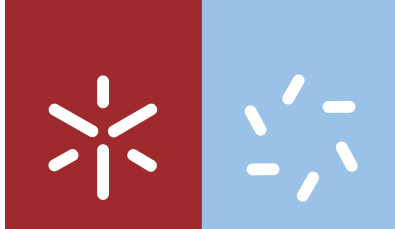


**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Maria Elisabete Barbosa Ferreira

## **Teoria(s) de Proporções em Portugal na Primeira Metade do Século XVIII**



**Universidade do Minho**

Escola de Ciências

Maria Elisabete Barbosa Ferreira

## **Teoria(s) de Proporções em Portugal na Primeira Metade do Século XVIII**

Dissertação de Mestrado

Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores  
Área de Especialização em Matemática

Trabalho realizado sob a orientação do

**Professor Doutor João Caramalho Domingues**

## **DECLARAÇÃO**

Nome: Maria Elisabete Barbosa Ferreira

Endereço eletrónico: betabferreira@gmail.com

Cartão do Cidadão: 10759352 1ZZ5

Título da Dissertação: Teoria(s) de Proporções em Portugal na Primeira Metade do Século XVIII

Orientador: João Caramalho Domingues

Ano de conclusão: 2013

Designação do Mestrado: Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores, área de  
especialização em Matemática

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA DISSERTAÇÃO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 31/10/2013

Assinatura: \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMENTOS**

Quando me inscrevi para a realização deste Mestrado, tinha plena consciência de este iria exigir muito de mim. No entanto, senti que estava na altura de investir “um pouco mais” na minha formação profissional. Senti que esta experiência seria uma oportunidade de aprender e de aprofundar os meus conhecimentos na minha área.

Claramente esta é uma fase diferente daquela que vivi enquanto estudante da Licenciatura. O grau de maturidade e a experiência profissional permitiram-me usufruir deste período de investigação de uma forma diferente e enriquecedora.

Um dos meus objetivos iniciais era utilizar a experiência e os conhecimentos adquiridos com esta investigação, para implementar, na minha prática letiva, abordagens diferentes em determinados conteúdos. A História da Matemática é fundamental na abordagem de qualquer tema, pelo que o desenvolvimento dos conhecimentos nesta área é muito importante.

A realização deste trabalho não teria sido possível sem a orientação do Doutor João Caramalho Domingues. Muito obrigada pela disponibilidade demonstrada ao longo deste período de tempo; pelas informações, documentos e fontes de pesquisa que me indicou e/ou facultou; pelo esclarecimento de dúvidas; pela partilha de conhecimentos; pela orientação, paciência e compreensão manifestadas.



# RESUMO

## TEORIA(S) DE PROPORÇÕES EM PORTUGAL NA PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XVIII

Esta Dissertação tem por objetivo realizar o estudo das versões da(s) teoria(s) de proporções presentes em textos portugueses, na primeira metade do século XVIII. Assim, no primeiro capítulo é tratada a génese da(s) teoria(s) de proporções, sendo feita uma pequena apresentação dos *Elementos* de Euclides, com especial ênfase nos Livros V e VI. Segue-se a exposição da problemática da comensurabilidade, e de que forma a obra de Euclides foi difundida na Europa do Renascimento.

No segundo capítulo, apresentam-se a(s) teoria(s) de proporções na Europa na segunda metade do século XVII, visto ser esta a época em que se desenvolveram as teorias que serviram de referência aos autores portugueses.

O estudo detalhado das obras de Manoel de Campos e Azevedo Fortes é exposto no terceiro capítulo.

Relativamente ao primeiro autor, é apresentada a sua obra, comparativamente com a do belga André Tacquet.

No que concerne a Azevedo Fortes, o estudo é mais exaustivo e encontra-se dividido em dois setores, correspondentes às duas obras estudadas: a parte do manuscrito *Geometria Especulativa* que trata os *Elementos* de Euclides ("Tratado Seg[undo] dos *Elementos* de Euclides") e a *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*.

A análise do manuscrito foi feita com recurso a apenas uma obra, a do francês Jacques Ozanam, enquanto para a *Lógica*, a pesquisa foi mais demorada e exigente, já que as duas partes que foram objeto deste estudo resultam de fontes diversas.

O desenvolvimento da Álgebra teve um papel importante no estabelecimento de teoria(s) de proporções alternativa(s) à de Euclides.



# ABSTRACT

## THEORY(IES) OF PROPORTIONS IN PORTUGAL IN THE FIRST HALF OF THE EIGHTEENTH CENTURY

This dissertation aims to conduct a study of the versions of the theory(ies) of proportions present in Portuguese texts, in the first half of the eighteenth century. Therefore, in the first chapter the genesis of the theory(ies) of proportions is treated and a small presentation of Euclid's *Elements* is made, with special emphasis on Books V and VI. This is followed by an account of the problem of commensurability and of how the work of Euclid was disseminated in Renaissance Europe.

The second chapter presents the theory(ies) of proportions in Europe during the second half of the seventeenth century, since it was then that the theories, that serve as reference for the Portuguese authors, were developed.

The detailed study of the works of Manoel de Campos and Azevedo Fortes is expounded in the third chapter.

Concerning the first author, his work is presented in comparison to that of the Belgian Andreas Tacquet.

Regarding Azevedo Fortes, the study is more comprehensive and it is divided into two sections, each corresponding to one of the two works studied: the part of the manuscript *Speculative Geometry* that treats Euclid's *Elements* ("Sec[ond] Treatise on Euclid's *Elements*") and the *Rational, Geometrical, and Analytical Logic*.

The analysis of the manuscript was made by using only one work, by the French Jacques Ozanam, while for the *Logic*, the research was more time consuming and demanding, since the two parts which were object of this study result from several sources.

The development of Algebra played a major role in the establishment of Theories of Proportions alternative to those of Euclid.



# ÍNDICE

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Agradecimentos.....                                                                           | iii |
| Resumo.....                                                                                   | v   |
| Abstract.....                                                                                 | vii |
| Introdução.....                                                                               | 1   |
| 1. A “origem” da(s) Teoria(s) de Proporções.....                                              | 3   |
| 1.1. Os <i>Elementos</i> de Euclides .....                                                    | 3   |
| 1.2. A Comensurabilidade .....                                                                | 10  |
| 1.3. Difusão dos <i>Elementos</i> na Europa do Renascimento .....                             | 15  |
| 2. A(s) Teoria(s) de Proporções na Europa do Século XVII .....                                | 21  |
| 2.1. “Razão” e “Proporção” .....                                                              | 21  |
| 2.2. Autores Europeus .....                                                                   | 22  |
| 2.2.1. Giovanni Alfonso Borelli .....                                                         | 23  |
| 2.2.2. André Tacquet .....                                                                    | 24  |
| 3. A(s) Teoria(s) de Proporções em Textos Portugueses da Primeira Metade do Século XVIII .... | 37  |
| 3.1. Manoel de Campos .....                                                                   | 37  |
| 3.2. Manoel de Azevedo Fortes .....                                                           | 46  |
| 3.2.1. Geometria Especulativa .....                                                           | 46  |
| 3.2.2. Lógica Racional, Geométrica e Analítica.....                                           | 73  |
| 3.2.2.1. Parte II: Lógica Geométrica .....                                                    | 75  |
| 3.2.2.2. Parte III: Lógica Analítica .....                                                    | 91  |
| 3.2.2.3. Mais algumas considerações sobre as Partes II e III.....                             | 120 |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| Conclusão .....    | 125 |
| Bibliografia ..... | 131 |
| Anexos .....       | 137 |
| Anexo I .....      | 139 |
| Anexo II .....     | 143 |
| Anexo III .....    | 151 |

# INTRODUÇÃO

A teoria de proporções tem sido aplicada em diversas áreas ao longo dos tempos. Com a descoberta das grandezas incomensuráveis, na Antiguidade Grega, foi reconhecida a necessidade de uma teoria de proporções aplicável não só a grandezas comensuráveis como também a grandezas incomensuráveis.

A teoria *clássica* de proporções foi frequentemente criticada pela sua alegada obscuridade e dificuldade, principalmente a partir do Renascimento Europeu. Foram muitos os autores que se dedicaram a esta investigação ao longo dos tempos, tendo sido apresentadas algumas alternativas.

Neste estudo pretende-se identificar as versões da teoria de proporções que surgem em textos portugueses na primeira metade do século XVIII, e proceder a um estudo comparativo das mesmas, quer entre si, quer com obras de autores europeus contemporâneos.

Para tal, será apresentada a “problemática” da comensurabilidade de grandezas, que está na base das críticas à teoria de proporções presente nos *Elementos* de Euclides, e a forma como foi sendo abordada ao longo dos tempos, incidindo o estudo na segunda metade do século XVII e na primeira metade do século XVIII.

O conceito de comensurável e a existência de números irracionais; a ausência de uma definição clara e precisa de *razão*, *igualdade de razões*, *grandezas em proporção*, e até mesmo a falta de clareza relativamente ao conceito de número, conduziram a estudos e conjecturas diversificados.



# 1. A “ORIGEM” DA(S) TEORIA(S) DE PROPORÇÕES

Com o objetivo de introduzir o estudo da(s) teoria(s) de proporções, neste primeiro capítulo, é feita uma apresentação dos *Elementos* de Euclides, sendo dada especial ênfase aos conteúdos relacionados com o estudo em epígrafe.

Após uma secção dedicada aos conceitos de comensurável e incommensurável, segue-se uma breve exposição de algumas das principais circunstâncias que conduziram aos vários estudos realizados a partir da obra de Euclides.

## 1.1. OS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

O tratado *Elementos* de Euclides é considerado o texto matemático mais importante, não só da época grega, como de todas as épocas. Foi traduzido para um grande número de idiomas e tem sido sucessivamente reeditado desde o aparecimento da imprensa.

Existiram versões dos *Elementos* anteriores à de Euclides, mas esta é a única que “sobreviveu”. Tal ficará a dever-se ao facto de ter sido a primeira a ser escrita após os fundamentos, tanto da teoria de proporções como da dos irracionais, e a cuidadosa distinção feita entre número e grandeza proposta por Aristóteles [Katz 2009, 51].

Os *Elementos* de Euclides são constituídos por treze livros, onde se podem encontrar definições, postulados, noções comuns/axiomas e proposições, organizadas em sequência lógica, relativas à Geometria Euclidiana (a da régua e compasso) e à Aritmética (teoria dos números). Esta obra é considerada um compêndio que foi organizado por Euclides a partir de muitas obras existentes sobre várias áreas da Matemática.

Euclides baseou-se nos seus predecessores gregos: os pitagóricos (Livros I a IV; VII e IX), Arquitas de Tarento (Livro VIII), Eudoxo de Cnido (Livros V, VI e XII) e Teeteto de Atenas (Livros X e XIII) [Oliveira 1995, 24].

Apesar de não se tratar de uma obra unificada, Euclides deu-lhe uma estrutura global, mantendo-se fiel à distinção fundamental de Aristóteles entre número e grandeza. Compilou nos *Elementos* toda a Geometria conhecida na sua época, mas não se limitou a reunir todo o conhecimento geométrico, ordenou-o e estruturou-o como ciência. Isto é, a partir de uns axiomas desenvolveu e demonstrou os teoremas e proposições geométricas, dando novas demonstrações quando as antigas não se adaptavam à nova ordem que tinha dado às proposições. Organizou os assuntos de forma sistemática a partir de princípios e definições, procedendo ao seu desenvolvimento por via dedutiva [Oliveira 1995, 24].

Supõe-se que no Livro I se encontram algumas contribuições originais de Euclides para a Matemática, em particular, o tratamento rigoroso da questão do paralelismo. Neste livro estão também, entre outros resultados, os casos de congruência de triângulos e o Teorema de Pitágoras. O Livro II é exclusivamente dedicado à *Álgebra Geométrica* ou *Geometria das Áreas*. Nos Livros III e IV é estudada a Geometria do círculo. A teoria de proporções criada por Eudoxo de Cnido é apresentada no Livro V, enquanto no Livro VI esta teoria é aplicada ao estudo das figuras planas semelhantes. [Sá 2000, 251]

Artmann considera o Livro V como o mais abstrato dos *Elementos* e independente dos livros precedentes. Enquanto nos outros livros são tratados objetos geométricos ou números, no Livro V são abordadas grandezas em geral. [Artmann 1999, 123]

Os seis primeiros livros são conhecidos como os livros *planimétricos*, por dizerem respeito à Geometria plana. No entanto, esta designação não é adequada ao Livro V uma vez que a teoria de proporções aí descrita também se aplica à Geometria tridimensional. Os Livros VII, VIII e IX são denominados por *livros aritméticos*, uma vez que são dedicados à teoria dos números. A sua origem é pitagórica havendo contudo importantes contribuições de matemáticos do século IV a. C., como Arquitas de Tarento, Teodoro de Cirene e Teeteto de Atenas. O Livro X é o mais extenso e nele são estudados vários tipos de grandezas incomensuráveis (irracionais). É considerado por alguns historiadores como o mais importante dos *Elementos*. Os Livros XI, XII e XIII são denominados de *livros estereométricos*, por tratarem de figuras da Geometria no espaço (tridimensional). [Sá 2000, 251]

No que diz respeito às proporções, Euclides apresenta duas teorias separadas: no Livro V aplicável a grandezas em geral, e no Livro VII aplicável apenas a números. No Livro X apresenta a ligação entre os dois conceitos, uma vez que é aqui que Euclides introduz as noções de comensurável e incommensurável e mostra que, no que diz respeito a proporções, grandezas comensuráveis podem ser tratadas como números [Katz 2009, 52].

Atendendo a que as grandezas comensuráveis podem ser tratadas como números, a teoria de proporções definida para números, pode ser aplicada a estas grandezas. A existência de grandezas incommensuráveis exigiu a definição de uma teoria que também fosse válida para estas. Esta dualidade de grandezas despoletou a concepção de duas teorias de proporções. O conceito de comensurabilidade será abordado na secção **1.2.**

Coloca-se a questão da existência de duas teorias diferentes e do facto de Euclides não se ter “poupado” de tanta repetição e poder tratar os números como caso particular de grandezas, sem ter necessidade de repetir as mesmas definições/proposições novamente para números. Euclides não mencionou nada relativamente ao facto de ter relacionado as duas teorias de proporções nos dois livros. A provável explicação deste “fenómeno” foi que Euclides simplesmente terá seguido a tradição e referiu as duas teorias da forma como as encontrou [Heath 1956, vol. 2, 113].

Não existe nenhum exemplar dos *Elementos* de Euclides completo e que date da época. A importância desta obra levou a que fossem feitas várias edições e copiados vários exemplares, com alterações ao texto original (este tema será abordado em **1.3.**).

No século XIX o historiador e filólogo dinamarquês J. L. Heiberg analisou e comparou entre si várias edições dos *Elementos* e apresentou uma reconstituição, considerada credível, da obra original de Euclides.

Ao longo deste trabalho serão apresentadas algumas definições e proposições dos *Elementos*. A notação utilizada é a seguinte:

| NOTAÇÃO   | SIGNIFICADO                                |
|-----------|--------------------------------------------|
| V, Def. 3 | Definição 3, do Livro V                    |
| VII, 13   | Proposição 13. <sup>a</sup> , do Livro VII |

De seguida, apresentam-se a terceira e a quinta definições do Livro V dos *Elementos*. Estas irão ser mencionadas ao longo deste trabalho, visto serem centrais neste estudo. Será também

exposta a vigésima definição do Livro VII, por ser a correspondente à quinta definição do Livro V, aplicada a números.

As definições e proposições apresentadas a seguir foram adaptadas da tradução do grego de Heiberg para inglês, feita por Thomas Heath em 1908.

**V, Def. 3:** Razão é uma espécie de relação a respeito de tamanho entre duas grandezas homogêneas<sup>1</sup>. [Heath 1956, vol. 2, 114]

**V, Def. 5:** Diz-se que grandezas estão na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando quaisquer mesmos múltiplos da primeira e da terceira simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais, ou são simultaneamente menores do que quaisquer mesmos múltiplos da segunda e da quarta, tomados na ordem correspondente. [Heath 1956, vol. 2, 114]

**VII, Def. 20:** Números estão em proporção [ou dizem-se proporcionais] quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte<sup>2</sup>, ou as mesmas partes, do segundo que o terceiro é do quarto. [Heath 1956, vol. 2, 278]

Antes de expor as versões da(s) teoria(s) de proporções nos autores em estudo, apresentam-se duas proposições dos *Elementos* e a demonstração adaptada de uma delas. O objetivo é dar a conhecer a forma “original” como eram feitas, para a partir destas se estabelecerem comparações.

---

<sup>1</sup> O termo “homogênea” é utilizado para referir que as grandezas tratadas são do mesmo tipo, ou do mesmo gênero. Dois segmentos de reta são grandezas homogêneas e dois ângulos são grandezas homogêneas; no entanto, um segmento de reta e um ângulo não são grandezas homogêneas. Ao longo deste estudo será utilizada a terminologia grandezas do “mesmo tipo” com o mesmo significado que grandezas homogêneas.

<sup>2</sup> A primeira definição do Livro V dos *Elementos* é a de *parte*, e é a seguinte:

**V, Def. 1:** Uma grandeza é uma parte de uma grandeza, a menor da maior, quando mede exatamente a maior. [Heath 1956, vol. 2, 113]

Neste livro, o significado de parte está relacionado com uma grandeza ser *parte* de outra, no sentido de ser *submúltipla* da outra grandeza com a qual de compara.

No Livro VII são apresentadas duas definições: *parte* e *partes*, e apresentam-se a seguir.

**VII, Def. 3:** Um número é uma parte de um [outro] número, o menor do maior, quando mede exatamente o maior. [Heath 1956, vol. 2, 277]

**VII, Def. 4:** E partes quando não mede exatamente. [Heath 1956, vol. 2, 277]

A expressão “um número é *parte* de outro” significa que “um número é *submúltiplo* de outro”. Por outro lado, “um número é *partes* de outro” se, apesar de ser inferior a esse número, não é submúltiplo dele, ou dito de outra forma, o número maior não é múltiplo do número considerado. Note-se que, se um número é partes de outro, é múltiplo de uma parte, ou seja de um submúltiplo do outro.

A primeira é a Proposição 13.<sup>a</sup> do Livro VII [Heath 1956, vol. 2, 313].

**VII, 13:** Se quatro números estão em proporção, estarão em proporção alternadamente.

A demonstração desta proposição é uma aplicação trivial da Proposição 10.<sup>a</sup> do Livro VII, que se apresenta de seguida.

**VII, 10:** Se um número é partes de um número, e outro [número] é as mesmas partes de outro, alternadamente também, quaisquer partes ou parte que o primeiro é do terceiro, as mesmas partes ou a mesma parte será o segundo do quarto [Heath 1956, vol. 2, 310].

Para demonstrar esta última proposição, recorre-se à nona proposição do Livro VII e, na parte final, às Proposições 5.<sup>a</sup> e 6.<sup>a</sup> do mesmo livro. A nona proposição é a que se segue.

**VII, 9:** Se um número é parte de um número, e outro [número] é a mesma parte de outro, alternadamente também, qualquer parte ou partes que o primeiro é do terceiro, a mesma parte ou as mesmas partes será o segundo do quarto [Heath 1956, vol. 2, 309].

A demonstração desta última proposição é feita com recurso às Proposições 5.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup> do Livro VII<sup>3</sup>, e é iniciada considerando a existência de quatro números:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , tais que  $a$  é a mesma parte de  $b$  que  $c$  é de  $d$ .

Nestas condições, pode escrever-se que existe um número inteiro  $n$  tal que  $a = \frac{1}{n}b$  e

$$c = \frac{1}{n}d.$$

Na demonstração é considerado o caso de  $n = 2$ . Assim, cada número ( $b$  e  $d$ ) é decomposto em duas partes iguais a  $a$  e a  $c$ , por exemplo,  $a_1$  e  $a_2$ ;  $c_1$  e  $c_2$ , respetivamente.

Esta *decomposição* deve ser entendida enquanto adição, ou seja,

$$b = a_1 + a_2 \quad \text{e} \quad d = c_1 + c_2$$

---

<sup>3</sup> **VII, 5:** Se um número é parte de um número, e outro é a mesma parte de outro, a soma [dos dois primeiros] será a mesma parte da soma [dos dois segundos]. [Heath 1956, vol. 2, 304]

**VII, 6:** Se um número é partes de um número, e outro é as mesmas partes de outro, a soma será as mesmas partes da soma dos dois primeiros. [Heath 1956, vol. 2, 305]

Como o número de partes em que se decompõem os números  $\bar{b}$  e  $\bar{d}$  é igual, então, essas partes,  $a_1$  e  $a_2$ ;  $c_1$  e  $c_2$  (que são os números  $a$  e  $b$ ) têm a mesma multiplicidade.

Dado que os números  $a_1$  e  $a_2$  são iguais, e  $c_1$  e  $c_2$  também são iguais, qualquer parte ou partes que  $a_1$  é de  $c_1$  é a mesma parte ou partes que  $a_2$  é de  $c_2$ .

Então, pelas Proposições 5.<sup>a</sup> e 6.<sup>a</sup> do Livro VII, qualquer parte ou partes que  $a_1$  é de  $c_1$ , é a mesma parte ou partes que  $a_1 + a_2$  é de  $c_1 + c_2$ , isto é, é as mesmas partes que  $\bar{b}$  é de  $\bar{d}$ .

A utilização das Proposições 5.<sup>a</sup> e 6.<sup>a</sup> do Livro VII é aceitável e permite concluir o resultado pretendido.

De seguida, apresenta-se a proposição aplicada a grandezas em geral, correspondente à anterior demonstrada para números: a Proposição 16.<sup>a</sup> do Livro V [Heath 1956, vol. 2, 164-165].

**V, 16:** Se quatro grandezas estão em proporção, estarão em proporção alternadamente.

*Demonstração:*

Sejam A, B, C e D quatro grandezas em proporção, tais que A está para B assim como C está para D.

Pretende provar-se que, nestas condições, as quatro grandezas estarão em proporção alternadamente, isto é, A está para C, assim como B está para D.



Figura 1.1

Sejam E e F, os mesmos múltiplos de A e de B, respetivamente; e G e H outros mesmos múltiplos de C e de D, respetivamente (escolhidos aleatoriamente) [Figura 1.1].

Então, visto que E é o mesmo múltiplo de A que F é de B, e partes têm a mesma razão que os mesmos múltiplos delas têm (Eucl. V, 15<sup>4</sup>), então A está para B, assim como E está para F.

Porém, se A está para B, assim como C está para D, então, também C está para D, assim, como E está para F (Eucl. V, 11<sup>5</sup>).

<sup>4</sup> **V, 15:** Partes têm a mesma razão que os mesmos múltiplos delas têm, tomados na ordem correspondente. [Heath 1956, vol. 2, 163]

<sup>5</sup> **V, 11:** Razões iguais a uma mesma razão são iguais entre si. [Heath 1956, vol. 2, 158]

Além disso, como G e H são os mesmos múltiplos de C e de D, então, C está para D, assim como G está para H (Eucl. V, 15).

Contudo, se C está para D, assim como E está para F, então também E está para F assim como G está para H (Eucl. V, 11).

A Proposição 14.<sup>6</sup> do Livro V estabelece que, se quatro grandezas estão em proporção, e a primeira é maior do que a terceira, a segunda também é maior do que a quarta; se a primeira for igual à terceira, a segunda é igual à quarta; e se a primeira for inferior à terceira, a segunda será inferior à quarta. Portanto, se E excede G, F também excede H; se E for igual a G, também F será igual a H e se E for menor que G, também F será menor que H.

Uma vez que E e F são os mesmos múltiplos de A e de B, e G e H são os mesmos múltiplos de C e de D (escolhidos ao acaso), logo, A está para C, assim como B está para D (pela Definição 5, do Livro V<sup>7</sup>).

Assim, A, C, B e D estão em proporção, por esta ordem. ■

A demonstração da proposição relativa a grandezas (V, 16) é menos simples do que a correspondente para números. Esta última (VII, 13) utiliza a Definição 20 do Livro VII e as Proposições 5.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup>, 9.<sup>a</sup> e 10.<sup>a</sup> do Livro VII. Destes resultados, a demonstração menos simples é a da nona proposição. A quinta e a sexta são demonstradas de forma análoga, e recorrendo ao conceito de múltiplo, enquanto a demonstração da décima é uma aplicação trivial da nona proposição.

Na demonstração da Proposição 16.<sup>a</sup> do Livro V foi utilizada a Definição 5 do Livro V e as Proposições 11.<sup>a</sup>, 14.<sup>a</sup> e 15.<sup>a</sup> do Livro V. De facto, para começar esta demonstração, foi necessário recorrer a equimúltiplos das grandezas dadas, de forma a utilizar a Proposição 15.<sup>a</sup> do mesmo Livro (e concluir que “A está para B assim como E está para F”). Este passo permitiu estabelecer uma relação entre as grandezas dadas (A, B, C e D) e as “construídas” (E, F, G e H), recorrendo para isso a mais uma proposição (V, 11). Nesta fase, tem-se que, “se A está para B assim como C está para D, então, C está para D assim como E está para F”. Novamente a Proposição 15.<sup>a</sup> do Livro V e o facto de G e H serem equimúltiplos de C e de D, permitem

---

<sup>6</sup> **V, 14:** Se uma primeira grandeza tem para uma segunda a mesma razão que uma terceira tem para uma quarta, e a primeira é maior que a terceira, a segunda será também maior que a quarta; se igual, será igual; se menor será menor. [Heath 1956, vol. 2, 162]

<sup>7</sup> **V, Def. 5:** Diz-se que grandezas estão na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando quaisquer mesmos múltiplos da primeira e da terceira simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais, ou são simultaneamente menores do que quaisquer mesmos múltiplos da segunda e da quarta, tomados na ordem correspondente. [Heath 1956, vol. 2, 114]

concluir que “C está para D assim como G está para H”. Até este momento, tem-se: “C está para D assim como E está para F e C está para D assim como G está para H”. Nesta fase era necessário relacionar entre si as grandezas “construídas” E, F, G e H. Tal foi possível utilizando a Proposição 11.<sup>a</sup> do Livro V, o que permitiu ter: “E está para F assim como G está para H”. Recorrendo à Proposição 14.<sup>a</sup> do Livro V (que relaciona quatro grandezas em proporção), concluiu-se que “se E excede G, F também excede H; se E for igual a G, também F será igual a H e se E for menor que G, também F será menor que H”. Para terminar a demonstração foi necessário utilizar a definição de grandezas proporcionais (V, Def. 5) para provar, desta forma, que as quatro grandezas iniciais (dadas) estão em proporção alternadamente. Esta demonstração é claramente mais trabalhosa do que a análoga para números, e utiliza mais resultados.

Tal como sucedeu noutras situações, no caso de grandezas, a demonstração dada por Euclides tornou-se pouco clara em termos de vocabulário, tendo Heath introduzido na sua tradução algumas palavras em inglês que não existiam em grego. Num comentário a esta demonstração, Heath expô-la algebricamente da seguinte forma [Heath 1956, vol. 2, 165]:

Se  $a : b = c : d$ , então,  $a : c = b : d$

Considerando os mesmos múltiplos de  $a$  e de  $b$ ,  $ma$  e  $mb$ , e os mesmos múltiplos de  $c$  e de  $d$ ,  $nc$  e  $nd$ , tem-se, pela Proposição 15.<sup>a</sup>,

$$a : b = ma : mb \text{ e } c : d = nc : nd$$

E, uma vez que  $a : b = c : d$ , tem-se, pela Proposição 11.<sup>a</sup>,

$$ma : mb = nc : nd$$

Então, pela Proposição 14.<sup>a</sup>, e de acordo com  $ma > < nc$ ,  $mb > < nd$ , tem-se

$$a : c = b : d. \blacksquare$$

## 1.2. A COMENSURABILIDADE

Os pitagóricos consideravam o número como a base do universo, em que tudo pode ser contado, incluindo os comprimentos. Para contar um comprimento era necessário uma medida, que de acordo com os pitagóricos, existia sempre uma apropriada.

Em particular, consideravam que era possível encontrar uma medida a partir da qual o lado de um quadrado e a respetiva diagonal poderiam ser medidos. Por outras palavras, deveria existir um comprimento do qual o lado e a diagonal fossem múltiplos inteiros. Contudo, o lado e a diagonal de um quadrado não têm uma medida comum, são *incomensuráveis*. Seja qual for a unidade escolhida, o comprimento dos dois segmentos de reta não é um número inteiro. Se fosse, os dois segmentos de reta seriam comensuráveis.

Não se sabe ao certo quem terá descoberto este resultado, mas acredita-se que terá ocorrido aproximadamente em 430 a. C. Embora seja frequentemente dito que esta descoberta precipitou uma crise na Matemática grega, o único indício credível é que motivou o aparecimento de novas teorias matemáticas [Katz 2009, 39].

A questão base está relacionada com a *comensurabilidade* de grandezas.

Sá [Sá 2000, 242] refere que duas grandezas se dizem **comensuráveis** quando “admitem uma medida em comum”.

Segue-se a explicação deste conceito, baseada neste autor.

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas grandezas do mesmo tipo.

$\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são comensuráveis se existir uma terceira grandeza  $C$ , do mesmo tipo de  $\mathcal{A}$  e de  $\mathcal{B}$ , e dois números naturais  $m$  e  $n$ , tais que:

$$\mathcal{A} = mC \text{ e } \mathcal{B} = nC$$

Assim,  $C$  “cabe”  $m$  vezes em  $\mathcal{A}$  e “cabe”  $n$  vezes em  $\mathcal{B}$ .  $\square$

De uma forma geral, diz-se que  $k$  (número finito) grandezas (do mesmo tipo)  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ , são comensuráveis, se existir uma grandeza  $C$ , do mesmo tipo, e números naturais  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , tais que

$$\mathcal{A}_1 = n_1C, \mathcal{A}_2 = n_2C, \dots, \mathcal{A}_k = n_kC.$$

Para todas as grandezas  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k, C$  diz-se uma *medida comum* das grandezas dadas.

Atendendo ao conceito de comensurabilidade descrito anteriormente, admitir que o lado e a diagonal de um quadrado são comensuráveis, é admitir a existência de uma medida comum aos dois, isto é, a existência de uma terceira grandeza de cujo comprimento o comprimento do lado

e da diagonal do quadrado são múltiplos inteiros. O procedimento habitual seria aplicar o processo de subtração recíproca aos dois segmentos de reta em questão.

A subtração recíproca era utilizada para determinar o máximo divisor comum entre dois números naturais, e é definida por Euclides nas Proposições 1.<sup>a8</sup> e 2.<sup>a9</sup> do Livro VII dos *Elementos*. As Proposições 5.<sup>a10</sup> e 6.<sup>a11</sup> do Livro X estabelecem a correspondência entre razão entre grandezas comensuráveis, e razão entre números. Este processo, designado por antifairese, é utilizado por Euclides, no Livro X, aplicado a grandezas comensuráveis, permitindo, desta forma, determinar a máxima medida comum de duas quaisquer grandezas do mesmo tipo (dois segmentos de reta, dois ângulos, por exemplo).

Conforme [Knorr 1975, 261], o processo de subtração recíproca foi utilizado para definir a proporcionalidade entre grandezas, servindo, desta forma de suporte para a teoria de proporções para grandezas incomensuráveis.

De acordo com [Sá 2000, 238] o processo de subtração recíproca (para números naturais) consiste em substituir dois números pelo menor deles e pela diferença entre os dois. O processo de substituição repete-se até se obterem dois números iguais, sendo esse valor o máximo divisor comum dos números inicialmente dados.

Segue-se a explicação deste processo para os números 48 e 27.

O processo de subtração recíproca aplicado a estes dá origem aos seguintes pares de números:

|                                | <b>48, 27</b> |    |                                |
|--------------------------------|---------------|----|--------------------------------|
|                                | (48 – 27) 21, | 27 | (menor número do par anterior) |
| (menor número do par anterior) | 21,           | 6  | (27 – 21)                      |
|                                | (21 – 6) 15,  | 6  | (menor número do par anterior) |
|                                | (15 – 6) 9,   | 6  | (menor número do par anterior) |
|                                | (9 – 6) 3,    | 6  | (menor número do par anterior) |
| (menor número do par anterior) | 3,            | 3  | (6 – 3)                        |

Então, 3 é o maior dos divisores comuns de 27 e 48. □

<sup>8</sup> **VII, 1:** Dados dois números desiguais, se o menor é continuamente subtraído do maior e se o restante nunca mede o (número) anterior, até restar uma unidade, então, os números iniciais são primos entre si. [Heath 1956, vol. 2, 296]

<sup>9</sup> **VII, 2:** Dados dois números, não primos entre si, encontrar a maior medida comum. [Heath 1956, vol. 2, 298]

<sup>10</sup> **X, 5:** Grandezas comensuráveis têm entre si a razão que (algum) número (tem) para outro número. [Heath 1956, vol. 3, 24]

<sup>11</sup> **X, 6:** Se duas grandezas têm entre si a razão que (algum) o número (tem) para (outro) número, então as grandezas serão comensuráveis. [Heath 1956, vol. 3, 26]

Este processo aplicado ao lado e à diagonal de um quadrado consiste em encontrar um segmento de reta que seja medida comum dos dois segmentos de reta originais. Contudo, à medida que se aplica este processo, constata-se que ele é infinito, uma vez que se obtêm sucessivamente medidas de lados e diagonais de um quadrado. Logo, nunca se obterão dois segmentos de reta iguais. Se as grandezas fossem comensuráveis, o processo de subtração recíproca seria finito [Sá 2000, 243-244].

A interpretação de algumas partes da obra *Segundos Analíticos*, de Aristóteles, tem sido a de que partir do princípio que o lado e a diagonal de um quadrado são comensuráveis, conduz à igualdade entre os números ímpares e os números pares. Tal facto leva a uma outra demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado, baseada na *redução ao absurdo*, que se enquadra no espírito da Aritmética Pitagórica [Sá 2000, 243].

Esta demonstração [Sá 2000, 245-246] descreve-se a seguir.

Sejam  $\ell$  e  $d$ , o lado e a diagonal de um quadrado, respetivamente.

Admite-se que  $\ell$  e  $d$  são comensuráveis.

A Figura 1.2 representa um quadrado de lado  $\ell$  (o quadrado BDFH) e de diagonal  $d$  (que representa o segmento de reta HD, por exemplo) e o quadrado ACEG construído sobre a diagonal  $d$  do quadrado inicial.

- Como  $\ell$  e  $d$  são comensuráveis, então existe um segmento de reta que é medida comum de  $\ell$  e de  $d$ .

Seja  $u$  esse segmento de reta e considere-se, por construção, que é a maior medida comum de  $\ell$  e de  $d$ .

Nestas condições, existem números naturais  $m$  e  $n$  tais que  $\ell = mu$  e  $d = nu$ .

- $m$  e  $n$  não são simultaneamente números pares<sup>12</sup>.

O quadrado ACEG tem área dupla da do quadrado BDFH<sup>13</sup>.

Pode observar-se que o quadrado BDFH se decompõe em quatro triângulos retângulos iguais, enquanto o quadrado ACEG se decompõe em oito desses triângulos.

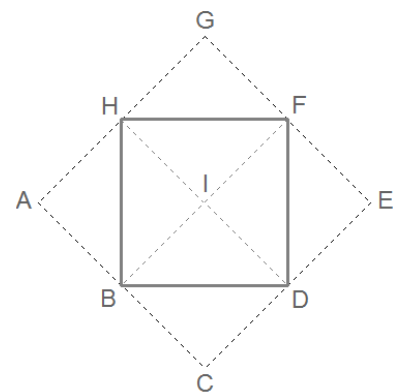


Figura 1.2

<sup>12</sup> Note-se que  $m$  e  $n$  não podem ser os dois números pares, uma vez que se tal acontecesse, o segmento de reta duplo de  $u$  (o segmento  $2u$ ) seria uma medida comum a  $\ell$  e a  $d$ .

<sup>13</sup> Caso particular de aplicação do Teorema de Pitágoras.

Assim, as áreas dos dois quadrados são também comensuráveis, uma vez que o quadrado de lado  $u$  é medida comum dos quadrados cujos lados são  $\ell$  e  $d$ .

Em termos de áreas, pode dizer-se que o quadrado de lado  $\ell$  equivale a  $m^2$  quadrados de lado  $u$  e o quadrado de lado  $d$  equivale a  $n^2$  quadrados de lado  $u$ . Assim, o número  $n^2$  é o dobro do número  $m^2$ , logo, o número  $n^2$  é par. Atendendo a que um número é par se e só se o seu quadrado é um número par, então,  $n$  é um número par. Uma vez que  $m$  e  $n$  não podem ser os dois números pares,  $m$  terá de ser um número ímpar.

Contudo, se  $n$  é um número par,  $n^2$  é um múltiplo de quatro. Como  $n^2$  é o dobro de  $m^2$ ,  $m^2$  é necessariamente um número par e consequentemente,  $m$  também é um número par. Chega-se assim a uma contradição: o número  $m$  é par e ímpar ao mesmo tempo!

Assim,  $\ell$  e  $d$  são incomensuráveis. ■

Esta “prova” poderá ter sido o primeiro caso de demonstração por *redução ao absurdo* e pressupõe que por esta altura a noção de prova era central na conceção grega de Matemática.

A noção de incomensurabilidade representa um avanço relativamente aos conceitos babilónico e egípcio de cálculo com números ([Sá 2000, 246] e [Katz 2009, 66]).

A descoberta dos incomensuráveis levou a que os matemáticos procurassem alternativas às demonstrações anteriores, já que acreditavam nas proposições conhecidas/descobertas até à altura. Depararam-se com dois desafios: encontrar uma teoria de proporções que pudesse ser aplicada a todo o tipo de grandeza e por isso ser capaz de substituir a “Teoria Pitagórica”, e tentar encontrar formas diferentes de demonstrar sem recorrer ao conceito de proporcionalidade. Relativamente à descoberta de outra teoria de proporções, tal veio a acontecer cerca de um século mais tarde, com Eudoxo de Cnido. Durante o último quartel do século V e os três primeiros do século IV a. C., foi desenvolvido um método de prova alternativo, designado por *Geometria das Áreas*. No entanto, este método não permitiu resolver todos os obstáculos que a descoberta dos incomensuráveis criou à Geometria Pitagórica [Sá 2000, 246-247].

Na busca de uma teoria de proporções que fosse válida para grandezas incomensuráveis, destacou-se Teeteto de Atenas, que explorou as relações entre os conceitos de *proporcionalidade* e de *subtração recíproca*. Eudoxo de Cnido aprofundou as investigações de Teeteto sobre a proporcionalidade e formulou uma nova teoria de proporções. Esta teoria revelou-se de grande

importância histórica e encontra-se descrita no Livro V dos *Elementos* de Euclides [Sá 2000, 286].

### 1.3. DIFUSÃO DOS *ELEMENTOS* NA EUROPA DO RENASCIMENTO

Entre os séculos XIV e XVI predominou, no Ocidente, o período designado por Giorgio Vasari<sup>14</sup>, de *Renascimento*. Este termo foi utilizado pelos Humanistas<sup>15</sup> como uma ressurreição das letras e das artes através do contato renovado com a Antiguidade e, de acordo com Jean Delumeau [Delumeau 1984, 480], deve ser aplicado para qualificar o período que decorreu entre 1320 e 1620 como “promoção do Ocidente”.

A ideia do Renascimento, enquanto época que permitiu a libertação relativamente à época medieval e o início da era moderna do individualismo, deve-se a Jacob Burckhardt<sup>16</sup>. Este movimento teve efeitos em vários domínios, tais como, Religião, Literatura, Arte, Educação, Ciência, Matemática, Astronomia, Geografia, entre outros.

Com o Renascimento foram realizadas várias viagens que revelavam o espírito empreendedor dos Europeus. Os descobrimentos geográficos contribuíram não apenas para a expansão dos horizontes como também para a difusão de conhecimentos. A tomada de Constantinopla pelos turcos, em 1453, atraiu para Itália muitos eruditos, que foram responsáveis pela fundação de Academias, de acordo com o modelo platónico. Até então, a maioria das obras estavam escritas em latim e grego, o que as tornava perceptíveis apenas a uma minoria. A invenção da tipografia por Gutenberg, por volta de 1440-1450, permitiu a publicação de livros em série, tornando-os acessíveis a um maior número de pessoas. Este facto aliado à utilização gradual da língua italiana na escrita das obras fomentou a difusão mais rápida desses documentos.<sup>17</sup> Durante esta época foram copiados numerosos manuscritos de autores antigos, que foram conservados, constituindo uma fonte de informação [Delumeau 1984, 77].

---

<sup>14</sup> Nasceu em Itália, em 1511, foi pintor, projetou edifícios importantes, tais como o Palácio Vecchio em Florença, e várias igrejas e palácios em Pisa e Arezzo. É mais conhecido pelo seu trabalho de biógrafo em *Vidas e Artistas*. [Vasari]

<sup>15</sup> O Humanismo foi um “movimento intelectual europeu do Renascimento que procurou descobrir e reabilitar a literatura e o pensamento da Antiguidade Clássica e que teve como interesse central o Homem, no pleno desenvolvimento das suas virtualidades e empenhado na ação, havendo aqui uma nítida oposição à concepção hierárquica e feudalista do Homem medieval”. [Humanismo]

<sup>16</sup> Jacob Burckhardt foi um historiador suíço, e publicou em 1860, *A Cultura do Renascimento na Itália*. Nesta obra apresentou uma síntese histórica do Renascimento, traduzida naquilo que alguns denominaram de fórmula da “descoberta do homem e do mundo”. [Fernandes 2006]

<sup>17</sup> [Europa do Renascimento]

Vários estudiosos se dedicaram, ao longo dos tempos, a traduzir a obra de Euclides. Diz-se que Gherard de Cremona<sup>18</sup> terá traduzido os quinze livros de Euclides, a partir da versão em árabe de al-Nayrizi. Adelardo de Bath<sup>19</sup> e Campano de Novara<sup>20</sup> também efetuaram traduções latinas dos *Elementos* a partir de textos árabes. A versão de Gherard de Cremona será mais clara do que a de Adelardo uma vez que não possui abreviaturas como a deste último, nem foi alterada, já que foi traduzida literalmente do manuscrito árabe que lhe terá servido de base. [Heath 1981, 363]

Cerca de cento e cinquenta anos depois de Adelardo ter realizado a sua tradução, foi a vez de Campano de Novara fazer um trabalho análogo. Estas duas versões são muito semelhantes o que leva a conjecturar que possivelmente Campano se terá servido da versão de Adelardo. Contudo, esta hipótese não foi provada. A edição de Campano é mais completa e a estrutura não é igual à de Adelardo. [Heath 1981, 364]

As diferenças entre as versões de Adelardo e de Campano poderão justificar-se em possíveis adaptações que terão feito. Campano poderia ter utilizado a versão de Adelardo, servindo-se mesmo dela como base para a sua versão, mas poderá ter consultado outros originais em árabe para corrigir algo com o qual não teria eventualmente concordado.

---

<sup>18</sup> Nasceu em 1114, em Cremona, e faleceu em Toledo, em 1187. Foi educado em Itália mas estabeleceu-se em Toledo, onde aprendeu árabe, com o objetivo de conseguir ler o *Almagesto* de Ptolomeu, dado que não existiam traduções latinas desta obra na época. Dedicou-se à tradução e cópia de manuscritos e outras obras, com a ajuda de outras pessoas, numa espécie de indústria de tradução. Ao longo de quarenta anos traduziu cerca de oitenta obras do árabe para o latim. Algumas das obras que traduziu eram efetivamente árabes, outras tinham sido já traduzidas a partir de obras gregas. As obras que traduziu eram de diversas áreas, tais como, Medicina, Astronomia, Geometria e outros ramos da Matemática. Para além dos *Elementos* de Euclides, foi o autor da tradução latina a partir da árabe do *Almagesto* em 1175. Para além das traduções, realizou palestras públicas, e com isso ficou com o estatuto de homem de grandes conhecimentos. [O'Connor 1999]

<sup>19</sup> Adelardo de Bath viveu entre 1116 e 1142, e é considerado o principal tradutor inglês medieval. Estudou em Tours e foi professor em Laon (França). Depois de deixar Laon viajou durante sete anos, tendo passado por vários locais, tais como Itália, Palestina e possivelmente Espanha. As traduções de obras árabes, a partir das suas versões em espanhol, sustentam a sua passagem por Espanha. Terá efetuado a tradução do *Almagesto* de Ptolomeu do grego depois de ter viajado de Salerno e Sicília, contudo não há evidências suficientes sobre este facto. O seu contributo para a filosofia medieval encontra-se nas suas obras: *De eodem et diverso*, escrito antes de 1116, e dedicada a William, bispo de Siracusa, e *Quaestiones naturales*, escrito antes de 1137. Nestes dois trabalhos são expostas tendências ecléticas e não apenas pontos de vista platónicos. Efetuou traduções de obras de áreas diversas, tais como, Filosofia, Astronomia, Aritmética. Terá sido o primeiro a apresentar uma versão (ou versões) completa dos *Elementos* em latim. No século XII o seu nome está associado a três versões distintas da obra de Euclides, sendo a segunda versão aquela que terá sido a mais utilizada enquanto manual nas escolas. O seu trabalho de tradução de diversas obras gregas e árabes para latim proporcionou o conhecimento/estudo das mesmas a uma grande variedade de públicos. [Clagett 2008]

<sup>20</sup> Não são conhecidos muitos factos sobre a vida deste astrónomo e matemático italiano. Pensa-se que Novara terá sido a sua terra natal e que terá vivido no primeiro quartel do século XIII. Terá realizado vários trabalhos, contudo não existem ainda provas suficientes sobre todos. Da sua autoria fazem parte os trabalhos *Computus maior*, *Sphere* e *Theorica planetarum*. Este último não foi publicado por se tratar de um trabalho técnico e que apenas suscitava o interesse de uma minoria. O trabalho que tornou Campano mais conhecido foi a sua tradução latina dos *Elementos* de Euclides, que foi publicada várias vezes nos séculos XVI e XVII. [Toomer 1991]

As diversas versões dos *Elementos* publicadas geraram críticas de vários tipos, nomeadamente, suscitaram a hipótese de nem todos os resultados presentes nas mesmas serem provenientes da versão original de Euclides. Exemplo disso é a ausência da Definição 4 do Livro V e a introdução de uma definição de proporção contínua, em algumas versões, entre as quais, nas de Adelardo de Bath, e Campano de Novara, ausente na versão em grego. Considerando que as traduções foram realizadas em locais e tempos diferentes, pensa-se que estas alterações terão origem no texto árabe e não no europeu. Supõe-se que a omissão da quarta definição do Livro V poderá ter sido por esta se considerar supérflua e evidente. [Drake 1987, 66].

Referem-se, de seguida, algumas das versões dos *Elementos* realizadas na Europa do Renascimento.

