade porque estamos num sítio com muito desemprego e todos os problemas que daí derivam. Até porque o desinteresse também passa por isso - estudar para quê? Para poderem reivindicar um futuro melhor têm de ter ferramentas. (EI_Isabel)

Através desta declaração, percebe-se que esta professora demonstra vontade para, um dia, trabalhar com os modelos e introduzir a modelação matemática na sua prática.

Em relação à postura assumida face a um imperativo ético consubstanciado à disciplina, averigua-se que os docentes admitem que a Matemática é uma das grandes responsáveis pelo insucesso escolar, porém três destes professores concordam que é algo tão enraizado "que é praticamente impossível mudá-lo, sabemos que o *background* familiar conta muito, quem tem possibilidades pode apoiar mais os filhos ou até os pôr em explicações o que gera logo uma diferença de base" (E_Luís). Ainda neste sentido, outra das docentes aclara o seu ponto de vista sobre as explicações particulares serem prejudiciais na aprendizagem da Matemática: "com as explicações ganham a muleta, mas, muitas vezes, não chegam a perceber. Admito que já dei, mas sou cada vez mais contra, se dependesse só da escola era diferente" (EI_Isabel). Outras possíveis causas citadas pelos professores (Tabela 29) são os programas muito extensos e a marca social da Matemática não ser para todos, ideia esta que partilham Margarida e Odete: "em minha casa sempre me incentivaram a gostar de Matemática, mas ouço tantas vezes os alunos dizerem, com desalento, que nunca perceberam Matemática, e isso vem de casa"; "quando entrei para a Faculdade parecia que a Matemática era coisa de homens e, apesar de ter melhorado, essa visão ainda continua a sentir-se (E).

Tabela 29

Respostas dos docentes relativas ao ensino da Matemática e responsabilidade social

Subcategorias	Tipos de Resposta	Participantes			
		I	M	O	L
Causas para o insucesso escolar na Matemática	Programas muito extensos				
	Achar que a Matemática não é para todos				
	Explicações particulares				
	Background familiar				
Práticas que elevem a autoestima dos alunos relativamente à matemática	Diminuir a ansiedade face à Matemática				
	Incutir o gosto pelo saber				
	Resolver muitos exercícios práticos				
	Uso de software geométrico para melhor visualização				
	Proporcionar momentos experimentais				
Ensinar ou educar matematicamente	Debitar *vs* contextualizar				
	Mecanizar *vs* desenvolver pensamento crítico				
Prática educativa assente na equidade e inclusão social	Combater realmente o insucesso				
	Alertar os alunos para as realidades sociais				
	Esforço partilhado por toda a comunidade				
	Autoreflexão constante				
Matemacia no atual ensino de matemática	Não se verifica				
	Seria praticável se o professor quisesse				

Para elevar a autoestima dos discentes, alguns professores referem que é importante incutir-lhes a vontade de aprender e o gosto pelo saber, como afirma Odete: "não podemos estar à espera que todos gostem de aprender, é claro, mas se fomentarmos o gosto pelo saber é meio caminho andado" (E). Apesar desta ideia ser dividida pelos restantes professores, nenhum deles especificou o modo como a executam. Também é mencionada a influência da diminuição da ansiedade face à disciplina para que, com isso, aumentem a motivação e cuja afirmação comprova:

> Eu dou o recorrente, à noite, tenho lá alunos que não conseguiram fazer a Matemática por vários motivos. Um deles, acredito que seja a motivação. E isso depende muito do professor. Não quer dizer que cheguem ao exame e consigam, mas eu acho que tem de ser, essencialmente, uma preparação para a vida. Principalmente, tento diminuir-lhes os níveis de ansiedade e o peso de que a Matemática não é para todos. (EI_Isabel)

Outras das práticas reveladas foram a resolução de exercícios práticos, bem como proporcionar momentos experimentais e o uso de *softwares* geométricos, como explica Margarida: "o ser humano é visual. Já percebi que se os alunos conseguirem ver enquanto lhes explico é meio caminho andado, para isso, uso muito o *Geogebra*" (E).

Tomando como referência a distinção entre ensinar matemática e educar matematicamente, este grupo docente entoa que a diferença é óbvia, pelo que ensaiam, mais ou menos da mesma forma, os argumentos, como exemplificam as seguintes frases:

> Nunca gostei que os alunos mecanizassem, por isso, tento mostrar-lhes que os algoritmos são apenas ferramentas, o importante é sempre o raciocínio (E_Odete);
> Somos professores educadores, não 'debitadores' de conceitos, porque, para isso, não é preciso um professor, pelos livros os alunos podiam fazê-lo. Educar é ensinar matemática aplicada de maneira a que os alunos possam aprender algo de forma substancial para a vida deles. (EI_Isabel)
> Um dos objetivos desta disciplina é desenvolver o pensamento crítico, isso só é possível sem mecanizar a matemática, por isso, sem dúvida que o mais importante é educar. (E_Margarida)

O que fica patente destas opiniões é a forma como rejeitam um ensino da Matemática redutor e mecanizado, desejando, em contrapartida, um ensino contextualizado e que dê primazia ao pensamento crítico. Entabulando a conversação com o modo como poderão as práticas educativas estarem assentes na equidade e na inclusão social, intui-se, pelas respostas dadas, uma certa evasão. Um dos docentes crê que as práticas escolares orientadas para a equidade têm de ser um ideal partilhado por toda a comunidade educativa, "caso contrário é impossível pô-las em ação" (E_Luís). Na visão de Odete e Margarida o combate ao insucesso tem de "real e concreto". Na visão de ambas, a aposta da tutela na área disciplinar da Matemática tem de se manter ao longo de décadas. Com este pensamento, Odete especifica que:

> O crédito horário atribuído, bem como todos os apoios extra, para a nossa área estão sempre sujeitos ao sabor do vento, varia com os ministros que por lá passam e não pode ser porque o fruto do trabalho tem de ser contínuo, só pode ser visto ao fim de muitos anos. (E)

Na linha do combate ao insucesso na disciplina, Isabel relata que tenta alertar os alunos para as realidades sociais, através das tarefas e exercícios. Acrescenta que a legislação contempla, através das medidas universais, adaptações muito vastas, mas que estão, essencialmente, voltadas para o sucesso e a salvaguarda das dificuldades cognitivas dos alunos. No entanto, como diz a professora: "nem todas as dificuldades são desse cariz". (EI). Em jeito de reflexão, Isabel aponta para a necessidade da comunidade docente repensar as práticas e proceder a uma autoavaliação constante. Por último, mostra-se pouco discutível para o grupo que o atual ensino da Matemática não fornece

aquilo que Skovsmose (2012b) define como matemacia. Em jeito de crítica conclusiva, uma das docentes exclama: "fala-se tanto de literacia financeira e, realmente, onde está a literacia matemática? Porque não é o mesmo, há quem ache que sim, até professores. É uma pena! Mas acho que se os professores quiserem, poderão aplicar essa *matemacia*" (EI_Isabel).

Síntese

A prática docente deste grupo de professores é moldada, em primeiro lugar, pela preparação do trabalho pedagógico, sendo que dão primazia ao programa, na hora de planificar e apenas uma professora refere que contempla todo o currículo. As ferramentas pedagógicas mais utilizadas pelo grupo são o manual adotado, plataformas digitais, materiais manipuláveis e calculadora gráfica, referenciando, ainda as tecnologias digitais, plataformas de jogos e *software* geométrico. Selecionam os exercícios e problemas como as tarefas privilegiadas na lecionação da disciplina e uma docente acrescenta o uso de tarefas de descoberta e de investigação. No que diz respeito à essência do trabalho pedagógico que se substancia na relação com os alunos, dois professores assumem que as suas práticas têm um carácter forte de ensino 'debitário', enquanto as restantes elegem o aluno como o agente principal da ação, sendo que uma das últimas caracteriza a sua função como professora orientadora. Ainda neste ponto, estas duas professoras convergem na importância dada à autonomia dos alunos, bem como a de um ensino antiautoritário. Da unanimidade na aplicação dos critérios de avaliação do grupo disciplinar como forma de avaliação dos alunos, é focado, ainda, por duas professoras a relevância das questões aula e, por uma delas, o valor dado ao trabalho em sala de aula e à resolução de tarefa e trabalhos em grupo. Das dinâmicas desenvolvidas com os pares, destacam o trabalho no seio do grupo disciplinar e com a equipa de Educação Especial, e uma das professoras menciona que estabelece projetos transdisciplinares, nomeadamente, como professores dos conselhos de turma.

Denota-se que este grupo de professores tem alguma relutância em caracterizar o seu ensino de funções, reconhecendo ser um dos temas em que os alunos demonstram mais dificuldades, em concreto, no trabalho com expressões algébricas. Para a conexão das funções à realidade, os professores assinalam o uso de exercícios que envolvam proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa e uma professora diz que gostaria de introduzir na sua prática de ensino de funções a modelação. Relativamente a tarefas de modelação, as mesmas são inexistentes, pelo menos no ensino básico.

Os professores que compõem o grupo disciplinar de Matemática consideram que uma das causas para o insucesso à disciplina é o achar que a Matemática não é para todos, em paralelo com o facto de os programas serem extensos. Um dos professores aponta o *background* familiar dos alunos que cria diferenças de base, exemplificando-o com os alunos terem explicações particulares. Para elevar a autoestima dos alunos elencam a importância em incutir o gosto pelo saber e pela focalização na resolução de exercícios práticos, e, em específico momentos experimentais, mencionando, também a diminuição da ansiedade face à Matemática. Da diferença entre ensinar e educar matematicamente, duas professoras sinonimam-no com debitar e contextualizar, e os restantes contrapõem mecanizar com desenvolver pensamento crítico. Dos princípios éticos de equidade e inclusão social, os professores assumem que os têm presentes quando combatem o insucesso, alertando os alunos para as realidades sociais e procedendo à autorreflexão, sendo que um dos professores admite que é um esforço que tem de ser partilhado por toda a comunidade. Por fim, a convergência do reconhecimento que a disciplina não consuma a matemacia é total.

6.1.4. A turma de 9º ano

Neste ponto, após a descrição de alguns aspetos de carácter geral da turma, procura-se averiguar a sensibilidade dos principais intervenientes no estudo no que diz respeito às suas trajetórias escolares, motivações e contrariedades face às aprendizagens. Procede-se ao apuramento das opiniões acerca da importância que atribuem às aprendizagens matemáticas e à utilidade dos conteúdos nas suas vidas. Regista-se ainda, a perspetiva dos alunos de 9.º ano quanto à noção de justiça social e a sua ligação com a disciplina de Matemática.

A turma de 9.º ano, foco da presente investigação, é constituída por 29 alunos, cujas idades encontram-se no intervalo [13 - 17], com uma média igual a 14,3. Dos 29 alunos, 4 são oriundos de países estrangeiros: China, Moldávia, Colômbia e Reino Unido. Durante os seus percursos académicos, dois alunos apresentam retenção repetida no 9.º ano, enquanto 20 alunos não possuem qualquer retenção no seu percurso escolar. No que diz respeito à Ação Social Escolar, cinco alunos beneficiam de Escalão A e sete de Escalão B. Quanto ao sucesso académico, nenhum aluno da turma integrou Quadro de Excelência ou de Mérito no ano letivo transato e apenas doze alunos não apresentam qualquer nível inferior a três no final do ano letivo anterior. Transitaram para o 9.º ano, onze alunos com Planos de Promoção de Sucesso Educativo (PPSE), onde em nove deles está contemplada a disciplina de Matemática. Relativamente aos meios digitais, seis alunos revelam não ter computador nem acesso à Internet em casa (Plano Turma 9.º Y, 2018/2019).

No referente à qualidade das aprendizagens relativas ao 1.º período do ano letivo em curso, constatou-se que os níveis inferiores a três foram significativos a grande parte das disciplinas curriculares, embora tenham contrastado com os resultados à disciplina de Matemática onde somente 6 alunos tiveram nível inferior a três. A este propósito intui-se uma divergência latente no discurso dos professores do Conselho de Turma e na professora de Matemática. Por um lado, o conselho de turma considera que os alunos, de uma forma geral, revelam baixos níveis de atenção em sala de aula, não apresentam hábitos, métodos e organização de trabalho, nem sempre realizam as tarefas propostas para casa e manifestam pouco empenho na realização das atividades escolares. Como estratégia de superação, o conselho de turma referiu que irá continuar a incentivar a participação em sala de aula, valorizar os hábitos e métodos de trabalho e aumentar o controlo sobre os cadernos diários e trabalho de casa, orientando os alunos para o estudo. A diretora de turma, por sua vez, continuará a solicitar aos respetivos encarregados de educação a consulta dos registos de índole comportamental (Ata de Avaliação 1.º P., 9.º Y). Por outro lado, a docente de Matemática discorda da avaliação que os seus colegas fazem da turma, revelando que, na sua opinião, a turma tem bom ritmo e capacidade de trabalho na aula, são participativos, embora desorganizados e aderem com facilidade às atividades propostas em contexto sala de aula. O grande problema da maioria dos alunos é a falta de hábitos de estudo em casa, o que, segundo a docente, se deve à falta de referentes e do pouco incentivo que recebem fora da escola da importância do trabalho e da persistência (NCMT _jan 2019).

Ainda nesta análise, ressalta o elevado número de atividades agendadas no Plano de Turma, ocorram elas no seio escolar ou em visitas de estudo, tranversais à maioria das disciplinas (PT). Infere-se que este cenário vai ao encontro do preconizado no Projeto Educativo da Escola e na sua aposta em projetos educativos.

A relação que os alunos estabelecem com as escolas que frequentam é determinante nos processos de aprendizagem que desenvolvem ao longo de todo o seu percurso, ainda assim os alunos têm tendência a analisarem-na apenas com base no vínculo atual. Os resultados (n= 22), apresentados na Tabela 30, não deixam dúvidas à inferência de que os alunos desta turma de 9.º ano encontram-se satisfeitos com a sua escola, justificando-o com aspetos que vão desde os recursos físicos, aos projetos escolares, à existência de bons professores, como exemplificam as afirmações de Ana, Martim e Leonor: "Gosto da escola, é um lugar acolhedor e as instalações são novas" (EI_G3); "Temos muitas atividades para fazer para além das aulas e os espaços são agradáveis" (EI_G6); "temos professores muito porreiros e que nos compreendem" (EI_G4). Ainda assim há alguns alunos (n=7) que qualificam o seu gosto pela escola como "mais ou menos", sendo o caso de Gabriel: "quando andava na primária

gostava tinha os meus amigos e diversões, agora quando vim para esta escola já não é assim, prefiro estar em casa, é mais as aulas e a seca de ter de estudar muito, na primária tínhamos mais liberdade" (EI_G1).

Tabela 30

Frequências relativas ao percurso e motivação escolares dos alunos de 9.º ano

Subcategorias	Perceções	Frequência
Relação com a escola	Boa	22
	Mais ou menos	7
Motivação para a escola	Estar com os amigos	25
	Aulas interativas e práticas	8
	Aprender um pouco mais	2
	Ter uma rotina	3
Fatores de desmotivação	Aulas aborrecidas	20
	Maus professores	12
	Muitos testes juntos	15
	Aulas iniciarem muito cedo	8
	Pouco diálogo com os professores	6
Disciplinas preferidas	Ciências Naturais	9
	Matemática	5
	Educação Visual	4
	Português	4
	Inglês	4
	Educação Física	3
	Espanhol	2
Disciplinas menos apelativas	Físico-Química	9
	História	9
	Inglês	5
	Geografia	3
	Matemática	3
Disciplinas que revelam mais dificuldades	Inglês	8
	Físico-Química	8
	História	4
	Matemática	4
	Ciências Naturais	2
	Educação Visual	2
	Português	2
Área que gostariam de estudar no futuro	Gestão/Contabilidade	4
	Engenharia Informática	5
	Profissional de Saúde	7
	Educação Infantil	2
	Designer	2
	Veterinária	2
	Assistente de bordo	1
	Agricultura	1
	Não Sabe	5

Na esfera motivacional à frequência escolar encontra-se, em primeiro lugar, o convívio com os pares ($n = 25$), como no caso de Raquel: "o que mais me motiva em vir para a escola é saber que vou estar com os meus amigos" (EI_G6), seguida da referência a aulas interativas e práticas assim como a importância de terem uma rotina. Apenas um aluno alude ao facto de poder "aprender um pouco mais" (EI_Gonçalo, G7).

O que mais desmotiva os alunos são aulas que intitulam "aborrecidas" ($n = 14$), muitas das vezes sinónimas de "teóricas" ($n = 6$), como argumentam as seguintes alunas:

> "Há professores que não nos deixam respirar, levam tudo muito a sério e não criam qualquer ligação connosco. Há uma grande distância" (EI_ Maria, G4);
> "Gosto de vir à escola quando sei que vou ter aulas interessantes. Quando sei que naquele dia só vou ter aulas aborrecidas, só me apetece ficar em casa" (EI_Raquel,G6).

Deduz-se do discurso dominante que vários são os alunos que gostam do recinto escolar e de tudo o que isso proporciona, mas das aulas em si sentem bastante relutância, como afirma Miguel: "gosto de vir para a escola não gosto é de ter aulas" (EI_G5). Alguns alunos ($n = 8$) também referem, como fator negativo, a entrada matinal na escola ocorrer muito cedo, principalmente quem tem de percorrer muitos quilómetros até chegar ao recinto, como afirma Inês, "quem é das aldeias tem de acordar muito cedo para chegar à escola a horas, eu acordo todos os dias às 5 e meia da manhã" (EI_G4).

Do leque de disciplinas preferidas, Ciências Naturais surge como a eleita ($n = 9$), sendo que os argumentos mais usados para esta escolha foram o gosto pelo conhecimento do corpo humano e da natureza ($n = 6$). Quem escolheu a disciplina de Matemática ($n = 5$), fê-lo justificando a preferência pela professora, como foi o caso de Maria, "sem dúvida que a professora tem uma grande influência nesta escola, está sempre disposta a ouvir-nos e as aulas são muito interativas" (EI_G4). Por sua vez, quem elege como disciplina favorita Inglês ou Espanhol, justifica-o com a importância na comunicação universal, como exemplificam as afirmações de Martim e Isabel: "É o Inglês pelo facto de ser uma língua que todos devemos falar e aprender" (EI_G6); "Para mim são o Inglês e Espanhol, pois adoro aprender outros idiomas para poder comunicar sem ser na minha língua materna" (EI_G5).

Na vertente oposta, os alunos apresentam a disciplina de Físico-química como a que lhes desperta menor interesse ($n = 9$), associando-o, essencialmente, com dois aspetos, a dificuldade em entenderem os conteúdos e a relação de pouco à vontade com a professora, como se infere da seguinte afirmação "não gosto de Físico-química porque não entendo como a professora faz e explica

os exercícios. Mas também não me sinto nada à vontade para perguntar" (EI_Vera, G2). Inglês surge como a disciplina mais referenciada, a par de Físico-química, no que diz respeito às disciplinas que sentem mais dificuldades ($n = 8$), sendo que os motivos se repetem entre o não compreenderem e a pouca empatia com as professores, como indica Maria: "sempre achei Inglês muito difícil porque nunca tive as bases necessárias, mas com esta professora também sinto que nem vale a pena o esforço, não vou conseguir" (EI_G4).

No ramo dos objetivos futuros, as profissões ligadas à Saúde ($n = 7$) são as mais desejadas, seguidas de Engenharia Informática e a área de Gestão. Não sendo de estranhar, dado a conexão ao meio rural, ainda são mencionadas áreas como Agricultura ou Veterinária. Um número significativo de alunos ($n = 16$) apontam as disciplinas de Matemática e Biologia como determinantes para o seu futuro.

Ao perscrutar sobre as perceções dos alunos relativas a alguns aspetos das suas aprendizagens da Matemática, verificou-se, em primeiro lugar, que a turma de 9.º ano indica a realização de exercícios e a resolução de problemas como tarefas preferenciais. É, de facto, esta fusão, como se pode ler na Tabela 31, que predomina no discurso dos discentes na hora de argumentarem a escolha e que emerge das seguintes afirmações:

> Gosto de resolver exercícios, pois gosto de ir aumentando o grau de dificuldade, e quando já percebo gosto de resolver problemas (EI_ Theresa, G7);
> Exercícios e problemas, pois aprendemos a matéria e depois praticámo-la (EI_Madalena,G5);
> Exercícios, porque são o que percebo melhor (EI_ Daniela,G3);
> Gosto mais de exercícios porque são mais fáceis de perceber (EI_ Inês, G4);
> Problemas, porque isso faz pensar (EI_ Ricardo, G2).

Destas declarações, infere-se que a dualidade exercício-problema tanto pode ter um carácter complementar, como pelo contrário, ser excludente.

Tabela 31

Frequências relativas à aprendizagem da Matemática dos alunos de 9.º ano

Subcategorias	Perceções	Frequência
Tarefas	Exercícios	22
	Problemas	10
	Trabalhos em grupo	2
Conteúdos matemáticos mais interessantes	Funções Quadráticas	1
	Equações	10
	Inequações	8

Conteúdos matemáticos com mais dificuldades	Teorema de Pitágoras	2
	Funções	4
	Inequações	3
	Geometria	6
	Equações	5
	Expressões algébricas	1
	Funções	7
	Resolução de Problemas	6

Dos conteúdos matemáticos que, à data, mais os motivaram, nomeiam as equações (n=10), seguidas das inequações. Identifica-se das apreciações feitas pelos alunos que se referem às equações de 2.º grau, como exemplificam as seguintes afirmações:

> As equações porque gosto de usar a fórmula resolvente (EI_ Theresa, G7);
>
> A fórmula resolvente porque é muito fácil de aprender e simples de aplicar (EI_Lúcia,G6).

Deduz-se destas escolhas que o facto dos procedimentos matemáticos implicarem regras práticas e/ou aplicação de fórmulas são, em geral, mais aceites por este grupo. No entanto, e apesar de parecer que os alunos são capazes de reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões, equações e desigualdades, o mesmo não é certo que consigam utilizar a da álgebra simbólica de modo a, por exemplo, escreverem expressões algébricas para expressarem funções. Até porque, as temáticas em que os alunos admitiram sentir mais dificuldades são as Funções ($n = 7$), bem como a Geometria ($n = 6$), sendo que, nesta última, não especificam os tópicos. No domínio das funções, o grupo especifica as dificuldades na compreensão e utilização dos conceitos algébricos, como se regista com as afirmações: "tive dificuldade na interpretação das expressões algébricas" (EI_ Ricardo, G2); "de funções em geral não percebo nada, principalmente, na passagem do gráfico para a expressão" (EI_Nídia,G3). É de destacar que um número significativo ($n = 6$) apresentou a resolução de problemas como um obstáculo na aprendizagem da Matemática, embora não concretizem a sua referência.

Procurando perceber a forma como encaram a importância da Matemática nas suas vidas, sugere-se que os alunos da turma exponham esta relação. Das respostas dadas é latente a perceção de que a Matemática terá um lugar privilegiado nos seus futuros dependendo da profissão que tiverem, como registado na Tabela 32, e sendo exemplo das afirmações dadas nesse sentido a de Martim: "o básico é sempre necessário, mas além disso, vai depender da profissão que tivermos" (EI_G6). Ainda

assim, muitos são os alunos que respondem, perentoriamente, que a Matemática é importante para os seus futuros ($n = 12$), embora tenham dificuldade na sua argumentação, redundando na escolha da profissão, como exemplificam as seguintes afirmações: "para aquilo que eu quero ser é muito necessário que é seguir Gestão" (EI_ Lúcia, G6); "na verdade, eu acho que na maioria das profissões é precisa a Matemática" (EI_ Ana, G3).

Tabela 32

Frequências do reflexo das aprendizagens escolares na vida quotidiana dos alunos de 9.º ano

Subcategorias	**Perceções**	**Frequência**
Atribuição importância à Matemática para os seus futuros	Sim	12
	Depende da profissão	14
Utilidade da matemática na vida quotidiana	Para outras disciplinas	6
	Compras	9
	Saúde	2
	Culinária	3
	Desporto	1
	Gestão familiar	8
	Vida dos adultos	1
Temáticas de tarefas que tratam de situações do dia a dia	Áreas e perímetros de terrenos	3
	Trajetória de uma bola	6
	Descontos e saldos	8
Conteúdos que recordam de funções	Linguagem de funções	9
	Proporcionalidade Direta	12
	Proporcionalidade Inversa	14
	Função Afim	5
Dificuldades em funções	Expressão algébrica	15
	Em tudo	7
	Sem dificuldades	6

No que diz respeito ao modo como utilizam a Matemática diariamente, este grupo de alunos dá exemplos daquilo a que um deles chama "a Matemática está mais ligada à vida dos adultos" (EI_Gabriel, G1). Nessa lista surgem: "para pagamentos e fazer a gestão familiar" (EI_ Madalena, G5); "no futebol usa-se a Geometria" (EI_ Carolina, G1); "nos horários, para calcular o tempo necessário" (EI_ Martim, G6); "usa-se a proporcionalidade direta para fazer um bolo" (EI_ Inês,G4); "quando vamos às compras, precisámos sempre da Matemática, em quantidades, promoções" (EI_ Nídia, G3); "tem de se calcular as medidas de líquido quando tomamos um antibiótico" (EI_ Guilherme, G2). É de notar que alguns alunos acrescentam que, dos conteúdos que aprendem no 9.º ano, as aplicações no quotidiano são inexistentes e remetem a sua aplicabilidade apenas para outras disciplinas, principalmente, Físico-química, como é o caso de Diogo "sinceramente a Matemática que estamos a

dar não me serve para nada do dia a dia a não ser, por exemplo, em Físico-química, ajuda nas fórmulas" (EI_G3).

Das tarefas que realizam nas aulas de Matemática e que retratam situações do dia a dia, os alunos narram as seguintes:

> por exemplo, naqueles exercícios que pedem para calcular a vedação a colocar num terreno" (EI_ Guilherme, G2);
> ainda agora quando demos a função quadrática tínhamos de determinar a trajetória de um foguete, e de uma bola (EI_ Maria, G4);
> pelo menos desde o 7.º ano que fazemos exercícios para calcular o valor do desconto, num certo produto (EI_ Olex, G3).

Em relação aos conteúdos de funções que estudaram até à data e que mais presentes estão, a turma revela homogeneidade nas referências, nomeadamente, os objetivos que envolvem linguagem de funções, sendo que muitos mencionam a proporcionalidade direta ($n = 12$) e outros a proporcionalidade inversa ($n = 14$). Quanto às dificuldades mais sentidas no estudo de funções, a maioria dos respondentes indica as expressões algébricas ($n = 15$), clarificando que é de todos os conteúdos o que menos dominam, como é o caso de Leonor:

> De tudo o que demos em Matemática é mesmo aquilo que não entra, então na função afim é horrível, mas também aqueles exercícios de passar da função de proporcionalidade inversa para a quadrática não percebo. Os gráficos sim, mas depois passar para a expressão não consigo (EI_G4);

Esta afirmação indicia as dificuldades corroboradas por grande parte da turma. Dos restantes alunos, uma parte ($n = 7$) diz sentir dificuldades em todos os conteúdos de funções e a outra ($n = 6$) declara não ter qualquer dificuldade no estudo de funções.

No seguimento, as vozes dos alunos da turma de 9.º ano são ouvidas, em primeiro lugar, quanto à perceção que têm sobre o conceito de justiça (Tabela 33). Neste caminho, encontraram-se opiniões que recaem, na sua maioria, em termos como igualdade ($n = 14$) ou direitos iguais ($n = 12$). Alguns alunos particularizam "todos terem direitos iguais, independentemente do género, da espécie, da raça ou da estabilidade económica" (EI_ Inês, G4). Curiosamente, muitos foram os casos ($n = 8$) em que os alunos aplicaram o *contrariu sensus* para dissertar sobre justiça social, defendendo que a mesma não existe, o que existe é desigualdade.

Tabela 33

Frequências relativas à noção de justiça social dos alunos de 9.º ano

Subcategorias	Perceções	Frequência
Noção de justiça social	Igualdade	14
	Direitos iguais	12
	Não existe	8
Desigualdade na distribuição de recursos	Necessidades básicas	10
	Diferenças de género	4
	Económica	5
	No acesso à cultura	2
Matemática permite debater problemas sociais	Entender os números	5
	Cálculo de percentagens	8
	Estatísticas	6
	Sem relação	10
Contributo das funções	Leitura de Gráficos	6
	Organizar informação	4
	Não respondem	19

Na esfera da desigualdade na distribuição dos recursos, uma das unidades comparativas utilizada pelos alunos é o Continente, sendo que realçam os Continentes africano e asiático como vítimas da falta de recusos básicos ($n = 10$). Especificam que as desigualdades se encontram associadas no acesso à saúde e educação, como os seguintes alunos: "Muitas crianças em países africanos ou asiáticos não vão à escola porque têm de trabalhar" (EI_ Theresa, G7); "quando fazem aqueles peditórios para o Banco Alimentar eu e os meus pais damos sempre, porque há pessoas em África que não têm o que comer" (EI_ Miguel, G5). Outra comparação que estabelecem para exemplificar a existência de desigualdade é a de género. Um dos respondentes aponta esta situação da seguinte forma: "Em Portugal, tivemos uma ditadura durante 40 anos, onde Salazar aplicou aquele modelo da mulher ficar em casa e o homem trabalhar para ser o sustento da casa, isso influenciou a sociedade que temos hoje, ainda machista" (EI_ Martim, G6). Uma das alunas desabafa sobre a sua situação familiar: "somos dois irmãos, eu sou rapariga e ele é rapaz. Eu ajudo a minha mãe em tudo o que posso, ele se lavar a loiça já acha que faz muito" (EI_ Maria, G4). Na continuidade deste tema há quem aborde a existência de desigualdade no acesso à cultura, pondo a questão na diferenciação dos recursos nacionais ao nível territorial, como se verifica no seguinte comentário: "Se quisermos ter acesso a uma peça de teatro ou a um concerto, temos de ir a Lisboa, até para ir ao cinema precisamos de fazer 120 km, no total, isso não é igualdade!" (EI_ Matilde, G7).

Na vertente da Matemática poder ajudar a perceber estas diferenças, a maioria do grupo considera que não existe qualquer relação ($n = 10$). De entre os alunos que encontram na Matemática um ponto de contacto que os leva a melhor entender as problemáticas sociais, nomeiam o entendimento dos números, o cálculo de percentagens e a Estatística. Há até quem sugira tarefas como no caso de Martim e Madalena: "este ano existe uma certa percentagem de crianças que não vão à escola e no ano seguinte pode-se ir verificar se houve uma evolução (EI_G6); "Até podemos ir ver se há um padrão e se sim quanto tempo levará até que todas as crianças consigam ir à escola. E o que podemos fazer para melhorar essa percentagem" (EI_G5). Dos alunos que rejeitam que a Matemática pudesse ajudar a entender e debater as desigualdades ($n = 10$), as justificações remetem para outras áreas disciplinares, como o caso de Diogo: "acho que não, acho que aí seria mais a argumentação com o Português, ou então com a Geografia." (EI, G4). No campo particular das funções, pressente-se pela ausência de respostas ($n = 19$), que os alunos foram confrontados com uma questão que sentem confusa (NCEI_jan2019). Dos que encontram paralelismo, mencionam, como exemplos, a leitura de gráficos e organização de informação, contributos úteis para estabelecerem previsões, como indica a aluna: "servem para comparar coisas passadas com o presente, para estudar os valores, pôr em tabelas e em gráficos" (EI_ Joana, G2).

Síntese

A turma de 9.º ano posiciona-se num ambiente educativo enfatizado pela carência social e económica do meio em que está inserida. Quanto à análise do percurso e motivações escolares, destaca-se que os alunos se sentem satisfeitos com a escola e a principal motivação para a frequência escolar é a convivência com os amigos. Dos fatores de desmotivação sobressaem as aulas aborrecidas e o aglomerar da realização dos testes de avaliação. Do conjunto de disciplinas, Ciências Naturais e Matemática surgem como as favoritas, argumentando-o com o gosto pelos conteúdos no respeitante à primeira e com a relação estabelecida pela professora no que concerne à segunda. Este último argumento é novamente utilizado, embora em sentido oposto, quando os alunos elencam as disciplinas menos apelativas, Físico-Química e História. Como áreas a seguir no futuro distinguem-se as áreas de Saúde e Engenharia Informática como as mais referenciadas.

No plano da aprendizagem matemática, o grupo de alunos evidencia a resolução de exercícios como o tipo de tarefas que preferem resolver, ainda que haja um número não despiciendo de alunos que privilegiam a resolução de problemas. Os conteúdos matemáticos que consideram mais

interessantes são as Equações, seguido pelas Inequações. Dos conteúdos onde sentem mais dificuldades, são apontados a Geometria, as Equações e a resolução de problemas.

Uma parte significativa dos alunos atribui uma importância relativa à Matemática para os seus futuros, na medida em que a fazem depender da profissão que desempenharem. Verificam a utilidade da Matemática no quotidiano, nas compras e gestão familiar, destacando também a sua função noutras disciplinas, exemplificando como temáticas de tarefas que tratam de situações do dia-a-dia, descontos e saldos ou a trajetória de uma bola. Em específico no campo das funções, recordam a proporcionalidade direta e inversa e a linguagem de funções, apresentando as expressões algébricas como o subtópico onde tiveram mais dificuldades.

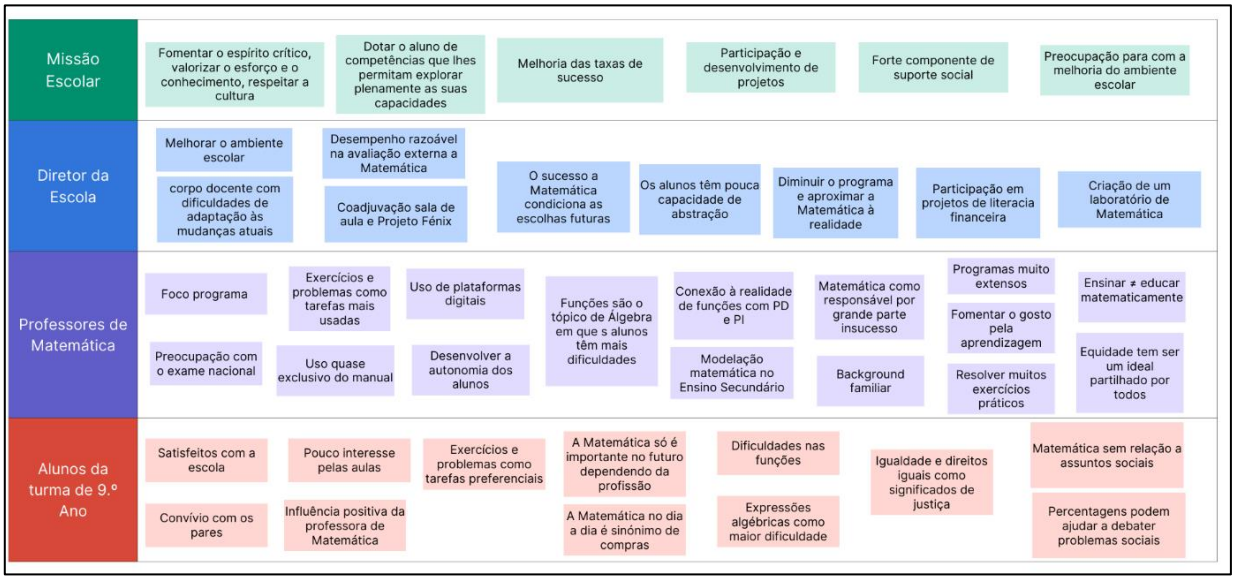
Esta turma de final de ciclo, associa justiça a igualdade e direitos iguais, enumerando as diferenças nas necessidades básicas; económicas; e de género como exemplos de desigualdades existentes. Grande parte dos alunos não considera que a Matemática permita debater problemas sociais, ainda que alguns refiram a Estatística e o cálculo de percentagens como elementos-chave no debate. Em concomitância, o contributo das funções não é ponderado pela maioria, não obstante, um número reduzido de alunos menciona a leitura de gráficos como um auxílio à compreensão de temáticas sociais.

6.1.5. Interseccionalidade das vozes

Ao entrelaçar a imagem da escola, refletida nos seus principais documentos, e o discurso dos intervenientes no estudo, apresenta-se um mapeamento desse diagnóstico (Figura 48).

Figura 48

Mapa Concetual do discurso dos intervenientes da turma de 9.º ano



Na concetualização reconhece-se que o cenário social contrasta com um ambiente educativo caracterizado pela abertura, empenhamento e otimismo, que se revela quer nos documentos da instituição, quer no discurso do órgão de gestão. Neste sentido, existe uma certa homogeneidade numa relação escolar positiva, hierarquizada por uma missão escolar que pretende fomentar o espírito crítico, valorizar o esforço e o conhecimento e respeitar a cultura e pela preocupação de um diretor em melhorar o ambiente escolar. Quanto aos alunos, esta "positividade" é orientada para um recinto escolar acolhedor, para a oferta de projetos e atividades para além da sala de aula e para ligações de amizade. Ainda que no Projeto Educativo se inscreva o objetivo da melhoria das taxas de sucesso, o corpo diretivo não se rege pelos resultados dos exames nacionais. Pelo contrário, essa pressão é tida por alguns professores como justificação para um ensino revestido por um foco no programa, uso quase exclusivo do manual e resolução de exercícios e problemas como as tarefas propostas. Desta atuação, destaca-se uma professora que, ao invés, privilegia o currículo e diversifica quer os materiais, quer as tarefas, quer os instrumentos de avaliação. O efeito favorável à escola não se estende à sala de aula, uma vez que os alunos mostram reticências na demonstração do interesse pelas aulas, mas admitem uma influência positiva da professora de Matemática.

A confirmação por parte dos agentes educativos da responsabilidade social incrustada na Matemática é percecionada pelo diretor ao reconhecer que os alunos têm pouca capacidade de abstração, propondo a diminuição do programa e a aproximação à realidade. De modo semelhante, os professores indicam que deverá diminuir-se a ansiedade face à disciplina, reduzir os programas, fomentar o gosto pela aprendizagem e resolver muitos exercícios práticos. Já para os alunos, a importância da Matemática só é considerada dependendo da área que selecionarem no futuro, não observando grande aplicação no quotidiano, para além das compras.

Os conceitos de desigualdade, abandono ou necessidade de descentralismo estão presentes no quotidiano das pessoas que vivem neste concelho alentejano. Não é, portanto, de estranhar, que a ideia de justiça, equidade ou responsabilidade social sejam temáticas em que os intervenientes deste estudo se sentem à vontade para debater. Do PE ressalta uma forte componente de suporte social, com aposta na participação e desenvolvimento de projetos. Estas propostas reverberam nas intenções do presidente do conselho pedagógico em participar em projetos de literacia financeira, na medida em que o sucesso a Matemática condiciona as escolas futuras dos alunos. Os docentes ressalvam que a equidade deverá ser um ideal partilhado por toda a comunidade, entendendo que ensinar Matemática é diferente de educar e propondo que se alerte os alunos para as realidades sociais. Os alunos identificam igualdade e direitos iguais como sinónimos de justiça, conseguindo exemplificar

discriminações e desigualdades existentes. Quando a Matemática é ancorada a fenómenos sociais, os alunos retraem-se, embora haja um pequeno número que reflita que as percentagens podem ajudar a debates problemas sociais.

6.2. Momentos de aprendizagem

Nesta secção procura-se inventariar os momentos associados às práticas desenvolvidas em sala de aula, correspondentes à exploração e resolução de tarefas de modelação cujo contexto se baseia em situações sociais. Inicia-se com uma descrição geral do trabalho realizado que pretende retratar o seu percurso evolutivo, detendo o olhar em aspetos como o trabalho em grupo, intervenção da professora, discussões verbais ou trabalho autónomo. De seguida, enfoca-se o trabalho ora descrito às dinâmicas criadas pelos alunos em três tarefas de modelação, circunscrevendo-o às etapas do processo de modelação. Por último, descrevem-se as manifestações do conhecimento reflexivo assim como se dá lugar à mobilização das experiências pessoais dos alunos para a compreensão das tarefas.

6.2.1. Narrativa da intervenção

Dada a natureza da investigação, a observação das aulas da turma de 9.º ano decorreu em 26 aulas, durante o segundo período do ano letivo 2018–2019, tendo-se iniciado a 6 de fevereiro de 2019 e finalizado, esse processo, a 15 de março de 2019. Este percurso foi dedicado, na sua íntegra, à realização de seis tarefas de modelação e uma tarefa introdutória ao tema das tarefas. É de salientar que professora e investigadora predeterminaram uma separação entre a lecionação dos conteúdos e a aplicação das tarefas, pelo que os conteúdos curriculares de funções do 9.º ano já haviam sido lecionados. Assim, como se constata na Tabela 34, as aulas observadas elencam-se segundo as tarefas de modelação, sendo que o número de horas semanais da disciplina de Matemática da turma seguia o modelo 90' + 45' + 90'.

Tabela 34

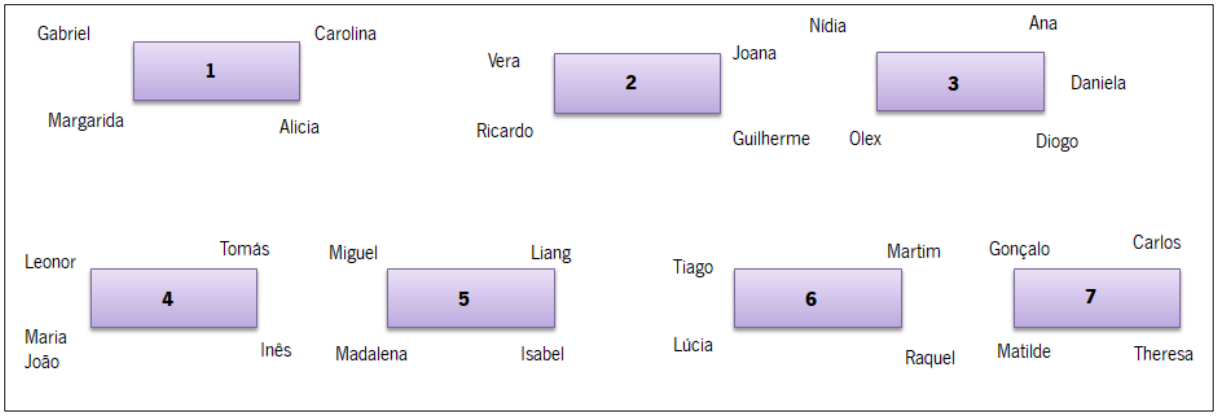
Relação entre o número de aulas e as tarefas de modelação de 9.º ano propostas

Nº de aulas	Tarefas de Modelação
2	T0: Trabalhadoras de ontem e de hoje
3	T1: O trabalho e as Mulheres
2	T2.1 O Trabalho e a conquista das 8 horas
4	T2.2 As mutações do trabalho
5	T3: Retratos da vida de trabalho
4	T4: Redistribuição da Riqueza
4	T5: A uberização do trabalho

A primeira aula consistiu na apresentação aos alunos, de uma forma sucinta, do trabalho que iriam desenvolver nas semanas seguintes e o seu propósito. A professora começou, assim, por explicar que as tarefas de modelação se baseavam em problemas da vida real, cujo tema transversal era o 'Mundo do Trabalho', sendo que dois dos principais objetivos "eram desenvolver a capacidade dos alunos em encontrarem padrões, estabelecerem relações e utilizarem as funções, assim como entenderem a aplicação da Matemática em outros domínios" (NCOA_fev2019). Para a resolução das tarefas, os alunos foram organizados pela professora Isabel em grupos, dos quais seis eram constituídos por quatro elementos e um com cinco elementos (Figura 49).

Figura 49

Distribuição dos alunos por grupos



A docente aquiesceu que escolheu, *a priori*, a constituição de cada um dos grupos, reconhecendo nesta escolha um carácter pouco democrático, mas justificando-a de foro igualitário: "Já sei que me vão dizer porque é que não podemos escolher os grupos? Ao qual vos respondo que "como já vos conheço, intuo qual será a melhor forma de trabalharem juntos de modo equilibrado de conhecimentos e interajuda" (GOA1_Professora). Após esta apresentação e a reformulação da disposição dos lugares dos alunos consoante a indicação da professora, foi distribuída a Tarefa 'Trabalhadoras de Ontem e de Hoje: a desigualdade salarial como denominador comum', e em que a mesma anunciou de antemão que a tarefa (Apêndice 7) teria um cariz introdutório ao tema do 'Mundo Laboral', mas que ainda não entraria no campo de modelação matemática (NCOA_fev2019). Visto pretender abrir um espaço de discussão, a professora Isabel desafiou os alunos ainda antes de lerem o texto da tarefa, com a questão – acham que existe igualdade salarial em Portugal? A participação foi notória e, ao surgirem em catadupa, as respostas tornaram-se impercetíveis (NCOA_fev2019). No entanto, ficou evidente que a turma esteve, unanimemente, de acordo em responder que não existe

igualdade salarial. Depois da leitura conjunta do texto foi momento de a professora conduzir a discussão no sentido da reflexão crítica. O que se seguiu gerou controvérsia, uma vez que abriu uma brecha nas opiniões que oscilaram entre as próprias experiências à dominância de uma cultura patriarcal:

Professora: Vocês referiram exemplos de desigualdade apenas em profissões não especializadas, mas repararam que o texto fala de pessoas com alta qualificação académica, porque será que isto acontece?
Maria: Porque os homens é que estão na política.
Raquel: E sendo eles que fazem as leis, ou seja, maioritariamente, os homens, não vai mudar o que está em vigor.
Professora: E por que é que são os homens que estão, maioritariamente, na política?
Maria: Porque, supostamente, a política é mais para os homens.
Professora: Maria, não estás a utilizar um argumento válido. (GOA1)

A docente rapidamente percebeu que deveria canalizar a atenção da turma para o cálculo da diferenciação salarial de género com recurso aos dados do texto, orientando os alunos no sentido de resolverem a tarefa em grupo e apontando dez minutos para esse fim. Entretanto, a professora circulou pelos grupos para responder a eventuais dúvidas e indicou-lhes que poderiam utilizar o telemóvel para pesquisar algum conceito. Das questões que lhe são levantadas emergem, fundamentalmente, as noções de população ativa, diferença salarial, segregação de género, como exemplifica a seguinte conversação entre um dos grupos e a professora:

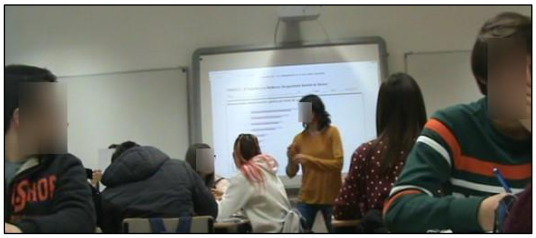
Professora: Digam-me, qual é a vossa dúvida?
Gabriel: Tem aqui algumas coisas que sublinhámos e que gostávamos de ver se estamos a pensar bem.
Professora: Diz lá, Gabriel!
Gabriel: A população ativa em percentagem é a quantidade de mulheres que trabalham?
Margarida: Só trabalham 40% das mulheres? Isso quer dizer que 60% não trabalham?
Professora: Não! (Risos) 40 % da população ativa (que é o total de trabalhadores) são mulheres. Os restantes são homens.
Margarida: Ah! Então é 40% de mulheres e 60% são homens!
Gabriel: E a diferença salarial? E segregação de género?
Professora: O que vocês acham que é?
Margarida: Tem a ver com a percentagem a mais ou a menos que recebem se forem homens ou mulheres.
Professora: Exato. Precisamente por serem mulheres e, por isso, receberem menos, existe uma segregação de género. (GOA2_G1)

Findado o tempo estabelecido, a professora Isabel pediu para a turma apresentar as suas conclusões (Figura 50). Os alunos pediram mais cinco minutos para terminarem (NCOA_fev2019).

Figura 50

Docente de Matemática e alunos em diálogo





No decorrer da discussão sobressaíram várias demonstrações do envolvimento revelado por grande parte da turma, bem como as inferências que retiraram da leitura e análise da tarefa. Destas, as atenções recaíram sobre o cálculo da diferença salarial e os possíveis motivos para tal suceder, como se verificam com as seguintes afirmações:

> Setecentos euros de diferença é mais do que um salário mínimo! (GOA2_Matilde, G7);
> Em percentagem são quase 30%, é impressionante (GOA2_Maria, G4);
> Mas esta diferença de 20% em relação aos anos 60, deve ser também pelo aumento da escolaridade obrigatória, não? (GOA2_Leonor, G4).

Ao perceber que ainda tinham vinte minutos até ao final do segundo tempo, a professora distribuiu a Tarefa 'O trabalho e as mulheres: Desigualdade salarial de género' (Apêndice 8) mencionando, com manifesto entusiamo: "Agora sim, entraremos na modelação e vocês poderão ver a importância que podem ter os modelos matemáticos" (GOA2_Professora). Com a tarefa projetada no quadro, a docente iniciou o diálogo com a turma perguntando o que ressalta, logo à partida, do gráfico:

> Professora: O que salta à vista quando analisamos o gráfico?
> Martim: Vê-se que há sempre uma grande diferença entre aquilo que recebem os homens e o que recebem as mulheres.
> Raquel: E essa diferença é gigante nos quadros superiores. Ó professora, isto bate certo com o que estivemos a ver há pouco, não é?
> Professora: Muito bem, é mesmo isso. Era aí que queria chegar.
> Ricardo: Mas, por exemplo, as barras dos praticantes e aprendizes são muito próximas.
> Professora: Qual é a diferença, nesse caso, de valores, ora vejam.
> Ricardo: É de cerca de 60 euros.
> Professora: E nos quadros superiores?

Raquel: É muito mais. Mas, se calhar, para quem ganha menos é mais complicado.

Professora: Estou a ver que estão a entrar no espírito. Agora, o que proponho é que trabalhem em grupo e utilizando os dados do gráfico comentem a alínea a) e depois disso aventurem-se na alínea b).
Bom, mas já temos pouco tempo e, portanto, continuaremos na próxima aula. Gostaram do tema e das tarefas?

Alunos: Muito! Muito interessante. (GOA2)

Visivelmente cansada, a professora desabafa "ufa, parece que corri uma maratona e também assumo que houve um momento em que receei o rumo e o teor da conversação, mas acho que correu bem" (GOA2_Professora).

A terceira aula observada iniciou-se com quinze minutos de atraso, o ambiente era tenso e a professora mostrava-se perturbada, não deixando de demonstrar o seu desapontamento: "vocês já sabem que eu sou bastante compreensiva, mas há limites e pensava que vocês eram responsáveis!" (GOA3_Professora). Com este cenário, a professora recomendou que iniciassem o mais depressa possível os trabalhos, relembrando que estavam na resolução da Tarefa 'O trabalho e as mulheres'. Nesta sequência, observa-se os vários grupos a trabalharem organizadamente e em silêncio. Só após algum tempo, uma das alunas solicitou ajuda à professora e, nesse momento, é retomado o diálogo entre a docente e a turma (Figura 51).

Figura 51

Professora de Matemática e alunos em diálogo



Interagindo com a turma, a professora Isabel propõe a leitura das respostas dos vários grupos à primeira questão da tarefa. Uma das alunas pergunta se pode resolver a primeira alínea no quadro (Figura 52).

Figura 52

Aluna apresenta a sua resolução, no quadro



De seguida, a docente interroga a turma se os cálculos que efetuaram são suficientes para inferir conclusões, ao que os alunos respondem afirmativamente e acrescentam que vão ao encontro da frase que consta na alínea a) (Figura 53).

Figura 53

Excerto da tarefa 'O trabalho e as mulheres', Alíneas a), b) e c)

(a) Tendo como referência a informação do gráfico e recorrendo ao cálculo da diferenciação salarial, comenta a seguinte informação: "*A desigualdade salarial entre mulheres e homens é, em grande medida, tanto maior quanto mais elevado o nível de qualificação.*"

(b) A União Europeia instituiu o Dia da Igualdade Salarial. Este dia marca o número de dias extra que as mulheres terão de trabalhar a mais para atingirem o mesmo salário que os homens num determinado ano e varia consoante o país.

Sabendo que, atualmente, em Portugal, as mulheres ganham menos 17,9% de remuneração média mensal de base do que os homens, verifica quando se assinala esse dia em Portugal.

(c) Como se podem inverter ambas as situações e acelerar a igualdade de género/erradicar a disparidade quer salarial quer social?

O restante tempo da aula foi passado com os alunos a desenvolverem a tarefa em grupo (NCOA_fev2019).

