Universidade do Minho
Escola de Ciências

Catarina Alexandra Pereira Mota

A história do conceito de reta tangente em Portugal: um estudo desde o século XVIII até à matemática moderna

fevereiro de 2018

A história do conceito de reta tangente em Portugal: um estudo desde o século XVIII até à matemática moderna
Catarina Alexandra Pereira Mota
UMinho | 2018

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Catarina Alexandra Pereira Mota

A história do conceito de reta tangente em Portugal: um estudo desde o século XVIII até à matemática moderna

Tese de Doutoramento em Ciências
Especialidade em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Maria Elfrida Ralha
e da
Professora Doutora Maria Fernanda Estrada

fevereiro de 2018

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente tese. Confirmo que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer forma de falsificação de resultados.

Mais declaro que tomei conhecimento integral do Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, 8 de fevereiro de 2018

Nome completo: Catarina Alexandra Pereira Mota

Assinatura: Catarina Alexandra Pereira Mota

Para o Zé e para o Rodrigo

Gosto de ti desde aqui até à lua...

Agradecimentos

Ao longo dos anos em que este trabalho foi desenvolvido várias foram as pessoas que me acompanharam e ajudaram a chegar ao seu final, pelo que lhes devo um agradecimento público.

Às minhas orientadoras, Doutora Maria Elfrida Ralha e Doutora Maria Fernanda Estrada, por terem sido guias, a luz que iluminou o meu caminho, a mão que me apoiou nas quedas. Por terem estado disponíveis mesmo quando eu não estava, por terem compreendido sempre as minhas faltas de tempo e me terem ajudado a superar as minhas falhas. Por me terem transmitido a paixão pela história, dado a oportunidade de trabalhar com obras que nem sabia existirem e me terem ajudado a crescer como investigadora, como professora, mas principalmente como pessoa.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia, por ter financiado este trabalho através da Bolsa de Doutoramento com a referência SFRH/BD/63176/2009.

À Ângela Lopes por comigo ter partilhado este caminho e o seu trabalho, estando sempre disponível para ajudar. Foi uma honra tê-la ao meu lado neste caminho.

Ao Fernando Figueiredo agradeço todas as partilhas, informações, indicações, caminhos que me mostrou, e acima de tudo obrigada pela amizade e pelo apoio que sempre me deu.

Ao Doutor João Domingues e ao Doutor Leal Duarte o meu muito obrigada por todas as informações que me deram e por todo o material que me disponibilizaram ao longo destes anos.

À Marta Sofia, amiga de longa data, companheira de muitos anos, que mesmo não gostando de matemática esteve sempre lá para me ajudar nas traduções.

À Isabel Duarte, pela preciosa ajuda nas traduções do latim.

À minha família que sempre me apoiou, em mim acreditou e me perdoou a falta de tempo e de disponibilidade ao longo destes anos.

Aos meus pais, cuja ajuda ao longo da vida e dos anos deste doutoramento foi preciosa. Sem o seu apoio e o seu encorajamento este trabalho não teria sido possível. Obrigada por tudo o que me permitiram ser, por terem acreditado em mim e nos meus sonhos.

Ao Zé por ter estado sempre ao meu lado, por ter sempre percebido a minha necessidade em fazer este trabalho, por me ter ajudado sempre que precisei e por ter compreendido a minha falta de tempo. Obrigada por estares sempre lá e partilhares a tua vida comigo.

Ao Rodrigo, que espero um dia venha a perceber porque a mãe estava sempre a trabalhar e me perdoe as ausências em muitas brincadeiras. Este é o sonho que lhe deixo, para que ele saiba que se acreditarmos os sonhos se tornam realidade.

RESUMO

A história do conceito de reta tangente em Portugal: um estudo desde o século XVIII até à matemática moderna

O conceito de reta tangente a uma curva é um conceito milenar em matemática, amplamente estudado e retomado a partir de Euclides.

A presente investigação procura estudar o tratamento dado a este conceito, em Portugal, a partir do século XVIII. Para tal, analisamos obras de diferentes autores explorando as interpretações que cada um dos autores tem dos resultados enunciados muitos séculos antes por Euclides, nomeadamente: os *Elementos de Geometria* do Pe. jesuíta Manuel de Campos, tradução para português dos *Elementa Geometriæ* do também jesuíta André Tacquet; a *Geometria Especulativa* do engenheiro-mor do Reino Manuel de Azevedo Fortes, tradução portuguesa da obra de Euclides a partir da edição de Jacques Ozanam; a *Lógica Geométrica* também de Azevedo Fortes, contendo a tradução para português dos *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps* de Bernard Lamy.

Estudamos também a reforma pombalina da Universidade de Coimbra, em particular os seus *Estatutos*, e analisamos as obras utilizadas como livro de texto das disciplinas onde o conceito de reta tangente era estudado, a saber: os *Elementos de Euclides* na tradução de João Ângelo Brunelli a partir da edição de Robert Simson, livro de texto da disciplina de Geometria no 1.º ano; os *Elementos de Analyse* de Étienne Bezout, contendo a tradução para português do *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* do matemático francês, utilizados na disciplina do 2.º ano, a Álgebra. Debruçamo-nos sobre o professor de geometria, José Anastácio da Cunha, examinando quer os seus *Principios Mathematicos* quer alguns dos seus manuscritos ainda inéditos.

Debruçamo-nos ainda sobre o problema das tangentes na obra de Francisco Gomes Teixeira e encontramos em duas vertentes distintas: uma, mais didática, no *Curso de Analyse Infinitesimal*, livro de texto para a disciplina de Cálculo diferencial e integral que lecionou na Universidade do Porto; outra, mais científica, no seu *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* e em artigos científicos.

Terminamos a nossa investigação com uma análise da obra de Sebastião e Silva, que se dedica ao estudo do conceito de reta tangente imbuído do espírito da matemática moderna.

ABSTRACT

The history of the concept of tangent line in Portugal: a study since the 18th century until the modern mathematics

The concept of tangent line to a curve is an ancient concept in mathematics, widely studied since Euclid. Our research aims at studying scientifical and didactical aproaches given to this concept, in Portugal, starting from the 18th century.

We study works of different mathematicians exploring their interpretations of the results presented centuries earlier by Euclid, namely: *Elementos de Geometria*, by the Jesuit priest Manuel de Campos, a translation into Portuguese from *Elementa geometriæ* by the also Jesuit André Tacquet; *Geometria Especulativa* from the kingdom's master engineer Manuel de Azevedo Fortes, a portuguese translation of Euclid's work in Jacques Ozanam's edition; *Lógica Geométrica*, also by Azevedo Fortes, the Portuguese translation of Bernard Lamy's *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps.*

We also study the reform of University of Coimbra, in 1772, through the *Estatutos*, and analyzing the textbooks used in the disciplines where the concept of tangent line was studied, namely: *Elementos de Euclides*, translated into Portuguese by João Ângelo Brunelli from Robert Simson's edition, the textbook for Geometry; *Elementos de Analyse*, by Étienne Bezout, a Portuguese translation of the French mathematician's *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* used in the Algebra course.

In the 18th century we also study the approach given to our concept by José Anastácio da Cunha, namely in his *Principios Mathematicos* as well as in his manuscripts.

We study Francisco Gomes Teixeira's approach to the tangents' problem, identifying two different branches: a didactical one, in his *Curso de Analyse Infinitesimal*, the textbook for Differential and Integral Calculus' discipline, that Gomes Teixeira lectures at University of Porto; and a scientifical aproache, in his *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* and in scientific papers.

Our research ends with an analysis of José Sebastião e Silva's work, where he studies the concept of tangent line within the so called Modern Mathematics' spirit.

Índice

Agradecimentos **vii**

Resumo **ix**

Abstract **xi**

Índice **xiii**

Abreviaturas **xvii**

Índice de Figuras **xix**

Índice de Tabelas **xxiii**

Introdução **1**

Motivação e objetivos 1

Revisão da literatura 3

O conceito de reta tangente 3

A história da matemática no ensino da matemática 6

Metodologia 7

Estrutura da Tese 9

1 Os primórdios do conceito de reta tangente: Euclides **13**

1.1 Os *Elementos* 14

1.2 O conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos* 16

1.2.1 A definição 16

1.2.2 As proposições 17

1.3 A questão do ângulo de contingência 25

2 O conceito de reta tangente ao círculo, segundo o Padre Manuel de Campos **29**

2.1 O ensino da matemática nos colégios Jesuítas portugueses 30

2.2 Os *Elementos de geometria* do Pe. Manuel de Campos 33
2.3 O conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos de Geometria* 37
2.3.1 A relevância das proposições 39
2.3.2 A definição 40
2.3.3 As proposições 41
2.4 Manuel de Campos e o ângulo de contingência nos seus *Elementos de Geometria* 53

3 Manuel Azevedo Fortes e o conceito de reta tangente ao círculo 59
3.1 A matemática no ensino militar na primeira metade do século XVIII português . 60
3.2 A *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes 63
3.3 O conceito de reta tangente ao círculo na *Geometria Especulativa* 66
3.3.1 A definição 67
3.3.2 As proposições 68
3.4 A *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* de Azevedo Fortes 76
3.5 O conceito de reta tangente ao círculo na *Lógica Geométrica* 80
3.5.1 A definição 80
3.5.2 As proposições 81
3.6 Manuel de Azevedo Fortes e as razões de Galileu sobre o ângulo de contingência 93
3.7 Manuel de Campos & Azevedo Fortes 103

4 O conceito de reta tangente na Reforma Pombalina do Ensino Universitário 105
4.1 O ensino da Matemática segundo os *Estatutos* de 1772 106
4.1.1 A importância da matemática e da sua história 106
4.1.2 Matemático: uma "carreira especial" 109
4.1.3 As disciplinas matemáticas do Curso de Matemática 109
4.1.3.1 Geometria 109
4.1.3.2 Álgebra 112
4.1.3.3 Foronomia 113
4.1.3.4 Astronomia 113
4.2 O conceito de reta tangente ao círculo, segundo João Ângelo Brunelli 114
4.2.1 Os *Elementos de Euclides* 115
4.2.2 O conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos de Euclides* 117
4.2.2.1 A definição 117
4.2.2.2 As proposições 118
4.3 Manuel de Campos & João Ângelo Brunelli 121
4.4 Uma nova abordagem ao conceito de reta tangente, segundo Étienne Bezout . . . 122
4.4.1 *Elementos de Analisi Mathematica* e *Elementos de Analyse*, de Bezout . . 123

4.4.2 O conceito de reta tangente nos *Elementos de Analyse* 125
4.4.2.1 O conceito de reta tangente na geometria analítica 126
4.4.2.1.1 Elipse 126
4.4.2.1.2 Hipérbole 129
4.4.2.1.3 Parábola 131
4.4.2.2 O conceito de reta tangente no cálculo diferencial 133
4.4.2.2.1 A definição 133
4.4.2.2.2 As proposições 134

5 O conceito de reta tangente, segundo José Anastácio da Cunha 143
5.1 Os *Principios Mathematicos* 144
5.2 O conceito de reta tangente ao círculo por Anastácio da Cunha 147
5.2.1 A definição 148
5.2.2 As proposições 149
5.3 José Anastácio da Cunha e o "desaventurado cornicular" 156
5.4 Anastácio da Cunha & João Ângelo Brunelli 158
5.5 O conceito de reta tangente a uma curva no cálculo diferencial de Anastácio da Cunha 160
5.5.1 Os conceitos fundamentais do cálculo diferencial no livro XV dos *Principios Mathematicos* 160
5.5.2 As proposições 162
5.6 Anastácio da Cunha & Étienne Bezout 171

6 Francisco Gomes Teixeira e o conceito de reta tangente a uma curva 173
6.1 O ensino da matemática aquando da criação da Universidade do Porto 175
6.2 O *Curso de Analyse Infinitesimal* de Gomes Teixeira 177
6.3 O conceito de reta tangente no *Curso de Analyse Infinitesimal* 181
6.3.1 A definição 181
6.3.2 As propriedades 182
6.3.3 História da Matemática 188
6.3.4 Resolução de problemas 189
6.4 *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches* 192
6.5 O conceito de reta tangente no *Traité* 193
6.5.1 O conceito de reta tangente à cissoide 194
6.6 O conceito de reta tangente nos artigos científicos 201
6.6.1 O conceito de reta tangente no *Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener a une courbe par un point situé sur la courbe* 201

7 José Sebastião e Silva **205**

7.1 A introdução da matemática moderna no ensino português 206

7.2 O *Compêndio de Álgebra* 209

7.3 O conceito de reta tangente no *Compêndio de álgebra* 211

7.4 A *Geometria Analítica Plana* 214

7.5 O conceito de reta tangente na *Geometria Analítica Plana* 216

7.5.0.1 A definição 216

7.5.0.2 Os problemas/exercícios 217

7.6 O conceito de reta tangente nas *Transformações Geométricas* 225

Considerações finais **233**

Bibliografia **239**

A Biografias **253**

B Classificação dos Ângulos segundo Proclo **267**

C Comparação da estrutura dos *Elementos de Geometria* de Manuel de Campos e dos *Elementa Geometriæ* de André Tacquet **269**

D Comparação da estrutura da *Geometria Especulativa* de Manuel Azevedo Fortes e dos *Les Elemens D'Euclid* de Jaques Ozanam **273**

E Comparação da estrutura da *Lógica Geométrica* de Manuel Azevedo Fortes e dos *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps* de Bernard Lamy **275**

F Comparação da estrutura dos *Elementos de Euclides* de João Ângelo Brunelli e dos *The Elements of Euclid* de Robert Simson **285**

G Comparação da estrutura do *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* de Bezout **289**

H Comparação da estrutura das edições do *Curso de Analyse Infinitesimal* de Gomes Teixeira **299**

I Comparação do programa de matemática das turmas regulares e das turmas piloto na década de 60 do século XX **305**

Abreviaturas

ACL - Academia das Ciências de Lisboa

APP - Academia Politécnica do Porto

Coord.- coordenador

DGFV - Direcção-Geral de Formação Vocacional

Ed. - Editor

Eds. - Editores

FCUP - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

fl. - folium

fls. - foliuns

Misc. - Miscelânea

Ms. - Manuscrito

n.º - número

Pe. - Padre

p. - página

pp. - páginas

s.d. - sem data

s.p. - sem número de página

U.C. - Universidade de Coimbra

v. - verso

Vol. - Volume

Vols. - Volumes

Índice de Figuras

1.1 Euclides ensinando geometria em "A Escola de Atenas" de Rafael. 13
1.2 Ilustração da demonstração da Proposição III, 16. 18
1.3 Ilustração da demonstração da Proposição III, 17. 20
1.4 Ilustração da demonstração da Proposição III, 18. 22
1.5 Ilustração da demonstração da Proposição III, 19. 23
1.6 Ilustração da demonstração da Proposição III, 32. 24

2.1 Painel de azulejos do salão nobre do Hospital de S. José, onde funcionava a "Aula da Esfera", contendo conteúdos matemáticos. 32
2.2 Frontispício dos *Elementos de Geometria* de Manuel de Campos. 33
2.3 Frontispício dos *Elementa geometriæ* de André Tacquet. 34
2.4 Ilustração da Definição III, 2. 40
2.5 Ilustração da Proposição III, 16. 43
2.6 Ilustração dos corolários 2, 3, e 4 da Proposição III, 16. 44
2.7 Ilustração da Proposição 2.1. 45
2.8 Ilustração da Proposição III, 31. 50
2.9 Ilustração do escólio da Proposição III, 17. 50
2.10 Ilustração do 1.º caso da Proposição III, 32. 51
2.11 Ilustração do 2.º caso da Proposição III, 32. 52
2.12 Ilustração da comparação de ângulos no escólio da Proposição III, 16. 55
2.13 Ilustração do segundo exemplo de comparação de ângulos no escólio da Proposição III, 16. 55
2.14 Ilustração da impossibilidade comparar ângulos retilíneos e curvilíneos no escólio da Proposição III, 16. 56

3.1 Retrato de Manuel de Azevedo Fortes no *Engenheiro Português*. 59
3.2 Título do primeiro tratado da *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes no índice. . . . 62

3.3 Título do primeiro tratado da *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes no início do capítulo. 63
3.4 Título do segundo tratado da *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes no índice. . . . 63
3.5 Frontispício da obra *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes. 64
3.6 Ilustração da Definição III, 2. 68
3.7 Ilustração da demonstração da Proposição III, 16. 69
3.8 Ilustração da demonstração da Proposição III, 18. 72
3.9 Construção da reta tangente ao círculo, proposta na Proposição III, 31. 74
3.10 Ilustração da Proposição III, 32. 75
3.11 Ilustração do Uso da Proposição III, 32. 76
3.12 Frontispício da *Lógica Racional* de Azevedo Fortes. 76
3.13 Ilustração da definição de ângulo do segmento. 81
3.14 Ilustração da demonstração do teorema XIV, do capítulo VI, do livro I. 82
3.15 Ilustração da demonstração do teorema XV, do capítulo VI, do livro I. 84
3.16 Ilustração da primeira parte da demonstração do teorema XVI, do capítulo VI, do livro I. 85
3.17 Ilustração da segunda parte da demonstração do teorema XVI, do capítulo VI, do livro I. 86
3.18 Ilustração da demonstração do teorema XVII, do capítulo VI, do livro I. 87
3.19 Ilustração do Problema II, do capítulo VI, do livro I. 88
3.20 Ilustração do Problema III, do capítulo VI, do livro I. 89
3.21 Ilustração da resolução alternativa do Problema III, do capítulo VI, do livro I. 90
3.22 Ilustração do Teorema I, do capítulo II, do livro II. 92
3.23 Ilustração da definição de ângulo na *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes. 94
3.24 Ilustração do conceito de ângulo misto na *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes. . . 94
3.25 Ilustração da 1.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*. 95
3.26 Ilustração da primeira parte da 2.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*. . . 96
3.27 Ilustração da segunda parte da 2.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*. . . 97
3.28 Ilustração da 3.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*. 98

4.1 Frontispício dos *Elementos de Euclides* de Brunelli. 115
4.2 Ilustração da Definição III, 2. 118

4.3 Ilustração da demonstração da Proposição III, 16. 120
4.4 Ilustração da Proposição III, 17. 121
4.5 Frontispício da primeira edição dos *Elementos de Analisi Mathematica* e da segunda edição intitulada *Elementos de Analyse* de Bezout. 123
4.6 Ilustração do conceito de reta tangente à elipse. 127
4.7 Ilustração da subtangente à elipse. 128
4.8 Ilustração da Proposição 302. 128
4.9 Ilustração do conceito de reta tangente à hipérbole. 129
4.10 Ilustração do conceito de assintota da hipérbole. 131
4.11 Ilustração do conceito de de reta tangente à parábola. 132
4.12 Ilustração do conceito de reta tangente a uma curva. 134
4.13 Ilustração da construção da reta tangente a uma curva decrescente. 137
4.14 Ilustração da determinação da tangente à hipérbole utilizando o cálculo diferencial. . . . 138
4.15 Ilustração da determinação da reta tangente a uma curva por um ponto no seu exterior. 139
4.16 Ilustração da proposição 36. 140

5.1 Folha de rosto dos *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha. 145
5.2 Autorização para a impressão dos *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha. . . 145
5.3 Folha de rosto dos *Principios de Geometria* de Anastácio da Cunha. 147
5.4 Ilustração da primeira parte da demonstração da Proposição II, 6. 150
5.5 Ilustração da segunda parte da demonstração da Proposição II, 6. 151
5.6 Ilustração da demonstração da Proposição VII, 3. 154
5.7 Ilustração da demonstração do corolário da proposição VI, 3. 155
5.8 Ilustração da Proposição XV, 14. 162
5.9 Ilustração da Proposição XVII, 1. 164
5.10 Ilustração da Proposição XVI, 4. 166
5.11 Ilustração da relação entre o raio, o seno e o senoverso de um arco AB. 167
5.12 Ilustração do primeiro exemplo da Proposição XVII, 5, no caso particular em que $a = 2$ e $b = 1$. 169
5.13 Ilustração do segundo exemplo da Proposição XVII, 5, no caso particular em que $a = 2$ e $b = 1$. 170

6.1 Quadro a óleo de Gomes Teixeira na Galeria dos Retratos da Universidade do Porto. 173

6.2 Primeira página dos 4 fascículos dos *Fragmentos*. 178
6.3 Página de rosto do *Manual* de Gomes Teixeira. 179
6.4 Ilustração do conceito de reta tangente. 181
6.5 Ilustração dos conceitos de subtangente e comprimento da tangente. 185
6.6 Ilustração da determinação da tangente a uma curva em coordenadas polares 186
6.7 Ilustração da cissoide. 194

7.1 Fotografia de Sebastião e Silva. 205
7.2 Frontispicios dos dois tomos do *Compêndio de Álgebra*. 210
7.3 Ilustração do conceito de declive de uma curva. 212
7.4 Capa do livro *Geometria Analítica Plana*. 214
7.5 Ilustração do Exemplo I de 1.ª espécie. 218
7.6 Ilustração da relação entre o conceito de reta tangente e o conceito de assíntota. 226
7.7 Ilustração da determinação das tangentes à elipse. 227
7.8 Ilustração da ideia intuitiva do conceito de reta tangente a uma curva. 228
7.9 Ilustração da reta tangente a uma curva num ponto de inflexão. 229
7.10 Ilustração de um ponto anguloso. 230
7.11 Ilustração de um ponto de regressão. 230
7.12 Ilustração de um ponto de suspensão. 231
7.13 Ilustração de um ponto que não admite semitangentes. 231
7.14 Ilustração das retas tangentes num ponto múltiplo. 231

Índice de Tabelas

2.1 Introdução ao livro III nas obras de Manuel de Campos e André Tacquet. 38

2.2 Corolários 5 e 6 da proposição III, 16 nas obras de Manuel de Campos e André Tacquet. 46

3.1 Definição III,2 na *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes e nos *Les Elemens d'Euclide* de Ozanam. 67

3.2 *Uso* da Proposição III, 17 nas obras de Azevedo Fortes e Ozanam 71

3.3 Teorema XVII na *Lógica Geométrica* de Azevedo Fortes e nos *Les élémens de géometrie* de Lamy. 86

3.4 Teorema XVII na *Lógica Geométrica* de Azevedo Fortes e nos *Les élémens de géometrie* de Lamy. 91

3.5 Estudo comparativo entre Manuel de Campos e Azevedo Fortes 104

4.1 Manuais adotados para a disciplina de geometria da Faculdade de Matemática na Reforma Pombalina. 112

4.2 Manuais adotados para a disciplina de foronomia da Faculdade de Matemática na Reforma Pombalina. 113

4.3 Definição III, 2 dos *Elementos de Euclides* de Brunelli e dos *The Elements of Euclid* Simson. 118

4.4 Proposição III, 16 dos *Elementos de Euclides* de Brunelli e dos *The Elements of Euclid* Simson 119

4.5 Estudo comparativo entre Manuel de Campos e João Ângelo Brunelli. 122

5.1 Estudo comparativo entre João Ângelo Brunelli e José Anastácio da Cunha. . . . 159

5.2 Estudo comparativo entre Anastácio da Cunha e Étienne Bezout. 172

6.1 Programa das cadeiras de matemática na Academia Politécnica do Porto no ano letivo 1885-1886. 176
6.2 Plano curricular do bacharelato em ciências matemáticas na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 1911. 177

Introdução

Motivação e objetivos

A história da matemática foi, para mim, "amor à primeira vista". Foi só quando comecei a estudar história da matemática, no ano 2001, que diferentes peças do puzzle matemático que tinha na minha mente se encaixam umas nas outras. Até lá, a matemática havia sido um conjunto de resultados/disciplinas mais ou menos desligados, avulsos, constituídos por conceitos, teoremas e problemas, dos quais eu gostava, mas que, na sua maioria, pareciam como que presos em "caixas"autónomas. Com a história da matemática abriam-se muitas das portas dessas áreas estanques e, como que por magia, a Matemática passava a ter mais sentido; finalmente percebia de onde vinha, o que a impulsionou e o que condicionou o seu desenvolvimento, bem como se aglutinavam e/ou desagregavam diferentes ramos e teorias. A matemática passou a ter rostos, passou a ser mais humana e mais real. Nessa altura, eu soube que, se algum dia, decidisse fazer investigação seria em história da matemática.