Em 1482 foi pela primeira vez publicada uma versão latina dos *Elementos* de Euclides, que foi também o primeiro livro matemático de grande importância impresso. Este trabalho foi impresso em Veneza e contém a tradução realizada por Campano. [Heath 1956, vol. 1, 97]

Em 1505 Bartolomeu Zamberti<sup>21</sup> apresentou em Veneza a primeira tradução latina, a partir do grego, da obra completa dos *Elementos*. Quatro anos mais tarde Luca Pacioli<sup>22</sup> produziu uma nova edição da obra de Euclides, também em latim. [Heath 1956, vol. 1, 98]

A primeira das edições conjunta das traduções de Campano e Zamberti foi realizada em Paris, em 1516. No título desta edição surge a ideia de que apenas os enunciados presentes eram da autoria de Euclides e que as demonstrações destes resultados, nesta tradução, eram da autoria de Campano, enquanto Teão seria o autor das demonstrações no texto grego. [Heath 1956, vol. 1, 99]

Em 1533 foi publicado pela primeira vez um trabalho em grego de Euclides, em conjunto com um comentário de Proclo ao Livro I. A edição deste trabalho esteve a cargo de Simon Grynaeus. [Schonbeck 1994, 178]

---

<sup>21</sup> Nasceu em Veneza e viveu nos séculos XV e XVI. Este matemático e humanista foi responsável, em 1505, pela primeira tradução latina dos *Elementos*: *Euclidis megarensis philosophi platonici mathematicarum disciplinarum janitoris...* Zamberti identificou de forma errada o grego por Euclides de Megara. Para além dos treze livros de Euclides, no seu texto incluiu os dois livros da autoria de Hipsicles de Alexandria (14º Livro) e Teão de Alexandria (15º Livro). [Carruccio]

<sup>22</sup> Frade franciscano italiano que viveu entre 1445 e 1517. Foi aprendiz de um comerciante, trabalhou no convento franciscano da sua terra natal e ensinou Matemática numa escola. Em 1494 foi publicado o seu trabalho denominado *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*. Esta foi a sua obra mais importante, e graças à fama conseguida através da mesma, foi convidado em 1497 a ensinar Matemática na corte do duque de Milão, Ludovico Sforza. Leonardo da Vinci foi um dos seus discípulos e aprendeu com ele as regras da proporção e perspetiva que aplicou nas suas obras. Da Vinci ilustrou a obra de Paccioli publicada em Veneza 1509, *De Divina Proportioni*. [Paccioli]

Nicolau Tartaglia<sup>23</sup> efetuou, em 1543, a primeira tradução completa dos *Elementos* para italiano. A sua tradução terá sido feita a partir das versões de Zamberti e de Campano. [Heath 1956, vol. 1, 106]

De acordo com [Malet 2012, 207], Tartaglia terá sido o primeiro a corrigir a “leitura defeituosa” das definições de razão e proporção presentes em todas as versões provenientes do latim medieval dos *Elementos*.

Entre 1505 e 1574, a obra *Elementos* foi editada dez vezes em latim; uma vez em grego, em francês e em inglês; e duas vezes em italiano [Delumeau 1984, 415].

A tradução para latim considerada mais importante foi a realizada em 1572 por Commandino<sup>24</sup>. Esta versão foi traduzida para italiano, em 1575, cabendo ao próprio Commandino a sua revisão. [Heath 1956, vol. 1, 104, 106]

Nas primeiras versões dos *Elementos*, surgia a referência a Euclides de Megara, como sendo o seu autor. Este equívoco terá sido cometido por se ter considerado que Euclides de Alexandria (responsável pela compilação dos *Elementos*) e Euclides de Megara (filósofo de Megara) seriam a mesma pessoa. O responsável pelo esclarecimento desta situação foi Commandino. [Schonbeck 1994, 179]

Em 1574 Clávio apresenta a sua primeira versão latina dos *Elementos*, e segundo este, não se trata de uma tradução já que colocou várias notas e comentários ao longo da obra. [Heath 1956, vol. 1, 105]

Em 1654 surge a obra de Tacquet: *Elementa geometriae planae ac solidae*. Quatro anos mais tarde é a vez de Borelli apresentar o seu *Euclides restitutus*, que foi traduzida para italiano, em 1663, por Domenico Magni. [Heath 1956, vol. 1, 105-106]

---

<sup>23</sup> Foi um matemático italiano que viveu entre 1505 e 1557. O seu nome verdadeiro era Nicolau Fontana, contudo, por ter ficado gago em pequeno, adotou o nome de *Tartaglia*. Os seus pais eram muito pobres, pelo que teve de trabalhar para viver, tendo por este facto ficado analfabeto até à adolescência. Foi professor em Placência, Vicência, Milão e Veneza. Contribuiu para a Matemática com a descoberta, em conjunto com Ferro, da resolução das equações de terceiro grau. Entre os seus trabalhos, encontram-se: *Nuova Scienza*, editada em 1537; *La Travagliata Invenzione*, em 1551; *Queriti ed Invenzioni Diverse*, em 1554; *Trattato di Aritmetica*, em 1556. A sua obra mais importante foi *General Trattato de Numeri e Misura*, entre 1555 e 1560. Para além de ter traduzido os *Elementos*, traduziu também as obras de Arquimedes. [Masotti 1991]

<sup>24</sup> Commandino, descendente de uma família nobre, nasceu em Urbino, Itália, em 1509 e faleceu em 1575, na sua terra natal. Estudou durante alguns anos latim e grego. Em 1534 foi para a universidade de Pádua onde estudou Filosofia e Medicina durante dez anos, tendo obtido o seu diploma de Medicina na universidade de Ferrara. A sua verdadeira vocação era traduzir e comentar os clássicos da antiguidade Matemática grega. Traduziu e comentou para latim: *Measurement of the Circle*, de Arquimedes; *Spirals*, *Quadrature of the Parabola*, *Conoids and Spheroids*, e Sand-Reckoner. Em 1572 traduziu para latim e comentou os *Elementos* de Euclides. Em 1575, Commandino supervisionou uma tradução completa dos *Elementos* para italiano, feita por alguns dos seus alunos, para os seus conterrâneos que não entendiam latim. [Rosen 1991]

A edição de Isaac Barrow, que foi publicada pela primeira vez em latim, em 1655, e em inglês, em 1660, terá sido a mais popular em Inglaterra, já que foi republicada pelo menos onze vezes até 1687. [Malet 2012, 210]

Em 1672 Claude François Milliet Dechaies publicou *Les éléments d'Euclid expliqués d'une manière nouvelle et très facile*. Esta obra teve várias edições, ao longo dos anos, tendo algumas delas sido traduzidas para inglês (1685) e italiano (1749). A partir de 1709 a obra de Dechaies foi revista por Ozanam. [Heath 1956, vol. 1, 108]

As versões de Tacquet e de Dechaies foram muito populares na Europa e foram republicadas entre três e doze vezes, respetivamente, entre 1690 e 1745 e foram traduzidas para inglês (pelo menos dez e oito vezes, respetivamente). [Malet 2012, 210]

A versão de Bernard Lamy (será alvo de estudo no que segue) teve sete edições entre 1685 e 1758. [Malet 2012, 210]

Foram realizadas várias versões dos *Elementos*, noutros idiomas para além dos mencionados anteriormente, tais como, espanhol, alemão, inglês, holandês, russo e sueco.

De acordo com [Schonbeck 1994, 179] as versões dos *Elementos* que foram feitas no final do século XVI, e os trabalhos anteriores de matemáticos gregos, prepararam o terreno para o desenvolvimento da Matemática. Os *Elementos* de Euclides tiveram uma influência em três áreas: na história da Geometria não euclidiana, no desenvolvimento da Geometria Analítica e no desenvolvimento de um novo conceito de número. Relativamente à Geometria não euclidiana, Girolamo Saccheri e Johann Heinrich definiram os teoremas de Geometria Hiperbólica e Elítica, a partir da questão das paralelas no Livro I e dos trabalhos dos seus antecessores árabes. A “Álgebra Géométrica” do Livro II e o trabalho de François Viète, serviram de base para Pierre de Fermat e René Descartes definirem o sistema de coordenadas geométricas. No que respeita ao conceito de número, Michael Stifel tentou estabelecer uma teoria de números compreensível para racionais e irracionais, a partir da classificação dos irracionais no Livro X.

Se alguns se limitaram a traduzir esta obra de Euclides, outros estudiosos adaptaram-na e reformularam-na em alguns aspetos, introduzindo novas definições e resultados e/ou substituíram partes da mesma.

Determinados autores colocaram comentários ao longo do documento, expondo a sua opinião sobre os conteúdos presentes no texto original. Para além disso, foram escritas várias dissertações acerca dos resultados presentes nos *Elementos*, incidindo grande parte sobre a teoria clássica de proporções.

Algumas das versões dos *Elementos* tiveram várias edições, o que lhes confere o título de *bestseller* da Matemática. [Malet 2012, 210]

No final do século XVII e durante o século XVIII, os *Elementos* de Euclides serviram como manual de estudo para principiantes. Assim, de acordo com o propósito a que se destinava, alguns dos seus conteúdos foram reduzidos e/ou modificados. De entre as alterações verificadas destacam-se as introduzidas nos conceitos de razão e igualdade de razões. [Malet 2012, 228]

Apesar das suas imperfeições, os *Elementos* de Euclides são a maior obra Matemática de todos os tempos. Para além da Bíblia, será o livro mais editado e que mais terá circulado pelo mundo. Ao longo dos tempos, foi objeto de estudo e análise e serviu de base para que vários autores construíssem as suas teorias. [Heath 1981, 357-358]

## 2. A(s) TEORIA(S) DE PROPORÇÕES NA EUROPA DO SÉCULO XVII

Inicia-se este capítulo com uma referência aos conceitos de “razão” e “proporção”, estabelecendo-se, a este respeito, a terminologia que será utilizada ao longo deste trabalho.

De seguida, é feita uma abordagem genérica à forma como se desenvolveu na Europa a problemática das razões e proporções nos séculos XVII e XVIII, começando no final do século XVI, com Clávio.

Nesta Dissertação pretende-se estudar a teoria de proporções, em autores portugueses na primeira metade do século XVIII, no entanto, o título deste capítulo refere século XVII. Isto deve-se a que os trabalhos destes portugueses foram baseados nos de alguns autores do século XVII, sendo por isso necessário proceder a um estudo neste período.

Alguns dos autores analisados neste capítulo serão mencionados posteriormente, aquando do estudo das obras dos portugueses.

### 2.1. “RAZÃO” E “PROPORÇÃO”

A tradução dos *Elementos*, a partir do grego, gerou alguma controvérsia relativamente a alguns termos presentes nas primeiras definições do Livro V. Assim, *logos* (λόγος) e *analogia* (αναλογία) foram traduzidas por alguns autores por razão (*ratio*) e proporção (*proportio*) (Clávio, Heath, por exemplo), outros traduziram por proporção e proporcionalidade, respetivamente. Tacquet utilizou os termos *ratio* e *proportio* como sendo equivalentes.

Para além disto, verifica-se que alguns referem “proporção” como sendo uma “igualdade entre duas razões” enquanto outros definem proporção como “semelhança de razões”.

No que segue os termos a utilizar serão **razão** e **proporção**.

## 2.2. AUTORES EUROPEUS

A definição presente no Livro VII dos *Elementos* para explicar a proporção entre números, não se aplica ao caso das grandezas serem incomensuráveis, pelo que Euclides teve necessidade de apresentar uma definição passível de ser aplicada a todo o tipo de grandezas.

A Definição 20 do Livro VII, para números, é baseada na noção de “ser o mesmo múltiplo, ou a mesma parte ou as mesmas partes”, sendo mais simples do que a correspondente Definição 5, do Livro V, para grandezas em geral. Esta última, que tem como base a propriedade dos equimúltiplos, tem sido alvo, ao longo dos tempos, de várias críticas e foi apelidada de “obscura” por vários autores.

Em 1574 Cristóvão Clávio<sup>25</sup> publicou um comentário aos *Elementos* de Euclides, onde dedicou várias partes à(s) teoria(s) de proporções. Segundo este matemático, a necessidade de descobrir uma propriedade que fosse aplicável tanto a razões racionais como irracionais, terá levado Euclides a introduzir a propriedade dos equimúltiplos. Contudo, de acordo com Clávio, Euclides não provou que as proporções entre números satisfazem a propriedade dos equimúltiplos nem o recíproco. Para ultrapassar esta “obscuridade”, Clávio adaptou os conceitos utilizados por Euclides, reformulando as definições e introduzindo alguns teoremas. Estas ideias foram estudadas por Palmieri na segunda edição do seu comentário à obra de Euclides, em 1589. [Palmieri 2001, 556]

À semelhança de Clávio, também Galileu Galilei<sup>26</sup> teceu uma série de considerações acerca da teoria de proporções dos *Elementos*. Apesar de ter utilizado a propriedade dos equimúltiplos no seu trabalho *De Motu*, em 1590, nas demonstrações das leis da gravidade e do pêndulo,

---

<sup>25</sup> Nasceu na Alemanha em 1537 e faleceu em Itália em 1612. Em 1555 integrou a ordem jesuíta em Roma e estudou algum tempo na Universidade de Coimbra, onde observou o eclipse do sol em 21 de agosto de 1560. Começou por ensinar Matemática no Colégio Romano, em 1565, enquanto ainda era estudante de Teologia. Em 1574 publicou o seu trabalho mais importante, *Elementos de Euclides*. Foi apelidado de “o Euclides do século XVI”. Para além de matemático foi astrónomo e defensor da teoria de Ptolomeu, e por isso opositor de Copérnico. [Busard 1991]

<sup>26</sup> Viveu entre 1564 e 1642 e foi um importante físico, astrónomo e matemático italiano. É considerado o fundador da ciência moderna pela introdução do método experimental. Contribuiu para o estabelecimento da mecânica como ciência e combinou a experimentação com o cálculo. De entre as suas descobertas, salientam-se a lei do isocronismo do pêndulo e a lei da aceleração uniforme da queda dos corpos, leis que traduziu matematicamente. A lei do isocronismo do pêndulo permitiu-lhe construir um relógio para estudos astronómicos. Construiu ainda uma espécie de termómetro, um compasso proporcional e um telescópio de refração para a investigação astronómica. Foi julgado e condenado em 1633 e teve de abjurar perante a Inquisição por defender a teoria heliocêntrica e a ideia de que a Terra é móvel, noções contrárias às defendidas pela Bíblia. Obras mais conhecidas: *Sidereus Nuncius* (Mensageiro das Estrelas), *Istoria e dimostrazione intorno alle macchie solari* (História e demonstração sobre as manchas solares), *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno duo nuove scienze*, (Discursos e demonstrações matemáticas acerca de duas ciências novas), *De Motu* (Do movimento), *Il Saggiatore* (O Experimentador). [Galileu]

Galileu apelidou mais tarde a proporcionalidade obtida dos equimúltiplos de noção “obscura”. A dificuldade em aplicar a propriedade dos equimúltiplos fora do domínio da Matemática Pura, levou-o a desenvolver uma alternativa à de Euclides. Assim, propôs uma nova definição, a partir da qual seria possível deduzir a definição de Euclides. A par desta definição, Galileu desenvolveu um conjunto de teoremas de forma a mostrar que a proporcionalidade dos equimúltiplos era de facto dedutível a partir da sua nova definição.

Palmieri analisou os estudos de Clávio e Galileu e verificou que eram semelhantes, o que o levou a colocar a hipótese de que Galileu se terá baseado no modelo de Clávio.

Os resultados de Galileu foram transmitidos e utilizados pelos seus seguidores.

No âmbito deste estudo destacam-se os trabalhos de Borelli e Tacquet, que se descrevem de seguida.

### 2.2.1. Giovanni Alfonso Borelli

Palladino estudou a temática da(s) teoria(s) de proporções no século XVII, atribuindo especial ênfase a André Tacquet, que será abordado posteriormente, e a um dos discípulos de Galileu: Giovanni Alfonso Borelli<sup>27</sup>. Este matemático italiano, de acordo com Palladino, considerava que o estudo desta(s) teoria(s) era profícuo e interessante uma vez que constituía(m), na altura, o modelo matemático mais conhecido e rigoroso para a comparação de grandezas contínuas.

A forma como Euclides apresentou a teoria de proporções, foi considerada por Borelli difícil e incompreensível, nomeadamente no que diz respeito à utilização da propriedade dos equimúltiplos. Para além disto, o facto de Euclides apresentar os conceitos relativos ao que hoje denominamos “proporcionalidade” de duas formas diferentes, e de não utilizar as Definições 3 e 4 do Livro V, levou Borelli a supor que estas definições teriam sido acrescentadas posteriormente ao texto original. No terceiro livro da sua obra *Euclides restitutus*, Borelli reformulou as definições

---

<sup>27</sup> Nasceu em Nápoles em 1608 e faleceu em Roma em 1679. Foi médico e matemático; reconheceu a órbita parabólica dos cometas e tentou explicar, pela atração, o movimento dos satélites de Júpiter. Criou a denominada escola “iatromecânica” e contribuiu para o progresso da Anatomia, com várias descobertas, por exemplo, a da estrutura muscular do coração. Apesar de ter considerado que Euclides fez um excelente trabalho ao compilar os *Elementos*, considerou esta obra repetitiva e prolixa, sendo por isso necessário organizá-la de forma mais clara e concisa. Então, reexaminou o postulado das paralelas e tentou estabelecer a(s) teoria(s) de proporções com bases mais sólidas. Obras principais: *Euclides restitutus* (1658), *Theorica medicorum planetarum ex causis physicis deductae* (1666), *De vi percussionis* (1667), *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus* (1670), *De motu animalium* (1680, 1681). [Settle 1991]

de Euclides, bem como proposições e axiomas, na tentativa de colmatar as lacunas que identificou nos *Elementos*. Borelli preocupou-se em arranjar uma definição que pudesse ser aplicada a todo o tipo de grandezas, comensuráveis e incommensuráveis, já que defendia que qualquer definição é o princípio da ciência, devendo por isso ser o mais geral possível.

Neste trabalho Borelli apresenta um processo para encontrar a “igualdade entre razões” por aproximação, que se descreve a seguir.

De uma forma genérica, considerem-se duas grandezas  $X$  e  $Y$ , incommensuráveis entre si. Pretende-se determinar a razão entre as duas grandezas, o que em linguagem atual, pode ser representado por  $X : Y$ .

De acordo com Borelli, é possível encontrar uma razão entre duas grandezas, igualmente comensuráveis, menor do que  $X : Y$  e uma razão entre duas grandezas comensuráveis, maior do que  $X : Y$ . As duas razões encontradas são números racionais, visto tratar-se de grandezas comensuráveis. Através de uma partição em duas classes, uma constituída por todos os números racionais menores do que  $X : Y$  (ou seja, todas as razões entre duas grandezas comensuráveis menores que  $X : Y$ ) e a outra formada por todos os números racionais maiores que  $X : Y$ , fica determinada a razão  $X : Y$ .

Esta forma de comparar grandezas incommensuráveis tem subjacente a ideia da existência dos números reais. [Palladino 1991, 49]

### 2.2.2. André Tacquet

À semelhança de Borelli, André Tacquet<sup>28</sup> concebeu procedimentos para descobrir a “igualdade entre razões” por aproximação. A partir da obra de Euclides, escreveu em 1654

---

<sup>28</sup> André Tacquet nasceu em Antuérpia e viveu entre 1612 e 1660. Foi um matemático, astrónomo e físico e parecia ter quase total conhecimento de literatura. Recebeu uma educação excelente no colégio jesuíta da sua terra natal. Entrou em 1629 para a ordem jesuíta. Teve como professor de Matemática William Boelmans, estudante e secretário de Gregório de S. Vicente. Fez os seus votos em 1646 e ensinou Matemática em colégios de Louvain e Antuérpia. O seu trabalho mais importante foi *Cylindricorum et annularium*, constituído por um conjunto de teoremas originais sobre cilindros e anéis. O seu trabalho mais popular foi *Elementa geometriae*, que teve numerosas edições durante o século XVIII, tendo sido editado e revisto por Whiston, Musschenbroek e Boskovic. Esta obra distinguiu-se pela sua clareza e ordem. *Opera mathematica* foi publicada postumamente e continha, além de outros seus trabalhos, *Astronomia*. Nestes livros Tacquet rejeitou a ideia do movimento da Terra, por duas razões: ausência de provas físicas ou filosóficas deste facto e a sua fé exigia que acreditasse na imobilidade do planeta. O contributo de Tacquet foi essencialmente na área da pedagogia tendo os seus livros servido para ensinar Matemática elementar a muitas gerações. [Stromholm 1991]

*Elementa Geometriae*, onde, entre outros aspetos, reformulou as definições clássicas de razão e proporção dadas por Euclides. A importância que atribuiu às teorias de proporções está bem patente na afirmação que fez no prefácio do seu Livro V:

“Não há nenhum matemático que ignore a importância que a ciência das  
proporções tem na geometria.” <sup>29</sup>

O Livro V desta obra não tem a mesma estrutura do correspondente dos *Elementos* de Euclides. Enquanto Euclides apresenta dezoito definições seguidas de vinte e cinco proposições e as respetivas demonstrações, Tacquet dividiu este seu Livro em três partes.

Na primeira – *Prima Pars* – incluiu as seis primeiras definições (análogas às de Euclides, no que respeita à génese, já que utiliza uma linguagem diferente); três explicações sobre as definições (a primeira, sobre igualdade e desigualdade entre razões; a segunda, sobre a definição de razão igual; a terceira, sobre outra propriedade de razões iguais); seguem-se as Definições sete a onze; um Axioma (existência da quarta proporcional); e termina com as proposições. Relativamente às proposições, não coloca todas as presentes nos *Elementos*, pois considera algumas (I a VI; XIII e XIV e XX e XXI) como supérfluas. [Tacquet 1665, 131-154]

A segunda parte – *Pars Secunda* – contém uma explicação do “Princípio dos Equimúltiplos” de Euclides, dois lemas e os Teoremas I a VI. [Tacquet 1665, 154-164]

Na terceira parte – *Tertia Pars* – apresenta um conjunto de procedimentos sobre o que designa de “Denominadores, algoritmos das operações com razões e composição de razões”, onde expõe uma dissertação sobre os valores das razões, o cálculo de frações e sobre a razão composta. [Tacquet 1665, 164-180]

O Livro V de *Elementa Geometriae* é iniciado por Tacquet referindo que a Definição 5 dos *Elementos* está na base da dificuldade da(s) teoria(s) de proporções. Segundo este autor, a propriedade dos equimúltiplos não permite explicar a igualdade de razões, e em vez de ter sido considerada como definição, deveria ter sido considerada como um teorema, que todavia, não foi demonstrado nem por Euclides nem por ninguém depois dele. Por este facto, os resultados dos Livros V e VI, que têm como base a Definição 5, ficam comprometidos.

Relativamente às definições presentes no Livro V de Tacquet – *Prima Pars* – verifica-se que este fez algumas alterações às correspondentes dos *Elementos*. Assim, na primeira definição,

---

<sup>29</sup> “*Quanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo Mathematicus, qui ignoret*”. [Tacquet 1665, 128]

Tacquet utiliza o conceito de parte “aliquota” e parte “aliquanta”, termos que Euclides não usou. Para Tacquet “parte *aliquota* de uma grandeza é aquela que repetida algumas vezes mede exatamente a grandeza maior. Parte *aliquanta* é aquela que repetida nunca mede a [quantidade] maior.”<sup>30</sup>

Os termos “aliquota” e “aliquanta” substituem os termos euclidianos de “parte” e “partes”, presentes das Definições 3 e 4 dos *Elementos*. [Lamandé 2013, 604]

Na Definição 4, Tacquet classifica as razões ou proporções em racionais e irracionais. As Definições 5 e 6 de Euclides, baseadas no conceito de equimúltiplo, foram também reformuladas por Tacquet da seguinte forma<sup>31</sup>:

**Definição 5:** Duas razões ( $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{F}$ ) são semelhantes, iguais, ou as mesmas, quando um antecedente ( $\mathcal{A}$ ) contém igualmente ou do mesmo modo (isto é, nem mais nem menos) o seu conseqüente ( $\mathcal{B}$ ), assim como o outro antecedente ( $\mathcal{C}$ ) contém o seu conseqüente ( $\mathcal{F}$ ). Ou quando um antecedente ( $\mathcal{A}$ ) está contido do mesmo modo no seu conseqüente ( $\mathcal{B}$ ) como o outro antecedente ( $\mathcal{C}$ ) no seu conseqüente ( $\mathcal{F}$ ).<sup>32</sup> [Tacquet 1665, 132]

**Definição 6:** Duas razões são dissemelhantes, ou uma razão é maior que a outra, quando um antecedente ( $\mathcal{I}$ ) contém mais o seu conseqüente ( $\mathcal{L}$ ), do que o outro antecedente ( $\mathcal{O}$ ) contém o seu conseqüente ( $\mathcal{Q}$ ), ou quando um antecedente está contido menos vezes no seu conseqüente, do que o outro antecedente está contido no seu conseqüente. [Tacquet 1665, 132-133]

Tal como referido anteriormente, entre a sexta e a sétimas definições, Tacquet incluiu três explicações/comentários às Definições 5 e 6. No primeiro parágrafo, Tacquet expõe a sua opinião relativamente à igualdade e desigualdade entre razões<sup>33</sup>. A igualdade ou semelhança de razões pode ser explicada, segundo Tacquet, a partir da Definição 5, se as grandezas

<sup>30</sup> *Pars aliquota magnitudinis est, quae aliquoties repetita magnitudinem metitur, fuit adaequat. Pars aliquanta, quae non metitur.* [Tacquet 1665, 131]

<sup>31</sup> Estas definições foram traduzidas a partir da segunda edição de *Elementa Geometriae*.

<sup>32</sup> Em notação moderna, se  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$  forem quatro grandezas tais que:  $\mathcal{A} = n\mathcal{B} + r_1$ ,  $\mathcal{C} = n\mathcal{F} + r_2$  e  $\frac{r_1}{\mathcal{B}} = \frac{r_2}{\mathcal{F}}$ , ou  $\mathcal{B} = m\mathcal{A} + r_3$ ,

$\mathcal{F} = m\mathcal{C} + r_4$  e  $\frac{r_3}{\mathcal{A}} = \frac{r_4}{\mathcal{C}}$ , (com  $n$ ,  $m$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$  números inteiros), então, a razão de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  é igual à razão de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{F}$ .

<sup>33</sup> *Proportionum aequalitas et inaequalitas explicatur* [Tacquet 1665, 133]

consideradas forem racionais. No caso de serem irracionais, não têm uma medida comum, pelo que não é possível explicar o significado de “estar contido” ou “conter” através de números naturais (inteiros). Então, Tacquet refere que, quando as razões são irracionais, é possível encontrar infinitas razões irracionais iguais, maiores ou menores, formadas por termos diversos<sup>34</sup>, e sugere uma forma de o fazer, que se descreve a seguir.<sup>35</sup>

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas grandezas, incomensuráveis entre si, e a grandeza  $\mathcal{C}$ . [Figura 2.1]



Figura 2.1

$\mathcal{A} : \mathcal{B}$  representa a razão entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , que será por construção, irracional.

**1.** Considere-se que  $\mathcal{A}$  é maior do que  $\mathcal{B}$  (igual não poderia ser uma vez que são incomensuráveis) e por isso é possível subtrair  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  um determinado número de vezes.

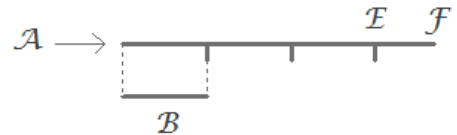


Figura 2.2

Subtraia-se  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  o maior número de vezes possível, suponha-se, por hipótese, que é três vezes.

Seja  $\mathcal{EF}$  a parte de  $\mathcal{A}$  que subsiste depois de se ter subtraído  $\mathcal{B}$ . [Figura 2.2]

Então, pode concluir-se que  $\mathcal{EF}$  é menor do que  $\mathcal{B}$  (porque se não fosse, ainda seria possível subtrair  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , pelo menos mais uma vez e então  $\mathcal{B}$  “caberia” em  $\mathcal{A}$  mais do que três vezes, contrariando a hipótese).

Por construção,  $\mathcal{A}$  pode exprimir-se através de  $3\mathcal{B} + \mathcal{EF}$ , e ter-se-á para a razão de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = (3\mathcal{B} + \mathcal{EF}) : \mathcal{B} = 3\mathcal{B} : \mathcal{B} + \mathcal{EF} : \mathcal{B} = 3 + \mathcal{EF} : \mathcal{B}$$

Como  $\mathcal{EF} < \mathcal{B}$ , tem-se que  $\mathcal{EF} : \mathcal{B} < 1$ , e então,  $3 < 3 + \mathcal{EF} : \mathcal{B} < 4$ , ou seja,  $3 < \mathcal{A} : \mathcal{B} < 4$  [1].

<sup>34</sup> *Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles sint infinitae aliae proportiones irrationales aequales, maiores, minores, diversis terminis cōstantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum.* [Tacquet 1665, 134].

<sup>35</sup> No original de Tacquet não são apresentadas todas as justificações que estão indicadas neste texto, e não foi utilizada esta simbologia. Tacquet descreve o procedimento por palavras sem recorrer a símbolos. A metodologia indicada neste texto é uma adaptação de Palladino, em *Sulla Teoria delle proporzioni nel seicento*, páginas 69 e 70.

**2.** Seja  $O$  a terça parte de  $C$  e  $X$  uma grandeza incomensurável com  $C$  e maior que  $O$ . [Figura 2.3]

Por construção, tem-se que a razão  $C : X$  é irracional.

Dado que  $O$  é a terça parte de  $C$ ,  $C : O = 3$ .

Atendendo a que  $C : O = 3$  e  $X > O$ , tem-se que

$$C : X < 3 \text{ [2].}$$

De [1] e [2] pode concluir-se que  $C : X < A : B$  [3].

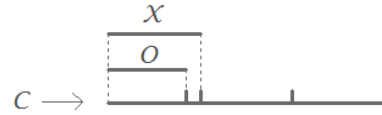


Figura 2.3

**3.** Considerem-se  $Q$  e  $Z$  duas grandezas [Figura 2.4]

tais que:

- $Q$  é a quarta parte de  $C$ ;
- $Z$  é incomensurável com  $C$ ;
- $Z < Q$

De forma análoga à utilizada em **2.**, tem-se que:

- a razão  $C : Z$  é irracional;
- $C : Q = 4$  (porque  $Q$  é a quarta parte de  $C$ ).

Como  $C : Q = 4$  e  $Z < Q$ , então,  $C : Z > 4$  [4].

De [1] e [4], pode concluir-se que  $A : B < C : Z$  [5].

A partir de [3] e [5], pode estabelecer-se a relação  $C : X < A : B < C : Z$ .

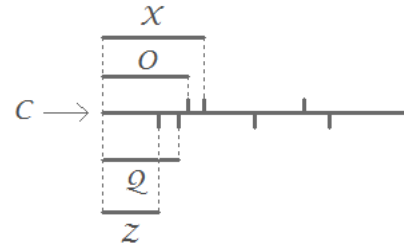


Figura 2.4

Chegado a esta fase, Tacquet afirma que é evidente que existirá um certo  $D$ , compreendido entre  $X$  e  $Z$ , tal que a razão entre  $C$  e  $D$  é a mesma que entre  $A$  e  $B$ .

De acordo com Palladino, esta afirmação de Tacquet tem implícito um axioma de continuidade. [Palladino 1991, 70]

O comentário que Tacquet apresenta no parágrafo seguinte diz respeito à definição de igualdade de razões: “O que deixa a desejar a definição de igualdade de razões em Euclides”<sup>36</sup>. Nesta parte, depois de expor a Definição 5 do Livro V, Tacquet refere que Euclides teria entendido que a propriedade dos equimúltiplos seria suficiente para provar a proporcionalidade

<sup>36</sup> *Quid in proportionum equalium definitione Euclidea desideretur.* [Tacquet 1665, 135]

entre grandezas. De acordo com Tacquet, Euclides entendia que, a partir do atributo da multiplicidade se podia provar a igualdade de razões e, a partir da igualdade de duas razões seria possível provar a existência de equimúltiplos nas condições da Definição 5. Tacquet refere que a ligação entre a propriedade dos equimúltiplos e a igualdade de razões é obscura e difícil de demonstrar. Como consequência da ausência de tal demonstração por parte do grego, em todos os resultados dos Livros V e VI em que seja provado que quatro grandezas são proporcionais a partir da propriedade descrita nos *Elementos*, ficará a dúvida de que as grandezas em causa sejam efetivamente proporcionais.

No último parágrafo, Tacquet apresenta uma outra propriedade/indício principal e infalível para a igualdade de razões<sup>37</sup>, referindo que estes indícios serão demonstrados através dos Teoremas 5 e 6 da Segunda Parte deste Livro V, e que se apresentam a seguir.

**Teorema 5**<sup>38</sup>: Se os consequentes ( $CF$  e  $NQ$ ), ou quaisquer [partes] alíquotas semelhantes dos mesmos consequentes estiverem contidos em igual número nos seus antecedentes ( $AB$ ,  $GM$ ), então, as razões  $AB$  para  $CF$  e  $GM$  para  $NQ$  serão iguais.

**Teorema 6**<sup>39</sup>: Se os consequentes ( $CF$  e  $NQ$ ), ou quaisquer [partes] alíquotas semelhantes dos mesmos consequentes estiverem contidos um número desigual de vezes nos seus antecedentes ( $AB$ ,  $GM$ ), então, as razões  $AB$  para  $CF$  e  $GM$  para  $NQ$  serão desiguais. A razão maior será aquela cujo antecedente contiver um maior número de vezes o seu consequente ou partes alíquotas desse consequente.

Tacquet refere que duas razões são iguais se os consequentes ou partes alíquotas semelhantes dos consequentes estiverem contidos em igual número nos seus antecedentes. Se tal não acontecer, isto é, se os consequentes ou alguma parte alíquota semelhante destes não estiver contida o mesmo número de vezes nos respetivos antecedentes, as razões serão

<sup>37</sup> *Proportionum aequalium aliud indicium primum et infallibile assignatur.* [Tacquet 1665, 136]

<sup>38</sup> *Si consequentes ( $CF$ ,  $NQ$ ) et consequentium quaelibet aliquotae similes (puta et decimae et centesimae et millesimae, et ita deinceps fine termino) in antecedentibus ( $AB$ ,  $GM$ ) aequali semper cõtineantur, rationes  $AB$  ad  $CF$ ; et  $GM$  ad  $NQ$ ) aequales erũt.* [Tacquet 1665, 161]

<sup>39</sup> *Si aut consequentes ( $CF$ ,  $NQ$ ) aut consequentiũ aliquae similes aliquotae(ex: gr. decimae)inaequali numero in antecedentibus ( $AB$ ,  $GM$ ) contineantur, rationes ( $AD$  ad  $CF$ ; et  $GM$  ad  $NQ$ ) inaequales erunt, et erit illa maior, cuiũs consequentes aliquotae sepius continetur.* [Tacquet 1665, 163]

desiguais. E, nesta situação, a razão maior será aquela cujo conseqüente (ou partes alíquotas do mesmo) está contido um maior número de vezes no seu antecedente.

Tacquet exemplifica esta propriedade com as razões  $AB$  para  $CF$  e  $GM$  para  $NQ$ , dizendo que se uma décima parte, por exemplo, de  $CF$  estiver contida em  $AB$  duzentas vezes, então uma décima parte de  $NQ$  estará contida duzentas vezes em  $GM$ ; se uma centésima parte de  $CF$  estiver contida mil vezes em  $AB$ , também uma centésima parte de  $NQ$  estará contida mil vezes em  $GM$ . Procedendo desta forma, para um número cada vez maior ter-se-á que  $AB$  estará para  $CF$  assim como  $GM$  para  $NQ$ . Se, por exemplo,  $1/100\ 000$  de  $CF$  estiver contido em  $AB$  mais vezes que  $1/100\ 000$  de  $NQ$  em  $GM$ , a razão  $AB$  para  $CF$  será maior do que a razão  $GM$  para  $NQ$ , ainda que possam existir um grande número de outras partes alíquotas semelhantes dos conseqüentes  $CF$  e  $NQ$  que estejam contidas, em igual número, nos antecedentes  $AB$  e  $GM$ .

Para explicar esta propriedade/indício proposta por Tacquet, segue-se uma adaptação da ilustração feita por Palladino, no caso da desigualdade de razões.

Considerem-se as razões  $AB$  para  $CF$  e  $GM$  para  $NQ$ . [Figura 2.5]

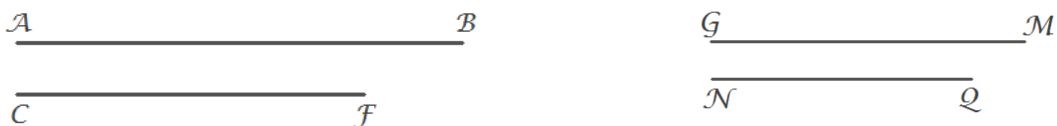


Figura 2.5

Suponha-se que o maior número de vezes que  $\frac{1}{7}$  de  $CF$  está contido em  $AB$  é 9, mas  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$  não está contido 9 vezes em  $GM$ .

Pretende-se mostrar que, nestas condições, as razões de  $AB$  para  $CF$  e  $GM$  para  $NQ$  são desiguais.

Por hipótese,  $\frac{1}{7}$  de  $CF$  está contido 9 vezes em  $AB$ .

Nestas circunstâncias,  $AB$  poderá ser exatamente 9 vezes  $\frac{1}{7}$  de  $CF$  e pode escrever-se, em linguagem moderna,  $AB = \frac{9}{7} CF$ . [Figura 2.6]

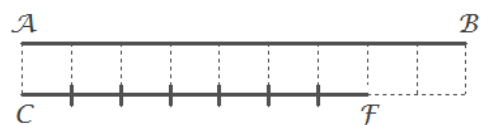


Figura 2.6

Se não for este o caso, ter-se-á  $AB = \frac{9}{7} CF + HB$ ,

sendo que  $HB < \frac{1}{7} CF$ . [Figura 2.7]

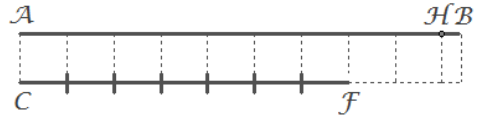


Figura 2.7

No primeiro caso, a razão entre  $AB$  e  $CF$  será  $AB:CF = \left(\frac{9}{7} CF\right):CF = \frac{9}{7}$ .

Na segunda situação,  $AB:CF = \left(\frac{9}{7} CF + HB\right):CF = \frac{9}{7} + HB:CF$ , com  $HB:CF < 1$

(por construção,  $HB < CF$ ), o que permite escrever  $AB:CF > \frac{9}{7}$ .

Assim, pode concluir-se que  $AB:CF \geq \frac{9}{7}$  [1].

Relativamente às grandezas  $GM$  e  $NQ$ , por hipótese,  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$  não está contido 9 vezes em  $GM$ . Assim, poderá estar contido mais vezes ou menos vezes em  $GM$ .

Considere-se que  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$  está contido menos do que 9

vezes em  $GM$ , por exemplo, 8 vezes. [Figura 2.8]

Então,  $GM = \frac{8}{7} NQ + KM$ , com  $KM < \frac{1}{7} NQ$ .



Figura 2.8

Nestas condições, a razão de  $GM$  para  $NQ$  será

$$GM:NQ = \left(\frac{8}{7} NQ + KM\right):NQ = \frac{8}{7} + KM:NQ$$

Relativamente a  $KM:NQ$ , tem-se que  $KM < \frac{1}{7} NQ$ . Logo, é possível estabelecer-se a

desigualdade  $KM:NQ < \frac{1}{7} NQ:NQ$ , ou seja,  $KM:NQ < \frac{1}{7}$ .

É viável agora indicar um valor mais aproximado da razão  $GM:NQ$ .

Se  $KM:NQ < \frac{1}{7}$ ,  $\frac{8}{7} + KM:NQ < \frac{8}{7} + \frac{1}{7}$ , isto é,  $GM:NQ < \frac{8}{7} + \frac{1}{7}$ , ou seja,

$$GM:NQ < \frac{9}{7} \text{ [2].}$$

De [1] e [2] conclui-se que  $AB:CF > GM:NQ$  e fica provada a desigualdade entre as duas razões.

Considere-se agora, por hipótese, que  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$  está mais do que 9 vezes contido em  $GM$ , diga-se por exemplo, que  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$  está 10 vezes contido em

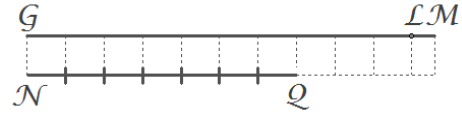


Figura 2.9

$GM$ . [Figura 2.9]

De forma análoga à realizada precedentemente,  $GM = \frac{10}{7}NQ + LM$ , com  $LM < \frac{1}{7}NQ$ .

A razão  $GM:NQ$  será  $GM:NQ = \left(\frac{10}{7}NQ + LM\right):NQ = \frac{10}{7} + LM:NQ$ , e por isso,  $GM:NQ > \frac{10}{7}$  [3].

Para as duas primeiras grandezas consideradas  $AB$  e  $CF$ , estabeleceram-se anteriormente as seguintes relações  $AB:CF = \frac{9}{7}$  ou  $AB:CF = \frac{9}{7} + HB:CF$ .

Atendendo a que  $HB < \frac{1}{7}CF$ ,  $HB:CF < \frac{1}{7}CF:CF$ , ou seja,  $HB:CF < \frac{1}{7}$ .

A partir desta última desigualdade, pode escrever-se  $\frac{9}{7} + HB:CF < \frac{9}{7} + \frac{1}{7}$ , ou seja, estabelecer-se que  $AB:CF < \frac{10}{7}$  [4].

De [3] e [4] conclui-se que  $AB:CF < GM:NQ$ .

Desta forma, fica exemplificada a propriedade proposta por Tacquet para a igualdade/desigualdade de razões. ■

Esta propriedade foi descrita por Palladino da seguinte forma: as razões  $AB:CF$  e  $GM:NQ$  são iguais quando dados dois números inteiros  $m$  e  $n$ , quaisquer, se o maior número de vezes que se subtrai  $\frac{m}{n}CF$  de  $AB$  for igual ao maior número de vezes que é possível subtrair  $\frac{m}{n}NQ$  de  $GM$ . Se esta condição não se verificar sempre, as razões serão desiguais. Neste caso, será maior a razão em que o número de vezes que se subtrai  $\frac{1}{n}$  do conseqüente ao antecedente for maior.

Para as razões consideradas no procedimento exposto anteriormente, esta propriedade expressa-se da forma que se descreve a seguir.

- Nas condições em que  $\frac{1}{7}$  de  $CF$  está contido 9 vezes em  $AB$  e  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$  está contido em  $GM$  mais do que 9 vezes, é possível subtrair  $\frac{1}{7}$  de  $CF$  a  $AB$  9 vezes, e poderão ocorrer duas situações: não restar nenhuma parte de  $AB$  (no caso de  $AB$  ser  $\frac{9}{7}$  de  $CF$ ) ou subsistir de  $AB$  uma parte ( $HB$ ), que será, evidentemente, inferior a  $\frac{1}{7}$  de  $CF$ . No que concerne às duas grandezas  $GM$  e  $NQ$ , apenas é possível subtrair de  $GM$   $\frac{8}{7}$  de  $NQ$ , e restará a parte  $KM$ , que é também inferior a  $\frac{1}{7}$  de  $NQ$ . Assim, de  $AB$  é possível extrair  $\frac{1}{7}$  de  $CF$  9 vezes, enquanto de  $GM$  apenas se pode subtrair  $\frac{8}{7}$  de  $NQ$ , pelo que, nestas condições, a razão  $AB:CF$  será maior do que a razão  $GM:NQ$ .

- De  $AB$  subtrai-se  $\frac{9}{7}$  de  $CF$ . Por construção, de  $GM$  é possível subtrair  $\frac{10}{7} NQ$ , logo, neste caso a razão  $AB:CF$  é menor do que a razão  $GM:NQ$ .

De acordo com Palladino, esta propriedade permite estimar a igualdade e a desigualdade de razões, racionais e irracionais. Para as razões irracionais, a partir de um processo como o anteriormente descrito, os antecedentes serão forçados a esgotar o maior número possível de partes comensuráveis e proporcionais dos consequentes.

Prosseguindo a análise das diferenças entre os Livros V de Euclides e de Tacquet, verifica-se que o último apenas apresenta as primeiras onze definições, com algumas alterações/adaptações, tal como referido anteriormente.

Ainda na Primeira Parte deste Livro, a seguir às definições, Tacquet apresenta um axioma que será o equivalente a determinar a quarta proporcional. Para completar esta *Prima Pars*, Tacquet enuncia e demonstra um conjunto de proposições, a partir das presentes nos *Elementos*, atribuindo a mesma ordem às proposições que Euclides. Enquanto Euclides apresentou vinte e cinco proposições, Tacquet coloca quinze, uma vez que considerou que dez delas só eram utilizadas por Euclides porque este recorria ao Método dos Equimúltiplos para demonstrá-las. Assim, as seis primeiras proposições dos *Elementos* foram consideradas supérfluas no seu método, logo não foram enunciadas, assim como as proposições XIII, XIV, XX

e XXI. As Proposições VII a X não foram demonstradas porque, segundo Tacquet são axiomas e por isso não necessitam de demonstração. As restantes proposições (XI, XII, XV a XIX, XXII a XXV) são as correspondentes às de Euclides. A estas Tacquet acrescentou dez, que não são de Euclides, e sim de Papo, com a numeração seguida da de Euclides.

Na *Tertia Pars*, Tacquet expõe um conjunto de procedimentos para operar com razões racionais e irracionais – divisão, multiplicação, adição e subtração – conferindo desta forma um carácter algébrico às razões, característica que não existia em Euclides. Para além dos referidos “algoritmos”, este padre jesuíta apresentou um conjunto de três axiomas: os dois primeiros indicam como comparar duas razões que têm em comum ou o antecedente, ou o conseqüente; e o terceiro indica como determinar a razão entre duas razões racionais. Esta terceira parte termina com a demonstração de um resultado que, de acordo com Tacquet, apenas tinha sido demonstrado para números:

“Dadas quaisquer quantidades ou números, a razão entre o primeiro termo e o último é a composta de todas as razões intermédias.” <sup>40</sup>

Tacquet apresenta a demonstração deste teorema para grandezas e números. Antes de iniciar a sua demonstração, Tacquet refere que esta já tinha sido feita por Teão, Eutócio e Vitelo. Na sua demonstração teve como base, de acordo com Palladino, a axiomática de Gregório de São Vicente.

De acordo com Lamandé, o trabalho de Tacquet insere-se na tradição jesuíta de Clávio, sendo contudo original no correspondente ao Livro V dos *Elementos*. Neste livro apresenta uma nova abordagem da igualdade de razões baseada no conceito de partes alíquotas e aliquantas, sem recorrer aos equimúltiplos. Esta teoria de Euclides, baseada nos equimúltiplos, foi considerada difícil e obscura e, tendo como base a quinta definição, que, na sua opinião não é uma verdadeira definição e sim um teorema, compromete todas as que dela dependem nos restantes resultados dos *Elementos*.

Apesar da crítica de Tacquet aos *Elementos* de Euclides não ser original, este padre jesuíta conseguiu expor uma visão diferente da igualdade de razões e associá-la à concepção euclidiana. [Lamandé 2013, 600]

---

<sup>40</sup> Tradução do resultado identificado por Tacquet de § XII na terceira parte do Livro V, a partir da 2.ª edição de *Elementa Geometriae: Si fuerint quaecunque et quotcunq; quatitates, seu magnitudines, seu numeri; ratio prime ad ultimam componitur ex rationibus mediarum*. [Tacquet 1665, 175]

Na opinião de Palladino, Borelli e Tacquet foram responsáveis pela elaboração mais requintada para determinar quantitativamente a razão entre grandezas incomensuráveis.  
[Palladino 1991, 81]



### 3. A(s) TEORIA(S) DE PROPORÇÕES EM TEXTOS PORTUGUESES DA PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XVIII

Conhecida a situação europeia, segue-se o estudo das razões e proporções em autores portugueses, na primeira metade do século XVIII.

#### 3.1. MANOEL DE CAMPOS

Este padre jesuíta nasceu em Lisboa, em 1680, e ingressou na Companhia de Jesus<sup>41</sup> onde professou em 1698. Foi professor de Matemáticas em Madrid, na aula da Esfera do Colégio de Santo Antão de Lisboa e académico da Academia Real de História. Foi autor de vários trabalhos, entre os quais *Elementos de Geometria Plana, e Sólida*. Este trabalho é uma tradução adaptada da obra de André Tacquet, *Elementa Geometriae*, não sendo contudo uma mera tradução. De facto, Manoel de Campos não se limita apenas a traduzir esta obra, introduz algumas alterações, quer em termos de estrutura, quer em termos da utilização de determinados conceitos.