A quarta aula observada foi dedicada à continuidade da tarefa, especialmente à alínea que pressupõe a aplicação de um modelo matemático. Previamente, a professora Isabel solicitou a apresentação das respostas às alíneas b) e c). Neste âmbito, o Grupo 3 pede para expor o que pesquisaram e concluíram, como exemplifica a seguinte conversação:

Ana: Na alínea b) deu-nos que para conseguirem ganhar o mesmo que os homens, as mulheres, em Portugal, teriam de trabalhar mais 65 dias, ou seja, até dia 6 de março.

Nídia: E que, ao invés, os homens poderiam começar a trabalhar apenas nesse dia para haver igualdade salarial.

Professora: Muito bem! E na alínea c), que pergunta como se pode inverter esta situação? Alguma ideia?

Daniela: Posso, professora? A verdade é que pesquisamos e encontrámos algo que nos pareceu uma boa ideia.

Professora: Força!

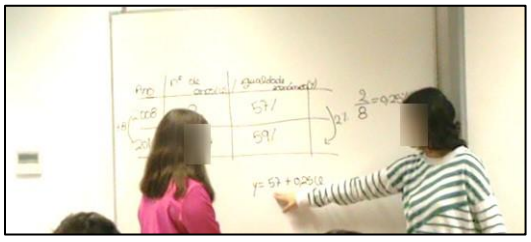
Daniela: Na Islândia obrigaram as empresas com mais de 25 trabalhadores a pôr fim com as diferenças de salário entre homens e mulheres, e foi mesmo este ano que agora estas empresas têm de provar que pagam salários iguais a homens e mulheres que tenham as mesmas funções. (GOA4_G3)

Paralelamente, ouviram-se comentários de aprovação perante o exposto quer da parte dos alunos (NCOA_fev2019). Este facto ajudou a manterem o interesse e a depositarem atenção na leitura do problema real, que constava da alínea d) e que serviria como uma primeira abordagem à modelação matemática. Neste caso, pretendia-se criar um modelo de previsão relativo ao número de anos necessário para atingir a igualdade de género económica a nível mundial.

Os alunos trabalharam em grupo enquanto a professora circulava pelos lugares e auxiliava naquilo que seria a construção do modelo. Esta dinâmica durou cerca de trinta minutos, entre os quais um intervalo de dez minutos, ao qual os alunos optaram por não ir, denotando-se, entre os grupos, troca de ideias e trabalho conjunto. Terminado este tempo, a docente impeliu à discussão da resolução da tarefa em grupo turma, indicando que "daquilo que me fui apercebendo enquanto vocês resolveram é que gostaria que dois dos grupos apresentassem as vossas resoluções porque foram duas formas distintas de resolver, já veremos o porquê" (GOA5_Professora). Uma das alunas do Grupo 1 demonstra, no quadro, a sua resolução, como indicado na Figura 54.

Figura 54

Docente e aluna dialogam sobre a resolução



No seguimento, a professora usa-a para estabelecer o ponto da situação e instigar à discussão matemática, como exemplifica o seguinte excerto:

Professora: Primeiro passo importante. Organizar os nossos dados, retirando os que são importantes do texto e organizá-los. Portanto, diz-me, Carolina, por onde começaste?

Carolina: Coloquei, nesta tabela, os anos do texto, 2008 e 2016 e depois transformei-os em número de anos, ao que fiz corresponder a taxa de igualdade económica.

Professora: Muito bem! Mas aqui tem um dado que não está na tabela, qual será?

Carolina: É o 68%?

Professora: Esse é necessário?

Carolina: Não! Ah, a igualdade económica aumenta todos os anos, em igual proporção. Isso foi preciso para o que vem a seguir. Está aqui, 2%.

Professora: Muito bem! E esta divisão por 8?

Carolina: Isso é para ver qual é o aumento anual. Porque 2% foi em 8 anos, qual deu 0,25%.

Professora: E a seguir? Esta equação aqui em baixo, que significa? O que é este x?

Carolina: A seguir percebemos que tínhamos de aplicar a função $f(x) = mx + b$. E este 57 é o valor inicial. O x é o número de anos.

Professora: Em geral, está perfeito! Faltam aqui alguns passos que gostava de para a próxima tivessem em atenção, como a identificação das variáveis. Antes de terminarmos, vamos só registar no caderno os passos que devemos seguir quando estamos a modelar uma situação, sim? (GOA5)

Torna-se evidente com este diálogo que a professora pretendeu sistematizar, em grupo turma, os processos de modelação, abordando-os de forma clara e pausada, na medida em que era o primeiro contacto formal que os alunos tinham com a modelação. Desta forma, os alunos registaram no caderno, à medida que a professora ia enumerando, seis fases de modelação:

> Então, têm que, primeiro, interpretar a situação, depois organizar os dados seja numa tabela ou num gráfico, como quiserem, de seguida, identificar as variáveis e isto é importante, para depois chegarem ao modelo. Depois, trabalham com o modelo, claro e, por fim, interpretam os resultados, está entendido? (GOA5_Professora)

Para finalizar a tarefa, a aluna continuou a expôr a resolução do seu grupo no quadro (Figura55), ao que a professora aproveitou para questionar os restantes alunos sobre a função que serviu como modelo: "como se chama esta função? E porque escolhemos esta? Já agora, como é o gráfico desta função? Qual o seu declive, e ordenada na origem?" (GOA6). Alguns alunos foram respondendo, recetivos e participativos ao questionamento (NCOA_fev2019).

Figura 55

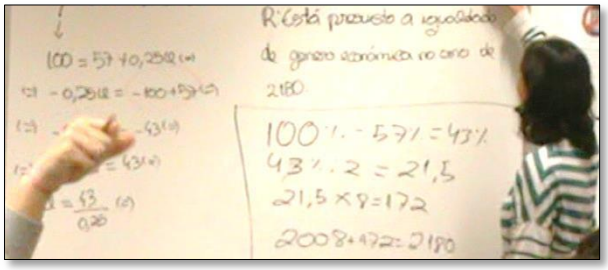
Apresentação da resolução, no quadro, da alínea d)



No momento em que a aluna chegou ao resultado, a professora pediu à turma que o comentassem. De entre eles, apenas surgiram "ainda temos muito que sofrer até se conseguir chegar lá" (GOA6_Raquel, G6); "só com o esforço de todas conseguiríamos mudar um pouco isto" (GOA6_Theresa, G7). Por fim, a professora chama à atenção da resolução apresentada por um dos alunos, referindo que o mesmo atingiu os mesmos resultados, mas sem o carácter formal pretendido neste nível de ensino. Com este exemplo (Figura 56), a docente evidencia a capacidade de síntese do aluno, mas salienta a falta dos passos de modelação.

Figura 56

Professora comenta a resolução de um aluno



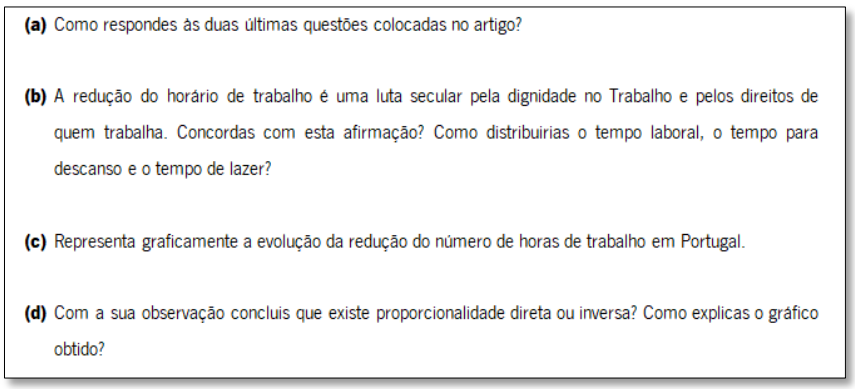
Nas duas aulas seguintes, foi trabalhada a tarefa T2.1 'O Trabalho e a conquista das 8 horas'. Foi iniciada pela leitura do texto em grande grupo, durante a qual a professora ajudou a compreender algumas das ideias nele contidas, entre as quais "Grande Depressão e sua relação com a queda de Wall Street, modelo Keynesiano" assim como teceu alguns comentários paralelos: "Em países como a Dinamarca trabalha-se, atualmente, 27 horas semanais, por isso, pode ser, efetivamente, uma realidade" (GOA6_Professora).

A dinâmica de trabalho é sugerida pela professora que aponta trinta minutos para a resolução, em grupo, da tarefa (Figura 57). De facto, é nesse tempo que os alunos se concentram a interpretar, analisar e discutir, durante o qual a docente se mostra sempre disponível para auxiliar. Desta orientação observaram-se sugestões e apontamentos como: "estou a ver aí um ramo de hipérbole

desenhada, o que significa um ramo de hipérbole?; tens de fazer à escala senão parece uma reta" (GOA6_Professora).

Figura 57

Excerto da Tarefa 2.1., Alíneas a) a d)



(a) Como respondes às duas últimas questões colocadas no artigo?

(b) A redução do horário de trabalho é uma luta secular pela dignidade no Trabalho e pelos direitos de quem trabalha. Concordas com esta afirmação? Como distribuirias o tempo laboral, o tempo para descanso e o tempo de lazer?

(c) Representa graficamente a evolução da redução do número de horas de trabalho em Portugal.

(d) Com a sua observação concluis que existe proporcionalidade direta ou inversa? Como explicas o gráfico obtido?

Ao mobilizar os alunos para a apresentação, à turma, dos resultados, a docente começou por ler as duas perguntas do texto a que se refere a alínea a): "como escapar à ditadura do tempo e se seria possível cumprir-se, em Portugal, a profecia das seis horas de trabalho" (GOA7_Professora). A intervenção foi feita por uma aluna do Grupo 5 que respondeu:

> Começar a trabalhar menos para fugir à ditadura do tempo e uma das formas de mudar mentalidades, principalmente, dos governantes era fazer com que estes vissem que as pessoas que trabalham o dia inteiro não têm nenhum tempo para descansar ou até estar com a família. (GOA7_Madalena, G5)

Dos restantes contributos percebe-se que estiveram presentes as ideias de "mudança de mentalidades", "greves e manifestações para reduzir o horário de trabalho" (GOA_7). Apesar de concordarem com a redução do número de horas de trabalho, nem todos os alunos a contabilizaram para a forma da distribuição do tempo laboral, de descanso e lazer (NCOA_fev2019). Um dos grupos apresentou a distribuição do dia em 6 horas de trabalho, 8 horas de descanso e 10 horas de lazer, acrescentando que nesta última porção estaria: ler um livro, ver um filme, passear, fazer desporto, estar com a família. No que diz respeito à representação gráfica dos dados contidos no texto verificou-se uma grande dificuldade na mesma, que fez emergir eixos cartesianos não identificados, representações de histogramas/gráficos de barras justapostas e de ramos de uma hipotética hipérbole.

Com estes registos a professora aproveitou para indicar que poderiam usar calculadoras gráficas para as próximas tarefas. A tarefa terminou com o reconhecimento de que não havia evidências de proporcionalidade, quando analisado o gráfico (GOA7).

A oitava aula iniciou-se com a distribuição da tarefa 2.2 'As mutações do trabalho', momento em que surgiu o comentário de um aluno que provocou um riso coletivo incluindo da professora: "então, professora, estamos nós aqui a falar em reduzir o horário de trabalho e a professora dá-nos cada vez mais?" (GOA8). Leram, uma vez mais, o texto em conjunto, prática que permitiu alguns comentários e esclarecimentos por parte da docente, que foi seguida de 40 minutos de trabalho autónomo. No tempo seguinte, os alunos retiraram dúvidas com a professora onde a mesma, ao denotar as dificuldades sentidas pelos grupos, sugeriu que utilizassem o computador da sua secretária para trabalharem com o Excel. Nas duas aulas que se seguiram, a tarefa foi analisada, discutida e apresentadas as resoluções de cada grupo.

A exploração da tarefa 3, 'Retratos da vida de trabalho', foi começada na 12.ª aula observada. Começou-se a notar uma certa naturalidade na iniciação do trabalho de forma autónoma, que correspondia à receção da tarefa, leitura em grupo do texto nela contido, seguida de diálogo intragrupal (Figura 58).

Figura 58

Grupos em trabalho autónomo



Após essa dinâmica, a professora pediu silêncio para lerem a tarefa para o grupo turma e aproveitou para relembrar (talvez por se aperceber de alguns alunos menos focados) o interesse matemático das tarefas, mas não só, usando as seguintes palavras:

> A semana passada isto correu muito bem, vamos lá ver se continua. Isto são temas importantes para vocês também, é para isto que serve a Matemática, não é só para fazer contas e não servir para mais nada, é para isto, terem sentido crítico e saberem interpretar os dados que vos dão. (GOA11_Professora)

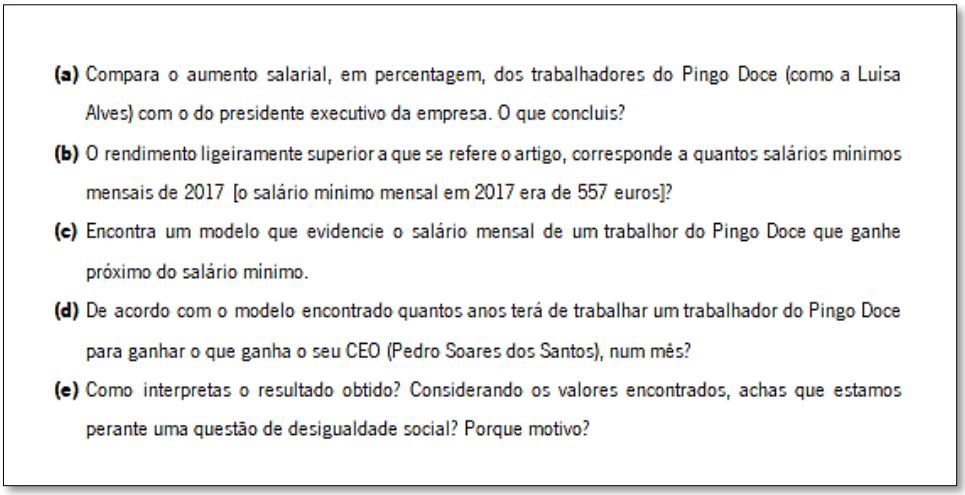
Sensibilizados com a chamada de atenção, a leitura do texto decorreu em silêncio, o qual consistia no relato de duas situações das condições laborais de dois trabalhadores de uma cadeia de supermercados: a primeira de uma funcionária de base, a segundo do presidente executivo da empresa detentora da cadeia.

Seguidamente, a professora lançou algumas questões: "porque será que foi escolhida esta cadeia de supermercados e não outra? Será que faz mais sentido falar desta?" (GOA11_Professora). Um dos alunos adianta que é por ser a que têm ali na cidade (GOA11_Diogo, G3) e outro atreve-se a responder que é por ser o supermercado que apresenta maior discrepância de salários (GOA11_Gonçalo, G7). A professora anui e acrescenta que para além dos salários também é verdade a prática de abuso de horários sobre os trabalhadores, ao que se ouve "professora, exploração laboral, não é?" (GOA11_Matilde, G7), e de uma aluna "por isso é que os ricos estão cada vez mais ricos e os pobres cada vez mais pobres" (GOA11_Maria, G4).

Após o debate inicial, seguiu-se a leitura das questões (Figura 59) que se concentraram, primeiramente, nas duas primeiras alíneas, na medida em que, tal como a professora indicou, "é só fazer umas pequenas regras de três simples, certo? Vou deixar-vos trabalhar completamente sozinhos" (GOA12_professora). O que, de facto, sucedeu durante mais dois tempos letivos.

Figura 59

Excerto da tarefa 'Retratos de vidas de trabalho', alíneas a), b), c) d), e)



(a) Compara o aumento salarial, em percentagem, dos trabalhadores do Pingo Doce (como a Luísa Alves) com o do presidente executivo da empresa. O que concluis?

(b) O rendimento ligeiramente superior a que se refere o artigo, corresponde a quantos salários mínimos mensais de 2017 [o salário mínimo mensal em 2017 era de 557 euros]?

(c) Encontra um modelo que evidencie o salário mensal de um trabalhor do Pingo Doce que ganhe próximo do salário mínimo.

(d) De acordo com o modelo encontrado quantos anos terá de trabalhar um trabalhador do Pingo Doce para ganhar o que ganha o seu CEO (Pedro Soares dos Santos), num mês?

(e) Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

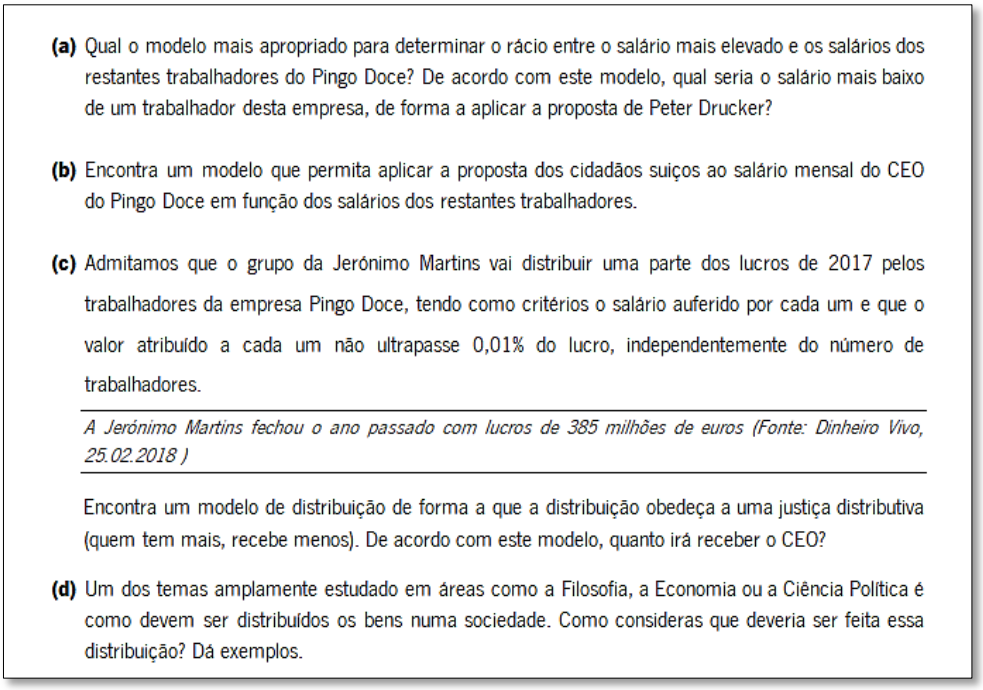
Na aula observada número 14, foram corrigidas essas alíneas e trabalhado a construção de um modelo que permitisse representar o salário mínimo mensal de um trabalhador do Pingo Doce para, posteriormente, compará-lo com o do seu diretor-geral. De notar que esta prática de modelação decorreu com fluidez, não tendo sido necessário intervenções de maior por parte da docente. Os

resultados obtidos foram apresentados em grupo turma na aula 15, destacando-se que a maioria dos grupos conseguiu seguir as indicações anteriores da professora Isabel, em relação às fases de modelação. A aluna que procedeu à resolução no quadro fê-lo seguindo as fases de modelação que tinham sido sugeridas pela professora, ao mesmo tempo que ia questionando a turma: "então estão aqui as duas varáveis?"; "que função é esta?" "como vamos aplicar neste modelo a alínea d)?" (GOA15_professora). A maioria dos alunos vai acompanhando e participando até chegarem aos resultados finais, marcados pelos comentários paralelos: "como é possível? Então um trabalhador tem de trabalhar metade da vida de trabalho para ganhar o que o diretor ganha num mês?!" (GOA15_Carlos, G7); "231 anos para ganhar o que o CEO ganha num ano, uii!" (GOA15_Lúcia, G6).

Para a resolução da Tarefa 4, 'Redistribuição da riqueza', foram utilizados quatro tempos letivos, os quais se distribuíram entre trabalho autónomo, apresentação e discussão dos resultados. Das dinâmicas desenvolvidas ressaltam uma maior agilidade na execução da tarefa, a par de uma maior desenvoltura na utilização de mecanismo auxiliares, como foi o caso do programa Excel. Na Tarefa 4 são postas, novamente, duas situações que os alunos têm de modelar e comparar, cuja situação real são, uma vez mais, as disparidades salariais existentes no seio empresarial, nomeadamente, na empresa Pingo Doce, num total de quatro alíneas (Figura 60).

Figura 60

Excerto da Tarefa 'Redistribuição da riqueza', alíneas a), b), c), d)



(a) Qual o modelo mais apropriado para determinar o rácio entre o salário mais elevado e os salários dos restantes trabalhadores do Pingo Doce? De acordo com este modelo, qual seria o salário mais baixo de um trabalhador desta empresa, de forma a aplicar a proposta de Peter Drucker?

(b) Encontra um modelo que permita aplicar a proposta dos cidadãos suiços ao salário mensal do CEO do Pingo Doce em função dos salários dos restantes trabalhadores.

(c) Admitamos que o grupo da Jerónimo Martins vai distribuir uma parte dos lucros de 2017 pelos trabalhadores da empresa Pingo Doce, tendo como critérios o salário auferido por cada um e que o valor atribuído a cada um não ultrapasse 0,01% do lucro, independentemente do número de trabalhadores.

A Jerónimo Martins fechou o ano passado com lucros de 385 milhões de euros (Fonte: Dinheiro Vivo, 25.02.2018)

Encontra um modelo de distribuição de forma a que a distribuição obedeça a uma justiça distributiva (quem tem mais, recebe menos). De acordo com este modelo, quanto irá receber o CEO?

(d) Um dos temas amplamente estudado em áreas como a Filosofia, a Economia ou a Ciência Política é como devem ser distribuídos os bens numa sociedade. Como consideras que deveria ser feita essa distribuição? Dá exemplos.

As resoluções foram apresentadas em grupo turma no final da 18.ª e da 19.ª aulas observadas. No decorrer desta prática foi evidente que surgiram algumas dificuldades em algum ponto da tarefa, com especial foco na alínea c). As primeiras duas alíneas foram apresentadas pelo mesmo aluno, embora tivessem uma apresentação formal distinta. Na divulgação dos resultados obtidos pelos grupos da tarefa de modelação da alínea c) a docente sugeriu que dois grupos apresentassem as suas resoluções, na medida em que tinham usado representações distintas e alguns atingido diferentes resultados. O momento dedicado à alínea d) deu lugar a cerca de 40 minutos de debate de ideias, "tempo no qual sobressaem uma torrente de opiniões, fazendo lembrar um microfone aberto numa assembleia" (NCOA_fev2019). A maioria dos alunos quis dar o seu contributo e a discussão decorreu com fluência.

A 21.ª aula iniciou-se com a leitura do texto da Tarefa 5, 'A uberização do trabalho'. As primeiras reações dos alunos sugeriram uma identificação com o tema, como indiciam os seguintes comentários:

Gabriel: Ando a ver uma série na Netflix que eles andam sempre de Uber.
Vera: Mas aqui não há.
Lúcia: Quando vou a casa dos meus primos em Lisboa pedimos muitas vezes comida pela Uber Eats.
Raquel: Ó professora, acha que isso vai chegar aqui?
Professora: Não sei, mas, olha, espero bem que não.
Raquel: Então, porquê professora?
Professora: Já vamos ver, com esta tarefa, acho que vai ficar claro porquê.(GOA20)

Denotou-se que ao longo das quatro aulas em que foi explorada esta tarefa a solicitação da intervenção da professora foi, notoriamente, menor, ainda que o grau de dificuldade tenha aumentado. A situação real da tarefa focava-se na precariedade laboral associada aos motoristas da plataforma Uber, e os modelos matemáticos com que se pretendia que trabalhassem eram a função afim e a função quadrática. De facto, é precisamente na aplicação do modelo da função quadrática relacionado com a alínea b) da tarefa (Figura 61) que os alunos mais pediram a ajuda da professora.

Figura 61

Excerto da tarefa 'A uberização do trabalho', alíneas a), b), c)

(a) Encontra um modelo que permita determinar quanto ganha por quilómetro, o motorista da Uber.

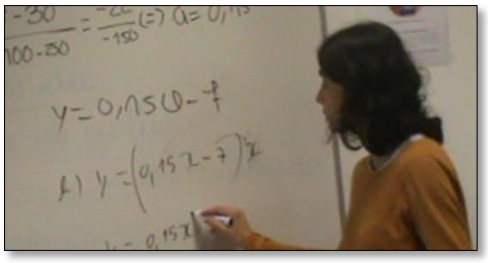
(b) Define o modelo que permita encontrar quanto ganha o motorista da Uber por dia.

(c) De acordo com o modelo encontrado, quantos quilómetros precisa de percorrer para ganhar 20 euros?

Neste sentido, a professora acabou por expor (Figura 62), ao grupo turma, o raciocínio no qual se poderiam apoiar para definir o modelo. Ainda neste esclarecimento, chamou à atenção que os dados iniciais relativos à variável dependente encontram-se em cêntimos, questionando os alunos se não seria melhor efetuarem a passagem para euros (NCOA_mar2019).

Figura 62

A docente presta alguns esclarecimentos



É de realçar que, à semelhança da tarefa anterior, os alunos recorreram à calculadora gráfica, bem como usaram o telemóvel para aceder à Internet a fim de pesquisarem o que considerassem necessário.

Ao terminarem a tarefa na aula 24, a docente propôs que os vários grupos pensassem em criar uma tarefa, para apresentarem à turma, no prazo de uma semana, em que abrangessem os conceitos matemáticos envolvidos, modelação matemática e um tema do foro social que considerassem pertinente.

Desta forma, na última aula observada, os grupos procederam à divulgação dos seus trabalhos. Duas das situações reais a que os alunos se reportaram consistiram na análise das condições de trabalho, uma de trabalhadores de uma empresa e outra focava o trabalho não remunerado. Um dos temas abordados foi o consumo excessivo, enquanto outro grupo estudou o processo de fabricação da boneca Barbie. Na ótica ambiental, um dos grupos debruçou-se sobre a problemática dos incêndios em Portugal (Figura 63), outro grupo investigou sobre a disparidade do consumo mundial de água (Figura 64), enquanto outro se debruçou sobre a diferenciação na falta de abastecimento alimentar que leva à desnutrição.

Figura 63

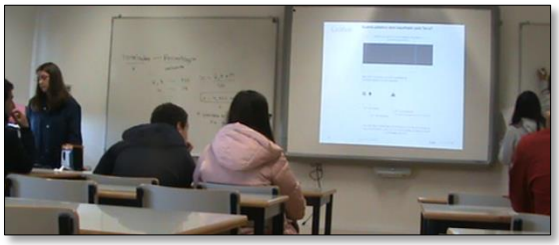
Grupo retrata incêndios de Pedrogão



De uma forma geral, as propostas de modelação associadas às tarefas cingiram-se a modelos de proporcionalidade direta. No caso do grupo que problematizou o consumo de água, estabeleceram um modelo de previsão que relacionasse a população mundial de forma inversamente proporcional à quantidade de água disponível.

Figura 64

Grupo apresenta trabalho sobre consumo de água



Importa referir que, durante este período de tempo letivo, a docente ora circulava pelos lugares a esclarecer dúvidas, ora chamava à atenção da turma para pontos importantes. Esta prática de ensino muito contribuiu para a existência de um "ambiente de aprendizagem plural, favorável à participação e colaboração de todos os alunos, onde todos sentiam que tinham algo a aportar" (NCOA_mar2019).

6.2.2. Descrição dos processos estabelecidos na resolução das tarefas de modelação

As atividades conectadas ao processo de modelação são registadas nesta secção, associado à análise da realização das tarefas segundo as fases percorridas e sensível às atividades cognitivas estabelecidas. Com esta finalidade, apresentam-se as tarefas 'As mutações do trabalho', 'A redistribuição da riqueza' e 'A uberização do trabalho' e os respetivos modelos trabalhados (Tabela 35).

Tabela 35

Relação entre as tarefas de modelação de 9.º ano e modelo matemático

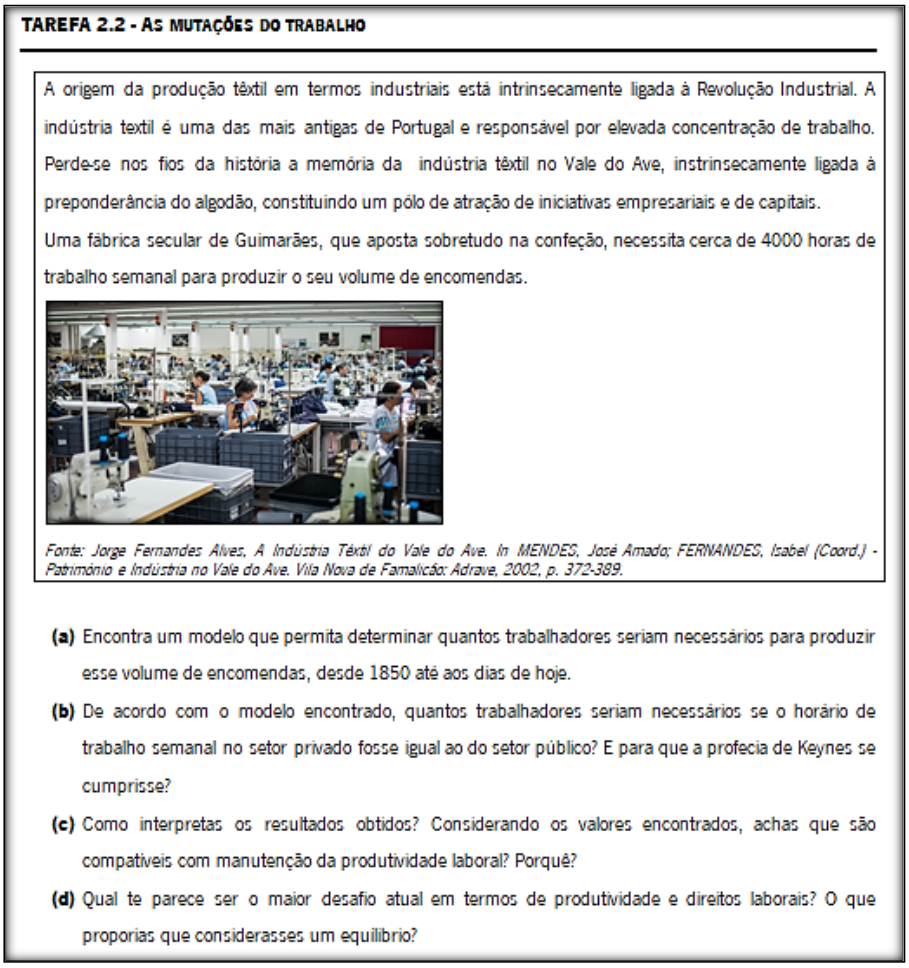
Tarefas de Modelação	Modelo Matemático
Tarefa 2.2. As mutações do trabalho	Função de Proporcionalidade Inversa
Tarefa 4. A redistribuição da riqueza	Função Linear
	Função de Proporcionalidade Inversa
Tarefa 5. A uberização do trabalho	Função Afim
	Função Quadrática

6.2.2.1. Tarefa 'As mutações do trabalho'

A tarefa 2.2 'As mutações do trabalho' surge na continuidade da tarefa 2.1. 'O trabalho e a conquista das 8 horas', duas tarefas que se unem sob o mote 'A evolução do trabalho', e que focam, fundamentalmente, a evolução do número de horas de trabalho semanal num plano global e, em particular, no contexto português. Com esse cenário *major*, a situação real da tarefa 2.2 (Figura 65) retrata a indústria têxtil existente na zona do Vale do Ave, pondo em evidência a referida evolução no seio de uma fábrica da região. Pretende-se que os alunos concebam um modelo representativo do número de trabalhadores necessários para a produção de um determinado volume de encomendas, utilizando os dados fornecidos, e descritivo da evolução do número de horas de trabalho semanal desde os finais do século dezanove. Posteriormente, com a situação modelada, procura-se que os alunos conjeturem sobre as variações que pode ter o horário de trabalho vinculado a diferentes contextos.

Figura 65

Representação da tarefa "As mutações do trabalho"



TAREFA 2.2 - AS MUTAÇÕES DO TRABALHO

A origem da produção têxtil em termos industriais está intrinsecamente ligada à Revolução Industrial. A indústria textil é uma das mais antigas de Portugal e responsável por elevada concentração de trabalho. Perde-se nos fios da história a memória da indústria têxtil no Vale do Ave, instrinsecamente ligada à preponderância do algodão, constituindo um pólo de atração de iniciativas empresariais e de capitais.

Uma fábrica secular de Guimarães, que aposta sobretudo na confeção, necessita cerca de 4000 horas de trabalho semanal para produzir o seu volume de encomendas.

Fonte: Jorge Fernandes Alves, A Indústria Têxtil do Vale do Ave. In MENDES, José Amado; FERNANDES, Isabel (Coord.) - Património e Indústria no Vale do Ave. Vila Nova de Famalicão: Adrave, 2002, p. 372-389.

(a) Encontra um modelo que permita determinar quantos trabalhadores seriam necessários para produzir esse volume de encomendas, desde 1850 até aos dias de hoje.

(b) De acordo com o modelo encontrado, quantos trabalhadores seriam necessários se o horário de trabalho semanal no setor privado fosse igual ao do setor público? E para que a profecia de Keynes se cumprisse?

(c) Como interpretas os resultados obtidos? Considerando os valores encontrados, achas que são compatíveis com manutenção da produtividade laboral? Porquê?

(d) Qual te parece ser o maior desafio atual em termos de produtividade e direitos laborais? O que proporias que considerasses um equilíbrio?

A tarefa foi resolvida em grupos de trabalho, ao longo de quatro aulas, nas quais os alunos analisaram, operacionalizaram e discutiram processos, tendo recorrido à folha de cálculo e ao auxílio da professora. Na Tabela 36 encontram-se descritas as etapas de modelação e as atividades cognitivas que lhes são associadas.

Tabela 36

Etapas dos alunos à Tarefa 'As mutações do trabalho'

Etapas de Modelação	Atividades cognitivas	Secção na Tarefa	Evidências						
			G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema	Clarifica o contexto	Texto			1		1		
	Organiza os dados	Alínea a)		1			1	1	1
	Reconhece	Alínea a)	1	BL		1			
Matematização e trabalho com o modelo matemático	Identifica variáveis	Alínea a)	1	1	1	1		1	
	Representa o modelo	Alínea a)	1	1	1	1	1	1	1
	Trabalha o modelo	Alínea b)	1	1	1	1	1	1	1
	Interpreta resultados	Alínea c)	1	1		1		1	1
Interpretação dos resultados e validação	Compara	Alínea b)		1		1			
	Valida	Alínea c) e d)		1	1	1		1	1

(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

Após a leitura do texto foi aberta, por parte da professora, a discussão à turma, sendo que desse momento se induz que, na sua generalidade, a turma demonstrou capacidades de clarificação do contexto:

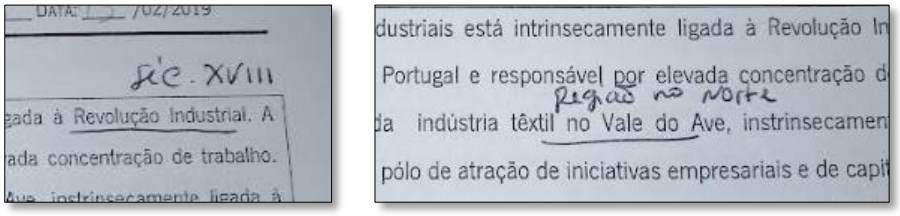
> Professora: Dá para perceber o que se produz nesta zona? Já agora, alguém conhece a região do Vale do Ave?
> Ana: O meu pai é de Fafe. É aí, não é?
> Professora: Sim, é uma região na zona Minho.
> Nídia: Falamos disso em Geografia, não é uma NUTT? A professora não é de Guimarães?
> Professora: Boa! Sou sim (Risos). Então, já dá para perceber o que têm de fazer para encontrarem o modelo?
> Ana: Ó professora, não precisamos dos dados da tarefa anterior?
> Leonor: Parece-me que sim, temos de ir consultar o número de horas de trabalho ao longo do tempo. (GOA8)

Deste diálogo, infere-se que os alunos compreenderam a situação, evidenciando, desta forma, conhecimento extra-matemático. Em dois registos escritos encontram-se anotações que pressupõem uma ligação do contexto do problema à realidade (Figura 66), no primeiro caso, a associação da

Revolução Industrial ao século XVIII e, no segundo caso, a referência ao Vale do Ave como uma região do Norte de Portugal.

Figura 66

Anotações de Liang (G5) e de Ana (G3)



A representação mental da situação depreende-se pela desenvoltura com que os vários grupos de alunos iniciam as suas discussões, tomando como exemplo as conversações entabuladas pelos Grupo 2 e o Grupo 4:

Ricardo: Vamos ter que ir buscar os dados da tarefa 2.1. Já a tenho aqui. Vou escrever aqui os valores.
Joana: Eu também já estou a escrever. Já viram que baixaram muito as horas ao longo dos anos.
Vera: Também se pensarmos que estão aqui os dados desde 1890. É muito tempo.
Ricardo: Ok, já está escrito. E agora?
Vera: Os trabalhadores de hoje trabalham 40 horas por semana, não se esqueçam. (GOA8_G2)

Leonor: Eu anotei todos os valores da tarefa anterior. Agora temos de ver como fazemos os cálculos.
Maria: Temos de encontrar o modelo primeiro.
Leonor: Mas para encontrar o modelo temos de perceber o que fazemos com estes valores.
Tomás: Eu já estou aqui a calcular 40×50, por exemplo.
Maria: E o que é que são esses 50?
Tomás: São os trabalhadores.
Leonor: Isso dá 2000. O que é que significa este valor?
Tomás: Eu acho que significa que se 50 trabalhadores fizerem 40 horas por semana, dá um total de 2000. Ainda não chega, tem de ser o dobro. (GOA8_G4)

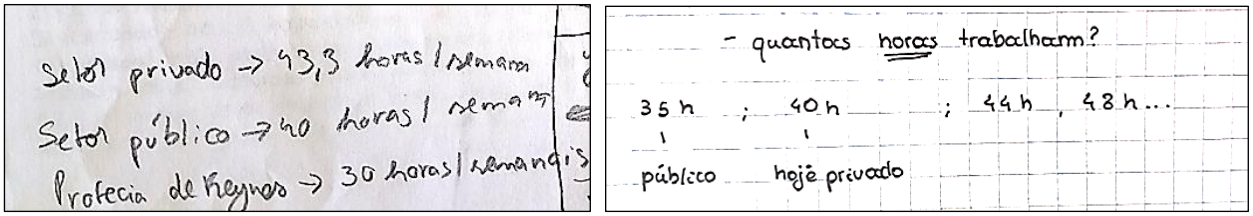
Destas afirmações verbais constata-se que os alunos procuraram olhar para os dados e fazer assunções, como foi o caso do Grupo 2, aproveitando para estabelecer relações entre quantidades, traçando objetivos e definindo estratégias. De facto, nesta fase do processo denota-se uma

estruturação mental que esboça uma transição para o modelo real, como fica patente na conversação do Grupo 4 em que o aluno Tomás sugere um caminho por tentativa e erro.

Nos registos escritos encontram-se respostas em que os alunos selecionam e organizam os dados ($n = 15$), como se verifica na resposta de Miguel e de Matilde (Figura 67).

Figura 67

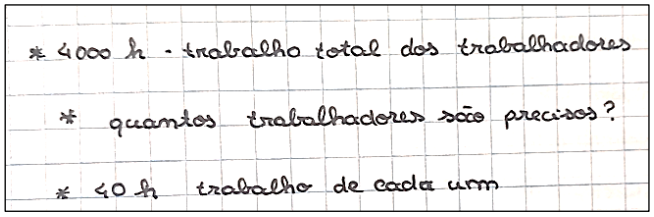
Registos de Miguel (G5) e de Matilde (G7)



A definição de estratégias observa-se em algumas respostas ($n = 8$), todas elas indiciando uma representação simbólica da situação, e evidenciam a identificação de relações entre as possíveis variáveis, como ilustrado na Figura 68.

Figura 68

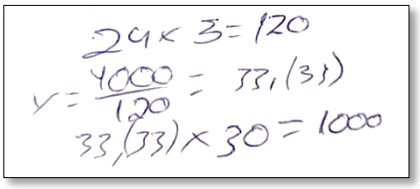
Registo de Inês (G4)



Nesta etapa do processo de modelação, vários alunos demonstraram capacidades para interpretar, selecionar e identificar estratégias. No entanto, não se percecionou através dos diálogos estabelecidos em grupo que, nesta fase, os alunos tivessem reconhecido a existência de uma constante, pelo menos, num plano formal (NCOA_fev1019). Depreende-se, portanto, ter existido um bloqueio perante a dificuldade na especificação do papel de cada uma das variáveis e na sua relação, como se infere pelas resoluções de um dos grupos, patente na Figura 69.

Figura 69

Registo de Guilherme (G2)



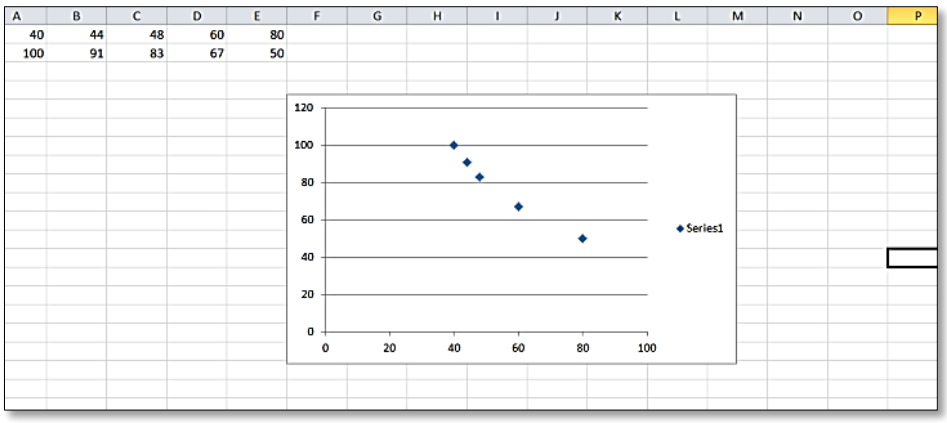
Por este motivo, a professora sugeriu que os alunos utilizassem o Excel para introduzirem os dados e tentarem, desta forma, identificar um padrão: "utilizem o meu computador e experimentem no Excel introduzir os dados, pode ser que vos fique mais claro" (GOA9_Professora).

Professora: Ok, para ser menos confuso, vocês dizem-me o que eu tenho que escrever e eu projeto no quadro.
Leonor: Certo. Tem de começar por pôr o número de horas ao longo do tempo, 40, 44, 48 e por aí fora.
Professora: Ok, e depois?
Nídia: Agora tem de se encontrar quantos trabalhadores.
Professora: Como?
Nídia: Para 40 horas são 100 trabalhadores e, portanto, para 80 horas são 50.
Professora: Mais, e o resto? (GOA9)

Apesar da conversação se ter estabelecido apenas com a participação de duas alunas, os restantes alunos mantiveram-se focados (NCOA_fev2019), ao que a docente acaba por projetar a folha de Excel (Figura 70).

Figura 70

Folha de cálculo projetada para a turma analisar



(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

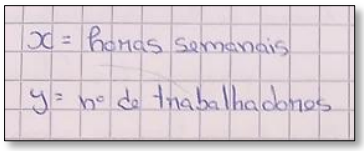
Após a experiência mencionada, a turma conseguiu identificar um padrão, como exemplifica o seguinte diálogo:

> Professora: Ainda ninguém me disse de que forma se comportam estas variáveis.
> Miguel: Estão a decrescer, menos horas de trabalho são precisos mais trabalhadores.
> Professora: E isso é aleatório?
> Miguel: Não, parece uma proporcionalidade inversa. (GOA9)

Por sua vez, nas respostas escritas ($n = 18$), os alunos começaram por matematizar a situação ao identificarem as variáveis com simbologia formal. Com essa identificação, os alunos conseguiram verificar a existência de duas variáveis, como se verifica na Figura 71.

Figura 71

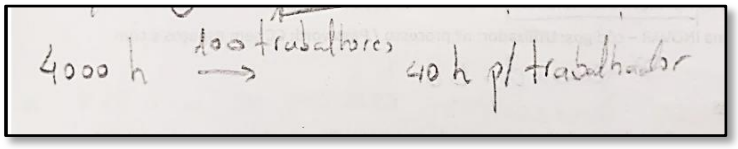
Identificação das variáveis na resolução de Vera (G2)



Depreende-se, inclusivamente, na resolução de Raquel, que pressupôs a dependência das variáveis, quando as esquematizou e estabeleceu relações entre ambas, como indicado na Figura 72:

Figura 72

Registo de Raquel (G6)



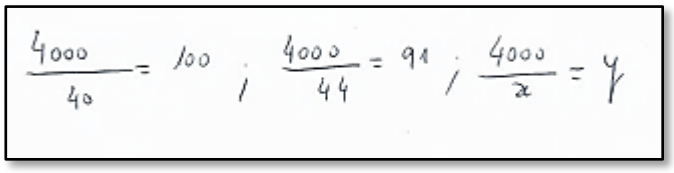
É, também possível, intuir através das conversações grupais, a passagem para um formato matemático, de representação simbólica, em que os alunos fazem a correspondência entre o número de horas de trabalho semanal e o número de trabalhadores necessários para atingir o número de horas do volume de encomendas, e, pela primeira vez, indicam que o valor 4000 é a constante de proporcionalidade inversa.

Nídia: Vamos então escrever tudo isto.
Olex: Se tivermos mais trabalhadores o que é que isso implica para a empresa? Que o número de horas de trabalho de cada um, diminui?
Ana: Mas o produto final é o mesmo não é?
Daniela: Claro, são as 4000 horas semanais. Que é a constante inversa?
Diogo: Ouçam lá, será que mais trabalhadores, ganham mais dinheiro?
Nídia: Isso agora não interessa para nada!. (GOA9_G3)

De igual modo, encontram-se registos que acompanham a discussão verbal deste grupo, na medida em que prescrevem e formulam o modelo recorrendo à generalização $y = \frac{4000}{x}$ (Figura 73).

Figura 73

Cálculos efetudos por Raquel (G6)



Com base nas resoluções escritas, verifica-se que a maioria ($n = 22$) optou pela representação algébrica do modelo, apesar de em nenhuma delas os alunos procederem à identificação dos parâmetros e normativizarem a função do tipo $f(x) = \frac{4000}{x}, x \neq 0$.

É de destacar que alguns alunos ($n = 4$) incluíram nas suas resoluções o esboço do gráfico, talvez por terem acesso ao conjunto de pontos obtidos pelo Excel, como indica a Figura 74.

Figura 74

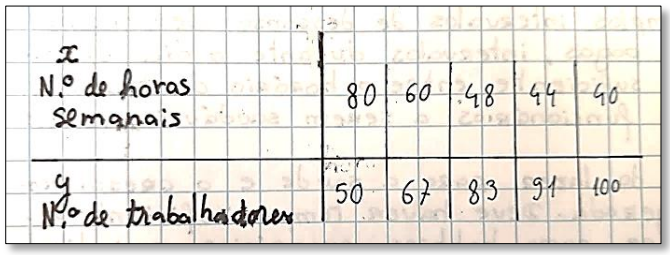
Representação Gráfica de Carolina (G1)



Os alunos são levados a trabalharem com o modelo para determinarem quantos trabalhadores seriam necessários para produzir o volume de encomendas semanal (num total de 4000 horas) e, na sua generalidade, por apresentar os resultados numa tabela, como se pode ler na Figura 75.

Figura 75

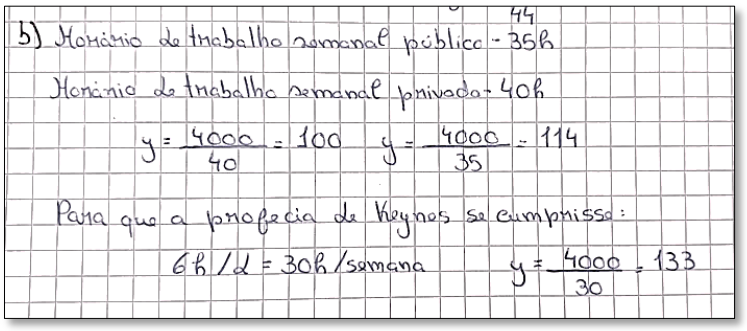
Tabela apresentada por Daniela (G3)



Na alínea b), os alunos continuaram a trabalhar com o modelo, na medida em que tinham de determinar quantos trabalhadores seriam necessários, fazendo variar o parâmetro relativo ao número de horas semanais, como indica a seguinte Figura 76.

Figura 76

Resolução de Vera (G2)



Das respostas obtidas parece não ter havido qualquer dificuldade neste âmbito, tendo os alunos apresentado as operações aritméticas necessárias à obtenção dos resultados.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Na alínea c) pretende-se que os alunos interpretem os resultados reais e conjeturem sobre a manutenção da produtividade laboral à luz da redução do número de horas de trabalho semanal. Neste

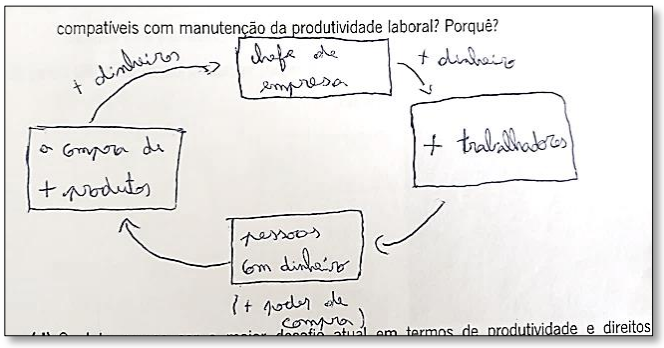
âmbito, os produtos obtidos deram-se, também, através do discurso oral. Exemplo disso, verifica-se no seguinte diálogo, no qual participou grande parte da turma:

> Professora: 114 trabalhadores e 133 trabalhadores e todos os restantes valores. Que significarão estes valores?
> Ricardo: Posso ler a nossa resposta? Se houvesse menos horas, haveria mais trabalhadores, ou seja, mais emprego.
> Lúcia: Também podemos dizer que se houver mais emprego, mais dinheiro e mais poder de compra, logo se se comprarem mais produtos as empresas também têm mais lucro.
> Matilde: É um ciclo vicioso, não? Por isso, é melhor. (GOA11)

Assim, nesta fase de modelação, sobressaem dos registos escritos a confluência de duas atividades cognitivas: comparar e criticar os resultados e a validação dos mesmos, e o facto de terem aproveitado as respostas matemáticas para fazer a transferência para o domínio extra-matemático. As respostas apresentadas refletem o discurso verbal anterior e exemplo disso é um esquema que traduz esse mesmo discurso, como indica a Figura 77.

Figura 77

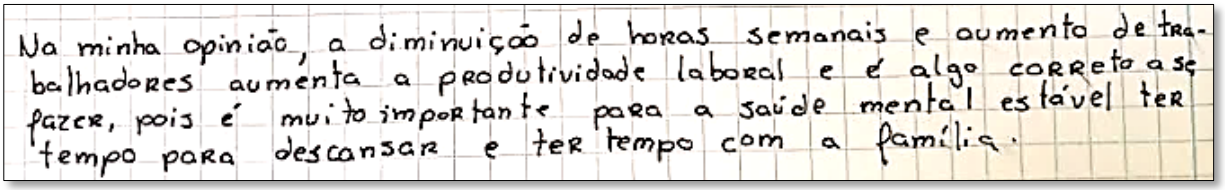
Resolução de Tomás (G4)



A resolução de uma aluna (Figura 78) do Grupo 1 mostra um argumento a favor da diminuição do número de trabalho semanal, relacionando-o com o aumento do número de trabalhadores e com o aumento da produtividade.