Ao longo do meu percurso formativo apercebi-me também do papel importante desempenhado pelos conceitos matemáticos, fruto das dificuldades com que me deparei ao trabalhar com alguns deles, no contexto da minha profissão de professora de matemática, e especificamente com o conceito de reta tangente a uma curva. Assim, a presente tese é o culminar da junção de dois dos aspetos que mais marcaram o meu percurso formativo na área da matemática: a importância dos conceitos em matemática e a sua história.

Os conceitos, na estrutura da matemática, desempenham um papel central na sua organização enquanto ciência, que segue o modelo dedutivo já defendido por Aristóteles nos seus *Segundos Analíticos* no século IV a.C. e que foi, desde logo, concretizada por Euclides nos seus *Elementos*. Fruto desta organização é possível considerar, como faz por exemplo Monteiro da Rocha nos Prolegómenos dos seus *Elementos de Mathematica*[1], diversos estádios do conhecimento

[1]Os *Elementos de Mathematica* são uma obra manuscrita de Monteiro da Rocha, não datada, que se encontra na Academia de Ciências de Lisboa. Estes *Elementos de Mathematica* iniciam-se com os *Prolegomenos* seguidos de uns *Elementos de Arithmetica*, sendo ainda conhecidos uns *Elementos de Algebra* com a mesma estrutura e

matemático:

> *O primeiro grau de conhecimento consiste na inteligência das verdades que na Matemática se propõem, sem olhar para as suas demonstrações. (...) Para ter esta inteligência é indispensável saber as definições dos termos. (...)*
>
> *O segundo grau consiste na inteligência das demonstrações, que convencem o entendimento das verdades que na Matemática se ensinam. Não é possível subir a este grau sem ter passado pelo primitivo porque não é possível dar acenso firme a uma demonstração sem ter ideia clara do que se pretende demonstrar. (...)*
>
> *O terceiro grau consiste em adquirir a capacidade de combinar as verdades que sabemos, de sorte que demonstremos pela própria indústria outras verdades não conhecidas, ou as já conhecidas por novo género de demonstração. Este supremo grau supõe reciprocamente os dois primeiros.* (Rocha, s.d., fl.8-8v)

Daqui salientamos a necessidade de um verdadeiro entendimento dos conceitos e das suas definições para que a construção da matemática, e em particular a da sua aprendizagem, possam progredir.

No âmbito da investigação que agora relatamos, partimos do conceito de reta tangente a uma curva, que podemos considerar duplamente elementar: por um lado, encontra-se presente na matemática, enquanto ciência axiomática, desde os seus primórdios; por outro lado, trata-se de um conceito introduzido, ainda nos dias de hoje, nos níveis básicos da aprendizagem da matemática. Contudo, apesar desta elementaridade, o conceito tem-se revelado de difícil entendimento, como demonstram estudos já realizados (Tall, 1987) e tendo em linha de conta as diversas vertentes(geométrica, algébrica, diferencial, projetiva) nele contidas.

A história do conceito de reta tangente explicaria, estávamos esperançados, algumas das suas dificuldades de aprendizagem. Trata-se de uma história rica em problemas e contrariedades, sendo mesmo a temática de uma controvérsia bastante conhecida que opôs Descartes e Fermat, denominada de "querela das tangentes". De facto, a história da evolução do conceito de reta tangente desde a antiguidade grega até à invenção/descoberta do cálculo diferencial tem sido amplamente relatada (Carvalho, 1919; Coolidge, 1951) e nós próprias também a percorremos na investigação que abraçamos aquando da dissertação de mestrado (Mota C., 2008). Todavia, deparamo-nos com uma lacuna no estudo da evolução do conceito de reta tangente a uma curva, em Portugal e pelos matemáticos portugueses. Por esta razão, delineamos como plano de

que se conjetura poderem, em conjunto com outros dois manuscritos desconhecidos, um sobre trigonometria e outro sobre cálculo infinitesimal, constituir um único tratado (Figueiredo, 2011, pp. 201-222).

trabalho para esta tese de doutoramento o estudo da reta tangente a uma curva nas obras de alguns dos matemáticos portugueses mais destacados.

Definimos o período temporal a estudar e identificamos autores cujas obras analisaríamos. Começamos o nosso estudo com a análise das obras de autores diretamente relacionados com a reforma pombalina da Universidade de Coimbra. Contudo, pareceu-nos ajuizado, no âmbito da "reforma"identificar/conhecer as obras que, abordando o nosso conceito, anteciparam essa reforma e, por isso, alargamos o nosso estudo a todo o século XVIII.

Depois, analisamos a obra de dois dos matemáticos portugueses mais destacados e que introduziram novos aspetos no tratamento do conceito de reta tangente: Francisco Gomes Teixeira, na viragem do século XIX para o século XX, e José Sebastião e Silva, nome maior da introdução, em Portugal, do movimento da matemática moderna, em meados do século XX.

Desenvolvemos assim um estudo onde examinamos o conceito de reta tangente a uma curva ao longo de cerca de 300 anos, almejando atingir os seguintes objetivos:

Identificar o contexto em que o nosso conceito é estudado, em diferentes momentos da história da matemática em Portugal, desde o século XVIII até à introdução da matemática moderna.

Identificar obras relevantes no estudo do conceito.

Comparar os métodos utilizados, no tratamento do conceito, nas obras analisadas.

Avaliar o impacto da introdução do cálculo diferencial, no século XVIII, para o tratamento do nosso conceito.

Explorar referências à história da matemática.

E porventura,

Identificar possíveis utilizações da história do conceito de reta tangente a uma curva no ensino em Portugal.

Revisão da literatura

O conceito de reta tangente

O conceito de reta tangente a uma curva encontra-se presente na história da matemática pelo menos desde os *Elementos* de Euclides[2] onde o conceito de reta tangente é caracterizado pela

[2]Um estudo detalhado do tratamento dado ao nosso conceito por Euclides nos *Elementos* encontra-se no capítulo 1.

ideia do "toca mas não corta"(Coolidge, 1951, p. 450).

Esta ideia foi generalizada, ainda na Grécia, por matemáticos como Arquimedes e Apolónio. Arquimedes aborda o conceito de reta tangente a uma curva no seu tratado *Das Linhas Espirais* onde, embora sem o definir, estuda as suas quando a curva é a espiral e implicitamente generaliza a definição apresentada por Euclides nos seus *Elementos* (Coolidge, 1951, p. 450). De salientar que a determinação da tangente à espiral efetuada por Arquimedes depende das subtangentes polares naquele que parece ser o primeiro exemplo da utilização deste processo (Carvalho, 1919, pp. 3-4).

À semelhança do que efetua Arquimedes, também Apolónio nas suas *Cónicas* generaliza a definição de Euclides, e para além disso generaliza ainda a propriedade enunciada na Proposição III, 16 dos *Elementos* a todas as cónicas, e traduzida nas suas proposições 17 e 32 do Livro I das *Cónicas* (Mota C., 2008, pp. 19-20).

Após este período inicial encontram-se novamente notícias relativas ao estudo da reta tangente a uma curva no início do século XVII. Um dos primeiros desses estudos sobre esta temática terá sido efetuado por Roberval nas suas *Observationes sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouve les touchants de lignes curves*, apenas publicadas postumamente. Nesta obra, Roberval considera as curvas como descritas pelo movimento, sendo a tangente a direção instantânea do ponto que descreve a curva (Coolidge, 1951, p. 455). Com base nesta definição, Roberval apresenta uma regra geral, que não demonstra, para determinar a reta tangente a uma curva, compondo os diferentes movimentos que originam a curva. Embora por vezes aplique esta regra de forma errada, Roberval obtém corretamente as retas tangentes a diversas curvas (Carvalho, 1919, p. 52).

O método seguido por Roberval é depois reinventado por Torricelli, que também determina a reta tangente a uma curva a partir da composição dos movimentos geradores dessa curva. Contudo, juntamente com a composição do movimento, Torricelli utiliza um método dito dos indivisíveis para determinar retas tangentes, nomeadamente às parábolas, onde reconhece a relação inversa do problema das tangentes e das quadraturas (Mota C., 2008, pp. 41-46).

Descartes e Fermat são porventura os nomes que mais se destacam na procura de um método genérico para o problema da determinação das retas tangentes a uma curva. Descartes analisa esta questão no segundo capítulo da sua *La Géométrie*[3], onde considera a reta tangente a uma curva como a posição limite das retas secantes que passam pelo ponto de tangência. A abordagem de Descartes não é todavia, geométrica e deste modo a posição limite das retas

[3]Publicada em 1636 como apêndice ao *Discours de la Méthode.*

secantes é analisada quanto à existência de uma raiz dupla de uma certa equação (Costa et al., 2000, p. 563).

A consideração da reta tangente como a posição limite das retas secantes é também, de forma análoga, abordada por Fermat. O seu método aparece no *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, que terá sido escrito por volta de 1629, mas cuja existência é ignorada pela comunidade matemática durante cerca de uma década. Neste trabalho, Fermat começa por apresentar um método para determinar máximos e mínimos, e depois adapta-o para a determinação tangentes a curvas. Segundo a opinião de diversos estudioso aqui encontramos a essência do cálculo infinitesimal (Coolidge, 1951, pp. 451-453).

Os métodos propostos por estes dois matemáticos são mutuamente criticados pelos próprios, envolvendo-se os dois matemáticos numa troca de cartas, que ficou conhecida como a "querela das tangentes"(Gregoire, 1992, pp. 29-57).

Ao longo do século XVII diversos matemáticos estudam o problema das tangentes apresentando métodos mais ou menos inovadores e dos quais destacamos Isaac Barrow com as suas *Geometrical lectures* e René François de Sluse em diversas cartas e artigos publicados nas *Philosophical Transactions* (Carvalho, 1919, pp. 61-80). O problema das tangentes teria finalmente uma resolução satisafatória com os trabalhos da análise infinitesimal desenvolvidos, ainda durante o século XVII e, tanto quanto sabemos, de forma independente, por Newton e Leibniz.

Newton apresenta o seu método das tangentes na obra intitulada*De Methodis Serierum et Fluxionum*, escrita em 1671, mas cuja publicação apenas ocorre em 1736 já traduzida para inglês (O'Conner & Robertson, 2017, s.p.). Aqui Newton, para determinar a reta tangente a uma curva, recorre a dois triângulos semelhantes, onde um deles está definido a partir dos *momentos* e que são proporcionais às *fluxões* da curva (Coolidge, 1951, pp. 459-460).

Um método análogo é proposto por Leibniz no seu *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, qua nex fractas, nec irrationales quantitates moratur & singulare pro illis calculi genus*, publicado na *Acta Eruditorum* de 1684. Aqui, Leibniz considera a reta tangente como a posição limite da secante ou o lado de um polígono, de infinitos lados, equivalente à curva (Leibniz, 1684, p. 470) e, embora nunca o faça de forma explicita, também utiliza um triângulo, na sua versão definido pelos *diferenciais*, e que lhe permite obter o comprimento da *subtangente* (Mota C., 2008, pp. 120-121).

Em Portugal, e tendo em atenção livros de matemática editados no nosso país, o conceito de reta tangente a uma curva surge no século XVIII, primeiramente nas obras de geometria euclidiana e depois nas obras de análise infinitesimal, sendo o estudo destas obras um dos

objetivos da presente investigação.

A história da matemática no ensino da matemática

A importância da utilização da história da matemática no ensino da própria matemática é algo reconhecido, em Portugal, pelo menos desde o século XVIII[4]. Nos últimos anos assistimos a um novo reconhecimento da valência da história da matemática, desta vez por razões explicitamente identificadas e das quais nós próprias destacaríamos a sua importância enquanto humanizadora da própria matemática. Nas palavras de Sarton,

> *O estudo da história da matemática não fará melhores matemáticos mas mais gentis; irá enriquecer-lhes a mente, amolecerá os seus corações, e exporá as suas melhores qualidades.* (Sarton, 1957, p. 28)

Conhecemos diferentes formas para a inclusão da história da matemática no ensino (Jankvist, 2009, pp. 245-247), e destacamos pela sua aparente simplicidade categorias sugeridas por Siu (1997, pp. 143-154):

A - Anedotas;

B - "Board Outline"(Fornecer um contexto);

C - Conteúdo;

D - Desenvolvimento das ideias matemáticas.

A introdução da história da matemática através do uso de pequenas anedotas/histórias, já deu provas no campo da humanização da própria matemática. Segundo Eves,

> *Estas histórias e anedotas provaram ser muito úteis na sala de aula - como pequenos átomos estimuladores de interesse, para introduzir um elemento humano, para inspirar o aluno, para instigar respeito e admiração pelos grandes criadores, para retomar o interesse, para forjar links de cultura histórica, ou para reforçar alguns conceitos e ideias.* (Eves in Siu, 1997, p. 3)

Também o contexto ('Board Outline') parece ser relevante no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Os conceitos e conteúdos matemáticos surgem de forma natural, relacionados com um dado problema ou com determinado objetivo. O conhecimento desse contexto não só

[4] A este propósito veja-se o capítulo 4.1.1.

ajuda no entendimento do próprio conceito/conteúdo como motiva para a sua aprendizagem, mostrando que a matemática como hoje a conhecemos é fruto de um longo e por vezes difícil processo de desenvolvimento (Jankvist, 2009, p. 239). Nesta dimensão identificamos igualmente o papel da história na humanização da matemática que nós próprias já sentimos tal como relatamos na primeira página deste trabalho.

A introdução de conteúdos recorrendo à história da matemática prende-se com a utilização de fontes primárias no ensino, seja através da disponibilização de textos originais para os alunos estudarem, seja pela apresentação de enunciados/demonstrações históricas para análise.

No que respeita ao desenvolvimento das ideias matemáticas, este aspeto pressupõe a lecionação de cursos/disciplinas em história da matemática, tornando-se assim a história da matemática nesta dimensão um objetivo e não uma ferramenta para a lecionação de outros conteúdos.

Neste nosso trabalho tentaremos perceber se alguma destas dimensões estará presente nas obras que analisaremos.

Metodologia

A tese que aqui apresentamos é um trabalho de investigação em história da matemática e do seu ensino, seguindo desse modo as metodologias próprias destas áreas: pesquisa, rigor na análise dos documentos e interpretações credíveis (para além, naturalmente, da transmissão da informação).

No sentido de suportar a validação do nosso trabalho seguimos as indicações metodológicas sugeridas por Thuillier e Tulard (1991, pp. 87-91) e sistematizadas por Martins (2001, pp. 38-39), adaptando-as à realidade da nossa investigação, nomeadamente em no que diz respeito ao rigor, à verificação dos documentos, à explicitação das hipóteses que guiam a nossa pesquisa e à imparcialidade.

A nossa pesquisa, realizada em diferentes bibliotecas nacionais, destacando-se a Biblioteca Municipal do Porto, a Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra, Biblioteca da Academia de Ciências de Lisboa, Biblioteca Pública de Évora e a Biblioteca Nacional, permitiu-nos o acesso a diversos documentos, impressos e manuscritos, que foram alvo de análise neste trabalho. Salientamos também o acesso a manuscritos inéditos de Anastácio da Cunha disponibilizados pelo Arquivo da Casa de Mateus no âmbito do projeto MAT[2].

Os documentos escritos utilizados na realização deste trabalho são, em grande parte e/ou sempre que possível, fontes primárias. Procuramos sempre analisar as obras originais dos autores estudados, e nos casos em que já existiam estudos dessas obras realizados por outros autores

também os consultamos e contrastamos com a nossa própria investigação.

No sentido de garantir uma análise completa dos documentos estudados, sempre que existiam várias edições da mesma obra analisamos e comparamos as diferentes edições. Do mesmo modo, sempre que as obras estudadas eram traduções de obras de autores estrangeiros comparamos as traduções portuguesas com os trabalhos originais. Na análise que efetuamos às diferentes obras, utilizamos uma adaptação do método sugerido por Sierra et al (2003), nomeadamente no que diz respeito à análise da definição, representação, notação e problemas envolvendo o nosso conceito.

Uma vez que a grande maioria das obras de referência deste trabalho se encontram escritas em português, optamos por apresentar todas as citações em português, sendo que nos casos em que foi necessário efetuar uma tradução, ela é da nossa inteira responsabilidade.

Ao longo deste trabalho procuramos divulgar os resultados que entretanto fomos obtendo, participando em diversos encontros nacionais e internacionais com comunicações sujeitas a aprovação/*referee* sobre os trabalhos desenvolvidos. Daí resultaram já as seguintes publicações:

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2011). "The teaching of Mathematics in Portugal in the 18th century - The creation of the 1st Faculty of Mathematics in the World", In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 1750-1759. Rzeszow: University of Rzeszow.

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2011). "The concept of tangent line: historical and didactical aspects in Portugal (18th century)". In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds.) *Proceedings of the Sixth European Summer University in History and Epistemology in Mathematics Education*, pp. 687-695. Vienna: Verlag Holzhausen GmbH.

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E. (2012). "Francisco Gomes Teixeira: O conceito de reta tangente no Curso de Analyse Infinitesimal". In Associação de Professores de Matemática (Ed.) *Proceedings of XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 153-165, Coimbra: APM.

- Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2012). "Matemática em Portugal: marcos da história do ensino e do ensino da história". In J. M. Matos & M. Saraiva (Eds.): *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*, pp. 388-400. Lisboa: UIED.

- Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2013). "The teaching of the concept of tangent line using original sources". In B. Ubuz, C. Haser and M. A. Mariotti (Eds.): *Proceedings of*

the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 2048-2057. Ankara: METU.

- Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2015). "Engenheiros portugueses do século XVIII: as suas geometrias especulativas"in Francisco A. González Redondo (coord.) *Ciencia y Técnica entre la Paz y la Guerra.* 1714, 1814, 1914, Vol. 1. pp. 163-170. Madrid, Espanha: Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de las Técnicas.

Ainda não publicados, mas aguardando publicação, encontram-se os seguintes trabalhos:

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2014, junho). *Teoria e prática do conceito geométrico de reta Tangente no início do século XVIII Português.* Artigo apresentado no 4.º Encontro Nacional de História das Ciências e da Tecnologia. Aveiro, Portugal.

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2014, outubro). *O conceito de reta tangente na obra pedagógica de Sebastião e Silva.* Artigo apresentado no 7.º Encontro Lusobrasileiro de História da Matemática. Óbidos, Portugal.

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2016, julho). *José Anastácio da Cunha e o "desaventurado cornicular".* Artigo apresentado no 2.º Encontro Ibérico de História da Matemática. Coimbra, Portugal.

- Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E. (2017, abril). *História da Matemática na sala de aula: Anastácio da Cunha e os conceitos de ângulo e reta tangente.* Comunicação apresentada no Profmat. Viseu, Portugal.

- Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2017, outubro). *José Anastácio da Cunha e a demonstração paralogistica da Proposição III, 7 dos "Principios Mathematicos".* Artigo apresentado no Encontro Internacional 3M+1: História da Matemática, da Música e Militar. Braga, Portugal.

- Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2018). *Uma análise ao livro V dos Elementos de Geometria de Manuel de Campos.* (título provisório de artigo a ser ultimado para submeter a uma revista da especialidade).

Estrutura da Tese

O nosso estudo analisa, como dissemos, o tratamento dado ao conceito de reta tangente a uma curva ao longo de quase 300 anos da história da matemática portuguesa e optamos por

apresentá-lo seguindo uma ordem cronológica.

No capítulo 1 efetuamos uma análise do conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos* de Euclides, obra de referência da matemática - e do conceito de reta tangente - ao longo dos séculos e a partir da qual são efetuadas traduções para português que são analisadas em capítulos posteriores. Após umas breves notas biográficas de Euclides, analisamos os *Elementos* como um todo, e centramos a nossa atenção no conceito de reta tangente ao círculo, bem como nas suas ligações ao conceito de ângulo, analisando em particular a questão do ângulo de contingência.

No capítulo 2 analisamos o tratamento dado ao conceito de reta tangente ao círculo na obra *Elementos de Geometria* do Pe. Jesuíta Manuel de Campos, seguindo os *Elementa geometriæ planæ ac solidæ: quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata* de André Tacquet. Começamos por enquadrar esta obra no âmbito do contexto do ensino da matemática ministrado em Portugal pelos Jesuítas, analisando depois o nosso conceito nesta que foi a primeira tradução para português dos *Elementos* de Euclides.

O capítulo 3 é dedicado à análise da obra de Manuel de Azevedo Fortes. Iniciamos este estudo com a contextualização do trabalho do engenheiro-mor do Reino Azevedo Fortes na consolidação do ensino militar, seguido do estudo de duas das suas obras: um manuscrito intitulado *Geometria Especulativa*, onde o matemático português segue a tradução francesa dos *Elementos* efetuada por Jacques Ozanam, e a *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, onde Azevedo Fortes segue, na parte relativa à geometria, *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps* de Bernard Lamy.

Dedicamos o capítulo 4 à reforma pombalina da Universidade de Coimbra, em 1772, e subsequente mudança no paradigma nacional do ensino da matemática, ao promover, em particular, a introdução em Portugal do ensino do cálculo diferencial. Analisamos, na secção 4.1, os *Estatutos* da recém criada Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, procurando perceber as mudanças introduzidas e o novo contexto em que passa a ser estudado o conceito de reta tangente a uma curva. A secção 4.2 contém uma análise dos *Elementos de Euclides* editados por João Ângelo Brunelli a partir dos *Euclidis Elementorum* de Robert Simson e utilizados na disciplina do 1.º ano desta Faculdade. Na secção 4.4 analisamos as traduções portuguesas do *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* de Étienne Bezout, utilizadas na disciplina do 2.º ano.

O capítulo 5 é dedicado a José Anastácio da Cunha, professor de geometria - entre 1773 e 1778 - na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Neste capítulo estudamos o conceito de reta tangente a uma curva no manuscrito *Principios de Geometria tirados dos de*

Euclides (recentemente descoberto), bem como na sua principal obra os *Principios Mathematicos* (nas edições portuguesa e francesa).

O capítulo 6 é dedicado a Francisco Gomes Teixeira, nome maior da matemática portuguesa do século XIX/XX. Começamos por efetuar um enquadramento do ensino do conceito de reta tangente a uma curva na Academia Politécnica do Porto e na Universidade do Porto, no sentido de contextualizar a principal obra onde Gomes Teixeira estuda este conceito, o *Curso de Analyse Infinitesimal*, escrito para o ensino do cálculo diferencial e integral. Terminamos o capítulo com uma breve análise do tratamento mais científico dado por Gomes Teixeira ao nosso conceito num dos seus artigos científicos e no seu *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches.*

Finalmente, no capítulo 7 analisamos a obra pedagógica de Sebastião e Silva. Começamos por contextualizar o tratamento dado ao nosso conceito no âmbito da reforma da matemática moderna, analisando depois as obras de Sebastião e Silva escritas para o ensino secundário. No final deste capítulo analisamos ainda o estudo feito ao nosso conceito nas *Transformações Geométricas*, obra utilizada por Sebastião e Silva no ensino superior.