Na introdução de *Elementos de Geometria Plana, e Sólida*, Manoel de Campos tece algumas considerações acerca dos *Elementos* de Euclides, nomeadamente sobre a questão de serem ou não da autoria do grego as demonstrações apresentadas ao longo dos livros que compõem este tratado. Refere a composição e estrutura da sua obra e apresenta de forma breve o seu conteúdo. Relativamente ao Livro V de Euclides, o português descreve-o como sendo

---

<sup>41</sup> Instituto religioso, fundado em 1534, em França, por Inácio de Loyola. Os seus membros são designados por jesuítas. Esta Ordem foi aprovada em 1540 pelo Papa Paulo III. Teve expansão rápida, tendo sido criados ao mesmo tempo estabelecimentos pedagógicos da Ordem por toda a Europa e Índia. Foi em Portugal que, em 1546, se fundou a primeira província da Companhia e um dos seus primeiros colégios – Colégio de Santo Antão, em Lisboa. Tinha como objetivos a formação do Clero e a educação e apostolado dos jovens. [Companhia de Jesus]

“engenhosíssimo e utilíssimo; porém he reprovado de alguns pelo methodo; porquanto faz depender todas as Proposições de huma certa propriedade das quantidades comparadas, a que chama *Equi-multiplices*, aqual nem he clara, nem expedita”<sup>42</sup>. Manoel de Campos refere que irá utilizar um método “igualmente científico” mas mais “desembaraçado” o qual designa por *Equi-alíquotas*.

No início do Livro V, o português expõe que a doutrina das proporções é a alma da Geometria. Prossegue referindo que o defeito existente no livro análogo de Euclides, tem origem na Definição 5, porque o método utilizado pelo grego para explicar a semelhança de razões, é baseado nos *Equimúltiplos*, tornando as demonstrações difíceis de compreender. Manoel de Campos entendia que uma definição deve, por um lado, explicar de forma clara e evidente a natureza do ser a definir e, por outro, ser fácil de perceber. Considerou que a Definição 5 de Euclides, para além de não definir a natureza; a essência de uma razão ser semelhante a outra, não explica de forma clara o que isso significa. Por este motivo, não deve ser considerada como “Primeiro Princípio”.

No que diz respeito à estrutura deste livro, Manoel de Campos não usou a mesma que Tacquet. Apesar de ter traduzido as definições que Tacquet apresentou na sua obra, colocou alguns comentários, ao longo da apresentação das mesmas. Assim, depois da Definição 3, acrescentou a explicação de “quantidades homogêneas”. A seguir à Definição 5, e relativamente à denominação dos quatro termos de duas razões semelhantes, Manoel de Campos expôs que alguns autores utilizam as palavras “razão” e “proporção” para designar a relação existente entre duas grandezas, e “proporcionalidade” e “analogia” quando se trata da relação entre duas razões semelhantes. Clávio, Tacquet e Dechales, são mencionados por Manoel de Campos como exemplos de autores que, segundo o mesmo, *confundem* esta terminologia. Do seu comentário subentende-se que Manoel de Campos utiliza a palavra “razão” para identificar a relação que se dá entre duas grandezas, e “proporção” para referir a relação que se dá entre duas razões semelhantes, utilizando desta forma estes conceitos com o significado que se utiliza atualmente.

À sétima definição sucede-se uma nota sobre a definição de partes alíquotas e alíquantas e razões semelhantes. Nesta nota pode encontrar-se alguma correspondência com as três explicações que Tacquet colocou também no seu Livro V, entre as Definições 6 e 7. No que diz respeito à ideia de “estar contido” ou “conter” *do mesmo modo*, Manoel de Campos refere que não haverá dificuldade em explicar este conceito no caso das partes em causa serem alíquotas

---

<sup>42</sup> Comentário de Manoel de Campos sobre a Definição 5 do livro V de Euclides. [Campos 1735, Prolusam]

ou aliquantas. O problema surge quando as partes consideradas são irracionais, já que nestas circunstâncias não existe uma medida comum, logo não é possível explicar o conceito de “estar contido” ou “conter” *do mesmo modo*. Era necessário encontrar uma propriedade que permitisse explicar de forma clara a igualdade de razões para grandezas de qualquer tipo. Ora, segundo Manoel de Campos, a definição baseada nos *Equimúltiplos*, não é evidente nem clara, e necessita mais de ser demonstrada do que alguns resultados que dependem dela. Atendendo a que muitos dos resultados do Livro V são baseados nesta definição, estes tornam-se similarmente difíceis de entender. Para ultrapassar esta obscuridade, o português propõe a utilização do designado *Princípio dos Modernos das Equi-aliquotas*<sup>43</sup> em substituição ao *Princípio dos Equimúltiplos*. Seguindo este princípio, a definição de razões semelhantes indicada é a seguinte:

Dadas as razões de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$ , se se tomarem partes aliquotas semelhantes dos antecedentes,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$ , e estas couberem o mesmo número de vezes nos respetivos consequentes,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ , então, as razões são semelhantes.

Esta propriedade também é válida se, em vez de se considerarem partes dos antecedentes em relação aos consequentes, se tomarem partes aliquotas dos consequentes em relação aos antecedentes.

Este autor acrescenta que, no caso de existir alguma parte aliquota, por exemplo do antecedente, que repetida um determinado número de vezes iguale o consequente, as grandezas serão racionais, caso contrário, serão irracionais.

Após a nota à Definição 7, Manoel de Campos apresentou as Definições 8 a 18, intercaladas por algumas notas sobre a simbologia que utiliza no atinente a razões e proporções.

Apesar desta sua obra ser uma tradução, ainda que livre, da de Tacquet, Manoel de Campos colocou as últimas sete definições de Euclides, ao contrário de Tacquet, que apresentou apenas as onze primeiras.

Após as definições, segue-se o que Manoel de Campos designou de “Theoremas fundamentaes”, onde explica e demonstra o Princípio de Euclides das *Equi-multiplices*, através de dois lemas e quatro teoremas. De seguida, expõe a explicação e demonstração do Princípio

---

<sup>43</sup> [Campos 1735, 123]

dos Modernos das *Equi-aliquotas*, com dois teoremas, numerados de 5 e 6, que correspondem aos Teoremas 5 e 6 que Tacquet apresentou, e que se demonstram a seguir.

**Teorema 5:** Se os consequentes  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ , ou quaisquer [partes] aliquotas semelhantes dos mesmos consequentes (por exemplo, décimas, centésimas, milésimas, etc.) estiverem sempre contidos em igual número nos seus antecedentes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$ , então, as razões  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$  serão iguais. [Campos 1735, 123]

Analisando a demonstração de Manoel de Campos, verifica-se que utilizou o que atualmente se designa por método de redução ao absurdo.

A seguir apresenta-se uma adaptação da demonstração feita por Manoel de Campos.

*Demonstração:*

Considerem-se as razões de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  e de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$ , tais que tomadas quaisquer partes aliquotas semelhantes de  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ , estas estão em igual número contidas em  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$ .

Pretende provar-se que as razões são iguais.

Presuma-se que as razões não são iguais, e neste caso, considere-se que a razão de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  é maior do que a de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$ .

Em linguagem moderna, ter-se-á  $\mathcal{A} : \mathcal{B} > \mathcal{C} : \mathcal{D}$ .

Nestas condições, é possível subtrair de  $\mathcal{A}$  uma parte  $\mathcal{X}$  [Figura 3.1], de forma a obter duas razões iguais:  $\mathcal{A} - \mathcal{X}$  está para  $\mathcal{B}$  assim como  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$ , isto é,  $(\mathcal{A} - \mathcal{X}) : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$

[1].

Divida-se o consequente  $\mathcal{B}$  em partes aliquotas,  $\mathcal{N}$ , de forma que  $\mathcal{N} < \mathcal{X}$ . [Figura 3.2]

Por hipótese, considere-se que  $\mathcal{N}$  é uma décima parte de  $\mathcal{B}$ .

Então,  $\mathcal{B} = 10\mathcal{N}$  e  $\mathcal{N} = \mathcal{B} : 10$ .

Retire-se  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{A}$  o maior número possível de vezes, por exemplo, 15 vezes.

Seja  $\mathcal{Y}$  a parte de  $\mathcal{A}$  que subsiste. Então,  $\mathcal{Y} < \mathcal{N}$ . [Figura 3.3]

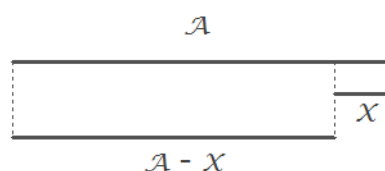


Figura 3.1

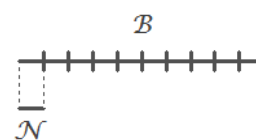


Figura 3.2

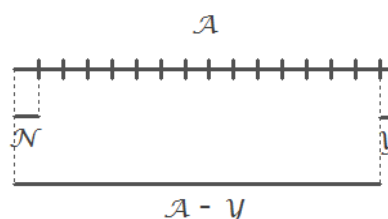


Figura 3.3

$\mathcal{A}$  pode exprimir-se como  $\mathcal{A} = 15\mathcal{N} + \mathcal{Y}$ , donde  $\mathcal{A} - \mathcal{Y} = 15\mathcal{N}$ .

Relativamente à razão de  $\mathcal{A} - \mathcal{Y}$  para  $\mathcal{B}$ , tem-se  $(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) : \mathcal{B} = 15 \mathcal{N} : \mathcal{B}$ .

Como  $\mathcal{N} = \mathcal{B} : 10$ , pode escrever-se  $(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) : \mathcal{B} = 15 (\mathcal{B} : 10) : \mathcal{B} = 15 : 10$ .

Então  $(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) : \mathcal{B} = 15 : 10$  [2]

De forma análoga, considere-se o conseqüente  $\mathcal{D}$  dividido em dez partes iguais.

Seja  $O$  a décima parte de parte  $\mathcal{D}$ . Então,  $\mathcal{D} = 10O$  e  $O = \mathcal{D} : 10$ .

De seguida, subtraia-se  $O$  de  $C$  o maior número possível de vezes. Nestas condições poderá suceder que sobre uma parte de  $C$ , ou não, e neste caso a parte que resta de  $C$  será necessariamente menor que  $O$ , seja  $Z$  essa parte.

Por hipótese, o número de vezes que  $O$  está contido em  $C$  é igual ao número de vezes que  $\mathcal{A}$  contém  $\mathcal{N}$ . Logo,  $(C - Z) : \mathcal{D} = 15 : 10$  [3].

De [2] e [3], pode concluir-se que  $(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) : \mathcal{B} = (C - Z) : \mathcal{D}$  [4].

Por hipótese,  $\mathcal{Y} < \mathcal{N}$  e  $\mathcal{N} < \mathcal{X}$ , logo,  $\mathcal{Y} < \mathcal{N} < \mathcal{X}$ , e, em particular,  $\mathcal{Y} < \mathcal{X}$ .

Assim,  $\mathcal{A} - \mathcal{Y} > \mathcal{A} - \mathcal{X}$ , donde  $(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) : \mathcal{B} > (\mathcal{A} - \mathcal{X}) : \mathcal{B}$ .

Se  $(\mathcal{A} - \mathcal{X}) : \mathcal{B} = C : \mathcal{D}$ , então  $(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) : \mathcal{B} > C : \mathcal{D}$  [5].

De [4] e [5] tem-se  $(C - Z) : \mathcal{D} > C : \mathcal{D}$ .

Esta última desigualdade é impossível, uma vez que  $C - Z < C$ .

Desta forma chega-se a uma contradição, o que permite provar que as razões consideradas são iguais.■

**Teorema 6:** Se os conseqüentes  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ , ou quaisquer [partes] alíquotas semelhantes dos mesmos conseqüentes (por exemplo,  $\mathcal{N}$  e  $O$ ) estiverem contidos um número desigual de vezes nos seus antecedentes ( $\mathcal{A}$  e  $C$ ), então, as razões serão desiguais. A razão maior será aquela cujo antecedente contiver um maior número de vezes o seu conseqüente ou partes alíquotas desse conseqüente. [Campos 1735, 124]

*Demonstração:*

Sejam dadas as razões de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  e de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$  nas condições do teorema. [Figura 3.4]



Figura 3.4

Considere-se que  $\mathcal{N}$  é décima parte de  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{O}$  é a décima parte de  $\mathcal{D}$ , pelo que  $\mathcal{N} = \mathcal{B} : 10$  e  $\mathcal{O} = \mathcal{D} : 10$ . [Figura 3.5]

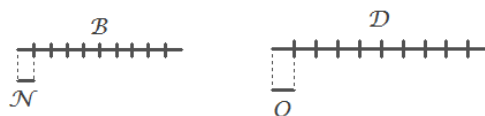


Figura 3.5

Por hipótese, partes alíquotas semelhantes dos consequentes estão contidas um número diferente de vezes nos respectivos antecedentes.

Presuma-se que  $\mathcal{N}$  está contida em  $\mathcal{A}$  vinte vezes e  $\mathcal{O}$  está contida dezoito vezes em  $\mathcal{C}$ .

Considere-se que  $\mathcal{X}$  é a parte de  $\mathcal{A}$  que resta depois de se ter subtraído vinte vezes  $\mathcal{N}$ , e  $\mathcal{Y}$  será a parte de  $\mathcal{C}$  que subsiste após lhe ter sido retirado dezoito vezes  $\mathcal{O}$ . Nas condições indicadas,  $\mathcal{X} < \mathcal{N}$  e  $\mathcal{Y} < \mathcal{O}$ . [Figura 3.6]

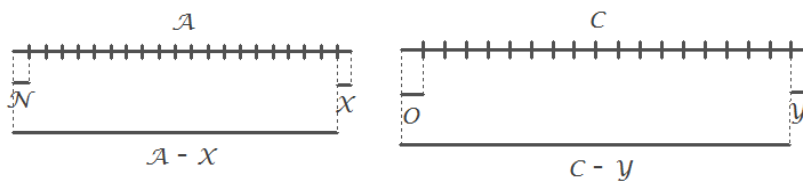


Figura 3.6

Podem estabelecer-se as seguintes relações:  $\mathcal{A} = 20\mathcal{N} + \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{C} = 18\mathcal{O} + \mathcal{Y}$

Acrescente-se a  $\mathcal{C}$  uma parte,  $\mathcal{Z}$ , para que  $\mathcal{O}$  esteja contido em  $\mathcal{C} + \mathcal{Z}$  vinte vezes.

Por construção,  $\mathcal{A} - \mathcal{X}$  contém vinte vezes  $\mathcal{N}$  (que é a décima parte de  $\mathcal{B}$ ) e  $\mathcal{C} + \mathcal{Z}$  contém vinte vezes  $\mathcal{O}$  (que é a décima parte de  $\mathcal{D}$ ).

Então, pelo Teorema 5,  $(\mathcal{A} - \mathcal{X}) : \mathcal{B} = (\mathcal{C} + \mathcal{Z}) : \mathcal{D}$ .

Se ao antecedente  $\mathcal{A} - \mathcal{X}$  se acrescentar uma parte  $\mathcal{P}$  qualquer, a igualdade anterior deixa de se verificar e tem-se  $(\mathcal{A} - \mathcal{X} + \mathcal{P}) : \mathcal{B} > (\mathcal{C} + \mathcal{Z}) : \mathcal{D}$ .

Se  $\mathcal{P} = \mathcal{X}$ , então,  $(\mathcal{A} - \mathcal{X} + \mathcal{X}) : \mathcal{B} > (\mathcal{C} + \mathcal{Z}) : \mathcal{D}$ , isto é,  $\mathcal{A} : \mathcal{B} > (\mathcal{C} + \mathcal{Z}) : \mathcal{D}$ .

Utilizando um raciocínio semelhante, se ao antecedente  $C + Z$  se retirar uma parte, a desigualdade anterior continuará a verificar-se.

Subtraindo-se de  $C + Z$  a parte  $Z$ , fica,  $A : B > (C + Z - Z) : D$ , ou seja,  $A : B > C : D$ , ficando desta forma demonstrado o Teorema 6. ■

Para terminar esta “secção” do seu livro, Manoel de Campos refere, em conclusão, que as proposições que vai expor serão demonstradas com recurso ao segundo princípio que apresentou, por este ser mais claro que o primeiro. Este princípio será utilizado em tudo o que disser respeito a proporções. Esta “secção” é a equivalente à *Pars Secunda* de Tacquet.

O axioma presente na *Prima Pars* de Tacquet, que diz respeito à quarta proporcional, surge neste momento no livro de Manoel de Campos, antes de este expor as trinta e cinco proposições, da mesma forma como Tacquet fez na sua obra. O conteúdo da terceira parte do Livro V, que Tacquet denominou *Tertia Pars*, foi organizado por Manoel de Campos no seu “Appendiz I”. No que concerne a este conjunto de considerações sobre o algoritmo e composição das *proporções*, os exemplos apresentados por Manoel de Campos são diferentes dos de Tacquet.

Relativamente ao Livro VI, a estrutura apresentada pelos dois autores referidos anteriormente é basicamente a mesma: começam por expor as definições e depois as proposições, teoremas e corolários. A partir da análise das definições e por comparação entre estes autores e Euclides, verifica-se que Tacquet manteve as duas primeiras definições (figuras semelhantes e figuras recíprocas), mas alterou as restantes. Assim, a Definição 3 de Tacquet diz respeito à altura de uma figura (corresponde à quarta definição de Euclides) e acrescentou uma definição – a de arcos semelhantes – que não estava presente nos *Elementos*. Por seu lado, o português apresenta as cinco primeiras definições da mesma forma que Euclides: figuras retilíneas semelhantes; figuras recíprocas; dividir uma reta em média e extrema razão; altura de uma figura e razão composta de outras razões. A “sua” sexta definição é a análoga à de Tacquet sobre arcos semelhantes. No atinente às proposições, teoremas e corolários, não se observam diferenças significativas entre Tacquet e Manoel de Campos.

Tal como sucedeu no Livro V, também neste livro algumas proposições foram consideradas supérfluas, mas em menor número que no livro anterior. Das trinta e três proposições dos *Elementos* de Euclides, apenas cinco foram consideradas supérfluas: VII, XXVII a XXIX e XXXII.

Nas obras mais recentes, foram acrescentados alguns corolários e algumas proposições foram designadas de teoremas (em Manoel de Campos). Depois de apresentada a Proposição X, que descreve como dividir uma reta em partes iguais, é explicado em Escólio como proceder para dividir uma reta em quaisquer partes iguais, de duas formas distintas.

A seguir à Proposição XI surgem dois lemas, um problema e um teorema. Estes resultados estão relacionados com progressões geométricas, entre os quais a forma de determinar a soma dos seus termos.

A preceder a Proposição XIV, à qual Manoel de Campos atribui a designação de Teorema, são apresentadas três formas para determinar duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados: Método de Platão, Método de Filão de Bizâncio e Método de Descartes.

### DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO XVI DO LIVRO V

Na Secção 1.1. foi apresentada a demonstração dada por Euclides no seu Livro V, da Proposição XVI. Esta foi feita de acordo com a Definição 5 do Livro V, tendo como base os equimúltiplos. A seguir apresenta-se a proposição e a respetiva demonstração feita por Tacquet e Manoel de Campos, de acordo com o método alternativo, *Princípio das Equi-alíquotas*.

**Proposição XVI**<sup>44</sup>: Se quatro grandezas estão em proporção, estarão em proporção alternativamente.

*Demonstração:*

Suponhamos que  $B$  e  $D$  são menores que  $A$  e  $C$  (porque sendo iguais não é necessário demonstrar).

Na Figura 3.7 encontra-se representada uma adaptação da ilustração das grandezas utilizada por Manoel de Campos na demonstração da Proposição XVI.



Figura 3.7

Como  $A$  é maior que  $B$ , e  $C$  é maior que  $D$ , então,  $B$  e  $D$  serão partes semelhantes de  $A$  e de  $C$  (pela Definição 1<sup>45</sup>) logo ter-se-á  $A : C = B : D$ . ■

<sup>44</sup> Esta é a proposição, escrita utilizando a linguagem atual, correspondente a: *Se a primeira A for para a segunda B, como a terceira C para a quarta D, será permutando, ou alternando (Def. 12) a primeira A para a terceira C, como a segunda B para a quarta D.* [Campos 1735, 130].

Efetuada uma comparação entre a demonstração apresentada por Euclides e a de Manoel de Campos, verifica-se que esta é mais simples.

Partindo da hipótese de  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ , assume-se que os consequentes são menores que os antecedentes, uma vez que se fossem iguais,  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$  ficaria  $\mathcal{A} : \mathcal{A} = \mathcal{C} : \mathcal{C}$ , donde facilmente se deduz que  $\mathcal{A} : \mathcal{C} = \mathcal{A} : \mathcal{C}$ , não sendo por isso necessário demonstrar.

Se  $\mathcal{B}$  é menor que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{D}$  é menor que  $\mathcal{C}$ , pela Definição 1,  $\mathcal{B}$  é partes de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{D}$  é partes de  $\mathcal{C}$ .

Atendendo a que  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ , então,  $\mathcal{A} : \mathcal{C} = \mathcal{B} : \mathcal{D}$ .

Tacquet e Manoel de Campos não incluíram os Livros VII a X de Euclides nas suas obras, tendo no entanto, o cuidado de estabelecer a correspondência entre a numeração dos livros seguintes com a utilizada por Euclides. Assim, o Livro VII de Tacquet e de Manoel de Campos corresponde ao Livro XI de Euclides. Manoel de Campos colocou os Livros VII a X de Euclides na sua obra *Arithmetica*.

Pelo exposto, depreende-se que a obra de Manoel de Campos é adaptada da análoga de Tacquet. Apesar das diferenças entre os dois trabalhos, verifica-se que as ideias fundamentais de Tacquet são seguidas por Manoel de Campos, pelo que as conclusões acerca da(s) teoria(s) de proporções são as mesmas.

Manoel de Campos classifica o *Principio* de Euclides como o dos *Equimúltiplos*, que tem por base a definição de razões semelhantes associada ao conceito de equimúltiplos, e explica, no seu trabalho a alternativa a este, baseada no conceito de partes alíquotas, designando-o por *Principio dos Modernos das Equi-alíquotas*.

No Anexo I encontram-se tabelas comparativas dos Livros V e VI das obras de Tacquet e Manoel de Campos.

---

<sup>45</sup> **V, Definição 1.<sup>a</sup>:** Partes se diz de uma quantidade pequena comparada com outra maior. Existem dois tipos: alíquota e alíquanta. Alíquota é a que repetida algumas vezes mede exatamente a quantidade maior. Alíquanta é a que repetida não a mede, porque ou excede, ou não chega. [Campos 1735, 110].

## 3.2. MANOEL DE AZEVEDO FORTES

Nasceu em Lisboa, em 1660, e foi educado no Colégio Imperial de Madrid desde os dez anos. Estudou na Universidade de Alcalá de Henares, no Colégio de Plessis, em França, e foi opositor a uma cadeira de Filosofia. A sua formação técnica, em outros países europeus, permitiu-lhe regressar a Portugal bastante acreditado, o que lhe valeu uma cadeira de Matemática na Academia Militar da Fortificação portuguesa em 1695. Em 1705 foi cavaleiro de Cristo e tenente de mestre de campo general. Em 23 de outubro de 1719 foi nomeado engenheiro-mor do Reino. Reconstruiu Campo Maior em 1734, quando esta foi destruída por um raio. Em 1735 edificou os paióis da pólvora de Estremoz, Olivença, Elvas e Campo Maior e desenhou a nova praça da Vila da Zibreira. Entre outros, publicou em 1724, o manuscrito *Geometria Especulativa. Trigonometria Esférica (modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares)*; *O Engenheiro Português*, em 1728; e *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, em 1744, sendo este considerado o primeiro tratado<sup>46</sup> sobre lógica escrito em português na íntegra. Faleceu em 1749. [Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, vol. 12, p. 934]

Segue-se uma análise sobre dois dos seus trabalhos.

### 3.2.1. Geometria Especulativa

No manuscrito *Geometria Especulativa*, Azevedo Fortes apresenta três tratados. No primeiro, que designa por “Tratado Seg[undo] dos *Elementos* de Euclides”, coloca alguns dos livros dos *Elementos*, e para cada um deles apresenta em índice o número de definições, enuncia as proposições (teoremas) e identifica o número das figuras que as ilustram, quando é o caso. De seguida, apresenta o Tratado 3.º: “Da Trigonometria e Geometria Prática”. Por fim expõe o “Tratado do modo com que se devem riscar e iluminar com aguadas as plantas da Arquitetura Militar”, sendo que este, ao contrário dos outros dois, não foi numerado. [Fortes 1724]

---

<sup>46</sup> “Tratado é um estudo ou uma obra didática sobre um tema científico, artístico ou outro, apresentado de forma sistemática.” [Tratado]

O facto de o primeiro tratado que surge no manuscrito ser designado por *Seg[undo]*, leva a colocar a hipótese da existência de, pelo menos, outro tratado, que seria o primeiro. Contudo, do manuscrito em estudo, constam apenas os três tratados mencionados anteriormente.

Relativamente a este manuscrito não se poderá dizer com certeza se terá sido escrito por Azevedo Fortes. Este trabalho poderá ter surgido como preparação de aulas, servindo de “manual” e desta forma ter sido escrito efetivamente pelo português; pode ser a transcrição de um original de Azevedo Fortes, já que na época era comum a transcrição de textos por outras pessoas; ou mesmo ditado por ele. Poderá tratar-se da organização, feita por algum aluno, dos apontamentos tirados nas aulas para estudar, visto que no documento não se vislumbram rasuras que indiquem ter sido escrito diretamente numa aula.

Efetuar uma leitura do manuscrito de Azevedo Fortes, sem estabelecer qualquer comparação com outra obra, conduz à ideia geral, de que foi escrita pelo português, dado que se adequa à sua área de engenheiro. Atendendo à sua condição de militar, a preocupação de Azevedo Fortes seria mais voltada para a aplicação dos resultados dos *Elementos* neste âmbito, tal como expõe no início do que designa de “Do Tratado Seg[undo] dos *Elementos* de Euclides”, referindo que apenas irão ser apresentados os Livros I a VI e XI e XII. Segundo este autor, estes são suficientes para se entender a Geometria Especulativa e a Prática, e também tudo o que diz respeito à doutrina e ordem militar. Menciona a necessidade da sua apresentação ser clara e fácil. Atendendo a que quer revestir a sua obra de um caráter prático, Azevedo Fortes propõe-se indicar a aplicabilidade de cada proposição, utilizando exemplos familiares. Refere que irá seguir Euclides na mesma ordem das proposições, expondo apenas aquelas que considerar pertinentes e necessárias na sua área, mencionando que recorrerá a Tacquet e Dechalet<sup>47</sup>.

No entanto, os erros/lapsos que surgem, ao longo do documento, levam o leitor a questionar o motivo para tais “falhas”. Uma primeira hipótese seria que, a pessoa responsável pela escrita do manuscrito, poderia ter-se enganado a transcrever o original que estaria eventualmente correto, ou então, o autor poderia mesmo ter errado.

---

<sup>47</sup> Claude François Millet Dechalet nasceu em França, em 1621 e faleceu em Itália 57 anos depois. Tornou-se jesuíta aos 15 anos. Fez palestras sobre Matemática, ensinou a arte de navegação e engenharia militar e as aplicações da Matemática à ciência e foi nomeado professor de Matemática na universidade de Turim. A sua obra mais conhecida é *Cursus seu mundus mathematicus*, considerada um curso completo de Matemática. Nesta obra abordou Geometria Prática, Mecânica, Estatística, Geografia, Magnetismo, Arquitetura Civil e Militar, Ótica, Astronomia, entre outros. Elaborou uma edição dos *Elementos* de Euclides (Livros I a VI, XI e XII). [Schaaf 2008]

A partir do momento em que se lê a obra de Jacques Ozanam<sup>48</sup>, *Cours de Mathématique*<sup>49</sup>, e se estabelece uma comparação entre esta e o manuscrito, percebe-se que este é uma tradução da obra do francês. A forma como apresenta, antes de demonstrar cada proposição, a “Preparação” e depois dessa demonstração, o “Uso”, apenas surge na obra de Ozanam, e exatamente nas mesmas proposições. As figuras que Azevedo Fortes apresenta são idênticas às que Ozanam colocou na sua obra. Acresce a isto a existência de uma figura no manuscrito – a última do Livro VI – à qual Azevedo Fortes não faz referência, e talvez seja por esse motivo que é a única figura não numerada. Ao longo deste manuscrito, Azevedo Fortes não menciona Ozanam, e a referência a Tacquet e a Dechaes surge no início, tal como Ozanam procedeu na sua obra. Uma hipótese para o nome de Ozanam não surgir no manuscrito, poderá ser porque o francês não se menciona a si mesmo na sua obra. Assim, na tradução, Azevedo Fortes não coloca algo que não existe no “original”.

Do exposto, na descrição que se segue, a expressão “Azevedo Fortes / Ozanam” será utilizada sempre que se constate ter sido realizada tradução a partir da obra de Ozanam. Quando surgirem diferenças entre os dois autores, estas serão mencionadas.

Azevedo Fortes / Ozanam iniciam o Livro V referindo que neste são estudadas as razões e proporções que servirão de base aos próximos livros. Justificam a importância das proporções pela sua aplicabilidade nas mais diversas áreas, nomeadamente, na determinação de distâncias inacessíveis, na Astronomia, na Música, entre outras, concluindo que sem o conhecimento deste assunto nada poderá ser entendível na Matemática.

Efetuando uma comparação entre o Livro V de Euclides e o similar de Azevedo Fortes / Ozanam, no que diz respeito às oito primeiras definições, verificam-se algumas diferenças.

---

<sup>48</sup> Jacques Ozanam nasceu em 1640 e faleceu em 1717. Viveu toda a sua vida em França tendo a sua educação sido no sentido deste seguir Teologia. Contudo, desenvolveu outros interesses, nomeadamente na área das Ciências e da Matemática. Aprendeu Matemática quase sem ajuda de professores e aos quinze anos publicou o seu primeiro tratado matemático. Estudou Teologia durante quatro anos mas abandonou esta área após a morte do pai e dedicou-se à Matemática, a sua verdadeira vocação. Durante muito tempo lecionou aulas gratuitas de Matemática, em Lyon, contudo, teve de passar a cobrar uma taxa quando a propriedade da sua família passou inteiramente para o seu irmão mais velho. Publicou em 1670 tabelas trigonométricas e logarítmicas, consideradas mais precisas do que as existentes na altura. Algumas das suas publicações foram traduzidas para o inglês. Em 1701 foi eleito membro da Academia das Ciências. A morte da esposa provocou-lhe uma profunda tristeza que, associada à perda dos seus alunos, aquando da Guerra da Sucessão Espanhola, o levou à pobreza. Publicou, entre outros, os seguintes trabalhos: *Table des sinus, tangentes et sécantes*, em 1670; *Géométrie pratique*, em 1684; *Traité des lignes du premier genre*, em 1687; *Dictionnaire mathématique*, em 1691; *Cours de mathématique*, em 1693, em cinco volumes e que foram traduzidos para inglês, em 1792; *Nouvelle Trigonométrie*, em 1698; *Nouveaux Éléments d'Algèbre*, em 1702; *La Géographie et Cosmographie e La Perspective*, em 1711. [O'Connor 2002]

<sup>49</sup> “*Cours de Mathématique, qui comprend Toutes les Parties de cette Science les plus utiles & les plus nécessaires à un homme de Guerre, & à tous ceux qui se veulent perfectionner dans les Mathématiques.*” [Ozanam 1693]

Azevedo Fortes / Ozanam utilizam os conceitos de parte alíquota e aliquanta, à semelhança de Tacquet, Dechaies e Manoel de Campos.

Entre a primeira e a segunda definição, é introduzido o conceito de *todo* esclarecendo-se que “o todo é maior do que a sua parte” [Fortes 1724, fl 111]. São explicados os conceitos de parte *alíquota* e *aliquanta*, designando-se estas por “quebrados a respeito dos seus todos”. Nesta exposição esclarece-se que, no caso de as partes serem números, designa-se por numerador “o número do quebrado que surge em cima, representando a parte ou partes; e denominador o número que surge em baixo, representando o todo ou coisa inteira”. [Fortes 1724, fl 111]

O conceito de *todo* não surge nas obras análogas de Tacquet, de Manoel de Campos nem na de Dechaies, surgindo em Ozanam.

Em termos de estrutura do Livro V, verifica-se que, na sua obra, Manoel de Campos não apresentou a definição de equimúltiplos, enquanto definição numerada, e fê-lo para o conceito de razão racional (quarta definição). Por seu lado, Azevedo Fortes / Ozanam introduziram o conceito de equimúltiplo como uma definição numerada, a terceira definição, referindo ser esta a dada por Euclides, mas apresentam também a “sua” definição do conceito, referindo que, de uma forma geral, as equimúltiplos são “grandezas que contêm um número igual de vezes as grandezas de que são equimúltiplos, ou essas grandezas sejam números inteiros, ou quebrados ou inteiros com quebrados como 5 e 10, são equimúltiplos de 2 e de 4, porque 5 contém a 2 [duas] vezes, e mais 1, que é metade de 2, e 10 também contém 4 duas vezes e mais 2, que é metade de 4”. [Fortes 1724, fl 112]

Antes da quarta definição, é apresentado o conceito de grandezas semelhantes e indicada uma forma de encontrar equimúltiplos de duas grandezas.

A quarta definição é a de razão entre duas grandezas, sendo, na sua essência, análoga às Definições 3<sup>50</sup> e 4<sup>51</sup>, do Livro V de Euclides.

Entre a quarta e a quinta definição, Azevedo Fortes / Ozanam explicam os conceitos de grandezas homogêneas e heterogêneas e introduzem a terminologia relativa às razões: termos, antecedente e conseqüente, exemplificando-os com números. De seguida, tecem algumas considerações sobre o facto de que as grandezas que se comparam, e das quais se busca uma

---

<sup>50</sup> **V, Def. 3:** A razão entre duas grandezas, que são do mesmo género, é um respeito recíproco de uma para outra, em quanto uma é maior, ou menor do que a outra, ou igual. [Euclides 1768, 153]

<sup>51</sup> **V, Def. 4:** As grandezas têm entre si razão, quando a grandeza menor tomada certo número de vezes, pode vencer a grandeza maior. [Euclides 1768, 154]

razão, terem de ser homogêneas. Neste ponto Azevedo Fortes / Ozanam referem Euclides, justificando que a quarta definição dos *Elementos* se explica pelo facto de as grandezas terem de ser do mesmo género: “duas grandezas têm uma razão quando multiplicadas se podem exceder uma à outra” [Fortes 1724, fl 112 v], só sendo homogêneas é que se podem comparar desta forma. Note-se que Euclides, quando define razão (V, Def. 3) entre duas grandezas, refere que estas são “do mesmo género”, no entanto, não explica o que significa ser *do mesmo género*. A forma como Tacquet e Manoel de Campos apresentam as Definições 3 e 4, bem como a terminologia relativa às razões, é semelhante. Contudo, o português acrescenta ainda a explicação de quantidades homogêneas entre estas duas definições, aproximando-se neste ponto de Azevedo Fortes / Ozanam.

O engenheiro refere de seguida que, para determinar a razão entre duas grandezas, se deve dividir o conseqüente pelo antecedente, sendo o quociente encontrado a quantidade da razão que indica o respeito do antecedente em relação ao conseqüente. Este não é o procedimento que atualmente se utiliza para determinar a razão entre duas grandezas. Pelo facto de no manuscrito poder ler-se “é necessário dividir o antecedente, digo o conseqüente pelo antecedente” [Fortes 1724, fl 113], poderá conjecturar-se que Azevedo Fortes iria escrever que, para determinar a razão entre duas grandezas “é necessário dividir o antecedente pelo conseqüente”, o que de acordo com os conceitos atuais, seria o procedimento usual. Contudo, terá alterado para ficar da mesma forma que Ozanam apresenta no seu trabalho<sup>52</sup>.

Azevedo Fortes / Ozanam continuam a explanação apresentando os conceitos de razão de igualdade e razão de desigualdade, enfatizando que não se deve confundir razão de igualdade e igualdade de razões. [Fortes 1724, fl 113]

Estas definições apresentam-se de seguida.

**“Razão de igualdade** é aquela em que o antecedente é igual ao conseqüente, como a razão de A a A, de B a B, etc.” [Fortes 1724, fl 113]

**“Razão de desigualdade** é aquela em que o antecedente é maior ou menor que o conseqüente, como de 4 para 2 ou de 2 para 4, e por isso se chama uma delas razão de maior desigualdade, a saber, aquela em que o antecedente é maior que o conseqüente, como 3 para

---

<sup>52</sup> *Il est évidente aussi, que pour trouver la Raison d'une Grandeur à une autre Grandeur, il faut diviser le Conséquent par l'Antécédent, & le Quotient qu'on appelle Quantité de la Raison, fait connaître le rapport de l'Antécédent par rapport au Conséquent, qui est proprement ce qu'on appelle Raison.* [Ozanam 1693, 165]

2. Esta razão expressa o modo como o antecedente contém um certo número de vezes o consequente, e mostra que parte é do antecedente.” [Fortes 1724, fl 113]

As explicações de Azevedo Fortes relativamente aos conceitos apresentados anteriormente são, na sua essência, as mesmas que Ozanam apresenta no seu *Cours de Mathématique*, no entanto, a forma como são expostos é ligeiramente diferente. O francês apresenta os conceitos de forma mais clara, explicando que a razão de desigualdade pode dividir-se em razão de desigualdade maior e menor. Por seu lado, Azevedo Fortes expõe estes dois conceitos imediatamente a seguir à explicação de razão de desigualdade, sem uma prévia explicação.

Ainda antes da quinta definição, surgem os conceitos *de razão de número a número*, ou *racional*, e *razão surda*, ou *irracional*. A razão de número a número é chamada de *racional* e é aquela que se pode expressar através de números, enquanto a razão surda, chamada de *irracional*, é aquela em que “é impossível achar números que nos expresse as vezes que o antecedente contém ou é contido no consequente” [Fortes 1724, fl 113 v, 114].

No seguimento desta explicação, as grandezas que têm entre si razão racional são denominadas de *racionais* e as que não têm tal razão são designadas de *irracionais*.

Os conceitos de razão racional e irracional também estão presentes nas obras de Tacquet, Dechalets e Manoel de Campos. Contudo, as expressões utilizadas por Azevedo Fortes “razão de número a número” e “razão surda” aparecem apenas no trabalho de Ozanam. Este último designa de *comensuráveis* as grandezas que têm uma razão de número a número, isto é as racionais, e *incomensuráveis*, as que têm entre si razão irracional [Ozanam 1693, 267]. Neste ponto Azevedo Fortes difere de Ozanam já que não apresenta estes conceitos.

A referência à comensurabilidade de grandezas surge em Tacquet, Dechalets e Manoel de Campos, não sendo em nenhum momento do Livro V deste manuscrito mencionada por Azevedo Fortes.<sup>53</sup>

Na sequência das grandezas racionais e irracionais, são introduzidos os conceitos de *razão aritmética* e *razão geométrica*, conceitos que não estão presentes em Tacquet, Dechalets e Manoel de Campos. Tal como Ozanam, Azevedo Fortes refere que razão aritmética é a relativa à diferença ou excesso que uma grandeza tem em relação à outra com a qual se compara. O tipo

---

<sup>53</sup> Azevedo Fortes explica a comensurabilidade de grandezas na sua obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, de 1774, no Livro V da Parte III da *Lógica Analítica*. [Fortes 1774]

de razão que utiliza no seu manuscrito, na maior parte das vezes, é a geométrica, já que é a que Euclides trata na sua obra. [Fortes 1724, fl 114]

A quinta definição de Azevedo Fortes é a de razões iguais ou semelhantes, e apresenta-se a seguir.

**Definição 5.<sup>a</sup>:** Razões *iguais* ou *semelhantes*, são aquelas em que os antecedentes contêm, ou são igualmente contidos nos seus consequentes. [Fortes 1724, fl 114]

Esta definição é mais genérica e concisa do que as similares de Tacquet e de Manoel de Campos, tendo contudo a mesma essência. Em contrapartida, a definição é explicada com as razões de 2 para 3 e 4 para 6 da seguinte forma: “assim conheceremos que a razão de 2 para 3, é a mesma, igual, ou semelhante à razão de 4 para 6: porque 2 é contido em 3 uma vez e meia, da mesma sorte que 4 é contido em 6: ou como 2 é  $\frac{2}{3}$  de 3; também 4 é  $\frac{2}{3}$  de 6, e por essa razão diremos que 2 é para 3, como 4 para 6 e para abreviar escreveremos  $2.3 :: 4.6$ ”. [Fortes 1724, fl 114]

A definição apresentada por Ozanam é mais completa do que a de Azevedo Fortes, esclarecendo que as razões iguais ou semelhantes são aquelas em que os antecedentes estão igualmente contidos ou contêm igualmente os seus consequentes, ou seja, o antecedente de uma razão contém o mesmo número de partes alíquotas do seu consequente que o antecedente da outra razão contém uma parte semelhante do seu consequente<sup>54</sup>.

Os exemplos apresentados anteriormente por Azevedo Fortes surgem no trabalho de Ozanam, após a sua quinta definição. Ozanam vai mais além e refere especificamente que a utilização dos quatro pontos serve para abreviar a escrita e exprimir a igualdade de duas razões. Para além dos valores indicados acima, Ozanam generaliza recorrendo às letras *a*, *b* e *d* para indicar que *a* está para *ad* assim como *b* está para *bd*, escrevendo: *a, ad :: b, bd* [Ozanam 1693, 169].<sup>55</sup>

---

<sup>54</sup> *Les raisons Égales, ou Semblables, sont celles où les Antécédents sont également contenus, ou contiennent également leurs Conséquents, ou ce qui est la même chose, où l'Antécédent d'une Raison contient autant de fois quelque partie aliquote que ce soit de son Conséquent, que l'Antécédent de l'autre Raison contient une semblable partie aliquote de son Conséquent.* [Ozanam 1693, 268]

<sup>55</sup> A simbologia utilizada pelos autores supracitados para estabelecer razões é distinta. Assim, verifica-se que Tacquet e Dechaes apenas recorrem a letras maiúsculas para representar grandezas, não utilizando qualquer tipo de símbolos. Por seu lado, Manoel de Campos, para além de recorrer a letras maiúsculas para designar grandezas, utiliza os dois pontos para estabelecer uma razão, e o sinal de igual para identificar razões semelhantes. Ozanam, quando utiliza letras para se referir a grandezas, escreve minúsculas; para identificar uma razão, coloca uma vírgula entre as duas grandezas e, para estabelecer uma igualdade entre razões, recorre a quatro pontos, como já foi referido anteriormente.

Enquanto Tacquet e Manoel de Campos teceram críticas à quinta definição de Euclides, Ozanam e Azevedo Fortes não formularam nenhum comentário a este respeito, “limitando-se” a expor e a explicar a definição que apresentam.

Dechaes, por seu lado, adotou uma postura semelhante à de Tacquet, e que Manoel de Campos viria a seguir também, já que incluiu na sua obra a ideia da dificuldade do Livro V de Euclides residir na ausência, por parte do grego, de uma definição de semelhança de razões que explicasse a sua natureza.<sup>56</sup>

Entre a quinta e a sexta definição, Azevedo Fortes explica o significado de grandezas proporcionais da seguinte forma:

“As grandezas proporcionais são aquelas que têm uma mesma razão, como 2, 3, 4, 6, porque a razão de 2 para 3 é igual à razão de 4 para 6 e assim as quatro grandezas seguintes  $A . AB :: B . BD$  são proporcionais, porque a primeira  $A$  é tantas vezes contida na segunda  $AD$ , como a terceira  $B$ , na quarta  $BD$ , e a grandeza  $D$  pode ser qualquer número dos possíveis, inteiro ou quebrado” [Fortes 1724, fl 114 v]

Esta definição não numerada, e respetiva explicação, de grandezas proporcionais, surge em Ozanam, mas enquanto definição numerada, a Definição VI<sup>57</sup>.

---

Relativamente a Azevedo Fortes, a simbologia que utiliza difere da de Ozanam em dois aspetos: escreve letras maiúsculas e, em vez de vírgula, utiliza o ponto para estabelecer uma razão. Outro aspeto diferente na simbologia que surge em Ozanam e Azevedo Fortes refere-se ao uso, por parte destes, do símbolo utilizado atualmente para representar frações.

Desta forma, dadas quatro grandezas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , para referir que são proporcionais, Tacquet e Dechaes escreveriam:

“ $A$  está para  $B$  assim como  $C$  está para  $D$ ”

Manoel de Campos escreveria da mesma forma mas acrescentaria simbolicamente:

“ $A . B = C . D$ ”

Ozanam e Azevedo Fortes, por seu lado, utilizariam a mesma simbologia, diferindo no emprego de minúsculas e maiúsculas e na vírgula e no ponto, respetivamente:

$a , b :: c , d$  e  $A . B :: C . D$

<sup>56</sup> De acordo com Dechaes, Euclides ter-se-á contentado em fornecer um sinal sobre a forma de se verificar se quatro quantidades têm a mesma razão, e apesar de este indício ser infalível, não é claro que possa servir de axioma. Na opinião de Dechaes, o facto de não existir neste livro quase nenhuma proposição que não seja mais clara do que esta definição e que possa na melhor das hipóteses passar por axioma, terá levado a que alguns se tenham contentado com a mesma já que terá sido vista como uma “simples proposição bem explicada”, sendo suficiente entendê-la. No entanto, Dechaes propõe-se provar facilmente as proposições, ainda que “bem explicadas”, sem recorrer a provas “embaraçadas” provenientes dos equimúltiplos. [Dechaes 1672, 216-217]

<sup>57</sup> *Les grandeurs proportionnelles sont celles qui ont une même raison: telles sont les quatre suivantes 2, 3, 4, 6, parce que la raison de 2 à 3, est égale à celle de 4 à 6: & aussi les quatre suivantes a, ad, b, bd, parce que la première a est autant de fois contenue dans la seconde ad, ce nombre égal de fois étant représenté para la même lettre d, qui peut être prise pour un nombre entier, ou bien pour une fraction.* [Ozanam 1693, 269]

A explanação e a linguagem utilizadas pelo português na definição anterior, são muito semelhantes às de Ozanam e poderá explicar a utilização errada, por parte de Azevedo Fortes, da letra  $B$  na primeira razão, já que a relação  $A . AB :: B . BD$  não representa uma relação de proporcionalidade, a não ser que as grandezas  $B$  e  $D$  sejam a mesma. Este lapso serve para reforçar a hipótese de que Azevedo Fortes terá utilizado a obra de Ozanam como base principal para o seu manuscrito.

Desta forma, supõe-se que Azevedo Fortes em vez de escrever  $A . AB :: B . BD$  deveria querer escrever  $A . AD :: B . BD$ , já que no seguimento refere-se à segunda  $AD$  e não  $AB$ .

A sexta definição do manuscrito corresponde à sétima de Euclides e diz respeito à desigualdade entre duas razões: Euclides teve como base o conceito de equimúltiplos enquanto Azevedo Fortes recorreu ao conceito de partes alíquotas, tal como Ozanam apresenta na sua sétima definição. Verifica-se que os exemplos utilizados por Azevedo Fortes e Ozanam nestes conceitos são os mesmos. [Ozanam 1693, 269] e [Fortes 1724, fl 114 v].

Azevedo Fortes, tal como Dechaes, considera como sétima definição o conceito de *proporção* ou *analogia*, definindo-a como uma semelhança ou igualdade de duas razões [Fortes 1724, fl 114 v] e [Dechaes 1672, 223].