Figura 78

Resolução de Margarida (G1)

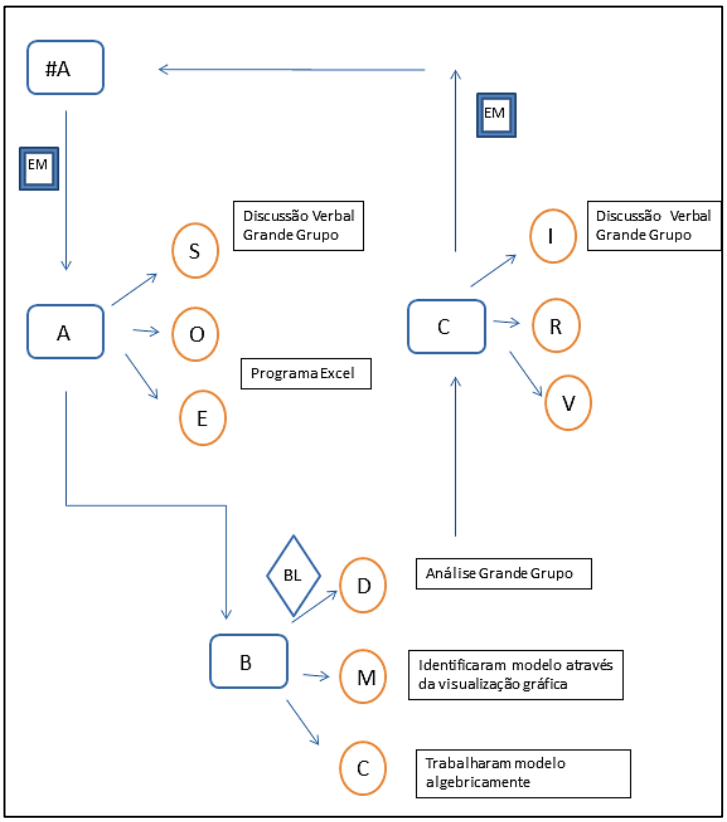

Na minha opinião, a diminuição de horas semanais e aumento de trabalhadores aumenta a produtividade laboral e é algo correto a se fazer, pois é muito importante para a saúde mental estável ter tempo para descansar e ter tempo com a família.

Deduz-se que os alunos mobilizaram os conhecimentos necessários, na medida em que compararam os resultados reais e validaram os mesmos inferindo acerca das implicações desses resultados na realidade.

De todas as dinâmicas estabelecidas, quer ao nível oral, quer ao nível escrito, na resolução da tarefa de modelação, depreende-se uma inclinação, a um nível *Macro*, para a seguinte tendência de competências de modelação e os processos escolhidos pela maioria dos alunos (Figura 79).

Figura 79

Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'As mutações do trabalho'



Legenda: #A - Problema Real; A – Modelo Real; B – Modelo Matemático; C – Interpretar Resultados; EM – Conhecimento Extramatemático, BL - Bloqueio
S – Simplificar; O – Organizar; E – Reconhecer Estratégias; D- Definir Variáveis; M – Modelo Matemático; T –Trabalhar matematicamente; I – Interpretar modelo; R – comparar Resultados; V - Validar

De uma forma global, os alunos compreenderam a tarefa estabelecendo ligação com o mundo real, evidenciando-o em discussão coletiva. Para a organização dos dados os alunos recorreram à folha de cálculo que auxiliou no reconhecimento de estratégias. Na passagem para o modelo matemático, os alunos definiram as variáveis e conseguiram encontrar um padrão. Para a definição do modelo foram

auxiliados pela visualização gráfica dos dados no programa Excel, o que facilitou a chegada ao modelo que melhor se adequava, no entanto, trabalharam-no, maioritariamente, de forma algébrica. Nesta tarefa, os alunos demonstraram competências para interpretar e validar o modelo, efetuando-o de forma oral, em diálogo de grupo turma, e nos registos escritos.

6.2.2.2. Tarefa 'A redistribuição da riqueza'

Na tarefa 'A redistribuição da riqueza', o contexto real da tarefa inicia-se com a apresentação de duas propostas de gestão salarial no seio de uma empresa, à qual se segue uma tabela salarial que regista o ganho mensal de alguns trabalhadores de uma empresa portuguesa, conforme ilustrado pela Figura 80.

Figura 80

Representação da tarefa 'A redistribuição da riqueza'

TAREFA 4 – A REDISTRIBUIÇÃO DA RIQUEZA

Há alguma justificação para as disparidades salariais?

As remunerações dos gestores não têm relação com o desempenho das empresas, nem em termos operacionais nem em termos da sua cotação na bolsa. Esta disparidade de rendimentos, é expressiva da desigualdade profunda que hoje existe no mundo do trabalho e é questionada até pelo campo da gestão. Peter Drucker, o guru da Gestão Moderna, dizia que o rácio entre o salário mais elevado e o salário mais baixo de uma empresa não devia exceder os 25.

Fonte: Jornal de Negócios 16.05.2018

Na Suiça, 100 mil cidadãos propuseram ao Parlamento, em 2011, a fixação por lei de um leque salarial máximo: ninguém deveria poder ganhar num mês mais do que outro, na mesma empresa, ganha num ano. Se os de cima querem ganhar mais, têm de aumentar na mesma proporção os de baixo.

Fonte: Expresso, 18.05.2018



A seguinte tabela salarial regista o ganho mensal, por categorias, de alguns trabalhadores do Pingo Doce, relativa ao **ano de 2017:**

Âmbito Profissional	Rendimento Mensal (em euros)	Número de Trabalhadores
CEO	143 500	1
Gerente de loja	1238	400
Operador de hiper/super/loja Chefe de Secção	881,5	1600
Operador de hiper/super/loja Principal	780	3200
Operador de hiper/super/loja Especializado	659	10000
Operador de hiper/super/loja de 1ª	620	20000
Operador de hiper/super/loja de 2ª	567,2	39800
Operador de hiper/super/loja do 1º e 2º ano	557	25000

(a) Qual o modelo mais apropriado para determinar o rácio entre o salário mais elevado e os salários dos restantes trabalhadores do Pingo Doce? De acordo com este modelo, qual seria o salário mais baixo de um trabalhador desta empresa, de forma a aplicar a proposta de Peter Drucker?

(b) Encontra um modelo que permita aplicar a proposta dos cidadãos suiços ao salário mensal do CEO do Pingo Doce em função dos salários dos restantes trabalhadores.

(c) Admitamos que o grupo da Jerónimo Martins vai distribuir uma parte dos lucros de 2017 pelos trabalhadores da empresa Pingo Doce, tendo como critérios o salário auferido por cada um e que o valor atribuído a cada um não ultrapasse 0,01% do lucro, independentemente do número de trabalhadores.

A Jerónimo Martins fechou o ano passado com lucros de 385 milhões de euros (Fonte: Dinheiro Vivo, 25.02.2018)

Encontra um modelo de distribuição de forma a que a distribuição obedeça a uma justiça distributiva (quem tem mais, recebe menos). De acordo com este modelo, quanto irá receber o CEO?

(d) Valida o modelo obtido com base no lucro que foi distribuído a todos os trabalhadores da empresa e determina a percentagem que esse valor corresponde relativamente aos lucros anuais.

(e) Um dos temas amplamente estudado em áreas como a Filosofia, a Economia ou a Ciência Política é como devem ser distribuídos os bens numa sociedade. Como consideras que deveria ser feita essa distribuição? Dá exemplos.

Por sua vez, a tarefa foi analisada e discutida em grupos de trabalho, ao longo de cinco aulas. Os alunos trabalharam as duas primeiras aulas de forma totalmente autónoma, às quais se seguiram duas aulas de apresentação e discussão de resultados, com correções de algumas respostas por parte da professora. Das ferramentas utilizadas pelos diferentes grupos, constaram a calculadora gráfica, a folha de cálculo ou o motor de pesquisa *Google*.

Da análise dos registos escritos de cada um dos grupos de alunos, elencam-se, na Tabela 37, as etapas de modelação e as atividades cognitivas relativas à aplicação do modelo de proporcionalidade inversa.

Tabela 37

Etapas dos alunos na Tarefa 'A redistribuição da riqueza'

Etapas de Modelação	**Atividades cognitivas**	**Secção na Tarefa**	**Evidências**						
			G1	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**	**G7**
Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema	Clarifica o contexto	Alíneas a),b),c)	1	1	1	1	1	1	1
	Organiza os dados	Alínea c)	1	1	1	1	1	1	1
	Reconhece	Alínea c)	BL	BL	1	BL	BL	1	1
Matematização e trabalho com o modelo matemático	Identifica variáveis	Alínea c)	1	1	1	1	1	1	1
	Representa o modelo	Alínea c)	1	1	1	1	1	1	1
	Trabalha o modelo	Alínea c)		1	1		BL	1	1
Interpretação dos resultados e validação	Interpreta resultados	Alínea c),d)	1	1	1	1	1	1	1
	Compara	Alínea e)		1	1		1	1	1
	Valida	Alínea d)	BL		1		1	1	1

(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

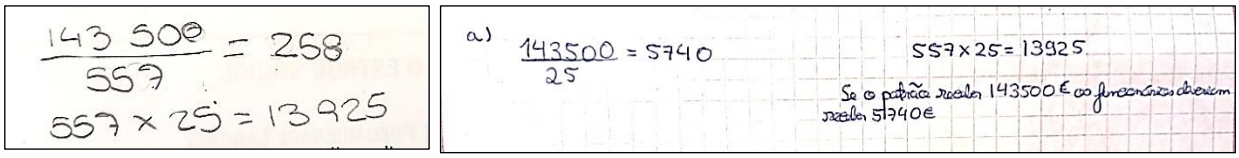
Atendendo aos pressupostos criados, a compreensão da tarefa incide, não só sobre o contexto do problema, mas também sobre as alíneas a), b) e c). Neste sentido, verificou-se que os vários grupos se debruçaram na leitura da tarefa e que a releram algumas vezes. De facto, a maioria ($n = 22$) dos registos escritos encontram-se sublinhados, rasurados ou com anotações. Nesta fase de compreensão da tarefa, as evidências mostram que uma parte significativa dos alunos ($n = 23$) conseguiu responder às duas primeiras questões, usando para isso diferentes representações. Vejam-se casos concretos, relativos à (i) alínea a) e (ii) à alínea b).

(i) Nesta questão pretendia-se que os alunos fossem capazes de encontrar o modelo mais apropriado para determinar a razão entre o salário mais elevado e os salários dos restantes trabalhadores, e, com esse valor, inferir acerca da proposta de Peter Drucker, apresentada no texto, a saber: o rácio entre o salário mais baixo de uma empresa não deveria exceder 25.

Os resultados mostram que os alunos não tiverem dificuldades em escolher o modelo linear, diferindo apenas na sua representação. Uma parte, seguiu um raciocínio exclusivamente aritmético, como a aluna Maria do G4 e o aluno Ricardo do G2 (Figura 81).

Figura 81

Resoluções de Maria (G4) e de Ricardo (G2)

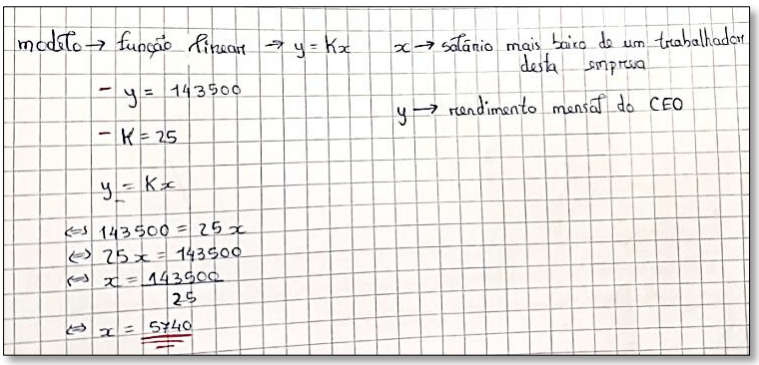


Na resposta de Maria constata-se que a aluna procedeu, primeiramente, ao que era sugerido, estabelecendo, aproximadamente, a razão $\frac{143500}{557} = 258$. De seguida, determinou qual deveria ser o salário do funcionário que aufere o valor mais alto segundo a proposta de Peter Drucker, sendo que, para isso, utilizou o salário mais baixo: $557 \times 25 = 13925$. Na resposta de Ricardo, o aluno aplicou diretamente o rácio $\frac{143500}{25} = 5740$ e, com esse raciocínio, apresentou o valor que seria o rendimento mais baixo segundo a premissa de Drucker.

Por sua vez, alguns alunos optaram pela estrutura algébrica com distintos graus de formalidade. Tomando como exemplo a aluna Madalena do G5 (Figura 82) verifica-se que a formalização algébrica está presente embora não tenha seguido a recomendação da determinação da razão entre os salários.

Figura 82

Resolução de Madalena (G5)



(ii) Na questão relativa à alínea b) pretendia-se que os alunos modelassem a proposta dos cidadãos suíços, contida no texto inicial, à luz dos salários dos trabalhadores da empresa 'Pingo Doce'. De uma maneira geral, os alunos não demonstraram qualquer dificuldade em chegarem ao modelo linear $y = 14\,x$ e alguns $y = 12\,x$ dependendo do que consideram ser o número de pagamentos anuais. Por sua vez, enquanto alguns ($n = 8$) apresentaram o valor possível para o CEO da empresa, comparando-o com o salário mais baixo, como é o caso de Daniela (Figura 83), dois alunos

construíram uma tabela que representava quanto poderia ganhar o diretor, dependendo do trabalhador com que fosse comparado (Figura 84).

Figura 83

Resolução de Daniela (G3)

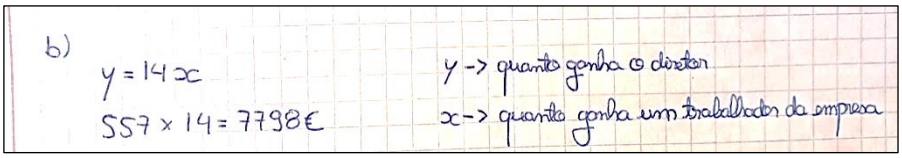


Figura 84

Tabela apresentada por Carlos (G7)



Quanto à interpretação do contexto específico da questão c), tornou-se evidente, quer pela maioria dos registos, quer pela observação da aula, que nenhum grupo teve dificuldade em selecionar os dados relevantes. Também aqui se denotou a inclusão do conhecimento extra-matemático ao estabelecerem uma analogia da situação a um caso por eles conhecido, como fica patente na seguinte conversação dos alunos do Grupo 7:

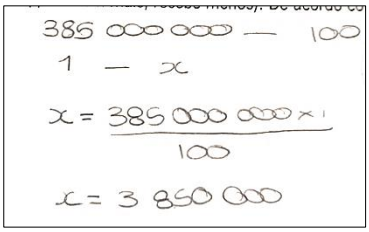
Theresa: Já viram estes valores? 385 milhões, impressionante!
Carlos: Quantos zeros são? Seis, não é?
Theresa: Sim, escreve-se assim.
Gonçalo: Isto é só o lucro! Ouviram que é tudo já sem as despesas?
Matilde: Faz lembrar aquelas grandes empresas que se ouvem no telejornal, como a Galp.
Gonçalo: Não te esqueças que o Pingo Doce é uma grande empresa, já viste a quantidade de supermercados que devem existir no país inteiro? Olha a quantidade de empregados que têm, que está aqui nesta tabela. (GOA16)

Da análise das respostas dos alunos relativas à questão c), infere-se que a atividade cognitiva que diz respeito à simplificação é associada ao reconhecimento de estratégias, uma vez que ao aplicarem a percentagem de lucro sobre o lucro total, os alunos definiram a quantidade que será

distribuída pelos trabalhadores. Nesta etapa, verificou-se, em grande parte dos registos ($n = 17$) a ocorrência de duas situações, que pressupõem um bloqueio relacionado com a determinação da percentagem. Em alguns casos, os alunos calcularam 1% do lucro total e não 0,01% desse lucro, como era solicitado, noutros casos, os alunos indicam os 0,01% como uma quantia relevante para o modelo, mas não o aplicam ao lucro total, como exemplifica a resposta de Maria (figura 85).

Figura 85

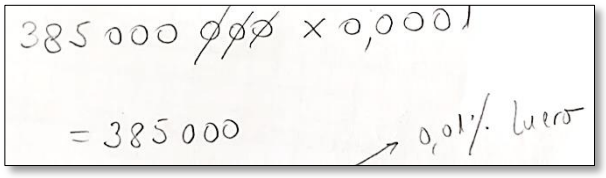
Resolução de Maria (G4) à alínea c)



Contudo, em nove registos, a apresentação desta quantidade é feita de forma inequívoca, como fica patente na resolução de Raquel (Figura 86).

Figura 86

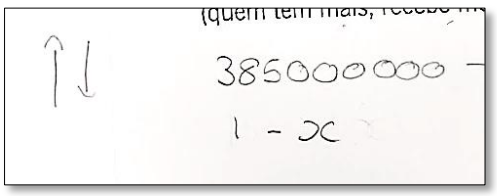
Resolução de Raquel (G6)



Um dos sinais em que se deduz que a transição do problema real para o modelo real é conseguida, é estar patente, em algumas respostas, uma simbologia que parece indiciar uma representação simbólica de uma proporcionalidade inversa, como indicado na resposta da Margarida (Figura 87):

Figura 87

Parte da resposta de Margarida (G1)



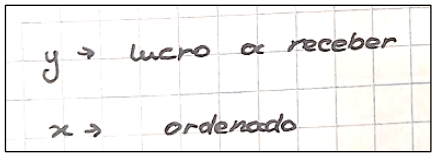
Ainda que seja uma representação simbólica pouco formal, reflete a procura de um padrão a par do reconhecimento de uma estratégia a seguir.

(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

Na procura do modelo que melhor representasse a situação real descrita, a maioria dos alunos ($n = 24$) identificou as duas variáveis que se relacionam. De uma maneira geral atribuíram à variável x a designação de salário mensal, ou simplesmente ordenado, e à variável y o lucro a receber, como figura na resposta de Ana (Figura 88):

Figura 88

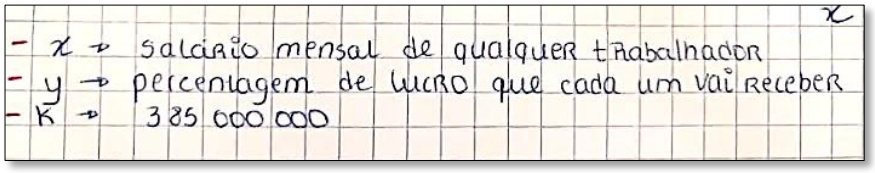
Identificação das variáveis de Ana (G3)



Já nesta etapa se faz repercutir a dificuldade inicial da percentagem de lucro e a sua influência na continuidade da resolução, como se torna evidente na resposta de Vera (Figura 89):

Figura 89

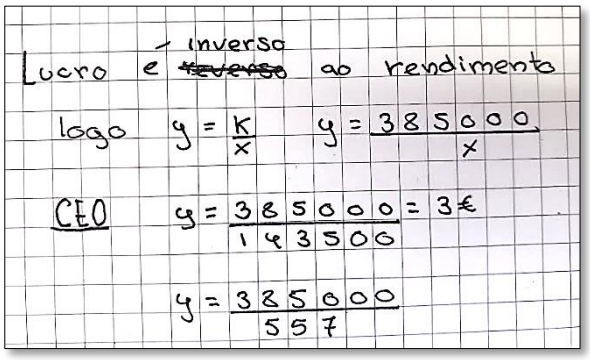
Parte da resposta de Vera (G2)



De forma unânime, todos os grupos identificaram o modelo matemático de proporcionalidade inversa $y = \frac{k}{x}, x \neq 0$, tendo-o trabalhado maioritariamente de forma algébrica, como exemplifica a resposta de Leonor do Grupo 4 (Figura 90).

Figura 90

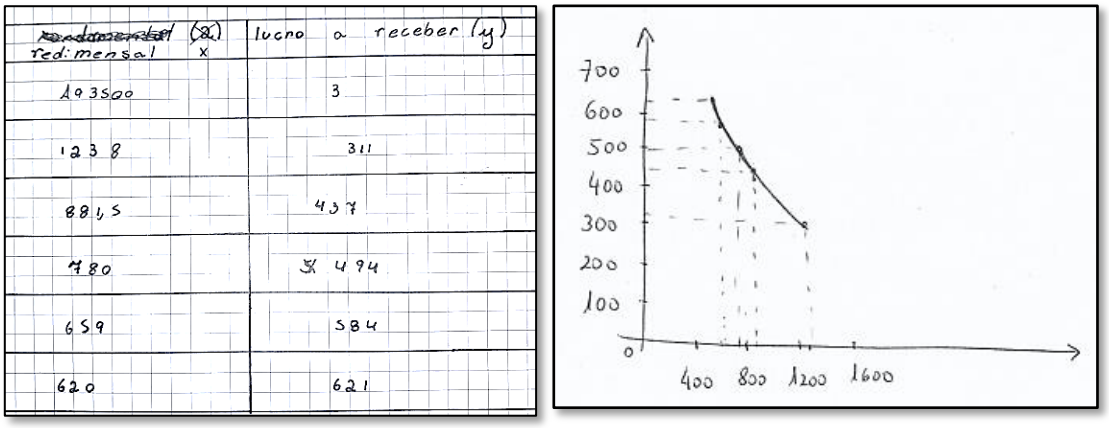
Modelo apresentado por Leonor (G4)



Na resolução de dois grupos de alunos figuram uma tabela, como é o caso de Theresa do Grupo 7, e dois alunos do Grupo 6 apresentam um gráfico (Figura 91).

Figura 91

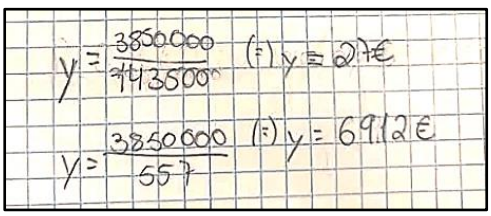
Tabela construída por Theresa (G7) e gráfico desenhado por Raquel (G6) (G7)

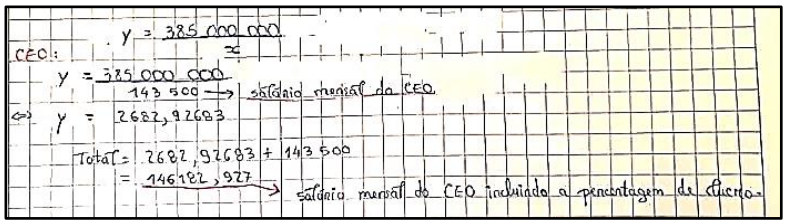


Em algumas resoluções são espelhados os erros de cálculo, anteriormente cometidos, e que se traduzem em distribuições de lucro pelos trabalhadores díspares, como indicam as respostas dos seguintes alunos (Figura 92).

Figura 92

Determinação dos lucros pelos trabalhadores de Gabriel (G1) e de Madalena (G5)





Na resolução de Gabriel, o aluno determina o valor do lucro da empresa a distribuir pelos trabalhadores com maior e menor rendimento, respetivamente. A resolução de Madalena mostra a parte de lucro a distribuir pelo diretor da empresa, seguindo-se a soma com o seu salário mensal.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Na fase de obterem quanto receberia o diretor-geral pela distribuição de parte dos lucros anuais, os alunos iriam constatar que, ao mesmo, caberia a quantia de 3 euros. No entanto, como muitos alunos cometeram um erro inicial, esse valor passaria a 27 euros. Ainda assim, da observação desse momento, inferiu-se de alguns diálogos que os alunos interpretaram os resultados e refletiram sobre eles. Atente-se na conversação estabelecida pelo Grupo 2, na qual os alunos comparam os valores obtidos e conectam-nos à situação real:

Vera:	A mim deu-me 27 euros que será atribuído ao CEO, e a vocês?
Ricardo:	Também me deu isso, já viram o valor? Comparado com o salário que ganha por mês, não é nada.
Vera:	Ainda bem, porque para que é precisa? Nem devia ter mesmo nada.
Guilherme:	Pois, mas os outros têm uma média de 6 mil e tal euros.
Joana:	Claro, esses é que precisam! (GOA19_G2).

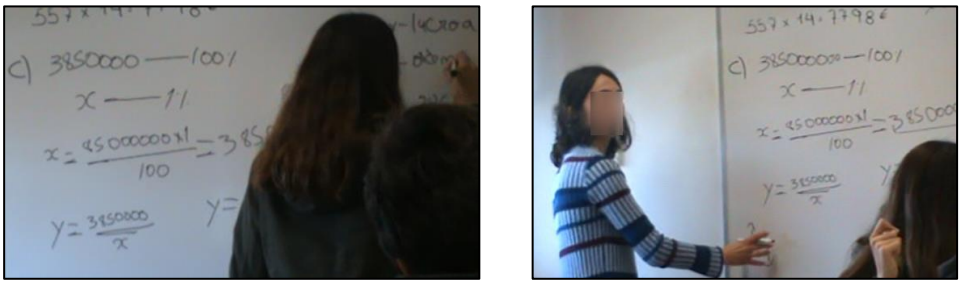
O grande obstáculo desta etapa de modelação surge na concretização da alínea d), em que é pedido que os alunos validem o modelo através da verificação dos lucros distribuídos por todos os trabalhadores da empresa e que indiquem a que percentagem do lucro total corresponde. Dos diálogos encetados pelos vários grupos, verifica-se que apenas um deles consegue desembaraçar-se e avançar na proposta, uma vez que já tinham os dados organizados numa tabela (GOA19).

A professora, pela primeira vez, no decorrer da exploração da tarefa, intervém e sugere que usem a tabela que relaciona o salário e o número de trabalhadores da empresa e que determinem o valor total da distribuição dos lucros, e uma boa ferramenta de auxílio seria o programa Excel ou a Calculadora Gráfica. Apenas mais dois grupos conseguem concretizar essa sugestão, sendo que os restantes alunos preferem efetuar os cálculos manualmente (GOA19).

Chegados a esta fase, a professora opta por motivar a turma a apresentar os seus resultados. Deste modo, dois grupos apresentam os seus resultados das alíneas a) e b), sendo que uma aluna de outro grupo expõe a resposta à alínea c) (Figura 93). Após estas demonstrações, a docente intervém e questiona a turma sobre a concordância perante os valores, levando os vários grupos a compararem os resultados.

Figura 93

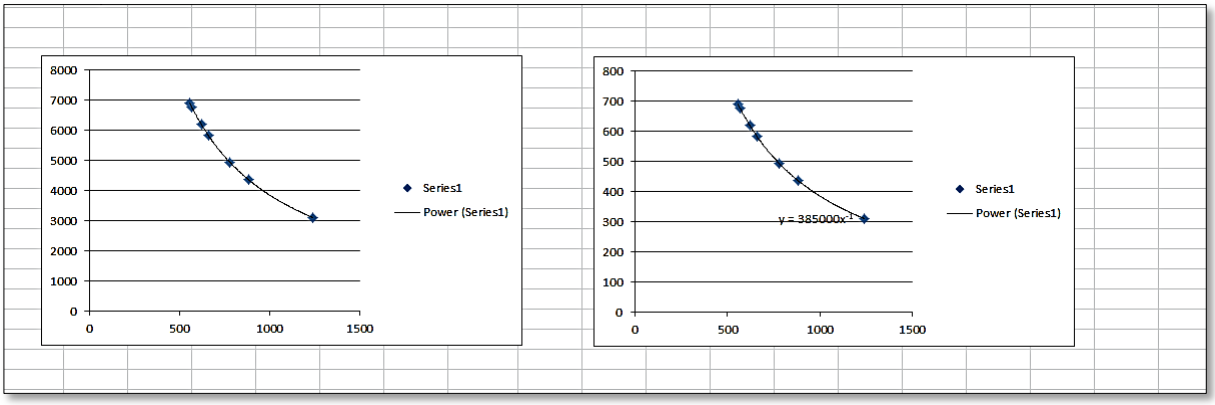
A professora comenta a resolução da alínea c)



Apercebendo-se de que havia dificuldades na aplicação da percentagem de lucro e que isso tinha alterado os resultados de vários alunos, a professora sugeriu que refizessem os cálculos no caderno. Possivelmente, com o propósito de ilustrar o que referiu, projeta no quadro uma folha de cálculo com as duas respostas obtidas pelos grupos, ambas representadas graficamente (Figura 94).

Figura 94

Projeção da folha de cálculo elaborada pela professora



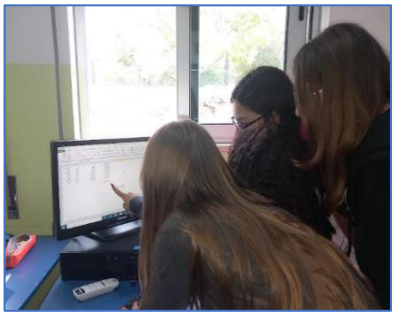
Nesse momento, parece ter-se tornado óbvio o que o erro inicial provocaria, como leva a intuir a seguinte conversação:

Professora: Olhem bem para os dois gráficos. São iguais?
Leonor: Parecem, mas não devem ser.
Professora: Onde está a diferença? E como se chamam?
Leonor: São hipérboles. E a diferença está nos valores do eixo dos yy. Têm um zero a mais.
Professora: Então? Conclusão? O que representa o eixo dos yy?
Raquel: O lucro a receber. O que está bem é o da direita. (GOA19).

Assim, é dado aos alunos algum tempo para refazerem e voltarem a apresentar os resultados. Os registos dos alunos mostram que, ainda que com os esclarecimentos dados pela professora, apenas três grupos conseguiram atingir a proposta da alínea d) que consistia na validação dos resultados dados pelo modelo. A tabela obtida pelo Grupo 1 (Figura 95), com a ajuda do Excel, mostra os passos dados até chegarem à percentagem do lucro total.

Figura 95

Alunos do Grupo 1 a trabalhar com a folha de cálculo

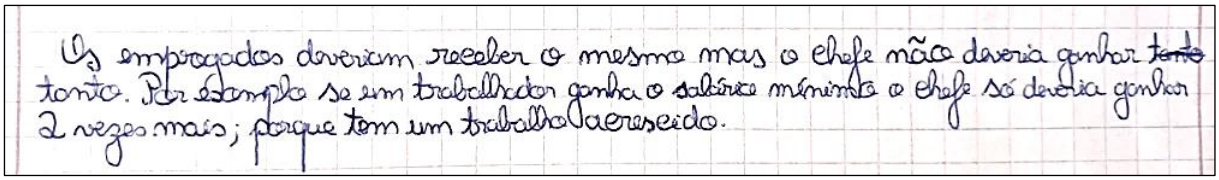


143500	3		1		2,6829268
1238	311		400		124394,18
881,5	437		1600		698808,85
780	494		3200		1579487,2
659	584		10000		5842185,1
620	621		20000		12419355
567,2	679		39800		27015162
557	691		25000		17280072
					64959467
			0,185598		

Por fim, na última questão sugeria-se que os alunos expusessem a sua opinião quanto ao modo como deveriam ser distribuídos os bens numa sociedade. Os resultados mostram opiniões diversas e, em muitas delas, a concatenação dos resultados matemáticos para a argumentação das suas posições, como é o caso de Madalena do Grupo 5 (Figura 96):

Figura 96

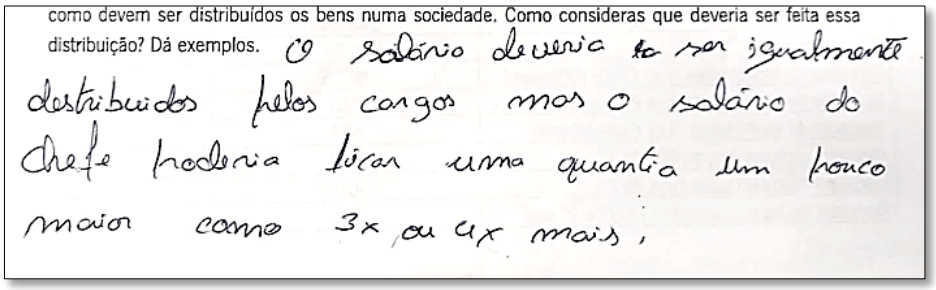
Resposta dada por Madalena (G5)


Os empregados deveriam receber o mesmo mas o chefe não deveria ganhar ~~tanto~~ tanto. Por exemplo se um trabalhador ganha o salário mínimo o chefe só deveria ganhar 2 vezes mais; porque tem um trabalho acrescido.

Com a sua resposta, a aluna evidencia uma proposta de distribuição salarial no seio de uma empresa que considera proporcional às funções desempenhadas, à semelhança da resposta apresentada por Gonçalo do Grupo 5, como ilustra a seguinte figura:

Figura 97

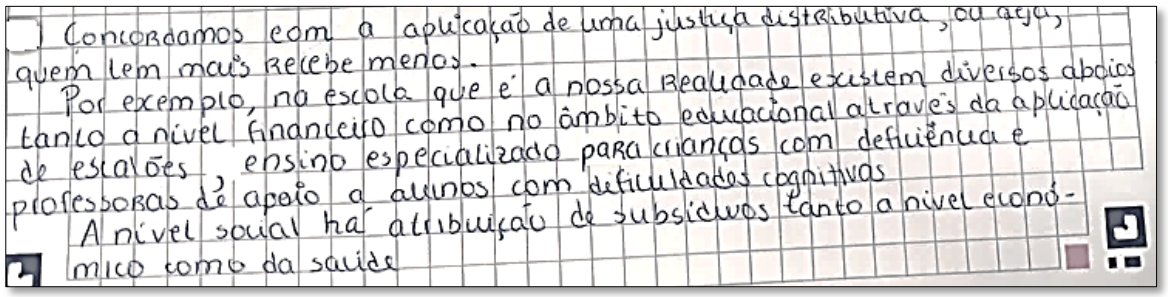
Resposta de Gonçalo (G7)


como devem ser distribuídos os bens numa sociedade. Como consideras que deveria ser feita essa distribuição? Dá exemplos. O salário deveria ~~ta~~ ser igualmente distribuidos pelos cargos mas o salário do chefe poderia ficar uma quantia um pouco maior como 3x ou 4x mais;

Ambas as resoluções apoiam-se na aplicação de um modelo linear para sustentar o argumento defendido de distribuição salarial ajustada ao desempenho de funções. Ainda neste sentido, a aluna Nídia do Grupo 3 propõe uma distribuição económica inversamente proporcional às carências económicas manifestadas, exemplificando com uma analogia sobre a distribuição educativa em meio escolar, como figurado na Figura 98.

Figura 98

Resposta de Nídia (G3)

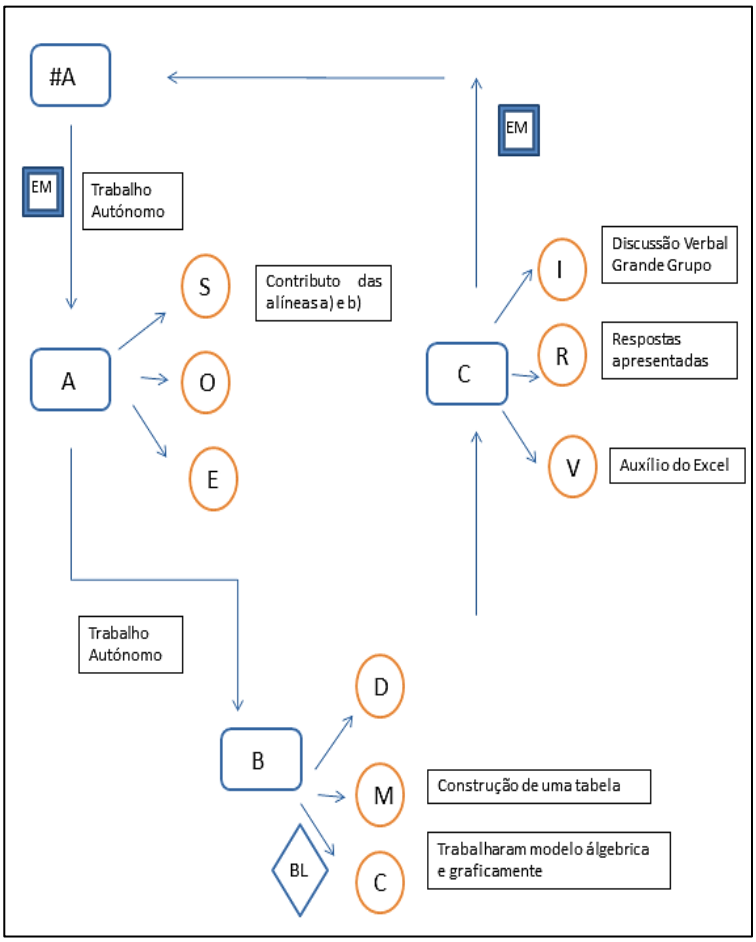

Concordamos com a aplicação de uma justiça distributiva, ou seja, quem tem mais recebe menos.
Por exemplo, na escola que é a nossa realidade existem diversos apoios tanto a nível financeiro como no âmbito educacional através da aplicação de escalões, ensino especializado para crianças com deficiência e professoras de apoio a alunos com dificuldades cognitivas
A nível social há atribuição de subsídios tanto a nível económico como da saúde

Da realização da tarefa 'A redistribuição da riqueza' identifica-se que as etapas de modelação foram todas concretizadas, embora se tenha detetado alguns bloqueios em cada uma delas (Figura 99).

A fase inicial do processo de modelação foi concretizada de forma autónoma e as atividades cognitivas associadas deram-se com o contributo das duas primeiras alíneas da tarefa. Para definirem o modelo matemático, os alunos construíram uma tabela.

Figura 99

Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'A redistribuição da riqueza'



Legenda: #A - Problema Real; A – Modelo Real; B – Modelo Matemático; C – Interpretar Resultados; EM – Conhecimento Extramatemático, BL - Bloqueio
S – Simplificar; O – Organizar; E – Reconhecer Estratégias; D- Definir Variáveis; M – Modelo Matemático; T –Trabalhar matematicamente; I – Interpretar modelo; R – comparar Resultados; V - Validar

No entanto, alguns alunos, cometeram um erro de cálculo, o qual se repercutiu num obstáculo ao trabalho com o modelo. Na última fase, os alunos demonstraram competências de modelação que lhes permitiram interpretar em grupo turma os resultados obtidos, bem como estabelecer algumas comparações e ainda validar o modelo.

6.2.2.3. Tarefa 'A uberização do trabalho'

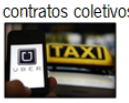
A tarefa 'A uberização do trabalho' expõe as condições de trabalho vividas pelos motoristas de uma empresa multinacional prestadora de serviços na área do transporte privado urbano. A modelação dos dados consiste na criação de um modelo que permita traduzir o ganho diário de um motorista desta plataforma eletrónica e para inferir algumas situações associadas a essa remuneração. Este modelo ajusta-se à função quadrática e é solicitado apenas na questão b). O contexto inicial (Figura 100) é dado a conhecer num texto proveniente de uma revista, seguido de uma tabela que regista o valor ganho por quilómetro em função da distância percorrida pelo motorista da empresa e, para efeitos de análise do trabalho dos alunos, considera-se a alínea a) como parteintegrante do contexto do problema.

Figura 100

Representação da Tarefa 'A uberização do trabalho'

A Uber é uma aplicação móvel que liga os motoristas privados a clientes. Através de um smartphone, o cliente pede um carro e o motorista mais próximo segue ao seu encontro. Esta empresa, presente em 65 países, não tem carros ao seu serviço, nem os motoristas são seus empregados; são parceiros, como a empresa lhes chama, sem qualquer vínculo laboral. O contrato que assinam com a empresa é, justamente, de parceria comercial. Usam a sua própria viatura, pagam do seu bolso a gasolina e a manutenção do carro, e recebem 80% do valor de uma corrida; os restantes 20% são a comissão da Uber.

Há quem veja aqui uma excelente oportunidade para desempregados ou para quem precise de uma segunda fonte de rendimento. Mas há também quem considere que estamos perante o início de uma perigosa alteração das relações laborais: esqueçam as 40 horas semanais, aqui quanto mais horas se trabalha mais se ganha; esqueçam o pagamento de horas extraordinárias, trabalho aos fins-de-semana e feriados ou por turnos; esqueçam o ordenado certo ao fim do mês e os descontos do patrão para a Segurança Social. São trabalhadores à peça, e quanto mais horas trabalharem mais ganham. Não há contratos coletivos ou sequer sindicatos. No mundo dos trabalhadores à peça, cada um está por si.



Fonte: Visão História

A seguinte tabela regista o valor ganho por quilómetro em função da distância percorrida por um motorista da Uber.

Estimativa de quilómetros (Km)	Valor ganho por km (em cêntimos)
50	0
100	8
150	16
200	24
250	32

(a) Encontra um modelo que permita determinar quanto ganha por quilómetro, o motorista da Uber.

(b) Define o modelo que permita encontrar quanto ganha o motorista da Uber por dia.

(c) De acordo com o modelo encontrado, quantos quilómetros precisa de percorrer para ganhar 20 euros?

Considera a seguinte informação:

O número médio de quilómetros por viagem é de 5 km e o tempo médio por cada viagem efetuada é de 20 minutos.

(d) Segundo o modelo definido e tendo em conta as informações dadas, determina qual o número de horas de trabalho diário de um motorista da Uber para obter um ganho de 30 euros diários?

(e) Com base no resultado da alínea anterior, quantas horas semanais terá de trabalhar o motorista para atingir um salário mensal de 600 euros (salário mínimo em 2019)?

(f) Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, que direitos fundamentais estão postos em causa?

A exploração da tarefa desenvolveu-se ao longo de quatro aulas, durante as quais os alunos trabalharam, primeiramente, em grupos de trabalho, de forma autónoma e apoiados na calculadora gráfica, no telemóvel para pesquisas *online* e nos esclarecimentos da professora.

Na Tabela 38 encontram-se descritas as etapas de modelação, as atividades cognitivas que lhes são associadas de acordo com as questões da tarefa.

Tabela 38

Etapas dos alunos na Tarefa 'A uberização do trabalho'

Etapas de Modelação	**Atividades cognitivas**	**Secção na Tarefa**	**Evidências**						
			G1	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**	**G7**
Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema	Clarifica o contexto	Alínea a), b)	1	1	1	1	1	1	1
	Organiza os dados	Alínea b)					1	1	
	Reconhece	Alínea b)	1				1	1	1
Matematização e trabalho com o modelo matemático	Identifica variáveis	Alínea b)	1					1	
	Representa o modelo	Alínea b)	1	1	1	1	1	1	1
	Trabalha o modelo	Alínea b), c), d)	1	1	1	1	1	1	1
Interpretação dos resultados e validação	Interpreta resultados	Alínea c), d), e), f)	1	1	1	1	1	1	1
	Compara	Alínea e)				1		1	
	Valida	Alínea c), d), e)							1

(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

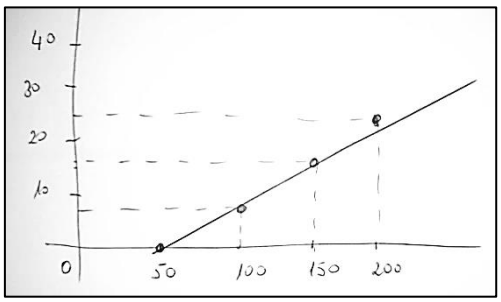
Os vários grupos iniciaram a leitura do texto, à qual consagraram uma média de quinze minutos (GOA21), tendo sido necessária a chamada de atenção por parte da professora para que não dispersassem. Inferiu-se desse momento que o tema da tarefa ia ao encontro dos seus interesses, cujos comentários pressupunham conhecimento extra-matemático, como exemplifica o seguinte excerto:

> Tomás: Tenho um primo que trabalha no Algarve para isto.
> Leonor: E ganha bem?
> Tomás: Acho que sim mas a ideia que tenho é que trabalha noite e dia, principalmente no Verão.
> Inês: Desde que compense o esforço.
> Tomás: Pois, mas tem agora um bebé e acho que é complicado. (GOA21_G4)

Da análise dos registos escritos foram encontradas algumas anotações ($n = 10$) e sublinhados que levam a crer que o texto foi esmiuçado e a informação da tabela interpretada, sendo exemplo a Figura 101 um esboço de um gráfico efetuado pela aluna Lúcia, do Grupo 6.

Figura 101

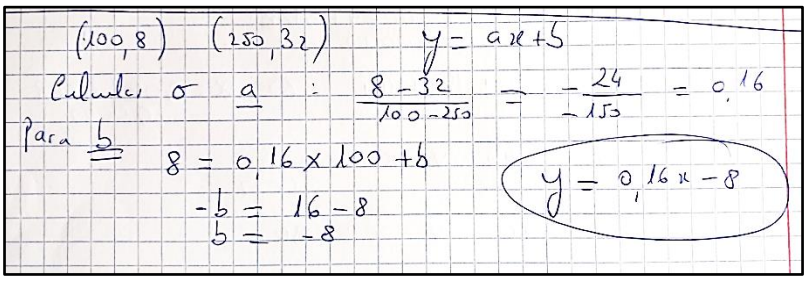
Esboço de um gráfico de Lúcia (G6)



Com base no pressuposto de que a questão a) é um ponto de partida para a construção do modelo representativo do ganho diário do motorista, debruça-se a atenção sobre a atividade que os alunos desenvolveram no sentido de encontrarem o modelo que permita determinar quanto ganha por quilómetro. Poder-se-á acrescentar que as atividades cognitivas que aqui estão implícitas são a simplificação e o reconhecimento de estratégias necessárias à construção do modelo. Assim, é patente nas resoluções que os vários grupos efetuar esta alínea, na medida em que conseguiram modelar os dados da tabela por um modelo linear, do tipo $y = ax + b$. As respostas mostram que os alunos procedem, primeiramente, ao cálculo da razão entre os valores das variáveis, que corresponde ao declive da reta que representa graficamente a função, através de dois pontos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2): $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, e, seguidamente, à determinação do parâmetro b por substituição de uma das coordenadas. Veja-se a resposta de Madalena (Figura 102), do Grupo 5, onde a aluna escolhe os pontos de coordenadas (100,8) e (250,32), efetua o cálculo do parâmetro a, através do quociente da diferença das ordenadas com a diferença das abcissas $a = \frac{8-32}{100-250}$, procedendo, de seguida à determinação do parâmetro b, substituindo na equação $y = 0{,}16x + b$, pelos valores das coordenadas (100, 8): $8 = 0{,}16 \times 100 + b$. Encontrados ambos os parâmetros, apresentou a equação da reta: $y = 0{,}16x - 8$.

Figura 102

Resolução de Madalena (G5)



Das discussões verbais intragrupais, amplia-se a inferência das competências de simplificação e reconhece-se a organização dos dados, como exemplifica o seguinte diálogo:

> Vera: Bem, nós não pusemos aqui o que é o x e o y.
> Joana: Pois, mas dava jeito pensarmos o que significa cada um, senão fica uma confusão.
> Guilherme: Bem, no fundo, as variáveis já estão definidas. Não são as que estão aqui na tabela?
> Vera: É isso. E agora como chegamos ao modelo que dá o que ganha diariamente?
> Guilherme: Eu acho que temos de multiplicar o que ele ganha por quilómetro com o número de quilómetros que faz num dia.
> Joana: Isso tem lógica, mas o que é que isso vai dar? Acho melhor perguntarmos à professora se é esse o caminho. (GOA21_G2)

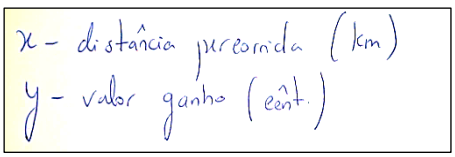
Esta conversação reflete o cuidado dos alunos na identificação das variáveis para a estruturação do problema real, ao que se segue evidência de dificuldade na hora de reconhecerem a estratégia a seguir para descobrirem o modelo que permita determinar o ganho diário do motorista. Depreende-se dos registos escritos que grande parte dos alunos não manifestou, por escrito, esta atividade.

(2) *Matematização e trabalho com o modelo matemático*

No que diz respeito à identificação das variáveis denota-se que todos os alunos as identificaram indutivamente, na medida em que já tinham trabalhado com as mesmas variáveis na alínea anterior. Assim, apenas um dos grupos apresenta nos seus registos, a definição da variável independente como a distância percorrida, em quilómetros, e a variável dependente como o valor ganho, em cêntimos, como indica a Figura 103.

Figura 103

Identificação das variáveis de Raquel (G6)

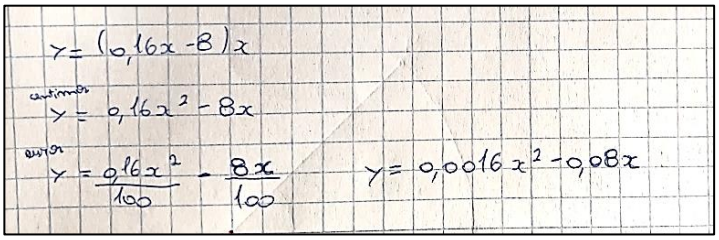


Quanto à formulação do modelo, os sete grupos chegaram, depois da intervenção da professora, à função quadrática como o melhor modelo encontrado para representar o ganho diário do

motorista. Deste modo, figura em grande parte das respostas ($n = 23$), o modelo do tipo $y = ax^2 + bx + c$, sendo que o obtêm multiplicando a equação da reta obtida na questão anterior que indica o valor ganho por quilómetro $y = 0{,}16x - 8$ por x que representa a distância percorrida, chegando ao produto dos polinómios: $y = (0{,}16x - 8)x$. De seguida, como exemplifica a Figura 104, os alunos multiplicaram o polinómio e obtiveram a equação de 2.º grau equivalente: $y = 0{,}16x^2 - 8x$, ao que muitos ($n = 20$) acrescentaram o quociente 100 aos coeficientes a e b para que a equação pudesse representar o ganho diário em euros: $y = 0{,}0016x^2 - 0{,}08x$.

Figura 104

Resolução de Martim (G6)

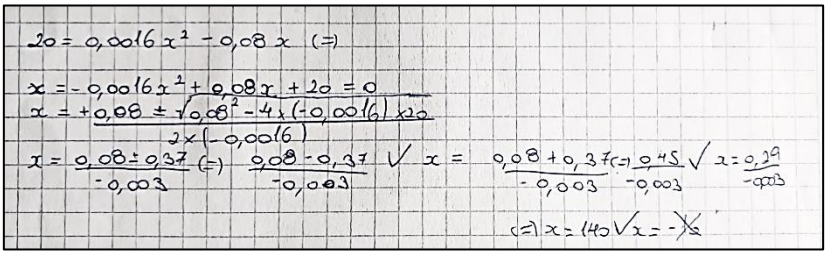


De uma forma geral, os alunos pareceram desembaraçarem-se nesta fase do processo de modelação, trabalhando autonomamente e em conjunto (NCOA_mar2019). De acordo com o Quadro 9, a alínea c) impele ao trabalho com o modelo, na medida em que pergunta "quantos quilómetros precisa percorrer o motorista para ganhar 20 euros?". Os registos evidenciam claramente a prevalência do trabalho algébrico, tendo apresentado apenas um dos grupos (Grupo 5) uma resolução gráfica, que resultou da utilização da calculadora gráfica.

No que diz respeito à resolução algébrica, os alunos primeiramente igualaram a equação a 20: $0{,}0016x^2 - 0{,}08 = 20$ e, de seguida, recorreram à aplicação da fórmula resolvente. Na figura seguinte (Figura 105), é exemplificada essa resolução, em que a aluna coloca a equação na forma canónica (embora cometa um pequeno erro formal) e, posteriormente identifica corretamente os coeficientes a, b e c.

Figura 105

Trabalho matemático de Carolina (G1)

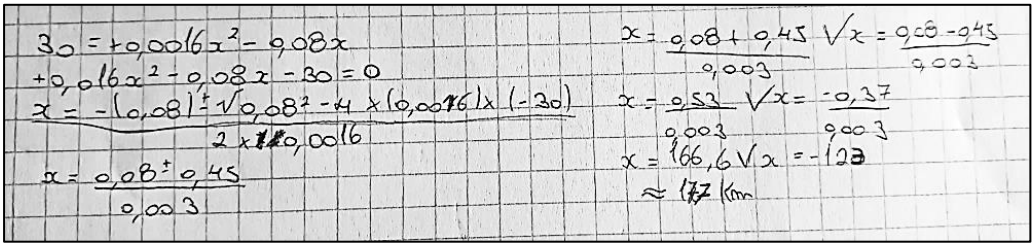


Ao obterem duas soluções, todos os grupos responderam 140 km o que subjaz, já nesta etapa, a competência de criticar os resultados.

Ainda nesta fase da modelação, a questão d) direciona para o seguimento do trabalho com o modelo, aumentando, ligeiramente, a complexidade, na medida em que acrescenta a informação: "*O número médio de quilómetros por viagem é de 5 km e o tempo médio por cada viagem efetuada é de 20 minutos*", solicitando a determinação do número de horas de trabalho diário necessárias para um rendimento diário de 30 euros. Inequivocamente, os alunos voltam a aplicar o modelo e a igualar a equação a 30, trabalhando, novamente, com a fórmula resolvente, como mostra a Figura 106.