São ainda apresentados 9 anexos que, com exceção do anexo A, referimos no corpo do texto.

O Anexo A contém pequenas notas biográficas de matemáticos e personalidades relevantes no âmbito do nosso trabalho. Para a elaboração destas notas biográficas recorremos, no caso dos matemáticos e sempre que possível, ao portal MacTutor History of Mathematics Archive, da School of Mathematics and Statistics da University of St. Andrews, sendo o mesmo referenciado por O'Conner & Robertson (2017). Nos casos em que não foi possível utilizar este portal encontra-se indicada, no final da nota biográfica, a referência bibliográfica respetiva.

O Anexo B contém a classificação dos ângulos segundo Proclo, tal como apresentada na edição em francês de Paul Ver Eecke *Proclus de Lyceie. Les commentaires sur le premier livre des Eléments D'Euclide* e sistematizada por Heath (1956, vol. 1, p. 178) .

Entre o Anexo C e o Anexo H apresentamos a comparação da estrutura de diferentes obras feita a partir dos índices das mesmas.

O Anexo I contém uma comparação entre os conteúdos dos programas de matemática em vigor na década de 60 e os programas implementados nas turmas piloto.

Capítulo 1

Os primórdios do conceito de reta tangente: Euclides

Euclides de Alexandria terá vivido por volta do ano 300 a.C., sendo muito provável que tenha recebido instrução em Atenas, pelos discípulos de Platão, indo posteriormente para Alexandria onde terá fundado uma escola (Heath, 1956, vol. 1, p. 1-6). Euclides é mesmo retratado como professor de geometria no fresco de Rafael "A escola de Atenas"(Fig. 1.1), que se encontra na Stanza della Segnatura, no Vaticano, e onde Rafael ilustra alguns dos maiores pensadores gregos.



Figura 1.1: Euclides ensinando geometria em "A Escola de Atenas" de Rafael.

Euclides escreve diversas obras de matemática (Heath, 1956. vol. 1, p. 7-18), a sua maioria sobre temas de geometria, obtendo o maior reconhecimento graças aos *Elementos*, um dos livros de maior influência no pensamento e na educação do mundo ocidental de todos os tempos.

> *Devemos admirá-lo [Euclides] pelo trabalho nos elementos de geometria, pela escolha e arranjo dos teoremas e problemas que trabalha para a instrução de principiantes. Ele não utilizou todos os elementos que conseguiu recolher, mas apenas aqueles que são suscetíveis de instruir nos primeiros princípios da geometria.* (Proclo in Eecke, 1948, p. 62)

1.1 Os *Elementos*

Os *Elementos* contêm uma recolha, seletiva e ordenada, de conhecimentos matemáticos da época de Euclides, tendo sido ao longo dos séculos comentados, traduzidos e editados. As diferentes fontes dos *Elementos*, dado não se conhecer nenhum original do próprio Euclides, levam a que diferentes edições apresentem, por vezes, diferenças de linguagem e/ou de conteúdo. Notemos que as edições dos *Elementos* anteriores ao final do século XIX, baseadas em textos gregos, têm como fonte comum a obra de Teão de Alexandria, onde este faz vários comentários e alterações. A descoberta, por Peyrard em 1808, de um manuscrito anterior ao de Teão, designado de "Manuscrito do Vaticano", permite o reconhecimento exato dos acréscimos da autoria do próprio Teão. No final do século XIX, o dinamarquês Heiberg publica uma edição dos *Elementos* utilizando este manuscrito (datado do século X, mas todavia identificado como pré-teonino) assim como muitos outros manuscritos conhecidos, editando aquela que ainda hoje é uma das edições de referência e considerada uma das mais próximas da que terá sido a original de Euclides[5] (Heath, 1956, vol. 1, pp. 46-63). Já no século XX, Stamatis publica uma nova edição em grego dos *Elementos*, em Atenas entre 1952 e 1957, onde confirma a exatidão da versão de Heiberg e a reafirma como a mais próxima do que seria o original de Euclides (Bicudo, 2009, pp. 30-32). Em português do Brasil, a edição que confronta todas esta fontes é da autoria de Irineu Bicudo, que publica em 2009 a sua versão dos *Elementos*.

Na seleção e organização dos conhecimentos incluídos no seu tratado, Euclides utiliza a filosofia lógico-dedutiva de Aristóteles, naquele que é conhecido como o método geométrico, e que é descrito por Monteiro da Rocha da seguinte forma:

> *Principiam pelas definições para tirar toda a ambiguidade das palavras. Seguem-se os Axiomas, e Postulados; verdades mais fáceis, que encaminham para as mais dificultosas. Logo se propõem os teoremas, e problemas mais simplices, que se demonstram*

[5]Para a nossa investigação utilizamos a tradução inglesa da obra de Heiberg, editada por Thomas Heath, utilizando a edição em 3 volumes de 1956. Doravante, sempre que nos referimos aos *Elementos* reportamo-nos a esta edição.

> *com as Definições e Axiomas. Pouco a pouco vão entrando os mais complicados, e dificultosos, que se demonstram pelos precedentes, por definições e Axiomas. Entre eles vão os Corolários, quando tendo o seu lugar.* (Rocha, s.d., fl. 16v)

Assim, os *Elementos* não contêm qualquer comentário ou observação, sendo compostos por 13 livros (capítulos) com a estrutura definições-axiomas-proposições, cuja distribuição de temas pelos diferentes livros é a seguinte (Costa et al, 2000, pp. 251-252):

Livro I: Contém as primeiras definições, os axiomas e postulados, seguido de um estudo dos ângulos e dos triângulos, um tratamento rigoroso da questão do paralelismo e o Teorema de Pitágoras.

Livro II: Compreende o estudo das propriedades dos paralelogramos retângulos, sendo estabelecidas relações algébricas através da geometria, sendo o livro dedicado à chamada *álgebra geométrica* ou *geometria das áreas*.

Livro III: Dedicado ao estudo das propriedades do círculo, ângulos inscritos em arcos de circunferência e propriedades das retas tangentes ao círculo.

Livro IV: Composto por problemas relativos à inscrição e circunscrição de polígonos regulares em círculos.

Livro V: Explica a teoria das proporções.

Livro VI: Contém aplicações da teoria das proporções, sendo estudada a semelhança de figuras planas.

Livros VII, VIII e IX: Conhecidos como *Livros Aritméticos*, explicam as propriedades dos números racionais.

Livro X: Livro mais extenso dos *Elementos* onde são estudadas várias propriedades das grandezas irracionais.

Livro XI: Primeiro dos três *livros estereométricos*, onde é estudada a geometria tridimensional. Começa com definições relativas à geometria do espaço seguidas do estudo do paralelismo e perpendicularidade no espaço, de ângulos de sólidos e dos prismas.

Livro XII: Abarca proposições que estabelecem razões entre áreas de figuras planas e volumes de sólidos utilizando o *Método de Exaustão*.

Livro XIII: Contém o estudo dos *Sólidos Platónicos*.

O conceito de reta tangente a uma curva surge, no contexto dos *Elementos*, a propósito da relação entre retas e círculos estudada no livro III, sendo apenas abordado o conceito de reta tangente ao círculo e as suas propriedades, uma vez que nos *Elementos* não são estudadas propriedades de outras curvas.

1.2 O conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos*

O livro III dos *Elementos* aborda as propriedades do círculo, a relação que é possível estabelecer entre retas e círculos e entre círculos contendo, na edição analisada, 11 definições, 37 proposições e 1 porisma (corolário). É neste contexto que surge o conceito de reta tangente ao círculo, que nos é apresentado na segunda definição, e cujas propriedades mais relevantes são estudadas nas Proposições 16, 17, 18, 19 e 32.

1.2.1 A definição

O conceito de reta tangente ao círculo é introduzido nos *Elementos* nos seguintes termos:

> ***Definição III, 2:*** *Uma linha reta diz-se que* ***toca um círculo*** *se, encontrando o círculo e sendo prolongada, não corta o círculo.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 1)

Analisando esta definição, pelos parâmetros atuais, esperar-se-ia encontrar o nome "tangente" na própria definição, uma vez que a terminologia "toca o círculo" não é comum atualmente. Contudo, esta definição, tal como é apresentada, pretende ser uma tradução fiel do original grego, levando em consideração o facto de não existir um termo em grego para "tangente"- etimologicamente o termo tangente deriva do latim *tangentem*, particípio presente de *tangere*, que significa tocar (Machado, 2003, vol. V, p. 268).

É também de salientar que atualmente consideramos retas tangentes a curvas, enquanto aqui nos surge a reta tangente a uma figura geométrica. Notemos contudo que Euclides define nesta sua obra círculo[6] mas não circunferência. Contudo, o termo circunferência surge na edição dos *Elementos* utilizada, supondo-se que surja também no original do matemático grego, sendo esta inclusão justificada por Heath (1956, vol. 1, p. 184) pelo facto de o termo circunferência ser, à época, um termo comum que não envolveria qualquer conceção matemática. Uma vez que Euclides trata a circunferência apenas como a linha que limita o círculo, não lhe conferindo o

[6] ***Definição I, 15:*** *Um* ***círculo*** *é uma figura plana contida por uma linha, tal que todas as linhas retas traçadas dela até um ponto de entre os que estão na figura são iguais umas às outras.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 153)

caráter de curva ou entidade matemática que tem atualmente, faz sentido que considere a reta como tangente ao círculo.

De realçar é ainda o facto de esta definição caracterizar a reta tangente ao círculo mas não garantir a sua existência. Esta característica resulta da aplicação do método Aristotélico à geometria, uma vez que na exploração que faz da aplicações da lógica dedutiva à ciência, o próprio Aristóteles nota que "é por demonstração que provamos a existência de tudo"(Aristóteles in Heath, 1970, p. 70). Como bem realça Heath (1970, p. 70), em geometria assume-se apenas a existência de pontos e retas, sendo necessário provar a existência de todas as restantes entidades geométricas.

Notemos também a ausência de qualquer representação do nosso conceito, o que permite ao leitor a criação da sua própria imagem mental do mesmo, não ficando preso a uma qualquer representação que lhe poderia ser apresentada pelo autor.

1.2.2 As proposições

Usualmente vemos associadas ao conceito de reta tangente ao círculo as Proposições 16 a 19 do livro III dos *Elementos*. Contudo, também a proposição 32 deste livro contém no seu enunciado um resultado relevante sobre a nossa temática. Estas cinco proposições são de dois tipos - teoremas (as proposições 16, 18, 19 e 32) e problemas (apenas a proposição 17) - e permitem um conhecimento mais profundo deste conceito.

A primeira proposição relativa a este conceito, a Proposição III, 16, é também a mais conhecida, sendo enunciada da seguinte forma:

> ***Proposição III, 16:*** *A linha reta perpendicular ao diâmetro de um círculo pela sua extremidade cairá fora do círculo, e no espaço entre a linha reta e a circunferência não pode ser interposta outra linha reta; além disso o ângulo do semicírculo é maior, e o restante ângulo menor, do que qualquer ângulo retilíneo agudo.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 37)

A primeira parte desta proposição enuncia a existência e unicidade da reta tangente que é demonstrada da seguinte forma:

> **Demonstração:**
>
> Seja ABC o círculo de centro D e AB o diâmetro. Digo que a linha reta traçado por A perpendicular a AB na sua extremidade cai fora do círculo [Fig. 1.2].

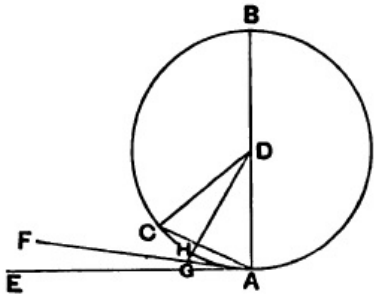


Figura 1.2: Ilustração da demonstração da Proposição III, 16.

> Mas o ângulo DAC é reto; logo o ângulo ACD é também reto: assim, no triângulo ACD os dois ângulos DAC, ACD são iguais a dois retos: o que é impossível [I, 17][7]. Logo a linha reta traçada pelo ponto A perpendicular a BA não cairá dentro do círculo. Analogamente, prova-se que não cairá na circunferência, logo cairá fora.
>
> Deixá-la cair como AE.
>
> Afirmo em seguida que no espaço entre a linha reta AE e a circunferência CHA não é possível interpor outra linha reta.
>
> Se for possível, interponha-se outra linha reta, como FA e seja DG a perpendicular a FA por D.
>
> Como o ângulo AGD é reto, e o ângulo DAG é menor do que um ângulo reto, AD é maior do que DG [I, 19][8].
>
> Mas DA é igual a DH; logo DH é maior do que DG, o menor do que o maior; o que é impossível. Logo não é possível interpor outra linha reta no espaço entre a linha reta e a circunferência. ■

Estes dois resultados são demonstrados por redução ao absurdo, um dos métodos de demonstração mais usuais nos *Elementos*, sendo possível concluir deles, como Euclides, o seguinte resultado:

> ***Porisma:*** *Daqui é manifesto que a linha reta perpendicular ao diâmetro de um círculo na sua extremidade toca o círculo.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 39)

[7] ***Proposição I, 17:*** *Em qualquer triângulo dois ângulos tomados em conjunto de qualquer maneira são inferiores a dois ângulos retos.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 281)

[8] ***Proposição I, 19:*** *Num triângulo o maior ângulo é sub tendido pelo maior lado.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 284)

Este porisma fornece, implicitamente, um método de construção da reta tangente a um círculo por um ponto da sua circunferência. Esse método consiste em:

- Trace-se o diâmetro no ponto dado;
- Trace-se a perpendicular ao diâmetro pelo ponto dado, que é a tangente procurada.

A última parte da Proposição III, 16 é um dos resultados que mais controvérsia gerou, sendo demonstrada por Euclides nos seguintes termos:

> **Demonstração:**
>
> Digo que o ângulo do semicírculo, contido pela linha reta BA e a circunferência CHA, é maior do que qualquer ângulo retilíneo agudo e que o restante ângulo, contido pela circunferência CHA e a linha reta AE, é menor do que qualquer ângulo retilíneo agudo [Fig. 1.2].
>
> Se existir um ângulo retilíneo agudo maior do que o ângulo contido pela linha reta BA e a circunferência CHA, e um ângulo retilíneo agudo menor do que o ângulo contido pela circunferência CHA e a linha reta AE, então no espaço entre a circunferência CHA e a linha reta AE, é possível interpor uma linha reta tal que ela fará um ângulo contido por linhas retas maior que o ângulo contido pela linha BA e a circunferência CHA, e um outro ângulo contido entre linhas retas que é menor do que o ângulo contido pela circunferência CHA e a linha reta AE.
>
> Mas tal linha reta não pode ser interposta; logo não existirá um ângulo contido por linhas retas maior que o ângulo contido pela linha BA e a circunferência CHA, nem um ângulo contido entre linhas retas inferior ao ângulo contido pela circunferência CHA e a linha reta AE. ■

Esta comparação entre o ângulo de contingência[9] (misto) e um ângulo retilíneo agudo encontra-se analisada por diversos comentadores e editores dos *Elementos*, chegando mesmo a ser excluída de diversas edições da obra[10].

Segue-se a Proposição III, 17:

> ***Proposição III, 17:*** *Por um ponto dado tirar uma linha reta tocando um círculo dado.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 43)

[9] Euclides não utiliza a terminologia "ângulo de contingência", referindo-se a este ângulo como "o restante". Proclo nos comentários que efetua à obra de Euclides refere-se a ele como o ângulo cornicular, surgindo mais tarde nomes como ângulo de contacto ou ângulo de contingência.

[10] No capítulo 1.3 encontra-se uma análise ao conceito do ângulo de contingência.

Esta proposição é um problema prático que, embora tal facto não seja referido na obra de Euclides, contempla dois casos: o caso em que o ponto pertence à circunferência do círculo e o caso em que o ponto está no exterior do círculo. O primeiro caso não é abordado por Euclides sendo, como vimos anteriormente[11], uma consequência direta da Proposição III, 16, sendo o segundo caso aquele que Euclides analisa nesta proposição, começando por apresentar a resolução do problema (método de construção) seguida da demonstração de que a sua construção satisfaz o pedido no enunciado.

Resolução:

Seja A o ponto dado, e BCD o círculo dado. Pretende-se traçar pelo ponto A a reta que toca o círculo BCD [Fig. 1.3].

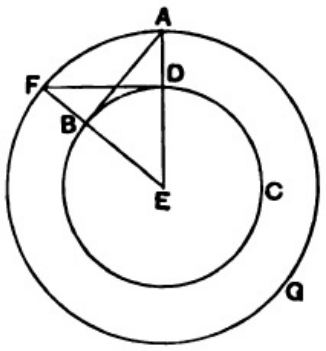


Figura 1.3: Ilustração da demonstração da Proposição III, 17.

Encontre-se o centro E do círculo [III, 1][12]. Trace-se AE e, com centro em E e distância EA descreva-se o círculo AFG. Por D trace-se a reta DF perpendicular a EA. Afirmo que AB traçado pelo ponto A toca o círculo BCD.

Demonstração:

Como E é o centro dos círculos BCD e AFG, EA é igual a EF e ED é igual a EB [Fig. 1.3].

Então os dois lados AE, AB são iguais aos dois lados FE, ED: e eles contêm um ângulo comum, o ângulo em E; logo, a base DF é igual à base AB, e o triângulo

[11] Veja-se página 19.

[12] ***Proposição III, 1:*** *Encontrar o centro de um círculo dado.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 6)

> DEF é igual ao triângulo BEA, e os restantes ângulos aos restantes ângulos [I, 4][13], pelo que o ângulo EDF é igual ao ângulo EBA.
>
> Mas o ângulo EDF é reto, logo o ângulo EBA também é reto.
>
> Como EB é um raio e a linha reta perpendicular ao diâmetro do círculo pela sua extremidade toca o círculo [III, 16, Por.] vem que AB toca o círculo BCD. ■

Embora Euclides não o refira, é notório na resolução que podem ser desenhadas duas retas, por A, a tocar o círculo BCD, uma vez que a reta DF interseta a circunferência AFG em dois pontos. É também possível demonstrar que os segmentos de reta resultantes são iguais em comprimento e em inclinação para com a reta EA[14].

As duas proposições seguintes estabelecem, como nota Heath (1956, vol. 2, p. 45), duas das possíveis relações entre as seguintes três retas:

- reta tangente ao círculo;
- reta que passa pelo centro do círculo;
- reta perpendicular à tangente.

A Proposição III, 18 é enunciada nos seguintes termos:

> ***Proposição III, 18:*** *Se uma linha reta toca um círculo, e uma linha reta é traçada do centro ao ponto de contacto, a linha reta assim traçada é perpendicular à tangente.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 44)

Note-se que, nesta proposição, surge o termo tangente, termo que havia sido omitido na Definição III, 2. A utilização do termo tangente nesta proposição, assim como em diversas edições dos *Elementos*, dever-se-á à generalização da utilização deste termo após a sua utilização pela primeira vez, em 1583, por Thomas Fincke na sua *Geometriæ Rotundi* (Miller, 2017, s.p.).

A demonstração desta proposição é apresentada por Euclides recorrendo, mais uma vez, ao método de redução ao absurdo.

[13] ***Proposição I, 4:*** *Se dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados, respetivamente, e têm o ângulo contido pelas linhas retas iguais igual, então também terão base igual a base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, respetivamente, nomeadamente aquele que os lados iguais sub tendem.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 247)

[14] Esta demonstração pode ser encontrada em Mota C. (2008).

Demonstração:

Considere-se a reta DE que toca o círculo ABC no ponto C, e seja F o centro do círculo ABC [Fig. 1.4]. Trace-se FC que une F a C. Afirmo que FC é perpendicular a DE.

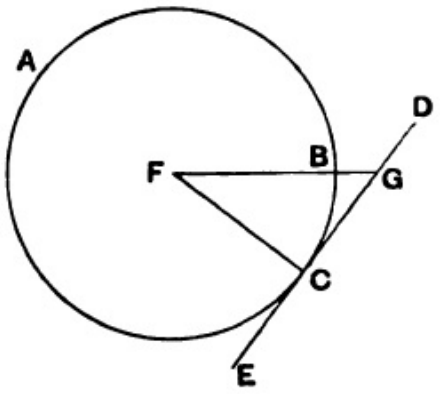


Figura 1.4: Ilustração da demonstração da Proposição III, 18.

Suponha-se que tal não se verifica e trace-se FG perpendicular a DE por F.

Como o ângulo FGC é reto, o ângulo FCG é agudo [I.17][15]. Como o maior ângulo é oposto ao maior lado [I. 19][16], vem que FC é maior que FG. Mas FC é igual a FB, pelo que FB é também maior que FG, o menor que o maior: o que é impossível.

Assim, FG não é perpendicular a DE.

Do mesmo modo se prova que nenhuma outra linha reta o é exceto FC; logo FC é perpendicular a DE. ■

Provada a primeira das relações entre as três retas referidas, Euclides apresenta em seguida, na Proposição III, 19, uma segunda relação entre as mesmas retas que é uma recíproca parcial da Proposição III, 18.

> ***Proposição III, 19:*** *Se uma linha reta toca um círculo, e pelo ponto de contacto se traça a perpendicular à tangente, o centro do círculo estará na linha traçada.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 45)

[15] ***Proposição I, 17:*** *Em qualquer triângulo quaisquer dois ângulos tomados em conjunto são menores do que dois ângulos retos.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 281)

[16] ***Proposição I, 19:*** *Em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 284)

A demonstração desta proposição é também efetuada por redução ao absurdo.

Demonstração:

Considere-se a linha reta DE que toca o círculo ABC no ponto C, e por C trace-se CA perpendicular a DE. Digo que o centro do círculo está em AC [Fig. 1.5].

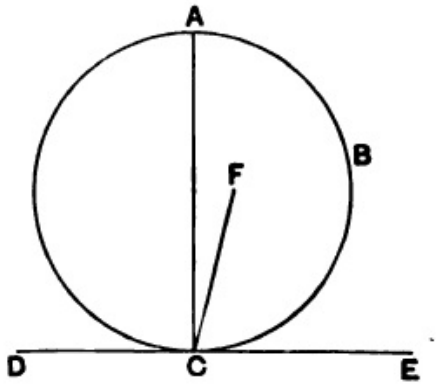


Figura 1.5: Ilustração da demonstração da Proposição III, 19.

Suponha-se que tal não acontece e,se possível, seja F o centro e trace-se CF.

Como a linha reta DE toca o círculo ABC e FC foi traçada unindo o centro ao ponto de contacto, FC é perpendicular a DE [III, 18], logo o ângulo FCE é reto. Mas o ângulo ACE também é reto, pelo que o ângulo FCE é igual ao ângulo ACE, o menor ao maior:o que é impossível.

Assim, F não é o centro do círculo ABC.

Analogamente se prova que nenhum outro ponto o é exceto um ponto em AC. ■

Nestas duas demonstrações, à semelhança das restantes, é visível o cuidado de Euclides em nomear, primeiramente, todas as entidades com que vai trabalhar e que são dadas no enunciado e só depois apresentar a demonstração.

Embora Euclides apenas apresente estas duas relações entre as três retas referidas anteriormente, é possível, como nota Heath (1956, vol. 2, p. 44), acrescentar uma terceira recíproca parcial da Proposição III, 18[17].

Estas quatro proposições esgotam o estudo dedicado exclusivamente às propriedades da reta tangente ao círculo sendo contudo possível encontrar, na Proposição III, 32, uma relação entre

[17] A este propósito veja-se Mota C. (2008, p. 11).

os ângulos definidos pela reta tangente ao círculo e por uma secante passando pelo ponto de contacto.