Azevedo Fortes / Ozanam utilizam o termo *analogia* / *analogie* como sinónimo de proporção e consideram, tal como Euclides, a proporção como igualdade de duas razões. Neste ponto Azevedo Fortes, tal como Manoel de Campos, faz um comentário ao facto de os termos razão e proporção serem utilizados erradamente como sinónimos por alguns autores. Enquanto Manoel de Campos menciona exemplos, nomeadamente, o caso de Tacquet [Campos 1735, 111], Azevedo Fortes não o faz e explica que o termo razão deve ser utilizado entre duas grandezas (dois termos), enquanto o termo proporção serve para estabelecer uma relação entre quatro termos.

Azevedo Fortes continua a sua explicação introduzindo os termos *extremos* e *meios*. Nesta parte do manuscrito pode ler-se uma palavra que não se insere no contexto apresentado e que terá sido colocada por confusão com outra. Efetuando uma leitura da obra de Ozanam nesta parte, entende-se qual será a palavra correta. De seguida apresenta-se a explicação presente no manuscrito do português e a tradução da análoga do francês.

“Muitos confundem a proporção com a razão, e são porém coisas bem diferentes, porque à razão bastam dois termos e para a proporção sempre deve de haver quatro termos, dos quais o primeiro, que é o antecedente da primeira razão, e o quarto, que é o conseqüente da segunda, chamam-se extremos; e o segundo e o terceiro chamam-se meios. Os dois antecedentes das duas razões que formam a proporção, como também os dois conseqüentes, chamam-se triângulos homólogos.”

[Fortes 1724, fl 114 v, fl 115].

“Numa proporção existem sempre quatro termos, dos quais o primeiro e o quarto, que são o antecedente da primeira razão, e o conseqüente da segunda, chamam-se Extremos: e o segundo e o terceiro, que são o conseqüente da primeira razão e o antecedente da segunda, chamam-se Meios. Quanto aos dois antecedentes e aos dois conseqüentes, chamam-se termos homólogos.”<sup>58</sup>

A palavra que deveria aparecer no final da explicação de Azevedo Fortes seria *termos* e não *triângulos*. As duas palavras não têm significados semelhantes, tendo apenas a mesma inicial, não havendo justificação aparente para tal troca.

Na sequência da explicação anterior, são esclarecidos os significados de proporção contínua e proporção discreta, referindo-se que a primeira ocorre quando, numa proporção, o conseqüente da primeira razão é o antecedente da segunda razão e, quando tal não sucede, tem-se uma proporção discreta, ou não contínua [Fortes 1724, fl 115]. Estas ideias são também apresentadas por Tacquet e Manoel de Campos, sendo o seu significado semelhante nos quatro autores.

Azevedo Fortes chama a atenção para a existência de dois tipos de proporção, a *aritmética*<sup>59</sup> e a *geométrica*, sendo que a que é considerada neste manuscrito é a geométrica.

---

<sup>58</sup> *Dans une Proportion il y a toujours quatre Termes, dont le premier & le quatrième, qui sont l'Antécédent de la première Raison, & le Conséquent de la seconde, s'appellent Extrêmes: & le second & le troisième, qui sont le Conséquent de la première Raison & l'Antécédent de la deuxième, s'appellent Moyens; Quant aux deux Antécédents, ou aux deux Conséquents, on les nomme Termes homologues.* [Ozanam 1693, 270]

<sup>59</sup> “A proporção aritmética acha-se entre quatro grandezas das quais a primeira excede ou é excedida da segunda do mesmo modo que a terceira excede ou é excedida da quarta, como  $5 : 8 :: 6 : 9$ ” [Fortes 1724, fl 115]

O engenheiro introduz o conceito de *progressão* para se referir às grandezas que estão em proporção contínua, as por si denominadas grandezas *continuamente proporcionais*, podendo a progressão ser aritmética ou geométrica.<sup>60</sup> [Fortes 1724, fl 115]

A oitava definição de Azevedo Fortes corresponde à décima definição de Ozanam e é a que se segue:

**Definição 8.<sup>a</sup>:** Em uma progressão geométrica, que é uma série de grandezas continuamente proporcionais, a razão da primeira para a terceira, é duplicada da razão da primeira para a segunda, ou da razão da segunda para a terceira, porque estas duas razões são iguais e a razão da primeira para a quarta, assim sucessivamente. [Fortes 1724, fl 115 v]

Esta é a última definição numerada que surge no Livro V. A seguir a esta definição é apresentado e explicado um conjunto de conceitos que não estão presentes nos *Elementos*. Estas explanações são semelhantes às colocadas por Ozanam na sua obra, também na parte final do seu Livro V.

Um dos conceitos apresentados é o de *razão composta* de razões. Assim, de acordo com Azevedo Fortes / Ozanam, o antecedente da razão composta obtém-se multiplicando os antecedentes das razões dadas, e o conseqüente obtém-se multiplicando os respectivos conseqüentes. [Fortes 1724, fl 116]

Como exemplo deste procedimento, considerem-se as razões  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$  e  $\frac{7}{8}$ .<sup>61</sup>

---

Estes exemplos não aparecem na obra de Ozanam quando explica o conceito de proporção aritmética. Por outro lado, o francês refere que a proporção usada nos *Elementos* é a geométrica e não a aritmética e será essa a considerada no seu trabalho, sendo apenas referida como proporção, no sentido da sua Definição VIII. [Ozanam 1693, 271]

<sup>60</sup> Azevedo Fortes dá como exemplo de progressões aritméticas as grandezas 1, 3, 5, 7, 9, 11 e como exemplo de progressões geométricas 1, 2, 4, 8, 16, 32. [Fortes 1724, fl 115 v]

A partir das grandezas 1, 3, 5, 7, 9, 11 pode escrever-se a seguinte proporção contínua:

$$1 \cdot 3 :: 3 \cdot 5$$

Verifica-se que a diferença entre o segundo termo e o primeiro é igual à diferença entre o quarto e o terceiro termo. Procedendo de forma análoga com os restantes termos, esta diferença será constante. Desta forma, estas grandezas constituem uma progressão aritmética uma vez que formam uma proporção contínua em que a diferença entre cada termo e o anterior é constante.

As grandezas 1, 2, 4, 8, 16, 32 constituem uma progressão geométrica uma vez que, em notação atual,  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32}$

A razão entre cada termo e o anterior é constante.

<sup>61</sup> Estes exemplos não são os que figuram nas obras de Azevedo Fortes e Ozanam. Nestas, as razões são  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{6}{7}$ .

A razão composta destas três razões é  $\frac{105}{192}$ , visto que  $3 \times 5 \times 7 = 105$  e  $4 \times 6 \times 8 = 192$ .

Daqui se constata que uma mesma razão pode ser o resultado da composta de razões diferentes, uma vez que o valor dessa razão resulta do produto das razões que a compõem.

Considere-se a razão de 36 a 3. Esta razão tem o valor 12 e este pode obter-se a partir do produto de 2 por 6 ou 3 por 4 ou ainda 1 por 12, donde a razão de 36 a 3 pode ser a composta de duas razões cujas “quantidades” sejam 2 e 6 ou 3 e 4 ou 1 e 12.

Tendo por base o conceito de composta de razões, Azevedo Fortes / Ozanam explicam as noções de *razão dupla* e *duplicada*; *tripla* e *triplicada*, enfatizando que estas são diversas não podendo por isso ser confundidas.

Como exemplo de razão dupla tem-se a razão de 12 a 6, uma vez que  $\frac{12}{6} = 2$  (ou utilizando a linguagem de Azevedo Fortes, a “quantidade da razão 12 a 6 é 2”).

A razão de 24 a 8 é tripla visto que  $\frac{24}{8} = 3$ .<sup>62</sup>

Os conceitos de razão duplicada e triplicada são utilizados quando se trata de razões compostas. Assim, uma razão diz-se *duplicada* quando é a composta de duas razões iguais, e *triplicada* quando é a composta de três razões iguais.

Como exemplo de razão duplicada tem-se  $\frac{24}{8} \times \frac{24}{8} = \frac{576}{64}$ .

Tal como referido anteriormente, a razão  $\frac{24}{8}$  é tripla, e a composta desta razão com ela própria é  $\frac{576}{64}$ . Esta última razão tem como “quantidade” o valor 9, que poderia ser obtido a partir do produto de 3 por 3 (“quantidade” da razão dada).

Procedendo de forma análoga, a razão composta das razões  $\frac{8}{2}$ ,  $\frac{8}{2}$  e  $\frac{8}{2}$  é  $\frac{8}{2} \times \frac{8}{2} \times \frac{8}{2} = \frac{512}{8}$ , que é uma razão triplicada, e tem a “quantidade” 64.

A “quantidade” da razão  $\frac{8}{2}$  é 4, enquanto a de  $\frac{512}{8}$  é 64.

---

<sup>62</sup> Se se considerar a razão composta das razões  $\frac{12}{6}$  e  $\frac{24}{8}$ , obtém-se uma razão sêxtupla, já que é obtida de uma razão dupla e de uma tripla ( $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$ ).

Por construção, a “quantidade” de uma razão composta de duas razões iguais (razão duplicada) é, na linguagem atual, um quadrado perfeito de um número racional enquanto a “quantidade” de uma razão triplicada é um cubo perfeito de um número racional.

Na sua explicação, Azevedo Fortes / Ozanam utilizaram a série de grandezas 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Assim, a razão de 32 a 2 pode obter-se a partir das razões 32 a 16 e 16 a 2, uma vez que  $\frac{32}{2} = \frac{32}{16} \times \frac{16}{2}$ , mas também pode obter-se a partir das razões 32 a 16, 16 a 8, 8 a 4 e 4 a 2, já que  $\frac{32}{2} = \frac{32}{16} \times \frac{16}{8} \times \frac{8}{4} \times \frac{4}{2}$ .

A terminar esta parte, explica-se que, sempre que se tem uma série de grandezas,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ , a razão da primeira  $\mathcal{A}$ , para a quarta  $\mathcal{D}$ , é composta das razões de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$ , de  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{C}$  e de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$ , isto é,  $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{D}}$  é a razão composta das razões  $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ ,  $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}$  e  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}$ , uma vez que  $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \times \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}}{\mathcal{B} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{D}}$ . Este resultado é referenciado como sendo necessário para as Proposições 32 e 33 deste Livro V.

Uma vez mais surge um lapso de Azevedo Fortes já que este Livro tem apenas vinte e cinco proposições, não existindo por isso as Proposições 32.<sup>a</sup> e 33.<sup>a</sup>. [Fortes 1724, fl 116 v]

O que Azevedo Fortes deveria ter escrito em vez disso era as proposições 22.<sup>a</sup> e 23.<sup>a</sup>, tal como Ozanam referencia na sua obra. [Ozanam 1693, 274]

Neste ponto Azevedo Fortes acrescenta um exemplo deste procedimento, considerando a série de grandezas 1, 2, 4, 8, 16, situação que não surge em Ozanam.

Da análise do manuscrito, que foi feita até este momento, salienta-se o facto dos resultados apresentados serem direcionados para grandezas numéricas, exemplo disso é a definição de razão composta, o que torna a definição bastante limitada.

Dechaes apresenta no seu Livro V de *Huict Livres des Éléments D' Euclide rendus plus faciles*, as restantes definições presentes no Livro V dos *Elementos*, nomeadamente, os conceitos de permutar ou alternar; inverter; compor; dividir; converter; proporção perturbada,

entre outros, e inclui alguns comentários/explicações às definições correspondentes de Euclides. Estes conceitos podem encontrar-se antes da apresentação das proposições do Livro V, metodologia que havia sido utilizada por Tacquet e foi também posteriormente seguida por Manoel de Campos na sua obra. Azevedo Fortes, à semelhança de Ozanam, adotou uma estratégia diferente. Assim, à medida que expõe determinados resultados, tais como proposições, teoremas, ou outros, Azevedo Fortes insere os conceitos necessários para a respetiva demonstração e/ou compreensão. Alguns destes conceitos correspondem a definições dadas por Euclides no início do seu Livro.

Terminada a parte das definições, Azevedo Fortes / Ozanam iniciam a apresentação das proposições (com a mesma numeração atribuída por Euclides).

Procedendo a uma comparação das metodologias utilizadas por Tacquet, Dechalets, Ozanam, Azevedo Fortes e Manoel de Campos na apresentação das proposições, verifica-se que, pelo menos em algumas demonstrações, todos incluem uma explicação prévia da forma como as irão realizar. Contudo, esta explicação prévia é mais notória em Ozanam e Azevedo Fortes, já que estes incluem uma parte que designam de “Préparation” / “Preparação”, onde descrevem de forma sucinta o que se pretende provar e de que forma irá ser feito, denotando um cuidado acrescido na forma como expõem os conteúdos. No final de cada demonstração Azevedo Fortes / Ozanam, acrescentam a sua utilidade tanto para demonstrar proposições subsequentes como na aplicação a outras áreas, numa parte designada por “Uso” / “Usage”. Estas duas apresentações (“Préparation” e “Usage”) surgem apenas na obra de Ozanam, servindo este facto para atestar ainda mais a conjectura de que terá sido a obra deste francês a principal fonte do português para a realização do manuscrito.

Relativamente às seis primeiras proposições presentes nos *Elementos*, Azevedo Fortes / Ozanam referem que não as incluirão no Livro VI, reservando a sua explicação e demonstração para os locais onde seja necessária a sua apresentação para demonstrar algum resultado. [Fortes 1724, fl 116 v, fl 117]

A preceder a sétima proposição, Manoel de Campos apresenta um axioma da existência da quarta proporcional, tal como Dechalets fez, no entanto, este último designa-o de “Demande” [Dechalets 1672, 229]. Azevedo Fortes, à semelhança de Ozanam, não incluiu este axioma, nem nenhum outro ao longo deste quinto livro, passando diretamente das definições para a apresentação da sétima proposição, designando-a de teorema, tal como fez em todas as restantes.

Das vinte e cinco proposições do Livro V dos *Elementos*, Azevedo Fortes / Ozanam colocaram dezasseis, a saber, da sétima à décima oitava e da vigésima segunda à vigésima quinta. Antes da demonstração de cada resultado apresentado (proposição ou lema), surge a explicação do mesmo. Após a demonstração, são colocados exemplos, quase todos, numéricos.

As Proposições VII a XI são consideradas por Tacquet e Manoel de Campos como axiomas, não sendo por isso por eles demonstradas. Por seu lado, Dechaies, Ozanam e Azevedo Fortes apresentam as demonstrações destas proposições, recorrendo ao conceito de partes alíquotas.

Da proposição nona à décima terceira, não se verificam diferenças significativas entre Dechaies, Ozanam e Azevedo Fortes, e estes diferem de Euclides na forma de demonstrar, já que utilizam o conceito de partes alíquotas enquanto Euclides recorreu aos equimúltiplos.

Depois de apresentarem e demonstrarem a décima quarta proposição<sup>63</sup>, Azevedo Fortes / Ozanam introduzem dois lemas (e respetiva demonstração), que dizem respeito à propriedade de que se quatro grandezas são proporcionais, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, e vice-versa [Fortes 1724, fl 121, fl 121 v]. Estes resultados não estão presentes nas obras de Tacquet, Dechaies e Manoel de Campos.

Verifica-se que Manoel de Campos, tal como Tacquet, não expõe as Proposições XIII e XIV por as considerar supérfluas no seu método.

A décima sexta proposição expõe a propriedade de que se quatro grandezas são proporcionais elas o serão alternativamente. Na sua obra Dechaies acresce um lema a este resultado referindo que, se este se verifica, também se verificará para partes alíquotas das grandezas dadas. Para além deste lema, o francês alude à quarta proposição<sup>64</sup> de Euclides (que optou por não colocar na sua obra, tal como já foi referido) para a expor, de forma adaptada, em Corolário, relativa à razão conversa. [Dechaies 1672, 248]

Por seu lado, Azevedo Fortes / Ozanam acrescentam à décima sexta proposição, em Escolio, uma referência a Euclides acerca da mesma quarta proposição, esclarecendo que é possível demonstrar a proporcionalidade da razão inversa, na qual se compara o antecedente com o conseqüente. Contudo, esta demonstração é considerada desnecessária, atendendo aos lemas apresentados depois da décima quarta proposição. [Fortes 1724, fl 122 v]

---

<sup>63</sup> **V, Proposição 14.ª:** Se de quatro grandezas proporcionais a primeira é maior, igual ou menor que a terceira, a segunda será também maior, igual ou menor que a quarta. [Fortes 1724, fl 120]

<sup>64</sup> **V, Proposição 4.ª:** Se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta; também umas grandezas quaisquer equimúltiplas da primeira e da terceira terão a mesma razão para outras grandezas quaisquer equimúltiplas da segunda e da quarta. [Euclides 1768, 164]

De seguida, é apresentada a demonstração da décima sexta proposição do Livro V feita por Azevedo Fortes. Anteriormente foram dadas a conhecer as demonstrações da mesma, presentes nos *Elementos* e nas obras de Tacquet e Manoel de Campos. A anteceder a demonstração, Azevedo Fortes / Ozanam expõem a definição de razão alterna<sup>65</sup>.

A ordem utilizada pelo engenheiro é diferente da utilizada por Manoel de Campos. Enquanto este último optou por colocar todas as definições numa secção que designou de *Notas*, após as definições de Euclides, por considerar que serão necessárias nas demonstrações que apresenta ao longo do Livro V, no manuscrito as definições dos conceitos são apresentadas à medida que estes surgem. Assim, dado que necessita do conceito de razão alterna para demonstrar a décima sexta proposição, Azevedo Fortes coloca o seu significado ao mesmo tempo que explica o que vai mostrar.

**Proposição 16.<sup>a</sup>:** Se quatro grandezas são proporcionais, elas o serão também alternativamente. [Fortes 1724, fl 122].

*Demonstração:*

Pretende-se provar que se  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são quatro grandezas proporcionais, então  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  também são proporcionais, isto é, se  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ , então,  $\mathcal{A} : \mathcal{C} = \mathcal{B} : \mathcal{D}$ .

Por hipótese,  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ , ou utilizando a terminologia de Azevedo Fortes,  $\mathcal{A} . \mathcal{B} :: \mathcal{C} . \mathcal{D}$ .

Então, pelo Lema 1<sup>o66</sup>, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja,

$$\mathcal{B} \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$$

Se  $\mathcal{B} \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$ , então,  $\mathcal{C} \times \mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$ , o que pelo Lema 2<sup>o67</sup>, permite concluir que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  são proporcionais, como se pretendia demonstrar. ■

Azevedo Fortes / Ozanam indicam uma forma alternativa para demonstrar esta proposição, baseada no conceito de razão composta de razões.

Assim, supondo que se verifica que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são proporcionais, ou seja,  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ , pretende-se mostrar que  $\mathcal{A} : \mathcal{C} = \mathcal{B} : \mathcal{D}$ .

<sup>65</sup> "Chamamos razão alterna quando numa proporção se trocam os dois termos do meio." [Fortes 1724, 122]

<sup>66</sup> **V, Lema 1<sup>a</sup>:** Se quatro grandezas forem proporcionais, o produto dos dois extremos é igual ao produto dos dois meios. [Fortes 1724, fl 121]

<sup>67</sup> **V, Lema 2<sup>a</sup>:** Se o produto dos dois extremos é igual ao produto dos dois meios, as quatro grandezas serão proporcionais. [Fortes 1724, fl 121 v]

A razão composta das razões  $\mathcal{A} : \mathcal{B}$  e  $\mathcal{B} : \mathcal{C}$  é a razão  $\mathcal{A} : \mathcal{C}$ .<sup>68</sup>

De forma análoga, a razão composta das razões  $\mathcal{B} : \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C} : \mathcal{D}$  é a razão  $\mathcal{B} : \mathcal{D}$ .

Pode também dizer-se que a razão  $\mathcal{B} : \mathcal{D}$  é a composta das razões  $\mathcal{C} : \mathcal{D}$  e  $\mathcal{B} : \mathcal{C}$ . **[1]**

Como por hipótese,  $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ , substituindo em **[1]**  $\mathcal{C} : \mathcal{D}$  por  $\mathcal{A} : \mathcal{B}$ , tem-se que a razão  $\mathcal{B} : \mathcal{D}$  é a composta das razões  $\mathcal{A} : \mathcal{B}$  e  $\mathcal{B} : \mathcal{C}$ , que é o mesmo que a razão  $\mathcal{A} : \mathcal{C}$ .

Pela definição de razão composta, fica provado que as quatro grandezas alternadas,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ , são proporcionais. ■

Efetuada uma comparação entre as demonstrações desta proposição apresentadas até aqui, Euclides utilizou o conceito de equimúltiplos, baseado na Definição 5 do Livro V; Manoel de Campos recorreu ao Princípio das *Equi-alíquotas* enquanto Azevedo Fortes / Ozanam utilizaram duas formas para demonstrar, a primeira recorrendo aos lemas que precedem a décima quinta proposição, e a segunda tendo como base a definição de razão composta e a sua comutatividade.

A demonstração desta proposição pode ser vista como mais um exemplo do que se pode designar de “algebrização” que está presente ao longo do trabalho de Ozanam e consequentemente no manuscrito de Azevedo Fortes. A comutatividade da razão composta a que Azevedo Fortes / Ozanam recorreram para demonstrar a décima sexta proposição, decorre da propriedade comutativa dos números [reais], o que torna esta demonstração válida apenas para grandezas numéricas, ficando assim por provar para grandezas em geral.

A décima oitava proposição refere a composição de razões, conceito que Azevedo Fortes / Ozanam ainda não tinham abordado no quinto livro. Assim, antes de se demonstrar o resultado aí descrito, explica-se este conceito. Na explicação surge uma diferença entre os dois autores: Azevedo Fortes exemplifica-o com números, enquanto Ozanam utiliza apenas letras. Da mesma forma, na demonstração, o português coloca números ao contrário de Ozanam. Depois da demonstração os dois referem, em Escolio, que também é possível substituir o consequente pela sua soma com o antecedente e a partir daí estabelecer a comparação desta soma com o antecedente. Azevedo Fortes / Ozanam referem que este processo é o equivalente ao que

---

<sup>68</sup> Pela definição de razão composta, o antecedente da razão composta das razões  $\mathcal{A} : \mathcal{B}$  e  $\mathcal{B} : \mathcal{C}$ , obtém-se multiplicando os antecedentes,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , das razões dadas e o consequente obtém-se multiplicando os respectivos consequentes,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Desta forma, tem-se  $\frac{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$ , que é o mesmo que  $\mathcal{A} : \mathcal{C}$ .

Euclides estabelece na décima nona proposição, e que por a considerarem inútil, não a colocam no seu livro. Este argumento é também utilizado pelos dois autores para justificar a ausência das proposições vinte e vinte e um do Livro V dos *Elementos*, passando a apresentar a vigésima segunda proposição. Nesta fase da sua obra, Manoel de Campos também considerou supérfluas no seu método as proposições vigésima e vigésima primeira.

No que concerne às proposições vigésima segunda<sup>69</sup> e vigésima terceira<sup>70</sup>, Dechalet e Ozanam designam-nas, respetivamente, por *razão com ordem* e *razão sem ordem*, por se referirem a estes conceitos. Por seu lado, Azevedo Fortes não atribui esta designação às proposições e, antes de as demonstrar, explica o conceito de *razão de igualdade ordenada*<sup>71</sup>, exemplificando-a também com números. De igual forma, procede à explicação do conceito de *proporção perturbada ou não ordenada*<sup>72</sup>, imediatamente a seguir à apresentação da demonstração da vigésima terceira proposição.

A vigésima quarta proposição é apresentada de forma análoga por Manoel de Campos, Dechalet e Azevedo Fortes / Ozanam, tendo no entanto este último colocado depois de a demonstrar, em Escolio, outra forma de demonstrar o resultado patente na referida proposição.

A terminar o Livro V Azevedo Fortes refere, à semelhança de Ozanam, que “os comentadores de Euclides acrescentaram a este Livro 5º nove proposições” [Fortes 1724, fl 126, fl 126 v]. Contudo, por não serem da autoria do grego, e poderem ser explicadas pelas proposições precedentes, não serão colocadas neste “seu” livro. Por seu lado, Manoel de Campos apresenta as restantes dez proposições, referindo que não são da autoria de Euclides, e sim de Papo, mas por terem correspondência com as anteriores, serão incluídas no seu livro [Campos 1735, 136].

O Livro VI do manuscrito é iniciado, tal como o Livro V, com algumas considerações sobre a estrutura e conteúdo do mesmo. Assim, Azevedo Fortes / Ozanam mencionam que, no Livro V dos *Elementos*, Euclides explicou a essência das razões e proporções de forma a estes

---

<sup>69</sup> *Si plusieurs quantités sont proportionnelles, comparées à d'autres & qu'on les prenne deux à deux, avec ordre, les extrêmes seront proportionnelles.* [Dechalet 1672, 254]

<sup>70</sup> *Si plusieurs quantités sont proportionnelles, comparées à d'autres & qu'on les prenne deux à deux, sans ordre, les extrêmes seront proportionnelles.* [Dechalet 1672, 255]

<sup>71</sup> “Chamamos em geral razão de igualdade ordenada quando muitas grandezas de uma parte são proporcionais a outras tantas de outra parte, e em particular chamamos proporção ordenada, quando a 1ª grandeza de uma parte é para a 2ª, como a 1ª da outra parte para a 2ª e que da mesma sorte a 2ª da 1ª ordem é para a 3ª, como a 2ª da 2ª ordem é para a 3ª e assim das mais.” [Fortes 1724, fl 124]

<sup>72</sup> Chamamos proporção perturbada ou não ordenada quando muitas grandezas de uma parte são proporcionais a outras tantas grandezas de outra parte, de sorte, que a 1ª grandeza de uma parte seja para a 2ª, como a penúltima da outra parte para última, e que a 2ª da 1ª ordem seja para a 3ª, como a antepenúltima da 2ª ordem para a penúltima, e assim as mais. [Fortes 1724, fl 124 v]

resultados poderem ser aplicados aos restantes livros. Relativamente ao Livro VI, esta teoria é aplicada a figuras planas, estabelecendo-se uma comparação entre as áreas e os respetivos lados. Aludem que este livro é o fundamento da construção e do uso de todos os instrumentos da Matemática, referindo a sua aplicação nas mais diversas áreas ligadas à engenharia. [Fortes 1724, fl 126 v]

De seguida, são apresentadas as definições de Euclides, acompanhadas de uma explicação e, em alguns casos, de figuras ilustrativas. Neste caso são quatro em vez de cinco as definições introduzidas, a saber, figuras retilíneas semelhantes; figuras recíprocas; dividir uma reta em média e extrema razão e altura de uma figura.

A definição de *razão composta*, apresentada por Euclides<sup>73</sup> como a quinta definição, não surge neste Livro VI. Tal ficará a dever-se ao facto de Azevedo Fortes / Ozanam já a terem introduzido no Livro V, após a oitava definição<sup>74</sup>.

Relativamente à razão composta, Tacquet coloca esta definição na Parte III do “seu” Livro V, no § X. Da composição das razões<sup>75</sup>, referindo que se trata da quinta definição do Livro VI de Euclides, e não a repete no Livro VI. Por seu lado, Manoel de Campos apesar de já ter apresentado esta definição no Livro V<sup>76</sup>, e ter mencionado que era a quinta definição do Livro VI de Euclides, coloca-a no Livro VI, expondo, desta forma, as cinco definições de Euclides.

Relativamente às figuras apresentadas, verifica-se uma correspondência quase exata entre as apresentadas por Ozanam e as de Azevedo Fortes.

Cada um destes autores apresenta vinte e uma figuras numeradas no sexto livro. Destas, verificam-se algumas diferenças na nona e na décima quarta.

---

<sup>73</sup> Existem muitas dúvidas sobre o facto de Euclides ter considerado uma quinta definição no Livro VI, a de razão composta. Não existem referências sobre quando terá sido utilizada pela primeira vez a definição de razão composta. Pensa-se que terá sido usada duas vezes, por Eutócio e por Teão, no seu comentário a Ptolomeu.

A definição refere a multiplicação de razões, o que supõe uma operação desconhecida em Geometria. Savile considerou-a não geométrica e inútil já que apenas pode ser aplicada para números. Heath refere em *The Thirteen Books of Euclid's Elements* que se esta definição for efetivamente genuína então irá considerá-la como uma mera sobrevivente de textos antigos, já que parece servir para a antiga teoria de proporções, aplicável apenas a grandezas comensuráveis. [Heath 1956, vol. 2, 190]

<sup>74</sup> Na obra de Ozanam, o conceito de razão composta surge após a Definição X, uma vez que esta é a correspondente à oitava definição de Azevedo Fortes. [Ozanam 1693, 272]

<sup>75</sup> *X. De compositione rationum, eius Definitio*. [Tacquet 1665, 172]

<sup>76</sup> Esta definição foi colocada no “Appendiz I”, § X. Da composição das razões. [Campos 1735, 148]

Em relação à nona, a diferença encontrada é ao nível das letras, podendo ter sido um lapso de Azevedo Fortes ao colocar as letras B e C [Figura 3.8<sup>77</sup>].

Na décima quarta figura as diferenças são um pouco mais significativas. Esta serve para ilustrar a Proposição 21.<sup>a</sup> do Livro VI e será abordada mais à frente.

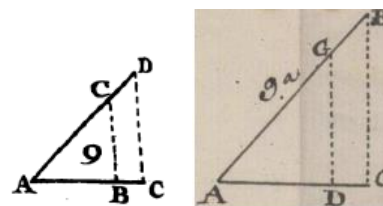


Figura 3.8

Azevedo Fortes coloca, tal como no Livro V, em cada proposição se se trata de um teorema ou de problema. Esta terminologia é seguida por Dechaes, Ozanam e Manoel de Campos, mas não por Tacquet. Este último apenas numera as proposições. Ozanam distingue-se dos restantes por numerar os teoremas e os problemas. Assim, por exemplo, a Proposição X é o Problema II e a Proposição XIV é o Teorema IX. [Ozanam 1693, 319, 324]

As quatro primeiras proposições presentes nos *Elementos* são apresentadas de forma semelhante por Dechaes, Ozanam, Azevedo Fortes e Manoel de Campos. No entanto, a forma como Azevedo Fortes enuncia a segunda proposição<sup>78</sup> não é muito clara. Assim, a segunda parte da proposição deveria ser: se a linha reta divide os dois lados proporcionalmente, ela [a linha] será paralela ao terceiro lado, tal como descreve Ozanam. [Ozanam 1693, 306]

Tacquet, Dechaes e Manoel de Campos acrescentam um corolário à quarta proposição, que nem Ozanam nem Azevedo Fortes colocam. Não obstante, estes dois últimos referem, na parte por eles denominada de “Uso”, que esta proposição é o fundamento dos princípios práticos da Trigonometria, podendo ser utilizada para provar que dois triângulos são semelhantes. Desta forma, a “ausência” deste corolário não é impeditiva de se entender a semelhança de triângulos com base na quarta proposição de Euclides.

As Proposições V e VI do Livro VI são também análogas nos autores supramencionados, enquanto a sétima é omitida por ser considerada desnecessária.

Na oitava proposição<sup>79</sup> Azevedo Fortes não refere que o triângulo que se considera é retângulo, apesar de tal facto se subentender dado que refere “a perpendicular lançada do

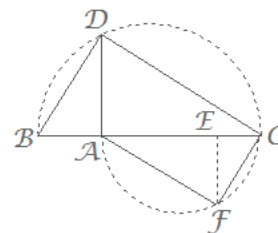
<sup>77</sup> A imagem da esquerda é de Ozanam enquanto a da direita é de Azevedo Fortes, tendo sido digitalizadas das obras em estudo dos autores.

<sup>78</sup> **VI, Proposição 2.<sup>a</sup>:** Uma linha reta lançada dentro de um triângulo paralelo [sic] a um dos seus lados, corta os outros dois proporcionalmente, e se ela corta proporcionalmente, os lados serão paralelos. [Fortes 1724, fl 128 v]

<sup>79</sup> Em linguagem atual, a oitava proposição estabelece que a altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, divide o triângulo em dois semelhantes e semelhante ao triângulo dado.

A oitava proposição é sucedida por um corolário em Tacquet, Dechales e Manoel de Campos. Este corolário determina que, num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é uma média proporcional dos dois segmentos obtidos pela sua divisão. Tal resultado é explicado por Ozanam e Azevedo Fortes, na parte em que indicam a aplicação da proposição (“Uso”), referindo que a mesma permite determinar uma média proporcional entre duas retas [segmentos de reta] dadas. Analogamente ao que acontece noutras proposições, Azevedo Fortes, na parte destinada à indicação da aplicação dos resultados demonstrados exemplifica, de forma pormenorizada, a sua utilidade em situações relacionadas com engenharia, o que denota a sua vertente prática e orientada para a sua área. Nesta proposição é explicada, em particular, a sua aplicação para “medir por meio de uma esquadra uma linha sobre a terra, que só é acessível por um dos seus extremos (pode ser a largura de um rio, de um lago<sup>80</sup>) etc. como por exemplo a distância  $\mathcal{AC}$  acessível somente em  $\mathcal{A}$ .” [Fortes 1724, fl 133, fl 133 v]

“Levantando no ponto  $\mathcal{A}$  um pau a prumo ou em ângulos retos, cujo comprimento seja sabido em palmos, polegadas<sup>81</sup>, etc., e aplicando o ângulo reto da esquadra ao extremo superior do pau em  $\mathcal{D}$ , e por um dos lados da esquadra de sorte, que o raio visual termine no ponto  $\mathcal{C}$ , e pelo outro lado no ponto  $\mathcal{B}$ , conheceremos que as três linhas  $\mathcal{AB}$ ,  $\mathcal{AD}$ ,  $\mathcal{AC}$ , são proporcionais, e assim o pau por si mesma, e dividindo o produto pela quantidade da linha  $\mathcal{AB}$ , o quociente será a quantidade da distância  $\mathcal{AC}$  buscada.” [Fortes 1776, p. 100]



que as três linhas  $\mathcal{AB}$ ,  $\mathcal{AD}$ ,  $\mathcal{AC}$ , são proporcionais, e assim multiplicando a altura do pau por si mesma, e dividindo o produto pela quantidade da linha  $\mathcal{AB}$ , que é sabida, o quociente será a quantidade da distância  $\mathcal{AC}$  buscada.” [Fortes 1724, fl 133 v]

Considerando o triângulo  $BCD$  retângulo em  $\mathcal{D}$ , e aplicando a oitava proposição, pode concluir-se que a altura relativa à hipotenusa – o segmento de reta  $\mathcal{AD}$  – divide o triângulo em

<sup>81</sup> A utilização destas unidades de medida não é feita por Ozanam.

dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao dado. Desta forma, a distância que se pretende determinar, de  $\mathcal{A}$  a  $C$ , é um dos lados do triângulo  $\mathcal{ACD}$ , que é semelhante aos triângulos  $\mathcal{ABD}$  e  $\mathcal{BCD}$ . Considere-se que as distâncias entre  $\mathcal{A}$  e  $D$ ;  $\mathcal{A}$  e  $B$  e  $\mathcal{A}$  e  $C$  são representadas, respetivamente, por:  $\overline{\mathcal{AD}}$ ,  $\overline{\mathcal{AB}}$  e  $\overline{\mathcal{AC}}$ .

Assim, e atendendo a que em polígonos semelhantes os lados correspondentes são proporcionais, tem-se:

$$\overline{\mathcal{AB}} : \overline{\mathcal{AD}} = \overline{\mathcal{AD}} : \overline{\mathcal{AC}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{\mathcal{AB}}}{\overline{\mathcal{AD}}} = \frac{\overline{\mathcal{AD}}}{\overline{\mathcal{AC}}}$$

Donde,  $\overline{\mathcal{AD}} \times \overline{\mathcal{AD}} = \overline{\mathcal{AB}} \times \overline{\mathcal{AC}}$  ou seja,  $\overline{\mathcal{AC}} = \frac{\overline{\mathcal{AD}} \times \overline{\mathcal{AD}}}{\overline{\mathcal{AB}}}$ , o que corresponde ao

que Azevedo Fortes referiu de “multiplicando a altura do pau por si mesma, e dividindo o produto pela quantidade da linha  $\mathcal{AB}$ , que é sabida, o quociente será a quantidade da distância  $\mathcal{AC}$  buscada”.

A nona proposição é designada por problema e possibilita a divisão de um segmento de reta em partes iguais. Esta proposição é apresentada de forma análoga pelos autores em estudo, contudo, verificam-se algumas diferenças. Por seu lado, Euclides expõe a proposição indicando como fazer para determinar uma parte de um segmento de reta, recorrendo a grandezas múltiplas. Manoel de Campos apresenta a proposição e a construção mas não a demonstra; Azevedo Fortes / Ozanam explicam como construir, fazem a demonstração, recorrendo a proposições dos Livros I e VI e indicam em “Uso” a sua utilidade [Fortes 1724, fl 133, fl 133 v]. A explicação apresentada por Dechaes na explicação desta construção, é um pouco mais pormenorizada do que a descrita por Azevedo Fortes / Ozanam. Dechaes refere a forma de utilizar o compasso e explica a construção para a divisão de um segmento em quatro partes iguais, enquanto Azevedo Fortes / Ozanam explicam para três partes [Dechaes 1672, 190]. Na demonstração, Dechaes refere a semelhança de triângulos mas recorre a proposições diferentes das de Azevedo Fortes / Ozanam para justificar os resultados.

No final da décima primeira proposição, Manoel de Campos introduz dois lemas e um problema sobre como determinar a soma dos termos de uma progressão geométrica, o que não acontece em nenhum dos outros. A décima segunda proposição determina como encontrar uma quarta proporcional, dados três segmentos de reta, sendo semelhante nos autores em estudo. No final da décima terceira proposição, que permite determinar uma média proporcional entre

dois segmentos de reta dados, Azevedo Fortes / Ozanam referem, em “Uso” que esta proposição serve para praticar, em segmentos de reta, a regra de três simples, e a raiz quadrada de uma grandeza dada [Fortes 1724, fl 136].

As três formas diferentes de determinar duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados, apresentadas por Manoel de Campos a preceder a Proposição XIV, e que designou por Método de Platão, Método de Filão de Bisâncio e Método de Descartes, não são mencionadas em Azevedo Fortes / Ozanam.

A décima quarta proposição do Livro VI é designada por teorema nos *Elementos* e é enunciada por Azevedo Fortes da seguinte forma:

**Proposição 14.<sup>a</sup>:** Os paralelogramos equiângulos iguais são recíprocos: e os paralelogramos recíprocos são equiângulos e iguais. [Fortes 1724, fl 136]

Esta proposição é demonstrada, e em “Uso” refere-se que serve para demonstrar a Proposição 16.<sup>a</sup> do Livro VI assim como “a verdade da regra aritmética chamada de três, indireta, ou inversa” [Fortes 1724, fl 137]. No entanto, na demonstração da décima sexta proposição<sup>82</sup>, que é composta de duas partes, Azevedo Fortes não faz referência à décima quarta proposição. Comparando a segunda parte da demonstração do português com a análoga de Ozanam, verifica-se que este último recorre à Proposição 14.<sup>a</sup>. A justificação para esta ausência será, uma vez mais tradução errada por parte de Azevedo Fortes, tal como se pode constatar pelas duas demonstrações que se apresentam de seguida.

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 16.<sup>a</sup> DO LIVRO VI DE AZEVEDO FORTES** [Fortes 1724, fl 138]

(...)

Digo em segundo lugar, que se os retângulos ABE, ACD são iguais entre si, as quatro linhas [segmentos de reta] AB, AC, AD, AE são proporcionais.

*Demonstração:*

Pois que os dois retângulos ABE, ACD são iguais (supor) e equiângulos pela construção, serão recíprocos (Definição 2.<sup>a</sup>, do Livro VI) e as quatro linhas [segmentos de reta] AB, AC, AD, AE proporcional e é o que se queria demonstrar.

---

<sup>82</sup> **VI, Proposição 16.<sup>a</sup>:** Se quatro linhas são proporcionais, o retângulo feito dos dois extremos, é igual ao retângulo feito dos meios, e se o retângulo dos extremos é igual ao retângulo dos meios, as quatro linhas são proporcionais. [Fortes 1724, fl 137 v]

## TRADUÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 16.<sup>a</sup> DO LIVRO VI DE OZANAM<sup>83</sup>

(...)

Digo em segundo lugar, que se os retângulos  $ACD$ ,  $ABE$ , são iguais entre si, as quatro linhas [segmentos de reta]  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$  são proporcionais.

*Demonstração:*

Porque os dois retângulos  $ACD$ ,  $ABE$  são iguais entre si (por suposição) e equiângulos por construção, serão recíprocos pela Proposição 14.<sup>a</sup>, do Livro VI, o que quer dizer, pela Definição 2, do Livro VI, que as quatro linhas [segmentos de reta]  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$  são proporcionais. Que é o que faltava demonstrar.

Manoel de Campos considerou que a demonstração da décima sexta proposição (do Livro VI) se obtém do resultado da décima quarta (do Livro VI).

Em “Uso”, Azevedo Fortes / Ozanam referem que a Proposição 16.<sup>a</sup> serve para demonstrar a “regra aritmética de proporção chamada regra de três” [Fortes 1724, fl 138]. Este resultado é colocado por Dechales num corolário após esta proposição.

Ainda relativamente às aplicações desta proposição, Azevedo Fortes não coloca um resultado que, de acordo com Ozanam, também pode ser provado a partir desta proposição. Assim, esta permite demonstrar que se dois segmentos de reta se intersectam num círculo, como  $BC$  e  $DE$ , as suas partes são reciprocamente proporcionais, isto é, a parte  $AB$  está para a parte  $AC$ , reciprocamente como a parte  $AE$  está para a parte  $AD$ , porque, pela Proposição 35.<sup>a</sup> do Livro III, o retângulo das partes  $AB$ ,  $AC$ , é igual ao das partes  $AD$ ,  $AE$  [Ozanam 1693, 329].

Para esta explicação Ozanam recorreu a uma figura, que numerou de 21, e cuja reconstrução se encontra representada na Figura 3.10. Uma vez que Azevedo Fortes não expôs esta aplicação da décima sexta proposição, não teve necessidade de fazer referência à 21.<sup>a</sup> figura. Isto

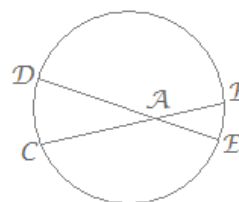


Figura 3.10

<sup>83</sup> (...)

*Je dis en second lieu, que si les rectangles  $ACD$ ,  $ABE$ , sont égaux entre eux, les quatre lignes  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ , sont proportionnelles.*

*Démonstration:*

*Parce que les deux rectangles  $ACD$ ,  $ABE$ , sont égaux entre eux, par sup[osition] & qu'ils sont équiangles, par constru[ction] ils sont réciproques par Prop. 14.<sup>a</sup> c'est-à-dire par Def. 2 que les quatres lignes  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ , sont proportionnelles. Ce qui restoit à démontrer.*

[Ozanam 1693, 328-329]

pode justificar o facto de Azevedo Fortes não ter numerado esta figura apesar de a ter colocado juntamente com as outras. Além disso, a figura não está completa, uma vez que o português não colocou a letra  $\mathcal{A}$ , ponto de interseção dos dois segmentos de reta dados.

A décima oitava proposição (do Livro VI), que é designada de problema por todos os autores em estudo, indica como proceder para construir um polígono semelhante a um dado. Tal como sucede noutras situações análogas, é apresentada a forma de obter o polígono, seguida da demonstração. Azevedo Fortes / Ozanam acrescem a utilização prática deste resultado, direccionada para a engenharia, considerando-o como o fundamento da prática que é utilizada tanto para fazer a planta de um terreno inacessível como para, a partir de uma planta, construir sobre o terreno uma fortificação dada. [Fortes 1724, fl 139 v]

A vigésima primeira proposição (do Livro VI), que determina que dois polígonos semelhantes a um terceiro são semelhantes entre si, é demonstrada por Euclides, Dechaes, Ozanam e Azevedo Fortes. Tacquet e Manoel de Campos apenas referem a definição, axiomas e proposições que servem para a sua demonstração.

A demonstração desta proposição descrita por Azevedo Fortes no seu manuscrito apresenta algumas diferenças da análoga de Ozanam. Estas devem-se à ausência de determinadas partes que é de alguma forma, impeditiva de entender a explicação. A demonstração necessita de uma figura – a 14.<sup>a</sup> – e também esta difere nos dois autores, tal como já foi referido anteriormente.

Ozanam começa por considerar os polígonos ABCD, EFGH e IKLM [Figura 3.11<sup>84</sup>]. Por hipótese, ABCD e IKLM são semelhantes a EFGH. Pretende provar-se que, nestas condições, ABCD e IKLM são semelhantes entre si.

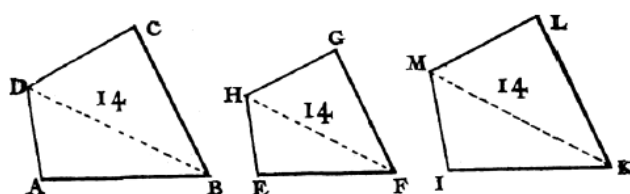


Figura 3.11

Recorrendo à vigésima proposição (do Livro VI)<sup>85</sup>, os triângulos que se obtêm dividindo os polígonos ABCD e EFGH pelas diagonais BD e FH, respetivamente, são semelhantes. Assim, nesta fase, o triângulo ABD é semelhante ao EFH (e não ao IKM, como Ozanam refere na sua

<sup>84</sup> Figura digitalizada da obra do francês.

<sup>85</sup> *Les polygones semblables se peuvent diviser en autant de triangles semblables: & les polygones semblables sont en raison doublée de leurs cotez homologues.* [Ozanam 1693, 335]

Esta proposição, numerada por Ozanam como o Teorema XIV, determina que dois polígonos semelhantes se podem decompor em dois triângulos semelhantes e que a razão entre as áreas dos polígonos é o quadrado da razão entre os lados homólogos.

demonstração) e o triângulo BCD é semelhante ao triângulo FGH. Procedendo de forma idêntica para os polígonos IKLM e EFGH, que são, por hipótese, semelhantes<sup>86</sup>, as diagonais FH e KM dividem os polígonos em dois pares de triângulos semelhantes, a saber, EFH e IKM, FGH e KLM. Tem-se, então, o triângulo ABD semelhante ao triângulo EFH e EFH semelhante a IKM, donde se conclui que os triângulos ABD e IKM são semelhantes visto que têm os ângulos iguais. Da mesma forma se prova que os triângulos BCD e KLM são semelhantes. Como os polígonos ABCD e IKLM estão decompostos em triângulos com ângulos iguais, terão também ângulos iguais entre si. A quarta proposição (do Livro VI)<sup>87</sup> permite concluir que os lados dos triângulos em que se decompõem os polígonos são proporcionais, logo os lados dos polígonos serão também proporcionais. Assim, fica demonstrado que os polígonos ABCD e IKLM são semelhantes.

Anteriormente foi referido que as figuras que ilustram esta proposição diferem em alguns aspetos.

Na Figura 3.12 encontra-se a digitalização obtida a partir do manuscrito de Azevedo Fortes [Fortes 1724]. As diferenças verificam-se no polígono IKLM. A representação deste polígono sugere que se trata do polígono simétrico dos polígonos ABCD e EFGH. É evidente que para que dois polígonos sejam semelhantes não têm de ser representados nas mesmas posições, contudo, atendendo à descrição que é feita na demonstração, não se verifica uma correta correspondência entre os ângulos e os lados homólogos. Acresce ainda que no polígono IKLM, o vértice M está assinalado com a letra N.