Figura 106

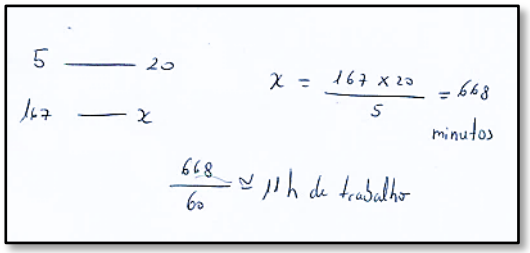
Trabalho matemático de Nídia (G3)



Todos as respostas indicam 167 km como a solução escolhida, eliminando a solução negativa. No entanto, a implicação da informação dada para a resposta final, só é atendida por alguns (n=16), que mostram nos seus registos o seguinte procedimento (Figura 107):

Figura 107

Resolução de Gonçalo (G7)



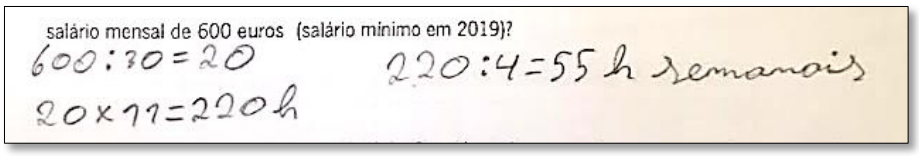
Determinaram o tempo (em minutos) a que correspondiam 167 quilómetros, transferindo-o para o tempo, em horas, que era equivalente a 11 horas de trabalho.

(3) *Interpretação dos resultados e validação do modelo*

Apesar de os alunos terem já demonstrado competências de interpretação do modelo ao longo da resolução da tarefa, partiu-se do pressuposto que o momento mais significativo para que tal sucedesse seria na alínea e), na medida em que, manifestamente, se requisita uma aplicação dos resultados da alínea anterior para estabelecer uma comparação com o salário mínimo do ano 2019. Ora, os registos sugerem uma total mobilização das competências necessárias a esta fase do processo sendo que, praticamente, todos os alunos ($n = 24$) chegaram ao valor de 55 horas semanais, após determinarem o número de horas mensal (Figura 108).

Figura 108

Cálculos efetuados por Ricardo (G1)



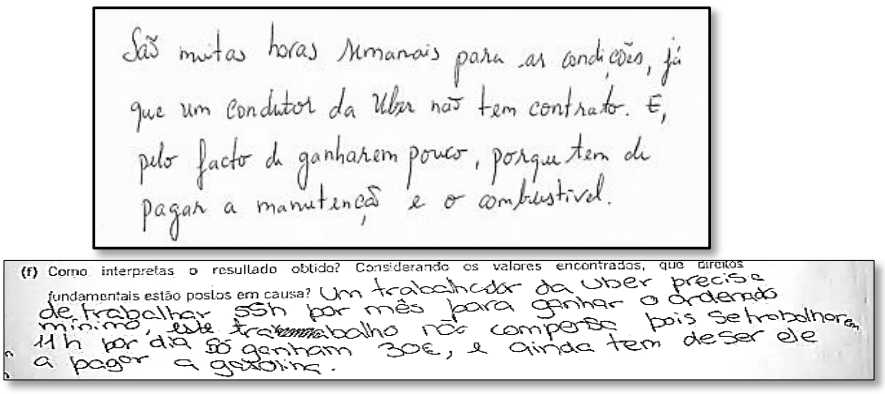
No que concerne à interpretação dos resultados obtidos, os direitos fundamentais postos em causa são, aos olhos deste grupo de estudantes, um motivo para mobilizarem conhecimento extra-matemático. Veja-se o seguinte diálogo estabelecido entre alunos de grupos distintos:

> Tomás: Não tem contrato, não tem direitos fundamentais, é simples!
> Carolina: Também acho, o salário não compensa, com o tempo que os trabalhadores fazem. Não têm contratos, por isso se forem despedidos nem direito ao subsídio têm.
> Diogo: E eu acho que se o carro avariar têm de pagar do bolso deles a avaria.
> Carlos: Já nem se fala que é um trabalho que podem estar sujeitos a perigos, baixo salário para o tempo que conduzem e sem qualquer segurança. (GOA25)

Nos registos escritos é notório ter havido uma argumentação apoiada nos resultados matemáticos obtidos, como indicam as respostas de Tiago e de Maria (Figura109).

Figura 109

Respostas de Tiago (G6) e de Maria (G4)

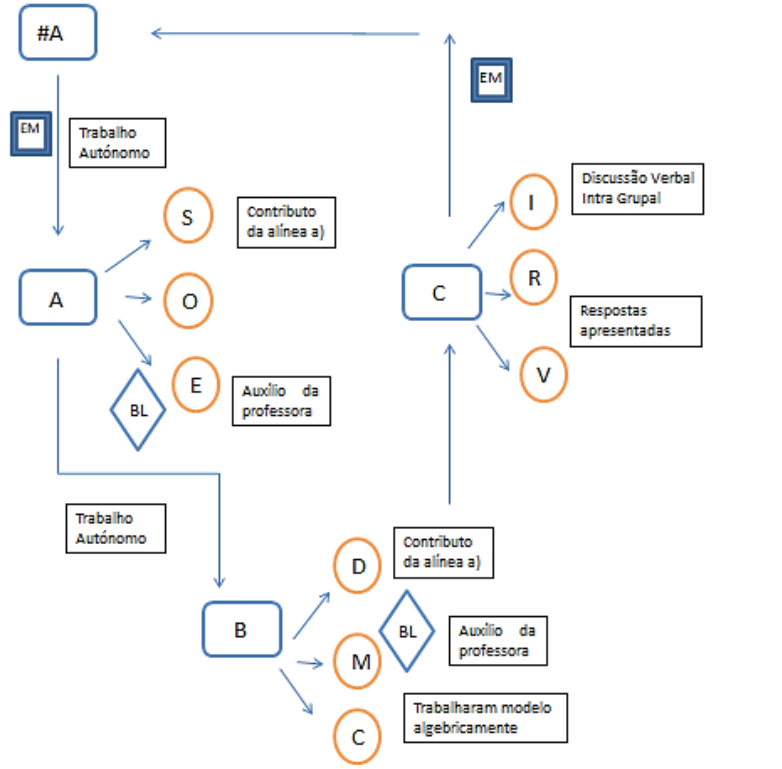


Nas suas respostas, Tiago e Maria estabelecem a correspondência entre o número de horas de trabalho, as condições de trabalho e o respetivo salário.

Na resolução da tarefa 'A uberização do trabalho' identifica-se que as etapas de modelação foram todas concretizadas, embora se tenham detetado alguns bloqueios (Figura 110).

Figura 110

Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'A uberização do trabalho'



A tarefa foi iniciada de forma autónoma, sendo que alguns alunos clarificaram o contexto partindo de experiência pessoais. O primeiro bloqueio surgiu no reconhecimento de estratégias, a que se seguiram a identificação das variáveis e a representação do modelo. Depois de ultrapassadas as dificuldades com o auxílio da professora, os alunos trabalharam o modelo algebricamente. Na última etapa do processo, os alunos conseguiram interpretar e validar os resultados à luz das questões que formuladas.

6.2.2.4. Síntese

Da realização das tarefas de modelação é possível reunir um conjunto de ações protagonizadas pelos alunos que demonstram em que etapa surgiram bloqueios relativos ao processo de modelação (Tabela 39).

Tabela 39

Relação entre as barreiras cognitivas, tipos de representação e dificuldades na mobilização do conhecimento matemático por Tarefa

	Tarefa 1	**Tarefa 2**	**Tarefa 3**
Barreiras cognitivas	Identificar as variáveis Representar o modelo	Trabalhar com o modelo	Reconhecer estratégias Identificar as variáveis Representar o modelo
Tipos de representação	Verbal Numérica Algébrica Gráfica	Verbal Algébrica Gráfica	Verbal Algébrica Gráfica
Dificuldades na mobilização conhec mat	Identificação constante de proporcionalidade	Determinação de Percentagens em Quantidades elevadas	

Relativamente à tarefa 'As mutações do trabalho', as dificuldades manifestadas pelos alunos concentraram-se na etapa de matematização, nomeadamente na identificação das variáveis e no estabelecimento de uma relação entre ambas assim como na definição do modelo, pelo que foram orientados pela professora cuja sugestão levou ao uso a folha de cálculo.

Na tarefa 'A redistribuição da riqueza' a barreira cognitiva detetada foi trabalhar com o modelo, no entanto, pressupõe-se que a dificuldade se fez sentir nesta etapa por erros anteriores cometidos que se repercutiram. Para a ultrapassar, os alunos recorreram à representação gráfica, com a exploração da calculadora gráfica e da folha de cálculo.

Na tarefa 'A uberização do trabalho' verificou-se um maior número de bloqueios, os quais ocorreram na etapa de compreensão, simplificação e estruturação, em específico no reconhecimento de estratégias que os conduziriam ao modelo apropriado. Seguiram-se as dificuldades em identificar formalmente as variáveis e definir o modelo, que foram auxiliadas pela intervenção da professora.

Os tipos de representação utilizados percorreram o domínio verbal, algébrico e gráfico sendo estes manifestados em todas as tarefas, encontrando-se também a representação numérica na primeira tarefa.

A mobilização do conhecimento matemático para resolver as tarefas encontrou-se debilitada em alguns momentos, que corresponderam, por sua vez, a aprendizagens menos recentes temporalmente, como foi o caso do cálculo de percentagens em quantidades elevadas.

6.2.3. A vertente sociocrítica das tarefas de modelação

Tendo Incidindo a presente investigação na exploração de tarefas de modelação matemática baseadas em contextos sociais, considera-se importante deter o olhar nas manifestações do conhecimento reflexivo, bem como nos debates gerados no decorrer das tarefas.

6.2.3.1. A importância da Matemática para interpretar a situação: o conhecimento reflexivo

Esta subsecção percorre cronologicamente a exploração das tarefas com o objetivo de acompanhar a leitura crítica dos dados feita pelos alunos, bem como as competências por eles demonstradas na hora de mobilizarem os resultados matemáticos para argumentarem as suas posições. Assim, na Tabela 40, encontram-se especificadas as questões sociais de cada uma das tarefas suscetíveis desse tipo de reflexão, seja na forma oral ou escrita.

Tabela 40

Relação entre as tarefas de 9.º ano propostas e as questões sociais

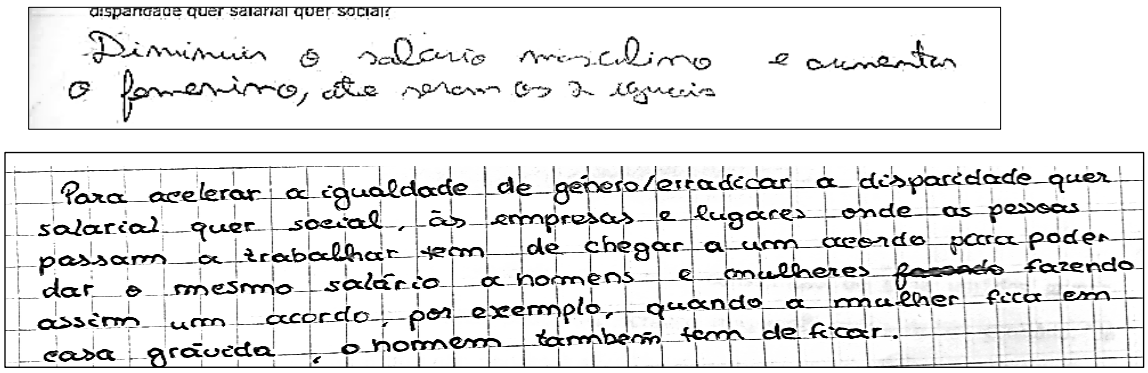
Tarefas	Questões sociais
O trabalho e as Mulheres	Como se pode inverter a desigualdade salarial de género e acelerar a igualdade? Admitindo que as taxas de igualdade económica aumentam todos os anos em igual proporção, prevê quantos anos serão precisos para atingir igualdade de género económica a nível mundial. O que concluis?
O trabalho e a conquista das 8 horas	Como distribuirias o tempo laboral, o tempo para descanso e o tempo de lazer?
As mutações do trabalho	Como interpretas os resultados obtidos? Considerando os valores encontrados, achas que são compatíveis com manutenção da produtividade laboral? Porquê? (2) Qual te parece ser o maior desafio atual em termos de produtividade laboral?

Retratos da vida de trabalho	De acordo com o modelo encontrado quantos anos terá de trabalhar um trabalhador do PD para ganhar o que ganha o seu CEO, num mês?Como interpretas o resultado obtido?
Redistribuição da riqueza	Encontra um modelo de distribuição de forma a que a distribuição obedeça a uma justiça distributiva (quem tem mais, recebe menos). De acordo com este modelo, quanto irá receber o CEO?
A uberização do trabalho	Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, que direitos fundamentais estão postos em causa?

Na tarefa 'O trabalho e as mulheres' é explorado o tema da desigualdade salarial de género. Com essa finalidade, é proposto aos alunos que determinem o dia instituído como Dia da Igualdade Salarial através da percentagem de diferenciação salarial média mensal. Chegados ao resultado pretendia-se que os alunos sugerissem como se poderia inverter esta realidade do panorama global. Do discurso oral destaca-se o relato de um dos grupos (excerto na secção [Narrativas], p.252). Com base numa pesquisa efetuada, exemplificando uma prática desenvolvida num país europeu, a qual consiste na obrigação legislada das empresas com mais de 25 trabalhadores atribuírem iguais salários a todos os trabalhadores com iguais funções. Ainda que esta sugestão não tenha ocorrido de autorreflexão, os alunos envolveram-se, após a obtenção do resultado matemático, numa investigação que apoiasse a erradicação desse mesmo resultado. Dos registos escritos verificaram-se dificuldades em proporem algo que contrariasse o resultado matemático, encontrando-se algumas respostas ($n = 8$) que referem "salários iguais para ambos" ou ainda algumas ($n = 7$) que indicam uma inversão proporcional dos salários, como figuram na respostas de Diogo ou de Carolina (Figura 111) com as quais defendem que as empresas cheguem a um acordo de modo a conseguirem atribuir o mesmo salário a homens e mulheres.

Figura 111

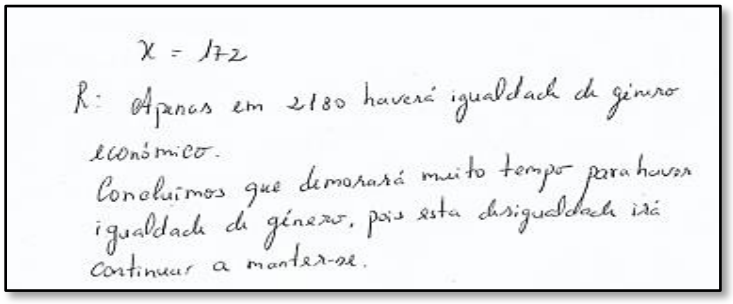
Respostas de Diogo (G3) e de Carolina (G1) na tarefa 'O trabalho e as mulheres



A segunda proposta da tarefa levava a que os alunos discorressem sobre a previsão do número de anos necessários para atingir a igualdade de género económica. O resultado que obtiveram levou-os a concluírem que a desigualdade existente irá manter-se por muito tempo, como indica a resposta de Ricardo (Figura 112).

Figura 112

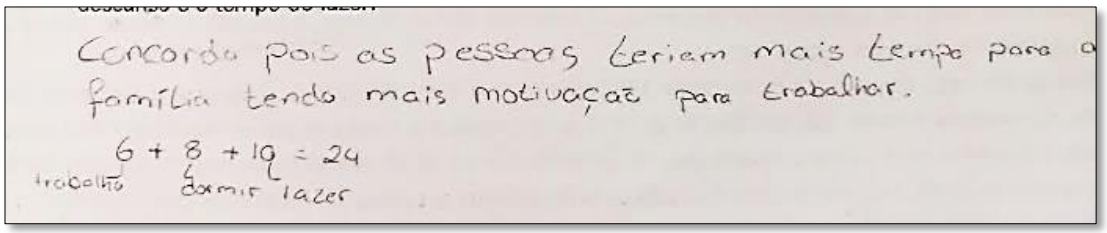
Determinação do ano em que se atingirá a igualdade de género económica por Ricardo (G2) na tarefa 'O trabalho e as mulheres'



O tema trabalhado na Tarefa 'O trabalho e a conquista das 8 horas' esgrime a luta secular pela redução do horário laboral e, nesse sentido, analisa-se a evolução ocorrida desde finais do século XIX. Ao adentrarem-se nessa realidade, os alunos são conduzidos a apresentar uma distribuição do tempo diário consonante com tempo laboral, de descanso e de lazer. Ora, das resoluções ressaltam argumentações maioritariamente descritivas ($n = 18$) onde indicam, por representação simbólica, 6 horas de trabalho, 8 horas de descanso e 10 horas de lazer, como é o caso de Vera (Figura 113):

Figura 113

Distribuição do tempo diário proposto por Vera (G1)

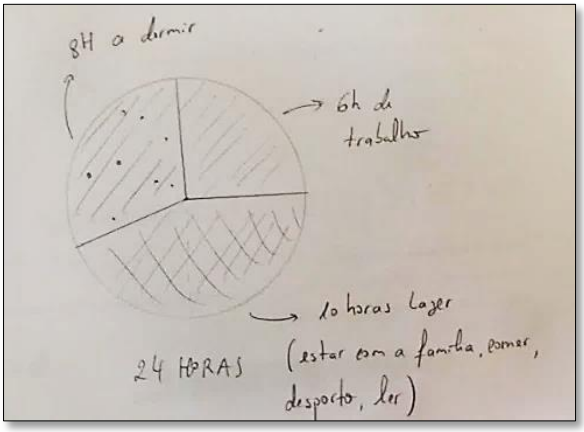


Ainda neste sentido, houve quem acrescentasse que esta distribuição traria maior motivação, inspiração e criatividade à vida das pessoas e das famílias (NCOA_fev2019). Do conjunto de respostas

destaca-se a de Raquel (Figura 114) assim como as dos restantes elementos do Grupo 6 que elaboraram uma representação gráfica para ilustrar a sua fundamentação.

Figura 114

Representação gráfica de Raquel (G6) na Tarefa 'O trabalho e a conquista das 8 horas'



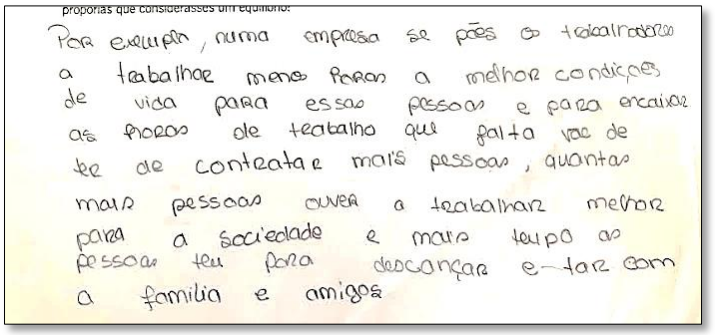
'As mutações do trabalho' foi uma tarefa que permitiu uma conciliação de alguns fatores-chave da presente investigação, a saber: modelação matemática, pensamento crítico, autonomia e colaboração. Após terem trabalhado o modelo e obtido os resultados, os alunos envolveram-se na discussão desses resultados, como indicia a seguinte conversação entre os elementos do Grupo 3:

Nídia:	A mim deu-me para 35 horas, 114 e para 30 horas, 133.
Daniela:	A mim também, é um aumento significativo, quase mais 20 pessoas que teriam trabalho.
Olex:	Mas vocês acham que isso era possível, para a empresa?
Nídia:	Então, é igual... e não te esqueças que se as pessoas estivessem mais felizes, trabalham melhor, é como nós na escola.
Ana:	Sim, é verdade, mais motivadas.
Daniela:	Portanto, claro, é importante lutar por menos horas de trabalho porque isso leva a menos desemprego. Se mais pessoas tiverem poder de compra, isso vai dar mais dinheiro a todas as empresas, é um ciclo. Por isso, claro que é possível. (GOA7_G3)

Nos registos escritos verifica-se que os alunos interligaram as justificações não só aos resultados que obtiveram como também as encadearam com o tema da tarefa anterior, relativamente à redução do número de horas de trabalho, como o caso da resposta de Leonor (Figura 115).

Figura 115

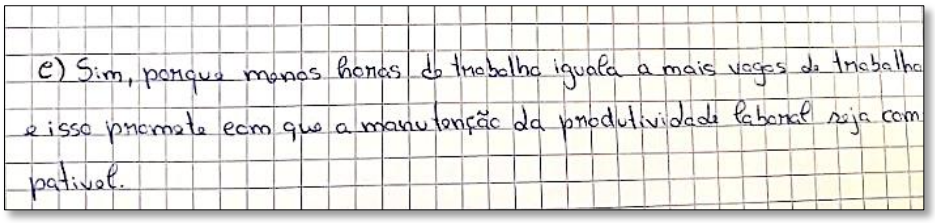
Resposta de Leonor (G4)



De uma maneira geral consideram um grande desafio atual a redução das horas laborais, mas compatibilizam-la de forma inversamente proporcional ao número de pessoas necessárias, apresentado-o como uma justificação positiva, como se intui da resposta de Inês (Figura 116).

Figura 116

Resposta de Inês (G4)

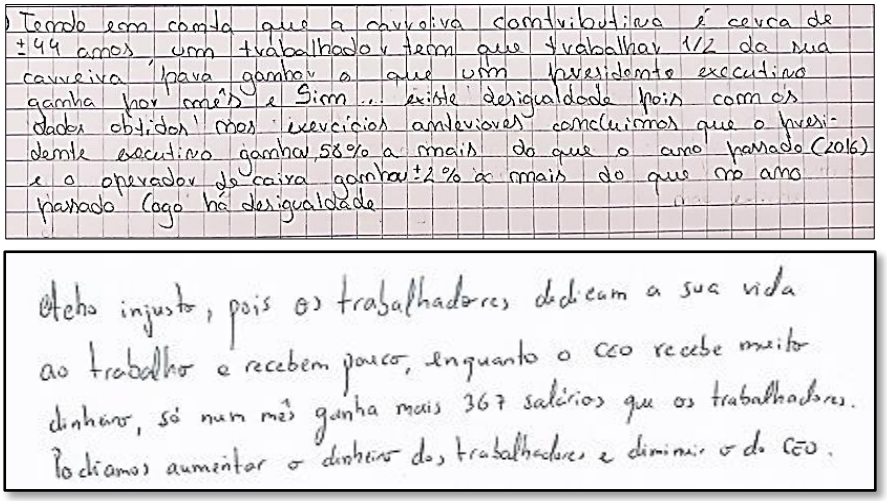


Com a tarefa 'Retratos da vida de trabalho' os alunos trabalharam com um modelo linear e aplicaram-no para comparar salários de trabalhadores no seio de uma empresa, nomeadamente, com o ganho mensal do seu Presidente Executivo. Assim, chegaram ao valor de 270 meses, ou seja, cerca de 22 anos, para se referirem ao número de anos que um trabalhador comum da empresa teria que trabalhar para ganhar o equivalente ao rendimento mensal do Presidente. Para validarem o modelo os alunos discerniram sobre o resultado, sendo que os registos escritos mostram que os alunos revelaram competência crítica no momento de inferir sobre a possível existência de desigualdade social. Veja-se, a título de exemplo, as respostas de dois alunos (Figura 117). No caso de Daniela, a aluna utiliza conhecimento extra-matemático para comparar os resultados, estabelecendo uma relação entre o tempo de uma carreira contributiva e a parte dele que um trabalhador comum teria de trabalhar para atingir o ganho mensal do CEO da empresa, bem como usa as diferenças da percentagem de aumento anual para justificar a existência de desigualdade. No segundo exemplo a aluna invoca a situação ser

injusta na medida em que os valores dos rendimentos mensais do presidente da empresa e dos restantes trabalhadores ser muito elevados, apoiando-se no resultado matemático (embora incorreto) obtido numa alínea anterior.

Figura 117

Reflexões de Daniela (G3) e de Maria (G4) sobre existência de desigualdade na tarefa 'Retratos da vida

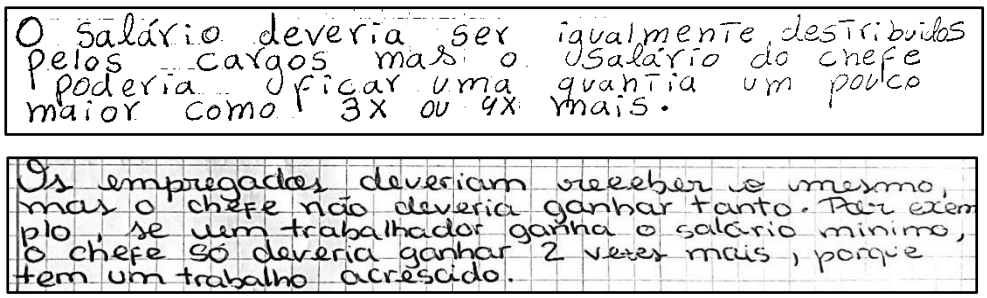


No que diz respeito à tarefa 'Redistribuição da riqueza', a questão reflexiva surge encadeada com a interpretação do modelo, na medida em que os alunos trabalham com um modelo que seria um ensaio de uma possível distribuição de lucros de uma empresa e através do qual obtêm um valor para o valor que seria atribuído ao CEO da empresa.

Em várias respostas ($n = 10$) os alunos declaram: "o patrão deve receber mais que os trabalhadores mas não tanto como hoje em dia", sendo que em algumas ($n = 7$), os alunos apresentam propostas concretas e estabelecem um padrão assente num modelo linear, como é o caso de Miguel e de Nídia que aplicam uma proporcionalidade direta nessa distribuição (Figura 118).

Figura 118

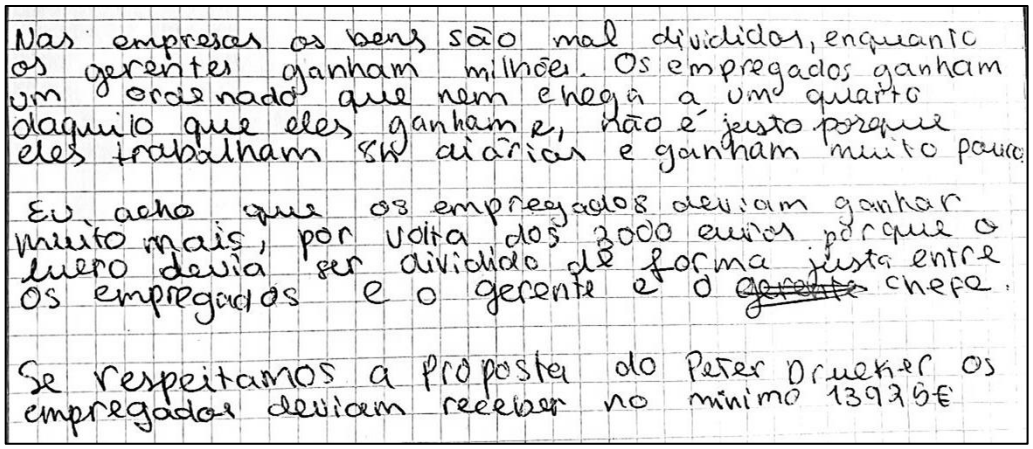
Propostas de Miguel (G5) e de Nídia (G3)



Ainda neste âmbito, um pequeno grupo de alunos (n=5) compara os resultados obtidos, partindo da premissa da realidade atual de baixos salários, principalmente, quando comparados com os lucros e os ganhos do presidente da empresa. Propõem um aumento significativo dos salários médios e mobilizam todos os resultados trabalhados ao longo da tarefa para essa justificação, assumindo a proposta de Peter Drucker explorada na alínea a), como se exemplifica com a seguinte resposta (Figura 119).

Figura 119

Proposta de Margarida (G1)


Nas empresas os bens são mal divididos, enquanto os gerentes ganham milhões. Os empregados ganham um ordenado que nem chega a um quarto daquilo que eles ganham e, não é justo porque eles trabalham 8h diárias e ganham muito pouco.

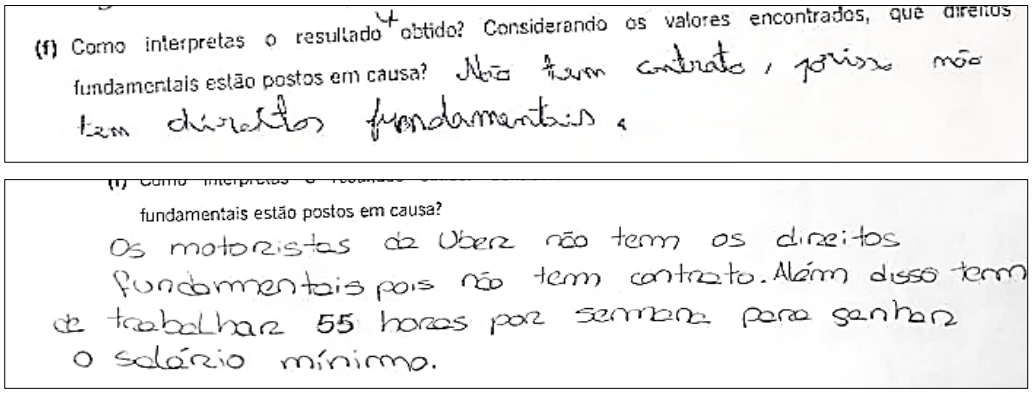
Eu acho que os empregados deviam ganhar muito mais, por volta dos 3000 euros porque o lucro devia ser dividido de forma justa entre os empregados e o gerente e o ~~gerente~~ chefe.

Se respeitamos a proposta do Peter Drucker os empregados deviam receber no mínimo 13925€

Após definirem e trabalharem com dois modelos na tarefa 'A uberização do trabalho', os alunos obtiveram alguns resultados matemáticos condizentes com a temática da tarefa, nomeadamente, que o motorista da Uber terá de trabalhar cerca de 11 horas diárias para ter um ganho médio diário de 30 euros e, portanto, trabalhará 55 horas semanais. Ao refletirem sobre estes resultados, a maioria das respostas ($n = 22$) regista que um dos direitos fundamentais que está posto em causa nestas condições de trabalho é a falta de um contrato de trabalho, como indica Tomás (Figura 76), o que demonstra uma interpretação na qual os alunos conectam os conhecimentos matemáticos ao mundo real, assim como Lourdes se refere ao número de horas semanais (Figura 120) como uma ausência de direitos laborais.

Figura 120

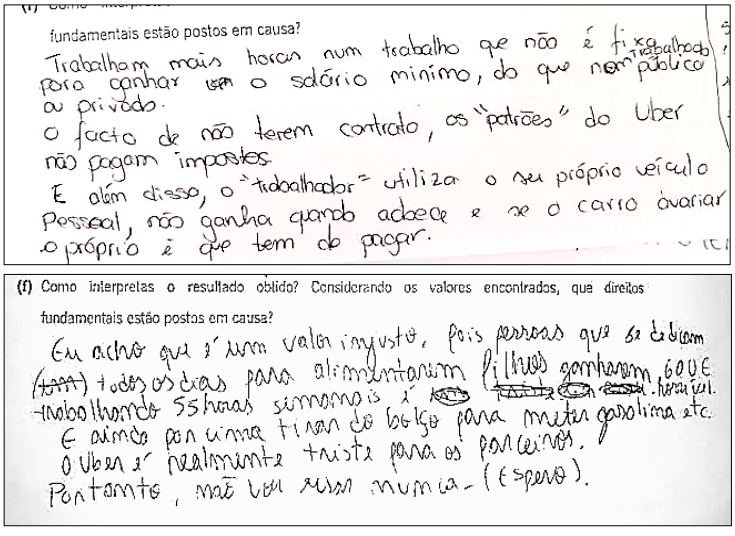
Respostas de Tomás (G4) e de Lúcia (G6) na Tarefa 'A Uberização do Trabalho'



Alguns alunos ($n = 6$) acrescentam exemplos de perda de direitos, referindo-se a um horário que não é fixo, como não têm contrato, não têm qualquer direito laboral e no caso de utilizarem o veículo próprio têm os encargos associados ao mesmo, como indicam as respostas de Madalena e de Diogo (Figura 121), sendo que o aluno Carlos adota uma posição freiriana de reflexão ação, justificando a sua opção em não usar a plataforma.

Figura 121

Respostas de Madalena (G5) e de Carlos (G7)



Em resumo, nas suas respostas os alunos extraem conclusões sobre os direitos fundamentais postos em causa, tanto ao nível laboral como social, através da mobilização do conhecimento reflexivo.

6.2.3.2. Espaços de interação

Uma leitura crítica dos dados pressupõe uma aproximação às vivências pessoais e, num plano mais concreto, numa associação da Matemática como ferramenta necessária para uma compreensão mais profunda dos fenómenos sociais dos quais os alunos fazem parte. Um dos pontos-chave para que tal suceda são as discussões verbais que permitem que os alunos desenvolvam competências de comunicação em simultâneo com a capacidade argumentativa e, portanto, usem a Matemática para essa sustentação. Neste caso da turma de 9.º ano, os alunos demonstraram, na sua globalidade, à vontade quer num debate alargado ao grupo turma, quer numa manifestação mais grupal. Na Tabela 41 registaram-se as intervenções dos alunos que reuniram as características mencionadas.

Tabela 41

Frequência de intervenções efetuadas pelos alunos de 9.º ano

Tarefas	**Registo de Intervenções**	
	GG	**GT**
O trabalho e as Mulheres	12	4
O trabalho e a conquista das 8 horas	10	6
As mutações do trabalho	8	9
Retratos da vida de trabalho	12	6
Redistribuição da riqueza	12	8
A uberização do trabalho	10	8

É de destacar que as intervenções percecionadas foram mais marcadas pela interação com a professora e, portanto, efetuadas num plano mais alargado, principalmente, nas primeiras tarefas e nos momentos em que os alunos revelaram mais dificuldades. Como indicado na Tabela 41, na tarefa 'O trabalho e as mulheres' as interações decorrem essencialmente em grupo turma, sendo que alguns exemplos estão referenciados na secção [Narrativas]. Depreende-se este facto talvez por um certo tateamento e falta de segurança em trabalhar desta forma, a par do tema discutido suscitar interesse pelo debate, como se infere da seguinte conversação iniciada depois de todos os resultados matemáticos obtidos:

Maria: Professora, no caso dos professores existem estas diferenças salariais entre professora e professores homens?

Professora: Não, normalmente, nas profissões que são públicas essa diferença não existe. Existe uma tabela remuneratória que é comum. Nos privados, isso já acontece.

Raquel: Mas também como vimos ontem naquele gráfico os cargos mais superiores, que pedem doutoramentos e assim, são mais facilmente atingidos pelos homens. E isso também existe no público, não é?
Professora: Sim, tens toda a razão.
Raquel: E porquê? Não é justo.
Carolina: Sim, os homens têm mais poder. Olhem para o Parlamento, só se vêm homens.
Madalena: E ao que tudo indica, esta diferença vai continuar por muitos mais anos, 172 anos, se é que algum dia será de facto atingida.
Professora: Não desanimem, por isso é que é importante debatermos e compreendermos estes assuntos.
Ricardo: Concordo plenamente, também cabe a nós mudarmos as mentalidades. (GOA5).

Embora a partir das tarefas 'O trabalho e a conquista das 8 horas' e 'As mutações do trabalho' se tenha registado um aumento dos debates em pequeno grupo (Tabela 41), as discussões verbais mantidas pelo coletivo da turma continuaram a manifestar-se maioritariamente.

Ainda neste sentido, um dos exemplos de diálogo intragrupal foi encadeado pelo Grupo 5 no início da exploração da tarefa 'Retratos da vida de trabalho' e mostra o envolvimento dos alunos perante o tema e o contexto da tarefa, antes mesmo de ser lido pelo grupo turma:

Gonçalo: Parece que a professora fez de propósito, já viram qual é o supermercado?
Matilde: O Pingo Doce, onde trabalham as nossas mães.
Gonçalo: E já leram? A minha mãe conta que muitas vezes nem tem tempo para ir à casa de banho. No outro dia não a puseram na peixaria como diz aqui mas foi para o talho, que ela não gosta nada.
Theresa: E foi obrigada a ir?
Gonçalo: Disseram-lhe que se não fosse não lhe davam a folga no domingo, que ela já tinha pedido por o meu irmão fazer anos, por isso claro que foi.
Matilde: E já leram aqui, do diretor? As nossas mães não aumentaram o salário em 58% de um ano para o outro, de certeza absoluta!
Gonçalo: Era bom! Isso quer dizer que iam ganhar quanto? Se ganham cerca de 600 euros?
Carlos: 58% a mais eram mais 300 e poucos euros, ou seja, ficavam com 900 e tal.
Matilde: Já não era nada mau, mas tem tudo a ver com estes valores do presidente! (GOA14_G7)

Este excerto evidencia um reconhecimento do contexto que parece motivar a partilha de experiências pessoais, e coletivizar o discurso argumentativo, recorrendo a uma captação dos dados matemáticos. No desenvolvimento da tarefa 'Redistribuição da riqueza' existiu um diálogo coletivo final

que espelha a confluência entre o trabalho matemático desenvolvido, o tema da tarefa e a realidade social do meio em que se encontram inseridos:

> Ricardo: Eu acho bem esta proposta do Drucker, onde é que ele foi buscar o 25?
> Professora: Na verdade não faço ideia, é uma questão de pesquisar um pouco sobre isso.
> Ricardo: É que se fizermos 600×25=15000 euros que o diretor da empresa poderia ganhar o que me parece bastante bem já.
> Diogo: Ui, bem bom. Comparado com o que ganham as nossas famílias.
> Vera: Não se esqueçam que este salário era o de chefe, deve ganhar mais.
> Raquel: Mas estes valores que eles ganham são absurdos. E os aumentos que têm? Enquanto os outros funcionários são aumentados em muito poucos euros, 2%, o que é isso em comparação? E porque é que isto acontece professora?
> Professora: Eu não sei, só espero que um dia vocês consigam perceber.
> Gonçalo: O outro modelo também não estaria mal, o dos suíços. Porque 600×14 $dá$ 8400 e isso se calhar já é um valor baixo para o diretor.
> Raquel: Mas é como diz aqui, assim teriam de aumentar muito os que ganham menos. O que seria bom, porque 600 euros não é nada. A minha mãe é isso que ganha e o meu pai nem sempre ganha isso, depende dos meses. (GOA20).

Desta discussão verbal ressalta o relato pessoal de uma das alunas através do qual alvitra uma mudança relativamente aos baixos salários.

Na tarefa 'A Uberização do trabalho' a turma envolveu-se em diálogos quer em grande grupo, quer em grupos de trabalho. Esta ação dialógica incidiu sobre a partilha de algumas experiências pessoais, bem como sobre as conclusões a que chegaram durante e após a realização da tarefa acerca das condições de trabalho dos motoristas da plataforma.

6.4.3.3. Síntese

O cruzamento entre as discussões reflexivas ocorridas durante o processo de modelação e os registos produzidos pelos alunos possibilitou a análise da forma como os mesmos utilizam os resultados matemáticos para argumentarem as suas posições, ao mesmo tempo que estabelecem paralelismos com as próprias experiências sociais.

Neste âmbito, os alunos da turma de 9.º ano demonstraram ser capazes de interpretarem criticamente quer os dados provenientes da situação real, quer inferir de modo reflexivo sobre o impacto do valor matemático obtido. No que diz respeito ao foro interpretativo, as manifestações mais significativas ocorreram na forma verbal, nomeadamente na tarefa 'O trabalho e as mulheres'. Quanto

à inferência crítica dos resultados alcançados, os alunos demonstraram-no nas formas oral e escrita, sendo-o bastante notório nas tarefas 'Retratos da vida de trabalho' e 'A Uberização do trabalho'. Além disso, alguns alunos apresentaram propostas de intervenção, fruto de pesquisas que efetuaram e, posteriormente, adotaram ao contexto.

O espelho das experiências socioculturais dos alunos foi visível nas discussões verbais em que se envolveram. Embora esta verificação tenha sido transversal a todas as tarefas, incidiu especialmente nas tarefas 'Retratos da vida de trabalho' e 'Redistribuição da riqueza'.

6.3. Contributos das tarefas de modelação com recurso a questões de justiça social na aprendizagem de funções

Nesta secção são apresentadas as perspetivas dos alunos da turma de 9.º ano e da professora de Matemática sobre a influência da resolução das tarefas de modelação com foco na justiça social, na aprendizagem de funções.

6.3.1. Perspetivas dos alunos

A auscultação dos alunos sobre os momentos de aprendizagem a que se consagraram com a realização das tarefas de modelação foi aqui registada, com especial relevo para a sua relação com o estudo de funções e para com o contributo do contexto incidir em fenómenos sociais.

Das principais diferenças apontadas pelos alunos relativamente à aprendizagem do tópico de funções através da modelação em comparação com a resolução de exercícios (Tabela 42) foram o interesse ($n = 20$) e a facilidade ($n = 18$). No âmbito do grau de compreensão, os alunos referiram ter sido mais fácil perceber a aplicação dos conteúdos porque tinham mais "formas de resolver os problemas" (EF_ Carolina, G1) e "mostravam outras formas de pensar" (EF_ Vera, G2). Houve ainda quem aludisse ($n = 8$) ao facto destas tarefas terem proporcionado muitos momentos de debate ($n = 8$), como indica a afirmação de Leonor "sinto que, ao confrontarmos as nossas opiniões, fomos obrigados a defender melhor os nossos argumentos e nunca pensei que a Matemática pudesse ajudar tanto a fazer isso" (EF_G4).

Tabela 42

Frequências relativas à aprendizagem por tarefas de modelação matemática

Subcategorias	Tipos de Resposta	Frequência
Principais Diferenças	Interesse	20
	Facilidade	18
	Debate de ideias	8
Trabalho em grupo	Chegarem juntos às conclusões	16
	Confrontarem opiniões	12
Importância das pesquisas	Maior autonomia	10
	Aplicação da Matemática	8

Das vantagens de trabalhar em grupo, uma parte dos alunos ($n = 16$) destaca o chegarem juntos às conclusões bem como o facto do confronto de opiniões, qualificando-o de positivo, como refere Gonçalo: "aprendemos juntos e também aprendemos a esperar e a ter de ouvir outras opiniões" (EF_G7).

No que diz respeito à importância das pesquisas para estabelecer uma ponte entre os conceitos matemáticos e a realidade, muitos alunos salientam que esta dinâmica lhe possibilitou uma maior autonomia, como fica patente nas palavras de Inês e de Matilde: "O facto de sabermos que, a qualquer momento, podíamos ir pesquisar sobre algo que achássemos importante ou desconhecêssemos, deu-nos uma maior liberdade" (EF_G4); "desta forma não tínhamos que estar à espera de perguntar à professora e tínhamos mais poder de decisão" (EF_G7). Houve quem reconhecesse ($n = 8$) que ao pesquisarem sobre assuntos da realidade durante as aulas de Matemática lhes permitiu entender melhor a aplicação da mesma, ideia exemplificada na afirmação de Ricardo: "É mais uma maneira de ver onde se aplica a Matemática e, neste caso, as funções. Por exemplo, gostei de pesquisar sobre os modelos de distribuição da riqueza que nunca tinha ouvido falar e de fazer o nosso trabalho final sobre a discrepância no acesso à água ao nível mundial" (EF_ G2).

Na categoria da aprendizagem de funções por tarefas de modelação matemática (Tabela 43), os alunos começaram por qualificar, de modo quase unânime, de benéfico e, alguns, de modo semelhante, de motivante, justificando-o do seguinte modo: "Compreender a importância das funções e aplicá-las numa situação real foi o que mais me motivou nas tarefas, perceber finalmente o quanto podem ser úteis" (EF_ Matilde, G7).

De igual modo, elencaram três benefícios para a preferência das tarefas de modelação sendo que o primeiro assinalado foi o terem aprendido de forma diferente as funções como regista Tomás: "já tínhamos dado as funções este ano, mas esta maneira foi muito diferente e deu para perceber melhor"

(EF_G4). Houve ainda quem referisse uma maior autonomia no trabalho ($n = 7$) como um contributo das tarefas de modelação para a aprendizagem de funções, reportando-se a uma aprendizagem mais consciente como se infere da frase de Maria: "ao trabalharmos sozinhos também tomámos mais consciência daquilo que estamos a aprender e também conseguimos visualizar para que podem servir ao certo as funções, na nossa vida real, nem parecia que estávamos em Matemática" (EF_G4). Ainda nesta linha, houve quem estendesse a autonomia à resolução da tarefa como se infere do seguinte comentário:"parecia, às vezes, que não havia uma maneira errada de chegar às conclusões e que vários caminhos eram aceitáveis, uma maior liberdade" (EF_ Diogo, G3). Por fim, identificaram como vantagem das tarefas de modelação serem mais interessantes e, com isso, deterem um maior foco na aplicação das funções, como fica latente no discurso de Leonor: "Na tarefa que tivemos de calcular quanto ganhava um motorista de Uber aplicámos a função quadrática e isso faz parte da nossa vida, achei muito importante perceber isso" (EF_G4).

Tabela 43

Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação matemática

Subcategorias	Tipos de Resposta	Frequência
Efeito	Benéfico	25
	Motivante	3
Benefícios das tarefas	Forma diferente de aprender as funções	18
	Autonomia no trabalho	7
	Mais interessante	6
Dificuldades nas etapas do processo	Interpretar a situação	8
	Definir estratégias	4
	Encontrar o modelo	15
	Trabalhar com o modelo	10
	Verificação	6

Um número significativo de alunos ($n = 15$) selecionaram a etapa de encontrar o modelo como o maior obstáculo, como aparentam as seguintes declarações:

> À medida que fomos fazendo cada vez mais as tarefas tornou-se mais fácil, mas no início tivemos muitas dificuldades em perceber qual era a função que íamos aplicar (EF_ Raquel, G6);
>
> O meu grupo teve logo muita dificuldade na tarefa de determinar os anos que faltam até atingir a igualdade. Demorámos muito a perceber como chegar ao modelo de

> previsão, depois dessa voltamos a ter muitas dúvidas na tarefa do motorista e em chegar ao modelo quadrático (EF_ Lúcia, G6);
>
> No que senti mais dificuldade foi na parte de encontrar de modelo porque depois disso era fácil (EF_ Guilherme, G2);
>
> Naquela tarefa do modelo de distribuição percebemos rápido o que era preciso mas depois até chegarmos ao modelo, levámos muito tempo (EF_ Alicia, G1).

Destas afirmações depreende-se que, para estes alunos, a aproximação ao modelo foi uma adversidade que tiveram de enfrentar, não obstante, conseguirem definir estratégias ou reconhecerem relações matemáticas.

De modo semelhante também alguns alunos ($n = 10$) mencionam o trabalho com o modelo como um entrave, na medida em que dizem ter conseguido perceber qual era o modelo a aplicar, no entanto, sentiram dificuldades no momento de aplicar os processos matemáticos, como se intui da descrição feita por Margarida:

> Na tarefa da distribuição dos lucros da empresa pelos trabalhadores percebemos logo que era uma proporcionalidade inversa, mas depois primeiro que conseguíssemos pensar como o íamos fazer, foi imenso tempo e só quando usámos o Excel é que chegámos lá, porque construímos uma tabela (EF_G1).

Um número não despiciendo de alunos (n=8) reconheceu a fase da interpretação da situação como um bloqueio no desenvolvimento das tarefas, contando que desde compreenderem o tema da tarefa, a selecionarem a informação mais importante ou a organizarem os dados precisaram de ajuda, como se deduz do relato seguinte:

> Nas primeiras tarefas o meu grupo sentiu muitas dificuldades em perceber o que era para fazer, tudo era uma novidade e não estávamos habituados. Por exemplo, naquela tarefa do número de horas de trabalho ao longo dos anos, que tivemos que ir buscar os dados à tarefa anterior, não percebemos isso logo" (EF_ Vera, G2).

À semelhança do discurso desta aluna, um dos grupos especificou a atividade de definir estratégias como uma barreira no decorrer da modelação, justificando-o com "nunca tínhamos ouvido falar de modelos ou modelos de previsão e as palavras quando são novas são difíceis, por isso tivemos que nos habituar" (EF_ Raquel, G6), sugerindo um processo de familiarização com a nova dinâmica de trabalho.

Ainda no campo das dificuldades, um grupo de alunos apontou que um dos momentos em que mais sentiu dificuldades foi na hora da validação dos resultados, "como nos tínhamos enganado no

cálculo da percentagem, depois foi uma grande confusão quando precisámos de verificar os resultados" (EF_ Carlos, G7).

Como métodos para ultrapassarem as dificuldades sentidas, os alunos afirmaram ter recorrido à professora para conseguirem avançar nas tarefas, "o tema do Trabalho é interessante, mas havia muitas coisas que nós não sabíamos e, por isso, pedíamos ajuda à professora" (EF_ Ricardo, G2), bem como referem o recurso à calculadora gráfica e à folha de cálculo, como exemplificam Madalena e Theresa: "os gráficos que desenhámos na calculadora, ajudaram-nos a representar melhor a função" (EF_G5); "a partir de certa altura não dispensámos o Excel para fazer colocar os dados numa tabela e fazer os cálculos" (EF_G7).

A resolução das tarefas com base na vida real foi tomada pelos alunos como uma descoberta sobre a utilidade da Matemática nas suas vidas, como prescreve uma das alunas: "quando me perguntarem no futuro para que serve a Matemática, agora já sei. Até já vou saber que tipo de exercícios vou indicar às pessoas para isso, as tarefas de modelação" (EF_ Daniela, G3). Especificamente, quando questionados se as tarefas de modelação os motivaram para a aprendizagem de funções, a maioria dos alunos (n=20) responde afirmativamente. No que diz respeito às tarefas que preferiram e respetiva justificação (Tabela 44), os argumentos dividem-se entre o interesse pela temática (n=16), a visualização da aplicabilidade das funções (n=6) e ainda o carácter transdisciplinar das tarefas, como fica patente nos seguintes exemplos:

> A tarefa que mais gostei de trabalhar e discutir foi sobre a desigualdade salarial de género porque é um tema que me interessa e que se precisa falar (EF_ Maria, G4);
> A que gostei mais foi a do motorista da Uber porque deu para ficar a perceber com funciona essa profissão ao mesmo tempo que aplicamos as funções para resolver algo útil (EF_ Olex, G3);
> Gostei muito da tarefa que tivemos que distribuir os lucros da empresa pelos trabalhadores porque tivemos de traçar um plano e concretizá-lo e correu muito bem (EF_ Ricardo, G2);
> A tarefa que falava da evolução do número de horas de trabalho foi muito interessante, parecia uma aula de História (EF_ Gabriel, G1);
> Na tarefa que tínhamos de ir prever quando se atingiria a igualdade de género deu para ver duas coisas, como se aplicavam as funções e também o número de anos que ainda falta para que isso aconteça (EF_ Margarida, G1);
> Eu gostei da tarefa da redistribuição dos lucros e do motorista da Uber porque deu para ver a aplicação das funções, tanto a de proporcionalidade inversa como a quadrática na vida real (EF_ Carlos, G7).

De uma forma global, as tarefas que os alunos mais privilegiaram foram a tarefa 'O Trabalho e as Mulheres' e a tarefa 'A uberização do trabalho', como indicam os alunos Lúcia e Gonçalo: "Gostei de trabalhar a tarefa sobre a diferença de salários entre homens e mulheres porque é um tema da atualidade" (EF_G6); "ao fazer esta tarefa da Uber percebi que é um trabalho que exige muito esforço e que o salário é contrário a esse esforço, não tinha essa noção" (EF_G7). Neste seguimento, emergem os temas da desigualdade de género e da precariedade laboral como os temas que suscitaram mais interesse.

Tabela 44

Frequências relativas à aprendizagem de funções por tarefas de modelação com base em assuntos de justiça social

Subcategorias	Tipos de Resposta	Frequência
Preferência tarefas	Interesse pela temática social	16
	Aplicação das funções	8
	Carácter interdisciplinar	4
Contributo do debate questões sociais	Motivação para aprendizagem funções	14
	Aplicabilidade das funções	8
	Chegar a conclusões através das funções	5
Espaço à análise das desigualdades	Estar mais atento às diferenças	18
	Alertar e convencer outras pessoas	6
Matemática como ferramenta	Analisar situações de desigualdade	20
	Criar formas de resolução	12

De modo análogo, o facto da aprendizagem de funções ter sido reforçada através de tarefas com foco social pareceu renovar o olhar de alguns alunos para este conteúdo, como esclarecem Ana e Matilde: "Nós já tínhamos dado toda a matéria de funções mas ao falar destes assuntos deu uma visão totalmente diferente, mais clara e interessante" (EF_G3); "Quem me diria a mim que ia descobrir quantas vezes ganhava a mais o presidente do Pingo Doce em comparação com os funcionários? Isto é matemática da vida" (EF_G7).