> ***Proposição III, 32:*** *Se uma linha reta toca um círculo, e pelo ponto de contacto se traçar, através do círculo, uma linha reta cortando o círculo, os ângulos que esta reta faz com a tangente serão iguais aos ângulos nos segmentos alternos do círculo.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 65)

Embora defina segmento de círculo[18] e ângulo num segmento[19] Euclides não define segmentos alternos, sendo percetível que, neste contexto, utiliza o termo "alterno"no sentido de "oposto". Neste caso particular, os ângulos nos segmentos alternos são os ângulos nos segmentos de círculo que se encontram no lado oposto ao do ângulo retilíneo considerado.

Euclides apresenta uma demonstração direta desta proposição.

> **Demonstração:** Seja EF uma linha reta que toca o círculo $ABCD$ no ponto B, e pelo ponto B através do círculo $ABCD$, uma linha reta BD cortando-o [Fig. 1.6].

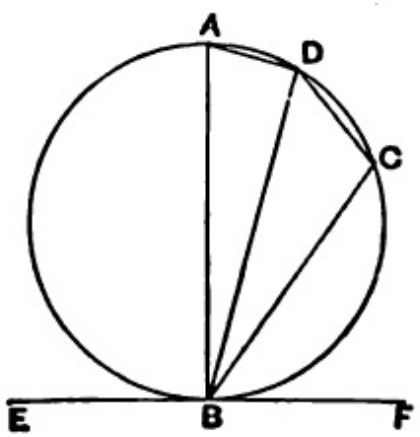


Figura 1.6: Ilustração da demonstração da Proposição III, 32.

> Afirmo que os ângulos que BD faz com a tangente EF são iguais aos ângulos nos segmentos alternos do círculo, isto é, o ângulo FBD é igual ao ângulo construído no segmento BAD, e o ângulo EBD é igual ao ângulo construído no segmento DCB.

[18] ***Definição III, 6:*** *Um* ***segmento de círculo*** *é a figura contida por uma linha reta e a circunferência de um círculo.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 1)

[19] ***Definição III, 8:*** *Um* ***ângulo num segmento*** *é o ângulo que, quando um ponto é tomado na circunferência do segmento e linhas retas são traçadas dele até às extremidades da linha reta que é a base do segmento, é contido pelas linhas retas assim traçadas.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 1).

Seja BA a reta traçada por B perpendicular a EF, e considere-se o ponto C tomado aleatoriamente na circunferência BD, e tracem-se AD, DC e CB. Como a linha reta EF toca o círculo $ABCD$ em B, e BA foi traçada pelo ponto de contacto perpendicular à tangente, o centro do círculo $ABCD$ está em BA [III, 19].

Logo BA é o diâmetro do círculo $ABCD$, pelo que o ângulo ADB, sendo um ângulo no semicírculo, é reto [III, 31][20].

Assim, os ângulos restantes BAD, ABD são iguais a um ângulo reto [I, 32][21].

Mas o ângulo ABF também é reto, logo o ângulo ABF é igual aos ângulos BAD, ABD. Subtraindo o ângulo ABD de cada um deles vem que o ângulo DBF que resta é igual aos ângulo BAD no segmento alterno do círculo.

Como $ABCD$ é um quadrilátero do círculo, os ângulos opostos são iguais a dois ângulos retos [III, 22][22]

Mas os ângulos DBF e DBE também são iguais a dois ângulos retos, pelo que os ângulos DBF, DBE são iguais aos ângulos BAD, BCD, do qual o ângulo BAD foi provado ser igual ao ângulo DBF. Assim, o ângulo DBE que resta é igual ao ângulo DCB no segmento alterno DCB do círculo. ■

Deste nosso estudo podemos, em particular, destacar o rigor nos enunciados e nas demonstrações, assim como a dimensão prática introduzida pelo porisma da Proposição III, 16 e pela Proposição III, 17. Tratando-se de uma obra utilizada durante séculos no ensino da matemática, é de salientar que, além de resultados teóricos e das propriedades associadas aos conceitos, nos oferece ferramentas práticas para a construção da representação desses conceitos. Notemos contudo, que também esta dimensão prática é claramente justificada e provada, não sendo apenas um conjunto de regras que os leitores/aprendizes teriam de seguir sem qualquer fundamentação.

1.3 A questão do ângulo de contingência

Na Proposição III, 16 dos seus *Elementos*, Euclides relaciona o conceito de reta tangente ao círculo com o conceito de ângulo através da comparação entre três tipos de ângulos: o ângulo

[20] ***Proposição III, 31:*** *Num círculo o ângulo num semicírculo é reto, aquele num maior segmento menor do que um ângulo reto, e aquele num menor segmento maior do que um ângulo reto; além disso, o ângulo de um maior segmento é maior do que um ângulo reto, e o ângulo de um menor segmento é menor do que um ângulo reto.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 62)

[21] ***Proposição I, 32:*** *Num triângulo, se um dos lados for prolongado, o ângulo exterior é igual aos dois ângulos interiores opostos, e os três ângulos interiores são iguais a dois ângulos retos.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 316)

[22] ***Proposição III, 22:*** *Os ângulos opostos de quadriláteros em círculos são iguais a dois ângulos retos.* (Heath, 1956, vol. 2, p. 51)

do semicírculo; o ângulo de contingência; o ângulo retilíneo agudo[23].

Comecemos por analisar a definição de ângulo proposta por Euclides nos seus *Elementos* logo no seu primeiro livro:

> ***Definição I, 8:*** *Um* ***ângulo plano*** *é a inclinação de uma para a outra, de duas linhas num plano que se encontram uma à outra e não caem em linha reta.* (Heath, 1956, vol. 1, p. 153)

Esta definição é, segundo Heath (1956, vol. 1, p. 176), original, no sentido em que não se encontra nos trabalhos dos antecessores de Euclides, nomeadamente em Aristóteles e aqui Euclides considera um ângulo como uma relação entre duas linhas. Todavia, é possível considerar um ângulo de outras formas:

> *Alguns dos antigos colocam o ângulo na categoria de relação, chamando-lhe a inclinação entre linhas ou planos de um para o outro; outros colocam-no como qualidade, dizendo que, tal como a reta e a curva, é uma certa característica de uma superfície ou sólido; outros referem-no como uma quantidade, dizendo que tanto é uma quantidade plana como sólida.* (Proclo in Eecke, 1948, pp. 109-110)

Apesar de serem vários os autores que consideram cada uma destas três possibilidades, o próprio Proclo, nos seus *Les Commentaires sur le premier livre de Éléments d'Euclide*, levanta objeções a todas elas.

- Considerando um ângulo como uma quantidade, então será possível estabelecer uma razão entre o ângulo de contingência e um ângulo retilíneo, uma vez que quaisquer grandezas do mesmo tipo têm entre si uma dada razão. Ora, e atendendo ao resultado proposto por Euclides na Proposição III, 16 - onde afirma que o ângulo de contingência é menor do que qualquer ângulo retilíneo - não é possível, através de multiplicação, o ângulo de contingência exceder um ângulo retilíneo, condição necessária para que exista razão entre as duas grandezas (Proclo in Eecke, 1948, p. 110). Assim, aceitando como verdadeira a Proposição III, 16, não é possível considerar um ângulo como uma quantidade.

- Se um ângulo for uma qualidade, o problema é a possibilidade de o dividir e de comparar ângulos distintos. De facto, como nota Proclo, a comparação e a divisão são propriedades intrínsecas de quantidades e não de qualidades, pelo que não é então possível considerar-se um ângulo como uma qualidade (Proclo in Eecke, 1948, pp. 110-111).

[23] Euclides utiliza nos *Elementos* diferentes tipos de ângulos, seguindo uma categorização clássica que se encontra no anexo B.

- Considerando um ângulo como uma relação, tal como faz Euclides, levanta-se a questão de, dada uma inclinação, dever existir um único ângulo e não vários, como de facto acontece. Proclo apresenta o exemplo de um cone cortado por um plano do vértice até à base, onde a partir do vértice existe uma só inclinação - formada pelos lados do triângulo - mas dois ângulos, um plano no triângulo e outro na superfície mista do cone (Proclo in Eecke, 1948, p. 111).

A solução final proposta por Proclo é rejeitar que um ângulo possa ser considerado como contendo apenas uma destas três características e aceitar que, sendo um conceito complexo, revela intrinsecamente propriedades dos três tipos:

> *(...) um ângulo não nenhuma das coisas mencionadas mas existe como uma combinação de todas estas categorias, e é por isso que apresenta dificuldades para aqueles que estão inclinados em fazê-lo qualquer uma delas.* (Proclo in Eecke, 1948, p. 112)

Notemos que Euclides, nos seus *Elementos*, apresenta algumas destas características do conceito de ângulo, que embora seja apresentado na definição como uma relação é muitas vezes tratado como uma quantidade, veja-se, em particular, o caso da Proposição III, 16 onde Euclides compara ângulos

Uma vez que Proclo apenas comenta e analisa o livro I dos *Elementos*, não conhecemos a posição do comentador sobre a validade (ou não) da comparação efetuada por Euclides. Contudo, esta comparação é analisada por diversos matemáticos ao longo dos séculos, sendo mesmo a temática de uma das contendas mais conhecidas da história das matemáticas: a que opôs Clavius a Peletier[24].

Este mesmo assunto não passou ao lado dos matemáticos portugueses, tendo Pedro Nunes abordado esta questão no seu *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*[25].

Esta questão volta a ser estudada em Portugal no século XVIII, aquando do estudo do conceito de reta tangente ao círculo nas primeiras traduções para português dos *Elementos* de Euclides.

[24] Um estudo da polémica em torno do ângulo de contingência envolvendo Peletier e Clavius pode ser encontrado em Maierú (1998, pp. 115-137).

[25] Um estudo da posição de Pedro Nunes sobre esta questão pode ser encontrado em Loget (2010, pp. 79-100).

Capítulo 2

O conceito de reta tangente ao círculo, segundo o Padre Manuel de Campos

Manuel de Campos nasce em Lisboa em 1681 e ingressa na Companhia de Jesus em 1689. Os estudos filosóficos adquiridos na Universidade Jesuíta de Évora ter-lhe-ão dado os conhecimentos matemáticos que lhe permitem lecionar esta disciplina na Universidade de Évora, no Colégio Imperial de Madrid e, em especial, na "Aula da Esfera", do Colégio de Santo Antão, em Lisboa. Morre em Lisboa em 1758 (*Sphaera Mundi*, 2008, p. 225).

O Padre Manuel de Campos destaca-se como professor tendo publicado, durante os anos em que leciona na "Aula da Esfera", três obras destinadas ao ensino da matemática nesta instituição:

- *Elementos de geometria plana, e solida, segundo a ordem de Euclides, princepe dos geometras. Accrescentados com tres uteis appendices, o primeiro da logistica das proporçõoes, o segundo dos theoremas selectos de Archimedes, e o terceiro da quadratriz de Dinostrato, para quadrar o circulo, e tri-secar o angulo*, editados em 1735, contendo a primeira tradução para português dos livros geométricos dos *Elementos* de Euclides.

- *Trigonometria plana, e esferica com o canon trigonometrico linear, e logarithmico*, datada de 1737, onde o autor aborda a trigonometria plana e esférica, a resolução de triângulos planos e o estudo dos logaritmos.

- *Synopse Trigonometrica dos casos que commumente occorem em huma, e outra Trigonometria Plana, e Esferica: com as analogias respectivas, e Praxes Logarithimas, que lhe correspondem*, editado em 1737.

Sendo estas obras da autoria de um Jesuíta, e destinadas ao ensino da matemática num colégio da mesma ordem, refletem naturalmente os ideais de ensino da matemática emanados do Colégio Romano da Companhia de Jesus.

2.1 O ensino da matemática nos colégios Jesuítas portugueses

Os Jesuítas estabelecem-se em Portugal, aquando da sua formação logo em 1540, por convite de D. João III, sendo a Companhia responsável pela criação de uma alargada rede de ensino.

A *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Iesu*, doravante designada de *Ratio Studiorum*, e publicada em 1599, regulamenta todo o ensino da companhia, e é considerada uma obra pedagógica de impacto ímpar (Miranda, 2009, p. 22). Nesta obra, a Companhia de Jesus defende um ensino universal e gratuito, destinado quer a religiosos quer a leigos, e que inclui temas tão diversos como sejam a filosofia, a teologia, a retórica, as línguas e a literatura, bem como as ciências naturais e a matemática, ou ainda a história e o teatro.

Na *Ratio Studiorum* lemos o plano de estudos, os procedimentos a adotar quer pelos professores quer pelos alunos, as características dos professores, as regras dos exames e de prémios, etc.[26].

No que à matemática diz respeito, a *Ratio Studiorum* advoga que é parte integrante do Curso de Filosofia, curso de três anos, de influência Aristotélica. Aqui destacamos, no final do 1.º ano e no âmbito da introdução ao estudo da física, o estudo da organização das ciências e a hierarquização dos saberes já defendida por Aristóteles e implementadas por Euclides nos seus *Elementos*. Assim, a geometria euclidiana leciona-se no 2.º ano do curso de filosofia e:

> *O professor de matemática dará aos alunos de física os 'Elementos' de Euclides, durante cerca de três quartos de hora da aula. Depois de os seus alunos se exercitarem cerca de dois meses nesta matéria, acrescente algumas noções de geografia ou [do tratado] 'Da Esfera', ou de outras matérias que habitualmente são mais do seu agrado, mas faça-o juntamente com Euclides (no mesmo dia ou em dias alternados).* (Miranda, 2009, p. 146)

Os *Elementos* de Euclides são a obra central desta formação todavia, o *Tratado da Esfera* (1220) de João Sacrobosco[27] também é reportado a título de exemplo, o que nos remete para o estudo da astronomia.

[26] Um estudo detalhado do modelo pedagógico da *Ratio Studiorum* encontra-se em Miranda (2009, pp. 37-51).
[27] Esta obra de Sacrobosco foi traduzida para português e comentada por Pedro Nunes em 1537.

Em Portugal, os temas astronómicos revelam-se essenciais para nossas viagens marítimas refletindo-se na criação de uma "Aula da Esfera", a partir de 1590, em Lisboa. Na "Aula da Esfera" estudam-se:

> *Para além da introdução aos assuntos cosmográficos-astronómicos, aí se ensinou também geometria - baseada no estudo dos primeiros livros dos 'Elementos' de Euclides - Aritmética e os rudimentos da Álgebra, Trigonometria plana e esférica, Náutica e temas vários, quer teóricos, quer aplicados, de Navegação, de geografia, Hidrografia e Cartografia. Ensinou-se também ótica, Perspetiva e Cenografia, Gnomónica, construção de instrumentos científicos e de máquinas simples, Estática e Hidrostática, técnicas várias de Arquitetura e Engenharia Militar, e outros assuntos relacionados (Pirotecnia, Balística, etc.), muitos tópicos de Geometria aplicada, de Agrimensura, etc..* (Leitão, 2008, pp. 19-20)

Esta panóplia de temas mostra que na "Aula da Esfera" há não só um ensino teórico da matemática mas também o prático, nomeadamente na relevância dada à náutica ou à engenharia militar, havendo mesmo espaço para a manipulação e construção de objetos científicos. O caráter prático do ensino da matemática é reforçado na *Ordenatio ad suscitandum fovendumque in Provincia Lusitaniæ Studium Mathematicæ*[28], doravante designada de *Ordenatio*, enviada para Portugal em 1692 pelo Pe. Tirso González[29], onde são dadas indicações para que sejam lecionados aos alunos temas de geografia, astronomia e até mecânica (*Ordenatio*, 2004, pp.713-714).

Os diferentes temas abordados nas aulas de matemática são alvo de ilustração nos painéis de azulejos que adornam os colégios Jesuítas, em particular, no Colégio do Espírito Santo, em Évora, e na sala onde funcionava a "Aula da Esfera", atual Salão Nobre do Hospital de S. José (fig. 2.1).

A investigação matemática em Portugal é também incentivada na *Ordenatio* (2004, p. 716), devendo existir alunos que no final de curso de filosofia se dediquem exclusivamente ao estudo da matemática, em particular da álgebra.

Apesar da importância atribuída ao ensino das aplicações da matemática ou dos desenvolvimentos mais recentes desta ciência, os fundamentos apresentados nos *Elementos* de Euclides são

[28] Utilizamos, na análise da *Ordenatio ad suscitandum fovendumque in Provincia Lusitaniæ Studium Mathematicæ*, a transcrição para português efetuada por Ugo Baldini e Henrique Leitão, publicada em Saraiva & Leitão (Eds.) (2004, pp. 704-723).

[29] Apesar da existência da "Aula da Esfera", o ensino da matemática na província portuguesa dos Jesuítas é considerado de pouca qualidade pelo que, entre 1692 e 1711, são enviados para Portugal uma série de oito documentos dando indicações específicas de procedimentos a adotar relativamente ao ensino desta ciência. A este propósito veja-se Mota B. (2008, pp. 185-302) e Baldini (2004, pp. 318-465).



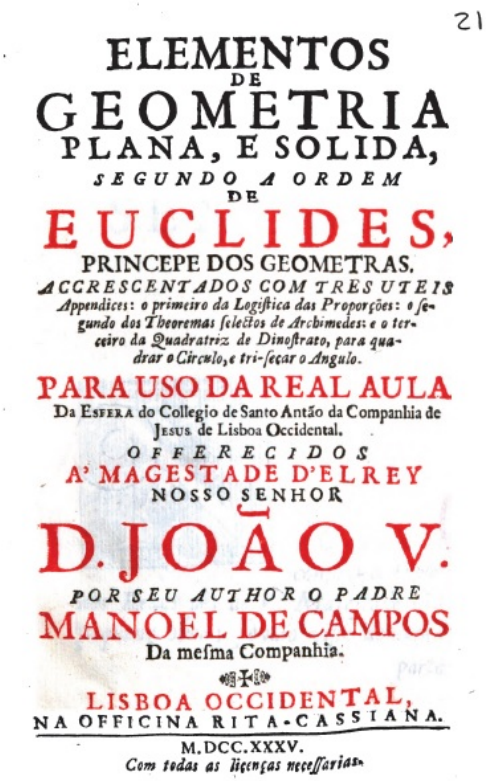
Figura 2.1: Painel de azulejos do salão nobre do Hospital de S. José, onde funcionava a "Aula da Esfera", contendo conteúdos matemáticos.

sempre considerados como basilares na formação matemática ministrada nos colégios Jesuítas portugueses. Para garantir a qualidade deste ensino a companhia garante a excelência dos mestres, e na *Ordenatio* (2004, pp.706-708) podemos ler que livros de texto devem ser utilizados, a saber, a edição dos *Elementos* de Euclides do padre Jesuíta André Tacquet. Notemos que a edição de Tacquet, intitulada *Elementa geometriæ planæ ac solidæ: quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*, conhece uma enorme divulgação, sendo inclusive traduzida em diversas línguas, entre elas a portuguesa.

Uma vez que os *Elementos* são uma obra de geometria, as representações das entidades geométricas assumem também um papel importante, nomeadamente para a compreensão dos conceitos e das demonstrações, sendo os alunos instados a fazerem-se acompanhar de régua e compasso; nas salas de aula são colocadas figuras alusivas às demonstrações principais (*Ordenatio*, 2004, p. 707). No Museu nacional Machado de Castro em Coimbra, encontramos um conjunto de azulejos com representações de temas matemáticos, que se crê originário do Colégio das Artes de Coimbra, e que reproduzem fielmente figuras dos *Elementa geometriæ planæ ac solidæ: quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata* de Tacquet (Duarte, 2007, p. 13).

2.2 Os *Elementos de geometria* do Pe. Manuel de Campos

Os *Elementos de geometria plana, e solida, segundo a ordem de Euclides, princepe dos geometras, Acrescentados com três uteis appendices, o primeiro da logistica das proporçõoes, o segundo dos theoremas selectos de Archimedes, e o terceiro da quadratriz de Dinostrato, para quadrar o circulo, e tri-secar o angulo*, doravante aqui referidos como *Elementos de Geometria*[30], são, como já referimos, a primeira edição em português da obra *Elementos*. Nesta edição, datada de 1735, lê-se no seu frontispício (Fig. 2.2), que se destina à "Real Aula da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental".


21

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA,
SEGUNDO A ORDEM
DE
EUCLIDES,
PRINCEPE DOS GEOMETRAS.
ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS
Appendices: o primeiro da Logiſtica das Proporções: o ſegundo dos Theoremas ſelectos de Archimedes: e o terceiro da Quadratriz de Dinoſtrato, para quadrar o Circulo, e tri-ſeçar o Angulo.
PARA USO DA REAL AULA
Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental.
OFFERECIDOS
A' MAGESTADE D'ELREY
NOSSO SENHOR
D. JOÃO V.
POR SEU AUTHOR O PADRE
MANOEL DE CAMPOS
Da meſma Companhia.
LISBOA OCCIDENTAL,
NA OFFICINA RITA-CASSIANA.
M.DCC.XXXV.
Com todas as licenças neceſſarias.

Figura 2.2: Frontispício dos *Elementos de Geometria* de Manuel de Campos.

Os motivos que levam Manuel de Campos a compor esta obra são-nos apresentados, pelo próprio, na introdução:

> *O de que mais necessita (suposto o numeroso concurso dos que a frequentam) são livros clássicos, e manuais para adiantar a sua aplicação. Bem sei que a Corte abunda deles, e dos melhores Autores, que tem ilustrado esta ciência (...) porém também sei que a diversidade dos estilos, dos idiomas, e dos métodos não causam*

[30] O exemplar da obra utilizada neste trabalho pertence ao Fundo Documental Bazul, da Biblioteca Pública de Évora, e encontra-se disponível em http://hdl.handle.net/123456789/264.

> *pequena confusão aos Mestres e aos Discípulos. Esta foi a razão, porque me resolvi há tempos a formar um Curso Matemático, manual e expedito, para servir com ele a meus Naturais.* (Campos, 1735, s.p.).

A obra que Manuel de Campos escreve é, maioritariamente, uma tradução da edição latina dos *Elementos* segundo André Tacquet, publicada em 1654, que o nosso autor elogia:

> *Os ['Elementos'] do Padre Tacquet, de que usa ordinariamente a Companhia, são sumamente estimados em todas as Nações, pelo breve, pelo claro, e pelo sólido; razão porque se tem estampado muitas vezes, e os tem adotado para uso seu muitos Estudos Públicos: estes mesmos são os que dou à luz com muito pouca alteração; salvo a da língua, que por servirem a todos, me foi aconselhado, ou mandado, que fosse na Portuguesa(...).*(Campos, 1735, s.p.).