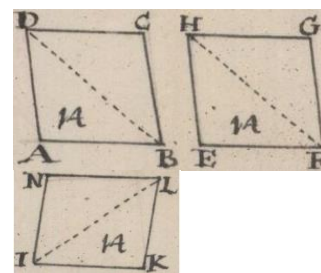


Figura 3.12

Azevedo Fortes descreve a vigésima segunda proposição do Livro VI da seguinte forma:

**Proposição 22.<sup>a</sup>:** Se quatro linhas retas [segmentos de reta] forem proporcionais, os polígonos semelhantes desses pontos sobre essas linhas [segmentos de reta], serão também proporcionais e se os polígonos forem proporcionais, serão também proporcionais os seus lados. [Fortes 1724, fl 142]

<sup>86</sup> Nesta fase Azevedo Fortes escreve:

“Da mesma sorte, como o polígono IKLM é suposto semelhante ao polígono EFGH, o triângulo ABD, porque dois ângulos que são iguais a um mesmo ângulo são iguais entre si (...).” [Fortes 1724, fl 141 v]

Esta frase denota a ausência de uma explicação intermédia.

<sup>87</sup> *Les triangles équiangles ont les côtes proportionnels.* [Ozanam 1693, 310]

Na demonstração deste resultado, Azevedo Fortes / Ozanam utilizam a vigésima proposição do Livro VI. Manoel de Campos refere outras proposições, mas não explica em detalhe. Em “Uso”, Azevedo Fortes / Ozanam referem que esta proposição “serve para praticar a regra de três em geometria” [Fortes 1724, fl 142 v]

A vigésima terceira proposição do Livro VI é semelhante em Manoel de Campos e Azevedo Fortes / Ozanam. Após a demonstrarem, apresentam alguns resultados, nomeadamente, sobre a forma de compor duas razões e a relação entre as áreas de paralelogramos e triângulos com a mesma base e altura, entre outros. Azevedo Fortes / Ozanam expõem estes resultados em Escólio, enquanto Manoel de Campos apresenta três corolários.

Na demonstração da vigésima quarta proposição<sup>88</sup>, verifica-se que Azevedo Fortes estabelece a razão entre dois lados correspondentes de forma contrária à verificada. Tal facto não se verifica na demonstração análoga de Ozanam. [Ozanam 1693, 343]

É referido em “Uso”, no final da vigésima quinta proposição (do Livro VI) designada de problema (que determina a forma como construir um polígono igual a um dado e semelhante a outro), que este resultado é mais geral do que outro presente no Livro II. Isto dever-se-á ao facto de que a partir desta proposição é possível obter qualquer polígono a partir de dois dados.

É ainda referida a não utilização da demonstração de Euclides neste problema uma vez que esta depende de uma proposição do Livro I dos *Elementos*, que não foi incluída neste manuscrito, por ter sido considerada de “embaraçada e pouco útil”. [Fortes 1724, fl 144 v]

As proposições vigésima sexta a vigésima nona (do Livro VI), são consideradas por Azevedo Fortes / Ozanam de “serem de muito pouca consequência”, pelo que não são apresentadas nestas obras. [Fortes 1724, fl 144 v]

Manoel de Campos apresenta a vigésima sexta proposição do Livro VI e omite as restantes até à vigésima nona. As proposições trigésima e trigésima primeira são análogas nos dois portugueses.

Relativamente à trigésima primeira proposição do Livro VI, regista-se uma diferença entre o que Azevedo Fortes escreve em “Uso” e o que Ozanam coloca em “Usage”. Não se trata de uma tradução errada; a diferença parece ser resultado da ausência de partes do texto original de Ozanam. Para melhor se entender esta ideia, transcreve-se a seguir a frase de Azevedo Fortes e a tradução da de Ozanam.

---

<sup>88</sup> **VI, Proposição 24.ª:** Se de um ponto da diagonal de um paralelogramo se lançarem duas linhas paralelas aos dois lados ficarão formados quatro paralelogramos dos quais os dois por onde a diagonal passa são semelhantes entre si e semelhantes ao grande. [Fortes 1724, fl 143 v]

### “Uso” (de Azevedo Fortes)<sup>89</sup>

Esta proposição serve mais geralmente para somar muitas figuras semelhantes do que a 47, 1<sup>o</sup>.

### “Usage” (tradução de Ozanam)<sup>90</sup>

Esta proposição é geralmente utilizada para somar várias figuras semelhantes, como já foi dito em 47, I. sem haver a necessidade de repetir novamente.

Na demonstração da trigésima terceira proposição do Livro VI surge novamente um lapso de Azevedo Fortes na escrita, desta feita, na denominação de dois ângulos, representados numa figura, a 19, e que cuja digitalização está feita na Figura 3.13.

Assim, em vez de se referir aos ângulos ao centro BAC e EDF, escreve ângulos ao centro DAC e EBF [Fortes 1724, fl 146]. Ozanam escreve a forma correta [Ozanam 1693, 348].

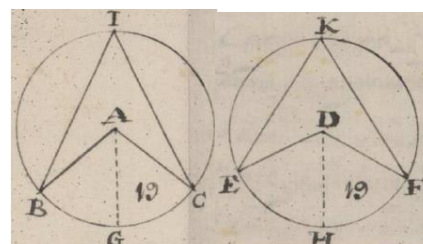


Figura 3.13

No final da trigésima terceira proposição, que é semelhante em Azevedo Fortes / Ozanam e Manoel de Campos, este último coloca quatro corolários, enquanto Azevedo Fortes / Ozanam não apresentam mais nenhum resultado.

No Anexo II podem consultar-se tabelas comparativas dos autores mencionados anteriormente, no que diz respeito aos dos Livros V e VI.

## 3.2.2. Lógica Racional, Geométrica e Analítica

Esta obra encontra-se dividida em três partes: *Lógica Racional* (Parte I), *Lógica Geométrica* (Parte II) e *Lógica Analítica* (Parte III).

A Parte I insere-se no âmbito da filosofia: trata da lógica filosófica. Azevedo Fortes refere em *Antiloquio* [Antelóquio] que nesta Parte são tratadas as “quatro operações do nosso entendimento, que são perceber, julgar, discorrer e ordenar”. [Fortes 1744]

<sup>89</sup> [Fortes 1724, fl 145 v]

<sup>90</sup> Cette proposition sert généralement pour ajouter ensemble plusieurs figures semblables, comme nous avons déjà dit dans 47, I. sans qu'il soit besoin de répéter ici davantage. [Ozanam 1693, 348]

Na apresentação da reedição, pela Imprensa Nacional-Casa da Moeda, em 2002, da *Lógica Racional*, Pedro Calafate refere a consciência de “superioridade” dos tempos modernos em relação aos “antigos”, característica dos iluministas portugueses, que Azevedo Fortes também evidencia.

De acordo com Calafate, nesta obra (Parte I) Azevedo Fortes “procurou realizar um compromisso entre o sensismo<sup>91</sup> de John Locke e o inatismo<sup>92</sup> de Descartes, nomeadamente no plano da teoria das ideias, tema que o arrastou para um plano relativamente sincrético”. [Calafate]

A Parte II trata da Geometria Euclidiana, enquanto a última Parte é dedicada à Álgebra. [Fortes 2002, 11]

Das três partes, a que suscitou mais estudos ao longo dos tempos foi a primeira.

Nesta obra, Azevedo Fortes refere em Antelóquio que até então não existia nenhum trabalho escrito em português sobre o que trata na *Lógica Racional* e na *Lógica Analítica*. Este facto reveste o seu trabalho de grande importância.

Relativamente às fontes que terão servido de base para este trabalho, Azevedo Fortes refere em Antelóquio que recorreu a vários autores, “antigos” e “modernos”, não seguindo em exclusivo um único. Assim, retira de cada um “a parte em que eles se conformam com o que a reta razão nos dita, e que pode servir para adiantar o nosso conhecimento”. [Fortes 1744, Antelóquio]

Para as Partes II e III, a principal referência do português foi Bernard Lamy<sup>93</sup>. Enquanto a Parte III, *Lógica Analítica*, foi elaborada a partir da obra *Éléments des Mathématiques*, não se

---

<sup>91</sup> *Sensismo* é um termo utilizado para designar a doutrina segundo a qual todos os nossos conhecimentos vêm das sensações, consideradas como condição necessária e suficiente de todos eles, mesmos os mais abstratos. [Sensismo]

<sup>92</sup> *Inatismo* é um termo utilizado para designar a doutrina segundo a qual há no espírito humano ideias ou princípios que nascem com ele e que portanto, se distinguem dos que são adquiridos. [Inatismo]

<sup>93</sup> Nasceu em Le Mans, França, em 1640. A sua formação inicial foi em casa, ministrada por um tutor contratado pelos pais. Aos doze anos era um especialista em latim e entrou para a congregação do Oratório. Estudou Filosofia em Saumur. Em 1661 foi nomeado professor no Colégio Jesuíta, em Vendôme, e dois anos depois foi para Juilly, onde ensinou Literatura, Gramática, Latim, Grego, História e Geografia. Foi ordenado sacerdote em 1667. Durante a permanência em Juilly, Lamy leu todos os trabalhos importantes de Descartes. Em 1668 e 1669 foi professor em Le Mans e de seguida foi estudar Teologia na Escola de Teologia de Notre-Dame des Ardillires em Saumur, tendo sido nomeado professor de Filosofia em Saumur em setembro de 1671. Dois anos mais tarde ocupou o cargo de professor em Angers. Entretanto, foi acusado de ensinar de forma exclusivamente cartesiana, o que levou a que em 1675 tenha sido proibido de continuar as suas palestras. Assim, foi enviado para Grenoble, em 1677. Voltou para Paris em 1686, contudo, em 1689 foi obrigado a abandonar a cidade devido a um problema relacionado com um trabalho que realizou. Foi para Rouen, em 1690, onde acabou por falecer a 29 de junho de 1715. De entre as suas obras destacam-se *De l'Art de parler*, em 1675 (publicação anónima); *Nouvelles Réflexions sur l'art poétique*, em 1678; *Traité de mécanique, de l'équilibre des solides et des liqueurs*, em 1679; *Éléments des Mathématiques ou Traité de la grandeur en général, qui comprend L'Arithmétique, L'Algèbre, L'Analyse, et les Principes de toutes les Sciences qui ont la Grandeur pour objet*, em 1680; *Entretiens sur les sciences*, em 1683; *Les Éléments de Géométrie, ou de la mesure du corps, tout ce qui comprennent qu' Euclide a enseigné*, em 1685. [O'Connor 2008]

verificando uma correspondência tão “exata” como entre o manuscrito estudado anteriormente e a obra de Ozanam, pode afirmar-se que a Parte II, *Lógica Geométrica*, é uma tradução incompleta da obra de Lamy, *Les Éléments de Géométrie*, como será descrito no que se segue.

A estrutura das três partes é semelhante: estão organizadas por livros e cada um destes encontra-se dividido por capítulos. Para além de numerar os livros e os capítulos, Azevedo Fortes numera os parágrafos.

A temática das razões e das proporções é abordada nas Partes II e III, sendo por este motivo, estas as partes que foram alvo de um estudo mais cuidado e que se apresenta a seguir.

Vinte anos separam o manuscrito *Geometria Especulativa. Trigonometria Espherica, modo de riscar edar aguadas nas plantas militares*. da obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*. Muitos dos conceitos abordados no manuscrito voltam a ser colocados nesta última obra. Verifica-se também a repetição de alguns conceitos e resultados nas Partes II e III da *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, que serão mencionados no decorrer deste estudo.

### **3.2.2.1. Parte II: Lógica Geométrica**

Na *Lógica Geométrica*, Azevedo Fortes refere que irá seguir o Padre Bernard Lamy (mais precisamente a obra *Les Éléments de Géométrie*<sup>94</sup>), por este ter dado uma nova forma aos *Elementos* de Euclides, uma vez que tratou separadamente as três dimensões do corpo: a linha, a superfície e o corpo ou sólido, “emendando o defeito de Euclides, que não fez esta separação”, tendo para além disso, apresentado demonstrações novas. [Fortes 1744, Parte II, 1]

Tal como referido anteriormente, Azevedo Fortes, na *Lógica Geométrica* não “seguiu” apenas Lamy, realizou uma tradução, ainda que incompleta, da obra do francês. Desta forma, será adotada uma metodologia semelhante à seguida no estudo do manuscrito de Azevedo Fortes: utilização da expressão “Azevedo Fortes / Lamy”, sempre que se verifique que o assunto abordado seja resultado de uma tradução do português a partir do francês.

Ainda antes de apresentar o Capítulo I, Azevedo Fortes menciona a intenção de escrever de forma clara e tornar possível a compreensão das obras de Cristóvão Clávio, André Tacquet e Dechales. [Fortes 1744, Parte II, 2]

---

<sup>94</sup> As citações a esta obra são da edição de 1731.

*Les Éléments de Géométrie* é composta por seis livros, enquanto a *Lógica Geométrica* tem cinco. Para além dos livros, cada um dos dois autores coloca um estudo sobre as Secções Cónicas. Contudo, Azevedo Fortes coloca este estudo em Apêndice (*Appendix*), enquanto Lamy não refere este termo. Salienta-se que este estudo de Azevedo Fortes é menos extenso do que o apresentado por Lamy.

Em termos estruturais, a diferença entre o trabalho do português e o do padre francês reside na designação das partes em que se dividem os livros: Azevedo Fortes apelida de “Capítulo” o que Lamy designou de “Section”. Acresce ainda que, na *Lógica Geométrica*, para além de não estarem presentes alguns capítulos que surgem na obra do francês, alguns conteúdos são apresentados de forma menos pormenorizada. Estas diferenças serão referidas oportunamente.

De uma forma geral, existe uma correspondência entre os conteúdos presentes nas duas obras em cada livro e em cada capítulo (“Section”), no que diz respeito a definições, proposições e mesmo nas figuras ilustrativas de determinadas definições e/ou proposições. A este respeito verifica-se, tal como no caso do manuscrito e da obra de Ozanam, que as figuras que são apresentadas por Azevedo Fortes são exatamente as mesmas que surgem na obra de Lamy, havendo, em situações pontuais, ligeiras diferenças que poderão ser devidas a lapsos de Azevedo Fortes. Exemplo disso é a figura que ilustra a definição de linhas antiparalelas, a Definição I, do Capítulo II, do Livro IV. Assim, Azevedo Fortes [Figura 3.154]<sup>95</sup>, para além de ter representado os segmentos de reta CB e FE aparentemente paralelos, trocou as letras dos extremos do segmento BC, relativamente à figura de Lamy [Figura 3.]<sup>96</sup>, não tendo contudo alterado a explicação da definição. Tal facto torna incoerente a explicação relativamente à figura que apresenta.

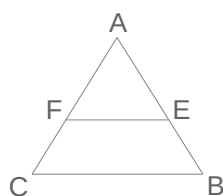


Figura 3.154

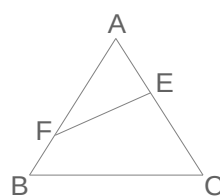


Figura 3.15

Ao longo desta Parte, Azevedo Fortes faz referência a Euclides e volta a apresentar as definições de alguns conceitos que surgem no seu manuscrito. Lamy também refere Euclides e

<sup>95</sup> Figura construída a partir da figura presente na obra de Azevedo Fortes. [Fortes 1744, Parte II, 175]

<sup>96</sup> Figura construída a partir da figura presente na obra de Lamy *Les Éléments de Géométrie* [Lamy 1731, 198]

apresenta, na parte final da sua obra, uma tabela com a identificação das proposições dos *Elementos* a que faz referência e o livro e respetiva página em que o faz, tabela que não surge em Azevedo Fortes.

No que diz respeito à teoria das proporções, interessa estudar, com mais atenção, o que Azevedo Fortes coloca nos Capítulos III e IV do Livro III. [Fortes 1744, 142]

O Livro III é iniciado por Azevedo Fortes / Lamy com um capítulo dedicado à explicação das operações aritméticas, ao que segue a sua aplicação a linhas, planos e sólidos. Insere também a explanação dos conceitos básicos das razões e proporções. Neste livro, como será referido a seguir, verifica-se uma correspondência entre as definições, e resultados apresentados por Azevedo Fortes e Lamy. Quando surgirem diferenças entre os dois autores, estas serão mencionadas, sempre que se considere adequado.

Azevedo Fortes / Lamy iniciam<sup>97</sup> o Capítulo III do Livro III referindo a possibilidade de relacionar duas grandezas [do mesmo tipo] de duas formas: considerando o quanto uma linha, por exemplo, é maior do que outra, sendo para isso necessário saber o número de vezes que a menor está contida na maior; ou determinar o excesso que a maior tem sobre a menor.

A primeira relação é designada de *razão*, e a esta é associada o conceito de *razão geométrica*. A segunda é designada de *diferença*, e é associada ao conceito de *razão aritmética*. Estas ideias tinham sido já expostas por Azevedo Fortes no seu manuscrito, e da mesma forma que procedeu nessa obra, neste terceiro capítulo refere que a relação que irá ser tratada é a geométrica já que a aritmética é pouco usada pelos geómetras. [Fortes 1744, Parte II, 142]

A primeira definição que surge neste capítulo é a de razão e apresenta-se a seguir.

**Definição I:** A razão de uma linha a outra linha, de um plano a outro plano e de um sólido a outro sólido, é a quantidade relativa que se acha entre as duas linhas comparadas uma com a outra. [Fortes 1744, Parte II, 142]

Neste ponto Azevedo Fortes refere que irá explicar melhor esta definição na Parte III da sua obra.

Após apresentarem esta definição, Azevedo Fortes / Lamy referem que, para determinar a forma como uma grandeza está contida ou contém outra, deve-se recorrer à divisão.

---

<sup>97</sup> Atendendo a que as partes em que se dividem os livros das obras de Lamy e Azevedo Fortes têm designações diferentes, "Section" e "Capítulo", respetivamente, sempre que surja a expressão "Azevedo Fortes / Lamy", será utilizada a designação dada por Azevedo Fortes, devendo entender-se a correspondência com a parte respetiva de Lamy.

A associação da razão entre duas grandezas a uma operação aritmética representa uma diferença em relação ao seu manuscrito e também às obras estudadas até aqui, uma vez que é feita de forma explícita. Será legítimo dizer que esta associação limita o conceito de razão às grandezas numéricas... Como será definida a razão para grandezas em geral?

Quando associa a razão a uma divisão, Azevedo Fortes exemplifica com as letras  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , sendo  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  letras que representam duas linhas. A explicação é a seguinte:

“A razão da linha  $\mathcal{A}$  para a linha  $\mathcal{B}$  se conhece dividindo  $\mathcal{B}$  por  $\mathcal{A}$ , que se nota a modo de números quebrados, desta sorte  $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$  ou  $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ .”

[Fortes 1744, Parte II, 143]

Para esta explicação Azevedo Fortes deveria ter referido o que representam as letras  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  relativamente às linhas consideradas. A explicação tem implícita a ideia de “medida”, pois só assim é possível quantificar, mas o que seria para Azevedo Fortes a medida da linha  $\mathcal{A}$ ?

Azevedo Fortes menciona que a razão entre as linhas é representada por números quebrados.

Terá Azevedo Fortes, ao colocar esta afirmação, pretendido referir-se apenas a números racionais não inteiros? Se assim for, não estaria correto porque uma razão pode ser representada por um número inteiro.

A explicação continua:

“(...) A expressão  $\left[ \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \text{ ou } \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \right]$  expõe ou declara quantas vezes  $\mathcal{A}$  é contido em  $\mathcal{B}$ , e a parte  $\mathcal{B}$  se chama expoente da razão de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$ .”

[Fortes 1744, Parte II, 143]

Esta explicação não é muito clara. Uma primeira leitura levaria a supor que o expoente da razão  $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$  é  $\mathcal{B}$ . O que sucede, é que se trata de uma tradução errada feita por Azevedo Fortes.

Uma possível tradução da explicação dada por Lamy seria:

(...) Esta expressão  $\left[ \frac{B}{A} \text{ ou } \frac{A}{B} \right]$  descreve ou exprime a razão de  $A$  para  $B$ , isto é, quantas vezes e de que maneira,  $A$  está contido em  $B$ , ou que parte  $B$  é de  $A$ ; que é o que se chama de Expoente da razão de  $A$  para  $B$ .<sup>98</sup>

Uma comparação entre a tradução apresentada por Azevedo Fortes e o original de Lamy leva a supor que o português omitiu algumas palavras o que teve como consequência a alteração do sentido do termo apresentado.

No entanto, prosseguindo a leitura das definições seguintes, deduz-se que o expoente da razão  $\frac{A}{B}$  será o valor da divisão de  $A$  por  $B$ . Assim, se o resultado dessa divisão for um número, a razão designa-se de razão de *número a número* (Definição II). Caso contrário, a razão será *surda* ou *irracional* (Definição III). [Fortes 1744, Parte II, 143]

“Se o resultado dessa divisão for um *número*”? O que deve ser entendido como sendo um *número*? Até aqui este conceito não é claro...

A Definição IV estabelece que uma igualdade de razões é uma proporção. Neste livro, Azevedo Fortes apresenta a mesma notação que usa no manuscrito para estabelecer a proporção entre as grandezas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , a saber,  $A.B :: C.D$ , e introduz a terminologia usada atualmente:  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  [Fortes 1744, Parte II, 144]. Lamy utiliza a mesma notação na sua obra. [Lamy 1731, 154]

Relembre-se que, no manuscrito, Azevedo Fortes, à semelhança de Ozanam em *Cours de Mathématique*, não apresenta a definição de proporção e refere que grandezas proporcionais são as que têm entre si a mesma razão. Apesar de ter exemplificado com números, o que já é significativo e revelador da “aritimetização”, não referiu operações aritméticas. [Fortes 1724, fl 114 v]

Nos Capítulos I e II do Livro III da *Lógica Geométrica* é apresentada a explicação das operações aritméticas, as suas propriedades e aplicações nas linhas, planos e sólidos, assim como o conceito de potência. Estes conceitos servem de base para a abordagem aritmética das razões e das proporções.

---

<sup>98</sup> Cette expression expose ou exprime la raison de  $A$  à  $B$ ; c'est-à-dire, combien de fois, & de quelle manière  $A$  est dans  $B$ , ou quelle partie  $B$ , est de  $A$ ; ce qui le nomme l'exposant de la raison de  $A$ , à  $B$ . [Lamy 1731, 153]

As definições seguintes dizem respeito à terminologia relativa às razões: termos de uma proporção, antecedentes, consequentes e proporção contínua.

Relativamente à notação usada para representar a proporção contínua  $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ , Azevedo

Fortes / Lamy utilizam a seguinte:

$$\ddot{::} A.B.C^{99}$$

Seguem-se as definições de progressão, extremos e meios de uma proporção, termos homólogos, proporção ordenada e proporção perturbada. Note-se que as definições destes dois últimos conceitos não estão presentes no manuscrito.

Após as definições, Azevedo Fortes apresenta o que denomina de “Proposições evidentes que respeitam as razões e as proporções” [Fortes 1744, Parte II, 147]. A primeira difere da correspondente em Lamy e terá sido mais um lapso do português, já que se assim não for, não está correta. Azevedo Fortes refere que as razões iguais têm expoentes *e consequentes* iguais. Esta afirmação está evidentemente errada, uma vez que, quando se verifica a igualdade entre duas razões, os termos homólogos não são necessariamente iguais. A afirmação de Azevedo Fortes só é válida se as razões consideradas tiverem iguais antecedentes e iguais consequentes. Lamy refere apenas que as razões iguais têm expoentes iguais, o que de facto acontece.

Em vez de *consequentes*, a palavra que faria sentido utilizar seria *quocientes*. Esta situação não é única, como poderá ver-se pela discussão que é apresentada mais à frente.

A explicação que Azevedo Fortes coloca desta proposição é mais extensa do que a apresentada por Lamy, visto que este último apenas refere que o expoente de uma razão mostra a forma como um dos seus termos está contido no outro e, se as formas forem iguais, então os expoentes serão iguais<sup>100</sup>. Para além de uma explanação semelhante a esta, Azevedo Fortes completa-a com exemplos numéricos. A terminar a exposição, Azevedo Fortes refere “o que na Aritmética se chama consequente, chamam os geómetras expoente” [Fortes 1744, Parte II, 147].

Trata-se de uma afirmação cujo conteúdo não faz sentido. Qual o motivo para a utilização deste termo?

<sup>99</sup> [Fortes 1744, Parte II, 145].

<sup>100</sup> *L'exposant d'une raison marque la manière que l'un de ces termes est contenue dans l'autre. Si les manières sont égales, les exposants sont égaux.* [Lamy, 1731, 156-157]

Pode tratar-se de um engano de Azevedo Fortes ao escrever a frase, ter-se-á equivocado e escreveu uma palavra que estava a utilizar várias vezes.

Outra possibilidade seria Azevedo Fortes ter escrito o seu trabalho de forma correta, e o erro ter sido cometido pelos responsáveis pela sua edição. Mas neste caso, ao ser feita a revisão da obra, o lapso passou “despercebido”...

E se Azevedo Fortes em vez de escrever estes resultados, os tivesse ditado?

E qual seria o termo que deveria estar escrito em vez de “consequente”?

Atendendo ao contexto apresentado e à afirmação feita, uma possibilidade para a palavra *correta* será “quociente”. Este termo faz sentido no contexto apresentado. Quando Azevedo Fortes / Lamy definem *divisão*, referem que o quociente é “a grandeza que expressa as vezes que o dividendo coube no divisor”<sup>101</sup>. Considerando que apresentam números para explicar que razões iguais têm iguais expoentes, estão a utilizar a Aritmética numa explicação geométrica. Logo, o termo *expoente*, que é utilizado na Geometria, será o equivalente ao termo *quociente* na Aritmética. Para terminar esta conjectura, falta referir uma hipótese para a utilização do termo consequente... Atendendo à fonética dos dois termos, quociente e consequente, estes podem ter sido confundidos pela pessoa que hipoteticamente estaria a escrever o que Azevedo Fortes ditava...

No que respeita à proposição seguinte (Proposição II), verifica-se uma diferença na tradução de Azevedo Fortes a partir da de Lamy. Esta diferença altera o sentido da original, na medida em que apresenta a sua implicação recíproca.

**Proposiçãam II:** Grandezas desiguaes não podem ser expoentes de razoens iguaes. [Fortes 1744, Parte II, 147]

**Proposition II:** Les grandeurs égales ne peuvent être les exposants que de raisons égales. [Lamy 1731, 157]

O que Azevedo Fortes deveria ter escrito era: *Grandezas iguais só podem ser expoentes de razões iguais*.

---

<sup>101</sup> [Fortes 1744, Parte II, 124]

A explicação que os dois autores apresentam do lema (“O primeiro termo de uma razão é igual ao segundo multiplicado pelo expoente desta mesma razão.”<sup>102</sup>), que surge após a segunda proposição, permite esclarecer a forma como eram utilizados os conceitos de *expoente* (ou *quociente*) de uma razão.

Quando atualmente nos referimos ao quociente de uma razão, por exemplo, da razão  $\mathcal{A} : \mathcal{B}$ , efetuamos a divisão entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , independentemente de  $\mathcal{A}$  ser maior, igual ou menor do que  $\mathcal{B}$ . Procedendo desta forma, o quociente obtido pode ser um número inteiro ou fracionário (menor ou maior do que a unidade). Contudo, da leitura atenta dos vários resultados e situações apresentados nestas obras, depreende-se que o expoente de uma razão seria sempre determinado efetuando a divisão entre o maior e o menor termo da razão, não sendo condição necessária dividir o antecedente pelo conseqüente. O objetivo de efetuar a divisão entre os termos de uma razão, seria descobrir de que forma um deles está contido ou contém o outro, indo de encontro à definição de razão.

O comentário que Azevedo Fortes coloca a seguir a este lema é diferente do apresentado por Lamy, tendo contudo uma semelhança: os dois referem que as razões, que servem de explicação para os resultados apresentados nestes seus trabalhos, têm os antecedentes menores do que os conseqüentes. A diferença verificada nos comentários permite concluir que neste caso Azevedo Fortes não traduziu Lamy.

A frase<sup>103</sup> que surge na *Lógica Geométrica* não é muito clara, no entanto, parece que a ideia presente é a de que os exemplos que irá apresentar terão expoentes inteiros.

Lamy especifica o caso do expoente ser um número maior do que a unidade ou no caso contrário, menor, e nesta situação estar perante o que aritmeticamente se denomina de fração [Lamy 1731, 158].

Os dois autores concluem que, de uma forma ou de outra, a multiplicação do menor termo da razão pelo expoente da mesma, terá como resultado o outro termo da razão, o que é verdade.

A Proposição V corresponde à décima sexta proposição do Livro V dos *Elementos*.<sup>104</sup>

---

<sup>102</sup> [Fortes 1744, Parte II, 147]

<sup>103</sup> “Qualquer proporção pode começar por antecedente maior que o conseqüente, como 6 para 3, ou por menor, como 3 para 6; mas daqui por diante sempre devemos entender que as razões de que tratarmos têm sempre os seus antecedentes menores que os conseqüentes, para evitar confusão; e porque sempre os expoentes são números inteiros, principalmente passando as razões a progressões, porque assim são sempre razões de número a número e as razões se chamam de menor desigualdade, sendo menores os antecedentes” [Fortes 1744, Parte II, 148]

<sup>104</sup> Tal como acontece em todas as outras, Azevedo Fortes refere esta correspondência.

Anteriormente foram apresentadas algumas demonstrações desta proposição, sendo a última a presente no manuscrito de Azevedo Fortes.

Segue-se a proposição apresentada por Azevedo Fortes e a respetiva demonstração, presente na *Lógica Geométrica*.

**Proposição V:** Se quatro grandezas forem proporcionais, alternando ficam sempre proporcionais. [Fortes 1744, Parte II, 149]

*Demonstração:*

Considerem-se as grandezas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , tais que,  $\mathcal{A}.\mathcal{B} :: \mathcal{C}.\mathcal{D}$ .

Pretende-se provar que  $\mathcal{A}.\mathcal{C} :: \mathcal{B}.\mathcal{D}$ .

Por hipótese,  $\mathcal{A}.\mathcal{B} :: \mathcal{C}.\mathcal{D}$  [1].

Então, o quociente das duas razões é o mesmo.

Seja  $Q$  esse quociente.

Pelo último lema mencionado,  $\mathcal{A}Q = \mathcal{B}$  e  $CQ = \mathcal{D}$  [2].

Substituindo em [1]  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ , por [2], a proporção fica  $\mathcal{A}.\mathcal{A}Q :: \mathcal{C}.CQ$

Pretende-se mostrar que  $\mathcal{A}.\mathcal{C} :: \mathcal{B}.\mathcal{D}$ , ou utilizando [2],  $\mathcal{A}.\mathcal{C} :: \mathcal{A}Q.CQ$

Para tal, é necessário mostrar que o quociente da razão  $\mathcal{A}.\mathcal{C}$  é igual ao da razão  $\mathcal{A}Q.CQ$ .

O quociente da razão  $\mathcal{A}.\mathcal{C}$  é  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$  (atendendo ao que fica dito anteriormente) e o da razão

$\mathcal{A}Q.CQ$  é  $\frac{CQ}{\mathcal{A}Q}$ .

Pelas regras da divisão,  $\frac{CQ}{\mathcal{A}Q}$  é igual a  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$ , porque se “apaga” a letra  $Q$  dos dois termos da razão.

Desta forma as duas razões são iguais o que permite concluir a veracidade da proporção  $\mathcal{A}.\mathcal{C} :: \mathcal{B}.\mathcal{D}$ . ■

Saliente-se que, nesta demonstração, Azevedo Fortes não colocou a demonstração de Lamy na “sua totalidade”. Ao comparar as duas, fica a ideia de que o português não traduziu uma das frases da demonstração do francês, o que tem como consequência a falta de conexão da mesma. A ausência dessa parte dificulta a compreensão e incorre em erro.

Assim, depois de obter a proporção  $\mathcal{A}.\mathcal{A}Q :: C.CQ$ , Azevedo Fortes refere “o que é evidente, pois que o quociente de  $C$  dividido por  $\mathcal{A}$  é  $\frac{C}{\mathcal{A}}$ , o mesmo que de  $CQ$  dividido por  $\mathcal{A}Q$ , que é  $\frac{CQ}{\mathcal{A}Q}$ ” [Fortes 1744, Parte II, 149].

Prossegue com a justificação a partir da regra da divisão.

No manuscrito, Azevedo Fortes apresenta duas formas de demonstrar a décima sexta proposição. A demonstração apresentada anteriormente tem como base uma operação aritmética, a divisão, diferindo das duas demonstrações do manuscrito.

Assim, Azevedo Fortes demonstra de três formas diferentes o mesmo resultado. Se no manuscrito já é visível a tendência para recorrer a processos algébricos, na *Lógica* essa tendência acentua-se e a Aritmética serve de base para a demonstração do resultado, o que torna a proposição válida, uma vez mais, apenas para números.

As proposições apresentadas, no seguimento do capítulo, expõem resultados diversos sobre as razões e proporções, correspondendo algumas a proposições presentes nos *Elementos* de Euclides. As demonstrações são todas baseadas nas propriedades e regras das operações aritméticas. No que concerne às proposições VI e IX<sup>105</sup>, constata-se que os resultados são idênticos.

**Proposição VI:** Juntando aos dois termos de uma razão, outros dois que tenham a mesma razão, o antecedente ao antecedente e o conseqüente ao conseqüente, assim acrescentados, terão sempre a mesma razão. [Fortes 1744, Parte II, 149]

Considerem-se as razões iguais  $\mathcal{A}.\mathcal{B}$  e  $C.\mathcal{D}$ .

Então, é possível estabelecer com as grandezas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $C$  e  $\mathcal{D}$ , a proporção  $\mathcal{A}.\mathcal{B} :: C.\mathcal{D}$ .

Nestas condições, a Proposição VI determina que a razão  $(\mathcal{A} + C) . (\mathcal{B} + \mathcal{D})$  é igual às razões  $\mathcal{A}.\mathcal{B}$  e  $C.\mathcal{D}$ . Simbolicamente esta proposição pode ser expressa da seguinte forma

$$\text{Se } \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{C}{\mathcal{D}}, \text{ então } \frac{\mathcal{A} + C}{\mathcal{B} + \mathcal{D}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{C}{\mathcal{D}}.$$

---

<sup>105</sup> Esta proposição é assinalada pelos dois autores como sendo a correspondente à décima segunda proposição do Livro V de Euclides.

**Proposição IX:** Sendo quatro grandezas em proporção, a soma dos antecedentes é para a soma dos consequentes, como cada antecedente para o seu consequente. [Fortes 1744, Parte II, 151]

Se as grandezas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , estiverem em proporção, por exemplo,  $\mathcal{A}.\mathcal{B} :: \mathcal{C}.\mathcal{D}$ , então,  $(\mathcal{A} + \mathcal{C}) . (\mathcal{B} + \mathcal{D}) :: \mathcal{A}.\mathcal{B} :: \mathcal{C}.\mathcal{D}$ .

Efetuada a escrita simbólica desta proposição, tem-se,

$$\text{Se } \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}, \text{ então } \frac{\mathcal{A} + \mathcal{C}}{\mathcal{B} + \mathcal{D}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}$$

Este é o mesmo resultado que a Proposição VI estabelece.

Relativamente à Proposição IX, Azevedo Fortes refere *quatro* grandezas mas na explicação apresenta *seis* grandezas, a saber,  $\mathcal{A}.\mathcal{B} :: \mathcal{C}.\mathcal{D} :: \mathcal{E}.\mathcal{F}$ .

A partir destas estabelece  $(\mathcal{A} + \mathcal{C} + \mathcal{E}) . (\mathcal{B} + \mathcal{D} + \mathcal{F}) :: \mathcal{A} . \mathcal{B} :: \mathcal{C} . \mathcal{D} :: \mathcal{E} . \mathcal{F}$ .

A incongruência entre o apresentado no enunciado da proposição e a explanação poderá, uma vez mais, ser explicada pela diferença existente entre esta e a proposição de Lamy. O francês não refere quatro grandezas e sim “várias” grandezas [Lamy 1731, 160].

Prosseguindo a análise do Capítulo III da Parte II, verifica-se que a Proposição XI<sup>106</sup> não está de acordo com a correspondente de Lamy nem com a demonstração dada por Azevedo Fortes.

Este enuncia a proposição da seguinte forma: “Se duas grandezas tiverem a mesma razão a uma terceira, elas a terão entre si” [Fortes 1744, Parte II, 151]. O que se depreende desta proposição é que, dadas as grandezas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ , tais que  $\mathcal{A}.\mathcal{C} :: \mathcal{B}.\mathcal{C}$ , então  $\mathcal{A}.\mathcal{B} :: \mathcal{A}.\mathcal{C} :: \mathcal{B}.\mathcal{C}$ .

Contudo, este não é o resultado que Azevedo Fortes demonstra. O que é apresentado na demonstração é que, nas condições da proposição, as duas grandezas são iguais, tal como Lamy refere na sua obra, e fica de acordo com a nona proposição dos *Elementos*.

No Livro V do manuscrito, Azevedo Fortes, tal como Ozanam em *Cours de Mathématique*, coloca dois lemas, aos quais recorre para demonstrar alguns resultados. Estes determinam que, se quatro grandezas forem proporcionais, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos e vice-versa. Na *Lógica* são apresentados, no seguimento da Proposição XVI, que é identificada

<sup>106</sup> De acordo com os dois autores, esta proposição corresponde à nona proposição do Livro V dos *Elementos*.

como sendo a décima sexta proposição do Livro VI dos *Elementos*, dois corolários. O resultado do primeiro permite que, numa proporção, se troquem os termos homólogos, desde que os dois se mantenham meios ou extremos, permanecendo a proporção. O segundo exprime a possibilidade de se obter um dos extremos a partir da divisão do produto dos meios pelo outro extremo. Estes corolários, assim como a proposição que os antecede, são considerados por Azevedo Fortes / Lamy, como o fundamento da *Regra de Três*<sup>107</sup>, sendo muito utilizados em toda a Geometria e na Aritmética [Fortes 1744, Parte II, 155].

A Proposição V, apresentada anteriormente, poderá ser considerada um caso particular do primeiro corolário supramencionado: nas condições do Corolário I, numa proporção, se se trocar a ordem dos seus termos, de forma a que os dois mesmos termos sejam sempre ou os dois extremos ou os dois meios, a proporção persistirá; alternar os termos de uma proporção será pois, uma situação particular da troca dos termos, em que se mantêm os dois extremos.

O Capítulo III prossegue com mais resultados dispostos em proposições, corolários e algumas definições, reconhecendo-se a correspondência com Lamy, e continuando a verificar-se o recurso às operações aritméticas para as explicações e demonstrações dos mesmos.

No final do Capítulo III Lamy coloca algumas definições de Euclides e sete das onze proposições que constam do Livro V dos *Elementos*, e que apresentou neste capítulo. Lamy justifica este procedimento com o facto de estas proposições terem sido apresentados de forma diferente da original. Azevedo Fortes não coloca esta parte do seu trabalho.

O Capítulo IV, “Das Razões Compostas e suas propriedades”, não surge no “Index” dos capítulos que compõem a obra de Azevedo Fortes. No início deste capítulo surge a explicação dos conceitos de razão simples e composta. O primeiro conceito é explicado por Azevedo Fortes de forma menos pormenorizada do que Lamy faz na sua obra. No Livro V do seu manuscrito, Azevedo Fortes não chega a definir razão composta, indica “apenas” como obter o antecedente e o conseqüente de uma razão composta. Na *Lógica Geométrica*, apresenta este conceito enquanto definição numerada, a primeira do Capítulo IV. A preceder esta definição, explica o conceito de *razão simples*: é uma razão cujo expoente não é obtido a partir da multiplicação de dois ou mais expoentes de outras razões. *Razão composta* é assim uma razão cujo expoente se obtém a partir da multiplicação dos expoentes de duas ou mais razões [Fortes 1744, Parte II, 157].

---

<sup>107</sup> A *Regra de Três* é a atualmente designada *Regra de Três Simples*.

Seguem-se as definições de *razão duplicada* e *triplicada*, dadas de forma semelhante às que coloca no manuscrito, e uma série de corolários e teoremas relativos à aplicação das proporções a *planos* e *sólidos*.

No Livro V do manuscrito, Azevedo Fortes considerou como oitava definição a relação existente entre os termos de uma progressão geométrica (explicada como sendo uma proporção contínua) e os conceitos de razão duplicada e triplicada. No Capítulo IV do Livro III da *Lógica Geométrica*, esta relação é colocada sob a forma de teorema, o Teorema VI.

Saliente-se que o último teorema apresentado – o Teorema XI – não se encontra identificado por Azevedo Fortes como sendo a proposição XXIII do Livro V de Euclides, identificação feita por Lamy.

Enquanto Azevedo Fortes termina o Livro III com o Capítulo IV, Lamy apresenta uma quinta “Section”, que denomina de *Comparação de Razões*<sup>108</sup>. Nesta “Section”, coloca algumas considerações sobre a desigualdade de razões e fornece um conjunto de onze proposições e um corolário sobre comparação de razões, neste âmbito.

O Livro IV da *Lógica Geométrica* contém um conjunto de resultados, distribuídos por definições, teoremas, corolários e problemas, alguns dos quais representam proposições dos *Elementos*, explicitamente identificados.

Comparando as obras de Azevedo Fortes e de Lamy, neste quarto livro existem mais diferenças do que no livro anterior, nomeadamente a não colocação, por parte de Azevedo Fortes, de alguns resultados e a continuidade de uma apresentação menos pormenorizada de algumas demonstrações. Enquanto o “Livre Quatrième” tem seis “Sections”, o Livro IV apresenta cinco capítulos. Esta diferença deve-se ao facto de Azevedo Fortes não colocar o capítulo “De la commensurabilité et incommensurabilité des lignes & des surfaces”, que representa a “Section V” de Lamy.

Tal como referido anteriormente, ao longo dos trabalhos destes dois autores é feita uma correspondência entre os resultados apresentados e algumas proposições dos *Elementos*. Assim, e em relação ao Livro III, no Capítulo II as doze primeiras proposições apresentadas são identificadas como as dozes primeiras proposições do Livro II dos *Elementos*, livro que é dedicado à Geometria Algébrica. No Capítulo III as proposições mencionadas são, essencialmente do Livro V de Euclides, excetuando as proposições décima sexta e décima

---

<sup>108</sup> *De la comparaison des raisons*. [Lamy 1731, 177]

sétima, que são do Livro VI, sendo uma delas, a décima sexta, relacionada por Azevedo Fortes com duas proposições diferentes.

Relativamente ao Livro IV da *Lógica Geométrica*, as referências a proposições dos *Elementos* surgem em todos os capítulos exceto no primeiro. Na sua maioria as proposições de Euclides são do Livro VI. A exceção surge nos Capítulos IV, onde seis em dezoito são de outros livros dos *Elementos* (I, II, III e XII), e no V, onde as proposições de Euclides são do Livro IV.

A seguir apresentam-se duas tabelas com as correspondências verificadas, a primeira, Tabela I, é a relativa ao Livro III e a segunda, Tabela II, diz respeito ao Livro IV.

Tabela I

| LÓGICA GEOMÉTRICA – LIVRO III |                              | ELEMENTOS |
|-------------------------------|------------------------------|-----------|
| Capítulo II                   | Proposição I                 | II, 1     |
|                               | Proposição II                | II, 2     |
|                               | Proposição III               | II, 3     |
|                               | Proposição IV                | II, 4     |
|                               | Proposição V                 | II, 5     |
|                               | Proposição VI                | II, 6     |
|                               | Proposição VII               | II, 7     |
|                               | Proposição VIII              | II, 8     |
|                               | Proposição IX                | II, 9     |
|                               | Proposição X                 | II, 10    |
|                               | Proposição XI                | II, 11    |
|                               | Proposição XII               | II, 12    |
| Capítulo III                  | Proposição V                 | V, 16     |
|                               | Proposição VIII              | V, 18     |
|                               | Proposição IX                | V, 12     |
|                               | Proposição X                 | V, 17     |
|                               | Proposição XI                | V, 9      |
|                               | Proposição XII               | V, 11     |
|                               | Proposição XV                | VI, 16    |
|                               | Corolário (da Proposição XV) | VI, 17    |
|                               | Proposição XVI               | VI, 16    |
|                               | Proposição XVII              | V, 22     |
|                               | Proposição XVIII             | V, 24     |

Tabela II

| LÓGICA GEOMÉTRICA - LIVRO IV |                               | ELEMENTOS |
|------------------------------|-------------------------------|-----------|
| Capítulo II                  | Teorema I                     | VI, 4     |
|                              | Teorema II                    | VI, 21    |
|                              | Teorema III                   | VI, 5     |
|                              | Teorema IV                    | VI, 6     |
|                              | Teorema V                     | VI, 7     |
|                              | Teorema VI                    | VI, 32    |
|                              | Teorema VII                   | VI, 2     |
|                              | Teorema VIII                  | VI, 3     |
|                              | Problema I                    | VI, 10    |
|                              | Problema III                  | VI, 9     |
|                              | Problema IV                   | VI, 11    |
|                              | Problema V                    | VI, 12    |
|                              | Problema VII                  | VI, 18    |
|                              | Lema I                        | VI, 8     |
|                              | Problema VIII                 | VI, 13    |
|                              | Problema X                    | VI, 30    |
| Capítulo III                 | Teorema V                     | VI, 33    |
| Capítulo IV                  | Teorema I                     | VI, 24    |
|                              | Teorema II                    | VI, 26    |
|                              | Corolário (do Teorema III)    | II, 11    |
|                              | Teorema IV                    | III, 35   |
|                              | Teorema V                     | III, 36   |
|                              | Teorema VI                    | III, 37   |
|                              | Teorema XI                    | VI, 19    |
|                              | Corolário (do Teorema XII)    | VI, 22    |
|                              | Teorema XIII                  | I, 47     |
|                              | Teorema XIV                   | VI, 23    |
|                              | Corolário I (do Teorema XIV)  | VI, 14    |
|                              | Corolário II (do Teorema XIV) | VI, 15    |
|                              | Problema II                   | VI, 18    |
|                              | Problema III                  | VI, 25    |
|                              | Teorema XVI                   | VI, 20    |
|                              | Teorema XVII                  | XII, 1    |
|                              | Corolário (do Teorema XVII)   | XII, 2    |
|                              | Teorema XVIII                 | VI, 27    |
| Capítulo V                   | Corolário (do Teorema I)      | IV, 15    |
|                              | Lema I e Teorema II           | IV, 10    |
|                              | Problema I                    | IV, 12    |
|                              | Problema II                   | IV, 13    |
|                              | Problema III                  | IV, 14    |

Enquanto no Livro III são apresentados, entre outros, os conceitos relativos às razões e proporções e respectivas propriedades, aplicadas a grandezas em geral, no Livro IV é feita a aplicação desses resultados essencialmente aos planos e aos sólidos, isto é, a figuras planas (poligonais e não poligonais, como é o caso do Capítulo V dedicado ao círculo) e tridimensionais.

De uma forma genérica, no Capítulo II é feita a aplicação das razões e proporções aos triângulos. Os resultados estão organizados num conjunto de definições, teoremas e problemas.

No Capítulo III é referida a definição de figuras semelhantes, e são apresentados cinco teoremas e um corolário relativos a propriedades de figuras semelhantes, nomeadamente, a relação existente, em figuras semelhantes, entre a medida dos lados e os respetivos perímetros, e alguns resultados relativos a círculos.

No Capítulo IV são estudadas propriedades relativas a figuras planas, recorrendo à teoria de proporções. Neste Capítulo Azevedo Fortes não coloca vários resultados que surgem no análogo de Lamy, inclusive alguns que estão identificados com proposições dos *Elementos*. Ainda neste capítulo surge, identificado como Teorema XIII por Azevedo Fortes, o resultado presente nos *Elementos* de Euclides como a Proposição 47.<sup>a</sup> do Livro I, que estabelece o que atualmente designamos por Teorema de Pitágoras. A demonstração deste resultado é feita recorrendo a proporções [Fortes 1744, Parte II, 196].

Por fim, o Capítulo V é dedicado a algumas propriedades dos círculos.