Com efeito, para além de referirem uma motivação suplementar para aprender funções ($n = 14$) bem como a sua aplicação prática, um pequeno número de alunos ($n = 5$) destacou que com as tarefas de modelação conseguiram chegar a conclusões através das funções, como esclarece a seguinte aluna:

> Quando fizemos exercícios da função quadrática demos, sei lá, trajetórias de bolas e de coisas lançadas ao ar. Aqui aplicámos em algo concreto e importante, que nos ajuda a perceber melhor os assuntos e com os seus resultados a chegar a conclusões. (EF_ Daniela, G3)

Numa perspetiva mais alargada, os alunos discerniram sobre a disciplina de Matemática ser um espaço privilegiado à análise das desigualdades existentes pelo facto de se terem sensibilizado para isso como exemplifica Leonor: "tivemos sorte por fazermos estas tarefas e ver que este pode ser um meio para estarmos mais atentos às diferenças no mundo" (EF_G4). Por sua vez, alguns alunos ($n = 5$) nomeiam estarem mais alerta e serem agora capazes de convencer outros: "quando fizemos o nosso trabalho sobre os incêndios florestais fomos descobrir que a monocultura e a desflorestação que existe, por exemplo, aqui no Alentejo, é muito prejudicial" (EF_ Tomás, G4).

Em jeito conclusivo, os alunos apresentaram a análise de situações de desigualdade ($n = 20$) como o maior contributo que a Matemática lhes forneceu com as aulas de Modelação como elucida Isabel: "alguma vez eu pensei que o CEO do Pingo Doce ganhava num mês o que outros trabalhadores ganham em 20 anos, faz-nos estar mais atentos a estas injustiças" (EF_G5). De igual modo, completam que a Matemática é agora uma ferramenta para criarem resoluções para problemáticas sociais, "ainda outro dia pensei que podíamos criar um modelo justo para redistribuir o dinheiro que andámos a angariar para a viagem de finalistas de acordo com as necessidades de cada um" (EF_Ricardo,G2), ficando patente neste discurso o reflexo das aprendizagens de funções.

6.3.2. Perspetiva da Professora da turma

A constatação da utilização da Matemática como uma ferramenta para entender as questões do mundo real foi, na ótica da professora, a principal vantagem na realização das tarefas de modelação, como sugere a seguinte declaração:

> Estou sempre a dizer-lhes o quão importante é a Matemática nas nossas vidas, mas a verdade é que exemplos dou muito poucos. Mais do que isso, falo-lhes da importância de nos sabermos defender e que saber matemática pode ajudar. Finalmente, esta foi a prova. (EF_Isabel)

Nesta senda, a professora reconhece a grande necessidade de os alunos trabalharem a modelação desde o 7.º ano para que se sintam mais à vontade neste tipo de tarefas, ganharem autonomia e métodos de trabalho, até porque, como confessa:

> A autonomia tinha de ser reforçada, por isso insisti muito para que não desistissem logo. Disse-lhes várias vezes, podem ler e não perceber, mas têm de tentar, porque se me chamarem logo nunca vão conseguir. (EF_Isabel)

Ainda no leque dos principais benefícios destacados pela docente, surge, mais especificamente, o fortalecimento da aprendizagem de funções, na medida em que "deu para perceber que despertou neles um interesse pelas funções que com os exercícios do livro jamais senti" (EF_Isabel). Para além do interesse a professora refere o aumento da compreensão das funções "Claro que há exceções, mas, em geral, parece-me que a turma percebeu muito melhor os conteúdos e, principalmente, para que servem as funções" (EF_Isabel).

Das situações provenientes da dinâmica da aula com a execução das tarefas de modelação, a docente enfatiza o apoio mútuo entre os alunos, o desenvolvimento da cooperação, da autonomia e do pensamento crítico, como exemplificam as suas palavras:

> A grande vantagem foi criar neles a perceção de que nós estamos lá para ajudar e encaminhar, mas eles perceberam que também conseguem chegar às conclusões, debater, partilhar ideias e ser autónomos, uns com os outros. (EF_Isabel)

Quanto às dificuldades que os alunos evidenciaram na aprendizagem de funções através da modelação, a professora realça dois aspetos. O primeiro diz respeito à particularidade da forma de trabalho: "ao pouco à vontade inicial com as tarefas e com os assuntos de modelação e até com os próprios temas, tudo foi novidade" (EF_Isabel), tendo sido uma questão de tempo até começar a dominá-los. O segundo ponto referido pela docente foi relativo ao processo de modelação, nomeadamente, na etapa da matematização, como esclarece com a seguinte declaração:

> Foi difícil os alunos começarem a perceber que tinham de identificar as variáveis e depois encontrar uma forma de as relacionar. Primeiro, tiverem muitas dificuldades em pensar qual seria o modelo mais apropriado e depois chegarem a uma expressão algébrica que traduzisse a situação. (EF_Isabel)

A docente acrescenta que, depois de detetetar estas dificuldades, tentou auxiliar os alunos recorrendo a outras formas de representação dos modelos para além da expressão algébrica.

Ainda na linha dos constrangimentos, a professora confessa ter sentido "algum receio na hora de abordar certos temas, porque sei que existe algum conservadorismo próprio da região". Por esse motivo, tentou que os debates se sustentassem nos dados e nas conclusões que emergissem

unicamente das tarefas: "assim, eu própria não incorria no risco de me exaltar e eles aprendiam a argumentar com a Matemática que era o pretendido" (EF_Isabel).

Do impacto da realização das tarefas de modelação para a avaliação dos alunos, Isabel conta que "claro que se repercutiu na avaliação final dos alunos, bastante até!" (EF_Isabel), registando que o desempenho nas aulas foi contemplado no domínio da avaliação referente às atitudes e valores e que o trabalho de grupo final traduziu-se em 20% do domínio dos conhecimentos.

Do ponto de vista da docente os assuntos de Justiça Social inerentes às tarefas foram do interesse dos alunos, exemplificando-o, primeiramente, por contraste: "agora que estou a continuar com a matéria, parece que não têm interesse e só perguntam se não podem continuar a fazer tarefas de modelação, mas na parte da Geometria é difícil" (EF_Isabel). Adita a este relato que "foram muito importantes estes temas do mundo do trabalho porque lhes deu uma base sólida para se defenderem" (EF_Isabel), reconhecendo que ficou patente a relevância dos assuntos tratados para a compreensão das suas próprias realidades sociais, contando que "ainda hoje o Gonçalo me disse se sente mais atento às horas de trabalho da sua mãe e o cansada que chega do trabalho" (EF_Isabel). Apoiada neste assunto, a professora entabula que a mudança de atitude face à matemática fez-se sentir na confiança que os alunos depositam na própria professora, como se depreende das suas palavras:

> Sempre tive uma boa relação com esta turma, em geral. Mas parece que agora as aulas fluem de forma diferente, sinto que pode ser pelo facto de agora confiarem mais em mim. Porque sempre lhes disse que a matemática é muito importante para perceberem as situações à sua volta. (EF_Isabel).

Emerge desta frase que os alunos ao enaltecerem a relação que detêm com a professora, por consequência, melhoraram a relação com a disciplina de Matemática.

Quanto a desafios futuros na continuidade da integração de tarefas de modelação no ensino de funções Isabel crê que terá de existir uma maior flexibilidade curricular com tudo o que isso contempla: "os professores têm de gerir o currículo com mais liberdade e definirem como lhes convier o tempo que dedicam a cada conteúdo" (EF_Isabel). Além disso, constata que os manuais didáticos poderiam conter alguma tarefa de modelação com assuntos sociais, focando que: "com os inúmeros manuais que existem de tantas editoras e não há um que tenha uma tarefa de modelação com assuntos deste género" (EF_Isabel), salientando que estes dois aspetos ajudariam a introduzir a modelação, na prática de ensino da Matemática do 3.º CEB.

Síntese

Três qualificativos são utilizados pelos alunos da turma de 9.º ano para caracterizarem a aprendizagem do tópico de funções através da modelação: interesse; facilidade; e debate de ideias. Do trabalho em grupo, destacam o chegarem juntos às conclusões, assim como o debate de opiniões e associam à importância das pesquisas o facto de desenvolveram a autonomia.

Quanto ao efeito das tarefas de modelação, os alunos evidenciam o seu efeito benéfico, fundamentando esta visão com uma forma diferente de aprender as funções. Relativamente à maior dificuldade sentida nas etapas do processo de modelação nomearam, principalmente, a etapa de definição do modelo. O grau motivacional para a aprendizagem de funções com as tarefas de modelação verificou-se elevado, colocando o interesse pela temática social como o fator mais relevante para a preferência das tarefas. Este grupo de alunos reconhece como o maior contributo do debate de questões sociais, aumentar a motivação para o estudo de funções, bem como a constatação da aplicabilidade deste tópico matemático.

Da sala de aula ter-se tornado um espaço à análise das desigualdades, os alunos reconhecem que ficaram mais sensíveis às diferenças sociais e que passaram a ver a Matemática como uma maneira de analisar as situações de desigualdade e de criar formas de resolução. Já o enfoque da docente da turma é colocado, precisamente, no reconhecimento, por parte dos alunos, da Matemática como ferramenta à interpretação das questões do mundo real, recomendando a necessidade de introduzir a modelação no 7.º ano e sublinha o efeito transformador das tarefas de modelação face à relação dos alunos com a disciplina.

6.4. Síntese do capítulo

A Escola Secundária Mariana Alcoforado, que alberga a turma de 9.º ano, pertence a uma região marcada pelo défice económico e problemas de cariz social, sendo um panorama que está presente quer nos documentos reguladores da instituição escolar, quer no discurso do representante máximo do órgão de gestão. A missão educativa e a ação diretiva centram-se, portanto, no impulsionamento de uma interação forte entre a escola e a comunidade, com recurso ao desenvolvimento de projetos, tendo em vista a integração de futuros cidadãos na sociedade, alargadas ao caso concreto da disciplina de Matemática.

Para o grupo de professores de Matemática, o programa da disciplina é a principal orientação de trabalho, lecionando-o recorrendo ao manual adotado e ao uso de plataformas digitais, premiando como tarefas os exercícios e problemas. A professora que leciona a turma de 9.º ano reconhece o

currículo como fundamental e com essa premissa opta pela diversidade de materiais pedagógicos, de tarefas e de instrumentos de avaliação. Os professores consideram que as funções são o tópico que os alunos demonstram mais dificuldades e, nesse sentido, admitem ser importante conectar o ensino de funções à realidade, embora os exemplos dados sejam escassos. Ao identificarem a Matemática como responsável por grande parte do insucesso escolar, sugerem a diminuição dos programas, fomentar o gosto pela disciplina, resolver exercícios práticos ou alertar os alunos para as realidades sociais.

Os alunos da turma de 9.º ano mostram-se satisfeitos com a instituição escolar, facto motivado pela presença de um ambiente acolhedor e dinâmico, reconhecendo a necessidade de estudarem como objetivo para um futuro digno. Embora o interesse para com as aulas não seja muito, os alunos admitem ter uma relação de proximidade com a professora de Matemática, sendo que, nestas aulas, preferem a resolução de exercícios. O grupo não vê utilidade dos conteúdos matemáticos nas suas vidas para além do necessário para efetuarem as compras, nem visualiza a importância da Matemática em assuntos de foro social.

As tarefas de modelação foram realizadas após os conteúdos de funções terem sido inteiramente lecionados, desenvolvidas em grupo e orientadas pela professora. Deste trabalho salienta-se, em primeiro lugar, a recetividade e o interesse demonstrados, a capacidade para o trabalho em grupo e a autonomia reveladas. Quanto às atividades decorrentes do processo de modelação, este grupo de alunos mostrou desenvoltura no decorrer da realização das tarefas, recorrendo aos esclarecimentos da professora, ao uso da calculadora gráfica e do programa Excel. As barreiras com que se depararam durante o processo foram, fundamentalmente, o reconhecimento de estratégias; a identificação de variáveis; a definição do modelo; e o trabalho com o modelo.

As interações verbais manifestaram-se ao longo da resolução de todas as tarefas, registando-se uma maior tendência para as discussões entabuladas em grupo turma. Porém, em todas foi visível o domínio do pensamento crítico, assim como se percecionou a abordagem das suas experiências socioculturais.

Do trabalho concretizado, os alunos apontam ter sido uma forma diferente de aprender funções, que aumentou o grau de motivação para o estudo deste conteúdo, pontuando a importância da temática social contida nas tarefas para tal suceder. A par disso, sublinham que o carácter das tarefas de modelação proporcionou a descoberta quer da aplicabilidade da Matemática, quer da sua utilização como base de análise às situações de injustiça. A docente da turma, para além, de confirmar o benefício da realização das tarefas na aprendizagem de funções e a sua influência positiva para a

motivação dos alunos, evidencia a premência desta abordagem de ensino desde o 7.º ano e assinala que deveriam existir mais tarefas de modelação disponíveis com abordagem de questões sociais.

CAPÍTULO 7

DISCUSSÃO DE RESULTADOS

O presente capítulo debruça-se sobre a discussão dos resultados anteriormente apresentados, procedendo a uma transversalidade da informação emergente dos dados recolhidos, efetuando um cruzamento com a literatura e procurando alicerçar os objetivos de investigação. Para chegar aos significados que os alunos atribuem à aprendizagem de funções segundo tarefas de modelação com contextos que analisam situações de justiça social, julga-se importante começar por entender a simbiótica que decorre das experiências e interações vivenciadas pelos alunos, mediada pelos seus contextos. Com esta finalidade, percorrem-se as práticas educativas, quer organizativas, quer pedagógicas, sob a lente de dimensões de justiça, ao que se segue a interpretação dos alunos face ao seu lugar no mundo escolar. Ganha destaque como se estabelece a aprendizagem de funções através da modelação matemática e contextualizada por fenómenos sociais. Por fim, o balanço do trabalho desenvolvido é sustentado pelas dinâmicas valorizadas pelos alunos.

7.1. A equidade das práticas educativas

Para caracterizar as práticas educativas segundo princípios de equidade, referencia-se esta análise à multidimensionalidade de justiça, nas suas vertentes de redistribuição e de reconhecimento. Crê-se importante evidenciar, desde já, o contraste geográfico em que se posicionam as escolas das duas turmas caso e o que daí se pode aferir. A turma caso de 8.º ano pertence a uma escola do barlavento algarvio (Escola Lídia Jorge), situada em meio urbano e litoral, cujo contexto local é associado a uma demografia em crescimento, bem como os seus principais indicadores de atividade económica. Por sua vez, a turma de 9.º ano é relativa a uma escola do Baixo Alentejo (Escola Mariana Alcoforado), com proximidades rurais e zona territorial fortemente marcada pelo desemprego e pela migração sazonal.

7.1.1. Missão escolar, práticas organizacionais e pedagógicas

No campo da missiva advogada pelos respetivos Projetos Educativos encontram-se visões aproximadas quanto à direção a tomar, embora se distingam quanto à forma. A escola Lídia Jorge (LJ) orienta a sua missão no sentido da promoção do sucesso individual dos alunos, com vista à

maximização de um ensino de qualidade que emerja da igualdade de oportunidades e se regule por valores éticos e socialmente responsáveis. Na ótica da escola Mariana Alcoforado (MA) a missão central focaliza-se, mais diretamente, no desenvolvimento de competências e conhecimentos que possibilitem ao aluno transformar-se, no futuro, num adulto que intervenha ativamente na sociedade. Para operacionalizar estes princípios, as escolas traçam objetivos que, na Escola LJ se apoiam numa oferta educativa diferenciada e no reconhecimento da escola enquanto espaço de intervenção social, enquanto na Escola MA são alargados aos resultados escolares, ao desenvolvimento de projetos e ao clima da Escola, sendo que também referenciam a participação na comunidade. Ambas as visões vão ao encontro do propugnado na LBSE embora ressalte, também em ambas, não a preocupação para com o igual acesso de todos os alunos, mas com o efetivo sucesso dos alunos e daí o objetivo em melhorar as taxas de sucesso, meta a partir da qual se infere que essa preocupação não é perante todos os alunos senão para com a respetiva média.

No plano concreto da avaliação externa à disciplina de Matemática os resultados diferem. Na escola relativa ao caso da turma de 8.º ano os resultados obtidos pelos alunos nos exames nacionais conferem o desempenho de 'Muito Bom' no indicador relativo à avaliação externa da escola, sendo que obtiveram o primeiro lugar ao nível concelhio, do respetivo *ranking* nacional. A escola da turma de 9.º ano apenas obteve, no *item* correspondente, uma menção de 'Razoável'. A este respeito, a diretora da escola LJ estabelece a consonância com a missão do Agrupamento, ao mesmo tempo que revela uma visão utilitarista dos resultados — do maior bem para o maior número (Mill, 2023) — e assim justificar que, embora uma parte dos alunos não tenha obtido sucesso, a sua maioria sim. Salvaguarda, no entanto, a importância dos contextos familiares para o desempenho escolar dos alunos. Já no caso da escola MA, apesar dos resultados serem comparativamente inferiores, ainda que positivos, o Diretor reforça a influência do ensino compensatório sobre a forma de coadjuvações e a diferenciação curricular com o programa Fénix.

No que se refere às práticas organizacionais e pedagógicas, ambas as direções partilham da assunção da escola enquanto agente social, distinguindo-se, contudo, na aplicação deste reconhecimento. O exemplo dado pela diretora da escola Lídia Jorge é a intervenção social de carácter externo, com a realização de atividades com alunos da escola para a comunidade exterior à escola. Por sua vez, na escola MA as dinâmicas de foro social são direcionadas, especialmente, para os alunos da escola. Com práticas justificadas pelo princípio de reparação da teoria de justiça de Rawls (2013), a escola intervém para mitigar desigualdades imerecidas, neste caso, de ordem económica e social, recorrendo para isso, principalmente, à implementação de projetos.

Atendendo aos desafios atuais da escola pública, cujas prioridades residem no fim do abandono escolar e no sucesso dos alunos dentro da escolaridade obrigatória, as duas direções revelam serem, também, estes os seus grandes reptos. A diretora da Escola LJ evidencia o heterogéneo *background* familiar dos alunos como principal objetivo a ter em conta, enquanto o diretor da Escola MA justifica esta nova realidade em contraposição com a herança de um darwinismo social, aceite como natural, e também com a clivagem geracional entre professores e alunos.

Quanto às justificações e às repercussões do insucesso a Matemática, os representantes dos órgãos de gestão das escolas têm visões comuns e que partem, em primeiro lugar, do pressuposto familiar em que contextos diferentes vão originar aprendizagens distintas (ED, LJ) ou a referência à diferença de degraus que alguns alunos têm de subir à partida e que, segundo o princípio da reparação, a escola deveria corrigir (ED, MA). Estes pontos de vista encontram-se alinhados com a inquietação de Bourdieu (2008) acerca das limitações do papel da educação em promover a mobilidade social, influenciando mais o capital social.

Em segundo lugar, estão de acordo com a ideia de que as principais dificuldades dos alunos na compreensão, especialmente da Álgebra, estão conectadas com a ausência de conexão à realidade, o que acarreta pouca capacidade de abstração. Em terceiro lugar, concordam que as consequências deste insucesso levam à associação da Matemática como um fator de desigualdade e exclusão escolar. A ideia de Skovsmose (2007) da Matemática como guardiã da porta é sugerida pela diretora da Escola LJ quando denuncia a aceitação cultural existente relativamente ao insucesso à disciplina.

Ambos os diretores apresentam propostas para contrariar este panorama, assumindo como visão comum a reformulação do currículo, tornando-o mais prático, e, nomeadamente, do programa de Matemática, associando-o mais à realidade. Quanto às restantes propostas, a diretora da escola LJ sugere individualizar o ensino da Matemática com as coadjuvações, recorrendo, desta forma, ao ensino compensatório. Já o diretor da escola MA indica a participação em projetos relacionados com a literacia financeira e a criação de um laboratório de Matemática.

7.1.2. Prática docente

A essência da prática pedagógica encontra-se no trabalho docente e é, neste registo, que se verificam as oportunidades mais significativas de redistribuição e de reconhecimento dos princípios de justiça. Começando por analisar as ações dos docentes de ambas as escolas, constata-se que, na hora de planificar, os professores se preocupam com o cumprimento integral no programa e o sentimento de urgência é transversal a todos. Neste quadro de entendimento, a prática letiva fica assim

determinada pela adoção de uma prática curricular centrada nos resultados de acordo com um contexto de *accountability* denunciado por Pacheco (2019). Nos dois casos, a pouca diversificação de estratégias metodológicas é justificada, pelos docentes, pela obrigatoriedade da lecionação de programas extensos alinhada com a realização da prova nacional de 9.º ano. O regime de prestação de contas assinalado por Pacheco (2019) é reconhecido nas metodologias contrarrelógio usadas por estes professores, que admitem reduzir a utilização dos materiais didáticos ao uso do manual e a algumas plataformas digitais; descrevem as suas práticas de ensino com características convergentes com um modelo expositivo; bem como elencam exercícios e problemas como as tarefas utilizadas. A igualização na avaliação dos alunos é referenciada com a aplicação rigorosa dos critérios de avaliação definidos pelo departamento. Considerando este cenário, pressente-se que estes docentes se encontram naquilo que Pacheco (2019) denomina duplo impasse: têm, por um lado, o imperativo da lecionação integral do programa e da preparação para o exame final de ciclo e, por outro, a consciência ética de estarem a privar os alunos de experiências educativas condizentes com pedagogias de inovação, dentro de um paradigma de qualidade de ensino, como reporta a professora Marta:

> Eu gostava mesmo de introduzir ideias novas, mais inovadoras que motivassem mais os alunos e, ao mesmo tempo, fossem segundo a matéria. Sinto que estou sempre a fazer o mesmo e isso não é bom para os alunos. Mas, de facto, parece impossível, nunca tenho tempo para sair da rotina. (EI)

Até porque, se intui que os professores das duas escolas demonstram aquilo que Perrenoud (2001) intitula de "procura-ação pessoal" (p. 66), ou seja, questionam as suas práticas e concretizam tentativas de diferenciação. Este ideia é visível em alguns fragmentos discursivos, sejam eles relacionados com a prática letiva ou com o desempenho de funções subjacentes à profissão, como evidenciado pelas palavras de Paula e Margarida:

> Como diretora de turma, conheço os seus contextos familiares, se tiverem algum problema falam comigo. Mesmo eu, sinto maior preocupação por eles. (E, Paula, Escola LJ)
> Quando reparo que um aluno está com muitas dificuldades e sei que não tem apoio em casa, faço questão de perder o intervalo para lhe conseguir explicar individualmente o que não conseguiu perceber na aula. (E, Margarida, Escola MA)

Com estas informações é percetível que a ação pedagógica das professoras vai muito para além da sala de aula, o que reforça o pressuposto de que a distribuição equitativa de oportunidades concorre, logo à partida, no acesso dos alunos à disciplina através da sua participação e pelas

oportunidades de aprendizagem que proporciona, ainda que esta tendência seja para agir de forma informal.

Na esfera da defendida necessidade de aproximar a Matemática à realidade, por parte dos órgãos de gestão, mapeiam-se as dinâmicas docentes quanto à sua prática de ensino do tópico de funções e ao recurso à modelação matemática. Neste ponto, os professores das duas escolas caracterizam o ensino deste tópico reconhecendo que não difere muito dos restantes, sendo que na escola LJ especificam que exploram o conceito inicial de função por meio de diagramas sagitais e estabelecem relações entre a diversidade representacional e ainda um dos membros do grupo refere trabalho de investigação em grupo. É de salientar que dois docentes afirmam efetuar analogias com a realidade com recurso à leitura de gráficos. Por sua vez, na escola MA os professores descrevem as metodologias utilizadas no ensino de funções elencando tarefas de exploração, variação das funções com o programa GeoGebra, utilização de exercícios com gráficos e tabelas.

A identificação das muitas dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem de funções é transversal aos professores das duas escolas, concordando, por unanimidade, que a manipulação algébrica encabeça a lista das adversidades, seguida da conexão entre representações bem como a transição entre tipos de funções. Na ótica do grupo docente da escola LJ, as dificuldades apresentadas foram agravadas pela implementação das Metas Curriculares. No que diz respeito à forma como associam o ensino de funções com a realidade, em ambas as escolas os exemplos dados são diminutos e canalizados para os que vêm inscritos nos manuais. Quanto à utilização de práticas de modelação, a sua inexistência no 3.º ciclo é longitudinal, ainda que dois professores salientam que usam a modelação no ensino secundário, remetendo para a falta de tempo e a complexidade do assunto. É também intuído por todos os docentes o benefício da integração de tarefas de modelação ainda que não o pratiquem na atualidade, tendo uma das docentes da escola MA manifestado vontade na sua introdução.

A responsabilidade social associada à disciplina de Matemática devido ao insucesso escolar que lhe é atribuído é um fator reconhecido por todos os professores, embora o desmontar das suas causas remeta, também, para a *praxis* docente como o caso de referirem a desconexão da disciplina com a realidade, o que parece derivar num certo paradigma. Para além desta causa, expõem o facto de ser uma disciplina que requer mais esforço e de programas muito extensos. À semelhança das equipas diretivas, mencionam a existência de um estigma social, ou por outras palavras, achar que a Matemática não é para todos, argumento que pode ser aproximado à dissonância intrínseca referida por Matos (2005). A acrescentar, há quem indique o *background* familiar e, nesta senda, impute às

explicações particulares uma das suas consequências, que fomenta as desigualdades (Jurdak, 2016). Como agentes principais do processo educativo e, por inerência, responsáveis de um compromisso ético perante os seus alunos, os professores revelam as práticas que executam para elevar a autoestima dos alunos relativamente à Matemática. Os docentes da escola LJ incutem a difusão da não desistência, aliciando com a promessa de que os conhecimentos matemáticos farão sentido no futuro ou em outras áreas de conhecimento — ressonância intrínseca (Skovsmose & Valero, 2002b) — e sob a premissa de que a aprendizagem matemática requer prática, associado à tentativa de um ensino mais individualizado. Relativamente aos professores da escola MA, especificam as suas medidas para contrariar o insucesso da disciplina com a orientação das aulas para a realização de exercícios práticos, o uso de *softwares* geométricos para motivar através da visualização ou proporcionar momentos experimentais. Num plano mais alargado tentam incutir o gosto pelo saber e diminuir a ansiedade face à Matemática.

No foro da distinção entre ensinar matemática e educar matemática os professores de ambos os casos entoam o mesmo discurso ao opor a mera transmissão de factos reduzindo o ensino à mecanização (Matos, 2005) a um ensino contextualizado e que dele emerja o pensamento crítico. Já as práticas inclusivas e de equidade são manifestadas de uma forma mais individualizada. Enquanto na escola LJ as ações dividem-se entre a adoção de uma diferenciação pedagógica e no reconhecimento dos contextos de cada aluno, na escola MA sobressai uma reflexão mais teórica, argumentando que a equidade tem de ser um ideal partilhado por todos, caso contrário carece de sentido e remetem responsabilidades quer à tutela, quer para uma legislação que contempla, quase exclusivamente, o sucesso.

Por último, é totalmente unânime entre todos os professores que o atual ensino não fornece a ferramenta da matemacia aos alunos (Skovmose, 2011).

7.1.3. As docentes de Matemática das turmas caso

Nas particularidades dos contextos dos dois estudos de caso encontram-se as singularidades próprias de cada uma das respetivas professoras, as quais variam quanto às suas posturas e práticas educativas. Neste âmbito, sintetizam-se algumas das ações que concorrem para este pressuposto e que, por sua vez, evidenciam uma conduta profissional díspar.

No posicionamento face ao processo de planificação, a professora da turma de 8.º ano coloca o objetivo no cumprimento integral do programa, bem como orienta as tarefas escolares seguindo o manual adotado e apoiando-se em plataformas educativas, otimizando, desta forma, a gestão do

tempo. Nesta linha, a docente explora as tarefas do manual e conduz as aulas em consonância com um ritmo dialógico, evitando o método expositivo, mas, ainda assim, admitindo a existência de alguns monólogos que correspondem à explicação dos conteúdos. Este estilo pedagógico sugere o professor como mediador de conteúdos ou como uma abordagem orientada para a instrução (Schukajlow & Blum, 2023). De modo oposto, a professora da turma de 9.º ano deposita o foco no currículo em contraponto ao programa, sobre a forma de uma postura refletida, elencando uma diversidade de materiais e tarefas na base da sua planificação. No plano da ação, coloca o aluno como agente principal, fomentando-lhes uma autonomia real propiciada por um apoio pedagógico individualizado em sala de aula.

O ensino de funções é visto pela professora de 8.º ano como um desafio dentro do domínio do ensino de Álgebra, admitindo como inexistentes práticas de modelação. Por sua vez, a professora de 9.º ano é crítica ao caracterizar o seu ensino de funções, admitindo que tem muita margem de melhoria e revelando que pretende dedicar-se a estudar formas de implementação da modelação, indicando, desde logo, vários contextos reais passíveis de serem modelados. Este interesse é discutido por Fulton et al (2019), que advogam a constituição de uma comunidade de professores-alunos de modelação matemática.

De modo similar, ambas as docente relacionam a disciplina de Matemática com a responsabilidade social que acarreta denunciando como principal agente do insucesso o estereótipo da Matemática não ser para todos, e desmonta-o nas suas práticas tentando refrear a ansiedade face à disciplina.

Por último, e de modo convergente, ambas as docentes demonstram valorizar os contextos dos alunos, distinguindo-se, embora tenuemente, nas atitudes adotadas. A professora de 8.º ano assume uma postura redistributiva na diferenciação pedagógica que aplica, assente numa estratégia na qual dedica mais tempo aos alunos que não têm explicações extraescolares. A docente de 9.º ano, invoca a necessidade em alertar os alunos para as diferentes realidades sociais existentes, praticando-o refletidamente nas suas aulas. As singularidades relativas a estas práxis aproximam-se daquilo que Skovsmose et al. (2023) intitulam de imaginação pedagógica, ou seja, as professoras olham para além do currículo e assumem um papel na mudança das rotinas educativas.

7.2. Significados atribuídos pelos alunos às dinâmicas escolares e às aprendizagens

Uma das formas de contrariar o facto de os "jovens de hoje estarem apanhados por um capitalismo global cada vez mais predatório e pelas visões de capital humano associadas à escola" (Down et al., 2019, p. 443) é serem ouvidas as suas narrativas e deixar espaço para a afirmação das suas identidades. Os dados recolhidos demonstram que no domínio motivacional à frequência escolar, o convívio com os pares é o estímulo principal. Já os motivos que o seguem, diferem nas duas escolas. Um número considerável de alunos da turma de 8.º ano partilha o móbil de conseguir bons resultados encadeado do objetivo de ter um bom futuro, enquanto os alunos de 9.º ano referem o gosto por aulas interativas e práticas, aprenderem um pouco mais e a importância de terem uma rotina. Na leitura destas opiniões, parece indiscutível a universalidade da socialização como motivação. Por sua vez, as restantes afirmações sugerem posturas distintas. De um lado, a importância do mérito com vista à fruição futura, do outro o interesse por aulas estimulantes com foco no presente. Também é dissonante a relação que detêm com a escola, dado que a maioria dos alunos da turma de 8.º ano classifica-a como ambígua especificando que este vínculo se tem desvanecido com o avançar dos anos, transparecendo a ideia de que o interesse pela escola esmoreceu à medida que foram progredindo na escolaridade. Contrários a esta visão posicionam-se os alunos de 9.º ano, que caracterizam o seu vínculo atual com a escola como bom, apresentando os recursos físicos, os projetos escolares, a existência de bons professores como aspetos que o justificam.

Nos fatores de desmotivação volta a existir uma convergência das informações dadas, do que sobressai um olhar exclusivo sobre as práticas educativas, ora de organização, ora pedagógicas. Os alunos de 8.º ano referem como negativo o alargado leque curricular, a longa duração das aulas e a pressão de estudarem muito. A turma de 9.º ano coloca no topo as aulas aborrecidas que justificam com a existência de professores com os quais não desenvolvem uma relação empática e no pouco diálogo que com eles estabelecem.

As razões que levam os alunos a qualificar a sua posição face às disciplinas são transversais aos dois casos, bem como o espectro em que as colocam. Quer a postura seja de preferida ou de menos apelativa, as causas desembocam em dois aspetos: a relação que estabelecem com os professores e o interesse pelos conteúdos. A disciplina de Inglês partilha o facto de ser a disciplina que os alunos têm mais dificuldades, sendo que a Matemática é igualmente destacada, mas somente pelos alunos de 8.º ano. Alegam a falta de domínio dos conteúdos e o seu reflexo nas respetivas avaliações e muitos alunos assumem, com isso, uma perda de interesse gradual após anos de tentativas infrutíferas e, outros, num desligamento total. As expetativas quanto aos seus futuros coincidem na eleição das

áreas de estudo que gostariam de seguir, destacando-se as áreas de Saúde, Engenharia ou Gestão. Paralelamente, depositam nas disciplinas de Matemática, Biologia e Físico-Química uma confiança nutrida pelo desígnio futuro.

As tarefas escolares são resumidamente traduzidas por Sacristán (2013) por serem o conteúdo da prática, preenchendo-se o tempo de aula basicamente de tarefas escolares as quais emergem, no plano alargado, como produtos de exigências curriculares e de intenções docentes. Com efeito, reconhecem-se as tarefas como o elemento organizador da atividade do aluno (Ponte et al., 2015) e, ainda que se acrescente que as tarefas podem ser de ordem diversa, na área disciplinar de Matemática parecem alicerçar-se em apenas exercícios e problemas. Esta constatação provém das respostas dos alunos face às tarefas que lhes são preferenciais na disciplina de Matemática, sendo que o exercício tem primazia face aos problemas, embora esta dicotomia problema/exercício (Ponte et al., 2015) possa ter um carácter tanto complementar quanto disjunto.

No campo específico dos conteúdos matemáticos, as turmas caso posicionam-se de maneira similar. As equações são nomeadas, pelos alunos, tanto por serem o conteúdo matemático que mais os motivou quanto o seu oposto. Os vetores, o teorema de Pitágoras e as inequações também são referidas pelo interesse sentido na sua abordagem. Pelo contrário, as funções, expressões algébricas ou a geometria são referidos como conteúdos onde os alunos tiveram mais dificuldades. Houve ainda quem assinalasse que tem dificuldades em todos os conteúdos, no 8.º ano, e no 9.º ano na resolução de problemas.

A tradição de um pacto social no reflexo das aprendizagens da Matemática no futuro é espelhada nos alunos de 8.º ano, dado que a maioria confere valor à presença da Matemática nos seus futuros independentemente da profissão que desempenharem. Já na turma de 9.º ano os alunos condicionam a importância atribuída à Matemática em função da profissão que tiverem. Nesta senda, de uma forma geral, os alunos associam a utilidade da Matemática a uma vida cronológica distante e, por esse motivo, é difícil indicarem exemplos que não se relacionem ou com a gestão organizativa e económica familiar ou, eventualmente, na aplicação noutras disciplinas. Em sentido inverso, apenas os alunos da turma de 9.º ano conseguiram descrever temáticas de tarefas matemáticas que tratem situações do quotidiano: áreas e perímetros de terrenos; trajetória de uma bola; e descontos e saldos.

Em relação aos conteúdos de funções que são reminiscentes, a maioria dos alunos de 8.º ano aponta a sua ausência, dos restantes mencionam o diagrama sagital e tabelas e gráficos. Quanto à turma de 9.º ano destacam a linguagem de funções e a função afim, mas fundamentalmente a

proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa. Das dificuldades ressalta a expressão algébrica como a grande vulnerabilidade transversal a ambas as turmas.

Nesta multiplicidade de opiniões, os alunos das duas escolas homogeneízam a noção que têm de justiça social, conectando-a como igualdade. Alguns deles, ramificam este princípio para lhe atribuírem os sentidos de igualdade de oportunidades, igualdade de direitos, direitos iguais e um número ainda significativo de alunos define-a pela sua ausência.

Avaliando as perceções dos alunos relativas à forma como são distribuídos os recursos básicos, verifica-se que têm em conta as desigualdades de distribuição existentes no acesso a bens primários como saúde ou educação, mas também referem desigualdades de reconhecimento com base em discriminações de género e identidade ou ainda de participação, invocando a diferenciação do acesso à cultura.

Até que ponto a disciplina de Matemática poderá ser uma alavanca de apoio à perceção dos problemas sociais, ambas as turmas mostram-se resistentes à sua aceitação, designando que essa tarefa está mais a cabo de disciplinas como Português ou Geografia. Dos poucos alunos que adiantam algum exemplo, ilustram com um melhor entendimento dos números, o cálculo de percentagens e a uso da estatística com a análise de gráficos. Por último, os alunos dos dois casos uniformizam a ausência de ligação das funções à interpretação de situações sociais, ainda que alguns revelem interesse em entender números elevados (Frankenstein, 2012) e outros mencionam a leitura de gráficos e a organização de informação como contributos ao estabelecimento de previsões.

7.3. A modelação matemática na aprendizagem de funções

Com o intuito de interpretar as práticas e códigos associados às tarefas de modelação, cria-se a discussão em torno dos processos estabelecidos pelos alunos das duas turmas e as barreiras por eles manifestadas, seguida da análise aos tipos de representação usados bem como foi mobilizado o conhecimento dos conteúdos de funções.

7.3.1. Processos estabelecidos e barreiras cognitivas

No âmbito dos processos estabelecidos na exploração das tarefas de modelação, emergem as atividades percorridas pelos alunos em cada etapa de modelação, ao longo de três tarefas representativas do trabalho desenvolvido por cada uma das turmas. De modo geral, verificou-se que os alunos demonstraram ser capazes de atravessar todos os aspetos do processo de modelação (Blomhøj & Kjeldsen, 2006), importando aqui perceber o raio de ação, isto é, o domínio das situações em que os

alunos são capazes de realizar atividades de modelação (Kaiser & Brand, 2015). Com essa finalidade, é de relembrar que as tarefas de modelação foram trabalhadas de forma distinta nas duas turmas caso, embora haja pontos metodológicos em comum, como o trabalho em grupo e as discussões coletivas em grupo turma.

(1) Compreensão da tarefa, simplificação e estruturação do problema real

Esta fase inicial do processo foi concretizada por ambas as turmas numa oscilação entre trabalho em grupo, trabalho em grupo com a professora e trabalho em grupo turma. Assim, do problema real para a construção do modelo real, entende-se que os alunos mobilizaram a primeira atividade cognitiva necessária para a representação da situação (Ferri, 2006), designada por clarificação do contexto ou compreensão da tarefa. A Tabela 45 sumariza como os alunos das duas turmas conseguiram iniciar o processo de modelação com a interpretação das tarefas.

Tabela 45

Forma de trabalho dos alunos na etapa de compreensão, simplificação e estruturação do problema em cada uma das tarefas

Turmas Caso	Tarefas	Atividades Cognitivas		
		Clarificar o contexto	**Simplificar/organizar**	**Reconhecer estratégias**
8º ano	Previsão Escassez hídrica	Leitura do texto em grupo e trabalho com a professora	Trabalho em grupo, com evidências escritas	Evidência escrita minoritária
	Por que motivo os preços importam?	Leitura do texto em grupo e trabalho autónomo	Trabalho em grupo, com registo escrito	Alguns registos escritos e algumas evidências orais
	Comparação da Pegada Hídrica entre países	Leitura do texto em grupo e trabalho autónomo	Trabalho em grupo, com evidências escritas e orais	Trabalho em grupo, com alguma intervenção da professora
9º ano	As mutações do trabalho	Leitura do texto em grupo e discussão coletiva	Trabalho em grupo, com evidências escritas	Trabalho Intra grupal com evidência escrita e oral; intervenção professora
	A redistribuição da riqueza	Leitura do texto em grupo e trabalho autónomo	Trabalho Intra grupal com evidência maioritariamente escrita	Trabalho Intra grupal com registo escrito e algum registo oral
	A uberização do trabalho	Trabalho em grupo com registos escritos e orais	Trabalho em grupo com registos escritos e orais	Necessária intervenção da professora

Naquilo que foi a primeira tarefa utilizada para descrever as atividades ligadas às diferentes fases do processo de modelação, de cada uma das turmas, entende-se que existiu uma diferença nos resultados evidenciados pelas turmas quanto à compreensão da tarefa. Enquanto na turma de 8.º ano, os alunos necessitaram da ajuda da professora para conceptualizar mentalmente a situação, ou seja, a

situação confusa do mundo real só foi descortinada com a intervenção da professora e, portanto, a mobilização do conhecimento extra-matemático não foi conseguida. Terá contribuído para este facto a complexidade do texto que descrevia a situação, assim como a quantidade de informação contida no mesmo. Já no 9.º ano, os alunos compreenderam a situação, tendo-o demonstrado, essencialmente, na forma oral, estabelecendo várias ligações com o mundo real (Blum, 2015; Niss, 2012), para além das mencionadas no texto da tarefa.

Ainda no decorrer desta etapa e na exploração da primeira tarefa, constata-se que a turma de 8.º ano ao manifestar dificuldades na seleção da informação, repercutiu-as à definição de estratégias. Na turma de 9.º ano, os alunos demonstraram selecionar e organizar os dados, de forma escrita, e ainda terem conseguido delimitar uma estratégia.

No que foi a segunda tarefa utilizada para pormenorizar as etapas do ciclo de modelação, notou-se uma maior convergência das ações protagonizadas por ambas as turmas. Quanto aos alunos de 8.º ano, verifica-se que conseguiram interpretar o contexto, procedendo à sua leitura de forma autónoma e registando os dados que consideraram importantes, tendo existido alguma atividade, embora escassa, de reconhecimento das variáveis. No que diz respeito à turma de 9.º ano, notabilizaram-se os esforços realizados no sentido de interpretarem o contexto da tarefa, dado pressupor uma maior complexidade. De facto, para a construção do modelo real era necessário escrutinar as propostas que lhe antecipavam. Com este repto, a maioria dos alunos da turma conseguiu construir o modelo baseado na realidade ao: i) fazer assunções para o problema e simplificar a situação; ii) reconhecer as quantidades que influenciavam a situação; iii) definir relações entre as quantidades (Maaβ,2006); e iv) estabelecer paralelismo ao mundo real (Ferri, 2018).

No que se considerou ser a terceira tarefa, a convergência das ações, de ambas as turmas, voltou a ser verificada. Nesta vertente, a compreensão do problema e a sua simplificação foi conseguida pelos alunos, de forma mais fluente, quando comparado com a resolução das tarefas anteriores. No 8.º ano, os alunos clarificaram o contexto vinculando a situação com o mundo real e debatendo-a em grupo. Ainda assim, foram manifestadas dificuldades pontuais. Na turma de 9.º ano, os alunos procederam à compreensão e simplificação da tarefa com a leitura e esquematização de alguns dados, tendo-se verificado a associação ao conhecimento extra-matemático com o debate oral em alguns dos grupos. De igual modo, foi convergente a necessidade de auxílio, por parte da professora, para o reconhecimento de estratégias que, no 8.º ano, ocorreu porque muitos alunos não conseguiram estabelecer relações entre as variáveis e, no 9.º ano, a construção do modelo real ficou debilitada pela dificuldade na definição das variáveis e a sua relação.

(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

Na primeira tarefa de análise do processo de modelação os resultados mostraram desempenhos distintos entre as turmas. Se na turma de 8.º ano esta etapa do processo se revelou fragilizada, a turma de 9.º ano realizou esta fase com trabalho autónomo (Tabela 46).

Tabela 46

Forma de trabalho dos alunos na etapa de matematização e trabalho com o modelo

Turmas Caso	Tarefas	Atividades Cognitivas		
		Identificar variáveis	**Definir o modelo**	**Trabalhar com modelo**
8º ano	Previsão escassez hídrica	Evidência minoritária	Auxílio da professora	Algumas evidências escritas
	Por que motivo os preços importam?	Evidência escrita minoritária	Trabalho em grupo com intervenção da professora	Trabalho autónomo
	Comparação da Pegada Hídrica entre países	Sem qualquer evidência	Trabalho autónomo em grupo	Intervenção da professora
9º ano	As mutações do trabalho	Influência pontual da professora e Excel; Trabalho autónomo	Trabalho autónomo; Utilização do Excel	Trabalho autónomo com evidência escrita
	A redistribuição da riqueza	Trabalho autónomo		Trabalho autónomo; Utilização de CG
	A uberização do trabalho	Intervenção da professora		Trabalho em grupo autónomo

Os alunos da turma de 8.º ano, em geral, não identificaram as variáveis e manifestaram dificuldades em matematizar as relações entre as quantidades relevantes. Apenas alguns alunos conseguiram definir o modelo matemático, mas unicamente após a orientação da professora, embora um dos grupos tenha apresentado uma representação numérica válida. O grupo de alunos que definiu algebricamente o modelo utilizou corretamente o conhecimento matemático para resolver o problema. Os restantes alunos usaram, essencialmente, o método de tentativa e erro para encontrar uma resposta ao problema. No 9.º ano, apesar de ter havido uma intervenção estratégica, por parte da professora, que representou uma situação análoga no Excel, a maioria dos alunos conseguiu representar simbolicamente as variáveis e identificar um padrão. Iniciando pela representação verbal do modelo, passaram, a seguir, ao modo algébrico e alguns alunos optaram pela representação gráfica. De forma totalmente autónoma, os alunos trabalharam o modelo, aplicando os conhecimentos sobre função de proporcionalidade inversa.

Na tarefa seguinte, os resultados apresentados por ambas as turmas revelam alguma similaridade. Os alunos de 8.º ano reincidiram na não identificação das variáveis, sendo apenas um

pequeno número que o fez, embora parte da turma tenha registado a relação existente entre as quantidades relevantes. Quanto à passagem do modelo real para o modelo matemático, ainda que alguns alunos tenham pedido a ajuda da professora, grande parte deles conseguiu, por representações distintas — gráfica e algébrica — encontrá-lo. Após encontrado o modelo, os alunos conseguiram trabalhar com ele, aplicando corretamente os seus conhecimentos de função afim, evidenciando-o nas respostas escritas. No que diz respeito à turma de 9.º ano, os produtos originados nesta fase do processo revelaram que os alunos conseguiram matematizar a situação ao identificarem as variáveis com simbologia formal e pressupor a relação de dependência, se bem que tenham cometido um erro no cálculo da constante. Todos os alunos ajustaram o modelo matemático à situação, recorrendo a diferentes representações e, de igual forma, trabalharam-no.

Na última tarefa, a interferência da professora fez-se sentir em ambas as turmas. Na turma de 8.º ano, os alunos voltaram a não representar simbolicamente as variáveis. Na passagem do modelo real para o modelo matemático, alguns alunos recorreram ao método de tentativa e erro, outros alunos representaram algebricamente a situação, descrevendo-a por duas equações de 1.º grau com duas incógnitas. Um grupo de alunos exibiu uma representação gráfica. A grande dificuldade manifestada nesta etapa foi no trabalho com o modelo, na medida em que toda a turma pediu auxílio à professora, que tentou direcioná-los para a resolução de sistemas de equações. No entanto, os resultados escritos evidenciam que os alunos não concretizaram esta ação. À semelhança desta turma, no 9.º ano também se verificaram dificuldades nesta etapa da tarefa. Na hora de registarem, por escrito, as variáveis, os alunos hesitaram na identificação, demonstrando alguma confusão e solicitando a ajuda da professora. O mesmo aconteceu na definição do modelo matemático, uma vez que todos os grupos necessitaram da orientação docente para encontrar o modelo que melhor se ajustava à situação. Apesar disso, após esse momento, os alunos conseguiram mobilizar os seus conhecimentos de função quadrática para trabalharem, maioritariamente, por via algébrica e, em menor número, com recurso à calculadora gráfica (CG), pela representação gráfica.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Na última etapa do processo de modelação, os alunos de 8.º ano evidenciaram algumas dificuldades para interpretar os resultados. Poucos alunos registaram o significado matemático obtido (Tabela 47), não se verificando se conseguiram conectar o resultado ao mundo real. A par disso, a turma de 8.º ano não refletiu criticamente sobre a solução, dado que não se apoiaram neste valor para os argumentos que avançaram na discussão coletiva. Já o panorama da turma de 9.º ano posiciona-se

no seu antípoda, pontuando o trabalho em grupo pelos registos que efetuaram e debatendo coletivamente sobre os resultados obtidos. A conexão que efetuaram com o mundo real foi percecionada pelo diálogo em que a maioria da turma se envolveu, a partir do qual generalizaram as soluções para apresentarem criticamente os seus argumentos. Além disso, os registos escritos mostram que os alunos se apoiaram nos valores encontrados inferir sobre as suas implicações na realidade.

Tabela 47

Forma de trabalho dos alunos na etapa interpretação dos resultados e validação do modelo

Turmas Caso	Tarefas	Atividades Cognitivas	
		Interpretação	**Validação**
8º ano	Previsão Escassez hídrica	Alguma evidência escrita	Alguma evidência oral; discussão coletiva
	Por que motivo os preços importam?	Trabalho Intra grupal com alguma evidência escrita e oral	
	Comparação da Pegada Hídrica entre países	Pouca evidência	Alguma evidência escrita e oral
9º ano	As mutações do trabalho	Trabalho Intra grupal com evidência escrita; Discussão coletiva	
	A redistribuição da riqueza	Trabalho Intra grupal com evidência escrita e oral	Capacidade de questionamento; trabalho com Excel
	A uberização do trabalho	Trabalho Intra grupal com evidência escrita e oral	

Na continuidade da análise dos processos privilegiados pelos alunos ao longo da segunda tarefa de modelação, observa-se que os alunos de 8.º ano, ainda que com pouca evidência, mostraram competências para interpretar os resultados matemáticos visto que partiram dos mesmos para levantarem outras questões relacionadas com a situação do problema, tendo-o sido mais visível na representação verbal do que na escrita. Conjuntamente, é também observável que um pequeno número de alunos registou os seus argumentos tendo comparado e criticado os resultados obtidos. Este cenário não é abrangente à turma de 9.º ano, tendo em vista que, nesta etapa do processo, se verificou uma desenvoltura contrastante com os alunos de 8.º ano, interpretando os valores encontrados na situação real. Todavia, depararam-se com uma adversidade, que consistia num erro de cálculo proveniente das alíneas anteriores, mas que influenciou o resultado final. Com este alerta, os alunos revelaram a competência de validação do modelo ao questionarem o processo posto que as soluções não se adequavam à situação real. Com a ajuda da professora, que optou por demonstrar graficamente os distintos cenários, os alunos corrigiram e readaptaram o modelo, conseguindo obter o resultado correto. Grande parte dos alunos apresentou propostas de um modelo distributivo baseando-se nos valores encontrados.

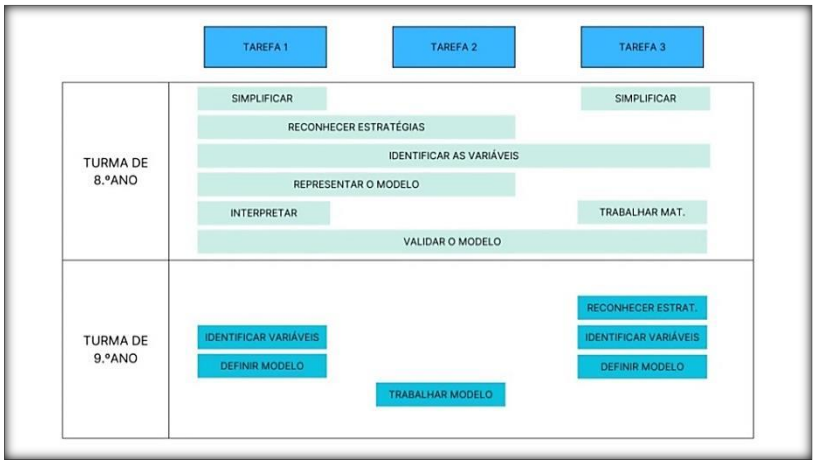
Os dados recolhidos na última tarefa de análise, mostram que os alunos de ambas as turmas agiram distintamente nesta fase do processo de modelação. Quanto aos alunos de 8.º ano, as evidências sobre a ação de interpretação dos resultados restringiram-se às respostas escritas de alguns alunos que utilizaram os valores obtidos, transpondo-os para a situação real e estabeleceram comparações. Outros alunos ainda obtiveram resultados paralelos para sustentarem os argumentos. O momento da validação foi antecipado, na medida em que parte significativa dos alunos recorreu ao método de tentativa e erro para determinar a solução. Quando a encontraram já a haviam testado e, portanto, validado internamente. Na turma de 9.º ano, esta etapa do processo foi assumida de forma autónoma com os dados a mostrarem uma apropriação, pela maioria da turma, da capacidade de interpretação dos resultados, utilizando-os para estabelecerem comparações que retratassem o mundo real, ao mesmo tempo que validavam a solução com reconhecimento crítico e refletiam acerca das suas implicações: "trabalhar 55 horas semanais para conseguirem o ordenado mínimo, sem contrato e ainda terem de pagar as despesas do carro, é desumano" (Matilde, G5, RE).