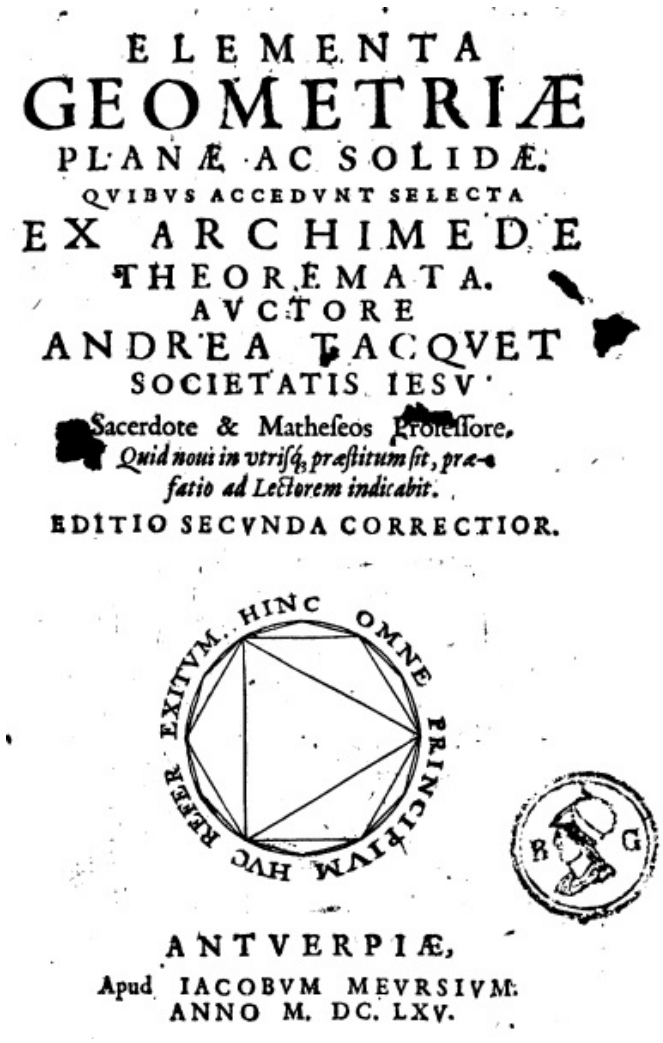

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
PLANÆ AC SOLIDÆ.
QVIBVS ACCEDVNT SELECTA
EX ARCHIMEDE
THEOREMATA.
AVCTORE
ANDREA TACQVET
SOCIETATIS IESV
Sacerdote & Matheſeos Profeſſore,
Quid noui in vtriſq; præſtitum ſit, præfatio ad Lectorem indicabit.
EDITIO SECVNDA CORRECTIOR.
REGER. EXITVM. HINC OMNE PRINCIPIVM HVC
ANTVERPIÆ,
Apud IACOBVM MEVRSIVM.
ANNO M. DC. LXV.

Figura 2.3: Frontispício dos *Elementa geometriæ* de André Tacquet.

Na verdade, contrariamente ao que Manuel de Campos afirma neste Prólogo, as alterações efetuadas não se restringem à língua e tornam-se visíveis logo no frontispício da sua obra. Enquanto a obra de Tacquet se intitula *Elementa geometriæ planæ ac solidæ: quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*[31], Manuel de Campos decide usar explicitamente o nome de Euclides. Esta ausência, no mínimo rara entre os principais editores de Euclides, não nos é justificada por Tacquet, mas poder-se-á prender com o facto de, à época, a referência a "Elementos de Geometria" aludir de forma imediata aos de Euclides. Não deixemos também de notar o surgimento de "Novos Elementos de Geometria"[32] que poderão justificar a inclusão do nome de Euclides em outras edições da obra de Tacquet anteriores à obra de Manuel de Campos[33]. Todavia, Manuel de Campos apõe ao nome de Euclides o título de "Príncipe dos Geómetras".

> *Ele [Euclides] só mereceu o nome de Príncipe dos Geómetras; e de Mestre Universal de todos os que se seguiram(...)*
>
> *Os Elementos de Euclides são uma obra engenhosa, útil, e tão bem ordenada, que passa de 2 mil anos que está na posse de uma universal estimação.* (Campos, 1735, s.p.)

Ainda nos títulos vemos outra alteração: Manuel de Campos opta pela inclusão de três apêndices ao passo que Tacquet se restringe a um.

Os *Elementos de Geometria* contêm, à semelhança da obra de Tacquet, os denominados livros geométricos dos *Elementos* (os seis primeiros, o décimo primeiro e o décimo segundo) tendo Manuel de Campos completado a sua obra com a inclusão do décimo terceiro livro dos *Elementos*, livro esse que não consta da edição de Tacquet[34]. Numa comparação mais detalhada entre as duas obras é notória a necessidade sentida por Manuel de Campos em simplificar e explicar detalhadamente os conteúdos, sendo evidente que o matemático português teve preocupações científicas e didáticas na escrita deste tratado, como é visível nos exemplos a seguir apresentados.

A preocupação didática é visível logo na introdução, que Manuel de Campos intitula de *Prolusão Geométrica*, e que se encontra dividida em três partes:

[31] "Elementos de Geometria Plana e sólida: acrescentados de teoremas selecionados de Arquimedes". No nosso trabalho utilizamos uma edição revista de 1665.

[32] Em França, no século XVII e inícios do século XVIII, surgem várias obras intituladas *Nouveaux Elemens de Géométrie*, onde os fundamentos da Geometria são apresentados segundo métodos diferentes dos de Euclides.

[33] A título de exemplo refira-se que as edições efetuadas por William Whiston, posteriores a 1722, se intitulam já *Elementa Euclideæ geometriæ; planæ ac solidæ.*

[34] Encontra-se, no Anexo C, uma comparação da estrutura dos *Elementos de Geometria* de Manuel de Campos e dos *Elementa Geometriæ* de André Tacquet.

- A primeira parte contém uma explicação da natureza e excelência da geometria, da autoria do matemático português, seguida de uma tradução da narração histórica que Tacquet apresenta na sua obra. No entanto, Manuel de Campos termina esta narração histórica em Euclides, ignorando todas as referências históricas posteriores apresentadas por Tacquet. A opção de Manuel de Campos em terminar com Euclides parece-nos justificável, uma vez que permite um encadeamento perfeito, histórico e didático, com as duas partes seguintes, partes essas que são originais do matemático português.

- Na segunda parte, Manuel de Campos apresenta uma breve biografia de Euclides e uma descrição sumária da sua bibliografia.

- Na terceira e última parte descreve a estrutura e os temas tratados em cada um dos livros dos *Elementos* de Euclides.

Estas duas últimas partes apresentam uma característica particular: apresentam-se no formato pergunta/resposta. Esta forma de apresentar a informação parece-nos ser uma opção claramente didática, replicando numa obra escrita um possível método de ensino em sala de aula, ao mesmo tempo que ajuda a guiar os alunos na sua aprendizagem individual.

Dado tratar-se de uma obra dedicada ao ensino, a apresentação de uma introdução histórica, onde são relatados factos precisos e relevantes para o estudo que será efetuado posteriormente, mostra o cuidado que Manuel de Campos emprega, já no início do século XVIII, na inclusão da história da matemática no ensino da própria matemática. Esta introdução apresenta-se como um exemplo de como a história da matemática pode ser utilizada num contexto de ensino e de sala de aula: introdutora, contextualizadora e desejavelmente motivadora dos conteúdos que se seguem.

Nos oito livros comuns aos *Elementos de Geometria* e aos *Elementa Geometriae* existem duas diferenças notórias: o maior número de definições na obra de Manuel de Campos e a organização do livro V.

O aumento do número de definições poderia ter como objetivo apresentar de forma mais clara todos os conceitos necessários à compreensão das proposições que deles dependem. Esta clareza nas definições e na introdução de novas terminologias é uma constante em toda a obra, mostrando-nos que Campos tinha sempre presente que estava a escrever um livro que serviria para a instrução de principiantes em geometria.

Em toda a sua obra é notória a preocupação de Manuel de Campos em torná-la facilmente compreensível, talvez dada a sua experiência enquanto professor que o terá tornado sensível às dificuldades que os leitores/alunos enfrentam. A título de exemplo veja-se a classificação que efetua das proposições em teorema ou problema, a distinção entre estes e lemas, porismas, corolários e escólios, numa distinção que o autor apresenta no início do Livro I e que teria como objetivo simplificar a interpretação das diferentes proposições.

> *As Proposições Geométricas são em duas diferenças: ou ensinam a construir algumas figuras, ou demonstram as propriedades das já formadas: as primeiras chamam-se 'Problemas', as segundas 'Teoremas'. Além destas proposições perfeitas, há outras imperfeitas; como são 'Lemas', 'Porismas', 'Corolários', e 'Escólios'; as quais ou servem para demonstrar mais facilmente as primeiras; ou se inferem delas.* (Campos, 1735, p. 10)

Mas as diferenças mais importantes entre a obra de Manuel de Campos e André Tacquet serão, talvez, as menos visíveis numa primeira abordagem:

> *(...) todavia não deixei de mudar alguma coisa em algumas demonstrações.* (Campos, 1735, s.p.)

Esta breve afirmação pode levar o leitor a pensar que se tratam de alterações de menor importância. Contudo, como nos mostram Guimarães et al (2011), estas alterações apresentam-nos Manuel de Campos como um matemático precursor, cientificamente rigoroso e atual.

Tratando-se de uma tradução dos *Elementos*, o conceito de reta tangente a uma curva surge nestes *Elementos de Geometria* aquando do estudo do círculo no livro III.

2.3 O conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos de Geometria*

Manuel de Campos, à semelhança do que faz Tacquet, inicia o livro III com uma breve descrição do estudo que irá efetuar, embora as duas introduções sejam bastante distintas (Tabela 2.1) .

Campos, 1735, p. 61	Tacquet, 1665, p. 171
Dos Paradoxos que observou Aristóteles na geração do círculo, tocamos alguma coisa na definição 18 do livro I. Dos mistérios (verdadeiramente admiráveis) que observou Galileu na sua rotação, falaremos mais largamente no último livro da geometria Prática. Neste trataremos somente como Euclides das suas propriedades, o qual é como um prelúdio da Doutrina da Esfera; como aquela, que por qualquer parte se corte, toda se resolve em círculos, como ensina Teodósio. As suas proposições mais admiráveis são as 16, 20, 21, 22, 31, 35 e 36, das quais precedem as invenções de tantos engenhosos instrumentos, de que se usa a Geometria Prática, e a Astronomia.	Neste livro são demonstradas as propriedades da figura mais perfeita entre as figuras planas. A utilidade deste livro torna-o conhecido por uma só coisa, o tratamento do círculo, assunto admirável e fonte célebre no universo matemático. Os seus teoremas mais famosos são 16, 20, 21, 22, 31, 32, 35 e 36.

Tabela 2.1: Introdução ao livro III nas obras de Manuel de Campos e André Tacquet.

A diferença entre as duas introduções é notória pela maior extensão da de Manuel de Campos que apresenta informação mais detalhada sobre o objeto de estudo do livro III: o círculo.

Nesta introdução, Manuel de Campos começa por referir a análise que já efetuou, no livro I, ao círculo assim como os mistérios que Galileu terá observado sobre o círculo. Embora Manuel de Campos não explicite quais os mistérios observados por Galileu pensamos tratar-se de uma referência ao estudo efetuado pelo matemático italiano, nos seus *Discorsi e Dimonstrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*, de 1638, ao problema do Paradoxo de Aristóteles. Este paradoxo, também conhecido como a Roda de Aristóteles, refere-se à rotação simultânea de dois círculos concêntricos, sobre uma linha reta, de tal modo que ao analisar o movimento e ao estabelecer uma correspondência ponto a ponto entre as respetivas circunferências e a linha reta é possível concluir que que as duas circunferências têm o mesmo comprimento, o que é absurdo[35]. Notemos que Manuel de Campos refere que analisou estes mistérios numa obra de geometria prática, à qual se refere diversas vezes aos longo dos *Elementos de Geometria*.

Estas duas referências históricas mostram, novamente, a importância atribuída por Manuel de Campos à história da Matemática, tendo o cuidado de, nas suas introduções, efetuar re-

[35]Uma análise detalhada deste paradoxo e da abordagem de Galileu pode ser encontrada em Nicodemi (2014).

ferências e contextualizações históricas que servem de motivação para o estudo que efetuará seguidamente.

Os autores terminam a introdução com a apresentação de uma lista das proposições mais relevantes deste livro[36], onde Manuel de Campos se desvia, mais uma vez, do original de Tacquet.

2.3.1 A relevância das proposições

O livro III é composto por 37 proposições das quais Tacquet destaca 8 como sendo as mais famosas, sem apresentar qualquer justificação para este facto.

Por seu turno, Manuel de Campos opta por referir apenas 7. O matemático português justifica a escolha das 7 proposições apresentadas referindo que delas resultam a invenção de instrumentos aplicáveis à Geometria Prática e à Astronomia. Notemos que, para Manuel de Campos, a importância das proposições poder-se-á prender com a sua função, uma característica da matemática do século XVIII, onde é dado especial relevo às aplicações da matemática enquanto ciência. Será talvez este o motivo pelo qual Manuel de Campos exclui a Proposição III, 32 da lista de Tacquet, uma vez que esta não tem uma aplicação óbvia na Geometria Prática, na Astronomia nem mesmo na Trigonometria. De facto, analisando as possíveis aplicações das proposições referidas por Tacquet[37] tem-se que:

Proposição III, 16: Traçar retas tangentes ao círculo.

Proposição III, 20: Bissetar um ângulo.

Proposição III, 21: Descrever um círculo ou um segmento de círculo, assim como aplicações à ótica.

Proposição III, 22: Inscrever quadriláteros num círculo.

Proposição III, 31: Traçar retas perpendiculares a retas dadas e traçar alturas de triângulos.

***Proposição III, 32**: Demonstrar as proposições III, 33 e III, 34 assim como a Proposição V, 20.*

Proposição III, 35: Determinar o meio proporcional entre duas linhas retas dadas.

Proposição III, 36: Determinar os ângulos de um triângulo.

[36] Uma lista semelhante é apresentada no livro I onde as escolhas dos dois autores coincidem.
[37] Estas aplicações são referidas por Azevedo Fortes na sua *Geometria Especulativa* (1724, fls. 82-96v).

De facto, a Proposição III, 32 é a única cujas aplicações se prendem exclusivamente com a demonstração de outros resultados dos *Elementos*. Contudo, para o nosso estudo, a Proposição III, 32 é relevante uma vez é uma das proposições relativas ao conceito de reta tangente ao círculo.

2.3.2 A definição

O livro III dos *Elementos de Geometria* contém dez definições, afastando-se Manuel de Campos de Tacquet que nos seus *Elementa Geometriæ* apresenta apenas oito definições. A diferença entre as duas edições encontra-se na inclusão, por Manuel de Campos, das definições de 'ângulo do segmento' e 'segmentos semelhantes'. Realcemos ainda que os *Elementos* contêm onze definições, não apresentando Manuel de Campos a Definição III, 5 dos *Elementos* relativa à distância de um segmento de reta ao centro do círculo.

A definição do conceito de reta tangente ao círculo é a segunda das dez definições do livro III, encontrando-se explicitada nos seguintes termos:

> ***Definição III, 2:*** *A reta AB, se diz Tocar o círculo DOQ, quando de tal sorte lhe ocorre em D, que continuada não o corta.* (Campos, 1735, p. 62)

Nesta definição Manuel de Campos, à semelhança do que acontece noutras edições dos *Elementos*, não introduz o termo 'tangente' na sua definição[38]. No final da definição é feita referência a uma figura, a figura 15, onde se encontra representado o conceito definido (Fig. 2.4).

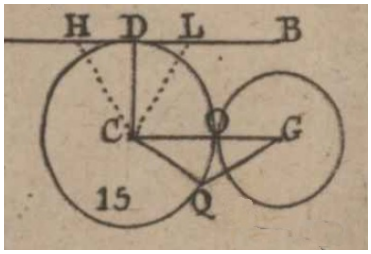


Figura 2.4: Ilustração da Definição III, 2.

As representações associadas às definições pretenderiam ser elucidativas e clarificadoras; contudo, é notória a complexidade da figura apresentada por Manuel de Campos. Tal complexidade pode estar relacionada com a dificuldade, à época, da impressão de imagens, preocupação que poderá ter levado Manuel de Campos a utilizar, na definição, uma figura que posteriormente será utilizada na demonstração de proposições relativas a este conceito. De facto, a figura 15 é

[38] Veja-se a este propósito a página 16.

também a figura ilustrativa da primeira proposição onde Manuel de Campos aborda as propriedades do conceito de reta tangente ao círculo. Apesar de ser uma figura complexa a ilustrar um conceito, o que poderia provocar alguma confusão no leitor, não podemos deixar de referenciar que a obra tinha como objetivo ser utilizada em "contexto de sala de aula", isto é, com a orientação de um mestre que esclareceria qualquer dúvida e explicitaria quais os aspetos da figura relevantes para a definição apresentada.

As propriedades do conceito de reta tangente ao círculo são estudadas nas Proposições 13, 16, 17, 18, 19 e 32 do livro III.

2.3.3 As proposições

Ao contrário do que é usual nas edições dos *Elementos*, a primeira proposição dos *Elementos de Geometria* a propósito do conceito de reta tangente não é a Proposição III, 16 mas sim a Proposição III, 13, que apresenta na obra de Manuel de Campos a seguinte formulação:

> ***Proposição III, 13**: Os círculos que se tocam, ou seja pela parte de dentro, ou pela de fora, tocam-se somente em um ponto. E em um só ponto se toca também um círculo com uma reta.* (Campos, 1735, p.70)

Esta proposição estabelece a unicidade do ponto de tangência entre círculos tangentes e a unicidade do ponto de tangência entre o círculo e a reta tangente. A demonstração relativa ao resultado que envolve a reta tangente é a seguinte:

> **Demonstração:**
>
> Toque o círculo DOQ, se for possível, a reta AB, em toda a parte HL [Fig. 2.4].
>
> Tirem-se do centro C, a quaisquer dois pontos H, L, do dito contacto duas retas: será o triângulo HCL isósceles: logo os ângulos sobre a base LHC, HLC serão agudos (Corolário 2 da I, 32)[39] logo tirada do mesmo centro a perpendicular CD cairá esta dentro do mesmo triângulo (Corolário 3 da I, 32)[40], logo o lado CL, oposto ao maior ângulo, será igual ao lado CD, oposto ao menor, contra o demonstrado na 19 do I [41]. ■

[39] ***Corolário 2, Proposição I, 32:** De dois ângulo, E, O, insistentes sobre a base GH, de qualquer triângulo, o maior é o que cai dentro.* (Campos, 1735, p. 29)

[40] ***Corolário 3, Proposição I, 32:** Se de um ponto Z, se tirarem duas retas a outra terceira CD, uma oblíqua ZQ, e outra perpendicular ZO, cairá esta para a parte do ângulo agudo ZQC.* (Campos, 1735, p. 29)

[41] ***Proposição I, 19:** Em todo o triângulo BOC, o lado CO oposto ao maior ângulo B é maior que o lado BO, oposto ao menor C.* (Campos, 1735, p. 20)

Notemos que este é um resultado pouco usual em algumas das edições dos *Elementos* mais conhecidas, mas que se encontra na edição de Tacquet. Esta unicidade do ponto de tangência depende da existência da reta tangente ao círculo, existência essa que apenas é demonstrada na Proposição III, 16 que Manuel de Campos apresenta nos seguintes termos:

> ***Proposição III, 16:*** *Se pelo extremo E, do diâmetro de qualquer círculo, se tirar uma perpendicular DB; cairá esta toda fora do dito círculo. E do mesmo extremo não se poderá tirar outra reta EA, entre a perpendicular e a circunferência, sem que corte o mesmo círculo.* (Campos, 1735, p. 72)

Importa destacar que, com este enunciado, o autor evita a questão (polémica) da referência ao ângulo de contingência, apresentando apenas uma parte do enunciado que se encontra nos *Elementos*, parte essa que refere a relação de perpendicularidade entre a reta tangente e o raio pelo ponto de tangência, bem como a unicidade da reta tangente. Analisemos com detalhe a demonstração desta proposição apresentada por Manuel de Campos, que se encontra, tal como na edição de Tacquet, dividida em duas partes: na primeira parte demonstra-se a existência da reta tangente ao círculo e na segunda a unicidade desta reta tangente.

> **Demonstração:**
>
> **1ª Parte:** Considere-se na reta DB um ponto L, distinto de E, e por C trace-se a reta CL [Fig. 2.5]. Por hipótese o triângulo ECL é retângulo em E logo, pelo corolário 6 da I, 32[42], o ângulo em L será agudo[43]. Assim, CL, comprimento do lado oposto ao maior ângulo, é maior que CE, comprimento do lado oposto a um ângulo menor (por I, 19)[44]. Como CE é o segmento de reta que une o centro à circunferência o segmento CL terá de passar adiante da circunferência, e por consequência o ponto L cai fora do círculo.
>
> **2ª Parte:** Suponha-se que é possível interpôr entre a perpendicular e a circunferência outra reta, EA, que não corta o círculo [Fig. 2.5]. O ângulo CEA é menor do que um reto logo, se do centro C se tirar uma perpendicular a EA esta cairá para o dito

[42] ***Corolário 6, Proposição I, 32:*** *Se um qualquer triângulo for um ângulo reto, os outros dois serão agudos. (Campos, 1735, p. 30)*

[43] No original de Manuel de Campos encontra-se referenciado o Corolário 5 da Proposição I, 32 o que será uma gralha, uma vez que este corolário não enuncia o resultado utilizado, sendo o resultado utilizado enunciado no Corolário 6 da mesma proposição.

[44] ***Proposição I, 19:*** *Em todo o triângulo BOC, o lado CO oposto ao maior ângulo B é maior que o lado BO, oposto ao menor C. (Campos, 1735, p. 20)*

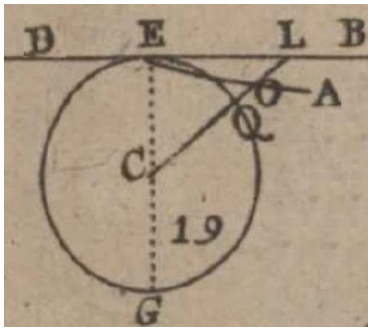


Figura 2.5: Ilustração da Proposição III, 16.

> ângulo (pelo corolário 3 da I, 32[45]) e, por suposição, intersetará a reta EA em O depois de cortar a circunferência em Q.
>
> No triângulo COE, retângulo em O, tem-se que CE, comprimento do lado oposto ao maior ângulo, é maior que CO, comprimento do lado oposto a um ângulo menor (por I, 19[46]). Porém, tem-se que CE é igual a CQ, mas CQ é menor que CO. Assim, CE é simultaneamente menor e maior que CO o que é absurdo. ■

Esta demonstração, que coincide nas edições de Manuel de Campos e de Tacquet, utiliza, na sua primeira parte, um método de demonstração diferente do que teria sido utilizado por Euclides[47] o que faz com que as suas duas partes sejam demonstradas recorrendo a dois métodos de demonstração diferentes: enquanto a primeira parte é demonstrada diretamente, a segunda parte é demonstrada por redução ao absurdo. Manuel de Campos chama a atenção do leitor para este facto no primeiro corolário da proposição:

> ***Corolário 1**: Do mesmo modo, que se demonstra a segunda parte, se pode também demonstrar a primeira.* (Campos, 1735, p. 73)

Esta demonstração alternativa não é apresentada por Manuel de Campos, mas supomos ser a que se encontra, por exemplo, na edição de Heath[48].

Este primeiro corolário é diferente do presente na obra de Tacquet onde o autor refere, novamente, a unicidade do ponto de tangência. Manuel de Campos, dado já ter provado este resultado, não vê necessidade de o voltar a referir optando por chamar a atenção do leitor

[45] ***Corolário 3, Proposição I, 32:*** *Se de um ponto Z, se tirarem duas retas a outra terceira CD, uma oblíqua ZQ, e outra perpendicular ZO, cairá esta para a parte do ângulo agudo ZQC. (Campos, 1735, p. 29)*

[46] ***Proposição I, 19:*** *Em todo o triângulo BOC, o lado CO oposto ao maior ângulo B é maior que o lado BO, oposto ao menor C. (Campos, 1735, p. 20)*

[47] Note-se que na edição de Heath, uma das que se crê mais próxima do original de Euclides, a primeira parte é demonstrada por redução ao absurdo.