Tal como sucedeu no Livro III, no Livro IV Azevedo Fortes não colocou uma das “Sections” de Lamy, neste caso a “Section V”. Nesta parte, Lamy define grandezas comensuráveis e incommensuráveis, números quadrados e cúbicos, entre outros. Relaciona as razões com a comensurabilidade, e apresenta um conjunto de resultados sob a forma de teoremas e problemas. [Lamy 1731, 249-263]

A referência ao estudo das razões e proporções “em linhas, planos e sólidos”, subentende a aplicação desta teoria às medidas dos lados de uma figura (linhas, ou melhor, segmentos de reta), às áreas das figuras planas (qualquer figura plana, poligonal ou não, já que trata também de círculos) e aos volumes de sólidos, e relaciona entre si as diferentes propriedades.

Nos *Elementos* de Euclides assim como nas obras que lhe sucederam, quer se tratem de traduções/adaptações ou outras relativas a Geometria, não é feita a referência explícita a áreas e volumes de figuras. Exemplo disso é o Teorema XII, do Capítulo IV do Livro IV da *Lógica Geométrica*:

**Teorema XII:** Todas as figuras retilíneas semelhantes são entre si, como os quadrados dos seus lados homólogos. [Fortes 1744, Parte II, 195]

Em linguagem atual, este teorema determina que a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão entre as medidas de dois dos seus lados homólogos, tomados na mesma ordem.

### 3.2.2.2. Parte III: Lógica Analítica

Na *Lógica Analítica*, Azevedo Fortes não refere qual o autor ou autores que seguiu. Contudo, efetuando uma comparação entre a *Lógica Analítica* e a obra *Éléments des Mathématiques*, de Lamy, verifica-se que algumas partes da primeira obra são traduções adaptadas / resumos da segunda.

A *Lógica Analítica* é constituída por seis livros, organizados por capítulos. A obra que terá servido de principal fonte para Azevedo Fortes elaborar a Parte III, não está organizada desta forma. Lamy organizou *Éléments des Mathématiques*<sup>109</sup> em sete livros, cada um deles dividido em secções que se encontram por sua vez divididas por capítulos. Poderá dizer-se que Azevedo Fortes adotou a mesma estrutura nas três partes; não seria correto numa mesma obra colocar estruturas diferentes...

Elias Sebastião Poppe<sup>110</sup> e José Fernandes Pinto Alpoim<sup>111</sup>, foram alunos da Academia Militar na década de 1720 [Ribeiro 2009, 92, 95], tendo possivelmente tido como professor de alguma(s) cadeiras, Azevedo Fortes e, a partir de 1727, em substituição deste, Filipe Rodrigues

---

<sup>109</sup> As citações a esta obra referem-se à edição de 1692.

<sup>110</sup> “Foi aprendiz de arquitetura civil das obras dos paços reais de Lisboa, nomeado por certa [carta] de D. João V, de 23-X-1749. Em agosto de 1750 foi nomeado medidor das obras dos paços da Ribeira e dos outros paços reais. Sendo capitão de infantaria com exercício de engenheiro, D. José nomeou-o arquiteto supranumerário dos paços reais.” [Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, vol. 22, p. 478]

<sup>111</sup> “Militar português, nasceu nos finais do século XVII e faleceu em 1770. Fez parte da 2.ª Brigada Demarcadora, como seu chefe, quando se iniciaram as operações de execução do Tratado de Limites de 13 de janeiro de 1750, celebrado entre Portugal e Espanha. Em 1763, já brigadeiro dos reais exércitos, fez parte da Junta de Governo a que ficaram entregues as capitanias do Rio de Janeiro e Minas Gerais, por morte de Gomes Freire de Andrade (Conde de Bobadela). Formado em Matemáticas, militar na arma de Artilharia, foi lente de aula de Fortificação, criada no Rio de Janeiro em 1669. Foi também um dos militares mais instruídos do seu tempo. Escreveu: *Exame de Artilheiros que compreende Aritmética, Geometria, e Artilharia, com quatro apêndices: o primeiro de algumas perguntas uteis; o segundo do método de contar as balas, e bombas nas pilhas; o terceiro das batarias; e o quarto dos fogos artificiais (...); Exame de bombeiros, que compreende dez tratados (...)*” [Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, vol. 2, p. 132]

de Oliveira<sup>112</sup> [Ribeiro 2009, 168]. O primeiro é autor de um manuscrito realizado entre 1732 e 1734, enquanto o segundo tem como principal obra *Exame de Artilheiros*, em 1744.

De acordo com Ribeiro<sup>113</sup>, existem mais semelhanças entre o manuscrito de Poppe e a obra de Lamy do que entre esta última e a *Lógica Analítica* de Azevedo Fortes. Para explicar isto, Ribeiro coloca a hipótese de Azevedo Fortes ter ditado diretamente na aula, os conteúdos a partir da obra do francês, efetuando ao mesmo tempo a tradução. A partir daí, os alunos organizariam os seus apontamentos. Posteriormente, Felipe Rodrigues de Oliveira, que foi seu aluno na Academia, teria usado esses apontamentos para ditar aos seus alunos. Quando Azevedo Fortes escreveu a *Lógica*, tê-lo-ia feito a partir do que tinha escrito, contudo, a sua experiência tê-lo-á levado a não colocar tudo o que está presente na obra de Lamy e a reorganizá-la de forma diferente. [Ribeiro 2009, 150-169]

Azevedo Fortes inicia o Capítulo I do Livro I da *Lógica Analítica*, que trata “Da grandeza em geral”, explicando o conceito de grandeza. Para este autor, grandeza “é tudo aquilo que pode crescer, ou diminuir, e assim tem por objeto todas as coisas criadas, não só as corpóreas, mas também as espirituais; porque podemos considerar os espíritos criados em maior e menor número” [Fortes 1744, Parte III, 1]. Esta explicação é uma tradução adaptada da ideia de Lamy presente na obra *Éléments des Mathématiques* [Lamy 1692, 3].

De seguida, Azevedo Fortes explica em que partes se dividia a Matemática na altura: Matemática Pura e Matemática Mista. A Matemática Pura contém a Aritmética, que é considerada a ciência dos números, e a Geometria, que é a ciência da medida dos corpos. A Matemática Mista (atualmente designada de Matemática Aplicada) é a que se destina ao conhecimento das coisas naturais e que os filósofos denominam de Física, tendo como partes principais a Cosmografia, a Geografia, a Hidrografia ou Náutica, a Mecânica, a Pirotecnica, a Estática, a Ótica, a Catóptrica, a Dióptrica, a Pirotecnica ou Artilharia e Arquitetura Militar e Civil. [Fortes 1744, Parte III, 2]

---

<sup>112</sup> “Militar do século XVIII, nascido em 1700, ignorando-se a data da sua morte. Aplicou-se muito ao estudo das Matemáticas na Academia Militar da Corte e foi um aluno tão distinto que chegou a substituir, por vezes, o lente proprietário Manoel de Azevedo Fortes, sargento-mor de batalha e engenheiro-mor do reino. Deixou as seguintes obras manuscritas: *Elementos de Euclides*, etc.; *Tratado da Pirotecnica*, etc.; *Elementos de Matemática*, etc.; *Tratado de Trigonometria*, etc.” [Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, vol. 19, p. 365]

<sup>113</sup> Dulcyene Ribeiro elaborou duas Teses, uma de Mestrado e outra de Doutorado, dedicadas a Azevedo Fortes. Na primeira estudou a obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* [Ribeiro 2003], enquanto na segunda elaborou um estudo sobre a formação dos engenheiros militares no século XVIII em Portugal e no Brasil. [Ribeiro 2009]

Azevedo Fortes informa que a Matemática abordada na sua obra é a Aritmética Pura, por ser a que está relacionada com “o conhecimento inteligível de todas as coisas criadas”. Esta é pois uma Aritmética superior e simbólica e serve-se de letras em vez de algarismos. Azevedo Fortes refere que esta ciência, designada por muitos de Álgebra, facilita e abrevia as operações e resoluções de problemas e teoremas. [Fortes 1744, Parte III, 2]

Azevedo Fortes prossegue o Capítulo I com uma série de considerações sobre as grandezas e apresenta, entre outros, os conceitos de grandeza *contínua* e *discreta*. A que tem as suas partes juntas, diz-se contínua, a que tem as partes separadas diz-se discreta. A quantidade discreta são os números e a ciência que prossegue o seu estudo é a Aritmética. [Fortes 1744, Parte III, 2-3]

No Capítulo II Azevedo Fortes refere os sinais [símbolos] que utiliza para realizar as operações entre as grandezas algébricas, contudo, não refere o que são grandezas algébricas.

Nos restantes capítulos explica como proceder para operar com as grandezas complexas. Note-se que na *Lógica Geométrica* grandeza complexa foi definida como sendo uma grandeza composta de uma ou mais grandezas [Fortes 1744, Parte II, 125].

No Livro II é abordada a temática das potências e, ao longo dos sete capítulos que o compõem, é explicado como comparar potências, determinar a raiz quadrada e a raiz cúbica, entre outros procedimentos.

O Livro III, organizado em seis capítulos, trata da temática das razões. O Capítulo I deste Livro III é uma adaptação/resumo da “Section Première” do “Livre Troisième” da obra *Éléments des Mathématiques*. A parte inicial é semelhante nas duas obras, não se tratando de uma tradução de Azevedo Fortes como acontece noutras situações. Azevedo Fortes não coloca todos os conceitos/resultados que Lamy expõe, e naqueles que apresenta, fá-lo de forma mais sintética.

Neste primeiro capítulo, expõe os conceitos de razão e os dois tipos de razão que existem e permitem comparar grandezas, que explicou na *Lógica Geométrica*. Para além disso, explana os conceitos de parte alíquota e parte alíquanta, referindo que 3 é parte alíquota de 30, uma vez que 3 repetido dez vezes, iguala 30. Por outro lado, 3 é parte alíquanta de 20, dado que repetido seis vezes não igual 20 e, repetido sete vezes, excede 20. [Fortes 1744, Parte III, 50]

Apesar da definição de parte alíquota surgir apenas neste capítulo, Azevedo Fortes utiliza a palavra alíquota na *Lógica Geométrica*, quando define a divisão de uma circunferência em graus,

considerando que este “número” foi utilizado pelos géometras “por ter mais partes alíquotas”. [Fortes 1744, Parte II, 16]

Ainda no Capítulo I, Azevedo Fortes considera que a palavra razão não foi bem explicada pelos géometras. Recorde-se que, no seu manuscrito, o português não fez nenhuma consideração acerca do conceito de razão, tendo-se limitado a expor os conceitos relativos a esta temática a partir da obra de Ozanam. Na *Lógica Geométrica* também não foram produzidos quaisquer comentários a este respeito.

Será que a exposição desta [sua] opinião se deve ao facto de, segundo o mesmo, esta parte da sua obra não seguir nenhum autor e ser resultado de estudos e do “seu próprio” trabalho?

A crítica do português vai de encontro às efetuadas por outros autores e versa sobre a natureza de uma razão. Deste modo, Azevedo Fortes expõe que definir razão entre duas grandezas apenas como “o modo de uma conter ou estar contida na outra”, não é suficiente. Através de exemplos, refere, aludindo a um autor moderno, cujo nome não menciona, que a razão é uma grandeza, ou quantidade, não absoluta, mas relativa, e por ser deste género é possível efetuar com ela as operações que se realizam com as grandezas absolutas.

Prossegue o raciocínio referindo que uma proporção é o que resulta da comparação de duas razões. [Fortes 1744, Parte III, 50-51]

Depois desta exposição, Azevedo Fortes associa às razões os números. Esta associação é justificada pelo autor através da ideia de que os números inteiros representam as grandezas absolutas e os números quebrados as grandezas relativas. Atendendo a que razão é uma quantidade relativa, pode ser-lhe associado tudo o que diz respeito a estas quantidades. [Fortes 1744, Parte III, 51]

A terminar o capítulo, Azevedo Fortes afirma a necessidade das grandezas que se comparam serem do mesmo tipo. Além disso, a comparação é feita em relação à quantidade e não à qualidade das grandezas. O português refere a ideia de que a razão considerada pelos géometras é a geométrica, e não a aritmética, tal como a proporção. [Fortes 1744, Parte III, 52]

No Capítulo II são expostos os conceitos de razão geométrica, termos de uma razão, razão de maior desigualdade, razão composta, razão duplicada e triplicada, números quadrados e número cúbicos, entre outros, que já tinham sido definidos no Livro III da Parte II.

Tal como sucedeu no seu manuscrito, Azevedo Fortes distingue razão de igualdade de igualdade de razões [Fortes 1744, Parte III, 54].

No Capítulo III apresenta as propriedades das razões aritméticas, apesar de não serem estas as que trata no seu trabalho. [Fortes 1744, Parte III, 56-57]

As correspondências entre os conteúdos da *Lógica Analítica* e de *Éléments des Mathématiques*, são mais evidentes no Capítulo IV (do Livro III) da Parte III. Este capítulo aborda as propriedades das razões e das proporções geométricas e corresponde ao Capítulo IV da “Section Troisième” do “Livre Troisième” de Lamy.

Azevedo Fortes volta a expor que quando é feita menção aos termos razão e proporção, estes se referem a razões e proporções geométricas. Reforça a ideia de que as razões aritméticas não são verdadeiras razões e sim *diferenças*. [Fortes 1744, Parte III, 58]

No início do Capítulo IV, é mencionado que a forma de saber se duas razões são iguais é através da divisão das duas grandezas que constituem cada uma das razões. Se os quocientes forem iguais, então as razões serão iguais. [Fortes 1744, Parte III, 58]

Seguem-se um conjunto de axiomas, lemas, corolários e proposições/teoremas.

Os três axiomas apresentados correspondem aos três axiomas que Lamy coloca no seu trabalho. Salienta-se que a exposição que surge no seguimento dos axiomas, não é exatamente igual, verificando-se que a do francês é mais extensa.

Azevedo Fortes refere-se apenas à utilização de letras do alfabeto para representar grandezas, independentemente de se tratar de razões de número a número ou surdas.<sup>114</sup> Note-se que este tipo de razões é definido no Capítulo III, da *Lógica Geométrica* (Definição III).

O primeiro lema do Capítulo IV determina que o maior termo de uma razão pode ser obtido através da multiplicação do menor termo pelo expoente da divisão do maior pelo menor. Na justificação deste resultado Azevedo Fortes comete um “lapso”. Este refere:

“Seja  $B$  o maior termo de uma razão e  $D$  o menor. Dividindo  $D$  por  $B$ , o quociente  $Q$  multiplicado por  $D$ , é  $QD$  [e é] igual à grandeza  $B$ , e é o que se queria mostrar.” [Fortes 1744, Parte III, 59]

Na exposição anterior, em vez de escrever “Dividindo  $D$  por  $B$ ”, Azevedo Fortes deveria ter escrito “Dividindo  $B$  por  $D$ ”.

---

<sup>114</sup> Apesar de serem utilizadas as mesmas letras, Azevedo Fortes utiliza letras maiúsculas enquanto Lamy coloca letras minúsculas.

Na demonstração deste lema efetuada na sua obra, Lamy identifica  $B$  como o menor termo e  $D$  como o maior, expondo a ideia que Azevedo Fortes apresenta. [Lamy 1692, 187].

Ao lema anterior sucedem-se seis proposições, designadas por teoremas nos dois autores, e alguns corolários, relativos às propriedades das razões e proporções. Verifica-se uma correspondência exata entre os resultados nas duas obras. Para além disso, uma análise comparativa entre a *Lógica Analítica*, os *Elementos* de Euclides e a *Lógica Geométrica*, permite estabelecer algumas semelhanças. Exemplos disso são as Proposições I<sup>115</sup>, II<sup>116</sup>, III<sup>117</sup> e o Corolário<sup>118</sup> da Proposição IV, da *Lógica Analítica*. Estes estabelecem os mesmos resultados que as Proposições 9.<sup>a</sup>, 11.<sup>a</sup>, 18.<sup>a</sup> e 17.<sup>a</sup>, do Livro V dos *Elementos*, respetivamente. Além disso, as Proposições VI, VIII, XIII e XIV, do Capítulo III, do Livro III da *Lógica Geométrica* são reescritas por Azevedo Fortes, na *Lógica Analítica*, e desta vez são designadas de forma diferente. A Tabela III mostra essa correspondência:

Tabela III

| LÓGICA GEOMÉTRICA – LIVRO III, CAPÍTULO III | LÓGICA ANALÍTICA – LIVRO III, CAPÍTULO IV |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Proposição VI                               | Proposição III – Teorema                  |
| Proposição VII                              | Proposição IV – Teorema                   |
| Proposição VIII                             | Corolário da Proposição III               |
| Proposição X                                | Corolário da Proposição IV                |
| Proposição XIII                             | Proposição V – Teorema                    |
| Proposição XIV                              | Proposição VI – Teorema                   |

O Capítulo V é essencialmente uma tradução do “Chapitre V” da “Section Troisième” do “Livre Troisième”. Assim, Azevedo Fortes inicia este capítulo da mesma forma que Lamy, referindo que neste é apresentado um modelo que permite determinar “por meio de algumas coisas sabidas, as outras que ignoramos, pela razão que umas podem ter com outras (...)” [Fortes 1744, Parte III, 64].

<sup>115</sup> **Proposição I:** Duas grandezas são iguais entre si, se elas têm a mesma razão a uma terceira. [Fortes 1744, Parte III, 60]

<sup>116</sup> **Proposição II:** Duas razões iguais a uma terceira razão, são iguais entre si. [Fortes 1744, Parte III, 60]

<sup>117</sup> **Proposição III:** Duas grandezas conservam entre si a mesma razão, ainda que se junte a uma e a outra, outras quaisquer grandezas, com condição que, o que se juntar à primeira tenha para o que se juntar à segunda a mesma razão que tiver a primeira para a segunda. [Fortes 1744, Parte III, 61]

<sup>118</sup> **Corolário:** Quando duas razões são iguais, o antecedente de uma, e mais o seu consequente, é para este mesmo consequente, como o antecedente da outra, mais o seu consequente, é para o segundo consequente. Isto é, se  $B : D :: F : G$ , será também  $B + D : D :: F + G : G$ . [Fortes 1744, Parte III, 62]

A este respeito, refere a primeira proposição que é demonstrada neste capítulo – a Proposição VII – que considera ser o fundamento das proporções geométricas, e que se apresenta a seguir.

**Proposição VII:** De quatro grandezas em proporção geométrica, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. [Fortes 1744, Parte III, 65]

O resultado exposto nesta sétima proposição, designada neste capítulo por teorema, foi já apresentado e demonstrado por Azevedo Fortes no manuscrito e também na *Lógica Geométrica*, no Capítulo III, do Livro III, como a Proposição XV<sup>119</sup>. Acresce ainda que esta corresponde à Proposição 16.<sup>a</sup> do Livro VI dos *Elementos* de Euclides.

Na Proposição VII (Parte III), Azevedo Fortes refere que as grandezas se encontram em proporção geométrica, enquanto na Proposição XV (Parte II) menciona apenas que as grandezas são proporcionais. No entanto, no início do capítulo da *Lógica Geométrica* em que se insere a referida proposição, Azevedo Fortes expõe que a razão tratada nesse capítulo é a geométrica, pelo que esta informação está subjacente em todos os resultados do capítulo, em particular na proposição referida.

Enquanto na *Lógica Geométrica* a demonstração da proposição é feita recorrendo à definição de expoente de uma razão, na *Lógica Analítica*, são apresentadas duas demonstrações diferentes.

A primeira é idêntica à realizada na *Lógica Geométrica*, alterando-se essencialmente as letras utilizadas. Nesta demonstração Azevedo Fortes recorre à multiplicação, o que compromete a generalização deste resultado para grandezas em geral.

Na demonstração da proposição apresentada na Parte III deteta-se, uma vez mais, uma falha num dos passos indicados por Azevedo Fortes, que consiste na troca de letras.

A outra demonstração dada também contém um erro, já que em vez de se referir ao *antecedente* escreve erradamente *consequente*, falha que Lamy não comete. Esta demonstração recorre também a propriedades algébricas.

---

<sup>119</sup> **Proposição XV:** Quando quatro grandezas são proporcionais, o produto ou retângulo dos extremos é igual ao produto dos meios. [Fortes 1744, Parte II, 153]

O corolário que antecede a Proposição VIII está escrito de forma diferente por Azevedo Fortes e por Lamy. Assim, Lamy refere que quando três grandezas estão em proporção contínua, o termo do meio multiplicado por ele próprio, isto é, o quadrado do termo do meio, é igual ao produto dos dois extremos, ou retângulo feito dos dois extremos<sup>120</sup>. Por seu lado, Azevedo Fortes expõe desta forma o Corolário:

**Corolário:** Três grandezas, sendo em proporção geométrica, o quadrado do termo do meio, é igual ao retângulo feito dos dois extremos. [Fortes 1744, Parte III, 66]

Azevedo Fortes em vez de considerar que as grandezas se encontram em proporção *contínua*, refere proporção *geométrica*. Poderá esta diferença ser mais um lapso de Azevedo Fortes?

Nas proposições seguintes são apresentados mais alguns resultados sobre as propriedades das razões e das proporções, nomeadamente, nas mudanças que é possível fazer na ordem dos termos de uma proporção, não a alterando.

Na demonstração do Teorema X volta a encontrar-se uma situação de erro num dos passos, situação que não ocorre no correspondente de Lamy. [Fortes 1744, Parte III, 68], [Lamy 1692, 197]

Para além de algumas proposições serem apresentadas como teoremas, existem outras que são consideradas problemas. Tal como no caso dos teoremas, Lamy também numera os problemas. A Proposição XI é exemplo disso e estabelece como determinar o quarto termo de uma proporção, conhecidos os outros. Logo a seguir, são apresentadas as regras “de três direta e inversa”, cada uma delas acompanhada de um exemplo de aplicação. Enquanto Azevedo Fortes utiliza a palavra *exemplo*, Lamy utiliza a palavra *questão*. Antes de explicarem a regra, os autores referem em que situações esta se pode aplicar.

Para finalizar o capítulo, são introduzidas as Regras de *Companhia* e de *Falsa Posição*. A metodologia utilizada é semelhante à da Regra de Três, e também nestas os exemplos/questões apresentados são semelhantes, a diferença reside na adaptação que Azevedo Fortes faz à unidade monetária utilizada.

---

<sup>120</sup> **Corollaire:** *Trois grandeurs étant en proportion continue, le terme moyen multiplié par luy même ou le quarré de ce terme, est égal au produit ou plan fait des deux extrêmes.* [Lamy 1692, 194]

Relativamente ao Capítulo VI da *Lógica Analítica*, este corresponde ao “Chapitre VI” da “Section Troisième” do “Livre Troisième” de *Éléments des Mathématiques*. Este capítulo trata das progressões geométricas. A primeira proposição é idêntica nas duas obras e estabelece que numa progressão geométrica, o produto de dois termos, igualmente distantes dos extremos, é igual ao produto dos meios [Fortes 1744, Parte III, 76]. A diferença, entre esta e a proposição correspondente de Lamy, encontra-se na parte final, em que o francês refere que o produto dos dois termos é igual ao produto dos extremos [Lamy 1692, 205]. Ao contrário de Lamy, Azevedo Fortes não coloca um corolário desta proposição.

As proposições seguintes estabelecem as propriedades das progressões geométricas. Algumas são denominadas de teoremas outras de problemas. Ao longo do capítulo, são explicadas as formas de determinar o termo geral de uma progressão geométrica; encontrar um termo de uma progressão geométrica, dado o primeiro termo e a razão da progressão, entre outros. São apresentados exemplos de aplicação das diferentes situações. Verifica-se uma correspondência ao nível das proposições, corolários e exemplos apresentados nos dois trabalhos mencionados. A única diferença surge na colocação por parte de Lamy, em “Avertissement”, da explicação dos conceitos de progressão múltipla e submúltipla. Deste modo, Lamy define progressão múltipla como sendo aquela cujo segundo termo é maior do que o primeiro, e submúltipla quando o segundo termo é menor do que o primeiro, dando como exemplo a progressão  $\ddots 16 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$ , que de acordo com o autor, pode ir até ao infinito. O francês conjectura sobre a divisibilidade das grandezas, e a relação deste tipo de progressões com a solução do Sofisma/Paradoxo de Zenão. [Lamy 1692, 216]

O Livro IV é iniciado pela referência de que neste são abordadas as razões “em si mesmas”, sendo estas tratadas sem estarem associadas a grandezas. Desta forma, as razões são equiparadas a números, o que tem como consequência a utilização das operações da Aritmética nas razões, com a mesma facilidade com que se efetuam em números. Tal como os números, as razões podem ser compostas de outras razões, sendo obtidas, por exemplo, da soma ou multiplicação de outras. [Fortes 1744, Parte III, 87, 88]

De seguida, é apresentado um conjunto de definições relativas a razões, entre as quais, as definições de razão composta, duplicada e triplicada. Estas definições surgem no Capítulo IV, do Livro III da Parte II desta obra. Enquanto na Parte II se refere que as razões compostas são aquelas cujos expoentes se obtêm a partir da multiplicação de outras razões, na Parte III é feita

referência direta à multiplicação das razões como forma de obter uma razão composta. Na Parte III surge uma definição nova, a de razões *componentes*, como sendo as que se multiplicam para dar origem às razões compostas. [Fortes 1744, Parte III, 89]

Novamente neste livro é feita a advertência para a diferença entre razão dupla e razão duplicada; tripla e triplicada.

Azevedo Fortes prossegue referindo que é possível reduzir as razões de forma a possibilitar realizar entre elas todas as operações da Aritmética. O português explica como reduzir duas razões ao mesmo conseqüente. Em linguagem atual esta explicação é equivalente a reduzir duas frações ao mesmo denominador, sem que esse denominador seja necessariamente o mínimo múltiplo comum entre os dois, já que Azevedo Fortes refere que se deverá multiplicar os dois termos da primeira razão pelo conseqüente da segunda e do mesmo modo, multiplicar os dois termos da segunda pelo conseqüente da primeira.

Azevedo Fortes utiliza as razões  $B.C$  e  $F.G$ . Pretende-se transformar estas razões noutras com o mesmo conseqüente [denominador]. Assim, multiplica-se  $B$  e  $C$  por  $G$ , e  $F$  e  $G$  por  $C$ . O esquema utilizado por Azevedo Fortes é análogo ao seguinte [Fortes 1744, Parte III, 91]:

$$\begin{array}{l} B . C :: B G ) \\ F . G :: C F ) \end{array} . C G$$

Este processo permite comparar grandezas, já que a cada uma se associa uma razão e desta forma, às duas grandezas reduzidas a uma mesma medida comum (em linguagem atual, reduzir duas frações ao mesmo denominador), podem ser aplicadas as operações da Aritmética.

Azevedo Fortes expõe a ideia de que este procedimento pode ser realizado quer se tratem de razões de número a número quer se tratem de razões surdas. No primeiro caso, os expoentes das razões são *números* e as operações serão efetuadas com estes. No segundo caso, é necessário reduzir as razões a um mesmo conseqüente, e considerar os “novos” antecedentes destas razões como os seus expoentes. As operações são realizadas com esses antecedentes da mesma forma que se realizam as operações entre as razões de número a número.

Azevedo Fortes explica que as razões de número a número podem ser consideradas como tendo como conseqüente a unidade, generalizando desta forma as operações entre razões. Uma

vez mais se verifica a “aritimetização” das razões. Nesta situação, esta aritimetização não limita o conceito de razão uma vez que considera as razões surdas, logo as grandezas incomensuráveis.

Os resultados que Azevedo Fortes coloca no Capítulo I são apresentados por Lamy nos primeiros quatro capítulos da “Section Première” do “Livre Quatrième”.

No Capítulo II são expostos alguns resultados relativos às razões nas progressões geométricas.

O Capítulo III aborda a *Regra de Três* e de *Companhias Compostas*. Relativamente à Regra de Três, Azevedo Fortes apresenta um exemplo de aplicação e explica o procedimento para, numa proporção, determinar o quarto termo,  $X$ , referindo que “para acharmos o valor de  $X$ , faremos a regra direta, multiplicando o terceiro termo pelo segundo e dividindo o produto pelo primeiro” [Fortes 1744, Parte III, 96]. Este capítulo corresponde ao Capítulo VI da obra de Lamy [Lamy 1692, 230].

O Capítulo IV intitulado “Das razões, que têm entre si as grandezas de muitas dimensões” corresponde à “Section Seconde” do “Livre Quatrième” de Lamy. Neste são apresentados um conjunto de resultados, organizados em proposições e teoremas, sobre as razões aplicadas às grandezas. Alguns surgem sob a forma de problema e contêm a explicação de como proceder em determinadas situações, nomeadamente, como determinar um meio proporcional entre duas grandezas dadas: Proposição XIII [Fortes 1744, Parte III, 104].

O Livro V da *Lógica Analítica* tem como título: “Dos Quebrados e das Operações da Aritmética sobre eles considerados como razões”. Este livro contém traduções de duas obras de Lamy. Assim, os sete primeiros capítulos correspondem ao “Livre Cinquième” da obra *Éléments des Mathématiques* enquanto o oitavo capítulo é uma tradução incompleta da “Section V”, do “Livre Quatrième” da obra *Éléments de Géométrie*.

A Tabela IV resume a correspondência entre as obras referidas, no que diz respeito ao Livro V.

Tabela IV

| LAMY                       |                                                                                                                                             |                                                                                                                                               |              | AZEVEDO FORTES |                                                                                               |                  |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| ÉLÉMENTS DES MATHÉMATIQUES | Livre Cinquième<br>(Des fractions & des Opérations Arithmétiques sur les Fractions & sur les Raisons)                                       | Section Première<br>(Les fractions sont des Raisons.<br>Préparations pour faire les Opérations de L'Arithmétique sur les Fractions & Raisons) | Chapitre I   | Capítulo I     | Livre V<br>(Dos Quebrados e das Operações da Aritmética sobre eles, considerados como razões) | LÓGICA ANALÍTICA |
|                            |                                                                                                                                             |                                                                                                                                               | Chapitre II  | Capítulo II    |                                                                                               |                  |
|                            |                                                                                                                                             |                                                                                                                                               | Chapitre III | Capítulo III   |                                                                                               |                  |
|                            |                                                                                                                                             | Section Seconde<br>(Opérations Arithmétiques sur les Fractions & sur les Raisons)                                                             | Chapitre IV  | Capítulo IV    |                                                                                               |                  |
|                            |                                                                                                                                             |                                                                                                                                               | Chapitre I   | Capítulo V     |                                                                                               |                  |
|                            |                                                                                                                                             |                                                                                                                                               | Chapitre II  | Capítulo VI    |                                                                                               |                  |
| ÉLÉMENTS DE GEOMETRIE      | Livre Quatrième<br>(Des raisons & Proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtes & circuit, que de leurs surfaces) | Section Troisième<br>(Des différentes espèces de nombres rompus)                                                                              |              | Capítulo VII   |                                                                                               |                  |
|                            |                                                                                                                                             | Section V<br>(De la Commensurabilité ou Incommensurabilité des Lignes & des Surfaces)                                                         |              | Capítulo VIII  |                                                                                               |                  |

No “Chapitre Premier”, da “Section Première”, do “Livre Cinquième”, é apresentada uma explicação acerca das frações e das operações aritméticas sobre as frações e sobre as razões. No capítulo correspondente, Azevedo Fortes apresenta uma explicação semelhante, mas mais reduzida do que a de Lamy.

A palavra *fração* surge com o mesmo significado que número *quebrado*. [Fortes 1744, Parte III, 112]; [Lamy 1692, 247].

Enquanto Lamy utiliza a palavra “fraction” ao longo do capítulo, Azevedo Fortes utiliza em sua “substituição” *quebrado*, utilizando apenas o termo *fração* no início do capítulo.

Assim, Azevedo Fortes estabelece que os quebrados são razões, já que refere “os quebrados são os modos de expressar a razão que tem entre si duas ou mais grandezas ou números, e assim são razões” [Fortes 1744, Parte III, 111].<sup>121</sup>

Na *Lógica Geométrica* também é feita a associação entre razão e divisão; na *Lógica Analítica* a associação é mais evidente, como se pode ver a seguir.

<sup>121</sup> No “Chapitre Premier”, Lamy refere que uma fração é uma forma de exprimir uma razão, afirmando por isso que as frações são razões. [Lamy 1692, 247-248]

- LÓGICA GEOMÉTRICA

"O modo de conhecer o como uma grandeza está contida ou contém outra grandeza, é pela divisão, como por exemplo, a razão da linha A para a linha B conhece-se dividindo B por A, que se nota a modos de números quebrados, desta sorte,  $\frac{B}{A}$  ou  $\frac{A}{B}$  (...)"<sup>122</sup>

- LÓGICA ANALÍTICA

"As expressões, em que as frações, ou quebrados consistem, são muito naturais e muito próprias para expressar o que quiserem. A esta expressão  $\frac{5}{6}$  chama-se quebrado e denota que uma grandeza inteira foi partida, ou quebrada em 6 partes, ou que tem 6 partes, das quais lhe tomamos 5: esta expressão  $\frac{5}{6}$  é logo propriamente para notar uma razão; porque, como temos dito, razão é uma quantidade relativa, que exprime o modo com que uma grandeza contém, ou está contida em outra; o que se conhece pela divisão, e por tanto, o quociente da divisão de duas grandezas, é o expoente da sua razão; mas nós temos visto, que o sinal da divisão de um número por outro é, pondo um por cima, e outro por baixo de uma linha; e assim querendo dividir B por C, escreveremos  $\frac{B}{C}$ ; e o quociente de B, dividido por C é  $\frac{B}{C}$ , e nota a razão de B para C; pela mesma razão  $\frac{5}{6}$  é um sinal que mostra que 5 é dividido por 6, e juntamente o expoente da razão de 5 para 6".<sup>123</sup>

Pela primeira vez Azevedo Fortes refere-se às *frações* como sinónimo de *quebrados*. Explica em que consiste uma fração e associa-a à divisão de dois números.

A partir desta relação, é possível assumir para as razões todas as operações aritméticas que se efetuam com os números, estando-se perante mais uma aritmetização das razões.

Se os números considerados forem apenas os racionais, então esta aritmetização diminuiu a comparação entre duas grandezas, uma vez que só poderá ser aplicada às razões de *número a número*, isto é, às grandezas comensuráveis.

---

<sup>122</sup> [Fortes 1744, Parte II, 143]

<sup>123</sup> [Fortes 1744, Parte III, 112]

Se o conceito de número incluir os irracionais, então a associação entre razão e fração/quebrado, e consequentemente a associação da razão à divisão de números, generalizará a comparação de grandezas já que permite realizar as operações aritméticas com todo o tipo de grandezas, comensuráveis e incommensuráveis.

Perante isto, impõe-se conhecer qual é a concepção de número presente na obra, no sentido de aferir as consequências desta eventual “aritimetização”.

Os conceitos de *razão de número a número*, *razão surda* e *quebrado*, surgem ao longo da obra em várias situações.

As definições de *razão de número a número* e de *razão surda*, presentes na *Lógica Geométrica*, permitem concluir que os [números] irracionais não são considerados números, como se pode observar no esquema seguinte.

| Razão de número a número; razão surda                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Definição II: Uma razão cujo expoente se pode expressar por números, chama-se razão de número a número.</p> <p>Definição III: Uma razão cujo expoente não se pode expressar por algum número, chama-se surda ou irracional.</p> <p>[Fortes 1744, Parte II, 143]</p> | <div data-bbox="842 1025 1311 1279"> <p>Expoente da divisão:</p> <pre> graph TD     A[Expoente da divisão:] --&gt; B[é número]     A --&gt; C[não é número]     B --&gt; D[Razão de número a número]     C --&gt; E[Razão surda ou irracional]                     </pre> </div> |

Procedendo a uma análise das diversas situações em que é utilizado o termo *quebrado*, verifica-se que o seu significado não é claro no que diz respeito ao conceito de número.

No Capítulo II do Livro V da *Lógica Analítica*, onde se encontra um conjunto de definições relativas às frações e aos termos relacionados com as mesmas, surge a definição de quebrado [fração]<sup>124</sup>:

<sup>124</sup> Azevedo Fortes utiliza a palavra “Quebrado” para traduzir a palavra “Fraction”, utilizada por Lamy na sua obra.

**Definição I:** Definição [fração/quebrado]<sup>125</sup> é uma expressão, que declara a razão da parte de um número inteiro, que é dividido em tantas partes quantas se fizerem com este número inteiro. [Fortes 1744, Parte III, 113]

Desta definição apenas se pode inferir que um quebrado é um [número] racional, pelo que as razões baseadas neste tipo de fração apenas se reportam a grandezas comensuráveis.

Surge a dúvida quanto à natureza do quebrado: o termo *número* refere-se exclusivamente a um não inteiro, exclusivamente a um inteiro ou a qualquer número racional?

Para além de esta definição não ser clara, existem situações ao longo da obra reveladoras de alguma incoerência na utilização do conceito de quebrado.

Apresentam-se de seguida algumas dessas situações.

| CONCEITO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | POSSÍVEIS CONJETURAS                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| <p><b>Quebrado</b></p> <p>“Nada nos dá melhor ideia das razões do que os quebrados da Aritmética, porque os números inteiros representam as grandezas absolutas, e os quebrados as grandezas respetivas [relativas] (...)”</p> <p>[Fortes 1744, Parte III, 51]</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <p>Quebrado é um número racional não inteiro</p>              |
| <p>“Este quebrado <math>\frac{4}{4}</math>, o numerador 4 vale um inteiro porque compreende todas as partes do denominador e assim vale tanto como ele.</p> <p>Neste quebrado <math>\frac{2}{4}</math>, o numerador 2 vale menos que o denominador 4; porque não vale mais que duas partes, que são metade do denominador 4.</p> <p>Neste quebrado <math>\frac{6}{4}</math>, o numerador 6 vale mais do que o seu denominador 4, porque compreende todas as partes do denominador, e mais 2, que juntas fazem metade do denominador.”</p> <p>[Fortes 1744, Parte III, 115]</p> | <p>Quebrado não é necessariamente um racional não inteiro</p> |

<sup>125</sup> Esta definição é um exemplo de mais um lapso presente na obra: em vez da palavra *fração* ou *quebrado*, surge a palavra *Definição*. Lamy utiliza a palavra “fraction” na definição análoga. [Lamy 1692, 250]

| CONCEITO                                                                                                                                                               | POSSÍVEIS CONJETURAS                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Quebrado                                                                                                                                                               |                                                                  |
| Corolário III [da Proposição I]: Podemos reduzir um inteiro, seja moeda ou medida, a um quebrado, dado o denominador.<br><br>[Fortes 1744, Parte III, 118]             | Um número quebrado é um número racional (inteiro ou não inteiro) |
| Corolário III [da Proposição II]: Também se pode reduzir um quebrado em números inteiros, e conhecer quantos inteiros vale. (...)<br><br>[Fortes 1744, Parte III, 121] |                                                                  |

O Capítulo III do Livro V contém quatro axiomas sobre os quebrados. O Axioma III é mais um exemplo do tratamento das razões enquanto *números*. Este estabelece que os quebrados não são mais do que “uma expressão da razão que um número inteiro tem para a sua parte, ou partes” [Fortes 1744, Parte III, 116].

Neste axioma é feita referência, uma vez mais, à razão que um número inteiro tem para a sua *parte ou partes*, deixando transparecer que se trata apenas de razões racionais.

No Capítulo IV são apresentados vários resultados organizados em proposições, corolários, problemas, entre outros, sobre as “preparações necessárias para fazermos as operações da Aritmética sobre os quebrados ou razões” [Fortes 1744, Parte III, 117].

A iniciar o capítulo, Azevedo Fortes explica como reduzir um inteiro às suas partes, seguindo-se uma série de proposições e corolários relativos a este procedimento.

O Corolário IV estabelece que “para reduzir um inteiro a um quebrado, basta escrever esse número por numerador e o mesmo número por denominador, ou a unidade” [Fortes 1744, Parte III, 119]. Azevedo Fortes indica um exemplo deste procedimento e generaliza utilizando a letra  $x$ . De seguida apresenta-se essa explicação.

“Também por letras se pode reduzir, por exemplo, a grandeza  $x$  a este quebrado  $\frac{x}{x}$ , ou

simplesmente  $\frac{x}{1}$ , porque dividindo  $x$  por 1, o quociente é  $x$ , a saber a grandeza inteira.”

[Fortes 1744, Parte III, 119]

Deste procedimento depreende-se que  $\frac{x}{x}$  é o mesmo que  $\frac{x}{1}$ , o que não é verdade, a não ser que  $x$  tenha o valor 1.

Esta situação também surge na obra análoga de Lamy que serve de estudo para a comparação do trabalho deste francês com o de Azevedo Fortes, e que data de 1692.

Em 1734<sup>126</sup> foram republicadas três obras de Lamy num trabalho designado por *Ouvrages de Mathématiques du R. P. Bernard Lamy*. Este trabalho encontra-se dividido em três volumes. O primeiro, *Tome Premier*, contém *Éléments des Mathématiques, ou le Traité de la grandeur en general, qui comprend l'Arithmétique, l'Algèbre, et l'Analyse*; o segundo, *Tome Second*, contém *Les Éléments de Géométrie, ou de la Mesure de l'Étendue; et l'Introduction aux Sections Coniques*; o terceiro, *Tome Troisième*, contém *Les Traitez de Méchanique, de l'Equilibre des Solides et des Liqueurs, Le Traité de Perspective; et la Vie de l'Auteur*.

Nesta nova edição de *Éléments des Mathématiques*, a situação descrita anteriormente não contém o lapso supramencionado. Uma possível tradução da parte relativa a esta situação seria:

“Assim, para transformar a grandeza  $x$  em fração, escreve-se  $\frac{x}{1}$ , uma vez que dividindo  $x$  por 1, o quociente é  $x$ : por isso  $\frac{x}{1}$  é igual a  $x$ , isto é, é igual à grandeza inteira.”<sup>127</sup>

Esta nova versão do trabalho de Lamy é anterior ao trabalho de Azevedo Fortes pelo que este poderia ter utilizado a obra mais recente. Por que razão não o fez? Poderia não ter tido acesso à mesma, já que esta tem a indicação de ter sido realizada em Amesterdão...

De entre os resultados apresentados neste Capítulo IV, a Proposição III, designada por problema, estabelece como reduzir as razões, ou quebrados, ao mesmo denominador, ou consequente [Fortes 1744, Parte III, 121]. No Capítulo I do Livro IV, é indicada uma forma de efetuar este procedimento, facto que é mencionado. A primeira explicação que surge neste capítulo é feita para números, sendo de seguida generalizada com letras. Esta generalização é diferente da realizada anteriormente e apresenta-se de seguida. [Fortes 1744, Parte III, 122]

<sup>126</sup> A data que surge nos três volumes é 1734, contudo, no primeiro volume, na segunda página que surge com o título, a data inscrita é 1733.

<sup>127</sup> “Ainsi pour réduire la grandeur  $x$  en fraction, j'écris  $\frac{x}{1}$ , car divisant  $x$  par 1, le quotient est  $x$ : partant  $\frac{x}{1}$  est égal à  $x$ , c'est-à-dire à la grandeur entière.” [Lamy 1734, 255]

“Sejam os quebrados por letras  $\frac{B}{X}$  e  $\frac{C}{Z}$  (...)

Multiplicaremos  $X$  por  $Z$ , e será o produto  $XZ$  o denominador de ambos os novos quebrados.

Multiplicando  $B$  por  $Z$ , será o produto o numerador do primeiro, e  $X$  por  $C$  o numerador do segundo, como aqui aparece

$$\begin{array}{cc} \frac{B}{X} & \frac{C}{Z} \\ \frac{BZ}{XZ} & \frac{XC}{XZ} \text{ „} \end{array}$$

A Proposição III tem dois corolários que permitem, dadas duas razões, saber a razão entre elas e verificar qual das duas é maior.

Relativamente ao primeiro corolário, explica-se que os dois quebrados ou razões  $\frac{B}{X}$  e  $\frac{C}{Z}$  reduzidos ao mesmo nome<sup>128</sup>, da forma  $\frac{BZ}{XZ}$  e  $\frac{XC}{XZ}$ , possibilitam determinar mais claramente qual é a razão entre as razões dadas, que será igual à de  $BZ$  para  $CX$ . [Fortes 1744, Parte III, 123]

Como exemplo do segundo corolário, são indicadas as razões  $\frac{2}{7}$  e  $\frac{4}{9}$ . Reduzidas a um mesmo conseqüente, seguindo o processo indicando anteriormente, as duas razões ficam  $\frac{18}{63}$  e  $\frac{28}{63}$ . Assim, verifica-se que a primeira razão é menor do que a segunda, “quanto vai de 28 a 18, comparados com 63”. [Fortes 1744, Parte III, 124]

O Lema I estabelece como determinar a “maior comum medida ou o maior comum divisor de dois números dados”, o que em linguagem atual corresponde a determinar o máximo divisor comum entre dois números. [Fortes 1744, Parte III, 124]

O Lema II refere como determinar “o menor número que possa medir dois números dados”. No entanto, o número pretendido é o menor que possa ser medido pelos dois números dados, e não o que possa medi-los, já que este Lema corresponde, em linguagem atual, a determinar o mínimo múltiplo comum entre dois números. Não obstante, Azevedo Fortes na explicação que apresenta do Lema utiliza a terminologia correta. [Fortes 1744, Parte III, 126]

<sup>128</sup> Esta expressão é utilizada com o mesmo significado de reduzir ao mesmo denominador.

A Proposição IV<sup>129</sup> determina, o que em linguagem atual se designa por escrever uma fração na forma irredutível. À semelhança dos outros procedimentos deste capítulo, este resultado é exemplificado primeiro com números, sendo depois generalizado utilizando letras.

No Capítulo IV são introduzidas algumas das operações que podem ser realizadas com quebrados, no entanto, é no Capítulo V que é indicado claramente como fazê-lo com razões. Assim, Azevedo Fortes inicia o Capítulo V, “Do somar, diminuir, multiplicar e repartir das razões e dos quebrados”, dizendo no final da “Advertência”, que é possível escrever uma razão da mesma forma que se escrevem os quebrados, por exemplo, a razão de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$  pode ser escrita como  $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ . Desta forma, as operações da Aritmética sobre os quebrados podem ser feitas sobre as razões.<sup>130</sup> [Fortes 1744, Parte III, 133]

Esta afirmação corrobora, uma vez mais, a conjectura que tem sido descrita ao longo deste trabalho e que diz respeito ao direcionamento da teoria de proporções para grandezas numéricas. Contudo, atendendo a que os *quebrados* são números racionais, a associação das razões, e consequentemente das grandezas aos *quebrados*, limita-as às grandezas comensuráveis, já que a razão entre as incomensuráveis é *surda*, ou irracional.

Deste Capítulo V fazem então parte quatro proposições, cada uma das quais estabelece uma operação aritmética. As quatro proposições são apresentadas, exemplificadas com números, e “generalizadas” com letras.

A forma como Azevedo Fortes / Lamy explicam a adição e a subtração é semelhante à que se utiliza atualmente. Saliente-se que no exemplo da adição surge mais uma vez um lapso de Azevedo Fortes no denominador das frações, nos cálculos intermédios. Não obstante, no denominador da fração obtida coloca o valor correto.

Relativamente à multiplicação, é apresentado um problema e duas formas diferentes para multiplicar dois quebrados.

O primeiro *processo* explicado consiste em reduzir as duas razões ao mesmo denominador e de seguida multiplicar os dois numeradores e os dois denominadores. Para além deste, Azevedo Fortes apresenta o procedimento que atualmente se utiliza para multiplicar duas

---

<sup>129</sup> **Proposição IV:** Reduzir um quebrado, ou razão aos menores termos. [Fortes 1744, Parte III, 127]

<sup>130</sup> No “Chapitre I”, da “Section Second”, do “Livre Cinquième”, Lamy apresenta em “Avertissement” um comentário semelhante a este. [Lamy 1692, 271-272]

frações, referindo que o resultado da multiplicação das razões ou quebrados literais,  $\frac{B}{C}$  por

$\frac{M}{N}$  é o produto  $\frac{BM}{CN}$ .