Em suma, encadeando os resultados obtidos considera-se que as ações consubstanciadas, pelos alunos, poderão ser mapeadas segundo as barreiras cognitivas com que se depararam (Blum & Leiss, 2007; Blum & Ferri, 2014). Com efeito, uma das premissas à recomendação da implementação de tarefas de modelação foi aplicada transversalmente nas duas escolas e extensível à realização de todas as tarefas – a atividade ser desenvolvida em grupo (Ferruzzi & Almeida, 2015). De igual modo se verificou, em ambas as turmas, a estratégia proveniente da literatura de intervenção mínima do professor na orientação dos alunos (Ferri, 2018), embora aplicada em graus distintos.

No que diz respeito aos bloqueios nas etapas de modelação, a figura 122 mostra resultados significativamente diferentes entre as turmas.

Figura 122

Barreiras cognitivas apresentadas na resolução das Tarefas de Modelação



Relativamente à turma de 8.º ano, reconhece-se um maior número de dificuldades emanadas da realização das tarefas de modelação. Conseguem-se destacar ao nível longitudinal a identificação das variáveis e a validação do modelo. A dificuldade na identificação das variáveis foi também dos principais bloqueios apresentados pelos alunos de 9.º ano. Este acontecimento é possivelmente explicável pela assunção de Ferri (2018) ao justificar a existência de rotas de modelação um processo individual de modelação, no qual o aluno pode focar-se numa determinada fase ou ignorar outras. Já a validação do modelo surge evidenciada em todas as tarefas de 8.º ano como uma barreira o que, segundo Blum (2015), habitualmente se apresenta como a subcompetência que os alunos têm mais dificuldade em aplicar, ao que se poderá acrescentar que existirá um *handicap* para retornar os dados obtidos à situação real, aplicando o conhecimento extra-matemático.

Embora em menor número, ainda se evidenciaram, na turma de 8.º ano, a simplificação do problema, o reconhecimento de estratégias e a definição do modelo, indo ao encontro das barreiras referenciadas por Blum e Ferri (2014).

7.3.2. Tipos de representação e mobilização do conhecimento de funções

Entendendo as representações como "as ferramentas que os alunos podem usar para expressar as suas ideias e os procedimentos matemáticos que desenvolvem na resolução de uma tarefa" (Amado, 2022, p. 1), os resultados mostram que os alunos das duas escolas conjugam a sua utilização, tendo percorrido, embora não em simultâneo, os quatro modos de representação habitualmente reconhecidos no domínio da Matemática: verbal; numérico; gráfico; e algébrico (Amado, 2022). De entre estes tipos de representação, a verbal surge, claramente, como transversal a todas as resoluções em que foi possível a respetiva observação. De uma maneira geral, na turma de 8.º ano, os alunos iniciavam a interpretação dos dados recorrendo à representação numérica e, a seguir, tentavam a passagem para o modo algébrico e por vezes gráfico. Intui-se que este procedimento se baseie na experiência que obtêm nas aulas, prática esta que corrobora a ideia de que "no ensino da matemática existe a tradição de apresentar os conceitos e procedimentos matemáticos, o mais rapidamente possível, em linguagem simbólica" (Ponte et al., 2022, p. 39). No modo algébrico e gráfico foram constatadas várias dificuldades e a sua conexão foi, praticamente, inexistente. Os resultados obtidos no 9.º ano foram similares aos referidos, no entanto, como o recurso à tecnologia foi mais notório, conclui-se que a conexão ao modo gráfico auxiliou a representação algébrica.

Na medida em que a capacidade para usar representações múltiplas é, atualmente, uma das seis capacidades matemáticas transversais preconizadas pelas novas 'Aprendizagens Essenciais de

Matemática', alarga-se a discussão à análise da associação entre as representações verbais e simbólicas e às dificuldades manifestadas no conhecimento de funções, utilizando a categorização de Lesh et al. (1987), apresentada por Canavarro et al. (2022), que se apoia em cinco representações: visual; simbólica; verbal; contextual; e física.

Neste seguimento, a mobilização dos conhecimentos matemáticos, nomeadamente, do domínio de funções foi percecionada através da resolução das tarefas de modelação, tendo-se verificado níveis distintos entre as duas turmas. Uma das justificações para esta discrepância poderá ser como foram trabalhadas as tarefas. Como já referido, se no 8.º ano as tarefas foram sendo resolvidas à medida que a professora ia lecionando os conteúdos de funções, no 9.º ano os alunos partiam com a vantagem de terem já sido ensinados os respetivos conteúdos programáticos de funções.

De facto, parece existir um fio condutor de proporcionalidade inversa entre a conexão entre representações e a dificuldade na mobilização dos conhecimentos de funções — quanto menos conexão entre as representações maiores as dificuldades evidenciadas. Exemplo disso encontra-se na primeira tarefa de modelação de 8.º ano analisada, onde os alunos revelaram dificuldades na interpretação da situação, o que implicou uma representação verbal muito debilitada, intuindo-se que na base dessa dificuldade esteve o reconhecimento de quantidades elevadas e do conceito de variável. Se for estendida a análise às barreiras cognitivas presentes no ciclo de modelação, é-se deparado com a primeira de três barreiras cognitivas que corresponde à fase de construção na qual os alunos têm tendência para extrair do problema apenas os números que permitam calcular algo de acordo com algum esquema familiar (Blum & Ferri, 2014).

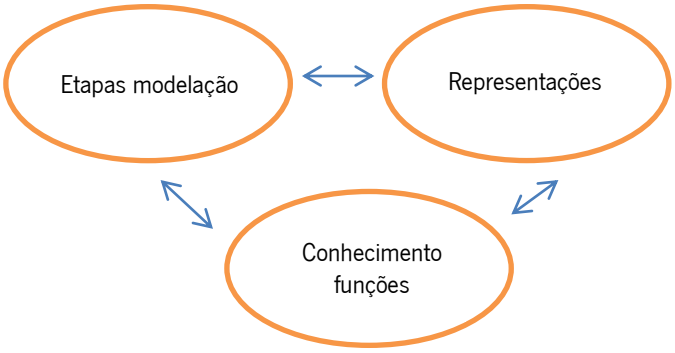
No caso da segunda tarefa analisada na turma de 9.º ano, os alunos convocam na sua resolução as cinco representações mencionadas, tendo-se apoiado na tecnologia (Excel e CG) para efetuar as conexões entre a visual e a simbólica. Na representação simbólica usaram diferentes níveis de sofisticação (Ponte et al., 2022) desde a linguagem natural, à identificação das variáveis, ao uso e manuseamento de expressões algébricas. No campo da representação contextual, os alunos demonstraram dominar a situação real que pretendiam saber como seria possível distribuir uma parte dos lucros de uma empresa pelos respetivos trabalhadores.

O argumento anteriormente utilizado é aqui justificado uma vez que, no caso desta da turma de 9.º ano, constata-se que o número de representações utilizadas pelos alunos na resolução desta tarefa foi inversamente proporcional às dificuldades manifestadas na mobilização do conhecimento matemático e às barreiras nas etapas de modelação.

Concluindo, os dados sugerem haver uma relação direta entre a tríade modelação, representações e mobilização do conhecimento de funções (Figura 123), que, consoante a superação ou não de possíveis barreiras, favorece ou obstaculiza a aprendizagem de qualquer um dos elementos.

Figura 123

Relações entre etapas de modelação, representações e conhecimento de funções



Nesta linha de pensamento, se for considerado que a sofisticação e a complexidade da matemática usada pelos alunos podem ser desenvolvidas mediante tarefas de modelação (Peterson, 2013), então poderá depreender-se que o seu efeito far-se-á sentir na capacidade para utilizar representações múltiplas e estabelecer conexões entre elas, bem como reforçar o conhecimento de funções.

7.4. A aprendizagem matemática contextualizada por fenómenos sociais

A leitura crítica dos dados e resultados matemáticos realizada, pelos alunos, com as tarefas de modelação foi alvo de escrutínio em ambos os casos. Por conseguinte, analisaram-se esses momentos com base em seis tarefas de modelação, perscrutando as respostas dadas às questões de foro, fundamentalmente, social e às interações verbais. Esta análise mostra produtos distintos quando se comparam os dois casos, nomeadamente, nas mobilizações das experiências socioculturais dos alunos e nas discussões reflexivas em que cada grupo de alunos se envolveu. Para reconhecer as idiossincrasias deste olhar, escolheram-se os objetivos pedagógicos de justiça social de Gutstein (2018) – ler o mundo com a Matemática; escrever o mundo com a Matemática; e desenvolver identidades socioculturais positivas, a par dos objetivos matemáticos que incidem tanto sobre a compreensão concetual como na capacidade para deduzir generalizações matemáticas.

Neste sentido, os dados recolhidos mostram que os alunos das duas turmas conseguiram efetuar uma leitura reflexiva das situações propostas, embora em diferente profundidade. A par disso, é reconhecida a aprendizagem matemática cooptada no desenvolvimento do conhecimento crítico. Na turma de 8.º ano, a mobilização dos dados ou resultados matemáticos para desconstruir situações de injustiça foi notada na primeira tarefa ('Distribuição de Água no Planeta'), na concretização da proposta em determinar o montante que cabia aos cinco países que mais gastam em orçamento militar, para doar a um campo de refugiados com o intuito de melhorar as suas condições de acesso à água. Após obterem o resultado, a turma envolveu-se num diálogo coletivo, partindo desse valor para interpretar as desigualdades de distribuição de recursos básicos inerentes à situação e sobre a possível obrigação moral de ajuda, repercutindo-se esta constatação nos registos escritos. É também visível na tarefa 'Água e Desigualdade de género' a utilização da Matemática como ferramenta crítica à argumentação da desigualdade de género, na medida em que os alunos utilizam os dados para retratarem a situação e sustentarem a generalização: "é incrível que a diferença de tempo gasto por uma mulher é quatro vezes superior a um homem" (Ângela, AO12). A relação desigual de acesso aos recursos básicos é, novamente, lida na tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' quando os alunos chegam ao valor de 7200 milhões de pessoas estarão, em 2050, sujeitos a recursos hídricos muito limitados. Estende-se esta reflexão à tarefa 'Por que motivo os preços importam', uma vez que acabam por concluir que a previsão deste cenário é mais suscetível de ocorrer nas regiões do mundo onde "as pessoas mais pobres têm que pagar mais para terem acesso à água potável" (Ana, G1, RE). Esta constatação foi ainda presente na tarefa 'Comparação da Pegada hídrica' onde os alunos revelaram capacidade reflexiva ao conectarem a desigualdade social inerente à situação com o valor obtido: "estamos perante uma desigualdade social porque o consumo indireto de água de Soren é 6 vezes maior que o da Ashna" (Martim, G5, RE).

Na turma de 9.º ano, a compreensão de situações de injustiça foi observada na primeira tarefa ('Trabalhadoras de ontem e de hoje') com a leitura de um gráfico referente à desigualdade salarial de género, a partir do qual vários alunos se posicionam criticamente quanto aos dados, expondo verbalmente os impactos reais, como evidencia a afirmação: "nos quadros superiores a diferença salarial é muito grande, mas, se calhar, para quem ganha menos é ainda mais complicado" (Raquel, AO2), que para além de analisar a situação, questiona os limites dessa desigualdade. Ainda na temática da desigualdade de género, os alunos modelaram e concluíram através do resultado o tempo que demorará até ser atingida a igualdade económica, inferindo sobre as repercussões que esse valor trará às suas vidas. Do mesmo modo, na tarefa 'Retratos da vida de trabalho', a turma de 9.º ano

apresenta várias demonstrações de reflexão crítica. Exemplos disso, encontram-se quer em registos escritos de alguns alunos que detetam a injustiça presente nos salários dos trabalhadores de uma empresa em comparação com o salário do presidente da mesma, após manusearem esses salários através da modelação, quer nas discussões verbais em que se envolvem. É também visível que a ferramenta analítica da leitura crítica foi aplicada, pelos alunos, na tarefa 'A uberização do trabalho' quando obtiveram o valor que traduz o rendimento de um motorista de uma empresa multinacional de transporte privado urbano. Com os resultados, os alunos expressaram, por escrito e em diálogo, que os direitos fundamentais destes trabalhadores são postos em causa, dado que as condições de trabalho, nomeadamente número de horas de trabalho e salário auferido, não estão de acordo com um salário mínimo nacional.

Para atingirem os resultados que levaram os alunos a ler criticamente os dados, conseguem-se identificar os principais focos dos conteúdos de aprendizagem trabalhados. Transversal aos dois níveis de ensino, as capacidades matemáticas (Aprendizagens Essenciais de Matemática, 2021) abrangidas foram a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática e as conexões. Ainda de forma abrangente, o tema da Álgebra foi desenvolvido na medida em que os alunos estabeleceram relações algébricas, usaram o processo de modelação para descrever e fazer previsões bem como aplicaram a variação em situações diversas através das funções (AEM, 2021).

Em particular, no 8.º ano, e relativamente ao tópico de funções, para os alunos chegarem aos resultados aprenderam a reconhecer a função linear como um caso particular da função afim (Tarefa 'Distribuição de água no planeta'); identificar uma função de proporcionalidade direta como uma função linear (Tarefa 'Água e desigualdade de género'); reconhecer a função afim como uma função do tipo $f(x) = ax + b$ (Tarefa 'Previsão da escassez hídrica'). De modo horizontal a todas as tarefas, desenvolveram a capacidade para interpretar e modelar situações da realidade por meio de funções afins e fazer previsões. Ainda neste sentido, os alunos aplicaram os conhecimentos do subtópico de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas na tarefa 'Comparação da Pegada Hídrica'.

Na turma de 9.º ano, os conhecimentos do tópico de funções foram alargados, já que os alunos desenvolveram, para além do já referenciado e nas tarefas acima mencionadas, a capacidade para interpretar e resolver problemas que envolvam uma relação de proporcionalidade inversa; interpretar e modelar situações da vida real que envolvam a proporcionalidade inversa (Tarefa 'Retratos da vida de trabalho'). Relativamente ao subtópico de funções quadráticas da forma $f(x) = x^2$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, os alunos reconheceram que a expressão algébrica de uma função quadrática é um polinómio

de 2.º grau assim como aplicaram funções quadráticas no mundo real (Tarefa 'A uberização do trabalho').

A atividade dos alunos que mostra ter ido ao encontro do objetivo *escrever o mundo com a Matemática* foi mais marcada na turma de 9.º ano. Não obstante esta afirmação, os alunos de 8.º ano constroem algumas propostas convergentes com este objetivo. Na tarefa 'Distribuição real de água' alguns alunos propõem dois tipos de distribuição, uma assente num modelo matemático linear e outro de proporcionalidade inversa, uma vez que os registos indicam uma visão igualitária e outra de carácter redistributivo. Outro exemplo é dado na tarefa 'Comparação da pegada hídrica' quando os alunos discerniram sobre as formas de intervenção na minimização da desigualdade do acesso à água, delegando essa responsabilidade para organizações governamentais e sugerindo a realização de campanhas de fundos ou a aplicação real de um dos exemplos com o qual trabalharam, como invocado pelo seguinte aluno: "uma boa ideia seria utilizarem aquele caso da angariação de dinheiro através dos países que mais gastam com as guerras, com esse dinheiro investia-se em melhorar os acessos à água dos países que precisassem" (Tomás, AO_20). Os produtos originados pelos alunos de 9.º ano em relação às propostas avançadas são múltiplos. O primeiro deles surgiu como resposta a uma questão da tarefa 'O trabalho e as mulheres' sobre a erradicação da desigualdade salarial de género, ao que um conjunto de alunos apresentou, com base em pesquisas efetuadas, uma normativa islandesa que legisla que nas empresas com mais de 25 trabalhadores não existam diferenças salariais entre homens e mulheres. Outro grupo de alunos recorreu ao modelo de proporcionalidade inversa para proceder a uma redistribuição de salários, através da qual defendiam que se devia baixar o salário dos homens e aumentar os das mulheres até equiparar os rendimentos.

Na tarefa 'O trabalho e a conquista das 8 horas', todos os grupos divulgaram as suas propostas quanto à distribuição do tempo diário de trabalho, nas quais se apoiaram de representações matemáticas para o registarem. Nesta senda, na tarefa 'As mutações do trabalho' propuseram que a produtividade laboral fosse compatível com a redução do número de horas de trabalho, conforme a sugestão anterior, o que levaria ao aumento do número de postos de trabalho. Os dados recolhidos mostram que a tarefa 'A redistribuição da riqueza' pareceu ser o cenário ideal para os alunos 'escreverem o mundo com a matemática' (Gutstein, 2006), da qual emergiram reflexões críticas tendo por base os resultados obtidos após a modelação de uma situação que retratava a distribuição de lucros numa empresa. Apoiados nesse trabalho, todos os grupos discorrem sobre formas de distribuições mais justas dos rendimentos dos trabalhadores.

A aproximação às vivências pessoais indica que os alunos desenvolvem *identidades socioculturais positivas,* sendo que as manifestações dadas nesse sentido voltaram a ser mais vincadas na turma de 9.º ano. De facto, da atividade dos alunos de 8.º ano adjudicada às experiências socioculturais percecionaram-se quatro momentos. Os dois primeiros momentos foram protagonizados por interações verbais em pequeno grupo, na exploração da tarefa 'Distribuição real de água'. Um dos grupos compara o tema da escassez de água com a problemática dos incêndios que flagelou, à data da recolha de dados, uma parte do território nacional. Outro dos grupos relaciona a situação da tarefa com as suas práticas diárias e troca de opiniões sobre o impacto da pegada hídrica. O segundo momento, desenrola-se em diálogo coletivo com a participação de grande parte da turma, fomentado pela professora, e através do qual os alunos canalizam a temática da igualdade de género para as sua vivências familiares. O último momento ocorre com uma reflexão verbal em grupo, na resolução da tarefa 'Por que motivo os preços importam', durante a qual os alunos discorrem sobre a desigualdade existente no preço a pagar pelo acesso à água potável. Até chegarem a uma conclusão, o diálogo encetado mostra que estabeleceram um paralelismo com as suas experiências pessoais, neste caso a noção de pobreza *versus* riqueza, para concluírem sobre a natureza da desigualdade social exposta.

No que concerne à turma de 9.º ano, todas as invocações de experiências pessoais ocorreram verbalmente. Durante a tarefa 'O trabalho e as mulheres' foram surgindo várias intervenções individuais caracterizadas pelas suas vivências culturais, que serviam para apoiar os dados inscritos na tarefa. Na tarefa 'As mutações do trabalho' um dos alunos sentiu-se reconhecido na situação descrita na medida em que se relacionou com a região que era retratada. Mas, a maior concentração de manifestações verbais decorreu nas resoluções das tarefas 'Retratos da vida de trabalho' e 'Redistribuição da riqueza'. Na primeira, houve uma identificação maioritária, que pareceu imprimir uma natureza emancipatória ao contexto da tarefa (Skovsmose et al., 2023) e que se traduziu por variadas intervenções. Estas declarações sobre a empresa retratada na tarefa, relacionaram-na com a proximidade territorial, o seu impacto socioeconómico na região, as vivências profissionais de familiares próximos que lá trabalhavam, para nomear algumas. Relativamente à segunda, a prática discursiva dos alunos incidiu na interpretação dos valores obtidos na resolução da tarefa de modelação nas suas próprias realidades, ensaiando um possível aumento dos salários dos seus familiares com a aplicação desses valores. Para concluir, na tarefa 'A uberização do trabalho', apesar da situação real se distanciar da realidade dos alunos no plano geográfico, visto que se focava nas condições de trabalho de um trabalhador de transporte urbano, os alunos contextualizaram-na a partir de experiências

pessoais. Para isso, elencaram ora as suas vivências cinematográficas, ora as realidades de amigos ou familiares.

Em suma, a consciência sociopolítica demonstrada, especialmente na turma de 9.º ano, permitiu aos alunos analisarem criticamente os assuntos sociais retratados nas tarefas (Gutiérrez, 2018), vinculando-os através da Matemática e usando, em alguns momentos, uma desconstrução da cultura dominante (Gutstein, 2018).

7.5. Dinâmicas valorizadas pelos alunos

Os contributos de um cenário de aprendizagem composto por tarefas de modelação baseadas em fenómenos sociais, referidos pelos alunos, focaram-se em três conjuntos: a aprendizagem por tarefas de modelação; a aprendizagem de funções por tarefas de modelação; e a aprendizagem de funções com tarefas de modelação com base em assuntos de justiça social.

Infere-se dos resultados que o interesse, a facilidade e a aproximação à realidade foram as características das tarefas de modelação que os estudantes mais premiaram em ambos os casos. A ajuda mútua na compreensão das situações e na procura de estratégias, o debate de ideias e o chegar juntos às conclusões são reconhecidos pelos alunos como os grandes benefícios das atividades terem-se desenvolvido em grupo, o que vai ao encontro das implicações do ensino de modelação sugeridas por Ferri e Blum (2013). O reflexo da importância das pesquisas como estratégia para estabelecer uma ponte entre os conteúdos matemáticos e a realidade foi o desenvolvimento da autonomia, o que também reforça o que se encontra destacado pela literatura (Ferri, 2018; Schukajlow & Blum, 2023), que sugere na realização das tarefas uma independência máxima dos alunos equilibrada por uma orientação mínima do professor.

Mais pormenorizadamente, as duas turmas salientaram o benefício do estudo de funções através das tarefas de modelação, sobressaindo quatro argumentos: uma forma diferente de aprender as funções; ajuda no entendimento dos conceitos; uma aplicação visível das funções em situações do quotidiano; e uma maior autonomia.

No que diz respeito às barreiras sentidas durante o processo de modelação, de uma forma transversal os alunos destacaram quatro dificuldades *major*: encontrar o modelo; trabalhar com o modelo; interpretar a situação e definir estratégias, sendo que as duas primeiras são as mais incidentes. Como meio para ultrapassarem estes bloqueios, os alunos afirmaram terem-se socorrido na ajuda da professora e dos elementos do grupo, bem como os alunos de 9.º ano que referiram o apoio da calculadora gráfica e da folha de cálculo.

O contributo da resolução das tarefas com base na vida real foi, garantidamente, uma motivação para o estudo de funções e descrito pelos alunos dos dois casos como uma descoberta da utilidade da Matemática nas suas vidas. Desta ideia, parece surgir uma possível resposta à interrogação 'para que é que isto serve?' (Gutstein & Peterson, 2013) ou, de forma similar, frisaram a relevância do contexto social como o maior estímulo.

A par disso, ainda se pronunciaram acerca da influência do debate de fenómenos sociais como o de desenvolverem uma maior capacidade na associação dos conteúdos matemáticos, neste caso de funções, à realidade, assim como, de modo inverso, um incremento no interesse para estudar funções.

Neste sentido, a maioria dos alunos das duas turmas edificou a imagem das aulas de Matemática poderem ser um espaço privilegiado à análise das desigualdades existentes, tal como reconheceu que a Matemática pode ser uma ferramenta de interpretação de situações de injustiça, correspondendo à premissa da Matemática para a justiça social que assenta em criar consciência sociopolítica (Gutiérrez et al., 2024). No caso da turma de 9.º ano, a Matemática estabeleceu-se como um dispositivo de ação que contribui para a resolução de problemáticas sociais, alimentando o princípio de o ensino ser veículo para a emancipação e mudança social (Gutstein, 2012).

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

A sistematização dos principais resultados sobre o contributo da modelação matemática e da justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3.º CEB impele ao diálogo entre a teoria e a *empiria*, procurando responder aos objetivos delineados. Neste percurso, a conjugação de certos fatores contextuais, educativos e sociais abriu caminho para a análise da forma como os alunos mobilizaram os conhecimentos matemático, extra-matemático e reflexivo, identificados na exploração de tarefas de modelação. Assim, este capítulo inicia-se com uma breve recapitulação das principais linhas orientadoras da investigação, à qual se seguem as conclusões alcançadas. Nas considerações finais assinalam-se os contributos do estudo. Por último, explanam-se as limitações do estudo e as possibilidades que deixa em aberto.

8.1. Síntese do estudo

Dotar a educação matemática de mecanismos que permitam reforçar a sua identidade ética é um princípio transversal às páginas deste texto. O duplo desafio de colocar a Matemática quer como uma ferramenta disponível ao cidadão comum para que, com ela, seja capaz de entender e agir sobre as desigualdades sociais com que se depara; quer de configurar a Matemática de forma a fortalecer a sua compreensão e, com isso, ajudar a reduzir o efeito segregativo que causa, não deveria ser uma utopia. Deste modo, procurou-se revestir estas duas premissas de um significado concreto, encontrando no par formado por modelação e funções um binómio encorajador. O ajustamento dado pela modelação matemática encontra-se, precisamente, por ser um processo de transição entre o mundo real e a Matemática, em ambas as direções (Ferri & Blum, 2013). Por sua vez, o tópico de funções de 3.º CEB abre caminho à sua concretização curricular, com especial interesse por ser um tópico em que os alunos revelam dificuldades, desde o seu conceito, à utilização da linguagem algébrica, às distintas representações, para referir algumas (Duval, 2006; Ponte, 2006a; Trujillo et al., 2023). Para clarificar o par enunciado, mencionam-se dois aforismos que o apoiam: i) a modelação matemática apresenta-se como "uma capacidade essencial para tentar responder aos desafios dos fenómenos disruptivos e para uma cidadania informada e participativa" (Siller et al., 2024); ii) o processo de aprendizagem tem uma relação elevada com a autoestima (Perrenoud, 2001), cujo valor é um bem básico (Rawl, 2013), o que faz com que uma instituição que pretende ser justa tem o dever

de criar condições para que todos os cidadãos se possam respeitar a si próprios, de acordo com a lei universal de Kant (2011). E, esta combinação aforística permite justificar outra premissa deste trabalho: c) conseguir integrar, nas salas de aula, a modelação matemática, especialmente cujos contextos incidam sobre fenómenos sociais, que permita a análise crítica dos mesmos, com o intuito de contribuir para uma escola justa, no esteio de uma ética consequencialista (Bentham, 2018; Mill, 2023).

Por tudo o precedido, o objetivo geral deste estudo consiste em averiguar o contributo da modelação matemática e da justiça social na aprendizagem de funções de alunos do 3.º CEB. Para o seu enquadramento conjugaram-se referenciais teóricos que combinam uma educação matemática emancipatória, orientada por conceções axiológicas de justiça e modelação matemática, em particular, cujos contextos se baseiem em factos da sociedade. Na procura de concretizar este objetivo, delinearam-se os seguintes objetivos específicos:

(1) Enquadrar as expetativas dos alunos para a aprendizagem de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos sociais, face à cultura da escola;
(2) Identificar as atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, na aprendizagem de funções;
(3) Verificar como os alunos valorizam as tarefas de modelação contextualizadas por situações de justiça social na aprendizagem de funções.

A ordenação destes três objetivos específicos tem implicações naquilo que se pensa que poderá ser o ponto forte deste estudo. Ao investigar a seguinte sequência (1) → (2) → (3), ou dito de outra forma: *Contexto [Que justiça?] → Modelação matemática de* fe*nómenos sociais → Entendimentos sobre questões sociais*, leva a acreditar que é possível contribuir para o seu inverso: *Aplicação de funções em questões sociais → Aumenta o interesse pelas funções [Matemática] → Diminuição da exclusão escolar [Justiça].* Esta ideia resulta da informação obtida em duas turmas de 3.º ciclo de ensino básico, uma turma de 8.º ano e uma turma de 9.º ano, provenientes de duas escolas sociodemograficamente distintas, procurando reconhecer, em primeiro lugar, a predisposição dos alunos para uma aprendizagem de funções contextualizada por factos do mundo real, sujeitos à influência de uma multiplicidade de múltiplos fatores. De seguida, procurou-se percecionar as atividades que os alunos criaram com a resolução das tarefas de modelação, circunstanciadas a questões sociais e o seu posicionamento perante as dinâmicas em que se envolveram.

8.2. Conclusões do estudo

Nesta secção são delineadas as principais conclusões da investigação em função dos objetivos formulados e da informação recolhida.

8.2.1. Enquadrar as expetativas dos alunos para a aprendizagem de funções através de tarefas de modelação sobre fenómenos sociais, face à cultura da escola

Para viabilizar a interpretação das oportunidades de aprendizagem da matemática dadas aos alunos é necessário compreender como são moldadas pelos seus contextos educativo e cultural, "onde diferentes práticas matemáticas são reunidas à medida que o ensino e a aprendizagem são realizados" (Valero, 2023, p. 545). Escolheu-se para esse fim os principais eixos de ação escolares e as suas linhas orientadoras, as práticas educativas desenvolvidas ao nível organizacional e pedagógico pelos seus dirigentes, a prática pedagógica de docentes de Matemática e, em particular, das respetivas professoras de Matemática das turmas que participaram neste estudo.

Principais interesses e aprendizagens escolares dos alunos. A sociabilidade como fator de motivação escolar sobressai, indiscutivelmente, do discurso dos estudantes. Os dados empíricos mostram que o espaço de identidade escolar dos alunos é, marcadamente, de matriz social, sendo o convívio com os pares o protagonista relatado pela maioria dos alunos. Por outro lado, nas razões que o seguem, as opiniões divergem. Os alunos da turma de 8.º ano consideram que a frequência escolar deverá estar associada a conseguirem bons resultados, bem como servirá para terem um bom futuro. Estes alunos definem a relação com a escola como ambígua, descrevendo que o interesse para com ela diminuiu com o passar dos anos. Porém, esta não é a visão veiculada pela turma de 9.º ano, uma vez que, a seguir às relações de amizade, argumentam como fatores de motivação à presença na escola a existência de aulas interativas e práticas, bem como o aprenderem mais. Esta turma mostra-se satisfeita com a escola, destacando para esse posicionamento os recursos físicos e humanos e a participação num conjunto alargado de projetos. Quanto aos elementos de desmotivação referidos, o direcionamento é homogéneo, ainda que para uns se dirijam às práticas curriculares e para outros às pedagógicas. Os alunos de 8.º ano lamentam-se de terem muitas disciplinas e da duração diária de cada uma, bem como pelo dever de estudarem muito. Quanto à turma de 9.º ano, os alunos referem como pontos negativos a existência de aulas pouco interessantes e o escasso diálogo estabelecido com alguns professores.

Dos motivos que elegem para a preferência das disciplinas, os alunos dão primazia, em primeiro lugar, à relação que estabelecem com os professores, seguido do grau de interesse pelos conteúdos. De modo inverso, selecionam as disciplinas menos apelativas. As disciplinas de Inglês e Matemática surgem transversalmente referenciadas no campo das disciplinas com mais dificuldades. Os argumentos apresentados são a falta de domínio dos conteúdos, a par dos fracos resultados nas avaliações provocarem perda de interesse e, em alguns casos, alheamento total da disciplina.

Tais convergências e discordâncias, que singularizam cada um dos casos, poderão ser interpretadas com alguns elementos do seu contexto. Veja-se, por exemplo, a deposição na esperança de um futuro promissor, por parte alunos da turma de 8.º ano, o que impele a que se empenhem e estudem muito – embora isso não parta de um desejo intrínseco – para conseguirem bons resultados, sugerindo a obediência cega referida por D'Ambrosio (2015). Esta postura está de acordo com a missão da escola Lídia Jorge (LJ) em desenvolver competências e conhecimentos que permitam ao aluno transformar-se, no futuro, num adulto que intervenha na sociedade. Alinhados com a meta da melhoria das taxas de sucesso surgem os resultados obtidos pelos alunos na prova externa de Matemática, garantindo à escola o primeiro lugar do concelho, no *ranking* nacional, embora a Diretora alerte que o contexto familiar dos alunos influencie o seu desempenho. Do corpo docente de Matemática, a pressão que depositam no cumprimento compassado do programa, sem margem para desvios, com vista às prestações dos alunos na prova final, traduz uma "performatividade centrada nos resultados" (Pacheco, 2019, p.51), caracterizada por práticas pouco diversificadas, ao estilo de uma educação que Freire (2003) denomina por educação bancária. Assim, em rigor, o peso da meritocracia a par do objetivo de um futuro destacado tem o seu pendor numa política escolar que a premeia (Marcuse, 2012), constituindo-se arena de endoutrinação ideológica e não terreno cultural que promove o empoderamento dos alunos (McLaren, 2015).

Por sua vez, na turma de 9.º ano predominam as intenções em desfrutar do presente, por forma a aprender um pouco mais e privilegiando aulas práticas e interativas, a par da valorização da escola como um espaço com bons recursos e com dinamização de múltiplos projetos. Este parecer emerge de um ambiente onde, apesar de inscrito no Projeto Educativo o objetivo da melhoria das taxas de sucesso, dá primazia ao desenvolvimento de projetos adjudicados ao ensino compensatório - como as coadjuvações em sala de aula e a diferenciação curricular com o programa Fénix – e é dirigido por um presidente do Conselho Pedagógico consciente da influência do enquadramento familiar para o sucesso na disciplina, aproximando-se, de certa forma, à ideia de escola cidadã de Estêvão (2012). À semelhança dos professores de Matemática da escola LJ, os docentes da escola MA adotam uma

prática apressada que visa a lecionação integral dos conteúdos com vista à obtenção dos resultados dos alunos. Porém, esta não é a posição da professora titular da turma, a qual valoriza todo o currículo, diversificando as metodologias, e indo em sentido contrário à cultura dominante, como aquilo que Giroux (2024) reconhece como intelectual transformador e com curiosidade epistemológica (Nicol et al., 2019). Ora, neste caso, deduz-se como determinante para o sucesso das aprendizagens o diálogo entre estudantes e professores, onde juntos constroem o conceito de voz de Giroux (2022), o qual se refere ao conjunto de significados com que alunos e professores dialogam ativamente uns com os outros, cimentado pela preocupação de um diretor na melhoria das relações humanas. O grau de interesse atribuído, pelos alunos, às experiências escolares é, assim, marcado pelo grau relacional (McLaren, 2015; Smyth, 2016). Em resumo, a oportunidade que os alunos dão à escola corresponde a um cenário que os reconhece como vozes ativas (Giroux, 2024a), imprimido por um otimismo que contraria o ambiente socioeconómico, fazendo emergir uma instituição em linha com o princípio de paridade participativa de Fraser (2009).

Características da aprendizagem da Matemática. Chegados ao 3.º ciclo, os alunos deparam-se com um conjunto de dificuldades que foram acumulando, que lhes dificulta a aprendizagem de Matemática, sendo muitos os alunos, de ambas as turmas, que confessam serem obstáculos muito difíceis de ultrapassar, na medida em que remontam a anos anteriores. Neste âmbito, parece ser preponderante a relação que estabelecem com o professor, como é o caso da turma de 9.º ano, cuja professora de Matemática o corrobora quando, em sede de Conselho de Turma, diverge da avaliação que os seus pares fazem da turma, contrastando com a opinião de que os alunos têm boa capacidade de trabalho e, ainda que desorganizados, aderem às atividades propostas em sala de aula. Até porque, segundo o princípio da Equidade para a Matemática Escolar (NCTM, 2017), "as expetativas devem ser elevadas; a Matemática pode e deve ser aprendida por *todos* os alunos" (p. 13).

A este propósito, as tarefas que surgem como estruturas de atividade privilegiadas pelos alunos são compostas por exercícios e, em número manifestamente menor, problemas. À semelhança do defendido por Sacristán (2017) pode-se afirmar que "a estrutura da prática obedece a múltiplos determinantes, como parâmetros institucionais, organizativos, tradições metodológicas, possibilidades reais dos professores, dos meios e condições físicas existentes" (p. 201). Novamente, neste ponto, os resultados são ora convergentes, ora divergentes.

Em geral, o plano institucional compassa o ritmo de aprendizagem com aquilo que os professores reclamam de programas extensos, a par da obrigatoriedade da realização de uma prova final cujos resultados dos alunos, em última instância, estratificam as escolas. Por sua vez,

dependendo da política educativa seguida pela escola, é dado um determinado grau de importância a esses resultados. O corpo docente, normalmente, em função das diretrizes apontadas pela direção da escola, ou por tradição metodológica, assume ou evita essa pressão. E é neste último ponto que as duas docentes das turmas caso se distinguem. A professora de 8.º ano, fazendo jus à prioridade da direção, em simultâneo com aquilo que considera serem as suas possibilidades reais, adota uma metodologia de ensino pouco diversificada, canalizando a atividade de aula para o manual, com o auxílio de algumas plataformas educativas, em linha com uma abordagem direcionada para a instrução (Freire, 2003; Schukajlow & Blum, 2023). Por seu lado, apoiada por uma direção que não se rege pelos resultados dos exames nacionais, a professora da turma de 9.º ano parte do currículo para englobar na sua prática de ensino diferentes materiais e tarefas (Cánovas, 2014; Giroux, 2024a), assim como promove a autonomia dos alunos com um apoio pedagógico individualizado em contexto de aula. Esta última constatação responde aos princípios da igual liberdade e da diferença de Rawls (2013).

Como analisado, o contexto das duas turmas é diferente e, ainda assim, os alunos selecionam exercícios e problemas como as tarefas associadas à aprendizagem da Matemática. Uma das justificações poderá advir de um nível *macro* ao enquadramento feito. De acordo com Ponte et al. (2015), as tarefas apresentadas aos alunos devem proporcionar um processo consistente de aprendizagem, bem como caracterizam os exercícios como tarefas com um grau de desafio inferior e apresentam os exercícios e problemas como tarefas fechadas. Entretanto, relacionando, novamente, as tradições metodológicas com o ora descrito e ainda com o que Pacheco (2019) relembra por imediatismo do ensino criticado por 'Adorno', que traduz uma situação de mera transferência entre professores e alunos, explica-se que a dicotomia exercício/problemas esteja enraizada como uma tradição aceite por docentes e estudantes, numa necessária transferência, de ritmo acelerado.

Utilidade da Matemática escolar. Dos conteúdos referidos pelos alunos onde manifestam mais dificuldades, surge o tópico de funções, com especial indicação para os conhecimentos que impliquem manuseamento da expressão algébrica, o que reflete, possivelmente, problemas na aprendizagem de estruturas algébricas, nomeadamente em atribuir sentido às fórmulas algébricas e aos símbolos abstratos (Kop et al., 2020). Esta assunção leva a que seja relevante continuar a investigar os significados que os alunos dão aos símbolos e expressões algébricas e se identificam a utilidade da linguagem algébrica para resolverem problemas (Aguiar et al., 2024). No presente estudo, importa entender qual é a utilidade que os alunos atribuem não apenas às estruturas algébricas senão aos conhecimentos que adquirem na disciplina de Matemática e, portanto, também a sua conexão com a

realidade. Neste âmbito, os resultados são convergentes e, embora, nos alunos de 9.º ano a opinião sobre o desligamento da Matemática à realidade não seja tão categórica, a verdade é que todos os exemplos dados acabam por se relacionarem com a gestão financeira familiar ou, em último caso, na aplicação a outras disciplinas. Na linha ascendente, os relatos concentram-se, essencialmente, em críticas à extensão dos programas. A diretora da escola LJ vai mais longe e defende uma transformação do currículo, nutrindo-o de uma natureza mais prática para responder às dificuldades dos alunos na compreensão da Álgebra, que, segundo a mesma, estão associadas à ausência de conexão com a realidade. O diretor da escola MA propõe a aproximação do programa à realidade, com a participação em projetos relacionados com literacia financeira e a criação de um laboratório de Matemática. Todos os docentes declaram que as funções são o tópico de Álgebra em que os alunos revelam mais dificuldades, agravadas com a implementação das Metas Curriculares. Não obstante, os exemplos dados sobre a associação das funções à realidade são reduzidos e, ainda que, reconheçam os benefícios da modelação, justificam a ausência na sua prática por falta de tempo e elevada complexidade (Pacheco, 2019; Simic-Muller, 2019).

Há ainda outra ideia transversal às duas turmas que sugere a existência de um pacto social no reflexo das aprendizagens da Matemática no futuro. Este mito de Prometeu aplicado à disciplina de Matemática é tão naturalmente aceite que os alunos da turma de 9.º ano suspendem a importância dada à Matemática em função da profissão que tiverem, o que parece ajustar-se à equação hobbesiana de *justiça igual a pacto* (Hobbes, 2017) com *utilidade da Matemática igual à profissão desempenhada no futuro*. A quadratura desta postura tem, possivelmente, um pendor familiar com algumas demonstrações dadas. No ambiente de escola, a influência da designada ressonância intrínseca (Skovsmose & Valero, 2002b) sente-se, por exemplo, nos professores de Matemática da escola LJ quando transmitem a promessa de que os conhecimentos adquiridos serão, um dia, aplicados nos seus futuros.

Entendimentos de justiça social. O insucesso à disciplina de Matemática é assumido, pelos alunos de ambas as turmas, com resignação. A aceitação de um *status quo* baseado num ensino da Matemática que seleciona e estratifica, que demarca aqueles que têm acesso ao prestígio dado pela Matemática daqueles que não o têm, vincando, assim, as diferenças entre a cultura dominante e a dominada (Young, 2022), também legitimado pela crença na ressonância intrínseca (Skovsmose & Valero, 2002b). Este facto vai ao encontro do efeito negativo, de forma repercussiva, da Matemática, entendido por alguns autores como dissonância intrínseca (Skovsmose & Valero, 2002b), tornando-se responsável por vedar o acesso a um nível educacional mais elevado e contribuindo para a reprodução

da desigualdade social (Gutiérrez, 2018). Este postulado não é consistente com o princípio constitucional educativo da igualdade de oportunidades, falhando sobre a igualdade de conhecimentos no que concerne ao sucesso escolar, em vez de garantir as mesmas oportunidades sociais de aceder ao mercado de trabalho de indivíduos com a mesma escolarização (Bolívar, 2019; Rawls, 2013). A explicação deste fenómeno por parte das direções das duas escolas recai sobre o peso do determinismo social (Bourdieu, 2008), que influencia aprendizagens distintas conforme o ponto de partida, assim como a aceitação cultural do insucesso a Matemática. Do ponto de vista da diretora da escola LJ esta última idiossincrasia é agravada pelo consentimento de uma perda hereditária da aprendizagem da Matemática.

Por sua vez, todos os professores reconhecem à Matemática uma responsabilidade ética induzida pelas consequências de uma possível exclusão escolar e social. Em conformidade com os presidentes dos conselhos pedagógicos os docentes asseveram a existência de um estigma social que faz proliferar a ideia de que a Matemática não é para todos, colocando-a como uma guardiã da porta (Skovsmose, 2007), que separa os aptos dos inaptos da sociedade (Skovsmose & Valero, 2002a) ou, dito de outra forma, numa relação de opressão, destacando-se como entidade de dominação (Young, 2022). Neste seguimento, os professores detetam, ainda, a influência do *background* familiar sobre o sucesso das aprendizagens e respondem com a adoção de uma diferenciação pedagógica e do ensino compensatório, o que está de acordo com o princípio da diferença da justiça distributiva (Rawls, 2013). Quanto às docentes titulares das turmas caso, uma delas exerce uma estratégia redistributiva ao dedicar mais atenção aos alunos sem apoio extraescolar, enquanto a professora de 9.º ano apoia-se num ambiente de aula que alimente um sentido de comunidade e identidade, com vista a alertar os alunos para as diferentes realidades sociais existentes, prática esta que reflete a dimensão de justiça como reconhecimento (Bolivar, 2019; Fraser, 2022).

No foro da noção que os alunos têm de justiça social, todos os entendimentos incidem sobre igualdade, sob variados espetros, ou, ainda, alguns alunos definem-na pela sua ausência sugerindo o seu *contrariu sensu* (Aristóteles, 2011). De igual modo se verifica que os alunos das duas turmas se posicionam quanto à forma desigual como são distribuídos os bens primários e evidenciam reconhecer desigualdades de reconhecimento (Fraser, 2022). Já no âmbito da influência da Matemática na identificação de problemas sociais, a maioria dos alunos não vê uma possível conexão e os parcos exemplos dados restringem-se ao cálculo de percentagens ou, no caso das funções, à leitura de gráficos. Nesta senda, é posição unânime dos docentes de Matemática daquelas escolas que o atual ensino não fornece a ferramenta à altura de uma alfabetização matemática, designada por

Skovsmose(2012b) como matemacia, a qual se encontra vinculada com a competência para aplicar e refletir sobre as noções matemáticas aplicadas em diferentes contextos da realidade social. Esta realidade contradiz uma das ideias preconizadas pelo princípio do currículo para a matemática escolar que indica que "o currículo deverá enfatizar os processos matemáticos e as capacidades que apoiem e estimulem a literacia quantitativa dos alunos" (NCTM, 2017, p. 16), permitindo aos alunos a compreensão da aplicação da Matemática na modelação e na previsão de fenómenos reais.

Em última análise, as perspetivas dos alunos ajustam-se ao produto de alguns dos elementos do seu contexto. Deste encontro transparece, em traços gerais, um discurso hegemónico à volta dos resultados, principalmente na comunidade escolar da turma de 8.º ano. No âmbito das práticas de ensino e de aprendizagem, consegue-se identificar da narrativa dos intervenientes de ambas as escolas, a valorização de uma justiça segundo o mérito (Belavi & Murillo, 2016), visível nas ideias de que os alunos deverão ser recompensados pelo empenho que depositarem e na crença de que o esforço trará benefícios futuros, estabelecendo uma ponte entre a utilidade da Matemática e o 'Mito de Prometeu'.

Outro dos reflexos que pode ser mapeado é a normatividade com que é encarado o insucesso à disciplina de Matemática, começando pelo reconhecimento resignado dos próprios alunos, sendo que, ao nível ascendente, é identificada, por parte do corpo docente e dos órgãos de gestão, uma aceitação cultural associada ao insucesso da Matemática. Esta aceitação poderá estar, por sua vez, enraizada em três aspetos. O primeiro deles, a existência de um determinismo social que não coloca no mesmo ponto de partida os conhecimentos adquiridos pelos alunos; o segundo aspeto tem a ver com uma aplicação do Lamarckismo a uma espécie de perda hereditária da aprendizagem da Matemática, ou seja, as dificuldades a Matemática são encaradas como se fossem atrofias na aprendizagem transmitidas de geração em geração. Por fim, a Matemática é vista como uma guardiã da porta à qual só alguns têm acesso, uma espécie de enclave que serve para separar os que têm acesso ao conhecimento dos que são descartáveis (Baumann, 2007; Young, 2022).

8.2.2. Identificar as atividades concretizadas pelos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, no estudo de funções

Os alunos executam as tarefas de modelação contextualizadas por fenómenos sociais, envolvendo-se em várias atividades de modelação, numa simbiose entre duas abordagens que Blum e Niss (2024) designam por holística e atomística. Por outras palavras, ora trabalham todas as fases do processo, ora concentram-se nos subprocessos que compreendem as atividades cognitivas como

compreender a tarefa, simplificar o problema e reconhecer estratégias, definir e trabalhar com o modelo, e interpretar os resultados e validar o modelo.

As atividades relacionadas com *compreender a tarefa* processaram-se, na sua maioria, na leitura do corpo do problema em grande grupo, seguindo-se, em geral, de trabalho autónomo. Em grupos de trabalho, os alunos interpretaram o contexto das tarefas, mesmo em casos que pressupunham maior complexidade, vinculando-o com o mundo real e debatendo-o. Nas situações onde surgiram obstáculos à compreensão da tarefa, nomeadamente, nas tarefas iniciais de 8.º ano, os alunos sentiram necessidade de recorrer à professora, de modo a conseguirem compreender o contexto da tarefa. Entre as possíveis explicações para o sucedido, como complexidade do texto ou a quantidade de informação contida, poderá constar a segurança na utilização de estratégias de intervenção pedagógica adotadas pela professora, na prática de modelação (Blum & Ferri, 2009) estar ainda, também, em fase inicial.

Para *simplificar o problema*, os alunos continuaram a trabalhar em grupo tendo, para isso, efetuado registos escritos e entabulado alguns diálogos. De uma forma geral, sublinham partes do texto, fazem anotações de palavras que desconhecem, estabelecendo conhecimento extra-matemático, selecionam e registam informações. É de realçar, neste ponto, que a maioria dos alunos da turma de 8.º ano sublinha, de forma indiscriminada, todas as quantidades presentes nos dados das tarefas. Esta perceção evidencia o que Frankenstein (2012) alega de contrato social entre a Matemática e os estudantes, o qual implica a necessidade de usar todos os números apresentados para resolver qualquer problema.

Pensa-se que as atividades *compreender e simplificar a tarefa* correspondem a um dos três níveis de modelação que Greer e Verschaffel (2007) denominam modelação implícita, enquanto as competências implícitas são referentes a atividades de modelação nas quais os alunos se envolvem sem estarem verdadeiramente conscientes de que as mesmas são essenciais para a modelação.

No sentido de *reconhecer estratégias*, os alunos estabelecem relações entre as quantidades, conectando as informações dadas na tarefa. Porém, na turma de 8.º ano, os alunos evidenciaram dificuldades nesta etapa do ciclo de modelação, na medida em que não conseguiram, em algumas tarefas, criar um modelo da situação sem a intervenção da professora. Já na turma de 9.º ano, em geral, os alunos procuraram olhar para os dados e fazer assunções, aproveitando para estabelecer relações entre quantidades, traçando objetivos e definindo estratégias. Sempre que se verificou algum bloqueio, a professora interveio de forma pontual, tentando direcionar os alunos para a visualização gráfica e incentivando-os à utilização da folha de cálculo ou da calculadora gráfica.

As atividades desenvolvidas para *definir o modelo matemático* entraram no nível a que Greer e Verschaffel (2007) designam por modelação explícita, na medida em que às competências explícitas está inerente a atenção evidente ao processo de modelação. Neste sentido, os alunos foram induzidos por ambas as docentes *a identificar as variáveis*. Apesar de incentivados para essa atividade de modelação, os resultados mostram-se fragilizados no que a isso diz respeito, deixando emergir uma barreira na identificação das variáveis. Na turma de 8.º ano, os alunos já tinham sentido dificuldades em reconhecer estratégias, o que se repercutiu à etapa seguinte, quer para identificar as variáveis, quer para representar o modelo matemático. Assim, a professora instruiu-os diretamente em relação ao caminho a seguir, o que propiciou aos alunos, em algumas tarefas, conseguirem *encontrar o modelo*. Quanto à turma de 9.º ano percebe-se uma maior destreza na hora de identificar as variáveis, bem como representar o modelo. Esta diferença pode ter duas explicações, sendo uma delas o facto de os conteúdos de 9.º ano de funções terem sido lecionados previamente à resolução das tarefas e a intervenção da professora no apoio prestado aos alunos ter sido mais estratégica e menos diretiva, com a intenção de lhes transferir de forma gradual a responsabilidade sem lhes indicar a solução (Aroeira et al., 2024).

Trabalhar o modelo revelou-se uma atividade que os alunos executaram sem grandes flutuações, talvez por ser a atividade de modelação mais similar às que têm por hábito realizar nas aulas de Matemática. A maneira como, em geral, os alunos de 8.º ano trabalharam o modelo indicia corresponder às suas competências para resolverem problemas matemáticos (Stillman, 2019). Dito de outro modo, as suas competências de modelação, ao relacionarem-se com outras competências matemáticas (Blum & Niss, 2024), acabam por se homogeneizar. Verificou-se que os alunos procuraram trabalhar o modelo, usando, na sua maioria, a representação algébrica, evidenciando os conhecimentos sobre funções. Esta forma de trabalho dos discentes evidencia refletir uma prática de aprendizagem sujeita a ritmo acelerado, que se repercute na necessidade de uma passagem rápida dos problemas à sua representação simbólica e manuseamento pela mesma representação (Ponte et al., 2022). Na turma de 9.º ano, os alunos apoiaram-se dos conhecimentos sobre funções linear, de proporcionalidade inversa e quadrática para trabalharem os respetivos modelos. Nesta atividade, quase sempre trabalharam autonomamente, auxiliando-se no Excel e na calculadora gráfica para procederem aos cálculos necessários ou representarem graficamente a função.