[48] Veja-se a demonstração na página 17.

para a existência de diferentes métodos de demonstração. Mais uma vez esta parece-nos uma opção claramente didática uma vez que abre a possibilidade de explorar com alunos os diferentes métodos de demonstração (vantagens, desvantagens, simplicidade, etc.) em lugar de apresentar novamente um resultado já provado.

Os três corolários seguintes coincidem, em termos de conteúdo, com os apresentados por Tacquet embora a sua formulação, e consequente demonstração, nos apreçam mais simples na obra do matemático português. Estes corolários utilizam o conceito de tangência (reta tangente a um círculo e círculos tangentes entre si) para mostrar a possibilidade de dividir quantidades contínuas infinitamente.

Corolários

***2**: Se continuado o diâmetro OG, se tomarem nele qualquer pontos, dos quais se descrevam outros tantos círculos, todos concorrentes no ponto O; será este o contacto comum de todos.*

***3**: Por mais, e mais que se avizinhem uns aos outros, e à perpendicular EB, nunca jamais concorrerão entre si, nem com ela, senão naquele indivisível ponto.*

***4**: Daqui se segue, que qualquer reta se pode dividir infinitamente em partes menores, e menores, sem que jamais se segue à miníma.*

Demonstração: Tire-se de qualquer ponto C, do dito diâmetro a reta CB, até à perpendicular EB. Como está demonstrado todos os círculos assim descritos, e outros infinitos, todos cortarão aquela reta, sem que jamais se encontrem um com o outro senão no ponto O (por III, 13) logo cada um determinará na dita reta diferente parte, sem que jamais se chegue à última. (Campos, 1735, p. 73)■

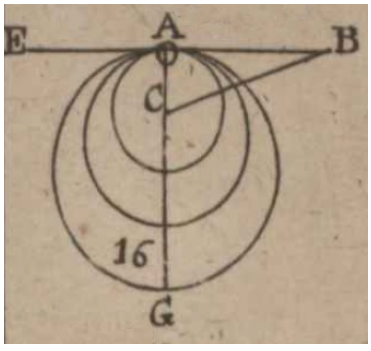


Figura 2.6: Ilustração dos corolários 2, 3, e 4 da Proposição III, 16.

A imagem utilizada nesta demonstração (Fig. 2.6) sugere um resultado que não é apresentado

nem por Manuel de Campos nem por Taquet e que apresentamos em seguida, com a respetiva demonstração.

Proposição 2.1 *Círculos tangentes entre si têm uma reta tangente comum.*

Demonstração: Considerem-se dois círculos, de centros C e E, tangentes entre si no ponto A (Fig. 2.7). A reta que une os centros, CE, passa pelo ponto de tangência A (por III, 11[49] se os círculos forem tangentes internamente e por III, 12[50] se forem tangentes externamente). Então a reta BD que passa por A e é perpendicular à reta CE é, em particular, perpendicular a AC e AE, logo (por III,16) é tangente a cada um dos círculos. ■

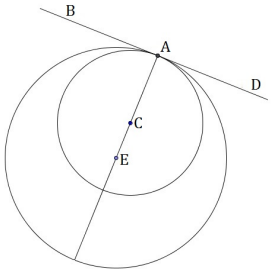


Figura 2.7: Ilustração da Proposição 2.1.

Esta proposição, e respetiva demonstração, poderiam, eventualmente, ser utilizadas como exercícios propostos aos alunos no decorrer das aulas.

Os dois corolários seguintes referem-se à divisão do ângulo de contacto por linhas retas e por circunferências. Embora enunciem os mesmos resultados que os Corolários 5 e 6 de Tacquet, os corolários apresentados por Manuel de Campos não são uma mera tradução dos apresentados por Tacquet na sua obra, como é possível verificar na tabela 2.2.

[49] ***Proposição III, 11:*** *Se dois círculos se tocarem pela parte de dentro, a reta que passa por ambos os centros C, E, passará também pelo contacto A. (Campos, 1735, p. 69)*

[50] ***Proposição III, 12:*** *Se dois círculos se tocarem pela parte de fora, a reta que passa por ambos os centros G, C, passará também pelo contacto O. (Campos, 1735, p. 69)*

Campos, 1735, p. 73-74	Tacquet, 1665, p. 85
5 Nenhuma reta pode dividir o ângulo de contacto (ou da contingência) LIQ. A razão é, porque para isso devia mediar a dita reta entre o lado reto, e curvo do dito ângulo; contra o demonstrado na 2ª parte. **6** Pode-se porém dividir o ângulo com muitas e muitas circunferências, as quais descritas de diferentes pontos do dito diâmetro OG, passem todas pelo ponto O.	**5** O ângulo de contingência ou de contacto LBQ (isto é, o ângulo contido entre a tangente e a circunferência) não pode ser dividido por nenhuma linha reta. **6** No entanto, ele pode ser cortado e diminuindo até ao infinito por circunferências tocando a tangente no mesmo ponto. E neste e no terceiro corolário se encontra escondido o mistério das assíntotas, isto é, a linha reta aproximando-se da hipérbole, quando prolongadas até ao infitito, até uma distância menor do que qualquer distância dada, mas nunca se intersetando: o que é observado e demonstrado por Marius Bettinus na sua *Apiaria*, e antes dele por Barocius, Cardanus e Rabbis Moyses Narbonensis , cuja demonstração se encontra no *Subtilitate Libri 16* de Cardanus.

Tabela 2.2: Corolários 5 e 6 da proposição III, 16 nas obras de Manuel de Campos e André Tacquet.

Mais uma vez Manuel de Campos sente a necessidade de justificar todas as afirmações que apresenta. Neste caso, Campos acrescenta a demonstração da impossibilidade da divisão do ângulo de contacto por linhas retas. Poder-se-ia expectar uma justificação semelhante para a afirmação seguinte; contudo, a inscrição de várias circunferências no interior do ângulo de contacto encontra-se demonstrada no Corolário 4. Todavia, a maior diferença entre as duas obras prende-se com a ausência, na obra de Manuel de Campos, de qualquer referência às assintotas da hipérbole e à relação existente entre o conceito de reta tangente e o conceito de assintota, assunto destacado por Tacquet que fornece várias referências bibliográficas para os leitores que pretendam aprofundar esta questão. Tendo em conta o rigor científico e didático da sua obra, cremos que Manuel de Campos não introduziria um novo conceito sem o definir corretamente, pelo que uma inclusão do tema das assintotas seria extensa. Assim, a não inclusão do tema das assintotas evitaria fatores distrativos e possivelmente causadores de dificuldades nos leitores da sua obra.

Depois ambos os autores se debruçam sobre a relação entre o conceito de reta tangente e o conceito de ângulo através de uma análise detalhada das propriedades do ângulo de contingência.

Embora enuncie os mesmos resultados que Tacquet, Manuel de Campos apresenta uma estrutura e ordem próprias neste estudo. O matemático português enuncia mais cinco corolários a esta Proposição III, 16, que assinala com asterisco e que Tacquet apenas expõe no escólio:

> ***7.*** *O ângulo do contacto LEQ [Fig. 2.5], é menor que qualquer ângulo agudo retilíneo LEO, por mínimo que seja; porquanto por mais, e mais que se juntem os lados do dito ângulo, sempre o arco do do contacto há-de cair dentro deles.*
>
> ***8.*** *O ângulo do semicírculo CEQ, ainda que não é reto, é maior que qualquer agudo CEO, por maior que seja; porquanto por mais, e mais que se alarguem os lados do dito ângulo, sempre o arco do semicírculo há-de cair fora deles.*
>
> ***9.*** *O ângulo reto CEL, compreende infinitos ângulos do contacto QEL; e por consequência é infinitamente maior que ele. A razão é, porque o ângulo reto pode dividir-se em infinitos agudos; e cada agudo, por mínimo que seja, sempre é maior que o do contacto.*
>
> ***10.*** *O ângulo do contacto QEL, é parte do reto CEL; e contudo, por mais e mais que se multiplique, nunca o pode igualar: de que se infere que infinitas partes juntas não compõem o infinito.*
>
> ***11.*** *Pode-se passar de menor a maior, procedendo continuamente de mais em mais, sem se passar pelo igual. Porquanto, se a reta EC, se mover circularmente sobre o ponto E, até coincidir com a perpendicular EL, irá formar infinitos ângulos agudos CEO, sempre maiores e maiores, porém nunca formará um igual ao ângulo do semicírculo CEQ.* (Campos, 1735, p. 74)

Destes cinco corolários apenas os dois primeiros se encontram tradicionalmente associados à Proposição III, 16 dos *Elementos*, envolvendo os corolários 9 e 10 o conceito de infinito e o corolário 11 a noção de continuidade, podendo estes resultados ser originais de Tacquet já que não os encontramos em algumas das edições mais conhecidas dos *Elementos*.

Manuel de Campos refuta estes cinco corolários no seu escólio começando por colocar em causa a sua autoria, à semelhança de Tacquet:

> *Os corolários 7. e 8. duvidam muitos que sejam de Euclides; não obstante o acharem-se no texto. (...) Os corolários seguintes 9. 10. e 11. são certamente supostos, e reputados comummente por paradoxos.* (Campos, 1735, p. 75)

> *Quanto aos 5 corolários se responde, que os dois primeiros ou não são de Euclides, ou se o são, falou o Geómetra metaforicamente e no sentido da Prop. 16. Nos outros 3 se muda a suposição, confundindo-se a semelhança com a igualdade.* (Campos, 1735, p. 77)

O facto de a autoria destes corolários ser posta em causa poderá justificar que em várias edições dos *Elementos* eles não sejam enunciados, nem mesmo como corolário.

Sobre a veracidade dos mesmos, Manuel de Campos diz-nos:

> ***7.*** *Nego, que o ângulo de contacto seja maior, ou menor, que o agudo, ainda metaforicamente; porque para o ser devia o arco EQ, cair dentro, ou fora, da reta EO [Fig. 2.5]; o que é impossível porque necessariamente há-de cair dentro, e fora, segundo diversas partes.*
>
> ***8.*** *Nego do mesmo modo a suposição.*
>
> ***9.*** *Nego que o ângulo reto contenha propriamente infinitos ângulos agudos; pois somente os contém em potência; ou como dizem os filósofos Syncategoricomaticé. Porém, dado que os contivesse, não haveria repugnância em que o ângulo reto, coleção potencial de infinitos ângulos agudos, excedesse outra infinidade de ângulos do contacto, na vez que constasse, que estes eram parte daqueles, o que é falso.*
>
> ***10.*** *Nego que o ângulo do contacto, como também o do semicírculo, sejam partes do reto; são partes sim do seu espaço, mas não da sua inclinação: e dado que o fossem, são partes potenciais, comunicantes, e essencialmente heterogéneas; as quais só compõem o todo daquele modo, que ele nelas se resolve.*
>
> ***11.*** *Consta do dito o que se deve responder.* (Campos, 1735, pp. 77-78)

Nesta análise Manuel de Campos coloca o leitor perante a questão, polémica, do infinito potencial e do infinito atual, discussão que remonta à matemática grega e que está na origem dos conhecidos Paradoxos de Zenão[51]. A justificação deste infinito em potencial vem da filosofia, referindo Manuel de Campos que apenas aceita que o ângulo reto contenha infinitos ângulos agudos se este infinito for considerado sincategoremático[52], ou seja, um infinito que só tem significado quando considerado em conjunto com outras entidades infinitas. Manuel de Campos

[51] A este propósito veja-se (Sampaio, 2008, pp. 205-222).

[52] Termo sincategoremático é um termo que por si só não tem significado, adquirindo significado apenas em conjunto com outros (Morujão, 2006, p. 307).

considera, à semelhança de Tacquet, a divisão do espaço e a divisão do ângulo aspetos distintos, realçando que é a heterogeneidade dos ângulos que não permite a sua comparação.

No corolário 11, Manuel de Campos não especifica a sua contestação, que supomos dever-se ao paradoxo introduzido pelo enunciado e pela noção de continuidade, uma vez que dadas grandezas contínuas, é impossível passar da menor para a maior sem passar pela igual.

Manuel de Campos rejeita assim parte do enunciado usualmente associado à Proposição III, 16 dos *Elementos*, bem como qualquer comparação entre ângulos de tipos de diferentes. Contudo, Manuel de Campos exporá no escólio, à semelhança do que faz Tacquet, o seu entendimento da natureza do ângulo de contingência e que está na base desta sua rejeição[53].

Manuel de Campos aborda em seguida as restantes propriedades do conceito de reta tangente a uma curva, apresentando na Proposição III, 17 um método para a construir.

> ***Proposição III, 17:*** *Dado fora de qualquer círculo CQO, um ponto A, tirar dele uma Tangente ao dito círculo. *Tangente se diz a reta que toca o círculo.* (Campos, 1735, p. 72)

Nesta proposição Manuel de Campos introduz o termo *tangente* que tinha omitido na Definição III, 2, introdução que nos parece justificável dado que o termo tangente era, à época, já de uso comum. Salientemos o cuidado de Manuel de Campos em estabelecer a relação entre este termo e a definição que apresentou no início do livro III, ao contrário do que faz Tacquet que utiliza o termo tangente sem qualquer outra referência.

O método de construção da reta tangente e a respetiva demonstração coincidem com os apresentados por Euclides[54] mas Manuel de Campos, à semelhança de Taquet, apresenta no escólio um método alternativo, mais simples, que é possível deduzir depois de demonstrada a Proposição III, 31, proposição que se enuncia da seguinte forma:

> ***Proposição III, 31:*** *O ângulo no semicírculo BAD [Fig. 2.8], é reto: no maior segmento BAE, é agudo: e no menor BAO, é obtuso.* (Campos, 1735, p. 85)

O escólio apresentado por Manuel de Campos é o seguinte:

> ***Escólio***
>
> *(...)Tire-se do ponto dado, ao centro do círculo, a reta VC, e descreva-se sobre ela um semicírculo, o qual corte a circunferência em O. Digo que a reta VO, é a tangente que se pede. * Veja-se a dita Prop.* (Campos, 1735, p. 79)

[53] Um estudo detalhado desta análise encontra-se no capítulo 2.4.
[54] Veja-se a este propósito a página 20.

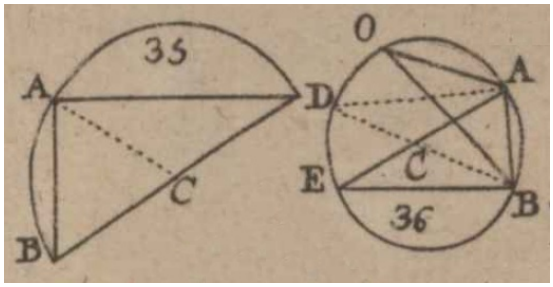


Figura 2.8: Ilustração da Proposição III, 31.

Manuel de Campos, ao contrário de Tacquet, não demonstra que a reta VO é efetivamente tangente ao círculo, incitando apenas o leitor a ver a referida proposição. No entanto, a demonstração é bastante simples:

Demonstração:

O ângulo do semicírculo COV [Fig. 2.9] é reto (por III, 31) e como CO é um raio do círculo a reta VO é perpendicular ao raio na sua extremidade logo (por III, 16) é tangente ao círculo. ■

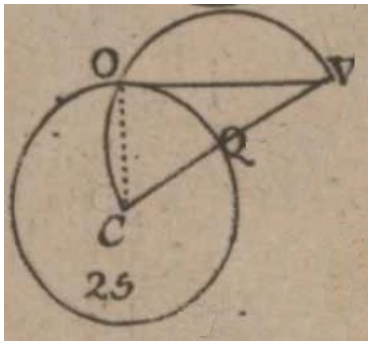


Figura 2.9: Ilustração do escólio da Proposição III, 17.

A não apresentação desta demonstração poderá prender-se com o facto de exigir uma proposição que ainda não foi estudada. Ao apresentar o método de construção no escólio Manuel de Campos permite que o leitor mais facilmente resolva o problema prático da determinação das retas tangentes, podendo eventualmente ser abordada a sua demonstração aquando do estudo da Proposição III, 31.

As proposições 18 e 19 relacionam a reta tangente com o raio pelo ponto de tangência e a perpendicular à tangente pelo mesmo ponto, num estudo que é semelhante ao que se encontra nos *Elementos*[55].

[55]Um estudo detalhado destas proposições encontra-se na página 21 e seguintes.

O estudo das propriedades do conceito de reta tangente é apenas retomado na Proposição III, 32:

> ***Proposição III, 32:*** *Se uma reta ED tocar um círculo, e do ponto de contacto A, se tirar outra reta, AC, que o corte; será o ângulo da Tangente e da Secante BAC, igual ao ângulo existente no segmento alterno AOC. *Secante se diz a reta que corta o círculo.* (Campos, 1735, p. 85)

Mais uma vez é visível nesta proposição a atenção dada por Manuel de Campos às definições e aos conceitos, introduzindo a definição de reta secante na primeira vez que utiliza este termo uma vez que o conceito de reta secante ao círculo não tinha sido ainda introduzido nesta obra.

A demonstração desta proposição encontra-se dividida em dois casos: no primeiro supõe-se que a secante é um diâmetro do círculo e no segundo supõe-se que a secante não é perpendicular à tangente. Neste segundo caso são ainda provadas duas igualdades: a igualdade para o ângulo agudo e a igualdade para o ângulo obtuso.

> **Demonstração:**
>
> *1.º caso*: Suponha-se que a secante AC passa pelo centro [Fig. 2.10]. Então o ângulo DAC é reto (por III, 18), mas também o ângulo AOC é reto (por III, 31), de onde se conclui o pretendido.

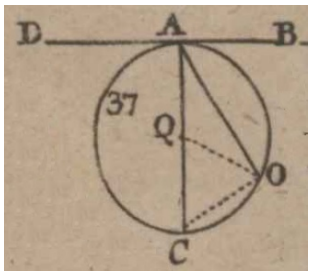


Figura 2.10: Ilustração do 1.º caso da Proposição III, 32.

> *2.º caso*: Suponha-se que a secante AC não passa pelo centro [Fig. 2.11].
>
> Seja AE um diâmetro e trace-se CE. O ângulo ACE é reto (por III, 31) logo a soma dos ângulos AEC e CAE também é um ângulo reto (pelo corolário 5 de I, 32[56]). Mas o ângulo BAE é reto logo, retirando o ângulo comum CAE vem que os ângulos

[56] ***Corolário 5, Proposição I, 32:*** *Se em qualquer triângulo for um ângulo reto, os outros dois farão outro reto. (Campos, 1735, p. 30)*

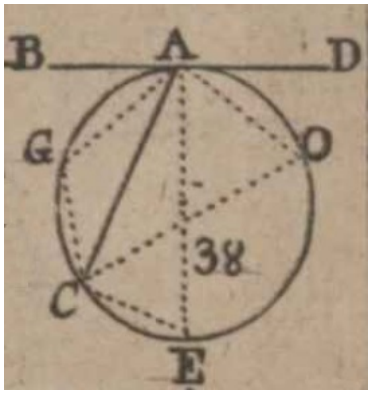


Figura 2.11: Ilustração do 2.º caso da Proposição III, 32.

> BAC e AEC são iguais, isto é, os ângulos BAC e AOC são iguais (por III, 21[57] os ângulos AEC e AOC são iguais).
>
> Sabe-se que a soma dos ângulos DAC e BAC é igual a dois retos (por I, 13[58]). Considerando o quadrilátero $CGAO$ tem-se que a soma dos ângulos AGC e AOC também é igual a dois retos (por III, 22[59]). Retirando a ambas as somas os ângulos BAC e AOC, respetivamente, que são iguais os restantes também serão iguais, logo DAC e AGC são iguais. ■

Notemos que o primeiro caso não se encontraria contemplado nos *Elementos*, embora seja possível encontra-lo em várias edições dos Elementos, como por exemplo em Clavius, pelo que será uma das adições dos seus comentadores.

Com o estudo desta propriedade, Manuel de Campos termina o estudo do conceito de reta tangente ao círculo, onde Manuel de Campos mostra uma enorme capacidade de aliar o tradicional ao moderno, sendo capaz de integrar de forma notável resultados e terminologia não utilizados no original mas facilitadores do conhecimento, tornando a sua obra acessível aos principiantes, como são os alunos.

[57] ***Proposição III, 21:*** *Os ângulo DAE, DBE, insistentes no mesmo arco DE, ou existentes no mesmo segmento DABE são iguais. (Campos, 1735, p. 81)*

[58] ***Proposição I, 13:*** *Qualquer reta DO, que cai sobre outra AB, ou faz com ela dois ângulos retos, ou dois iguais a dois retos. (Campos, 1735, p. 18)*

[59] ***Proposição III, 22:*** *Os dois ângulos opostos de qualquer quadrilátero ABCD, inscrito num círculo, são iguais a dois retos. (Campos, 1735, p. 81)*

2.4 Manuel de Campos e o ângulo de contingência nos seus *Elementos de Geometria*

Para Manuel de Campos, tal como para Tacquet, o ângulo de contingência não é uma quantidade. De facto, o nosso matemático vai ainda mais longe porque, segundo ele:

> ***Definição I, 8:*** *Ângulo Plano é a inclinação de duas linhas existentes em um plano, e concorrentes em um ponto.*
>
> **O Ângulo não é quantidade, senão modo dela, como a figura.* (Campos, 1735, p. 2)

Neste ponto Manuel de Campos segue Euclides mas justifica a sua posição, considerando-o apenas uma quantidade da mesma forma que as restantes figuras geométricas o são, num acrescento da sua autoria.