No exemplo dado são utilizados os quebrados  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{2}{3}$ .

Aplicando o primeiro processo, reduzem-se os quebrados ao mesmo denominador, obtendo-se:  $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$  e  $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ . Multiplicando os numeradores e os denominadores, o resultado será  $\frac{120}{225}$ .

Efetuada a multiplicação pelo segundo processo, o atual, a multiplicação dos dois quebrados será:  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ .<sup>131</sup>

Para mostrar que este último processo é válido, Azevedo Fortes / Lamy apresentam uma “demonstração”. Esta explicação não é suficiente para provar o resultado, uma vez que utilizam um caso particular, não generalizando, por isso não constitui uma “verdadeira” demonstração.

No que respeita à divisão, o processo descrito indica que se deve “multiplicar em cruz”, e é explicado da seguinte forma:

“Sejam os dois quebrados  $\frac{B}{D}$ ,  $\frac{F}{G}$ , multiplicaremos  $D$  por  $F$  e  $G$  por  $B$ , e será o expoente  $\frac{BG}{DF}$  da razão dos dois quebrados propostos.”

[Fortes 1744, Parte III, 137]

De seguida, é exemplificado com os quebrados  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{2}{6}$ : “multiplicando 5 por 2 que dará 10, que se porá por baixo de uma linha, e por cima o produto de 3 por 6, e o quebrado  $\frac{18}{10}$  será o expoente da razão de  $\frac{3}{5}$  para  $\frac{2}{6}$ ” [Fortes 1744, Parte III, 138].

<sup>131</sup> Este exemplo é apresentado na obra *Exame de Artilheiros*, de Alpoim. Nesta obra, a resolução é feita utilizando este segundo processo. [Alpoim 1744, 31]

No Capítulo VI é apresentado um exemplo de como determinar a raiz quadrada de um número quebrado e dois exemplos (questões) onde é aplicada, para além das operações entre os quebrados, a Regra de Três. [Fortes 1744, Parte III, 139-140]

Azevedo Fortes comete um erro na parte final da primeira questão.

A Questão I é a seguinte:

“O tanque de uma fonte tem três bicas; pela primeira toda a água se vaza em três horas; pela segunda em cinco, e pela terceira em seis.

Pergunta-se, em quanto tempo se vazará pelas três bicas?”

Na resolução, são consideradas as razões  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{6}$ , como sendo a parte do tanque que cada bica demora a esvaziar por hora. A soma destas três razões dará a parte do tanque que é esvaziado, numa hora, se as três bicas estiverem abertas, que será  $\frac{7}{10}$ .

Até esta etapa, foram aplicadas as operações com as razões ou quebrados. Para prosseguir, é estabelecida uma proporção que permitirá determinar o tempo pretendido.

Assim, se com as três bicas abertas durante uma hora, é possível esvaziar  $\frac{7}{10}$  do tanque, quanto tempo será necessário para esvaziar na totalidade? Para isso, considera-se que a totalidade do tanque é representada pelo quebrado  $\frac{10}{10}$ , que representa a unidade, 1 (um), e a proporção obtida é:

$$\frac{7}{10} . 1 :: \frac{10}{10}$$

O termo que falta determinar é o quarto, que representa o tempo que demora a esvaziar o tanque. Para o fazer, multiplica-se o segundo termo da proporção pelo terceiro e divide-se pelo primeiro termo.

Assim, o produto da multiplicação de 1 por  $\frac{10}{10}$  é  $\frac{10}{10}$ .

Dividindo este produto por  $\frac{7}{10}$  (primeiro termo), obtém-se  $\frac{10}{7}$ .

Esta razão pode escrever-se como soma das razões  $\frac{7}{7}$  e  $\frac{3}{7}$ , ou ainda, 1 e  $\frac{3}{7}$ .

Este resultado permite responder à questão referindo que o tempo que demora a esvaziar o tanque é uma hora e três sétimos de outra.

Este seria o procedimento que Azevedo Fortes deveria pretender descrever. No entanto, em vez disso, refere que “multiplicando o terceiro termo (...) pelo segundo, o produto será  $\frac{10}{10}$ , porque um não altera multiplicando, e *ou diminuindo* este produto pelo primeiro termo, que é  $\frac{7}{10}$ , o quociente será 1 e  $\frac{3}{10}$ , o quarto termo buscado.

$$\frac{7}{10} \cdot 1 :: \frac{10}{10} \cdot \left(1 + \frac{3}{10}\right)$$

Trata-se de mais um erro do português que, mais uma vez, não surge em Lamy. [Lamy 1692, 279-280]

O Capítulo VII trata “De outras diferentes espécies de números quebrados” [Fortes 1744, Parte III, 140]. Entre outros, Azevedo Fortes aborda as dízimas como sendo uma espécie de número quebrado e faz referência à sua obra *O engenheiro português*, por nesta estar bem explicada a aplicação destes quebrados nas medições da arquitetura militar e civil, “evitando o cálculo laborioso dos quebrados da Aritmética ordinária”. [Fortes 1744, Parte III, 143]

Lamy coloca mais alguns resultados no capítulo análogo, nomeadamente, sobre como determinar raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos, desde que tal seja possível.

O Capítulo VIII da *Lógica Analítica*, que é tradução do “Livre Quatrième” de *Éléments de Géométrie*, trata da comensurabilidade e incomensurabilidade das linhas e das superfícies. Azevedo Fortes apresenta neste capítulo um conjunto de definições sobre esta temática, começando por definir que uma linha (ou superfície) é comensurável com outra quando a razão entre elas se pode expressar através de números, e que têm entre si uma medida comum, uma terceira grandeza, com que se comparam. Por outro lado, quando duas grandezas não têm uma medida comum, dizem-se incomensuráveis. Segue com a definição de grandeza racional: é uma grandeza conhecida e determinada, a respeito de outra, cujo valor se pode expressar por números. [Fortes 1744, Parte III, 143-145]

Esta definição é significativa no que respeita à quantificação das grandezas.

Prossegue o capítulo com mais duas definições sendo que a primeira expõe que duas grandezas incomensuráveis entre si podem ser comensuráveis em potência, e refere que a razão entre duas grandezas incomensuráveis é designada de *surda*. [Fortes 1744, Parte III, 145-146].

Azevedo Fortes não apresenta a tradução completa de todos os resultados que Lamy coloca acerca “da comensurabilidade e incomensurabilidade das linhas e das superfícies”. Verifica-se que das nove definições apresentadas por Lamy, Azevedo Fortes coloca cinco. Lamy coloca um conjunto de “Proposições evidentes” sobre razões e proporções; grandezas comensuráveis e incomensuráveis, entre outras, que Azevedo Fortes não apresenta, tendo apenas mencionado que dois números são comensuráveis, uma vez que têm a unidade como medida comum. Este resultado é apresentado por Lamy na Proposição I das Proposições Evidentes<sup>132</sup>. [Fortes 1744, Parte III, 142], [Lamy 1731, 252-253].

A terminar o capítulo, Azevedo Fortes tece algumas considerações sobre os incomensuráveis. Assim, refere que a dificuldade na “matéria dos incomensuráveis” consiste em distinguir, ou em que consiste, a igualdade de razões surdas. De acordo com o português, a forma de comparar razões de número a número é muito diferente da forma de comparar razões surdas. Continua a explicação expondo que, no caso de se tratar de razões de número a número, é possível compará-las, reduzindo-as. No caso das razões surdas não se pode proceder desta forma porque não é possível reduzir as razões a um mesmo número, caso fosse já não seriam razões surdas. De seguida, menciona a definição de Tacquet de igualdade de razões, referindo que “a igualdade consiste em que todas as partes alíquotas semelhantes dos dois primeiros antecedentes são igualmente contidas nos seus consequentes, ainda que nenhuma alíquota do primeiro antecedente seja precisamente tantas vezes contida no seu consequente, nem a alíquota parelha do segundo antecedente no seu consequente, mas sempre a respeito de um, e de outro, com algum resto, e como estes restos vão sempre ao infinito sem se esgotarem, não se pode notar desigualdade, ainda que se não possa expressar” [Fortes 1744, Parte III, 146-147].

Estas ideias de Azevedo Fortes não resultam de tradução “direta” de alguma parte das obras consultadas de Lamy. Relembre-se que este capítulo é uma adaptação de uma obra diferente da que Azevedo Fortes segue na restante Parte III. Importa salientar que, no que concerne à temática da comensurabilidade, Azevedo Fortes não apresenta as operações sobre os incomensuráveis, ao contrário de Lamy.

Azevedo Fortes termina o Capítulo VIII mencionando a incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com o seu lado e refere que, de acordo com a ideia que escreveu na *Lógica*

---

<sup>132</sup> **Proposition I:** *Deux nombres sont toujours commensurables entr'eux, car ils ont au moins l'unité pour leur commune mesure.* [Lamy 1731, 252-253]

*Racional*, segundo a qual os elementos das ciências devem ser claros e breves, nada mais irá ser escrito sobre a temática da comensurabilidade, apesar de não ter sido tudo abordado. [Fortes 1744, Parte III, 147]

O Livro VI da *Lógica Analítica* está dividido em sete capítulos e tem como título “Do modo de resolver uma questão ou problema”. O “Livre Septième” de *Éléments des Mathématiques* aborda esta temática e serve de base para Azevedo Fortes escrever a maior parte do último livro da *Lógica Analítica*.

O Capítulo I é iniciado com a referência de que irá ser abordada a forma de resolver questões e explicado o método a seguir. Explica-se, também, o significado de *Questão*: “é uma proposição, na qual se busca uma verdade incógnita, e donde porém se conhecem algumas coisas, que dizem respeito, ou razão com outras verdades conhecidas” [Fortes 1744, Parte III, 149-150].

Atendendo ao propósito do Livro VI, são indicadas seis regras para a resolução de uma questão [problema]. A estas seguem-se as regras para a resolução de equações (Capítulos III, IV, V e VI), apresentando-se problemas como exemplos. Nestes quatro capítulos está patente o pensamento algébrico.

No capítulo final do Livro VI – “Da resolução de vários problemas” – são apresentados vários problemas e exemplos de situações problemáticas. A maior parte deles são resolvidos recorrendo a equações. Noutros são aplicadas equações, numa primeira fase, seguido de um processo de resolução por tentativas. Alguns problemas são resolvidos utilizando apenas operações aritméticas.

Os dezoito primeiros problemas (numerados de I a XVIII) são traduções de alguns dos problemas apresentados por Lamy no “Chapitre VII: Résolution de plusieurs problèmes”, do “Livre Septième” de *Éléments des Mathématiques*. [Lamy, 1692, 375-395].

Seguem-se três problemas e a respetiva resolução adaptada da que surge na *Lógica*.

### **Problema VIII<sup>133</sup>**

Busca-se um número, que junto a 100 e a 20, fique na razão de 1 para 3.

---

<sup>133</sup> [Fortes 1744, Parte III, 173]

*Resolução:*

Seja  $X$  o número desconhecido.

Por hipótese,  $20 + X$  será para  $100 + X$  assim como 1 para 3, isto é, é válida a proporção  $(20 + X) . (100 + X) :: 1.3$ .

Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, a proporção anterior resulta na equação:  $60 + 3X = 100 + X$ .<sup>134</sup>

Aplicando as regras das equações, subtrai-se  $X$  e 60 aos dois membros da equação, obtendo-se  $2X = 40$ .

Para obter o valor de  $X$  dividem-se os dois membros por 2 e o valor de  $X$  é 20, o número que se pretendia descobrir. □

**Problema V**<sup>135</sup>

Buscam-se dois números que tenham entre si a razão de 1 para 5, e que juntando ao mais pequeno 4 e ao maior 6, fiquem na razão de 1 para 3.

*Resolução:*

Seja  $X$  o menor número e  $Z$  o maior.

Como a razão entre os dois números é de 1 para 5, então,  $X$  é a quinta parte de  $Z$ .

Assim,  $5X = Z$ .

Considerando os outros dados do problema, adicione-se 4 a  $X$  e 6 a  $Z$ , e estabelece-se a proporção  $(X + 4) . (Z + 6) :: 1 . 3$ .

Atendendo a que  $5X = Z$ , substituindo na proporção anterior  $Z$  por  $5X$ , obtém-se a nova proporção  $(X + 4) . (5X + 6) :: 1 . 3$ .

Desta proporção conclui-se que  $3X + 12 = 5X + 6$ .<sup>136</sup>

(A resolução da equação é feita atendendo às regras que foram descritas no Capítulo III deste Livro VI.)

Assim, em primeiro lugar, subtrai-se  $3X$  e 6 aos dois membros da equação, o que resulta na nova equação  $6 = 2X$ .

---

<sup>134</sup> Na resolução deste problema é referido explicitamente esta propriedade das proporções.

<sup>135</sup> [Fortes 1744, Parte III, 172]

<sup>136</sup> Esta última equação foi obtida aplicando a propriedade de que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, contudo, este facto não é referido, ao contrário do que acontece no Problema VIII.

De seguida, dividem-se os dois membros da equação anterior por 2, obtendo-se a solução da equação,  $3 = X$ .

Conhecido o valor de  $X$ , o valor de  $Z$  obtém-se multiplicando 3 por 5.

Logo,  $Z = 15$  e  $X = 3$ .  $\square$

### **Problema XI<sup>137</sup>**

Dividir o número 100 em tais duas partes, que o produto da maior  $Z$ , multiplicada pela menor  $X$ , seja para  $XX$ , quadrado da menor, como 10 para 1.

#### *Resolução:*

O enunciado já refere que  $X$  será a parte menor e  $Z$  a parte maior de 100.

Assim, pode escrever-se  $100 - Z = X$ , da mesma forma que  $100 - X = Z$ .

Estabelecendo a proporção pedida, tem-se:  $XZ : XX :: 10 : 1$ .

Dado que as duas incógnitas estão escritas, uma em função da outra, substituindo na proporção anterior  $Z$  por  $100 - X$ , obtém-se  $X(100 - X) : XX :: 10 : 1$ .

Efetuando o produto  $X(100 - X)$ , resulta  $100X - XX$  (processo explicado na Parte III, no Capítulo VI, do Livro I).

A proporção fica  $(100X - XX) : XX :: 10 : 1$

Aplicando a propriedade de que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, obtém-se  $100X - XX = 10XX$ .

Esta propriedade permitiu reduzir a proporção a uma equação do segundo grau.

A fase seguinte será resolvê-la, aplicando as regras para a resolução de equações.

Com o objetivo de isolar o termo  $100X$ , adiciona-se aos dois membros  $XX$ , que resulta na equação  $100X = 10XX + XX$ .

O segundo membro da equação anterior é equivalente a  $11XX$ , pelo que a equação fica  $100X = 11XX$ .

O próximo passo é dividir ambos os membros da equação por  $X$ , obtendo-se a equação  $100 = 11X$ .

Para determinar o valor de  $X$ , dividem-se os dois membros da equação por 11.

---

<sup>137</sup> [Fortes 1744, Parte III, 175]

Esta divisão tem por quociente um número não inteiro, que é apresentado na forma de numeral misto:  $9\frac{1}{11}$ .

Assim,  $X = 9\frac{1}{11}$  e para obter o valor de Z, deve-se subtrair X a 100.

$$Z = 100 - 9\frac{1}{11} \rightarrow Z = 90\frac{10}{11}. \square$$

A primeira situação apresentada, e que corresponde ao “Problème Huitième” de *Éléments de Mathématiques* [Lamy, 1692, 380], é traduzida por uma equação do primeiro grau. A segunda situação, correspondente ao “Problème Cinqüième” de *Éléments de Mathématiques* [Lamy, 1692, 379], em que se pretende determinar dois números, poderia ser traduzida por um sistema de duas equações com duas incógnitas. No entanto, é escrita uma equação do primeiro grau, com duas incógnitas, e a partir dos dados, é feita a substituição de uma delas, de forma a obter uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Na prática, é aplicado o método de substituição da resolução de um sistema.

Reduzindo o problema a uma equação do primeiro grau, a sua resolução é feita aplicando as regras básicas da resolução de uma equação.

Na parte final deste Capítulo VII, Azevedo Fortes apresenta uma secção intitulada “Regra geral para poder resolver os problemas, sem trabalho de tantas composições de raízes, e sua extração, principalmente nas igualações compostas de várias potências”. Nesta, são expostos alguns exemplos de situações em que são aplicadas equações de grau superior ao primeiro. A resolução destas equações é feita por um processo diferente dos anteriores. Este processo é designado por Azevedo Fortes de “Regra de Mediação, que André Puique refere ter achado na Aritmética de Estevão de Rocha” [Fortes 1744, Parte III, 187].

Esta referência a “André Puique” conduziu à pesquisa sobre este “novo” autor...

André Puique é a tradução de Andrès Puig<sup>138</sup>. Pouco se sabe sobre este espanhol. Nasceu em Vich, estudou em Valência e mudou-se para Barcelona onde editou, em 1672, a sua obra *Arithmetica Especulativa, y Pratica y Arte de Álgebra*. Nesta obra são explicadas as proposições e problemas dos Livros V, VII, VIII, IX e X dos *Elementos* de Euclides. No entanto, não é seguida a

---

<sup>138</sup> Até meados do século XX, era usual efetuar-se a tradução de nomes próprios. Na *Lógica*, “André Puique” é a tradução do espanhol “André Puig” e “Estevão de Rocha” é a tradução do nome do francês Estienne de La Roche. Este francês é referido na obra de Puig como “Estevan de Roca”. [Puig 1715, 448].

ordem dada por Euclides e a forma como são apresentados os resultados é diferente. Este tratado terá ficado célebre por apresentar um método para resolver equações de grau superior ao primeiro, por aproximação. [Loidi 2005]

Uma análise da obra supracitada de Puig permite concluir que esta também serve de fonte a Azevedo Fortes. De facto, os restantes problemas e exemplos do Capítulo VII do Livro VI da *Lógica Analítica*, que não surgem em *Éléments des Mathématiques*, são uma tradução de alguns dos apresentados por este espanhol.

Estes problemas são expostos por Puig na obra *Arithmetica Especulativa, y Pratica y Arte de Álgebra*, nos Capítulos X [Puig 1715, 310-314] e XII [Puig 1715, 323-330], do “Libro Quarto”, e Capítulo XI [Puig 1715, 448-451] do “Libro Quinto”.

A situação que se apresenta a seguir, e que é designada por Azevedo Fortes de “Exemplo II”, corresponde ao “Exemplo II”, do “Capítulo XI”, do “Libro Quinto”, da obra de Puig. [Puig 1715, 450]. Neste exemplo, é aplicada a “Regra de Mediação”.

### **Exemplo II<sup>139</sup>**

Pedem-se dois números em proporção dupla, e que tirando do seu quadrado o número maior, o resto seja 225 [255]<sup>140</sup>.

#### *Resolução:*

Seja X o número menor.

Como por hipótese os números estão em proporção dupla, o outro número será 2X.

“Tirar do quadrado o número maior”, traduz-se por  $XX - 2X$ .<sup>141</sup>

Então, a equação que traduz o problema será  $XX - 2X = 255$

Pretende-se descobrir o valor de X.

Suponha-se que o valor de X é 14.<sup>142</sup>

Substituindo na equação que traduz o problema X por 14, obtém-se  $14 \times 14 - 2 \times 14 = 255$ .

---

<sup>139</sup> [Fortes 1744, Parte III, 188-189]

<sup>140</sup> A colocação do número 225 em vez de 255 tratar-se-á de um lapso, já que na resolução surge o número 255.

<sup>141</sup> A notação utilizada para representar o quadrado de X é XX, apesar de também surgir em algumas situações a notação utilizada atualmente:  $X^2$ .

<sup>142</sup> Na resolução apresentada na *Lógica*, é sugerido que se verifique se o número pretendido é 14, ou seja, inicia-se uma resolução por tentativas, não sendo, no entanto, explicada a razão da escolha deste valor.

Efetuada os cálculos do primeiro membro, verifica-se que  $196 - 28 = 255$ , isto é,  $168 = 255$ . Como esta igualdade não é verdadeira, conclui-se que 14 não é o número pretendido, isto é, 14 não é a solução do problema.

Como o número que se obteve no primeiro membro da equação é inferior a 255, deduz-se que a solução será um número maior do que 14.

O passo seguinte é repetir a substituição de X por outros valores, maiores do que 14. É sugerido o número 18.

Repetindo o processo de substituição, verifica-se que 18 também não é solução da equação uma vez que  $18 \times 18 - 2 \times 18 = 288$  ( $288 \neq 255$ ).

A obtenção de um valor maior do que o pretendido leva a concluir que o número pretendido terá de estar compreendido entre 14 e 18.

Assim, o próximo número "candidato" a solução do problema será metade da soma de 14 com 18, isto é, 16.

Se este número não for solução da equação, a solução estará compreendida entre 14 e 16 ou entre 16 e 18.

Efetuada a experiência com o número 16, obtém-se  $16 \times 16 - 2 \times 16 = 224$ .

Como 224 é menor do que 255, o valor pretendido terá de estar compreendido entre 16 e 18.

Assim, repete-se o processo: metade da soma de 16 com 18 será o número a verificar, ou seja, 17.

A verificação deste novo valor resulta em:  $17 \times 17 - 2 \times 17 = 255$ .

Assim, a solução da equação é 17, pelo que os números pretendidos são 17 e 34.  $\square$

As situações apresentadas anteriormente foram selecionadas, por um lado, por serem aplicações da teoria de proporções, e por outro, por serem exemplos de resoluções diversificadas.

Os dois primeiros problemas resultam da conjugação das equações com a atualmente designada *propriedade fundamental das proporções*, aplicada a números racionais: numa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. A aplicação desta propriedade precede a aplicação das regras das "igualações"<sup>143</sup>.

O Problema XI foi escolhido por ter como solução dois números não inteiros, e corresponde ao "Problème Onzième" de *Éléments des Mathématiques* [Lamy, 1692, 382].

---

<sup>143</sup> Termo utilizado por Azevedo Fortes para designar Equações.

O método de resolução do Exemplo II, e que é traduzido através de uma equação do segundo grau, não é eficaz. O processo tentativa/erro não é o mais aconselhável para este tipo de equação, e não é indicado, de uma forma clara, um método “infalível” para descobrir os valores “candidatos” a solução da equação. Tratando-se de equações, cujas soluções não sejam números inteiros, a procura desses números poderá ser ainda mais morosa.

Note-se que os exemplos apresentados neste Capítulo VII são apenas com números racionais positivos, sendo na sua maioria números naturais, ficando por tratar de que forma se procede com os [números] irracionais. Lamy faz referência na sua obra às raízes positivas e negativas, facto que Azevedo Fortes não menciona.

### 3.2.2.3. Mais algumas considerações sobre as Partes II e III

Ao longo da análise das partes da obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, no que à teoria de proporções diz respeito, foram elaborados alguns comentários sobre a mesma e tecidas algumas considerações, sempre que se julgou necessário.

A comparação, entre as obras de Azevedo Fortes, estudadas nesta Dissertação, com as dos autores que lhe serviram de fonte, permite conjecturar que o português terá traduzido as “originais” em grande parte. Isso poderá ter como consequência a falta de originalidade em relação ao seu trabalho. Esta situação não é tão evidente na Parte III da *Lógica*, tal como já foi referido. No Anexo III podem consultar-se tabelas comparativas das Partes II e III da obra de Azevedo Fortes com as obras de Lamy.

No decurso da análise efetuada, foram referidos alguns erros/lapsos que surgem na *Lógica* de Azevedo Fortes. Para além dos mencionados, existem outros, como por exemplo, no cabeçalho do Capítulo III do Livro IV, na página 187. Em vez de estar PART. II. LIV. IV. CAP. III, surge PART. II. LIV. VI. CAP. III [Fortes 1744, Parte II, 187].

No Capítulo IV do Livro V da *Lógica Analítica*, a Proposição V<sup>144</sup> é explicada da seguinte forma: dados os quebrados  $\frac{B}{C}$  de  $\frac{C}{Z}$ , o produto dos denominadores será o denominador do quebrado, enquanto o produto dos numeradores será o numerador do quebrado. Contudo, no

---

<sup>144</sup> **Proposição V:** Reduzir os quebrados de quebrados a um só quebrado. [Fortes 1744, Parte III, 129]

final da explicação é descrito que após efetuados estes produtos, o quebrado resultante é  $\frac{B}{CZ}$ , em vez de  $\frac{BC}{CZ}$ . Na obra de Lamy o quebrado é colocado de forma correta [Lamy 1692, 266].

Não se sabe exatamente a que se devem estas falhas. Poderão ser erros da pessoa responsável pela escrita dos documentos e/ou eventualmente lapsos cometidos pelo próprio autor, dado que os seus oitenta e quatro anos representavam uma idade bastante avançada, tendo em conta a esperança média de vida para o século XVIII.

Enquanto na *Lógica Geométrica* Azevedo Fortes identifica as proposições dos *Elementos* de Euclides a que correspondem alguns dos resultados que apresenta, na *Lógica Analítica* isto não se verifica. Tal facto deve-se a que a Parte II é relativa à Geometria, e por isso será o equivalente aos *Elementos* de Euclides, enquanto na Parte III esses resultados são adaptados para *grandezas em geral*.

Segue-se uma reflexão sobre alguns conteúdos que se consideram essenciais na abordagem do tema em estudo.

## O CONCEITO DE NÚMERO

Na *Lógica Analítica* são estabelecidas analogias entre razões e quocientes de números (Livro IV) e entre quebrados/frações e razões (Livro V), e consequentemente entre números e grandezas. Enquanto no Livro IV são tratadas as operações entre razões, no Livro V são abordados os quebrados e as operações realizadas com estes.

Verifica-se uma inconsistência e falta de clareza no que diz respeito à definição de *quebrado* nas obras de Lamy / Azevedo Fortes, tal como foi abordado ao longo da análise realizada. Em determinados contextos, quebrado pode ser entendido como número racional (inteiro ou não inteiro) enquanto noutros contextos, quebrado refere-se apenas a um número racional não inteiro.

Surge também a dúvida sobre a utilização do termo *número*: aplica-se aos [números] reais ou apenas aos [números] racionais?

A exposição desta ideia apresenta-se na secção seguinte.

Registe-se ainda o facto de os exemplos apresentados na *Lógica* serem sempre com números racionais.

## COMENSURABILIDADE & NÚMERO

Na *Lógica Analítica*, Azevedo Fortes segue a obra de Lamy *Éléments des Mathématiques*. Nesta, o conceito de comensurabilidade de grandezas é explicado no “Livre Sixième”. Contudo, Azevedo Fortes, quando aborda esta temática, recorre à obra do francês *Les Éléments de Géométrie*.

Uma justificação para o engenheiro não ter continuado com a mesma fonte na Parte III, poderá ser por Lamy, em *Éléments des Mathématiques*, referir que a temática da comensurabilidade é tratada na sua obra *Les Éléments de Géométrie* [Lamy 1692, 299].<sup>145</sup>

Azevedo Fortes poderia não pretender aprofundar muito este assunto, como refere no final do Capítulo VIII, do Livro V, por considerar que “os elementos das ciências devem ser claros e breves”. Desta forma, apresentou a tradução de algumas das definições que Lamy colocou em *Les Éléments de Géométrie*, que terá considerado suficientes para compreender esta temática.

O “Livre Sixième” de *Éléments des Mathématiques* tem o título “Des Grandeurs incommensurables” e está dividido em quatro “Sections”, estando a primeira e a última divididas em capítulos. A definição de grandezas comensuráveis e incomensuráveis surge na “Section Troisième”. Assim, de acordo com Lamy, duas grandezas são comensuráveis se a razão entre elas se pode exprimir por números e incomensuráveis se a razão entre elas for surda<sup>146</sup>.

A diferença, entre esta definição e a apresentada na *Lógica Analítica* (adaptada de *Les Éléments de Géométrie*), reside no facto de nesta última o conceito de comensurável ser aplicado a linhas e superfícies e não a grandezas em geral. Contudo, a definição de incomensurabilidade (Definição II) surge associada a *grandezas*: grandezas incomensuráveis são aquelas que não têm uma medida comum, que as possa medir<sup>147</sup>.

Na primeira “Section” do “Livre Sixième” de *Éléments des Mathématiques*, Lamy prepara a explicação da comensurabilidade de grandezas, equiparando as grandezas comensuráveis a grandezas que se possam exprimir através de números.

Esta associação transfere o estudo desta temática para os números, sendo, desta forma, necessário entender o conceito de *razão surda*. Lamy começa por assumir que os números não

---

<sup>145</sup> A obra *Éléments de Géométrie* foi realizada por Lamy em 1685, antes da obra *Éléments des Mathématiques*. Contudo, as edições consultadas, e cuja referência é feita na Bibliografia, são respetivamente de 1731 e 1692.

<sup>146</sup> *Première Définition: Deux grandeurs sont commensurables, lors que la raison qui est entr'elles se peut exprimer par nombre; incommensurables, si cette raison est sourde.* [Lamy 1692, 309]

<sup>147</sup> [Fortes 1744, Parte III, 144]

são mais do que razões e para medir qualquer coisa é necessário uma unidade, isto é, algo que possa servir de medida e que seja conhecido.

Tendo esta ideia por base, duas ou mais grandezas são comensuráveis quando podem ser medidas por uma mesma medida, isto é, quando existe uma certa quantidade que serve para medir exatamente cada uma das grandezas, sem que haja resto, que não falte nenhuma coisa ou exista algum excesso.

As grandezas incomensuráveis são aquelas que não se podem exprimir por números e a estas são associadas as razões surdas. Estas razões surdas são definidas por Lamy como as que não têm como expoente *números* [Lamy 1692, 293].

Assim, deduz-se que quando é utilizada a palavra *número*, os [números] irracionais não estão incluídos, logo, número será entendido como [número] racional.

É possível depreender, a partir dos vários resultados apresentados nas obras de Lamy e Azevedo Fortes, que os irracionais não são considerados números.

Associar um número às grandezas comensuráveis transforma/universaliza as grandezas às operações entre números, isto é, todas as operações realizadas entre números podem ser realizadas entre grandezas (desde que estas sejam comensuráveis)

A associação das grandezas comensuráveis a números [racionais] permite a aplicação de todas as operações efetuáveis com números às grandezas, sendo por isso vantajosa esta aritmetização.

No sentido de proceder da mesma forma para as grandezas incomensuráveis, exige-se aferir da possibilidade de realizar as operações aritméticas entre as *entidades* que são consideradas como não sendo *números*, ou seja, os [números] irracionais.

A instituição de uma Aritmética para este tipo de *entidades* [números irracionais] em conjunto com a Aritmética definida para os *números* [racionais] viabiliza a realização de todas as operações para qualquer tipo de grandeza.

No seu tratado, Azevedo Fortes apenas coloca as operações aritméticas sobre os quebrados, isto é, os números [racionais] (Capítulo VIII do Livro V, da *Lógica Analítica*).

Por seu lado, Lamy apresenta, na “Section Quatrième” do “Livre Sixième”, de *Éléments des Mathématiques*, um capítulo (“Chapitre I”) em que refere explicitamente que se podem fazer todas as operações da Aritmética sobre as grandezas incomensuráveis, expondo, no “Chapitre II”, como realizar essas operações sobre as raízes surdas [Lamy 1692, 319-332].

A ausência na *Lógica* de um Capítulo ou Livro para tratar das operações com grandezas incomensuráveis e a utilização exclusiva de números racionais nos exemplos apresentados, reduz a aritmetização da(s) teoria(s) de proporções às grandezas comensuráveis.

## **ARITMÉTICA E ÁLGEBRA**

Azevedo Fortes refere, nas páginas iniciais da Parte III, que irá tratar da Aritmética Pura, cujo nome mais apropriado seria Álgebra [Fortes 1744, Parte III, 2]. No entanto, e pelo estudo efetuado, nos primeiros cinco livros da *Lógica Analítica*, poderá dizer-se que a Álgebra existente se resume à parte final da explicação de cada propriedade.

A metodologia utilizada por Azevedo Fortes é a seguinte: apresenta a propriedade (sob a forma de proposição, teorema, ou outro), explica-a com exemplos numéricos, recorrendo a regras aritméticas que explicou previamente, referindo por último como pode ser aplicada a grandezas em geral, servindo-se, para tal de escrita simbólica, recorrendo a letras, sem contudo demonstrar a sua validade. É apenas nesta última etapa que surge a Álgebra. Esta “Álgebra” surge assim como uma extensão da Aritmética.

Fica a ideia que nestes primeiros livros a Aritmética surge em maior destaque do que a Álgebra, tendo em atenção os conceitos atuais.

A Álgebra propriamente dita surge de modo mais evidente no Livro VI. Neste livro é apresentada, no Capítulo VII, a resolução de um conjunto de problemas em que é evidente a aplicação da Álgebra, ainda que de uma forma “simples”, em que a notação algébrica se “resume” à escrita de equações. As regras fundamentais para a resolução de equações já são aplicadas, contudo, quando se trata de resolver equações do segundo grau os exemplos apresentados não são representativos de todos os tipos de equações. Em nenhum exemplo a equação que traduz o problema é impossível...

É de salientar que os exemplos apresentados no Capítulo VII são apenas com números racionais positivos, sendo na sua maioria números naturais, ficando por tratar de que forma se procede com os [números] irracionais.

## CONCLUSÃO

Entre os trabalhos dos autores em estudo verifica-se uma diferença na abordagem aos conceitos de razão e proporção. Ao longo dos tempos foram realizadas várias considerações acerca da compilação de Euclides, tendo a teoria de proporções baseada no conceito dos equimúltiplos, sido alvo de críticas pela sua alegada obscuridade.

A existência de uma teoria para números e de uma para grandezas em geral, considerada mais difícil, foi objeto de estudo. Estes fatores levaram vários estudiosos a tentar, por um lado provar essa obscuridade e dificuldade, e por outro a apresentar alternativas mais viáveis.

Se nos primeiros autores os conceitos eram apresentados de uma forma geral, assiste-se a uma crescente utilização da Aritmética como forma de definir o que são as razões e as proporções. Esta via alternativa, que poderá ficar a dever-se à evolução da Álgebra e à utilização da mesma como forma de apresentar e generalizar os conceitos, conduziu à crescente “aritmetização” e “algebrização” da(s) teoria(s) de proporções.

Os autores estudados tinham concepções diferentes sobre esta teoria. Apesar de Tacquet ter efetuado críticas a Euclides e de ter apresentado uma forma diferente de provar as proposições dos *Elementos*, seguiu Euclides nas suas ideias principais.

Assistiu-se a várias tentativas para alterar a ordem dos *Elementos* e estabelecer o Livro V com outros contornos.

O desenvolvimento da Álgebra permitiu estabelecer os resultados dos *Elementos* de uma forma mais prática por ser potenciadora da criação de estruturas algébricas que facilitam a resolução dos problemas aí presentes de uma forma mais eficiente.

Este facto é indicador da evolução do conceito de número e do desenvolvimento da Álgebra nesta época.

Os conceitos de parte alíquota e alíquanta, introduzidos por Tacquet, passaram a ser utilizados e serviram de base para as várias versões da Definição 5 do Livro V. Todos os autores

em estudo adotaram estes conceitos e utilizaram-nos nos seus trabalhos. O “critério” de Tacquet estabelece que, duas ou mais razões dizem-se semelhantes quando, consideradas as mesmas partes alíquotas semelhantes dos antecedentes, estas estiverem contidas o mesmo número de vezes nos respetivos consequentes. Este critério é utilizado por alguns dos autores em estudo, nomeadamente, Dechaies, Ozanam e Manoel de Campos, na demonstração de várias proposições e teoremas no Livro V das respetivas obras.

No que diz respeito às proposições, Tacquet e Manoel de Campos; Dechaies; Ozanam e Azevedo Fortes (no manuscrito); mantiveram a ordem estabelecida por Euclides, procedendo a alguns “ajustes” na linguagem utilizada. Em determinadas proposições assiste-se à introdução de alguns corolários e lemas que não fazem parte dos *Elementos*. Estes novos resultados permitem a demonstração de algumas proposições de forma diferente da de Euclides e entre os autores em estudo. Lamy e Azevedo Fortes (na Lógica) não seguem a ordem de Euclides e apresentam uma abordagem diferente, procurando construir uma teoria para todo o tipo de grandezas, com recurso a processos algébricos.

Apesar destas diferenças, a utilização dos conceitos de parte alíquota e aliquanta são comuns em todos os autores em estudo.

A diversidade dos novos resultados introduzidos serve para demonstrar de forma diferente os resultados originais dos *Elementos*. A mudança na forma de demonstrar acompanha a tendência para a utilização gradual da Álgebra. A título de exemplo, no Livro V, a Proposição XVI é demonstrada nos *Elementos* recorrendo às Proposições XI, XIV e XV e à Definição V, do mesmo Livro, tendo como base os equimúltiplos. Tacquet e Manoel de Campos recorrem à Definição VII e à Proposição XV, do Livro V, tendo como base o Princípio das *Equi-alíquotas*. Dechaies recorre à Definição VI, à Proposição XIV, do Livro V, e a um Corolário que introduziu na Proposição XV. Nesta última proposição (XV) Dechaies ainda utiliza o conceito de equimúltiplos e não refere o de partes alíquotas. Este conceito surge no corolário que acrescenta a esta proposição. A demonstração da Proposição XVI, do Livro V, efetuada por Azevedo Fortes / Ozanam, tem como base a composição de razões e um lema (que colocam a seguir à Proposição XIV, do Livro V, e que determina que, se o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, as grandezas são proporcionais). Esta demonstração é, das consideradas neste estudo, a mais “algébrica”.

É ao nível das demonstrações que as diferenças são mais significativas. Isto fica a dever-se à introdução de novos conceitos nas definições, sendo essencial o conceito de partes alíquotas e aliquantas.

Esta evolução ao nível de conceitos teve várias consequências, nomeadamente a não inclusão de determinadas proposições nas obras de vários autores, por serem consideradas “desnecessárias” ou de “pouco uso”.

Assiste-se a uma transformação progressiva dos conceitos de razão e proporção, que acompanham a evolução/conquista da Álgebra.

O desenvolvimento da Aritmética, decorrente da evolução do conceito de número, permitiu efetuar todas as operações, servindo de modelo à Álgebra, algo que não era possível com a “Aritmética Euclidiana”.

A associação da Álgebra à Geometria determina o que Lamandé designa de “unificação do campo matemático”, sendo que esta unificação exige a definição das operações sobre as linhas geométricas. [Lamandé 2013, 599]

O “Livre Troisième” de *Les Éléments de Géométrie*<sup>148</sup> de Lamy, terá sido o ponto de partida deste autor, para reduzir as proposições geométricas ao cálculo. [Barbin 2006, 301]

Em teoria, instituir as operações da Aritmética para o campo da Geometria, iria por um lado, abrir caminhos para a simplificação desta última, e por outro, permitiria a associação da Geometria à Aritmética e à Álgebra.

Contudo, para que esta associação seja possível, será necessário estabelecer uma forma de tornar válidas para as grandezas em geral, as operações que se realizam para as grandezas numéricas. Na prática, será identificar a que operação geométrica corresponde uma operação aritmética/algébrica.

Se para determinadas operações essa associação não será difícil, como por exemplo, a adição e a subtração de segmentos de reta, é necessário definir em que consiste a multiplicação e a divisão destas *entidades geométricas*.

Nos *Elementos*, a multiplicação/produto de linhas [segmentos de reta] correspondia à construção do retângulo sobre as mesmas. Assim, o produto de duas linhas seria interpretado como a medida da área do retângulo cujos lados eram constituídos pelas linhas dadas. No que diz respeito à divisão, esta não estava definida sendo que a comparação de duas grandezas

---

<sup>148</sup> O “Livre Troisième” tem como título “*Les propriétés qui conviennent à toute Grandeur, appliquées aux Lignes, Plans, Solides, & démontrées*” e trata das propriedades que convêm a todas as grandezas, e por consequência, às linhas, aos planos e aos sólidos. [Lamy 1731, 129]

homogêneas era feita de acordo com o conceito de razão definido no Livro V. Uma vez que o resultado destas “operações” não era uma grandeza do mesmo tipo das que lhe deram origem, a multiplicação e a divisão não eram operações internas. [Lamandé 2013, 599]

Descartes<sup>149</sup> inicia o “Livre Premier” da parte dedicada à Geometria, da sua obra *Discurso do Método*, referindo que todos os problemas de Geometria se podem reduzir facilmente a tais termos, que para os resolver é apenas necessário conhecer os comprimentos de alguns segmentos de reta.<sup>150</sup>

Prossegue referindo que o cálculo aritmético se aplica às operações da Geometria. Assim, descreve todas as operações aritméticas elementares recorrendo à régua e ao compasso.

Para estas construções, considerava a existência de uma grandeza unitária arbitrária, que servia para medir as grandezas com as quais necessitava de operar.

De seguida, apresenta-se uma adaptação da construção de Descartes<sup>151</sup> para explicar o produto de dois segmentos de reta, utilizando a notação atual.

---

<sup>149</sup> Nasceu a 31 de março de 1596, em La Haye, em Touraine, França. Em 1604 entra no colégio dos Jesuítas, em La Flèche, onde estuda durante oito anos, línguas e textos antigos, História, Eloquência, Poesia, Matemática, Teologia e Filosofia. Neste colégio o estudo da Matemática estava ligado à Física Aristotélica. Apesar de ter obtido grande êxito nestes anos de estudo, Descartes ficou desiludido pela ausência de unidade entre as diversas áreas que estudou. Em 1612 sai do colégio de La Flèche e em 1616 entra na Universidade de Poitiers onde, passados quatro anos, obtém o bacharelato e a licenciatura em Direito. Em 1618 vai para a Holanda, com o objetivo de alistar no exército do príncipe protestante Maurício de Nassau. Encontra-se em Breda com Isaac Beeckman, doutor em Medicina, tendo em conjunto com este tentado fazer a união da Física com a Matemática. Beeckman ajudou Descartes a descobrir o *mecanismo*. Descartes parte da Holanda em 1619 e na noite entre os dias 10 e 11 de novembro, tem três sonhos que interpreta como importantes para o destino da cultura moderna. Em 1620, já na Hungria, abandona a atividade de militar, passando a viajar muito. Entre 1620 e 1622, Descartes resolve problemas de Matemática e de Ótica e organiza as suas notas pessoais. Em 1622 regressa a Paris tendo estabelecido contato com Mersenne. Até 1628 viajou pela Europa. A partir de 1628 redige *Regulae ad Directionem Ingenii* (Regras para a direção do espírito). Para esta obra serve-se da Matemática como fundamentação do conhecimento. Em 1629 instala-se em Frise e permanece na Holanda durante vinte anos. Estabelece relações de amizade com várias personalidades, entre as quais, Golius, Huygens, Villebressieu, entre outros. Em 1632 inventa a Geometria Analítica, encontrando a solução do problema de Papo. Em 1629 começa a redigir a obra *Tratado do Mundo* (composto do *Tratado da Luz* e do *Tratado do Homem*), na qual defende o sistema heliocêntrico, defendido por Copérnico. No entanto, com a condenação de Galileu, em 1633, pelo tribunal do Santo Ofício, adiou a publicação desta obra. Em 1636 instala-se em Leyde para tratar da publicação de *Éssais sobre La Dioptrique, Les Météores, La Géométrie* e do *Discours de la Méthode*. Neste último trabalho encontra-se a sua frase célebre: “Penso, logo existo”. Em 1649 Descartes vai para a Suécia. O clima deste país agravou a sua saúde débil: faleceu em 11 de fevereiro de 1650, vítima de uma pneumonia. De entre as suas obras destacam-se: *Discours de la Méthode*, seguido de *La Dioptrique, Les Météores, La Géométrie*, em 1637; *Meditationes de Prima Philosophia, in qua Dei existentia et animae immortalitas demonstrantur*, em 1641/1642; *Principia Philosophiae*, em 1647; *Les Passions de l’Âme*, em 1650. [Descartes]

<sup>150</sup> “Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu’il n’est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.” [Descartes 1637, 297]

<sup>151</sup> Em [Descartes 1637, 298], Descartes não expõe a explicação detalhada que se apresenta neste trabalho. Começa por considerar um segmento AP unitário e para multiplicar AB por AD, basta apenas juntar os pontos P e D, depois construir a paralela a DP que contém B. AC será o produto pretendido.

Seja  $x$  a medida do segmento de reta  $AB$  e  $y$  a medida do segmento de reta  $AD$ .

Considerem-se duas semirretas com a mesma origem, o ponto  $A$ , e marque-se sobre uma delas, o ponto  $P$ , tal que  $AP$  é o segmento unitário, isto é, servirá de medida para o produto/construção a realizar. [Figura I]

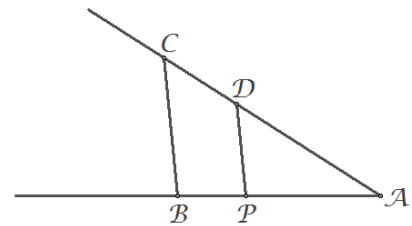


Figura I

Sobre  $AP$  marque-se o ponto  $B$  tal que  $AB$  tenha a medida de  $x$ .

Na outra semirreta, marque-se o ponto  $D$  tal que  $AD$  tenha a medida de  $y$ .

De seguida, unem-se os pontos  $P$  e  $D$ , formando o segmento  $PD$ .

Constrói-se um segmento de reta paralelo a  $PD$ , a partir do ponto  $B$ .

Seja  $C$  o ponto de interseção dessa paralela com a semirreta  $AD$ , obtém-se assim o segmento  $BC$ .

Os triângulos  $ABC$  e  $APD$  são semelhantes, o que permite estabelecer, em notação atual, a seguinte proporção:  $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AD}$ .

Por construção,  $x = AB$ ;  $y = AD$  e  $AP = 1$ , logo, a proporção anterior é equivalente a  $\frac{x}{1} = \frac{AC}{y}$ .

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, o produto de  $x$  por  $y$  (os extremos da proporção) será igual ao produto de  $AC$  por  $AP$  (os meios da proporção), ou seja, será a medida do segmento  $AC$ .

Esta aplicação da Álgebra, para realizar as operações para grandezas geométricas, da qual se apresenta o exemplo da multiplicação descrito anteriormente, permite transformar a proporção  $a : b :: c : d$ , na igualdade  $ad = bc$ .

A utilização de letras para representar uma linha é interpretada também como a razão entre essa linha e o segmento unitário. Esta razão poderá ser identificada com a divisão algébrica. No entanto, a aplicação da Álgebra à teoria de proporções presente no Livro V de Euclides, não foi explicada por Descartes, de uma forma “matemática”, sendo antes resultado de uma intuição direta. [Lamandé 2013, 599]

Estabelecer uma teoria de proporções suscetível de ser aplicada a todo o tipo de grandezas, que englobasse todos os *objetos matemáticos*, e que contemplasse as operações algébricas definidas no âmbito da Geometria, esteve na origem do trabalho de muitos estudiosos nos anos seguintes aos que foram objeto de estudo desta Dissertação.

Sugere-se a continuação da investigação neste âmbito, no sentido de aferir que caminhos foram percorridos na busca de uma teoria **única** de proporções.