A *interpretação dos resultados* é uma atividade que os alunos concretizam em situações de modelação, num diálogo importante entre o mundo matemático e o mundo real (Galbraith & Stillman, 2006). Como se revelou neste estudo, o que pode variar é grau de envolvimento. Os alunos da turma

de 8.º ano nem sempre utilizaram os resultados obtidos para transitarem esses resultados para os resultados reais (Ferri, 2006), sendo exemplo disso a ausência da implicação dos resultados matemáticos na tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica', nas razões apontadas para aqueles resultados reais. Em outro momento, apenas alguns alunos conseguiram comparar, criticar e utilizar os resultados para sustentar a resposta. Quando mobilizaram a competência reflexiva, este grupo de alunos optou pela representação verbal estabelecida em grande grupo. Em contrapartida, na turma de 9.º ano, os alunos criaram diálogos intragrupais que favoreceram a reinterpretação da situação real, debateram coletivamente sobre os resultados e efetuaram comparações, associando, assim, o conhecimento extra-matemático. Para esta divergência, na interpretação dos resultados, podem ter contribuído as diferenças do tempo disponibilizado, pelas docentes, para que os alunos conseguissem efetuar esta atividade de modelação de forma autónoma e da promoção do diálogo entre pares.

O contraste entre ambas as turmas na atividade de *validar o modelo* também se verificou. Os alunos da turma de 9.º ano demonstraram competências de validação, ora verificada verbalmente, ora em registo escrito. Esta competência foi visível nos momentos em que, por exemplo, questionaram o modelo seguido, verificando que os resultados matemáticos não se adequavam à situação real; ou ainda, na tarefa 'A uberização do trabalho', os alunos anteciparam o momento da validação, validando o modelo internamente, de acordo com aquilo que Ferri (2006) designa por validação intuitiva. Por outro lado, na turma de 8.º ano a validação do modelo foi uma barreira que se estendeu à generalidade da resolução das tarefas, sugerindo a existência de um obstáculo no retorno dos resultados obtidos à situação real (Blum, 2015).

A *leitura crítica dos dados* foi uma das atividades em que os alunos se envolveram na resolução das tarefas de modelação, prenunciando o terceiro nível de modelação de Greer e Verschaffel (2007), a modelação crítica. Embora em diferente profundidade, estes dois grupos de alunos revelaram competência reflexiva tanto na hora de lerem os dados como de interpretarem os resultados. De modo semelhante, *trabalhar em grupo* evidenciou-se, de forma convergente em ambas as turmas, como uma das atividades privilegiadas na realização das tarefas (Blum & Ferri, 2009). Em todas, proporcionou o desenvolvimento da capacidade transversal matemática da comunicação, bem como se verificou um maior nível de envolvimento, ao mesmo tempo que fomentou o sentimento de identidade (Fraser, 2023). Por outras palavras, o trabalho em grupo revelou-se o que, segundo a perspetiva sociocrítica da modelação, se denomina de pedagogia transformadora (Rosa & Orey, 2015) que vista à luz das teorias de justiça sugere o valor social comunitário das abordagens comunitaritas (Sandel, 2018; Walzer, 2019). Esta metodologia conjugada com estratégias de modelação propicia o

desenvolvimento coletivo de estratégias para que os alunos analisem e tomem decisões sobre determinado problema (Blum & Ferri, 2009). Ainda neste ponto, as tarefas trabalhadas em grupo permitiram gerar outra atividade paralela, o estímulo da *autonomia* (Schukajlow & Blum, 2023). De facto, foi visível pelas interações verbais entabuladas pelos alunos das duas turmas, ainda que mais notório na turma de 9.º ano, que nos momentos em que as intervenções das docentes foram menores parece ter sido criada uma maior responsabilidade nos alunos para determinarem as soluções (Aroeiro et al., 2024). Essa notoriedade da autonomia foi aferida ao nível interpretativo onde as manifestações mais significativas ocorreram na forma verbal e entre grupos de trabalho.

Neste seguimento, outra atividade que merece ser destacada é o estabelecimento de *interações verbais*, que, de igual modo, ocorreram durante o processo de modelação nas turmas de 8.º e 9.º anos. Conclui-se, então que, ao serem propiciados espaços de interação (Barbosa, 2008) com abertura para o diálogo e discussão, deixando antever uma janela para o pensamento dos alunos (English, 2018), estes foram capazes de analisar a realidade conjugada com as suas próprias experiências (Wright, 2015). É de salientar que as diferenças manifestadas pelos dois grupos de alunos deram-se na forma como o fizeram. Enquanto os alunos da turma de 8.º ano se revelaram mais confiantes ao debaterem em pequeno grupo, as discussões reflexivas em que os alunos de 9.º ano se envolveram foram mais notórias em grupo turma.

Em jeito de síntese, as atividades em que os alunos atuaram com a realização das tarefas de modelação promoveram o desenvolvimento de competências de modelação (Blum & Niss, 2024). Entre as privilegiadas encontram-se a compreensão da tarefa, a simplificação do problema e a interpretação dos resultados. Desta forma, dos conhecimentos matemáticos que lhes permitiram trabalhar as tarefas foram os relativos às capacidades transversais que saíram mais beneficiados, principalmente, a comunicação matemática, as representações e as conexões matemáticas.

Por último, dentro de uma perspetiva sociocrítica (Araújo, 2009; Jurdak, 2016; Simic-Muller, 2019), para além das competências de modelação mencionadas, as discussões paralelas e o trabalho em grupo foram atividades às quais os alunos atribuíram importância e as quais sentiram fundamentais para minimizarem as dificuldades com as quais se depararam, reverberando uma ótica normativa rousseuniana de preferir em todas as coisas o maior bem de todos (Rousseau, 2011).

8.2.3. Verificar como os alunos valorizam as tarefas de modelação contextualizadas por situações de justiça social na aprendizagem de funções

A implicação com que os alunos realizaram as tarefas foi inferida pelas suas produções escritas, mas também pela ação dialógica que desenvolveram e através da qual a sala de aula se assumiu como um espaço democrático (Araújo, 2009; McLaren, 2015), bem como pelo modo como se posicionaram após a concretização de todas as tarefas de modelação. Deste modo, do cruzamento entre as discussões reflexivas geradas pelos intervenientes durante o processo de modelação e os registos físicos produzidos pelos alunos emergiram duas situações que merecem ser destacadas. Em primeiro lugar, os alunos de ambas as turmas, mostraram, à escala, serem capazes de *escreverem o mundo com a Matemática* (Gutstein, 2003), ou seja, desenvolverem consciência sociopolítica (Gutiérrez et al., 2024) para poderem contribuir para a emancipação e mudança social (Gutstein, 2018). Esta conclusão foi percetível nas propostas apresentadas pelos alunos das duas turmas que, ao conjugarem ação e reflexão, foram ao encontro da ideia de agência crítica, proposta por vários autores (por exemplo, Skovsmose & Greer, 2012; Wright, 2016), numa atividade que sugere refletir 'com', 'através' e 'sobre' a Matemática. Entre as propostas de 8.º ano, encontram-se sugestões da aplicação de modelos lineares e de proporcionalidade inversa para redistribuição de bens primários, assim como campanhas de angariação de fundos com critérios assentes nos 'Princípios de Diferença e de Reparação' (Rawls, 2013). No 9.º ano, os alunos apresentaram modelos de proporcionalidade inversa na redistribuição de salários com base no 'Princípio da Reparação', e na aplicação de melhores condições de trabalho, como a redução efetiva do número de horas de trabalho, bem como aplicaram esses modelos na redistribuição dos lucros de uma empresa.

Outro fator que emerge da realização das tarefas foi a mobilização das *experiências socioculturais dos alunos*, o que, em termos da perspetiva sociocrítica da modelação, combina a individualidade das experiências dos alunos com a reflexão crítica sobre essas experiências (Rosa & Orey, 2015). Neste estudo, estas manifestações foram visíveis em momentos orais e escritos, que, no 8.º ano, passaram por conexões a catástrofes ambientais à data recentes, ao impacto ambiental das suas práticas diárias, à temática da igualdade de género às vivências familiares, até à comparação das suas experiências pessoais face a situações de níveis extremos de pobreza, dando corpo a uma pedagogia culturalmente relevante (Rubel & Nicol, 2020). Na turma de 9.º ano, as aproximações da temática do trabalho estabeleceram-se, essencialmente, pelo relacionamento com as características sociais da própria região e com as vivências profissionais de familiares próximos, fazendo emergir, desta forma, fundos de conhecimentos dos alunos (Oliveira et al., 2016). Este desenvolvimento de

identidades culturais e sociais positivas (Gutstein, 2006) deriva numa aproximação à justiça como reconhecimento (Fraser, 2009; Young, 2022).

Da sua voz, os alunos destacaram dois contributos globalizantes das tarefas de modelação baseadas em fenómenos sociais para a aprendizagem de funções: a visibilidade da aplicação dos conteúdos de funções à realidade com melhoria significativa da compreensão dos conceitos subjacentes e o espaço dado à promoção da autonomia (Kokka, 2019).

A aproximação à realidade surge, pois, citada por todos os intervenientes discentes, mas também docentes, por via das tarefas de modelação e assenta, sobretudo, na temática das tarefas. Ou seja, a aproximação à realidade é, antes demais, de reconhecimento pelo contexto. A análise das desigualdades sociais e a abordagem de experiências socioculturais permite, assim, duas das finalidades da aplicação de justiça de Young (2022) – descrever e explicar as relações sociais e articular e defender ideais e princípios. Por outras palavras, os alunos ao darem-se conta das desigualdades existentes, ao mesmo tempo que é considerada a sua bagagem (histórias e experiências), desenvolvem o pensamento crítico e o raciocínio ético (Murillo & Hernández-Castilla, 2014).

A proximidade com a realidade está, ainda, associada à justiça como participação (Young, 2022). O seu exemplo mais expressivo é a valorização dada pelos alunos ao debate de ideias, através dos quais mostraram o respeito pelo outros, ouvindo com interesse e empatia as experiências dos seus colegas, ajudando a quebrar mitos estereotipados. Neste caminho, influenciou a orientação dada pela docente de 9.º ano em tentar que os debates se sustentassem nos dados e que fossem ponderados pelo conhecimento reflexivo. Em específico, os espaços de interação em que os alunos comunicaram verbalmente ocorreram de modo transversal à realização de todas as tarefas, em diálogos estabelecidos com a professora, em grupos de trabalho ou em grupo turma, numa linha com os contornos defendidos por Freire (2003). Esta constatação leva a ponderar o argumento de Alrø e Skovsmose (2021), a qualidade da comunicação em sala de aula intervém na qualidade da aprendizagem da Matemática, até porque, das narrativas sobressaem, como consequência direta deste cruzamento das funções com realidade e da atividade dialógica, benefícios concretos: interesse; facilidade; e maior envolvimento. Em resumo, uma reconfiguração da perceção dos alunos relativamente à utilidade da Matemática e, mais, em relação a si próprios como alunos de Matemática (Simic-Muller, 2019).

A vivência da autonomia foi assumida pelos alunos, principalmente da turma de 9.º ano, como um privilégio que fazem questão de evidenciar e através do qual se pode estabelecer um paralelismo

com um dos direitos inalienáveis de Kant (2011), o direito de liberdade, hoje entendido como autonomia. Para muitos, a combinação do trabalho em grupo, a possibilidade de efetuarem pesquisas e se auxiliarem de ferramentas tecnológicas permitiu dotá-los de maior independência. Reforçado pelas palavras das docentes das turmas, o formato da pedagogia utilizada para a realização das tarefas de modelação, o trabalho em grupo, incentivou um clima democrático e de cooperação, sugerindo uma emancipação que antecede à ação, um valor essencial à passagem à ação social (Freire, 2003; Greer & Skovsmose, 2012; Murillo & Hernandez-Castilla, 2014). Em última análise, a possibilidade desta pedagogia faz ecoar a revolução suave ansiada por Smyth (2011) para humanizar as escolas, uma vez que favoreceu a cooperação, a comunicação, e a autonomia transmite a ideia de que também é possível, em Matemática, falar de pedagogia da esperança (Skovsmose, 2007).

8.3. Considerações finais

Um olhar global perante a interseccionalidade entre o contexto, as atividades de modelação e a valorização dos alunos às tarefas sugerem um paralelismo com a interseção do conhecimento reflexivo com o conhecimento clássico e o conhecimento extra-matemático (Gutstein, 2007). Dito de outro modo, a conjugação das interações verbais e do trabalho em grupo proporcionaram as manifestações do conhecimento reflexivo, o desenvolvimento das competências de modelação e a aplicação de modelos do conteúdo de funções revelam o conhecimento clássico, bem como a autenticidade do contexto das tarefas baseadas em fenómenos sociais e a expressão do contexto dos alunos através da verbalização das suas experiências socioculturais promovem o conhecimento extra-matemático.

Esta visão deixa transparecer que continua a admitir-se que a prerrogativa levantada no início deste capítulo é possível. Acredita-se que é possível que a intervenção pedagógica levada a cabo, poderá pontuar o envolvimento dos alunos suscitado pelas tarefas de modelação com foco na justiça social no sentido de apoiar a minimização do insucesso escolar da Matemática, com o efeito social de minorar a guetorização (Skovsmose, 2024) que continua a provocar. Neste sentido, verifica-se que há uma voz e uma visibilidade crescentes dos estudos centrados na equidade em educação matemática e que as conceptualizações de equidade se alargaram e aprofundaram (Vithal et al., 2024). No entanto, ainda que a modelação matemática no campo educativo seja, à data, uma aposta presente e fundamentada nos documentos curriculares, a sua concretização em sala de aula, especialmente no 3.º CEB, é reduzida (Niss et al., 2017). A escassez de investigação empírica na educação matemática para a justiça social em Portugal é, ainda, uma realidade.

O presente estudo evidencia não apenas as características das atividades seguidas pelos alunos na resolução das tarefas de modelação contextualizadas por assuntos de justiça social, no tópico de funções, mas também o posicionamento dos sujeitos em ação. Ao serem atendidas as perspetivas de cada um dos intervenientes, os quais descrevem percursos seguidos, práticas organizacionais e pedagógicas adotadas bem como experiências vivenciadas e interpretadas à luz de teorias de justiça, permitiu enquadrar as expetativas dos alunos perante as oportunidades de aprendizagem que lhes são dadas. Este estudo contribuiu, assim, para a compreensão dos diferentes modos de atuação dos alunos perante situações de análise de desigualdades sociais com tarefas de modelação matemática, de acordo com as características educativas, sociais e até demográficas do meio em que estão inseridos. Apesar das conclusões não serem generalizáveis, elas mostram que as sinergias do contexto a que os alunos se encontram sujeitos são canalizadoras de uma predisposição que pode condicionar ou valorizar a aprendizagem. Espera-se que este trabalho contribua, também, no sentido de visibilizar a importância da implementação de pedagogias socialmente justas (Apple, 2017; Giroux, 2015; Kincheloe, 2012), orientadas por currículos e órgãos de gestão que priorizem práticas de justiça para que todos os alunos consigam aceder a uma aprendizagem da Matemática sem que ninguém tenha de ser deixado para trás.

É, ainda, de assinalar o impacto positivo da nova lente que os alunos colocaram para ver a Matemática. Uma nova forma que vai ao encontro da aquisição de competências matemáticas enquanto literacia matemática que, por sua vez, engloba a literacia quantitativa ou numeracia, combinando produtos e processos matemáticos (Niss et al., 2017; Niss & Højgaard,2019). Neste sentido, considera-se que esta investigação potencia a visibilidade em valorizar o ensino da Matemática como uma conjugação de vários elementos, entre os quais sobressaem "extrair/definir problemas do trabalho/da vida/do mundo'; 'inferências a partir de dados'; 'aplicar a matemática em contexto'; e 'apreciação cultural (natureza, história e papel da matemática)"(Niss et al., 2017, p. 241). Em suma, este estudo aproxima-se das solicitações de investigadores internacionais que reconhecem a importância de explorar as relações entre a matemática e o mundo real que ocorrem em ambientes educativos (Greefrath & Carreira, 2024) e, simultaneamente, reforçar a utilidade do domínio das competências matemáticas para a compreensão, dos alunos, das suas próprias experiências pessoais e dos fenómenos sociais, transcendendo a disciplina para um ensino descolonizador (Powell, 2022).

8.4. Limitações do estudo e sugestões para futuras investigações

Esta investigação levou à construção de uma *framework* de apoio a utilizar quer pelos professores, quer pelos alunos participantes que consistiu na elaboração de um conjunto de tarefas de modelação que permitissem levar os alunos a envolverem-se e a compreenderem as relações de poder ou de distribuição desigual de recursos ou de riqueza. Não obstante os temas abordados nas tarefas terem ido ao encontro da realidade dos alunos, os mesmos não foram escolhidos pelos alunos intervenientes no estudo. Assim, apontam-se como possilidades para direções futuras uma investigação que aplique uma outra prática pedagógica de modelação matemática segundo a perspetiva sociocrítica (Rosa & Orey, 2015) – uma prática que posicione os alunos como responsáveis pela escolha dos temas e o desenvolvimento de projetos, nos quais sejam os decisores de etapas do processo de modelação e na qual os docentes apenas posibilitem e orientem as atividades de modelação.

Para encerrar, recorre-se à ativista Angela Davis para sugerir que "é fundamental resistir à representação da História como obra de indivíduos heróicos, para que as pessoas reconheçam a sua capacidade de agir como parte de uma crescente comunidade de resistentes" (Davis, 2020, p. 20). No domínio de uma comunidade escolar, tal pode produzir um efeito emancipador do valor de cada um dos sujeitos. Esta *conscientização* motivou a investigadora a levantar o véu daquilo que viria a ser este trabalho para concluir que, da tensão, pode surgir uma reinvenção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2019). Five different perspectives on mathematical modeling in *mathematics education. Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53–65.

Adorno, T. W. (2003). *Educação e Emancipação* (3.ª Ed.). Paz e Terra.

Afonso, M. R. (2010). Justiça na escola: perspectivas de um grupo de professores do ensino básico. *Revista Portuguesa De Pedagogia*, *44*(1), 237–257. https://doi.org/10.14195/1647-8614_44-1_10

Aguiar, K., Ponte, J. P. & Mata-Pereira, J. (2024). O uso da linguagem algébrica no 9.º ano: estratégias, significados e dificuldades. *PNA, 18*(4), 391–414. http://doi.org/10.30827/pna.v18i4.27382

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Universidade Aberta.

Almeida, L., & Brito, D. (2005). Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação* (Bauru), *11*, 483–497.

Almeida, L., & Ferruzzi, E. (2009). Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem Matemática. Alexandria: *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 117–134

Almeida, L., & Kato, L. A. (2014). Different approaches to mathematical modelling: Deduction of models and studens' actions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 9*(1), 3–11. https://doi.org/10.29333/iejme/277

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2021). *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Autêntica Editora.

Althusser, L. (2022). *Aparelhos Ideológicos de Estado*. Paz & Terra

Amado, J. (Coord.) (2017). Manual de Investigação Qualitativa em Educação (2.ª Ed.). *Imprensa da Universidade de Coimbra*.

Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática, 166*, 2–6.

Apple, M. (2017). *A educação pode mudar a sociedade?* Editora Vozes.

Apple, M. (2018). *The hidden curriculum and the nature of conflict in ideology and curriculum*. Routledge

Appelbaum, P., Stathopoulou, C., & Xenofontos, C. (2022). Mathematics education as dystopia: A future beyond. *Journal of Humanistic Mathematics*, *12*(2), 518–538.

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 55–68.

Arendt, H. (2000). A crise na educação. In O. Pombo (Ed.), *Quatro textos excêntricos*.(pp.21–53). Relógio d'Água.

Arendt, H. (2007). *Responsabilidade e julgamento*. Dom Quixote.

Aristóteles (2011). *Ética a Nicômaco (Livro V)*. Martin Claret.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Ärlebäck, J. B., & Doerr, H. (2015). At the core of modelling: Connecting, coordinating and integrating models. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 802–808). ERME.

Aroeira, A. J., Carreira, S., & Ponte, J. P. (2024). Teacher strategic interventions to support students in constructing the model of the situation in a modelling task. In H. S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_12

Artaud, M. (2007). Some conditions for modelling to exist in mathematics classrooms. In *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 371-378). Springer.

Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: Essential for elementary and middle school students. *Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 16–29.

Asempapa, R. S. (2018). Assessing teachers' knowledge of mathematical modeling: Results from an initial scale development. *Journal of Mathematics Education, 11*(1), 1–16.

Atweh, B. (2010). Quality and equity in mathematics education as ethical issues. In B. Atweh, M. Graven, W. Secada, & P. Valero (Eds.), *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education* (pp.63–75). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_5

Bahmaei, F. (2011). Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(9), 3–13.

Ball, S. (2014). Globalización, mercantilización y privatización: tendencias internacionales en Educación y Política Educativa. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas, 22*(41), 1–17.

Ball, S.. (2020). *Educação Global S. A: Novas redes políticas e o imaginário neoliberal*. Editora UEPG.

Bandura, A. (2023). *Social cognitive theory: An agentic perspective on human nature*. John Wiley & Sons, Inc.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o debate teórico. In *Reunião Anual da ANPED*. ANPED.

Barbosa, J. C. (2003) What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: a way of life. ICTMA11* (pp. 227–234). Horwood Publishing.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Barbosa, J. C. (2008). As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem de modelagem matemática. *Acta scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 108*(1), 47–58.

Barbosa, J. C. (2009). Mathematical modelling, the socio-critical perspective and the reflexive discussions. In M. Blomhøj, & S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, Proceedings from the topic study group 21 at 11th international congress on mathematics education* in Monterrey (pp. 133–143). Roskilde University.

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. Edições 70

Bartell, T. (2018). *Toward equity and social justice in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92907-1

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Contexto.

Baumann, Z. (1999). *Globalização: As Consequências Humanas*. Zahar

Baumann, Z. (2007). *Modernidade e Ambivalência*. Relógio DÁgua.

Belavi, G., & Murillo, F. J. (2016). Educación, democracia y justicia social. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, *5*(1). https://doi.org/10.15366/riejs2016.5.1.001

Belavi, G., & Murillo, F. J. (2020). Democracia y justicia social en las escuelas: Dimensiones para pensar y mejorar la práctica educativa. *REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *18*(3), 5–28. https://doi.org/10.15366/reice2020.18.3.001

Bentham, J. (2018). *An Introduction to the principles of morals and legislation*. Forgotten Books.

Berg, J., Buell, C. A., Day, D., & Evans, R. (2018). Meaningful mathematics: A social-justice-themed-introductory statistics course. *PRIMUS, 29*(3–4), *300–311.* https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1446478

Biembengut, M. S. (2009). 30 anos de Modelagem matemática na Educação Brasileira: Das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 7–32.

Biembengut, M. S. (2014). Modelagem matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: Pontos confluentes. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *7*(2), 197–219.

Biembengut, M. S, & Hein, N. (2007). *Modelagem matemática no ensino*. Contexto.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123-139.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 45-56). Springer.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work: Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDMMathematics Education, 38*(2), 163–177.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 15–30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., & Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Ellis Horwood.

Blum, W., & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss, & I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving* (pp. 1–21). Ellis Horwood.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 27–68.

Blum, W., & Niss, M. (2024). Origin and development of the notion of mathematical modelling competency/competencies. In H.S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp.185–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação qualitativa em educação – Uma introdução à teoria e aos métodos* (1.ª Ed., 6.ª reimp.). Porto Editora.

Bolívar, A. (2019). Un currículum inclusivo en una escuela que asegure el éxito paratodos. *Revista E-currículum, 17*(3), 827–851. https://doi.org/10.23925/1809-3876.2019v17i3p827-851

Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. In *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 185-192). Springer.

Bourdieu, P., & Passeron, J. C. (2008). *A reprodução de elementos para uma teoria do sistema de ensino*. Editora Vozes

Bowles, S., & Gintis, H. (1976). *Schooling in capitalist America: Educational reform and the contradictions of economic life*. Basic Books.

Boylan, M., & Woolsey, I. (2015). Teacher education for social justice: Mapping identity spaces. *Teaching and Teacher Education, 46*, 62–71

Brandt, C. F., Burak, D., & Kluber, T. E. (Orgs.) (2016). *Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. Editora UEPG.

Burak, D. (2016). Uma perspetiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. In C. F. Brandt, D. Burak, & T.E., Kluber (Eds.), *Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. (pp.17–40). UEPG.

Burkhardt, H. (2018). Ways to teach modelling – a 50 year study. *ZDM-Mathematics Education, 50*(1), 61–75. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0899-8

Burkhardt, H. (2021). Modelling in school mathematics: Past achievements – Current challenges. In G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications, ICTMA 19* (pp. 529–539). Springer

Burkhardt, H., & Pollak, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms. *ZDM – Mathematics Education, 38*(2), 178–195.

Camps, V. (2022). *Elogio da Felicidade*. Edições 70.

Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Silva, J. C., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P. (2020). Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática. DGE.

Canavarro, A. P., Brunheira, L., Vicente, M., & Brito, S. (2022). O poder das representações múltiplas e suas conexões: teoria e prática no 3. º ano do novo programa de matemática. *Educação e Matemática, 166*, 7–12.

Cánovas, C. M. (2014). Curricular landscapes, neoliberal densities: Curriculum reform and research in Chile. In W. F. Pinar (Ed.), *International handbook of curriculum research* (pp. 112–117). Routledge.

Carreira, S. (2001). Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. *Mathematical Thinking and Learning, 3*(4), 261–287. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0304_02

Carreira, S. (2011). Looking deeper into modelling processes: Studies with a cognitive perspective – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 159-163). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_17

Carreira, S., & Blum, W. (2021a). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: Parte 1. *Quadrante, 30*(1), 1–7. https://doi.org/10.48489/quadrante.24926

Carreira, S., & Blum, W. (2021b). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: Parte 2. *Quadrante, 30*(2), 1–8. https://doi.org/10.48489/quadrante.26132

Carrejo, D. J., & Marshall, J. (2007). What is mathematical modelling? Exploring prospective teachers' use of experiments to connect mathematics to the study of motion. *Mathematics Education Research Journal, 19*(1), 45–76.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Comer, J. (2015) Developing social capital in schools. *Society, 52*, 225–231. https://doi.org/10.1007/s12115-015-9891-5

Creswell, J., & Guetterman, T. (2020). *Educational Research—Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Pearson Merril Prentice Hall.

Dale, R. (2005). Globalisation, knowledge economy and comparative education. *Comparative Education*, *41*, 117–149. https://doi.org/10.1080/03050060500150906

D'Ambrosio, U. (2007). Peace, social justice and Ethnomathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph, 1*, 25–34.

D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical modeling: Cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 89–98.

D'Ambrosio, U. (2015). From mathematics education and society to mathematics education and a sustainable civilization: A threat, an appeal, and a proposal. In S. Mukhopadhyay, & B. Greer (Eds.), *Proceedings of the 8th International Mathematics Education and Society Conference* (Vol.1, pp. 19–32). Mathematics Education and Society Conference.

Davis, A. (2020). *A Liberdade é uma luta constante.* Antígona.

De Lissovoy, N., Means, A. J., & Saltman, K. (2015). *Toward a New Common School Movement*. Routledge.

Dean. J. (2013). Living Algebra, living wage. In E. Gutstein, & B. Peterson (Eds.), *Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers* (pp. 67–68). Rethinking Schools.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.) (2018). *The Handbook of Qualitative Research*. Sage.

Dewey, J. (2001). Pode a educação participar na reconstrução social? *Currículo sem Fronteiras, 1*(2), 189–193.

Domingos, A. (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino aprendizagem. In A. P Canavarro (Org.), *20 anos de temas na EeM* (pp. 126–136). Associação de Professores de Matemática.

Donnelly, C. (2000). In pursuit of school ethos. *British Journal of Educational Studies, 48*(2), 134–154. https://doi.org/10.1111/1467-8527.t01-1-00138

Dooley, L. M. (2002). Case study research and theory building. *Advances in Developing Human Resources, 4*(3), 335–354. https://doi.org/10.1177/1523422302043007

Down, B., Smyth, J., & Robinson, J. (2019). Problematising vocational education and training in schools: Using student narratives to interrupt neoliberal ideology. *Critical Studies in Education, 60*(4), 443–461.

Durkheim, E. (2016). *Da Divisão do Trabalho Social.* Edipro Publisher.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of comprehension in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches surl'enseignement des mathématiques? *Práxis Educativa, 7*(2), 305–330.

English, L. D. (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D. (2018). Young Children's Statistical Literacy in Modelling with Data and Chance. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_17

English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 156–163.

English, L. D., Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal, 16*, 58–79. https://doi.org/10.1007/BF03217401

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In M. Wittrockk (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed., pp. 119–161). MacMillan.

Estêvão, C. (2012). *Direitos humanos, justiça e educação na era dos mercados*. Porto Editora.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process.*ZDM–Mathematics Education, 38*, 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Ferri, R. B. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou, (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 2080–2089). European Society for Research in Mathematics Education.

Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer International Publishing.

Ferri, R. B., & Blum, W. (2013). Barriers and motivations of primary teachers for implementing modelling in mathematics lessons. In *Proceedings of Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 8, pp. 6–10). European Society for Research in Mathematics Education.

Ferruzzi, E. C., & Almeida, L. M. W. D. (2015). Diálogos em modelagem matemática. *Ciência & Educação, 21*, 377–394.

Flick, U. (2009). *An introduction to qualitative research* (4th ed.). Sage Publications Ltd.

Foucault, M. (2010). *A Hermenêutica do Sujeito* (3.ª Edição). Martins Fontes.

Foucault, M. (2018). *Vigiar e Punir*. Grupo Almedina: Edições 70

François, K., & Stathopoulou, C. (2012). In-Between critical mathematics education and ethnomathematics. A philosophical reflection and an empirical case of a romany students' group mathematics education. *Journal for Critical Education Policy Studies, 10*(1), 234–247.

Frankenstein, M. (1987). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. In I. Shor (Ed.), *Freire for the classroom: A sourcebook for liberatory teaching* (pp. 180–210). Boyton/Cook.

Frankenstein, M. (2009). Developing a critical mathematical numeracy through real real-life word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. V. Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds* (pp. 111–130). Brill Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087909383_008

Frankenstein, M. (2012).Quantitative form in arguments. In S. Mukhopadhyay, & W.M Roth (Eds.), *Alternative Forms of Knowing (in) Mathematics. Celebrations of Diversity of Mathematical Practices.* (Vol. 24, pp.23 - 297). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-921-3_14

Frankenstein, M. (2013). Reading the world with Math. In E. Gutstein, & B. Peterson (Eds.), *Rethinking mathematics: Teaching social justice by the numbers* (pp. 30–40. Rethinking Schools.

Fraser, N. (2009). *Scales of justice: Reimagining political space in a globalizing world*. Cambridge University Press.

Fraser, N. (2022). *Justiça interrompida: Reflexões críticas sobre a condição "pós-socialista"*. Boitempo Editoria.

Freire, P. (2001). *Educação e Mudança*. Paz e Terra.

Freire, P. (2003). *Educação como prática da Liberdade*. Paz e Terra.

Freire, P. (2010). *Pedagogia da Esperança* (16.ª Edição). Paz e Terra.

Freire, P. (2018a). *Conscientização*. Editora Cortez.

Freire, P. (2018b). *Pedagogia do Oprimido*. Edições Afrontamento.

Freire, P. (2019). *Pedagogia como prática de Liberdade* (53.ª Edição). Paz e Terra.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education – China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Fulton, E. W., Wickstrom, M. H., Carlson, M. A., & Burroughs, E. A. (2019). Teachers as learners: Engaging communities of learners in mathematical modelling through professional development. In G. Stillman, & J. Brown (Eds) *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 125–142). Springer.

Galbraith, P. (2024). Modelling, teaching, and reflecting: What more I have learned? In H.S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_10

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 143–162 https://doi.org/10.1007/BF02655886

Gau, T. R. (2005). *Learning to teach math for social justice*. Doctoral Thesis, University of Wisconsin-Madison.

Geiger, V., Galbraith, P., Niss, M., Delzoppo, C. (2022). Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. In *Educational Studies in Mathematics, 109*, 313–336. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10039-y

Gibbs, G. (2018). *Analyzing qualitative data*. SAGE Publications Ltd. https://doi.org/10.4135/9781526441867

Gildehaus, L., & Liebendörfer, M. (2021). CiviMatics: Mathematical modelling meets civic education. *Exploring New Ways to Connect: Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 1, 167–171).

Giroux, H. A. (2004). Cultural Studies and the Politics of Public Pedagogy: Making the Political More Pedagogical. *Parallax, 10*(2), 73–89. https://doi.org/10.1080/1353464042000208530

Giroux, H. (2014). *Neoliberalism's war on higher education*. Between the lines press.

Giroux, H. (2022). Critical pedagogy. In U. Bauer, U. H. Bittlingmayer, & A. Scherr (Eds.), *Handbuch Bildungs- und Erziehungssoziologie. Bildung und Gesellschaft*. (pp 717–732). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-30903-9_19

Giroux, H. (2023). *Critical theory and educational practice* (4.ª edition). Routledge.

Giroux, H. (2024a). *Teachers as intellectuals: Toward a critical pedagogy of learning*. Bloomsbury Academic

Giroux, H. (2024b). Educators as public intellectuals and the challenge of fascism. *Policy Futures in Education*, *22*(8), 1533–1539. https://doi.org/10.1177/14782103241226844

Graham, A. (2012). Revisiting school ethos: The student voice. *School Leadership & Management, 32*(4), 341–354. https://doi.org/10.1080/13632434.2012.708330

Gramsci, A. (1971). *Selection from the prison notebooks*. International Publishers.

Greefrath, G., & Carreira, S. (2024). Mathematical applications and modelling in mathematics education. In J. Wang (Ed.) *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education* (Vol.1, pp. 417–421). The International Congress on Mathematical Education. https://doi.org/10.1142/9789811287152_0046

Greer, B., & Skovsmose, O. (2012). Seeing the cage? The emergence of critical mathematics education. In B. Greer; & O. Skovsmose (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 1–20). Sense Publishers.

Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies — Overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI Study Series* (Vol. 10, pp 219–224). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_22

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for Life: Mathematics and children's experience. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI Study Series,* (Vol 10, pp 89–98) Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_7

Gonzalez, L. (2009). Teaching mathematics for social justice: Reflections on a community of practice for urban high school mathematics teachers. *Journal of Urban Mathematics Education, 2*(1), 22–51. https://doi.org/10.21423/jume-v2i1a32

Gorgorió, N., & Planas, N. (2005). Cultural distance and identities-in-construction within the multicultural mathematics classroom. *ZDMMathematics Education, 37*, 64–71. https://doi.org/10.1007/BF02655715

Guerrero, O. (2008). Educación matemática crítica: Influencias teóricas y aportes. *Evaluación e Investigación, 1*(3), 63-78.

Gutiérrez, R. (2002). Enabling the practice of mathematics teachers in context: Toward a new equity research agenda. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(2–3), 145–187. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023_4

Gutiérrez, R. (2008). A "gap-gazing" fetish in mathematics education? Problematizing research on the achievement gap. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 357–364. http://www.jstor.org/stable/40539302

Gutiérrez, R. (2012). Context matters: How should we conceptualize equity in mathematics education? In B. Herbel-Eisenmann, J. Choppin, D. Wagner, & D. Pimm (Eds.), *Equity in Discourse for Mathematics Education. Mathematics Education Library*, (pp. 17–33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2813-4_2

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(1), 37–68. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.1.0037

Gutiérrez, R. (2018). Why we need to rehumanize mathematics. In *Annual Perspectives in Mathematics Education: Rehumanizing mathematics for students who are Black, Latinx, and Indigenous* (pp.1–10). National Council of Teachers of Mathematics.

Gutiérrez, R., Kokka, K., & Myers, M. (2024). Political conocimiento in teaching mathematics: Mathematics teacher candidates enacting their ethical identities. *Journal of Mathematics Teacher Education, 27*, 755–781. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09627-5

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, latino school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 37–73.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Routledge.

Gutstein, E. (2007). Connecting community, critical, and classical knowledge in teaching mathematics for social justice. *The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph, 1*, 109–118.

Gutstein, E. (2013). Home buying while brown or black. In E. Gutstein, & B. Peterson (Eds.), *Rethinking mathematics: Teaching social justice by the numbers* (pp. 61 – 66). Rethinking Schools.

Gutstein, E. (2016). Our issues, our people—math as our weapon: Critical mathematics in a Chicago neighborhood high school. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(5), 454–504.

Gutstein, E. (2018). The struggle is pedagogical: Learning to teach critical mathematics. In P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today. ICME-13 Monographs* (pp 131–143) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_8

Gutstein, E., & Peterson, B. (Eds.) (2013). *Rethinking mathematics: Teaching social justice by the numbers* (2.ª edição). Rethinking Schools.

Haines, C., & Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA, 20*(3), 129–138.

Haines, C., & Crouch, R. (2013). Remarks on a modeling cycle and interpreting behaviours. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp. 145–154). Springer.

Hobbes, T. (2017). *Os elementos da lei natural e política*. Editora Ícone.

Hooks, B. (2003). *Teaching community: A pedagogy of hope*. Routledge.

Hume, D. (2002). *Tratado da natureza humana* (2.ª edição). Fundação Calouste Gulbenkian.

Hytten, K., & Bettez, S. C. (2011). Understanding Education for Social Justice. *The Journal of Educational Foundations*; *25*, 7– 24.

IAVE (2015). *Relatório Nacional 2010-2014 de Provas Finais de 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico*. Instituto de Avaliação Educativa.

IREM Grenoble (1980). Quel est l'age du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*, *323*, 235–243. IREM.

Jacobini, O. R. (2004). *A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula*. Tese de Doutoramento em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. (2006). Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da educação matemática crítica. *Bolema, 25*, 71–88.

Jurdak, M. (2016). Real-world problem solving from the perspective of critical mathematics education. In *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics* (pp 109–120). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08204-2_7

Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129–149). Springer International Publishing.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 196–208.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education, 38*(3), 302–310.

Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications–Differentiating perspectives and delineating commonalties. In *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 2035-2041). University of Cyprus.

Kaiser-Messmer, G. (1987). Application-oriented mathematics teaching. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, & L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics.* (pp. 66–72). Ellis Horwood,

Kaiser-Messmer, G. (1991). *Application-orientated mathematics teaching: a survey of the theoretical debate*. Ellis Horwood.

Kant, I. (2011). *Fundamentação da Metafísica dos Costumes.* Edições 70.

Kincheloe, J. (2012). *Teachers as researchers qualitative inquiry as a path to empowerment*. Routlegde.

Klüber, T. E. (2016). Modelagem matemática: Revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. *Modelagem matemática, 41*.

Kohlberg, L. (2006). *Psicologia de desenvolvimento moral- teoria, dados e implicações*. Edições Almedina.

Kohn, A. (2015). Four reasons to worry about "personalized learning". *Teach and Learning, 35*(9), 14–15.

Kokka, K. (2019). Healing-informed social justice mathematics: Promoting students' sociopolitical consciousness and well-being in mathematics class. *Urban Education, 54*(9), 1179–1209. https://doi.org/10.1177/0042085918806947

Kop, P. M., Janssen, F. J., Drijvers, P.H., Driel, J. H. (2020). The relation between graphing formulas by hand and students' symbol sense. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 137–161. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09970-3

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janiver (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Heger, M. (2001). Mathematical abilities that are most needed for success beyond school in a technology based age of information. *The New Zealand Mathematics Magazine, 38*, 1-17.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007) Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763–802). Information Age Publishing.

Lima, F. H., & Araújo, J. L. (2021).Em direção a uma caracterização da intervenção docente: ações de um professor em uma prática de modelagem matemática. *Revista De Ensino De Ciências E Matemática, 12*(2), 1–25.

Lima, L. (2005). Escolarizando para uma educação crítica: A reinvenção das escolas como organizações democráticas. In A. Teodoro, & C. A. Torres (Orgs.), *Educação Crítica e Utopia. Perspectivas para o Século XXI* (pp. 159-173). Edições Afrontamento.

Lima, L. (2019). Uma pedagogia contra o outro? Competitividade e emulação. *Educação e. Sociedade., 40*(1), 1–18.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *ZDM–Mathematics Education, 38,* 96–112.

Lopes, J. T., Louça, F., & Ferro, L. (2017). *As classes populares*. Bertrand.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM–Mathematics Education, 38*, 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 2*(31), 285–311.

Madruga, Z., & Biembengut, M. S. (2016). *Modelagem e aleg(o)rias: Um enredo entre cultura e educação*. Editora Appris.

Maffettone, S., & Veca, S. (2005). *A ideia de justiça de Platão a Rawls*. Martins Fontes.

Marcuse, H. (2012). *O homem unidimensional*. Letra Livre.

Marx, K. (1971). *Crítica del Programa de Gotha.* Ricardo Aguilera.

Matos, J. F. (2005). Matemática, educação e desenvolvimento social – questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática. *In Actas Educação Matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 69–81). Universidade de Lisboa.

Matos, J. F., & Carreira, S. (1996). The quest for meaning in students' mathematical modelling activity. In J. P. Ponte, & J. F. Matos (Eds.*), Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 3–345). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

McLaren, P. (2015). *Life in schools an introduction to critical pedagogy in the foundations of education*. Routledge.

McLaren, P. (2018). *Revolutionary multiculturalism. Pedagogies of dissent for the new millennium*. Routledge.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2014). *Research in education evidence-based inquiry*. Pearson.

Mendonça, L. O., & Lopes, C. E. (2017). Reflexões sobre a ação pedagógica no desenvolvimento da modelagem matemática. *Zetetiké, 25*(2), 305–323.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. Jossey Bass.

Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2020). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook*. SAGE Publications, Inc.

Mill, J. S. (2023). *Sobre a Liberdade*. Ideias de Ler.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. ME–DGIDC.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. ME–DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico – 1.º, 2.º e 3.º Ciclos*. ME–DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2017a). *Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania.* ME–DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2017b). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* ME–DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2018a). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*. ME–DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2018b). *Referencial de Educação Ambiental para a Sustentabilidade. ME–DGE.*

Ministério da Educação e Ciência (2021). *Aprendizagens Essenciais da Matemática para o Ensino Básico*. ME–DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2023). Referencial de Educação para os Media. ME–DGE.

Monteiro, A. R. (2006). História da Educação – Do 'direito de educação' ao 'direito à educação'. Cortez Editora.

Monteiro, A. R. (2017). *Uma Teoria da Educação*. Edições Piaget.

Moretti, M. T., & Thiel, A. A. (2012). O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. *Práxis Educativa*, 379–396.

Moses, R., & Cobb, C. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Beacon Press.

Murillo, J., & Hernández-Castilla, R. (2014). Liderando escuelas justas para la justicia social. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social, 3*(2), 13-32.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2017). Princípios para a ação. Assegurar a todos o sucesso em Matemática. Associação de Professores de Matemática.

Ng, D. K. E., & Lee, N. H. (2015). Introduction: Mathematical modeling Outreach in Singapore. In N. H. Lee, & K. E. D. Ng (Eds.), *Mathematical modeling: From Theory to Practice* (Vol. 8 pp. 1-17) . National Institute of Education.

Nicol, C., Bragg, L. A., Radzimski, V., Yaro, K, Chen, A., & Amoah, W. (2019). Learning to teach the M in/for STEM for social justice. *ZDM–Mathematics Education, 51*, 1005–1016. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01065-5

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp 43–59). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_4

Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *Ems Newsletter, 86*, 49–52.

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2017). Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. In G. Kaiser (Ed.),

Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs (pp 235–248) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_15

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math, 102*, 9–28 https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD (2021). *Adapting curriculum to bridge equity gaps: Towards an inclusive curriculum*. *OECD Publishing*. https://doi.org/10.1787/6b49e118-en .

OECD (2024). *Education at a Glance 2024.* OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/c00cad36-en .

Oliveira, D. P. A., Rosa, M., & Viana, M. da C. V. (2016). Pedagogia culturalmente relevante e fundos de conhecimento em aulas de matemática. *Zetetike, 23*(2), 329–346. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646542

Orey, D. C., & Rosa, M. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. *Revista Horizontes, 25*(2), 197–206.

Orey, D. C., & Rosa, M. (2018). Explorando a abordagem dialógica da etnomodelagem: Traduzindo conhecimentos matemáticos local e global em uma perspectiva sociocultural. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11*(1), 179–210.

Pacheco, J. A. (2019). *Inovar para mudar a escolar*. Porto Editora.

Pais, A., Fernandes, E., Matos, J. F., & Alves, S. (2012). Recovering the meaning of "critique" in critical mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 32*(1), 28–33.

Perrenoud, P. (2001). *A pedagogia na escola das diferenças* (2.ª Edição). Artmed Editora.

Peterson, B. (2013). *Teaching math across the curriculum.* In E. Gutstein, & B. Peterson (Eds.), *Rethinking mathematics: Teaching social justice by the numbers* (pp. 9–18). Rethinking Schools.

Platão (2007). *A república* (10.ª edição). Fundação Calouste Gulbenkian.

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educ Stud Math, 2*, 393–404. https://doi.org/10.1007/BF00303471

Pollak, H. (2003). A history of the teaching of modelling. In G. Stanic, & J. Kilpatrick (Eds.), *A History of School Mathematics* (pp. 647–671). NCTM.

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling—A conversation with Henry Pollak. *In Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 th ICMI Study* (pp. 109–120). International Comission on Mathematical Instruction.

Pombo, O. (2000). *Quatro textos excêntricos*. Relógio d'Água.

Ponte, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática, 23*, 15–19.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, 2,* 93–169.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006a). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5–27). SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2006b). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J.P. Ponte (Ed.) *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp.*13*–30). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, 24*(2), 11–134.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Gomes, P. (2022). Representações e raciocínio na aula de matemática. *Educação e Matemática, 166*, 39–43.

PORDATA. (2023). Índice de envelhecimento e outros indicadores de envelhecimento. Recuperado de https://www.pordata.pt

Powell, A. B. (2022). Decolonizing mathematics instruction: Subordinating teaching to learning. *Bolema, 36* (73), 1–10. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73e01

Rawls, J. (2013). *Uma teoria da justiça* (3.ª edição). Editorial Presença.

Reeve, J., & Tseng, C. M. (2011). Agency as a fourth aspect of students' engagement during learning activities. *Contemporary educational psychology, 36*(4), 257–267.

Ricoeur, P. (2016). *Hermeneutics and the human sciences: Essays on language, action and interpretation*. (Reprint) Cambridge University Press.

Roldão, C., Abrantes, P., Mauritti, R., & Teixeira, A. (2011). Os jovens de classes desfavorecidas e a escola: o que mudou com o programa TEIP? In Observatório da Juventude (Ed.), *Colóquio Olhares sobre os jovens em Portugal: Saberes, Políticas, Acções* (pp. 1–25). Instituto de Ciências Sociais.

Rosa, M., & Amaral, A. (2014). *Quality assurance in higher education: Contemporary debates*. Springer.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2012). A modelagem como um ambiente de aprendizagem para a conversão do conhecimento matemático. *Bolema, 26*, 261–290.

Rosa, M., Orey, D.C. (2015). Social-critical Dimension of Mathematical Modelling. In G Stillman, W. Blum, W., M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice.*

International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. (pp. 385–395). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_32

Rousseau, J. (2011). *Discourse on the origin and foundations of inequality among men.* Bedford/St. Martins.

Rubel, L. H., & Nicol, C. (2020). The power of place: spatializing critical mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(3), 173–194. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1709938

Rubel, L. H., Nicol, C., & Chronaki, A. (2021). A critical mathematics perspective on reading data visualizations: Reimagining through reformatting, reframing, and renarrating. *Educational Studies Mathematics, 108*, 249–268. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10087-4

Russel, B. (2000). As funções de um professor. In O. Pombo (Ed.), *Quatro textos excêntricos* (pp.71–85). Relógio d'Água.

Sacristán, J. G. (2017). *O currículo. Uma reflexão sobre a prática*. Editora Penso.

Sandel, M. J. (2018). Populism, liberalism, and democracy. *Philosophy & Social Criticism, 44*(4), 353–359.

Santos, A. F. (2014). Ensinar a pensar através dos números: o princípio moral da Matemática. In *Atas do XII Congresso da SPCE* (pp. 809–819). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos. A. F. (2015). A cidadania através da literacia matemática. In S. Pereira, & M. Toscano (Eds.), *Literacia, Media e Cidadania – Livro de Atas do 3.º Congresso* (pp. 9–19). Centro de Estudos de Comunicação e Sociedade.

Schukajlow, S., & Blum, W. (2023). Methods for teaching modelling problems. In G. Greefrath, S. Carreira, & G. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp 327–339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_20

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. *ZDM–Mathematics Education, 50*, 5–18. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Seiça, M. A. B. (2011). O bem do aluno e a justiça como dimensões éticas da docência: Concepções de professores. *Revista de Educação, Vol. XVIII*, n.º 2, 5–29.

Seiça, M. A. B. (2016). *Labirintos da justiça na escola: Perspetivas de alunos e professores*. De Facto Editores.

Siller, H.S., Geiger, V., & Kaiser, G. (2024). Researching mathematical modelling education in disruptive times–An introduction. In H.S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds,), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp 3–11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_1

Silva, C. D., & Kato, L. A. (2012). Quais elementos caracterizam uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica? *Bolema, 26*, 817–838.

Simic-Muller, K. (2019). "There Are Different Ways You Can Be Good at Math": Quantitative Literacy, Mathematical Modeling, and Reading the World. *PRIMUS, 29*(3–4), 259–280. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1530705

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematical education*. Kluwer Academic Publishers.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Universidad de los Andes.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 13*(14), 66–91.

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica: Incerteza, matemática, responsabilidade*. Cortez.

Skovsmose, O. (2012a). *An invitation to critical mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Skovsmose, O. (2012b). Matemática como discurso. *Bolema, 26*(43), 773–790.

Skovsmose, O. (2020). Critical mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_34

Skovsmose, O. (2021). Mathematics and crises. *Educational Studies in Mathematics, 108*(1), 369–383.

Skovsmose, O. (2023). A philosophy of critical mathematics education. In *Critical Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp.233–245). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5_18

Skovsmose, O. (2024). Mathematics is indefinite: An ethical challenge. In P. Ernest (Ed.), *Ethics and Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 13–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-58683-5_2

Skovsmose, O., & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. In P. Valero, & R. Zevembergen (Eds.), *Researching the sócio-political dimension of Mathematics*

Education: Issues of power in theory and methodology (pp. 207–226). Kluwer Academic Publishers.

Skovsmose, O., & Greer, B. (2012). Seeing the cage? The emergence of critical mathematics education. In O. Skovsmose, & B. Greer (Eds.), *Opening the Cage: Critique and Politics of Mathematics Education* (pp. 1–20). Sense Publishers.

Skovsmose, O., Lima, P., & Penteado, M. G. (2023). Pedagogical imagination in mathematics teacher education. *Education Sciences, 13*(10), 1059.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002a). Democratic access to powerful mathematical ideas. In L. English (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 383–408). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002b). Quebrando a neutralidade política: o compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia. *Quadrante, Vol. 11*, N° 1, (pp. 7 – 28).

Skovsmose, O., Yasukawa, K., & Ravn, O. (2015). Scripting the world in mathematics and its ethical implications. In P. Ernest, & B. Siraman (Eds.), *Critical Mathematics Education: Theory, Praxis and Reality* (pp. 255-281). Information Age Publishing.

Sloterdijk, P. (2013). *In the world interior of capital: Towards a philosophical theory of globalization*. Polity.

Smith, C., & Morgan, C. (2016). Curricular orientations to real-world contexts in mathematics. *The Curriculum Journal, 27*(1), 24–45. https://doi.org/10.1080/09585176.2016.1139498

Smyth, J. (2011). *Critical pedagogy for social justice*. Continuum.

Smyth, J. (2016). Puncturing notions of precarity through critical educational research on young lives in Australia: Towards a critical ethnography of youth. *Ethnography and Education, 11*(2), 129–141. https://doi.org/10.1080/17457823.2015.1040429

Souza, E. G., & Barbosa, J. C. (2014). Contribuições teóricas sobre aprendizagem matemática na modelagem matemática. *Zetetiké, 22*(1), 31–58.

Stake, R. E. (2008). Qualitative case studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (3rd ed., pp. 119–149). Sage Publications, Inc.

Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM–Mathematics Education, 47*, 1255-1267.

Stillman, G. (2019). State of the art on modelling in mathematics education—Lines of inquiry. In G. Stillman, & J. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education ICME-13 Monographs* (pp. 1-20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2013). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp.385–398). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_33

Stillman, G., & Galbraith, P. (2012). Mathematical modelling: Some issues and reflections. In W. Blum, R.B. Ferri, & K. Maaß (Eds.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität: Festschrift* (pp.97–105). Springer

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In J Watson and K Beswick (Eds.), Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. (pp. 688–707). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Stinson, D. (2014). Teaching Mathematics for Social Justice: An Ethical and Moral Imperative?. *JUME, 7*(2), 1–5.