Não sendo um ângulo uma quantidade, procuramos o entendimento que Manuel de Campos tem, em particular, do ângulo de contingência. Assim, no seu escólio da Proposição III, 16 reflete sobre a natureza deste ângulo, "ângulo do contacto"nas palavras do nosso matemático:

> *A célebre controvérsia, que houve antigamente entre Peletario e Clavius, sobre o ângulo do contacto, deu tal brado nas escolas, que obrigou a muitos e muito insignes geómetras, a sair à luz com vários discursos, entre os quais merecem particular atenção os de Galileu e Wallis, Professores de grande nome. E ainda que não é do meu assunto contraverter aqui este ponto; todavia por não deixar de dizer alguma coisa numa questão tão célebre, e que tem tanta conexão com os Elementos, porei aqui esta breve nota.* (Campos, 1735, p. 75)

Contextualizada a famosa polémica, Manuel de Campos enuncia a questão:

> *O ponto principal da dita controvérsia foi: se o ângulo do contacto QEL, era parte do ângulo reto CEL [Fig. 2.5]? E se os ditos ângulos eram Quantidade, ou não?* (Campos, 1735, p. 75)

Manuel de Campos apresenta então três suposições/reflexões com as quais pretende responder às duas questões formuladas, reflexões essas inspiradas no escólio de Tacquet, mas que não são uma tradução literal do mesmo. Vejamos a primeira reflexão:

> ***1*** *Que ainda que a Quantidade não se pode conceber sem Figura; e muito menos a Figura sem Quantidade, segundo a nossa consideração, a Quantidade e a Figura*

> *são coisas diversas e têm propriedades muito diferentes; porquanto da quantidade se diz propriamente ser igual ou desigual; e da figura ser semelhante ou dissemelhante.* (Campos, 1735, p. 75)

Manuel de Campos esclarece o que entende por comparar figuras e comparar quantidades de entidades geométricas, numa abordagem que pensamos original do nosso matemático:

> *Daqui nasce que, comparadas duas quantidades entre si, podem ser iguais na grandeza e dissemelhantes na figura, como consta das proposições 35. 36.*[60] *37. e 38.*[61] *do l. I e pelo contrário podem ser semelhantes na figura, e desiguais na grandeza, como se vê nos círculos, nos triângulos equiláteros, nos quadrados, etc..* (Campos, 1735, pp. 75-76)

Ficando demonstrado que quantidade e figura são duas características distintas das entidades geométricas, Manuel de Campos apresenta-nos a sua reflexão sobre de que forma o ângulo apresenta em si estas características:

> ***2*** *Que ainda que o ângulo seja parte da Figura; e propriamente falando um Modo, ou Modificação da Quantidade; todavia, como é inseparável, e ainda ininteligível sem Quantidade, toma dela por analogia aquela mesma propriedade, de ser igual, ou desigual, que só a ela propriamente compete. (...) Porém, como esta propriedade não é própria do ângulo, senão como se disse análoga e acomodaticia; não se verificam dela todos aqueles Axiomas, que competem à rigorosa igualdade; e os primeiros que faltam, são os mais evidentes.* (Campos, 1735, p. 76)

Para justificar esta afirmação, Manuel de Campos apresenta uma interpretação dos exemplos apresentados por Tacquet no seu escólio:

> *Porquanto no ângulo curvilíneo Ao [Fig. 2.12] não é igual nem semelhante ao retilíneo oE; sendo assim os ângulos do semicírculo A, E são iguais; o ângulo o é comum; e segundo o Ax. 2*[62] *acrescentando o comum a iguais, os compostos deviam ser iguais.* (Campos, 1735, p. 76)

[60] ***Proposição I, 35 e 36:*** *Os paralelogramos EN, EL, que estão sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas paralelas EX, ML, são iguais.* (Campos, 1735, p. 34)

[61] ***Proposição I, 37 e 38:*** *Os triângulos EMO, EBO, postos sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas paralelas EX, ML, são iguais entre si.* (Campos, 1735, p. 35)

[62] ***Axioma 2:*** *Se a quantidades iguais se acrescentarem outras iguais, as compostas serão iguais.* (Campos, 1735, p. 8)

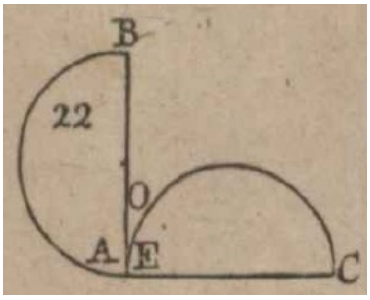


Figura 2.12: Ilustração da comparação de ângulos no escólio da Proposição III, 16.

> *O ângulo retilíneo ACB [Fig. 2.13], não é igual ao curvilíneo DCE; sendo assim, que tirados iguais de iguais (isto é, BCD de ACE) os resíduos deviam de ser iguais Ax. 3*[63]*.* (Campos, 1735, p. 76)

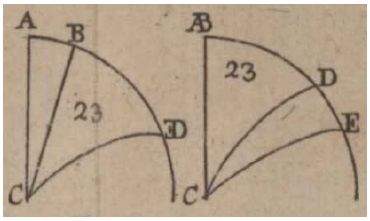


Figura 2.13: Ilustração do segundo exemplo de comparação de ângulos no escólio da Proposição III, 16.

Com estes dois exemplos Manuel de Campos pretende responder à segunda questão da polémica do ângulo de contingência, mostrando assim que os ângulos não são quantidades pois não verificam os axiomas da igualdade que são aplicáveis a quantidades.

No terceiro ponto Manuel de Campos debruça-se sobre a comparação entre ângulos de diferentes tipos:

> ***3.*** *Que o ângulo retilíneo é totalmente e incomensurável, e incomparável com o curvilíneo.* (Campos, 1735, p. 76)

Note-se que, com este pressuposto, Manuel de Campos rejeita de forma imediata a comparação efetuada entre o ângulo de contingência e um ângulo retilíneo agudo que se encontra no enunciado da Proposição III, 16 de diversas edições dos *Elementos*. A argumentação para esta recusa é dada por Manuel de Campos na forma de um exemplo que, segundo o autor, pode servir de regra:

> *Sejam no semicírculo VAV , dois ângulos: um retilíneo VAZ, e um mistilíneo $VOEAZ$ [Fig. 2.14]. E sem dúvida, que o ângulo retilíneo consta de uma só inclinação; isto é, que todos os pontos, e partes do lado VA, segundo a direção daquela*

[63] ***Axioma 3:*** *Se de quantidades iguais se tirarem partes iguais, os resíduos serão iguais.* (Campos, 1735, p. 8)

linha, vão buscar constantemente o ponto A; e que o mistilíneo consta de diferentes inclinações; porquanto, dividindo o quadrante VA, em três partes, e tiradas pelos pontos das divisões três retas VO, OE, EA; cada uma destas vais buscar no lado AZ, seu ponto diferente; de tal sorte, que todo aquele quadrante (repetida a divisão infinitamente) não é outra coisa mais que uma continuada variedade de inclinações; que começa na perpendicular até acabar na paralela. Logo os ditos ângulos são totalmente incomparáveis; por ser um constante e outro vago. (Campos, 1735, pp. 76-77)



Figura 2.14: Ilustração da impossibilidade comparar ângulos retilíneos e curvilíneos no escólio da Proposição III, 16.

Um raciocínio semelhante é aplicado para demonstrar a impossibilidade de comparar o ângulo de contingência com ângulos retilíneos agudos:

(...) comparando o ângulo do contacto com qualquer agudo, nem é propriamente menor, nem maior, nem igual: porquanto, como o lado curvo compreende todas as inclinações; segundo uma será maior, segundo outra menor, e segundo outra igual: ou por melhor dizer, não será nada; porque nunca chegará a ter dois pontos fixos, que formem uma determinada inclinação. (Campos, 1735, p. 77)

Notemos que com estes argumentos Manuel de Campos parece não considerar o ângulo de contingência como sendo efetivamente um ângulo, pois ao não haver uma única inclinação entre

os dois lados não podemos aplicar a definição de ângulo, logo não existe ângulo.

Estes argumentos estão assim na base da resposta que Manuel de Campos dá à primeira questão da polémica em torno do ângulo de contingência:

> *(...) um ângulo somente por analogia é parte de outro; porém o do contacto nem ainda por analogia o pode ser do reto; pois ainda que ocupe parte do seu espaço, não diz ordem alguma à sua inclinação; por ser aquela constante, e esta vaga.* (Campos, 1735, p. 77)

Salientemos a introdução neste ponto da dicotomia real/potencial, considerando Manuel de Campos que os ângulos apenas são parte uns dos outros de forma potencial e não real.

Vemos deste modo Manuel de Campos apresentar a sua posição sobre uma questão controversa, que nos aprece original, tornando claros os aspetos que na sua opinião respondem à questões desta polémica e que enuncia no início do seu estudo.

Capítulo 3

Manuel Azevedo Fortes e o conceito de reta tangente ao círculo

Manuel Azevedo Fortes (Fig. 3.1) nasce em Lisboa em 1660.



Figura 3.1: Retrato de Manuel de Azevedo Fortes no *Engenheiro Português*.

Estuda no Colégio Imperial de Madrid, obtém formação em Filosofia pela Universidade de Alcalá e no Colégio de Plessis, em Paris, onde desenvolve estudos em Filosofia Moderna, Teologia e Matemática. Concorre para professor de Filosofia na reputada Universidade de Siena onde, por mérito próprio, exerce a cátedra durante dois triénios:

> *Regeu 3 anos a Cadeira, e com tanto pudicamento, tal doutrina, e utilidade, que Francisco Maria de Medicis, Governador da cidade, e irmão do Grão Duque da Toscana, o obrigou em benefício público a continuar outro triénio.* (Cruz, 1754, p.4)

Regressa a Portugal, exercendo o cargo de professor na Aula Militar de Fortificação, Governador de Castelo de Vide e Engenheiro-mor do Reino[64]. Falece, com 89 anos, em 1749. (Cruz, 1754, pp. 4-12)

Ao longo da sua vida escreve diversas obras na área da engenharia, da filosofia e da matemática, das quais destacamos:

- *Engenheiro Português*, obra em dois volumes, publicados em 1728 e 1729, utilizada para o ensino dos engenheiros na Academia Militar, que aborda a Geometria Prática, a Trigonometria retilínea, a Fortificação e Arquitetura Militar e o uso de armas de guerra.
- *Lógica racional, geométrica e analytyca*, publicado em 1744 e considerado o primeiro tratado sobre lógica integralmente escrito em português.

Da sua obra realçamos o pendor prático e técnico dos conteúdos:

> *Partiu, estudou em França e Itália, neste país ensinou e voltou depois a Portugal, Manuel de Azevedo Fortes, que escreveu um livro notável sobre aplicações da Matemática à Engenharia.* (Teixeira, 1934, p. 219)

Azevedo Fortes, pelo estatuto e tarefas imputáveis ao cargo de engenheiro-mor, assim como pelo facto de ser professor na Academia Militar, desempenha um papel fundamental na definição do papel da matemática no ensino militar.

3.1 A matemática no ensino militar na primeira metade do século XVIII português

Um primeiro passo para a instrumentalização, em Portugal, do ensino da chamada engenharia militar é a criação, por decreto de 13 de maio de 1641 do rei D. João IV, da "Aula de Artilharia e Esquadria". Nesta Aula, recebem instrução teórica e prática os artilheiros e bombeiros do exército português (Borges & Canas, 2005. pp. 445-452), vindo a sua criação complementar a instrução dada na área da náutica na "Aula da Esfera".

[64] Azevedo Fortes é o primeiro Engenheiro-mor do reino que não acumula o cargo de Cosmógrafo-mor. Até então, os dois cargos eram exercidos pela mesma pessoa.

Em 1647, estabelece-se na Ribeira das Naus a "Aula de Fortificação e Arquitetura Militar", que é mais tarde transferida para o Terreiro do Paço, onde passa a ser designada de "Academia Militar da Corte". Em 1651 cria-se também uma "Aula de Fortificação"em Elvas que contou com nomes reputados como é o caso do Jesuíta alemão Valentim Estancel.

Em 1701 é publicado um decreto de D. Pedro II estabelecendo a criação de diversas Academias de Fortificação, nomeadamente no Minho, Beiras e Alentejo. Mas, tanto quanto tem sido possível saber, tal ordem apenas foi cumprida com a Academia de Fortificação, em Viana do Castelo (Minho) que, de resto, contou com professores ilustres como, por exemplo, Manuel Pinto Vilalobos.

Todos estes exemplos remetem, a nosso ver, para uma clara aposta, da Coroa Portuguesa, em oficializar a profissão de "Engenheiro".

No início do século XVIII Manuel de Azevedo Fortes, enquanto Engenheiro-mor, expõe ao rei D. João V a situação:

> *(...) estando também certo não terá deixado de chegar à Real notícia de V. Majestade o pouco fruto, que se tem tirado da Aula, ou Academia das Fortificações desta Corte, me parece muito conforme à minha obrigação, e ao zelo que sempre tive, e terei do Real serviço de V. majestade apontar o remédio, e a melhor forma, em que os sujeitos, que daqui por diante se aplicarem às lições das Academias Militares, se instruam, e capacitem naquela ciência, e V. Majestade tenha Engenheiros, de que se possa servir com utilidade.* (Fortes, 1720, p. 1)

Azevedo Fortes considera ser necessário garantir que os candidatos demonstrem as qualidades de um bom engenheiro:

> *Um bom Engenheiro há-de ser um soldado com disposição valerosa, criado com a doutrina e exercício Militar, e além disso há-de ter a ciência para obras em todas as funções da guerra.* (Fortes, 1720, p. 7)

Esta proposta toma forma aquando da reforma do corpo de Engenheiros portugueses, que tem lugar em 1732, e que o engenheiro-mor elogia na *Oração Acadêmica pronunciada na presença de suas Magestades, indo a Academia ao Paço em 22 de outubro de 1739*:

> *(...) para que aquele admirável, e bem entendido Decreto da ereção das Academias Militares nas Provincias, que foi servido mandar passar em 24 de Dezembro de 1732 tenha a sua inteira, e devida observância, para que este Reino sempre fecundo em*

> *espíritos excelentes, e próprios para todas as Ciências, tenha em que se exercitem.* (Fortes, 1739, p. 15)

No que concerne aos temas estudados nestas Academias Militares Azevedo Fortes diz:

> *Nas ditas Academias se há-de ensinar geralmente tudo o que pertence à guerra; a saber esquadrões, ou evoluções Militares, Geometria, Fortificação, Ataque, & Defesa das Praças, Castrametação, Estática, Artilharia, &c.* (Fortes, 1720, p. 10)

A geometria aqui referida por Azevedo Fortes não contempla apenas temas de geometria euclidiana mas também temas de aritmética e trigonometria, tal como é percetível nos diferentes textos produzidos para o ensino destas academias.

No *Engenheiro Português*, publicado para o ensino na Academia Militar, são estudados os fundamentos da geometria euclidiana e o uso de instrumentos matemáticos.

Na Biblioteca Nacional, encontram-se vários manuscritos da autoria dos professores da Academia Militar, nomeadamente Azevedo Fortes, José Sanches da Silva e Filipe Rodrigues de Oliveira, constando de tratados que se supõe terem sido utilizados no ensino na Academia Militar. Alguns destes manuscritos contêm a tradução para português dos *Élémens des mathématiques ou Traité de la grandeur en genéral* de Bernand Lamy, uma obra sobre álgebra/aritmética (Domingues, 2014, pp. 37-39). Um outro manuscrito, cuja autoria é indicada na folha de rosto como sendo Azevedo Fortes e que terá sido reutilizado por José Sanches da Silva, intitulado *Elementos de Euclides ou Tractado de geometria elementar* contém a tradução para português dos livros geométricos dos *Elementos* de Euclides e coincide com a primeira parte do manuscrito *Geometria Especulativa, Trigonometria Espherica, Modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares*, que se encontra na Biblioteca Pública de Évora.

Uma análise detalhada ao manuscrito que se encontra em Évora faz notar que esta tradução dos *Elementos* surge aí indicada como sendo o segundo. De facto, no índice esta tradução é denominada *Tratado dos Elementos de Euclides, é o segundo* (Fig. 3.2) e no início do capítulo por *Do Tratado Seg[undo] dos Elementos de Euclides* (Fig. 3.3).

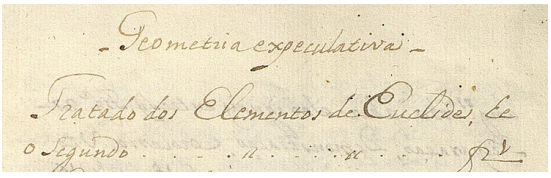


Figura 3.2: Título do primeiro tratado da *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes no índice.

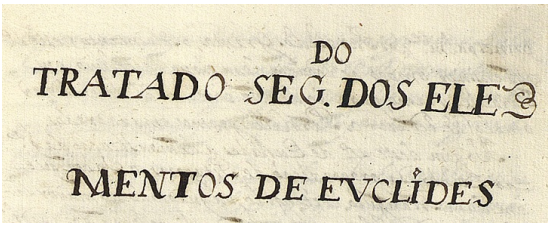


Figura 3.3: Título do primeiro tratado da *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes no início do capítulo.

A ideia suscitada pelas denominações de que este seria o segundo tratado de uma obra mais completa, parece ser confirmada pela indicação, no índice, de que o tratado *Da Trigonometria e Geometria prática* desta obra de Azevedo Fortes é o *Tratado terceiro* (Fig. 3.4).

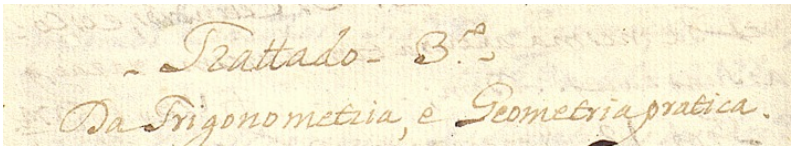


Figura 3.4: Título do segundo tratado da *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes no índice.

Uma comparação entre este manuscrito e os manuscritos existentes na Biblioteca Nacional associados a Azevedo Fortes leva-nos a conjeturar que o primeiro tratado em falta seria o *Elementos das Mathematicas ou Tractado da Grandeza em Geral* uma vez que, no códice 5194 da Biblioteca Nacional, o manuscrito *Elementos das Mathematicas ou Tractado da Grandeza em Geral* é seguido do manuscrito *Elementos de Euclides ou Tractado de Geometria Elementar* encontrando-se os dois manuscritos com paginação contínua. Além disso, na introdução que faz a esta primeira parte da *Geometria Especulativa* Azevedo Fortes refere uma obra sobre grandezas.

> *Ainda que no tratado da grandeza em geral temos dado os Elementos para todas as Ciências (...)* (Fortes, 1724, fl. 1)

Assim, estes diferentes manuscritos parecem constituir lições da Academia Militar ditadas de acordo com a seguinte ordem: *Elementos de Mathematica ou Tractado da Grandeza em Geral*; *Tractado dos Elementos de Euclides*; *Da Trigonometria e Geometria prática*; e *Tratado do modo com que se devem riscar e iluminar com aguadas as plantas da Architetura militar.*

3.2 A *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes

A obra *Geometria Especulativa, Trigonometria Espherica, Modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares*, que designaremos abreviadamente de *Geometria Especulativa*, é um manuscrito do qual conhecemos apenas um exemplar pertencente ao Fundo Documental Manizola da

Biblioteca Pública de Évora[65]. Datado de 1724, encontra-se identificado, no frontispício (Fig. 3.5), como sendo da autoria de Manuel Azevedo Fortes, Engenheiro-mor.



Figura 3.5: Frontispício da obra *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes.

Do frontispício da obra salientemos o que pode ser considerada uma exaltação do Império Português, patente nas diversas representações do Globo Terrestre, da posição de destaque que ocupa a esfera armilar, assim como a representação dos quatro continentes onde os portugueses eram ainda uma potência colonialista.

Este manuscrito é composto por 277 fólios, divididos da seguinte forma:

[65]O exemplar utilizado encontra-se disponível no Repositório Institucional da Universidade de Évora em http://hdl.handle.net/123456789/281.

- Índice, composto por 25 fólios;
- *Tratado dos Elementos de Euclides*, num total de 177 fólios;
- *Da Trigonometria e Geometria prática*, composta por 63 fólios;
- *Tratado do modo com que se devem riscar e iluminar com aguadas as plantas da Architetura militar*, num total de 12 fólios.

A *Geometria Especulativa* inicia-se assim com um índice completo, onde consta a indicação do número de definições de cada capítulo, o enunciado de todas as proposições que os compõem e uma referência às figuras ilustrativas de cada uma das proposições, sendo a parte científica da obra composta por três tratados distintos.

A primeira parte da *Geometria Especulativa* contém os denominados livros geométricos (os seis primeiros, o décimo primeiro e o décimo segundo) da obra de Euclides. Uma comparação com as obras existentes à época, assente nas características particulares da inclusão da preparação e do uso de cada proposição, permite-nos obter uma correspondência com a tradução francesa dos *Elementos* efetuada por Jacques Ozanam e que se encontra no primeiro tomo do seu *Cours de Mathematique*, publicado em 1693[66].

A escolha da obra de Ozanam para efetuar a tradução pode prender-se com as aplicações das proposições de Euclides apresentadas pelo matemático francês, utilizações essas que são várias vezes completadas e acrescentadas por Azevedo Fortes, em particular no que se refere às aplicações passiveis de serem de interesse dos diferentes ramos militares.

O título escolhido de *Geometria Especulativa* é, à época, o título tradicionalmente atribuído às geometrias teóricas. Contudo, esta obra contém de facto os resultados mais relevantes da geometria teórica, surgindo a parte prática como acrescento a cada uma das proposições.

No início desta parte, Azevedo Fortes apresenta um resumo da introdução efetuada por Ozanam, onde refere o objetivo da sua obra e o motivo pelo qual apenas apresenta os livros geométricos:

> *Ainda que no tratado da grandeza em geral temos dado os Elementos para todas as Ciências, tratamos nesta parte do que Euclides ensina nos seus livros dos 'Elementos', com tudo para a boa inteligência da Geometria, assim Especulativa como Prática, procuremos explicar de um modo claro, fácil e breve os seis primeiros livros*

[66] Uma comparação entre a estrutura das duas obras encontra-se no anexo D.

> *dos 'Elementos'de Euclides, com o 11º e o 12º, que são os que bastam para a inteligência das matérias de que adiante havemos de tratar e são superabundantes para tudo o que diz à ordem e doutrina militar.* (Fortes, 1724, fl.1)

Seguidamente, o matemático português apresenta a indicação dos autores que utilizará como referência: André Tacquet e Claude Dechales. Notemos que Azevedo Fortes não refere a obra de Ozanam, obra a partir da qual efetua a tradução, referindo apenas autores que, afinal, não segue. Tal deve-se, possivelmente, ao facto de se encontrar a traduzir diretamente a obra de Ozanam que, como seria de esperar, não se refere a si próprio. Outra nota digna de destaque é o facto de, já na introdução, ser salientada a inclusão das utilizações das proposições enunciadas, através de exemplos conhecidos.

A segunda parte da *Geometria Especulativa* é um tratado sobre trigonometria intitulado *Da Trigonometria e Geometria Prática*. Comparando esta obra com as obras de trigonometria existentes à época, é possível estabelecer, mais uma vez, uma correspondência com um tratado de Ozanam, *La trigonometrie rectiligne et spherique*, publicado em 1720, o qual coincide quase inteiramente com o apêndice de trigonometria que Azevedo Fortes apresenta no primeiro tomo do seu *Engenheiro Português*.

Realçamos novamente o pendor prático, em particular em termos militares, da trigonometria, quer pela sua aplicação à náutica (trigonometria esférica) quer pela importância da resolução de triângulos para a artilharia, em particular os bombeiros, como realça o Brigadeiro José Alpoim[67], discípulo de Azevedo Fortes.

O terceiro e último tratado desta obra refere-se às técnicas de construção de mapas, temática a que Azevedo Fortes já se havia dedicado numa obra de 1722.

3.3 O conceito de reta tangente ao círculo na *Geometria Especulativa*

O conceito de reta tangente ao círculo surge, à semelhança do que acontece no original de Euclides, no Livro III. Seguindo o exemplo de outros editores dos *Elementos*, e à semelhança do que faz Ozanam, Azevedo Fortes apresenta uma introdução a este livro:

> *Neste livro explica Euclides a natureza e as propriedades da mais perfeita de todas as Figuras, que é o Círculo: Comparando as diferentes linhas que se podem lançar*

[67] Um estudo aprofundado desta temática encontra-se em Mota et al (2015, pp. 163-170).

> *assim dentro; Como por fora da sua Circunferência, pelos diferentes ângulos que elas formam, e pelo tocamento de uma linha reta, que tocando a sua circunferência a não corta, ou pelo tocamento de 2 circunferências de Círculo; os Instrumentos que servem na Astronomia na Geografia, na Náutica e nas mais Artes tiveram fundamento nas proposições deste livro.* (Fortes, 1724, fl. 69)

Após a introdução apresentam-se as definições, num total de dez, seguidas das trinta e sete proposições que compõem o terceiro livro. Notemos, desde já, a diferença entre o número de definições presentes na obra de Fortes/Ozanam e noutros *Elementos* de Euclides, diferenças que se prendem nomeadamente com a inclusão da definição de quadrilátero inscrito num círculo e com a exclusão das definições de ângulo na circunferência e maior distância de uma linha reta ao centro.

3.3.1 A definição

O conceito de reta tangente ao círculo é apresentado por Azevedo Fortes, na segunda definição do livro III, de forma distinta da apresentada por Ozanam (tabela 3.1).