## BIBLIOGRAFIA

- [Alpoim 1744] José Fernandes Pinto Alpoim, *Exame de Artilheiros que compreende Aritmética, Geometria, e Artilharia, com quatro apêndices: o primeiro de algumas perguntas uteis; o segundo do método de contar as balas, e bombas nas pilhas; o terceiro das batarias; e o quarto dos fogos artificiais*. Lisboa: Oficina de José António Plates, 1744.
- [Agudo] F. R. Dias Agudo, “Números (Teoria dos)”, em *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*. Lisboa: Editorial Verbo. 18 volumes publicados entre 1963-1976. Volume 14.
- [Artmann 1999] Benno Artmann, *Euclid – The Creation of Mathematics*. Nova Iorque: Springer, 1999.
- [Barbin 2006] Evelyne Barbin, *La Révolution mathématique du XVII<sup>e</sup> siècle*. Paris: Ellipses, 2006.
- [Busard 1991] H. L. L. Busard, “Clavius, Christoph”, em Charles Coulston Gillispie (Ed), *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Nova Iorque: Simon & Schuster Macmillan, 1991. Volume 1, p. 513-514.
- [Calafate] Pedro Calafate, “Manuel de Azevedo Fortes”, em *Filosofia Portuguesa, Instituto Camões*. <<http://cvc.instituto-camoes.pt/filosofia/ilu3.html>>. [consultado em 2013-06-30].
- [Campos 1735] Manoel de Campos, *Elementos de Geometria Plana, e Sólida*. Lisboa: Oficina Rita-Cassiana, 1735.
- [Carruccio] Ettore Carruccio, “Bartolomeu Zamberti”, em *Enciclopedia Italiana*. <[http://www.treccani.it/enciclopedia/zamberti\\_\(Enciclopedia\\_Italiana\)/>](http://www.treccani.it/enciclopedia/zamberti_(Enciclopedia_Italiana)/>). [Consultado em 2013-03-24].
- [Clagett 2008] Marshall Clagett, “Adelard of Bath”, em *Complete Dictionary of Scientific Biography*. <<http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900045.html>>. [Consultado em 2013-10-15].
- [Companhia de Jesus] “Companhia de Jesus”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <[http://www.infopedia.pt/\\$companhia-de-jesus](http://www.infopedia.pt/$companhia-de-jesus)>. [Consultado em 2013-03-22].

- [Dechales 1672] Claude François Milliet Dechales, *Huict livres des Éléments d'Euclide rendus plus faciles*. Lyon: Benoist Coral, 1672.
- [Delumeau 1984] Jean Delumeau, *A Civilização do Renascimento*. Lisboa: Edições 70, 1984.
- [Descartes] René Descartes, *Discurso do Método. Tradução e organização de Tavares Guimarães*. Porto: Porto Editora.
- [Descartes 1637] René Descartes, *Discours de la Méthode. Pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique. Les Météores et la Géométrie. Qui sont des essais de cette Méthode*. Leiden: Ian Maire, 1637.
- [Drake 1987] Stillman Drake, “Euclid Book V from Eudoxus to Dedekind”, em *Cahiers d'histoire et de Philosophie des sciences*. n.s. 21 (1987), p. 52–64. Re-impreso em S. Drake, *Essays on Galileo and the History and Philosophy of Science*. 3 vols. Toronto: University of Toronto Press. Volume 3, p. 61-75.
- [Euclides 1768] Euclides, *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, do undécimo, e duodécimo da versão latina*. Lisboa: Oficina de Miguel Manescal da Costa, 1768. Traduzido por João Ângelo Brunelli a partir da versão latina de Federico Commandino.
- [Europa do Renascimento] “Europa do Renascimento (sécs. XIV-XVI)”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <[http://www.infopedia.pt/\\$europa-do-renascimento-\(secs.-xiv-xvi\)](http://www.infopedia.pt/$europa-do-renascimento-(secs.-xiv-xvi))>. [Consultado em 2013-03-22].
- [Fernandes 2006] Cássio da Silva Fernandes, “Jacob Burckhardt e a preparação para a *Cultura do Renascimento na Itália*”, em *Fénix – Revista de História e Estudos Culturais*. Volume 3, Ano III, Número 3, julho/agosto/setembro 2003. <<http://www.revistafenix.pro.br/PDF8/ARTIGO2-Cassioda.Silva.Fernandes.pdf>> [consultado em 2013-03-22].
- [Fortes 1724] Manoel de Azevedo Fortes, *Geometria Especulativa. Trigonometria Espherica, modo de riscar edar aguadas nas plantas militares*. Biblioteca Pública de Évora, Cód. Manizola 258. Ms datado de 1724.
- [Fortes 1744] Manoel de Azevedo Fortes, *Lógica racional, geométrica e analítica*. Lisboa: Oficina de José António Plates, 1744.
- [Fortes 2002] Manoel de Azevedo Fortes, *Lógica Racional*. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 2002. Reedição da Parte I.
- [Galileu] “Galileu Galilei”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <[http://www.infopedia.pt/\\$galileu-galilei](http://www.infopedia.pt/$galileu-galilei)> [Consultado em 2013-03-22].

- [Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira] *Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira*. Lisboa, Rio de Janeiro: Editorial Enciclopédia, Limitada. 40 volumes publicados entre 1935-1960.
- [Heath 1956] Thomas Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath*. 3 vols. 2.<sup>a</sup> edição. Nova Iorque: Dover Publications, 1956.
- [Heath 1981] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics – From Thales to Euclid*. Nova Iorque: Dover Publications, 1981. Volume 1.
- [Humanismo] “Humanismo”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <[http://www.infopedia.pt/\\$humanismo](http://www.infopedia.pt/$humanismo)> [Consultado em 2013-04-15].
- [Inatismo] “Inatismo”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <<http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/inatismo>>. [Consultado em 2013-09-15].
- [Katz 2009] Victor J. Katz, *A History of Mathematics An Introduction*. 3.<sup>a</sup> edição. Addison-Wesley, 2009.
- [Knorr 1975] Wilbur Richard Knorr, *The evolution of the Euclidean Elements. A study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Dordrecht, Boston: D. Reidel Publishing Company, 1975. Volume 15.
- [Lamandé 2013] Pierre Lamandé, “Quelques conceptions de la théorie des proportions dans des traités de la seconde moitié du dix-septième siècle”, em *Archive for History of Exact Sciences*, 67 (2013). Springer-Verlag, 2013. p. 595-636.
- [Lamy 1692] Bernard Lamy, *Éléments des Mathématiques ou Traité de la grandeur en général, qui comprend L'Arithmétique, L'Algèbre, L'Analyse, et les Principes de toutes les Sciences qui ont la Grandeur pour objet*. 3.<sup>a</sup> edição. Amesterdão: Paul Marret, 1692.
- [Lamy 1731] Bernard Lamy, *Les Éléments de Géométrie ou de la mesure de l'entendu: qui comprennent les Eléments d'Euclide; les plus belles Propositions d'Archimède touchant le Cercle, la Sphère, le Cylindre & le Cône, avec une idée de l'Analyse, & une introduction aux Sections Coniques*. 5.<sup>a</sup> edição. Paris: La Veuve Delaulne, 1731.
- [Lamy 1734] Bernard Lamy, *Ouvrages de Mathématique du R. P. Bernard Lamy, Prêtre de l'Oratoire*. 3 vols. 5.<sup>a</sup> edição. Amesterdão: Pierre Mortier, 1734.
- [Loidi 2005] Juan Navarro Loidi, “Los Elementos de Euclides en castellano - 7.5. Andrés Puig”, em *divulgaMat - Centro virtual de divulgación de las matemáticas*. Real Sociedad Matemática Española. <[http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com\\_content&view=article&id=10674&directory=67&limitstart=13](http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10674&directory=67&limitstart=13)>. [Consultado em 2013-10-23].

- [Malet 2012] Antoni Malet, “Euclid’s swan song: Euclid’s *Elements* in early modern Europe”, em Paula Olmos (Ed.), *Greek Science in the Long Run: Essays on the Greek Scientific Tradition (4th c. BCE-17th c. CE)*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2012. p. 205-234.
- [Masotti 1991] Arnaldo Masotti, “Tartaglia, Niccolò”, em Charles Coulston Gillispie (Ed), *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Nova Iorque: Simon & Schuster Macmillan, 1991. Volume 4, p. 2418-2421.
- [O’Connor 1999] John J. O’Connor; Edmund F. Robertson, “Gherard of Cremona”, em *MacTutor History of Mathematics*. <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gherard.html>>. [Consultado em 2013-10-15].
- [O’Connor 2002] John J. O’Connor; Edmund F. Robertson, “Jacques Ozanam”, em *MacTutor History of Mathematics*. <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ozanam.html>>. [Consultado em 2013-07-31].
- [O’Connor 2008] John J. O’Connor; Edmund F. Robertson, “Bernard Lamy”, em *MacTutor History of Mathematics*. <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lamy.html>>. [Consultado em 2013-10-15].
- [Oliveira 1995] A. J. Franco de Oliveira, *Geometria Euclidiana*. Lisboa: Universidade Aberta, 1995.
- [Ozanam 1693] Jacques Ozanam, *Cours de Mathématique*. 5 vols. Paris: Jean Jombert, 1693.
- [Paccioli] “Luca Paccioli”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <[http://www.infopedia.pt/\\$luca-paccioli](http://www.infopedia.pt/$luca-paccioli)>. [Consultado em 2013-03-22].
- [Palladino 1991] Franco Palladino, “Sulla teoria delle proporzioni nel Seicento”, em *Nuncius*. Nápoles: Brill, 1991. Volume 6, n.º 2, p. 33-81.
- [Palmieri 2001] Paolo Palmieri, “The Obscurity of the Equimultiples - Clavius’ and Galileo’s foundational studies of Euclid’s theory of proportions”, em *Archive for History of Exact Sciences*, 55 (2001). Springer-Verlag, 2001. p. 555-597.
- [Puig 1715] Andrès Puig *Arithmetica Especulativa, y Pratica y Arte de Álgebra*. 4.ª edição. Barcelona: Joseph Giralt, 1715.
- [Ribeiro 2003] Dulcyene Maria Ribeiro, *A Obra “Lógica Racional, Geométrica e Analítica” (1744) de Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749): um estudo das possíveis contribuições para o desenvolvimento educacional luso-brasileiro*. Rio Claro: Universidade Estadual de São Paulo, 2003. Tese de mestrado.

- [Ribeiro 2009] Dulcyene Maria Ribeiro, *A formação dos engenheiros militares: Azevedo Fortes, Matemática e ensino da Engenharia Militar no século XVIII em Portugal e no Brasil*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009. Tese de doutoramento.
- [Rosen 1991] Edward Rosen, “Commandino, Federico”, em Charles Coulston Gillispie (Ed), *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Nova Iorque: Simon & Schuster Macmillan, 1991. Volume 1, p. 522-523.
- [Sá 2000] Carlos Correia de Sá, “Matemática na Grécia Antiga”, em Maria Fernanda Estrada et al., *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. p. 119-367.
- [Schaaf 2008] William Schaaf, “Claude François Millet Dechaes”, em *Complete Dictionary of Scientific Biography*. <<http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901106.html>>. [Consultado em 2013-06-17].
- [Schonbeck 1994] Jurgen G. Schonbeck, “Euclidean and Archimedean traditions in the Middle Ages and the Renaissance”, em Grattan-Guinness (Ed.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Londres, Nova Iorque: Routledge, 1994. Volume 1, p. 173-184.
- [Sensismo] “Sensismo”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <<http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/sensismo>>. [Consultado em 2013-09-15].
- [Settle 1991] Thomas B. Settle, “Borelli, Giovanni Alfonso”, em Charles Coulston Gillispie (Ed), *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Nova Iorque: Simon & Schuster Macmillan, 1991. Volume 1, p. 318-326.
- [Stromholm 1991] Per Stromholm, “Tacquet, Andreas”, em Charles Coulston Gillispie (Ed), *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Nova Iorque: Simon & Schuster Macmillan, 1991. Volume 4, p. 2402-2403.
- [Tacquet 1665] Andreas Tacquet, *Elementa geometriae planae ac solidae*. 2.<sup>a</sup> edição. Antuérpia, 1665.
- [Toomer 1991] G. J. Toomer, “Campanus of Novara”, em Charles Coulston Gillispie (Ed), *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Nova Iorque: Simon & Schuster Macmillan, 1991. Volume 1, p. 394-399.
- [Tratado] “Tratado”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <<http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/tratado>>. [Consultado em 2013-08-06].
- [Vasari] “Giorgio Vasari”, em *Infopédia* [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2013. <[http://www.infopedia.pt/\\$giorgio-vasari](http://www.infopedia.pt/$giorgio-vasari)>. [Consultado em 2013-03-22].

[Whiston 1728] William Whiston, *The Elements of Euclid: with select Theorems out of Archimedes, By the Learned Andrew Tacquet*. 6.<sup>a</sup> edição. Dublin: Booksellers, 1728.

## **ANEXOS**



## **ANEXO I**

### COMPARAÇÃO ENTRE MANOEL DE CAMPOS E TACQUET – LIVROS V E VI



| Tacquet   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1ª Parte  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definições 1 a 6 ]A</li> <li>- 3 Explicações ]C</li> <li>- Definições 7 a 11 ]B</li> <li>- Axioma (4ª proporcional)</li> <li>- Proposições I a VI → Supérfluas</li> <li>- Proposições VII a XII</li> <li>- Proposições XIII e XIV → Supérfluas</li> <li>- Proposições XV a XIX</li> <li>- Proposições XX e XXI → Supérfluas</li> <li>- Proposições XXII a XXV</li> <li>- Proposições a XXVI a XXXV [são de Papo]</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 2.ª Parte | <p>"Explicação" do Princípio dos Equimúltiplos de Euclides</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lema 1</li> <li>- Lema 2</li> <li>- Teorema 1</li> <li>- Teorema 2</li> <li>- Teorema 3</li> <li>- Teorema 4</li> <li>- Teorema 5</li> <li>- Teorema 6</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 3ª Parte  | <p>I. Divisão das Proporções.<br/> II. Do denominador da Proporção Racional.<br/> III. Do denominador da Proporção Irracional.<br/> IV. Axiomas.<br/> V. Da soma e subtração das razões racionais.<br/> VI. Da soma e subtração das razões irracionais.<br/> VII. Da multiplicação e divisão das razões racionais.<br/> VIII. Da multiplicação das razões irracionais.<br/> IX. Da divisão das razões irracionais.<br/> X. Da composição das razões.<br/> XI. A composição das razões não é outra coisa mais que a multiplicação das mesmas razões.<br/> <b>Escolio</b><br/> XII. Dadas quaisquer quantidades ou números, a razão do primeiro termo para o último é composta de todas as razões intermédias.<br/> XIII.<br/> XIV. A razão composta de quaisquer razões não é o mesmo que a soma delas.</p> |

| Manoel de Campos |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definições 1 a 6 ]A</li> <li>- Definição 7 ]B</li> <li>- Nota sobre Partes alíquotas e razões semelhantes ]C</li> <li>- Definições 8 a 11 ]B</li> <li>- Notas sobre Notações</li> <li>- Definições 12; 14 a 18 [Tacquet não coloca]</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|                  | <p><b>Teoremas fundamentais</b></p> <p>§ I. Explicação e demonstração do Princípio dos Equimúltiplos de Euclides</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lema I</li> <li>- Lema II</li> <li>- Teorema 1</li> <li>- Teorema 2</li> <li>- Teorema 3</li> <li>- Teorema 4</li> </ul> <p>§ II. Explicação do Princípio dos Modernos das Equi-alíquotas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema 5</li> <li>- Teorema 6</li> <li>- Conclusão</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                  | <p><b>Proposições</b> (refere que este Livro tem vinte e cinco proposições, de entre as quais dez não têm "uso". Utilizou a mesma numeração de Euclides. Às quinze proposições de Euclides acrescentou dez de Papo)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Axioma (4ª proporcional)</li> <li>- Proposições I a VI → Supérfluas</li> <li>- Proposições VII a XII</li> <li>- Proposições XIII e XIV → Supérfluas</li> <li>- Proposições XV (+ Corolário) a XIX</li> <li>- Proposições XX e XXI → Supérfluas</li> <li>- Proposições XXII a XXV</li> <li>- Proposições a XXVI a XXXV [são de Papo]</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|                  | <p><b>Appendiz I: Dos denominadores, algarismo e composição das proporções</b></p> <p>§ I. Divisão das Proporções<br/> § II. Do denominador da Proporção Racional<br/> § III. Do denominador da Proporção Irracional<br/> § IV. Axiomas<br/> § V. Da soma e subtração das razões racionais<br/> § VI. Da soma e subtração das razões irracionais<br/> § VII. Da multiplicação e divisão das razões racionais<br/> § VIII. Da multiplicação das razões irracionais<br/> § IX. Da divisão das razões irracionais<br/> § X. Da composição das razões<br/> § XI. A composição das razões não é outra coisa mais que a multiplicação das mesmas razões<br/> Lema (achar o denominador do produto de duas razões)<br/> § XII. Dadas quaisquer quantidades ou números, a razão do primeiro termo para o último é composta de todas as razões intermédias<br/> § XIII. A razão composta de quaisquer razões não é o mesmo que a soma delas</p> |

**Nota:** As letras A, B, C, ... colocadas nas duas tabelas, traduzem a correspondência verificada entre as duas obras.

## LIVRO VI

| Tacquet                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Manoel de Campos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| DEFINIÇÕES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Definição 1: Figuras semelhantes<br>Definição 2: Figuras recíprocas<br>Definição 3: Altura de uma figura<br>Definição 4: Arcos semelhantes                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Definição 1: Figuras retilíneas semelhantes<br>Definição 2: Figuras recíprocas<br>Definição 3: Reta dividida em média e extrema razão<br>Definição 4: Altura de uma figura<br>Definição 5: Razão composta de outras razões<br>Definição 6: Arcos semelhantes                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| PROPOSIÇÕES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Proposição I + Corolário<br>Proposição II + Corolário<br>Proposição III<br>Proposição IV + Corolários<br>Proposição V<br>Proposição VI<br>Proposição VII → Sem uso<br>Proposição VIII + Corolários<br>Proposição IX<br>Proposição X<br>Escolio<br>Proposição XI + Aliter + Escolio<br>Lemas 1 e 2<br>Problema<br>Teorema<br>Proposição XII + Escolio<br>Proposição XIII + Corolário + Escolio<br>Modo de Platão<br>Modo de Bisâncio<br>Modo de Descartes<br>Proposição XIV<br>Proposição XV + Corolário<br>Proposição XVI<br>Proposição XVII + Corolário<br>Proposição XVIII<br>Problema XIX<br>Problema XX + Corolários<br>Problema XXI<br>Problema XXII<br>Problema XXIII + Corolários<br>Problema XXIV<br>Proposição XXV<br>Problema XXVI<br>Proposições XXVII a XXIX → São de pouca utilidade<br>Proposição XXX<br>Problema XXXI + Corolário<br>Proposição XXXII → Dificilmente têm uso<br>Problema XXXIII + Corolários | Proposição I (Teorema) + Corolário<br>Proposição II (Teorema) + Corolário<br>Proposição III (Teorema)<br>Proposição IV (Teorema) + Corolários<br>Proposição V (Teorema)<br>Proposição VI<br>Proposição VII → Inútil<br>Proposição VIII (Teorema) + Corolários<br>Proposição IX (Problema)<br>Proposição X (Problema)<br>Escolio<br>Proposição XI (Problema) + Escolio<br>Lemas 1 e 2<br>Problema<br>Teorema<br>Proposição XII (Problema) + Escolio<br>Proposição XIII (Problema) + Corolário + Escolio<br>1. Modo de Platão<br>2. Modo de Bisâncio<br>3. Modo de Descartes<br>Proposição XIV <sup>152</sup> (Teorema)<br>Proposição XV (Teorema) + Corolário<br>Proposição XVI (Teorema)<br>Proposição XVII (Teorema) + Corolário<br>Proposição XVIII (Problema)<br>Problema XIX (Teorema)<br>Problema XX (Teorema) + Corolários<br>Problema XXI (Teorema)<br>Problema XXII (Teorema)<br>Problema XXIII (Teorema) + Corolários<br>Problema XXIV (Teorema)<br>Proposição XXV (Problema)<br>Problema XXVI (Teorema)<br>Proposições XXVII a XXIX → Não têm uso<br>Proposição XXX (Problema)<br>Problema XXXI (Teorema) + Corolário<br>Proposição XXXII → Não tem uso<br>Problema XXXIII (Teorema) + Corolários |

<sup>152</sup> Esta proposição surge numerada como XVI e não como XIV.

## **ANEXO II**

### LIVROS V E VI – COMPARAÇÃO ENTRE DIVERSOS AUTORES



# LIVRO V

## DEFINIÇÕES

|       | Elementos                            | Tacquet                                                                                 | Manoel de Campos                            | Dechales                                                                                                                                                                                                                           | Ozanam                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Azevedo Fortes                                                                          |  |
|-------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--|
|       |                                      | 1665                                                                                    | 1735                                        | 1672                                                                                                                                                                                                                               | 1693                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1724                                                                                    |  |
| I     | Parte                                | <b>Parte</b> , recorrendo ao conceito de partes alíquotas e aliquantas                  |                                             | <b>Parte</b> , recorrendo ao conceito de partes alíquotas e aliquantas                                                                                                                                                             | <b>Parte</b> , recorrendo ao conceito de partes alíquotas e aliquantas<br>Conceitos novos: todo, quebrado; numerador e denominador                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                         |  |
| II    | Grandeza múltipla                    | [Quantidade] <b>Múltiplice</b> ou <b>múltipla</b>                                       |                                             | [Quantidade] <b>Múltipla</b><br>Acrescenta conceitos de: razão dupla e tripla                                                                                                                                                      | <b>Grandeza Múltipla</b><br>Acrescenta conceitos de: razão dupla e tripla; submúltiplice                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                         |  |
| III   | Razão                                | <b>Razão</b> ou <b>proporção</b>                                                        |                                             | <b>Razão</b>                                                                                                                                                                                                                       | <b>Equimúltiplices</b> segundo Euclides, mas apresenta uma explicação diferente                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |
| IV    | Razão entre grandezas                | <b>Razão</b> ou <b>proporção racional</b> e <b>razão</b> ou <b>proporção irracional</b> |                                             | <b>Razão</b> entre grandezas<br>Referência a serem grandezas do mesmo género;<br>Acrescenta conceitos de: termos de uma razão, antecedente e conseqüente; razão racional e irracional (grandezas comensuráveis e incommensuráveis) | <b>Razão</b><br>Contém as Definições III e IV de Euclides<br>Define: grandezas homogêneas/ heterogêneas; termos da razão.<br>Refere o conceito de divisão para determinar a razão entre duas grandezas, que designa de quantidade de razão.<br>Define: razão de igualdade e razão de desigualdade; razão de maior e de menor desigualdade; razão dupla e tripla; razão de número a número (ou racional) e razão surda (ou irracional); razão geométrica e razão aritmética |                                                                                         |  |
| V     | Grandezas têm entre si a mesma razão | <b>Razões semelhantes, iguais</b> ou as <b>mesmas</b>                                   |                                             | Quatro <b>grandezas</b> têm a <b>mesma razão</b>                                                                                                                                                                                   | <b>Razões iguais</b> ou <b>semelhantes</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                         |  |
| VI    | Grandezas proporcionais              | Razões <i>dessemelhantes</i> , desiguais ou diversas                                    |                                             | Razão maior                                                                                                                                                                                                                        | Grandezas proporcionais                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Razão maior                                                                             |  |
| VII   | Razão maior                          | Partes semelhantes                                                                      |                                             | Quantidades proporcionais                                                                                                                                                                                                          | Razão maior                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Proporção ou analogia (semelhança ou igualdade de razões)                               |  |
| VIII  | Proporção em três termos             | Quantidades continuamente proporcionais                                                 |                                             | Analogia ou proporção (semelhança de razões)                                                                                                                                                                                       | Proporção ou analogia                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Razão duplicada e triplicada (numa progressão geométrica)                               |  |
| IX    | Razão duplicada                      | Quantidades descontinuamente proporcionais                                              |                                             | A proporção deve ter três termos                                                                                                                                                                                                   | Grandezas continuamente proporcionais                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                         |  |
| X     | Razão triplicada                     | Razão duplicada e triplicada                                                            |                                             | Grandezas continuamente proporcionais                                                                                                                                                                                              | Razão duplicada e triplicada (numa progressão geométrica)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                         |  |
| XI    | Grandezas correspondentes            | Quantidades homólogas                                                                   |                                             | Razão duplicada e triplicada                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |
| XII   | Razão alternada                      |                                                                                         | Alternar ou permutar                        | Grandezas homólogas                                                                                                                                                                                                                | DEFINIÇÕES NÃO NUMERADAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                         |  |
| XIII  | Razão inversa                        |                                                                                         |                                             | Razão alterna ou permutada                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |
| XIV   | Composição de razões                 |                                                                                         | Compor                                      | Razão conversa                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Grandezas proporcionais (entre a Def. 5ª e a Def. 6ª), corresponde à Def. VI de Ozanam; |  |
| XV    | Divisão de razões                    |                                                                                         | Dividir                                     | Composição de razões                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |
| XVI   | Conversão de razões                  |                                                                                         | Converter                                   | Divisão de razões                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |
| XVII  | Igualdade de razões                  |                                                                                         | Argumentar por igual ou igualdade de razões | Conversão de razões                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |
| XVIII | Proporção perturbada                 |                                                                                         | Razão composta                              | Razão de igualdade                                                                                                                                                                                                                 | Razão composta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                         |  |
|       |                                      |                                                                                         |                                             | Razão de igualdade ordenada e desordenada                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                         |  |

# LIVRO V

## PROPOSIÇÕES

| ELEMENTOS | TACQUET                                                                                                                                            | MANOEL DE CAMPOS          | DECHALES                                                                                                                 | OZANAM                                                                                                                                                              | AZEVEDO FORTES                                                                         |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
|           | 1665                                                                                                                                               | 1735                      | 1672                                                                                                                     | 1693                                                                                                                                                                | 1724                                                                                   |
|           | Axioma (4ª proporcional)                                                                                                                           |                           |                                                                                                                          |                                                                                                                                                                     |                                                                                        |
| I a VI    | Estas proposições não são colocadas por servirem para demonstrar as restantes pelo Método dos Equimúltiplos, que não é utilizado por estes autores |                           | Estas proposições servem apenas para provar as outras por meio dos equimúltiplos, que não são utilizados por este autor. | Não são apresentadas neste momento e serão apresentadas quando for necessário para demonstrar outras proposições.                                                   |                                                                                        |
| VII       | Proposição VII                                                                                                                                     |                           | Proposição VII                                                                                                           | Proposição VII (Teorema VII)                                                                                                                                        | Proposição 7ª (Teorema)                                                                |
| VIII      | Proposição VIII                                                                                                                                    |                           | Proposição VIII                                                                                                          | Proposição VIII (Teorema VIII)                                                                                                                                      | Proposição 8ª (Teorema)                                                                |
| IX        | Proposição IX                                                                                                                                      |                           | Proposição IX                                                                                                            | Proposição IX (Teorema IX)                                                                                                                                          | Proposição 9ª (Teorema)                                                                |
| X         | Proposição X                                                                                                                                       |                           | Proposição X                                                                                                             | Proposição X (Teorema X)                                                                                                                                            | Proposição 10ª (Teorema)                                                               |
| XI        | Proposição XI                                                                                                                                      |                           | Proposição XI                                                                                                            | Proposição XI (Teorema XI)                                                                                                                                          | Proposição 11ª (Teorema)                                                               |
| XII       | Proposição XII                                                                                                                                     |                           | Proposição XII                                                                                                           | Proposição XII (Teorema XII)                                                                                                                                        | Proposição 12ª (Teorema)                                                               |
| XIII      | Supérfluas                                                                                                                                         |                           | Proposição XIII                                                                                                          | Proposição XIII (Teorema XIII)                                                                                                                                      | Proposição 13ª (Teorema)                                                               |
| XIV       |                                                                                                                                                    |                           | Proposição XIV                                                                                                           | Proposição XIV (Teorema XIV) + Lemas                                                                                                                                | Proposição 14ª (Teorema) + Lemas <sup>153</sup>                                        |
| XV        | Proposição XV                                                                                                                                      | Proposição XV + Corolário | Proposição XV + Corolário                                                                                                | Proposição XV (Teorema XV)                                                                                                                                          | Proposição 15ª (Teorema)                                                               |
| XVI       | Proposição XVI + Escolio                                                                                                                           |                           | Proposição XVI (A razão alterna) + Lema<br>A razão conversa + Corolário                                                  | Proposição XVI (Teorema XVI)<br>Define razão alterna<br>Escolio (razão inversa)                                                                                     | Proposição 16ª (Teorema)<br>Define razão alterna<br>Escolio (razão inversa)            |
| XVII      | Proposição XVII                                                                                                                                    |                           | Proposição XVII <sup>154</sup> (Divisão de razão)                                                                        | Proposição XVII (Teorema XVII - divisão de razão)<br>Explica a divisão de razão<br>Escolio (conversão de razão)                                                     | Proposição 17ª (Teorema)<br>Explica a divisão de razão<br>Escolio (conversão de razão) |
| XVIII     | Proposição XVIII + Corolários                                                                                                                      |                           | Proposição XVIII <sup>155</sup> (composição de razão) + Corolário (conversão de razão)                                   | Proposição XVIII (Teorema XVIII - composição de razão)<br>Expõe o conceito de composição de razões<br>Escolio                                                       | Proposição 18ª (Teorema)<br>Expõe o conceito de composição de razões<br>Escolio        |
| XIX       | Proposição XIX                                                                                                                                     |                           | Proposição XIX                                                                                                           | Consideradas inúteis                                                                                                                                                |                                                                                        |
| XX e XXI  | Supérfluas                                                                                                                                         |                           | Não são necessárias                                                                                                      |                                                                                                                                                                     |                                                                                        |
| XXII      | Proposição XXII                                                                                                                                    |                           | Proposição XXII (a razão com ordem)                                                                                      | Proposição XXII (Teorema XXII - Razão de igualdade com ordem)<br>Apresenta os conceitos de razão de igualdade; razão de igualdade com ordem, ou proporção ordenada. | Proposição 22ª (Teorema)<br>Define razão de igualdade ordenada                         |

<sup>153</sup> Lema 1: Se quatro grandezas forem proporcionais, o produto dos dois extremos é igual ao produto dos dois meios. Lema 2: Se o produto dos dois extremos é igual ao produto dos meios, as quatro grandezas serão proporcionais.

<sup>154</sup> Esta proposição surge numerada como VII e não como XVII.

<sup>155</sup> Esta proposição surge numerada como VII e não como XVIII.

# LIVRO V

## PROPOSIÇÕES

(CONTINUAÇÃO)

| ELEMENTOS | TACQUET                            | MANOEL DE CAMPOS | DECHALES                                            | OZANAM                                                                                          | AZEVEDO FORTES                                                          |
|-----------|------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
|           | 1665                               | 1735             | 1672                                                | 1693                                                                                            | 1724                                                                    |
| XXIII     | Proposição XXIII + Escolio         |                  | Proposição XXIII (a razão sem ordem)                | Proposição XXIII (Teorema XXIII)<br>Define razão de igualdade sem ordem ou proporção perturbada | Proposição 23ª (Teorema)<br>Define proporção perturbada ou não ordenada |
| XXIV      | Proposição XXIV                    |                  | Proposição XXIV                                     | Proposição XXIV (Teorema XXIV - Razão de igualdade sem ordem) + Escolio                         | Proposição 24ª (Teorema) + Escolio                                      |
| XXV       | Proposição XXV                     |                  | Proposição XXV                                      | Proposição XV (Teorema XV)                                                                      | Proposição 25ª (Teorema)                                                |
|           | Acrescenta dez proposições de Papo |                  | Acrescenta nove proposições que não são de Euclides |                                                                                                 |                                                                         |

LIVRO VI

DEFINIÇÕES

|     | ELEMENTOS                                                  | TACQUET              | MANOEL DE CAMPOS                                          | DECHALES                                                  | OZANAM                                                                                        | AZEVEDO FORTES |
|-----|------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|     |                                                            | 1665                 | 1735                                                      | 1672                                                      | 1693                                                                                          | 1724           |
| I   | Figuras retilíneas semelhantes                             | Figuras semelhantes  | Figuras retilíneas semelhantes                            | Figuras retilíneas semelhantes                            | Figuras retilíneas semelhantes (Acrescentam explicações)                                      |                |
| II  | Figuras recíprocas                                         | Figuras recíprocas   | Figuras recíprocas                                        | Figuras Recíprocas                                        | Figuras recíprocas (Acrescentam explicações)                                                  |                |
| III | Linha [segmento de] reta dividida em média e extrema razão | Altura de uma figura | Reta [segmento de reta] dividida em média e extrema razão | Linha [segmento de reta] cortada em média e extrema razão | Linha [segmento de reta] cortada / partida em média e extrema razão (Acrescentam explicações) |                |
| IV  | Altura de uma figura                                       | Arcos semelhantes    | Altura de uma figura                                      | Altura de uma figura                                      | Altura de uma figura                                                                          |                |
| V   | Razão composta de razões                                   |                      | Razão composta de outras razões                           | Razão composta                                            |                                                                                               |                |
|     |                                                            |                      | Arcos semelhantes                                         |                                                           |                                                                                               |                |

LIVRO VI

PROPOSIÇÕES

| ELEMENTOS | TACQUET                                                 | MANOEL DE CAMPOS                                                                | DECHALES                              | OZANAM                                 | AZEVEDO FORTES                      |
|-----------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|
|           | 1665                                                    | 1735                                                                            | 1672                                  | 1693                                   | 1724                                |
| I         | Proposição I + Corolário                                | Proposição I (Teorema) + Corolário                                              | Proposição I (Teorema)                | Proposição I (Teorema I)               | Proposição 1ª (Teorema)             |
| II        | Proposição II + Corolário                               | Proposição II (Teorema) + Corolário                                             | Proposição II (Teorema)               | Proposição II (Teorema II)             | Proposição 2ª (Teorema)             |
| II        | Proposição III                                          | Proposição III (Teorema)                                                        | Proposição III (Teorema)              | Proposição III (Teorema III)           | Proposição 3ª (Teorema)             |
| IV        | Proposição IV + Corolários                              | Proposição IV (Teorema) + Corolários                                            | Proposição IV (Teorema) + Corolário   | Proposição IV (Teorema IV) + Escolio   | Proposição 4ª (Teorema) + Escolio   |
| V         | Proposição V                                            | Proposição V (Teorema)                                                          | Proposição V (Teorema)                | Proposição V (Teorema V)               | Proposição 5ª (Teorema)             |
| VI        | Proposição VI                                           | Proposição VI                                                                   | Proposição VI (Teorema)               | Proposição VI (Teorema VI)             | Proposição 6ª (Teorema)             |
| VII       | Proposição VII -> Sem uso                               | Proposição VII -> Inútil                                                        | Omitida                               | Desnecessária                          |                                     |
| VIII      | Proposição VIII + Corolários                            | Proposição VIII (Teorema) + Corolários                                          | Proposição VIII (Teorema) + Corolário | Proposição VIII (Teorema VIII)         | Proposição 8ª (Teorema)             |
| IX        | Proposição IX                                           | Proposição IX (Problema)                                                        | Proposição IX (Problema)              | Proposição IX (Problema I)             | Proposição 9ª (Problema)            |
| X         | Proposição X                                            | Proposição X (Problema)                                                         | Proposição X (Problema)               | Proposição X (Problema II)             | Proposição 10ª (Problema)           |
| XI        | Proposição XI + Aliter <sup>156</sup> + Escolio         | Proposição XI (Problema) + Escolio                                              | Proposição XI (Problema)              | Proposição XI (Problema III)           | Proposição 11ª (Problema)           |
|           | Lemas 1 e 2                                             | Lemas 1 e 2 <sup>157</sup>                                                      |                                       |                                        |                                     |
|           | Problema                                                | Problema <sup>158</sup>                                                         |                                       |                                        |                                     |
|           | Teorema                                                 | Teorema <sup>159</sup>                                                          |                                       |                                        |                                     |
| XII       | Proposição XII + Escolio                                | Proposição XII (Problema) + Escolio                                             | Proposição XII (Problema)             | Proposição XII (Problema IV)           | Proposição 12ª (Problema)           |
| XIII      | Proposição XIII + Corolário + Escolio                   | Proposição XIII (Problema) + Corolário + Escolio                                | Proposição XIII (Problema)            | Proposição XIII (Problema V) + Escolio | Proposição 13ª (Problema) + Escolio |
|           | Modo de Platão<br>Modo de Bisâncio<br>Modo de Descartes | 1. Modo de Platão<br>2. Modo de Bisâncio<br>3. Modo de Descartes <sup>160</sup> |                                       |                                        |                                     |
| XIV       | Proposição XIV                                          | Proposição XIV <sup>161</sup> (Teorema)                                         | Proposição XIV (Teorema)              | Proposição XIV (Teorema IX)            | Proposição 14ª (Teorema)            |

<sup>156</sup> De outra maneira

<sup>157</sup> Lema 1: Se a razão de menor desigualdade se continuar por infinitos termos; vir-se-á a uma quantidade maior que qualquer assinada.

Lema 2: Se a razão de maior desigualdade se continuar por infinitos termos, vir-se-á a uma quantidade menor que qualquer assinada.

<sup>158</sup> Problema: Dada a razão de maior desigualdade continuá-la por infinitos termos, e determinar a soma de todos.

<sup>159</sup> Teorema: Em qualquer progressão decrescente, a diferença dos primeiros dois termos, o primeiro termo, e a soma de todos, continuam uma mesma razão.

<sup>160</sup> Estes três modos apresentados para “achar duas médias proporcionais entre duas retas [segmentos de retas] dadas”

<sup>161</sup> Esta proposição surge numerada como XVI e não como XIV.

## LIVRO VI

### PROPOSIÇÕES

(CONTINUAÇÃO)

| ELEMENTOS    | TACQUET                        | MANOEL DE CAMPOS                        | DECHALES                             | OZANAM                                      | AZEVEDO FORTES                       |
|--------------|--------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------|
|              | 1665                           | 1735                                    | 1672                                 | 1693                                        | 1724                                 |
| XV           | Proposição XV + Corolário      | Proposição XV (Teorema) + Corolário     | Proposição XV (Teorema)              | Proposição XV (Teorema X)                   | Proposição 15ª (Teorema)             |
| XVI          | Proposição XVI                 | Proposição XVI (Teorema)                | Proposição XVI (Teorema) + Corolário | Proposição XVI (Teorema XI)                 | Proposição 16ª (Teorema)             |
| XVII         | Proposição XVII + Corolário    | Proposição XVII (Teorema) + Corolário   | Proposição XVII (Teorema)            | Proposição XVII (Teorema XII)               | Proposição 17ª (Teorema)             |
| XVIII        | Proposição XVIII               | Proposição XVIII (Problema)             | Proposição XVIII (Problema)          | Proposição XVIII (Problema VI)              | Proposição 18ª (Problema)            |
| XIX          | Proposição XIX                 | Proposição XIX (Teorema)                | Proposição XIX (Teorema)             | Proposição XIX (Teorema XIII) + Corolário   | Proposição 19ª (Teorema) + Corolário |
| XX           | Proposição XX + Corolários     | Proposição XX (Teorema) + Corolários    | Proposição XX (Teorema) + Corolários | Proposição XX (Teorema XIV) + Corolário     | Proposição 20ª (Teorema) + Corolário |
| XXI          | Proposição XXI                 | Proposição XXI (Teorema)                | Proposição XXI (Teorema)             | Proposição XXI (Teorema XV)                 | Proposição 21ª (Teorema)             |
| XXII         | Proposição XXII                | Proposição XXII (Teorema)               | Proposição XXII (Teorema)            | Proposição XXII (Teorema XVI)               | Proposição 22ª (Teorema)             |
| XXIII        | Proposição XXIII + Corolários  | Proposição XXIII (Teorema) + Corolários | Proposição XXIII (Teorema)           | Proposição XXIII (Teorema XVII) + Escolio   | Proposição 23ª (Teorema) + Escolio   |
| XXIV         | Proposição XXIV                | Proposição XXIV (Teorema)               | Proposição XXIV (Teorema)            | Proposição XXIV (Teorema XVIII) + Escolio   | Proposição 24ª (Teorema) + Escolio   |
| XXV          | Proposição XXV                 | Proposição XXV (Problema)               | Proposição XXV (Problema)            | Proposição XXV (Problema VII)               | Proposição 25ª (Problema)            |
| XXVI         | Proposição XXVI                | Proposição XXVI (Teorema)               | Proposição XXVI (Teorema)            | São de pequena consequência                 |                                      |
| XXVII a XXIX | São de pouca utilidade         | Não têm uso                             | Não são colocadas                    |                                             |                                      |
| XXX          | Proposição XXX                 | Proposição XXX (Problema)               | Proposição XXX (Problema)            | Proposição XXX (Problema X)                 | Proposição 30ª (Problema)            |
| XXXI         | Problema XXXI + Corolário      | Problema XXXI (Teorema) + Corolário     | Proposição XXXI (Teorema)            | Proposição XXXI (Teorema XXI)               | Proposição 31ª (Teorema)             |
| XXXII        | Difícilmente têm uso           | Não tem uso                             | Não é colocada                       | Não é necessária                            |                                      |
| XXXIII       | Proposição XXXIII + Corolários | Problema XXXIII (Teorema) + Corolários  | Proposição XXXIII (Teorema)          | Proposição XXXIII (Teorema XXIII) + Escolio | Proposição 33ª (Teorema) + Escolio   |

## **ANEXO III**

### LÓGICA GEOMÉTRICA E LÓGICA ANALÍTICA – COMPARAÇÃO ENTRE AZEVEDO FORTES E LAMY



## LÓGICA GEOMÉTRICA

| LAMY                  |                                                                                                                                                           | AZEVEDO FORTES |                              |                                                                                                                                               |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ÉLÉMENTS DE GEOMETRIE | LIVRE PREMIER<br><i>(De la première espèce d'étendue, qui est la longueur. Des Lignes droites &amp; circulaires)</i>                                      | Section I      | Capítulo I                   | LIVRO I                                                                                                                                       |
|                       |                                                                                                                                                           | Section II     | Capítulo II                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section III    | Capítulo III                 |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section IV     | Capítulo IV                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section V      | Capítulo V                   |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section VI     | Capítulo VI                  |                                                                                                                                               |
|                       | LIVRE SECOND<br><i>(De la seconde espèce d'étendue, qui est la Largeur. Des Surfaces planes)</i>                                                          | Section I      | Capítulo I                   | LIVRO II<br><i>(Da segunda espécie de extensão, que é a largura das superfícies planas)</i>                                                   |
|                       |                                                                                                                                                           | Section II     | Capítulo II                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section III    | Capítulo III                 |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section IV     | Capítulo IV                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section V      | Capítulo V                   |                                                                                                                                               |
|                       | LIVRE TROISIEME<br><i>(Les propriétés qui conviennent à toute Grandeur, appliquées aux Lignes, Plans, Solides, &amp; démontrées)</i>                      | Section I      | Capítulo I                   | LIVRO III<br><i>(Das propriedades que convêm a qualquer grandeza aplicada às linhas, aos planos, aos sólidos, e demonstradas)</i>             |
|                       |                                                                                                                                                           | Section II     | Capítulo II                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section III    | Capítulo III                 |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section IV     | Capítulo IV                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section V      | AUSENTE                      |                                                                                                                                               |
|                       | LIVRE QUATRIEME<br><i>(Des raisons &amp; proportions des Lignes des Triangles, des Figures, tant de leurs côtés &amp; circuit, que de leurs surfaces)</i> | Section I      | Capítulo I                   | LIVRO IV<br><i>(Das razões e proporções das linhas, dos triângulos, das figuras, assim dos lados, como dos seus contornos, e superfícies)</i> |
|                       |                                                                                                                                                           | Section II     | Capítulo II                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section III    | Capítulo III                 |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section IV     | Capítulo IV                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section VI     | Capítulo V                   |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section V      | PRESENTE NA LÓGICA ANALÍTICA |                                                                                                                                               |
|                       | LIVRE CINQUIEME<br><i>(De la troisième espèce d'étendue, c'est-à-dire des Solides, comment les Solides se forment &amp; se mesurent)</i>                  | Section I      | Capítulo I                   | LIVRO V<br><i>(Da terceira espécie da extensão, ou dos sólidos)</i>                                                                           |
|                       |                                                                                                                                                           | Section II     | Capítulo II                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section III    | Capítulo III                 |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section IV     | Capítulo IV                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Section V      | AUSENTE                      |                                                                                                                                               |
|                       | LIVRE SIXIEME<br><i>(De la Méthode)</i>                                                                                                                   | 11 Chapitres   | AUSENTE                      |                                                                                                                                               |
|                       | INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES                                                                                                                        | Chapitre I     | Capítulo I                   | APPENDIX<br><i>(Das Secções Cónicas)</i>                                                                                                      |
|                       |                                                                                                                                                           | Chapitre II    | Capítulo II                  |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Chapitre III   | Capítulo III                 |                                                                                                                                               |
|                       |                                                                                                                                                           | Chapitre IV    | Capítulo IV                  |                                                                                                                                               |

## LÓGICA ANALÍTICA

|                            | LAMY                                                                                                                                                       |                         |                         | AZEVEDO FORTES              |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ÉLÉMENTS DES MATHÉMATIQUES | LIVRE TROISIEME<br><i>(Des raisons ou rapports que les Grandeurs ont entre elles)</i>                                                                      | Section Première        |                         | Capítulo I <sup>162</sup>   |              | Livro III<br><i>(Das razões em geral)</i>                                                            |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         |                         | Capítulo II <sup>163</sup>  |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            | Section Seconde         |                         | Capítulo III <sup>164</sup> |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            | Section Troisième       | Chapitre IV             | Capítulo IV                 |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre V              | Capítulo V                  |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre VI             | Capítulo VI                 |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            | LIVRE QUATRIEME<br><i>(Des raisons composés qu'ont les puissances entr'elles, &amp; toutes les Grandeurs de plusieurs Dimensions)</i>                      | Section Première        | Chapitre I, II, III, IV |                             | Capítulo I   |                                                                                                      | Livro IV<br><i>(Das razões que as potências têm entre si, e de todas as grandezas de muitas dimensões)</i> |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre V              |                             | Capítulo II  |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre VI             |                             | Capítulo III |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            | Section Seconde         |                         | Capítulo IV                 |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            | LIVRE CINQUIEME<br><i>(Des Fractions &amp; des Operations Arithmétiques sur les Fractions &amp; sur les Raisons)</i>                                       | Section Première        | Chapitre I              | Capítulo I                  |              | Livro V<br><i>(Dos quebrados e das operações da Aritmética sobre eles, considerados como razões)</i> |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre II             | Capítulo II                 |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre III            | Capítulo III                |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre IV             | Capítulo IV                 |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            | Section Seconde         | Chapitre I              | Capítulo V                  |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
|                            |                                                                                                                                                            |                         | Chapitre II             | Capítulo VI                 |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
| Section Troisième          |                                                                                                                                                            | Capítulo VII (reduzida) |                         |                             |              |                                                                                                      |                                                                                                            |
| ÉLÉMENTS DE GEOMETRIE      | LIVRE QUATRIEME<br><i>(Des raisons &amp; Proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtez &amp; circuit, que de leurs surfaces)</i> | Section V               |                         | Capítulo VIII               |              |                                                                                                      |                                                                                                            |

<sup>162</sup> Trata-se de uma adaptação e/ou resumo dos conteúdos abordados por Lamy nesta “Section”. Na *Lógica Analítica* não estão presentes todos os conceitos que surgem na obra de Lamy, sendo feita uma abordagem mais sintética dos conceitos apresentados e que também surgem em *Éléments des Mathématiques*.

<sup>163</sup> Não se verifica uma correspondência direta com alguma parte desta obra de Lamy.

<sup>164</sup> Este Capítulo III, que trata das razões aritméticas, poderá ter tido como fonte a “Section Second”. Esta conjectura é sustentada pelo facto de esta “Section” abordar de forma bastante completa as propriedades das Proporções e Progressões Aritméticas. No Capítulo III apenas é apresentado o conceito de razão aritmética e é feita uma breve referência às progressões aritméticas, assim como à sua propriedade principal. A omissão das propriedades relacionadas com esta temática é justificada pela alegada pouca utilidade que têm na Álgebra.