Stinson, D., Bidwell, C. & Powell, G. (2012). Critical pedagogy and teaching mathematics for social justice. *The International Journal of Critical Pedagogy, 4*(1), 76–94.

Tanner, H., & Jones, S. (1995). Teaching mathematical thinking skills to accelerate cognitive development. In *PME Conference* (Vol. 3, pp. 3-121). The Program Committee of the 18th PME Conference.

Teodoro, A. (2005). Novos modos de regulação transnacional das políticas educativas. Evidências e possibilidade. In A. Teodoro, & C. A. Torres (Orgs.), *Educação Crítica e Utopia. Perspectivas para o Século XXI* (pp. 159–173). Edições Afrontamento.

Teodoro C., & Torres, C. A. (2005). *Educação crítica e utopia. Perspectivas para o século XXI*. Edições Afrontamento.

Tracey, K. (2007). *The impact of human resources capital on ethnic minority middle school students, engagement in a mathematics community of practice and their mathematics identity*. Doctoral *Thesis*, University of North Carolina.

Tremaine, R., Hagman, J. E., Voigt, M, Damas, S.,& Gehrtz, J. (2022). You don't want to come into a broken system: perspectives for increasing diversity in STEM among undergraduate calculus program stakeholders. *International Journal of Research in Undergraduated Mathematics Education. 8*, 365–388. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00184-x

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M. J., & Pérez-Pascual, M. A. (2023). Learning difficulties with the

concept of function in maths: A literature review. *Educ. Sci., 13*, 495. https://doi.org/10.3390/educsci13050495

Turner, E. (2003). *Critical mathematical agency: Urban middle school students engage in mathematics to investigate, critique, and act upon their world*. Doctoral *Thesis*, University of Texas.

Valencia-Gutiérrez, D. (2019). Diagnóstico y solución a la injusticia en Nancy Fraser e Iris Young. ¿Redistribución o reconocimiento? *Revista Filosofía UIS, 18*(1), 67–88. http://dx.doi.org/10.18273/revfil.v18n1-2019003

Valero, P. (2023). A cultural–political reading of school mathematics curriculum reform. In Y. Shimizu, & R. Vithal (Eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World. New ICMI Study Series* (pp.545–548). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_37

Valero, P., Andrade-Molina, M., & Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: De la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 18*(3), 287–300. https://doi.org/10.12802/relime.13.1830

Veleda, G., & de Almeida, L. (2009). O que constitui 'realidade'em uma atividade de modelagem matemática? In *I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia* (pp. 1052–1065). Universidade Tecnológica Federal do Paraná -

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 257–276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_16

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*, (19) 63–86.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, 8*(16), 133–148.

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matematica. *Espaço Plural, 18*(36), 219–251.

Viseu, F. (2015). A atividade de alunos do 9.º ano com tarefas de modelação no estudo de funções. *REVEMAT*, *10*(1), 24–51.

Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3. ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de

modelação matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 347–374.

Vithal, R. (2003). *In search of a pedagogy of conflict and dialogue for mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Vithal, R. (2012). Mathematics education, democracy and development: Exploring connections. *Pythagoras, 33*(2), 1–14.

Vithal, R., Brodie, K., & Subbaye, R. (2024). Equity in mathematics education. *ZDMMathematics Education, 56*, 153–164. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01504-4

Voss, R., & Rickards, T. (2016). Promoting students' self-directed learning ability through teaching mathematics for social justice. *Journal of Education and Practice, 7*(26), 77–82.

Walzer, M. (2019). *Thick and thin: Moral argument at home and abroad*. University of Notre Dame Pess.

Wright, P. (2016). Social justice in the mathematics classroom. *London Review of Education 14*(2), 104–118. https://doi.org/10.18546/LRE.14.2.07

Yin, R. K. (2017). *Case study research – Design and methods*. (6.ª Edition). Sage Publications.

Yolcu, A., & Kirchgasler, K. L. (2024). Social (justice) mathematics: Racializing effects of ordering pedagogies and their inherited regimes of truth. *Educational Studies Mathematics, 116*, 351–370 https://doi.org/10.1007/s10649-023-10289-y

Young, I. M. (1992). Five Faces of Oppression In T. E. Wartenberg (Ed.), *Rethinking Power* (pp. 174–195). State University of New York Press.

Young, I. M. (2022).*Justice and the politics of difference.* Princeton University Press

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 89–112.

Zinn, H. (2018). *You can't be neutral on a moving train: A personal history of our times*. Beacon Press.

Legislação

Decreto-Lei n.º 46/86 de 14 de outubro. Diário da República n.º237/86. I Série. Lei de Bases do Sistema Educativo. Assembleia da República. Lisboa

Decreto-Lei n.º 75/2008 de 22 de abril. *Diário da República, 1.ª Série, n.º 79.* Lisboa: Ministério da Educação.

Decreto-Lei n.º 41/2012 de 21 de fevereiro. *Diário da República, 1.ª Série, n.º 37.* Lisboa: Ministério da

Educação.

Decreto-Lei n.º 139/2012 de 5 de julho. *Diário da República, 1.ª Série, n.º 129*. Lisboa: Ministério da Educação.

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. *Diário da República, 1.ª Série, n.º 129.* Lisboa: Ministério da Educação.

Despacho n.º 5908/2017, de 5 de julho. Diário da República, 2.ª Série, n.º 128. Lisboa: Ministério da Educação.

APÊNDICES

Apêndice 1: Tarefa de Modelação 8.º Ano - T1: Distribuição de Água no Planeta

Apêndice 2: Tarefa de Modelação 8.º Ano T2: Distribuição real de água em diferentes países

Apêndice 3: Tarefa de Modelação 8.º Ano T3: Água e desigualdade de género

Apêndice 4: Tarefa de Modelação 8.º Ano T4: Previsão da Escassez Hídrica

Apêndice 5: Tarefa de Modelação 8.º Ano T5: Por que motivo os preços importam?

Apêndice 6: Tarefa de Modelação 8.º Ano T6: Comparação da Pegada Hídrica entre Países

Apêndice 7: Tarefa de 9.º Ano T0: Trabalhadoras de ontem e de hoje

Apêndice 8: Tarefa de Modelação 9.º Ano T1: O trabalho e as Mulheres

Apêndice 9: Tarefa de Modelação 9.º Ano T2.1 O Trabalho e a conquista das 8 horas

Apêndice 10: Tarefa de Modelação 9.º Ano T2.2 As mutações do trabalho

Apêndice 11: Tarefa de Modelação 9.º Ano T3: Retratos da vida de trabalho

Apêndice 12: Tarefa de Modelação 9.º Ano T4: Redistribuição da Riqueza

Apêndice 13: : Tarefa de Modelação 9.º Ano T5: A uberização do trabalho

Apêndice 15: Guião de entrevista final a alunos

Apêndice 16: Guião de entrevista diretor/a do Agrupamento de Escolas/ Escola

Apêndice 17: Guião de entrevista inicial a professores

Apêndice 18: Guião de entrevista final a professores

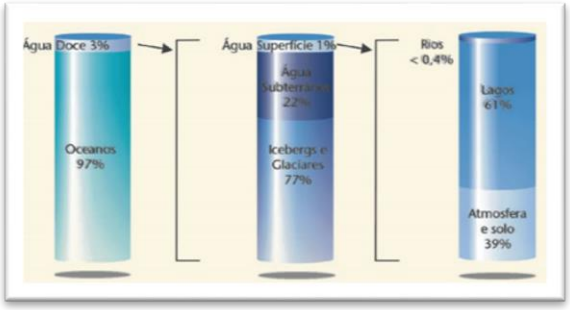
Apêndice 19: Pedido de consentimento aos Encarregados de Educação de participação do seu educando na investigação e da gravação em vídeo/áudio das aulas observadas

Apêndice 20: Pedido de autorização à Direção dos Agrupamentos de Escolas/Escolas para a realização da investigação e da gravação em vídeo/áudio das aulas observadas

Apêndice 1: Tarefa de Modelação 8.º Ano - T1: Distribuição de Água no Planeta

TAREFA 1 – DISTRIBUIÇÃO DA ÁGUA NO PLANETA: O OURO AZUL

Quando se pensa que a água está sempre disponível, comete-se um erro: 97% da água existente é salgada, dos restantes 3% a maioria está nos pólos ou nas altas montanhas no estado sólido. Apenas 0,5% da água encontra-se à disposição do Homem.
Por outro lado, a população humana está a aumentar, o que motiva uma maior procura, e consequente diminuição dos recursos hídricos. A necessidade de água é cada vez maior e aquela que existe é poluída, o que faz com que um recurso à partida renovável deixe de o ser.
Acrescente-se a este facto que os sistemas fluviais da Terra estão desigualmente distribuídos geograficamente e que muita da água utilizada é desperdiçada ou poluída pelos esforços humanos na urbanização e indústria, e a nossa crescente dependência deste recurso vulnerável, usado de uma forma indiscriminada na agricultura, na indústria e nos lares, torna-se apreensivamente evidente.



Distribuição da água na Terra (Unesco)

(a) Considerando a figura representada, completa a tabela.

Reservatórios	Volume aproximado de água em Km3
Oceanos	
Água Doce	
Icebergs e Glaciares	
Água subterrânea	
Água superfície	
Volume da Água total	**1 390 000 000**

(b) Considera uma piscina cuja capacidade é de 1000 l de água, na qual, segundo os valores acima trabalhados, 970 l seriam de água salgada. Quantos litros seriam de água doce? E quantos estariam disponíveis para consumo (água potável)?



(c) Quais te parecem ser os principais motivos para que seja tão importante defender a água atualmente?

PORQUE É QUE A ÁGUA UM OURO AZUL?

Cento e dezassete milhões de pessoas que vivem em emergências não têm acesso a água potável e em muitos países afetados por conflitos, mais crianças morrem de doenças causadas por água insalubre e saneamento deficiente do que pela violência direta em si''

Este ano, a maior parte do apelo da UNICEF é dirigido a crianças e famílias afetadas pelo conflito da Síria, que em breve entrará no seu oitavo ano consecutivo. A UNICEF precisa de cerca de **1,3 mil milhões de euros** para apoiar 6,9 milhões de crianças sírias que vivem na Síria ou como refugiadas em países vizinhos.

Esses valores de investimento correspondem de cinco a oito dias de despesas militares no mundo. "A Índia, por exemplo, gasta oito vezes mais da sua riqueza nacional em orçamentos militares do que em água e saneamento. O Paquistão gasta 47 vezes mais. A Etiópia, um dos países mais pobres do mundo e com uma das taxas de cobertura mais baixas (e algumas das taxas de mortalidade infantil por diarréia mais elevadas), ainda consegue mobilizar um orçamento militar quase 10 vezes superior ao da água e saneamento"

Relatório Mundial das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento dos Recursos Hídricos 2017



(d) Como pode a UNICEF conseguir o montante relativo ao investimento para melhorar as condições de acesso à água com base numa percentagem do orçamento militar dos cinco países que mais gastam?

Apêndice 2: Tarefa de Modelação 8.º Ano T2: Distribuição real de água em diferentes países

TAREFA 2 – Previsão da Disponibilidade e Distribuição Real da Água em diferentes países



Segundo a OMS (Organização Mundial de Saúde), a quantidade de água mínima para atender as necessidades básicas diárias de um indivíduo é de **50 litros.**

(a) Com base neste valor, estabelece um **modelo de previsão** que relacione o número de habitantes de um dado país com a quantidade de água necessária.

Começa por investigar a População Total de cada país e organiza os dados numa tabela.

País	População Total (milhões de habitantes)
Brasil	
Gana	
China	
Etiópia	
Índia	
Portugal	
Emirados	
Palestina	
Canadá	
Kuwait	

(b) Vamos agora investigar o consumo diário e real de água doméstico, per capita, destes países.

País	Água para consumo doméstico diário, por habitante (litros)	Água para consumo doméstico diário, por país (milhões de litros)
Brasil		
Gana		
China		
Etiópia		
Índia		
Portugal		
Emirados		
Palestina		
Canadá		
Kuwait		

(c) Representa graficamente a quantidade de água consumida, ao longo de uma semana, por um habitante do Gana, da Etiópia, de Portugal e do Canadá. Que concluis?

(d) Neste contexto, pessoas dos países desenvolvidos consomem quantas vezes mais água que as pessoas dos países em desenvolvimento?

(e) Qual é o consumo real de água dos dez países? Compara com o valor da previsão.

(f) Quais os países que são mais responsáveis pelo aumento do consumo real de água? Apresenta um motivo.

(g) Qual seria a forma mais justa de distribuir a quantidade de água por cada país, tendo em conta o valor acima encontrado? (Extensão: Proporcionalidade Inversa)

Apêndice 3: Tarefa de Modelação 8.º Ano T3: Água e desigualdade de género

TAREFA 3 – A ÁGUA PARA LÁ DA ESCASSEZ: ÁGUA E DESIGUALDADE DE GÉNERO

Todos os dias, milhares de mulheres e raparigas recolhem água para as suas famílias — um ritual que reforça as desigualdades de género em termos de emprego e de educação.

São as mulheres que suportam o fardo da responsabilidade pela recolha da água, demorando frequentemente até 4 horas por dia a andar, a esperar em filas e a transportar água.



Carregar água faz parte das desigualdades de género. Na zona rural do Benim, as raparigas com idades compreendidas entre os 6 e os 14 anos passam em média 1 hora por dia a recolher água, por comparação com os 25 minutos dos seus irmãos. No Malawi, existem grandes variações na quantidade de tempo destinado à recolha de água com base em fatores sazonais, mas as mulheres passam sempre quatro a cinco vezes mais tempo a fazer esta tarefa do que os homens.

Relatório de Desenvolvimento Humano

As mulheres enfrentam um peso muito maior em termos de tempo na recolha de água, sobretudo nas zonas rurais (minutos por dia)

	Benim, 1998		Gana, 1998/99		Guiné, 2002/03		Madagáscar, 2001	
	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens
Urbano	16	6	33	31	10	3	16	10
Rural	62	16	44	34	28	6	32	8
Nacional	45	12	41	33	23	5	27	9

(a) Representa graficamente a relação entre o tempo diário despendido para recolha de água por uma mulher e por um homem, no meio rural, no Benim e no Gana. Nota: O tempo gasto por uma mulher, M, em horas, comparativamente com o tempo gasto por um homem, h, em horas, é dado por uma expressão do tipo M = k h.

(b) Observa os valores correspondentes ao meio rural de Madagáscar, calcula t (3) e indica o seu significado neste contexto.

(c) Uma mulher do meio rural de Benim demora 56 minutos a recolher água, quanto tempo gasta um homem, na mesma tarefa?

(d) Consideras que esta desigualdade é um fator de desenvolvimento humano? Porquê?

(e) Verificando que os dados apresentados foram recolhidos entre 1998 e 2003, crês que pode ter havido, atualmente, alguma mudança? Porquê?

Apêndice 4: Tarefa de Modelação 8.º Ano T4: Previsão da Escassez Hídrica

TAREFA 4 – PREVISÃO DA ESCASSEZ HÍDRICA

"No ano do relatório, 2017, existiam 600 milhões de pessoas vítimas de escassez hídrica.

Presentemente, 2018, cerca de 800 milhões de pessoas oriundas de 43 países vivem abaixo do limiar mínimo que define a situação de falta de água.

O ritmo a que o declínio hídrico é registado está bem patente nas atuais previsões de evolução futura. Por volta do ano 2030, mais de 3 mil milhões de pessoas poderão viver em países sujeitos a pressão sobre os recursos hídricos."

Relatório de Desenvolvimento Humano, 2017



(a) Admitindo, que o número de pessoas que não têm acesso a água potável aumenta todos os anos em igual número, **prevê** qual será o número total de pessoas que estarão sujeitas a recursos de água muito limitados, no ano 2050.

(b) De acordo com os resultados obtidos, quais as razões que apontas para tal previsão?

(c) Consideras que esta crise de escassez hídrica será transversal a todo o mundo ou haverá países que sejam mais afetados? Porquê? Que soluções apresentarias para que esta realidade mudasse?

Apêndice 5: Tarefa de Modelação 8.º Ano T5: Por que motivo os preços importam?

TAREFA 5 – POR QUE MOTIVO OS PREÇOS IMPORTAM?

Existe uma dimensão internacional relativamente à divisão da riqueza quanto ao preço da água. As pessoas mais carenciadas nas áreas urbanas dos países em desenvolvimento não só pagam, pela aquisição de água, mais do que os residentes da mesma cidade que auferem rendimentos mais elevados, como também despendem mais por este bem do que as populações dos países mais ricos. Algumas das pessoas mais pobres do mundo que vivem nos bairros degradados de Acra e Manila pagam mais pela aquisição de água do que as pessoas que vivem em Londres, Nova Iorque ou Roma.

Em Acra, capital do Gana, e em Guayaquil, no Equador, todas as manhãs há grandes frotas de tanques de água que partem para as povoações pobres, onde a vendem aos lares e a intermediários.

Relatório de Desenvolvimento Humano



Analisa as seguintes situações:

Situação 1

Em Barranquilla, na Colômbia, o preço médio da água é de 0,55 euros por metro cúbico, junto dos prestadores de serviços, ao qual adiciona-se o valor de 4 euros pelo aluguer do contador enquanto que, junto dos camionistas, é de 5,50 euros por metro cúbico.

Situação 2

Nos bairros degradados de Acra, capital do Gana, as pessoas que compram água aos vendedores normalmente gastam 3 euros por uma taxa fixa paga ao vendedor e 3,20 euros por cada metro cúbico de água.

Um habitante de Nova Iorque, cidade dos Estados Unidos da América, paga 1,2 euros por metro cúbico de água consumido e 5 euros pelo aluguer do contador.

(a) Encontra um modelo que descreva ambas as situações e que permita obter quanto terá de pagar um consumidor cujo gasto de água tenha sido 10 metros cúbicos.

(b) Os resultados obtidos estão de acordo com o excerto do Relatório de Desenvolvimento Humano? Porquê?

(c) Quem paga mais em cada uma das situações? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

(d) Cerca de um terço das pessoas sem acesso a uma fonte de água potável vivem com menos de um 1 dólar por dia. E o dobro destas pessoas vive com menos de 2 dólares por dia, como é o caso, de parte, da população do Gana. Compara estes dados com os da situação 2. Que concluis?

Apêndice 6: Tarefa de Modelação 8.º Ano T6: Comparação da Pegada Hídrica entre Países

TAREFA 6 – COMPARAÇÃO DA PEGADA HÍDRICA ENTRE PAÍSES

Um habitante do Suriname tem acesso, em média, a 292 m^3 de água, por ano. Por outro lado, no Kuwait, país do Médio Oriente, este valor desce para 10 m^3, por ano.

Ashna é uma menina que vive em Albina, uma cidade do Suriname, localizada no distrito de Marowijne, que possui cerca de 10.000 habitantes.

Sören é um jornalista norueguês que percorre o mundo a fazer reportagens. Desta vez, foi enviado como principal correspondente de um jornal nacional para cobrir os últimos acontecimentos que ocorrem no Kuwait. Consigo, leva todo o equipamento necessário ao seu trabalho.



(a) Encontra um modelo que permita determinar a pegada hídrica diária em ambas as situações. Nota: Ashna apresenta um consumo indireto de água de 5 m^3 e Sören tem um consumo indireto de água de 30 m^3.

(b) De acordo com o modelo encontrado, ao fim de quantos dias a pegada hídrica de Ashna é superior à de Sören?

(c) Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

Apêndice 7: Tarefa de 9.º Ano T0: Trabalhadoras de ontem e de hoje

TAREFA 0 – Trabalhadoras de ontem e de hoje: a desigualdade salarial como denominador comum

As últimas décadas têm sido prolíferas em elogios à capacidade de trabalho feminina portuguesa, que atinge taxas acima dos 40% e é superior à dos restantes países do Sul da Europa. Mas a verdade é que a tendência não é de agora. Já em 1890 as mulheres representavam 36.4% da população ativa. E embora a ditadura tenha representado um "regresso ao lar", a vontade de pertença ao mercado de trabalho foi rapidamente recuperada.

Nos anos 60 a percentagem de mulheres na população ativa atingiu mínimos históricos, 18,1%. Apesar de que a experiência laboral nas fábricas implicasse uma aproximação ao mundo masculino, isso não era visto com bons olhos. A segregação de género existia dentro das fábricas. Havia máquinas específicas para as mulheres, que eram remetidas para tarefas menos especializadas e mal pagas. O salário das mulheres era metade do salário dos homens.

Mais de 50 anos depois, a diferença salarial esbateu-se, mas continua a existir, sendo tanto mais notória quanto maior é a diferenciação académica. Hoje, o salário de uma mulher com um doutoramento ronda os 1640 €, enquanto o de um homem com a mesma formação ultrapassa os 2300 €.

O crescimento da presença feminina no mercado de trabalho e o aumento da sua escolarização não tem tido efeitos relevantes no acesso a cargos de decisão nas empresas, a que correspondem remunerações mais elevadas.



Fonte: Revista Visão História (Adaptação)

(a) Como explicas as diferenças referidas no texto sobre as taxas de população ativa por parte das mulheres?

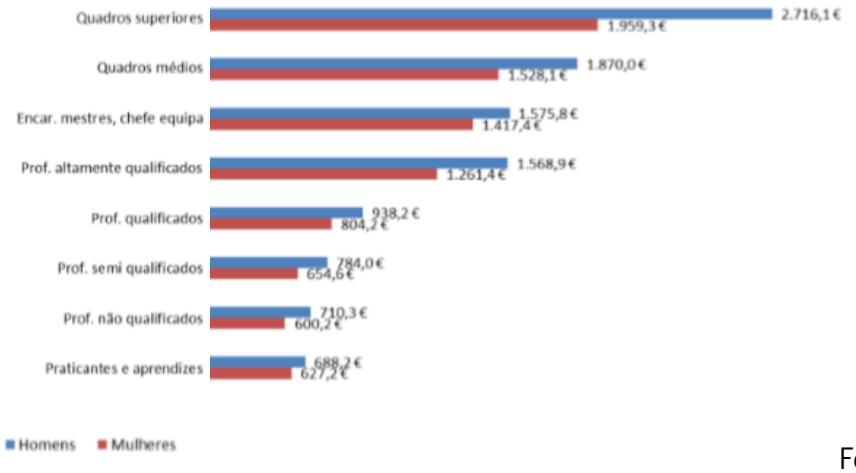
(b) Compara a diferenciação salarial* entre homens e mulheres da situação retratada nos dias de hoje com a situação relativa aos anos 60. O que concluis?

(c) Consideras que o título desta tarefa é apropriado? De que forma? Apresenta uma sugestão alternativa

Apêndice 8: Tarefa de Modelação 9.º Ano T1: O trabalho e as Mulheres

TAREFA 1 – O Trabalho e as Mulheres: Desigualdade Salarial de Género

Remunerações médias mensais (ganho) por níveis de qualificação e sexo



Fonte: GEE/ME

(a) Tendo como referência a informação do gráfico e recorrendo ao cálculo da diferenciação salarial, comenta a seguinte informação: "*A desigualdade salarial entre mulheres e homens é, em grande medida, tanto maior quanto mais elevado o nível de qualificação.*"

(b) A União Europeia instituiu o Dia da Igualdade Salarial. Este dia marca o número de dias extra que as mulheres terão de trabalhar a mais para atingirem o mesmo salário que os homens num determinado ano e varia consoante o país.

Sabendo que, atualmente, em Portugal, as mulheres ganham menos 17,9% de remuneração média mensal de base do que os homens, verifica quando se assinala esse dia em Portugal.

(c) Como se podem inverter ambas as situações e acelerar a igualdade de género/erradicar a disparidade quer salarial quer social?

(d) Considera a seguinte informação:

Analisando fatores como a educação, saúde e sobrevivência, oportunidades económicas, participação política e seguindo um método de quanto mais elevada a percentagem, menor a desigualdade, o Fórum Económico Mundial revela que, globalmente, a igualdade se situa nos 68%, mas em termos económicos desce para os 59% – apesar de esta proporção ser a melhor desde 2008, que à data se situava nos 57%.



Fonte: DN, outubro de 2016 (Adaptação)

Admitindo que a taxa de igualdade económica aumenta todos os anos em igual proporção**,** **prevê** quantos anos serão precisos para atingir igualdade de género económica a nível mundial. O que concluis?

Apêndice 9: Tarefa de Modelação 9.º Ano T2.1 O Trabalho e a conquista das 8 horas

TAREFA 2.1 – O TRABALHO E A CONQUISTA DAS 8 HORAS

Durante a Grande Depressão, nos anos de 1930, o economista britânico John Keynes previa que trabalhar seis horas por dia seria uma realidade para a geração dos seus netos. Ao longo dos últimos 85 anos, a evolução é inegável, embora a previsão de Keynes continue por concretizar.

A semana de 40 horas está prevista na lei desde 1996 mas entre a teoria e a prática a diferença é assinalável. Os números mais recentes mostram que, em Outubro de 2013, os empregados por conta de outrem trabalhavam 43,3 horas semanais, enquanto no setor público o horário semanal aumentou, por lei, de 35 para 40 horas (embora esse valor tenha sido novamente revertido). Fora destas contas fica uma parte da realidade que passa por trabalho não-pago ou invisível.

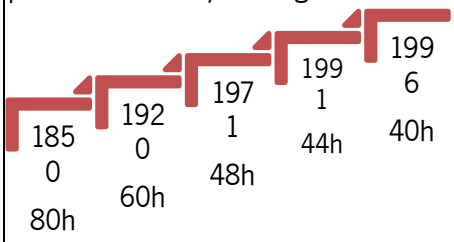
Menos horas e mais trabalho para todos?

Os limites ao tempo de trabalho levaram mais de um século a erguer. É preciso recuar a Maio de 1886 para se assistir àquela que é considerada a génese da luta pela redução da jornada de trabalho do mundo e que, mais tarde, deu origem à comemoração do 1.º de Maio. Milhares de trabalhadores, que eram obrigados a trabalhar 13, 14 e até 18 horas por dia, manifestaram-se nas ruas de Chicago pelas oito horas diárias e o direito ao descanso.

Cinco anos depois, o Papa Leão XIII publicou a encíclica Rerum Novarum, onde defendia limites ao trabalho diário e o respetivo repouso, evidenciando particulares preocupações com as mulheres e as crianças. "(...) O número de horas de trabalho diário não deve exceder a força dos trabalhadores, e a quantidade de repouso deve ser proporcional à qualidade do trabalho, às circunstâncias do tempo e do lugar, à compleição e saúde dos operários", escreveu.

Anos mais tarde, em 1919, e fazendo eco das exigências que emergiam dos movimentos sociais, a recém-criada Organização Internacional do Trabalho (OIT) publicou a primeira convenção sobre as horas de trabalho para a indústria.

Portugal reduziu por duas vezes a duração máxima do trabalho semanal. A primeira em 1991 (das 48 para as 44 horas) e a segunda em 1996 (Lei das 40 horas).



Evolução das conquistas do número de horas de trabalho semanal, em Portugal, a partir do século XIX

Desde meados do século XIX e durante quase todo o século XX assistiu-se a uma melhoria dos direitos dos trabalhadores, fruto das suas lutas, da ação das organizações sindicais, da influência das organizações internacionais. Mas a questão que esteve na base desta evolução mantém-se: como escapar à ditadura do tempo?

E no futuro a profecia das seis horas de trabalho diário de Keynes poderá cumprir-se?



Fonte: 05/03/2015 Público (Adaptação)

(a) Como respondes às duas últimas questões colocadas no artigo?

(b) A redução do horário de trabalho é uma luta secular pela dignidade no Trabalho e pelos direitos de quem trabalha. Concordas com esta afirmação? Como distribuirias o tempo laboral, o tempo para descanso e o tempo de lazer?

(c) Representa graficamente a evolução da redução do número de horas de trabalho em Portugal.

(d) Existiu uma proporção? Como explicas o resultado?

Apêndice 10: Tarefa de Modelação 9.º Ano T2.2 As mutações do trabalho

TAREFA 2.2 - AS MUTAÇÕES DO TRABALHO

A origem da produção têxtil em termos industriais está intrinsecamente ligada à Revolução Industrial. A indústria textil é uma das mais antigas de Portugal e responsável por elevada concentração de trabalho. Perde-se nos fios da história a memória da indústria têxtil no Vale do Ave, instrinsecamente ligada à preponderância do algodão, constituindo um pólo de atração de iniciativas empresariais e de capitais.

Uma fábrica secular de Guimarães, que aposta sobretudo na confeção, necessita cerca de 4000 horas de trabalho semanal para produzir o seu volume de encomendas.



Fonte: Jorge Fernandes Alves, A Indústria Têxtil do Vale do Ave. In MENDES, José Amado; FERNANDES, Isabel (Coord.) - Património e Indústria no Vale do Ave. Vila Nova de Famalicão: Adrave, 2002, p. 372-389.

(a) Encontra um modelo que permita determinar quantos trabalhadores seriam necessários para produzir esse volume de encomendas, desde 1850 até aos dias de hoje.

(b) De acordo com o modelo encontrado, quantos trabalhadores seriam necessários se o horário de trabalho semanal no setor privado fosse igual ao do setor público? E para que a profecia de Keynes se cumprisse?

(c) Como interpretas os resultados obtidos? Considerando os valores encontrados, achas que são compatíveis com manutenção da produtividade laboral? Porquê?

(d) Qual te parece ser o maior desafio atual em termos de produtividade e direitos laborais? O que proporias que considerasses um equílibrio?

Apêndice 11: Tarefa de Modelação 9.º Ano T3: Retratos da vida de trabalho

TAREFA 3 – Retratos de vidas de trabalho: Trabalho e Precariedade Laboral

Portugal é o quarto país da União Europeia com a maior desigualdade salarial (a seguir à Polónia, Roménia e Chipre)
Com uma tendência preocupante: é que esta desigualdade não tem parado de crescer. Como não tem parado de crescer o número de trabalhadores que ganham o salário mínimo.
Fonte: RTP, 28/09/2018

Situação 1: Trabalhadora do Pingo Doce

Muitos funcionários de supermercados sofrem problemas de saúde provocados pelo trabalho, surpreendentemente pesado. Veem os seus horários serem alterados de um dia para o outro. Chegam a ser obrigados a almoçar na rua, no carro, na casa de banho. Isto a troco de salários paupérrimos - o ordenado de um operador de caixa no topo da carreira é de 620 euros [em 2016 era de 601,94 euros].

LUÍSA ALVES - A funcionária do Pingo Doce queixa-se do trabalho duro e intenso, que tem levado colegas a trabalhar sob o efeito de comprimidos para as dores. Mas o problema maior são as mudanças constantes de horários. "Contra tudo o que está estipulado no Contrato Coletivo de Trabalho, que determina turnos planeados com pelo menos um mês de antecedência, acontece muito quererem que eu hoje entre às 7h, amanhã às 11h, depois às 7h, depois às 13h." "Portas-te mal e vais para a peixaria ou para a cozinha, desfiar bacalhau ou pato durante umas horas." Esta é uma das ameaças mais comuns nos supermercados, acusa Luísa Alves, que descreve um ambiente de pressão permanente por parte de chefias intermédias, elas próprias pressionadas para apresentarem bons resultados com o menor número possível de trabalhadores.



Fonte: Visão **15.04.2017**

Situação 2: Os dirigentes do Pingo Doce

Pedro Soares dos Santos, presidente executivo da Jerónimo Martins, dona do Pingo Doce, recebeu em 2017 um rendimento bruto ligeiramente superior* a dois milhões de euros.
O valor em causa, que resulta dos vários cargos que ocupa no grupo, representa um aumento de 58,3% face a 2016.



Fonte: JN, 16.03.2018
*2 milhões e 9 mil euros

(a) Compara o aumento salarial, em percentagem, dos trabalhadores do Pingo Doce (como a Luísa Alves) com o do presidente executivo da empresa. O que concluis?

(b) O rendimento ligeiramente superior a que se refere o artigo, corresponde a quantos salários mínimos mensais de 2017 [o salário mínimo mensal em 2017 era de 557 euros]?

(c) Encontra um modelo que evidencie o salário mensal de um trabalhor do Pingo Doce que ganhe próximo do salário mínimo.

(d) De acordo com o modelo encontrado quantos anos terá de trabalhar um trabalhador do Pingo Doce para ganhar o que ganha o seu CEO (Pedro Soares dos Santos), num mês?

(e) Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

Apêndice 12: Tarefa de Modelação 9.º Ano T4: Redistribuição da Riqueza

TAREFA 4 – A REDISTRIBUIÇÃO DA RIQUEZA

Há alguma justificação para as disparidades salariais?

As remunerações dos gestores não têm relação com o desempenho das empresas, nem em termos operacionais nem em termos da sua cotação na bolsa. Esta disparidade de rendimentos, é expressiva da desigualdade profunda que hoje existe no mundo do trabalho e é questionada até pelo campo da gestão. Peter Drucker, o guru da Gestão Moderna, dizia que o rácio entre o salário mais elevado e o salário mais baixo de uma empresa não devia exceder os 25.

Fonte: Jornal de Negócios 16.05.2018

Na Suiça, 100 mil cidadãos propuseram ao Parlamento, em 2011, a fixação por lei de um leque salarial máximo: ninguém deveria poder ganhar num mês mais do que outro, na mesma empresa, ganha num ano. Se os de cima querem ganhar mais, têm de aumentar na mesma proporção os de baixo.

Fonte: Expresso, 18.05.2018



A seguinte tabela salarial regista o ganho mensal, por categorias, de alguns trabalhadores do Pingo Doce, relativa ao **ano de 2017:**

Âmbito Profissional	Rendimento Mensal (em euros)	Número de Trabalhadores
CEO	143 500	1
Gerente de loja	1238	400
Operador de hiper/super/loja Chefe de Secção	881,5	1600
Operador de hiper/super/loja Principal	780	3200
Operador de hiper/super/loja Especializado	659	10000
Operador de hiper/super/loja de 1ª	620	20000
Operador de hiper/super/loja de 2ª	567,2	39800
Operador de hiper/super/loja do 1º e 2º ano	557	25000

(a) Qual o modelo mais apropriado para determinar o rácio entre o salário mais elevado e os salários dos restantes trabalhadores do Pingo Doce? De acordo com este modelo, qual seria o salário mais baixo de um trabalhador desta empresa, de forma a aplicar a proposta de Peter Drucker?

(b) Encontra um modelo que permita aplicar a proposta dos cidadãos suiços ao salário mensal do CEO do Pingo Doce em função dos salários dos restantes trabalhadores.

(c) Admitamos que o grupo da Jerónimo Martins vai distribuir uma parte dos lucros de 2017 pelos trabalhadores da empresa Pingo Doce, tendo como critérios o salário auferido por cada um e que o valor atribuído a cada um não ultrapasse 0,01% do lucro, independentemente do número de trabalhadores.

A Jerónimo Martins fechou o ano passado com lucros de 385 milhões de euros (Fonte: Dinheiro Vivo, 25.02.2018)

Encontra um modelo de distribuição de forma a que a distribuição obedeça a uma justiça distributiva (quem tem mais, recebe menos). De acordo com este modelo, quanto irá receber o CEO?

(d) Um dos temas amplamente estudado em áreas como a Filosofia, a Economia ou a Ciência Política é como devem ser distribuídos os bens numa sociedade. Como consideras que deveria ser feita essa distribuição? Dá exemplos.

Apêndice 13: Tarefa de Modelação 9.º Ano T5: A uberização do trabalho

TAREFA 5 – A Uberização do Trabalho

A Uber é uma aplicação móvel que liga os motoristas privados a clientes. Através de um smartphone, o cliente pede um carro e o motorista mais próximo segue ao seu encontro. Esta empresa, presente em 65 países, não tem carros ao seu serviço, nem os motoristas são seus empregados; são parceiros, como a empresa lhes chama, sem qualquer vínculo laboral. O contrato que assinam com a empresa é, justamente, de parceria comercial. Usam a sua própria viatura, pagam do seu bolso a gasolina e a manutenção do carro, e recebem 80% do valor de uma corrida; os restantes 20% são a comissão da Uber.

Há quem veja aqui uma excelente oportunidade para desempregados ou para quem precise de uma segunda fonte de rendimento. Mas há também quem considere que estamos perante o início de uma perigosa alteração das relações laborais: esqueçam as 40 horas semanais, aqui quanto mais horas se trabalha mais se ganha; esqueçam o pagamento de horas extraordinárias, trabalho aos fins-de-semana e feriados ou por turnos; esqueçam o ordenado certo ao fim do mês e os descontos do patrão para a Segurança Social. São trabalhadores à peça, e quanto mais horas trabalharem mais ganham. Não há contratos coletivos ou sequer sindicatos. No mundo dos trabalhadores à peça, cada um está por si.



Fonte: Visão História

A seguinte tabela regista o valor ganho por quilómetro em função da distância percorrida por um motorista da Uber.

Estimativa de quilómetros (Km)	**Valor ganho por km (em cêntimos)**
50	0
100	8
150	16
200	24
250	32

(a) Encontra um modelo que permita determinar quanto ganha por quilómetro, o motorista da Uber.

(b) Define o modelo que permita encontrar quanto ganha o motorista da Uber por dia.

(c) De acordo com o modelo encontrado, quantos quilómetros precisa de percorrer para ganhar 20 euros?

Considera a seguinte informação:

O número médio de quilómetros por viagem é de 5 km e o tempo médio por cada viagem efetuada é de 20 minutos.

(d) Segundo o modelo definido e tendo em conta as informações dadas, determina qual o número de horas de trabalho diário de um motorista da Uber para obter um ganho de 30 euros diários?

(e) Com base no resultado da alínea anterior, quantas horas semanais terá de trabalhar o motorista para atingir um salário mensal de 600 euros (salário mínimo em 2019)?

(f) Como interpretas o resultado obtido? Considerando os valores encontrados, que direitos fundamentais estão postos em causa?

Apêndice 14: Guião de entrevista inicial a alunos

Percurso escolar

1. No teu percurso escolar, como caracterizas a tua relação com as escolas que frequentaste? Gostavas de ir para a escola? Explicita as razões da tua resposta.

2. O que mais te motiva na escola? E o que menos te agrada?

3. Que disciplinas te despertam mais interesse? E menos interesse? Porquê?

4. Quais as disciplinas em que tens mais dificuldades? Que razões te levam a sentir dificuldades nessa(s) disciplina(s)?

5. Que profissão pretendes exercer no futuro? Qual(is) a(s) disciplina(s) que consideras mais importante(s) para exerceres essa profissão?

6. Do que tens vindo a aprender na escola o que mais utilizas na vida quotidiana?

Aprendizagem na disciplina de Matemática

7. Achas que a matemática é importante para o teu futuro? Porquê?

8. Em que situações mais aplicas os conhecimentos matemáticos? É habitual relacioná-los com situações do dia-a-dia? Se sim, dá exemplos.

9. Que tipo de tarefas gostas mais de realizar na disciplina de Matemática (Exercícios, resolução de problemas, exploração, projetos)? Porquê?

10. Dos conteúdos matemáticos que estudaste quais os que te despertaram mais interesse? Porquê?

11. Dos conteúdos matemáticos que estudaste quais foram os que tiveste mais dificuldades?

12. As tarefas que resolves nas aulas de matemática, tratam de situações do dia-a-dia? Se sim, dá exemplos.

13. Que experiência relacionada com os teus interesses/realidade gostarias de ver tratada na aula de matemática?

14. No estudo de funções, no 7º ano, quais os conteúdos que te recordas? Sentiste dificuldades na aprendizagem de conteúdos de funções. Se sim, em quais?

15. De que modo a aprendizagem dos conteúdos de funções te permite interpretar e atuar em situações sociais (tais como as desigualdades de género e outras, a proteção ambiental, a justiça, a alimentação e o bem-estar global)?

16. O que significa para ti justiça social? Achas que existe igual distribuição de recursos básicos como o acesso à educação, saúde, trabalho? Será que o que aprendes nas aulas de matemática te permite debater estas problemáticas?

Apêndice 15: Guião de entrevista final a alunos

Modelação Matemática

1. Quais foram as principais diferenças em trabalhar os conteúdos matemáticos através da modelação?
2. A realização das tarefas foi efetuada em grupo. Que destacas desta forma de trabalho? Consideras que ajudou à interpretação dos temas e/ou ao desenvolvimento de um debate crítico? Realças alguma desvantagem?
3. Durante a resolução das tarefas tiveste que pesquisar situações da vida real. Achas que permitiu uma melhor conexão dos conceitos matemáticos com a realidade. Porquê?
4. Quais foram as principais dificuldades que sentiste no desenvolvimento das tarefas de modelação?
5. Na identificação e compreensão da situação real, existiu trabalho de equipa? De que forma isso favoreceu o desenvimento das tarefas?

Modelação matemática na aprendizagem de funções

6. Consideras que foi positivo, para a aprendizagem do tópico de funções, a utilização da modelação matemática? Indica os aspetos que consideres mais relevantes.
7. De que modo as tarefas de modelação te ajudaram a interpretar a aplicação dos conteúdos de funções em situações do quotidiano?
8. Como foi traduzir a situação concreta num modelo matemático? Sentiste dificuldade? Porquê?
9. Foi sempre necessário a ajuda da professora para encontrar o modelo adequado? Se sim, porquê?
10. Qual a maior dificuldade que sentiste na aprendizagem do tópico de funções com recurso às tarefas de modelação?

Justiça Social e aprendizagem de funções através da modelação matemática

11. Foi estimulante resolver tarefas com base na vida real para a aprendizagem de funções? Qual foi a tarefa que mais gostaste?
12. Destaca as situações sociais retratadas na tarefas de modelação que mais significado tiveram para ti.
13. Qual foi o maior contributo da resolução e debate de questões do quotidiano associadas à igualdade de oportunidades, à proteção ambiental ou à justiça social para a tua aprendizagem de funções?

Apêndice 16: Guião de entrevista diretor/a do Agrupamento de Escolas/ Escola

Experiência Profissional

1. Qual é a sua área de formação? Que razões a levaram a ser professora?

2. Quantos anos tem de experiência profissional? Neste percurso, que momentos mais destaca?

3. Há quantos anos é diretora desta escola? O que realça no exercício deste cargo?

Caracterização genérica do corpo docente do Agrupamento

4. Como caracteriza o corpo docente que compõe este Agrupamento de Escolas, em termos de estabilidade profissional?

5. Qual é a idade média do corpo docente? Como identifica o grau de motivação profissional? Que constrangimentos sente na atividade profissional do corpo docente?

Princípios e valores que orientam a ação do Agrupamento

6. A missão deste Agrupamento incide na promoção do sucesso individual dos alunos, tal como é preconizado no Projeto Educativo (PE). Deste modo, enquanto instituição pública, pretende-se que o ensino seja de qualidade, assente na igualdade de oportunidades, pautado por valores éticos e socialmente responsáveis. Estas premissas encontram-se inscritas na LBSE. O que é que o corpo diretivo tem feito para operacionalizar estes princípios?

7. Um dos objetivos referidos no PE é a escola assumir-se como um espaço de intervenção social. Neste sentido, que atividades destaca que se possam inscrever neste domínio (intervenção social)?

8. Que exemplos lhe ocorrem que traduzem as atividades inscritas no Plano Anual de Atividades que se possam integrar na ideia de Educação para a Cidadania?

9. O referencial educativo mais recente, Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória, tem como imperativo assegurar a coerência do sistema educativo, depois de ter sido alargado o número de anos de escolaridade obrigatória. Que desafios se colocam com esta medida de política educativa?

O desempenho dos alunos na disciplina de Matemática

10. Como têm sido os resultados externos da escola que dirige no que diz respeito à disciplina de Matemática no 3.º ciclo? Como responde a escola a esses resultados?

11. Considera que o modo como o ensino da Matemática tem vindo a ocorrer tem uma relação direta com o elevado insucesso escolar que se regista nesta disciplina? O que procura fazer a escola no sentido de minimizar este insucesso?

A Matemática e a Justiça Social

12. Nos últimos anos, em que projetos se envolveu a escola no âmbito da matemática? Nesses projetos quais os que incidiram sobre questões sociais?

13. Na sua visão enquanto diretora, como seria possível desenvolver as competências matemáticas dos alunos que lhes permitiam interpretar e compreender fenómenos sociais, económicos e políticos com que se confrontam no seu quotidiano?

14. Os sucessivos Ministérios da Educação reforçam a importância da introdução das diferentes componentes da Educação para a Cidadania nas disciplinas escolares e como parte integrante do currículo. De que

forma crê possível esta transversalidade à disciplina de Matemática, com fim à abordagem de temas como igualdade de género, direitos humanos, ambiente, sustentabilidade, interculturalidade ou equidade?

15. O que fazer, enquanto presidente do conselho pedagógico, para combater a perpetuação na identificação da disciplina de Matemática como um fator determinante de desigualdade e exclusão escolar?

Apêndice 17: Guião de entrevista inicial a professores

Formação

1. Que razões o(a) levaram a ser professor(a) de matemática?
2. Que experiências destaca no curso de formação de professores que frequentou? Sente que esse curso o preparou devidamente para a docência?
3. Como promove o seu desenvolvimento profissional?
4. Caso participe em ações de formação, que razões o levam a frequentá-las?

Prática Profissional

5. Quanto tempo tem de serviço docente? Lecionou sempre em escolas da rede pública? Que anos de escolaridade já lecionou?
6. Tem experiência como diretor(a) de turma? O que mais destaca no exercício deste cargo?
7. Quando planifica as suas aulas tem em conta todo o currículo ou foca-se exclusivamente no programa de matemática?
8. Que materiais didáticos integra nas suas estratégias de ensino? Com que finalidade?
9. Que tarefas integra nas suas estratégias de ensino? Com que finalidade?
10. Como caracteriza a sua prática letiva? Que papel desempenham os alunos nessa prática?
11. Perante uma escola cada vez mais multicultural que fatores podem desafiar/influenciar o seu desempenho docente?
12. Como avalia as aprendizagens dos seus alunos? Que ilações retira da avaliação para a sua prática letiva?
13. Em que dinâmicas de trabalho se envolve com pares da sua escola?

O ensino de funções

14. Como descreve o modo como ensina tópicos de funções?
15. Quais são as principais dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem deste tópico?
16. Como pode ser o ensino das funções relacionado com o meio envolvente? E com os interesses dos alunos?
17. No ensino de tópicos de funções costuma recorrer a tarefas de modelação? Se sim, com que finalidade? Se não, por que razão não o faz?
18. Que fenómenos sociais lhe parecem interessantes considerar na atividade de modelação?

O ensino da matemática e a questão da justiça social

19. O ensino da matemática tem uma responsibilidade acrescida devido ao grande insucesso escolar? O que procura fazer para elevar a autoestima desses alunos relativamente à disciplina de matemática?
20. Nas aulas de matemática é usual ouvir alguns alunos a questionar "para que isto serve"? O que costuma fazer perante este tipo de questões?
21. A LBSE reflete uma natural ação do Estado em função da defesa e construção de uma escola pública assente na equidade e inclusão social. De que forma pode o ensino da matemática contribuir para esse princípio constitucional? Na sua prática letiva tem esses princípios presentes?
22. Considera que existe uma distinção entre "ensinar matemática" e "educar matematicamente"? De que forma?
23. Skovsmose define "matemacia" como uma competência por meio da qual nos tornamos capazes de interpretar as características da nossa realidade social. Acredita que o atual ensino da matemática fornece essa ferramenta aos alunos?

Apêndice 18: Guião de entrevista final aos professores

Modelação Matemática no Ensino de Funções

1. Quais foram as principais diferenças em trabalhar os conteúdos matemáticos através de tarefas de modelação?
2. Surgiram constrangimentos na aplicação das tarefas de modelação? E no decorrer das aulas? Como os ultrapassou?
3. De que forma a implementação da modelação matemática modificou a sua prática docente - planificação, prática na sala de aula, avaliação?
4. Como geriu os momentos de aula? No desenvolvimento das aulas, as atividades foram mais centradas nas ações dos alunos ou nas suas? Com que finalidade?
5. Considera que a execução das tarefas de modelação transformaram a dinâmica da aula? Que situação destacaria?
6. Que processos privilegiaram os alunos no seguimento das aulas com recurso à modelação?
7. Quais foram as maiores dificuldades que os alunos evidenciaram na aprendizagem do tópico de funções através da modelação?
8. Que contributo teve a realização de tarefas de modelação para a avaliação dos alunos? Teve em consideração para a avaliação, as atividades dos alunos (o que dizem e fazem durante as aulas)?
9. O que distingue entre a aplicação de resolução de problemas e as tarefas de modelação? O que considera ser mais efetivo para a aprendizagem do tópico de funções?
10. Quais foram os pontos fortes da integração da modelação matemática na sua prática de ensino?

Integração de assuntos de Justiça Social na prática de ensino

11. Das tarefas de modelação propostas qual se apercebeu que os alunos mais tenham gostado? Porquê?
12. O trabalho em grupo favoreceu o debate crítico? Em que medida?
13. A realização de tarefas com base no quotidiano permitiu uma maior conexão dos conceitos matemáticos com a realidade? Justifique.
14. Os assuntos de Justiça Social abordados foram do interesse dos alunos? Emergiu algum dilema?
15. Sentiu que os alunos desenvolveram o pensamento crítico e/ou desenvolveram aptidões para a compreensão da realidade social?
16. Detetou que, com este cenário de aprendizagem, houve alguma mudança de atitude relevante face à disciplina de matemática? Se sim, exemplifique.
17. Que desafios se colocam na continuidade da integração de tarefas de modelação no ensino do tópico de funções em alunos do 3º CEB?

Apêndice 19: Pedido de consentimento aos Encarregados de Educação de participação do seu educando na investigação e da gravação vídeo/áudio das aulas observadas

Exmo(a) Sr(a)
Encarregado(a) de Educação

Eu, Alice Patrícia Lopes Faro e Santos, professora do Grupo 500 e aluna do Curso de Doutoramento em Ciências da Educação, especialidade Educação Matemática, da Universidade do Minho, venho por este meio, solicitar a V. Ex.ª, a autorização para a participação do seu educando no estudo que pretendo desenvolver com os alunos da turma a que pertence. Este estudo visa averiguar o contributo da modelação matemática na promoção da justiça social, na aprendizagem de funções de alunos do 3º CEB.

A fim de possibilitar a concretização deste projecto, e dado ser necessário analisar a forma como decorre, solicito a Vª Ex.ª autorização para que sejam realizadas gravações das ações desenvolvidas, gravações essas que não serão divulgadas e que servirão apenas de instrumento de recolha de dados para a investigação, garantindo a confidencialidade da escola e dos alunos participantes.

Agradecendo, desde já, a atenção disponibilizada, apresento os meus melhores cumprimentos.

_____

(Alice Faro e Santos)

.....

Eu,_____, encarregado(a) de educação do(a) aluno(a)_____, autorizo a participação, do meu educando, na investigação e que sejam realizadas gravações das ações desenvolvidas, no âmbito do projeto em desenvolvimento nas aulas de Matemática

Assinatura do(a) E. de Educação_____

Apêndice 20: Pedido de autorização à Direção dos Agrupamentos de Escolas/Escolas para a realização da investigação e da gravação em vídeo/áudio das aulas observadas

Exma Sr./a.
Diretor/a do Agrupamento de Escolas xxxx

Eu, Alice Patrícia Lopes Faro e Santos, professora do Grupo 500 e aluna do Curso de Doutoramento em Ciências da Educação, especialidade Educação Matemática, da Universidade do Minho, venho por este meio, solicitar, a V. Ex.ª, autorização para a concretização de um estudo neste Agrupamento. Com este estudo, tentar-se-á averiguar o contributo da modelação matemática na promoção da justiça social, na aprendizagem de funções de alunos do 3º CEB. Acredita-se que esta intervenção pode fortalecer a compreensão concetual e procedimentos matemáticos e desenvolver aptidões para a interpretação e compreensão da realidade social.

Com o intuito de concretizar o objetivo delineado, pretende-se realizar um estudo de caso que consistirá em trabalhar conjuntamente com uma professora deste agrupamento, professora do Quadro do Grupo 500, e os alunos de uma das suas turmas de 8º ano. Para o efeito, tenciona-se realizar entrevistas aos alunos e proceder à observação não participante de algumas aulas.

De forma a proceder a uma adequada avaliação deste projeto solicito-lhe autorização para que sejam realizadas gravações das ações desenvolvidas, gravações essas que não serão divulgadas e que servirão apenas de instrumento de recolha de dados para a investigação, garantindo a confidencialidade da escola, da professor envolvida e dos alunos participantes.

Agradecendo, desde já, a atenção disponibilizada, apresento os meus melhores cumprimentos.

_____

(Alice Faro e Santos)