Fortes, 1724, fl. 69v	Ozanam, 1693, p. 166
2.ª Dizemos que uma Linha reta toca um Círculo quando ela encontra a Circunferência, e não faz com ela ângulo, isto é, sem entrar dentro sendo produzida. Como *AB* [Fig. 3.6] esta linha na Trigonometria se chama Tangente.	Dizemos que *uma linha reta toca um Círculo*, se encontra a circunferência do círculo sem com ela fazer qualquer ângulo, isto é, sem a cortar, ou sem entrar dentro quando prolongada: *como AB, que chamamos* Tocante, *para a diferenciar da* Tangente, *que é um termo afeto à* Trigonometria.

Tabela 3.1: Definição III,2 na *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes e nos *Les Elemens d'Euclide* de Ozanam.

A introdução do termo "tocante" por Ozanam prende-se com a atribuição de um nome para o conceito que se encontra a definir, não querendo o matemático francês utilizar a terminologia tangente, termo que usa em trigonometria. Já Azevedo Fortes apenas opta por dizer que a reta toca o círculo e explica que na trigonometria esta linha será chamada de tangente. Assim sendo, seria de esperar que Azevedo Fortes usasse o termo tangente exclusivamente na trigonometria, mas tal não se verifica como adiante assinalaremos.

Porventura, a característica mais importante desta definição prende-se com a referência à não existência de ângulo entre a reta tangente e a circunferência. Esta caracterização reveste-se

de particular importância se tivermos em conta toda a polémica existente em torno do ângulo de contingência. Ao apresentarem a reta tangente como a reta que toca a circunferência mas que com ela não faz ângulo, os dois autores tomam a posição de considerarem que o ângulo de contingência não é um ângulo.

Outro parâmetro a ter em conta é a ilustração/representação do conceito. Azevedo Fortes replica a ilustração presente na obra de Ozanam (Fig. 3.6), numa ilustração simples e exclusiva da definição.

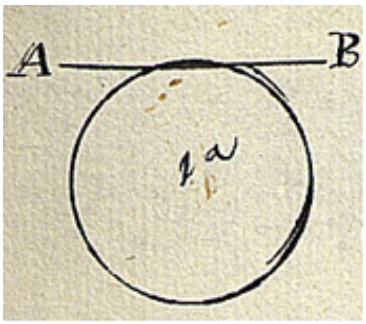


Figura 3.6: Ilustração da Definição III, 2.

Desta ilustração destacamos a utilização da direção horizontal para representar a reta tangente. De facto, a preferência pelas direções horizontal/vertical é uma constante nas obras de matemática.

3.3.2 As proposições

As proposições que Azevedo Fortes apresenta relativas ao conceito de reta tangente são as que usualmente se encontram nas edições dos *Elementos*, apresentando a Proposição III, 16 o seguinte enunciado na *Geometria Especulativa*.

> ***Prop: 16 Teorema*** *A Linha perpendicular lançada do extremo do Diâmetro de um Círculo Cai toda fora do Círculo: e qualquer outra linha reta entre ela e a Circunferência do Círculo, Corta o círculo e entra dentro.* (Fortes, 1724, fl. 82)

Notemos que, ao contrário do que acontece em várias edições dos *Elementos*, Azevedo Fortes evita, também aqui, a questão do ângulo de contingência. Esta opção é coerente com a sua definição de reta tangente.

A demonstração desta proposição encontra-se dividida em duas partes: na primeira parte prova-se que a reta perpendicular ao diâmetro se encontra fora da circunferência, numa demonstração direta, semelhante à que se encontra na edição dos *Elementos de Geometria* de Manuel de

Campos[68]; na segunda parte, prova-se que não é possível interpor outra reta entre a tangente e a circunferência, e apresenta uma das características mais marcantes desta obra: a denominada "preparação".

> Pretende-se provar que não é possível interpor outra linha reta entre a tangente e a circunferência do círculo sem que esta corte o círculo. Para tal, considere-se a reta AF, uma reta que se encontra entre a tangente e a circunferência [Fig. 3.7].

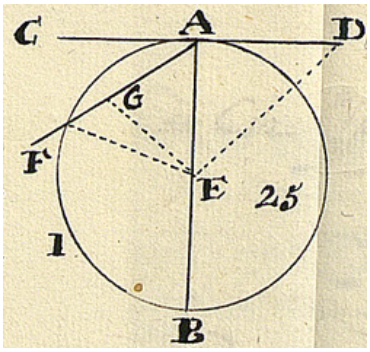


Figura 3.7: Ilustração da demonstração da Proposição III, 16.

> **Preparação:** Por E trace-se a reta EG perpendicular a AF que interseta a reta AF no ponto G, um ponto diferente de A uma vez que o ângulo EAF é agudo.
>
> **Demonstração:** Como o ângulo em G do triângulo $[EGA]$ é reto, será o maior ângulo do triângulo (Prop. I, 32[69]), logo a hipotenusa $[EA]$ será o maior lado do triângulo (Prop. I, 19[70]), pelo que o ponto G está mais perto do centro E que o ponto A, e assim a reta AF corta o círculo. ■

A preparação da demonstração consiste na construção e nomeação de todas as entidades que serão utilizadas, uma das características originais da obra de Ozanam e que Azevedo Fortes mantém. Notemos que Azevedo Fortes inclui o termo tangente, embora na Definição III, 2 associe este termo à trigonometria.

Esta proposição apresenta um escólio onde, finalmente, Azevedo Fortes decide abordar a questão melindrosa do conceito de ângulo de contingência

[68] Veja-se a referida demonstração na página 42.

[69] ***Proposição I, 32:*** *Produzido um dos lados de qualquer triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores opostos em uma soma; e os três ângulos do triângulo são em soma iguais a dois retos.* (Fortes, 1724, fl. 36)

[70] ***Proposição I, 19:*** *Em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado.* (Fortes, 1724, fl. 25)

> *Os Comentadores de Euclides acrescentam a esta proposição que o ângulo do semicírculo, a saber o ângulo que se forma do diâmetro do Círculo e da sua Circunferência é maior que qualquer ângulo agudo possível: o que é evidente pela definição de ângulo, pela qual conhecemos que o ângulo misto EAI é igual ao retilíneo EAC que é reto*[71]
>
> *Acrescentam mais, que o ângulo EAI, que chamam erradamente ângulo de Contingência, é menor que qualquer ângulo retilíneo possível, e que por conseguinte se reduz a nada, o que é também evidente, porque não é ângulo, como notamos na definição 9ª do 1º.*[72]
>
> *No fim deste livro, para satisfazer aos curiosos, não porque disso haja resultar utilidade, explicarei as demonstrações de Galileu e Viviane para convencer os que duvidam que não é propriamente ângulo o de Contingência, mas assim é chamado equivocadamente.* (Fortes, 1724, fl. 82v)

Neste escólio, original de Azevedo Fortes, o ângulo de contingência é, também, apresentado como não ângulo, enquanto o ângulo do semicírculo, fruto da definição de ângulo misto apresentada por Azevedo Fortes no livro I, é considerado igual ao ângulo reto[73]. Com esta posição, Azevedo Fortes rejeita a última parte do enunciado da Proposição III, 16 presente em várias edições dos *Elementos*, mas que Azevedo Fortes considera ser um acrescento dos comentadores de Euclides e não da autoria do matemático grego.

Azevedo Fortes não dá o assunto do ângulo de contingência como terminado, apresentando um apêndice, no final do livro III, onde apresenta as considerações de Galileu e Viviani a propósito deste tema polémico[74]. No final deste escólio é apresentado um dos pontos mais característicos desta obra de Azevedo Fortes, tal como obra de Ozanam: a indicação da utilidade da proposição anteriormente apresentada.

> ***Uso***
>
> *Esta proposição serve para demonstrar a 33, e também para lançar uma tangente por um ponto dado na circunferência de um círculo dado, como dado o ponto A, desse ponto ao centro E se lance a linha AE, e sobre AE, do ponto A [Fig. 3.7], se lançará a perpendicular AC e será a tangente buscada.* (Fortes, 1724, fl. 83)

[71] Azevedo Fortes considera nesta sua obra, à semelhança do que faz Ozanam, o ângulo misto como sendo igual ao ângulo retilíneo formado pelas tangentes aos lados (Fortes, 1724, fl.4).

[72] 9ª *O ângulo retilíneo é aquele cujas linhas são retas.* (Fortes, 1724, fl. 3)

[73] A este propósito veja-se a página 94.

[74] Um estudo detalhado deste apêndice encontra-se no capítulo 3.6.

Desta aplicação realcemos o método de construção da reta tangente ao círculo por um ponto da sua circunferência, método que não se encontra explicitado nos *Elementos*.

O método de construção da reta tangente ao círculo por um ponto no seu exterior é apresentado na Proposição III, 17 cujo enunciado e demonstração seguem Euclides[75]. Novamente a grande diferença em relação às edições tradicionais dos *Elementos* prende-se com a inclusão da utilidade desta proposição, que é apresentada nas obras de Fortes e Ozanam nos termos da tabela 3.2.

Fortes, 1724, fl. 83v	Ozanam, 1693, pp. 201-202
Na Trigonometria Esférica e retilínea é muito frequente o uso das tangentes, como também na Dióptrica para determinar os pontos de reflexão numa superfície curva, ou seja côncava ou convexa. Serve também na Gnomónica para descrever as horas Bebilónicas e Itálicas, e na Náutica onde se toma uma linha tangente por horizonte observando a altura do Sol, ou de qualquer outro Astro. Na proposição 31 daremos um método mais fácil para lançar uma Tangente.	O uso das linhas tangentes é frequente na Trigonometria tanto Esférica como Retilínea: & também na Dióptrica para determinar os pontos de reflexão sobre uma superfície curva, tanto côncava como convexa. Serve também na Gnomónica, para a descrição das horas Babilónicas & Italianas, & na Navegação onde tomamos uma linha tangente para nosso Horizonte, quando observamos a altura do Sol, ou qualquer outro Astro. Elas são usadas muito convenientemente na Geometria Especulativa, para as Quadraturas. Encontramos um exemplo no primeiro Teorema da Planimetria, que servirá para a Quadratura do Círculo, & da Parábola. Ensinaremos na *Prop. 31* um outro método mais fácil para tirar uma tangente.

Tabela 3.2: *Uso* da Proposição III, 17 nas obras de Azevedo Fortes e Ozanam

Salientemos que apesar de ser mais sintético, as palavras de Azevedo Fortes parecem subentender um pendor ainda mais abrangente do que as de Ozanam. Ao não referir a utilidade desta proposição na geometria especulativa o nosso autor poderá querer denotar um menor interesse por assuntos de natureza mais teórica. É também de realçar a diversidade de aplicações da determinação da reta tangente, em particular no que concerne aos problemas ligados à navegação, tema tão querido da história nacional. No início do século XVIII, quando o problema da determinação da longitude ainda não se encontra completamente resolvido, a determinação da posição no mar e a determinação das horas do dia, fossem elas itálicas ou babilónicas[76], é de extrema importância.

[75] Veja-se enunciado e demonstração desta proposição na página 20.

[76] A diferença entre as horas babilónicas e as itálicas prende-se com o momento do início do dia: as horas babilónicas consideram o início das 24 horas do dia no instante do crepúsculo matutino, enquanto as itálicas o consideram no vespertino (Ortiz, 2006, p. 8).

No que concerne à Proposição III, 18, embora o enunciado apresentado por Fortes seja igual ao dos *Elementos*, a demonstração proposta pelo autor segue a demonstração de Ozanam:

> ***Proposição III, 18:*** *A linha reta tirada do centro de um círculo ao ponto em que outra linha reta toca a sua circunferência é perpendicular a essa Tangente.* (Fortes, 1724, fl. 83v)

Eis a demonstração apresentada por Azevedo Fortes.

> Digo que a linha reta CA toca no ponto A a circunferência do círculo AIB, cujo centro está no ponto E, a linha reta AE, lançada do centro E ao ponto A é perpendicular a CA tangente [Fig. 3.8].
>
> **Dem:** Se a linha EA não é perpendicular à tangente CA, fará com ela de um lado o ângulo agudo, e do outro obtuso. Suponhamos obtuso o ângulo EAC, podemos diminuir-lhe o ângulo reto EAF, pela linha AF a que neste caso será perpendicular ao diâmetro AB e que tocará o círculo no mesmo ponto A, aonde se supõe que a linha CA o toca (Prop. III, 16) e assim estando toda fora do círculo poderemos lançar uma linha reta entre a tangente AC e a circunferência, mas isto é contra o 2º caso da proposição 16: logo não pode haver outra perpendicular ao diâmetro AB mais do que a tangente AC, e é o que se queria demonstrar. ■

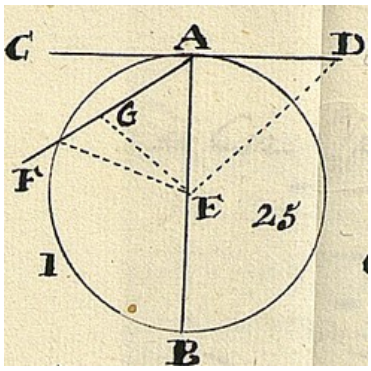


Figura 3.8: Ilustração da demonstração da Proposição III, 18.

Desta demonstração ressalta o facto de o único resultado utilizado ser a Proposição III, 16 , enquanto a demonstração que encontramos em Euclides recorre a resultados de triângulos enunciados no primeiro livro dos *Elementos*. De salientar é também o facto de as ilustrações de Azevedo Fortes, por serem manuscritas, poderem incluir a tracejado as linhas auxiliares, facilitando-se assim a compreensão do leitor

Depois Azevedo Fortes apresenta um escólio onde se afasta do original de Ozanam ao não traduzir a totalidade do escólio francês. Ozanam apresenta no seu escólio duas demonstrações alternativas desta proposição: a primeira, também por redução ao absurdo, que o matemático francês considera bastante simples; em seguida, uma demonstração direta que Fortes traduz. A não inclusão de uma segunda demonstração indireta pode ser encarada como uma opção didática, uma vez que não teria interesse explorar novas demonstração que utilizassem a mesma técnica, enquanto a apresentação de um método de demonstração direta traria como vantagem a abordagem a diferentes formas de demonstrar um mesmo resultado. Vejamos o escólio apresentado por Fortes.

> *Escólio*
>
> *Esta demonstração é indireta, e se pode fazer direta desta sorte, pois que a linha CA toca a circunferência AIB no ponto A [Fig. 3.8], todos os seus pontos ficarão mais distantes do centro E, [pelo que todas as linhas retas] lançadas desses pontos serão maiores que a linha EA, e assim sendo linha EA a mais curta de todas deve ser perpendicular à tangente, que é o que se queria provar.* (Fortes, 1724, fl. 84)

Esta demonstração, embora não o refira, assenta no seguinte resultado:

> ***Lema:*** *A linha perpendicular é a mais curta de todas as que se podem lançar de um ponto a uma mesma linha.* (Fortes, 1724, fl. 25v)

Este resultado é um lema apresentado por Fortes no uso da Proposição I, 19[77] e que resulta diretamente desta proposição e da sua antecedente[78]. De estranhar é a ausência à referência a estes resultados no escólio, referência que se encontra no original de Ozanam e para a qual não conseguimos encontrar justificação.

As aplicações desta proposição são apenas para a demonstração de três outras proposições deste livro, a saber: a proposição 19; a proposição 32; e a proposição 36.

A proposição III, 19 é em tudo semelhante à presente noutras edições dos *Elementos*[79] não surgindo referência a qualquer utilidade desta proposição nem na obra de Azevedo Fortes, nem na de Ozanam.

O conceito de reta tangente volta a ser abordado por Azevedo Fortes no uso da Proposição III, 31[80]:

[77] ***Proposição I, 19:*** *Em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado.* (Fortes, 1724, fl. 25)
[78] ***Proposição I, 18:*** *Em qualquer triângulo o maior lado é oposto ao maior ângulo.* (Fortes, 1724, fl. 24v)
[79] Veja-se a este propósito a página 22.
[80] ***Proposição III, 31:*** *O ângulo no semicírculo é reto; no segmento maior que o semicírculo é agudo; no segmento menor que o semicírculo é obtuso.* (Fortes, 1724, fl. 90v)

> *Esta proposição nos oferece um método mais fácil, que o da proposição 17, para lançar uma tangente por um ponto dado fora da circunferência de um círculo dado.* (Fortes, 1724, fl. 92)

O método sugerido é o seguinte:

- Considere-se o círculo dado CEB de centro D e o ponto dado A no exterior do círculo [Fig. 3.9].
- Trace-se o segmento de reta $[DA]$ e sobre ele se descreva o semicírculo AED, que interseta a circunferência do círculo dado no ponto E.
- Trace-se a reta AE que será a tangente pretendida.

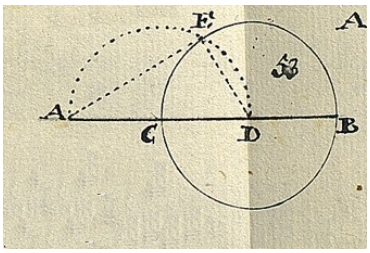


Figura 3.9: Construção da reta tangente ao círculo, proposta na Proposição III, 31.

Azevedo Fortes, à semelhança de Ozanam, justifica que a reta obtida é efetivamente tangente ao círculo referindo:

> *(...) a linha AE que será a tangente buscada; porque o ângulo AED do semicírculo é reto.* (Fortes, 1724, fl. 92)

Azevedo Fortes termina o estudo do conceito de reta tangente com a apresentação da Proposição III, 32.

> ***Proposição III, 32**: A linha reta que corta a circunferência de um círculo no ponto de contacto faz com a tangente ângulos iguais aos ângulos dos segmentos alternos.*
>
> *Chama-se segmento alterno aquele que é feito da outra parte do ângulo retilíneo, que se forma no ponto de contacto.*
>
> *Como o segmento ADEA a respeito do ângulo oposto CAD [Fig. 3.10] (...). Também é segmento alterno ADFA a respeito do ângulo oposto BAD (...).* (Fortes, 1724, fl. 92)

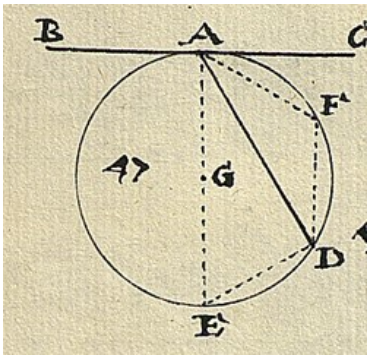


Figura 3.10: Ilustração da Proposição III, 32.

Deste enunciado destaca-se a definição de segmento alterno, algo pouco usual nas edições dos *Elementos* e que Fortes traduz diretamente de Ozanam. A introdução desta definição torna mais simples a compreensão desta proposição assim como o entendimento da respetiva demonstração, essa idêntica à existente noutras edições dos *Elementos*[81].

Seguindo Ozanam, e de forma semelhante a Euclides, Azevedo Fortes apenas considera na demonstração o caso em que a reta secante não é um diâmetro, embora demonstre o caso em que a reta secante é um diâmetro num escólio da sua autoria.

> *Nestas duas demonstrações acima supomos a linha AD fora do centro G [Fig. 3.10], porque se ela passasse pelo centro G, como a alinha AE, faria com a tangente CD ângulos retos (Prop. III, 18) e os ângulos do semicírculo seriam retos (Prop. III, 31*[82]*), e assim toda a proposição seria evidente.* (Fortes, 1724, fl. 92v)

Seguidamente são apresentadas as aplicações desta proposição.

> ***Uso***
>
> *Esta proposição serve para a demonstração das proposições 33 e 34 deste Livro, e para a 10.ª do Livro 4. Serve também para demonstrar que se muitos círculos se tocarem todos em um mesmo ponto, como A, qualquer linha reta que pelo ponto de contacto corta as suas circunferências, como AF, fará os arcos de cada circunferência terminados por esta linha, partes semelhantes das suas circunferências, como AB, AE, AF [Fig. 3.11]: porque todos os ângulos que se fizerem nos segmentos alternos serão iguais entre si, sendo cada um igual ao ângulo que se faz da linha reta AF com a tangente BC.* (Fortes, 1724, fls. 92v-93)

[81] Veja-se a referida demonstração na página 24.

[82] ***Proposição III, 31:*** *O ângulo no semicírculo é reto; no segmento maior que o semicírculo é agudo; no segmento menor que o semicírculo é obtuso.* (Fortes, 1724, fl. 90v)

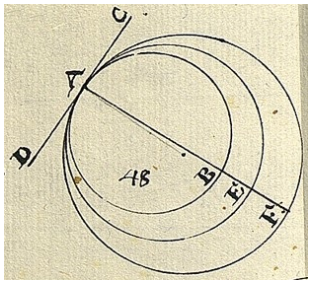


Figura 3.11: Ilustração do Uso da Proposição III, 32.

A ilustração deste resultado sugere ainda um outro resultado relativo à existência de uma tangente comum a círculos tangentes entre si[83].

3.4 A *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* de Azevedo Fortes

A obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, publicada em 1744, é considerada a primeira obra de lógica escrita em língua portuguesa (Coxito, 1981, p. 2). Dividida, como o próprio título sugere, em três partes, debruça-se na primeira parte sobre a *Lógica Racional*, na segunda parte sobre *Lógica Geométrica* e na terceira e última parte sobre *Lógica Analítica*.

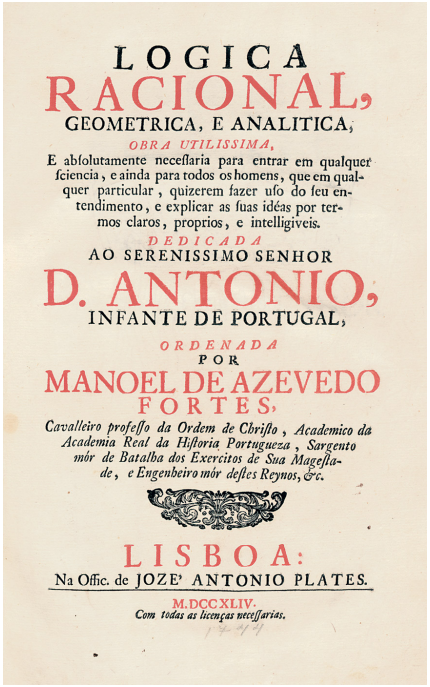

LOGICA
RACIONAL,
GEOMETRICA, E ANALITICA,
OBRA UTILISSIMA,
E abſolutamente neceſſaria para entrar em qualquer ſciencia, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular, quizerem fazer uſo do ſeu entendimento, e explicar as ſuas idéas por termos claros, proprios, e intelligiveis.
DEDICADA
AO SERENISSIMO SENHOR
D. ANTONIO,
INFANTE DE PORTUGAL,
ORDENADA
POR
MANOEL DE AZEVEDO
FORTES,
Cavalleiro profeſſo da Ordem de Chriſto, Academico da Academia Real da Hiſtoria Portugueza, Sargento mór de Batalha dos Exercitos de Sua Mageſtade, e Engenheiro mór deſtes Reynos, &c.
LISBOA:
Na Offic. de JOZE' ANTONIO PLATES.
M.DCC.XLIV.
Com todas as licenças neceſſarias.

Figura 3.12: Frontispício da *Lógica Racional* de Azevedo Fortes.

[83] A este propósito veja-se a página 45.

Ainda na página de rosto (Fig. 3.12) é possível perceber a importância atribuída pelo autor a esta temática quando escreve que:

> *É absolutamente necessária para entrar em qualquer ciência, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular, quiserem fazer uso do seu entendimento, e explicar as suas ideias por termos claros, próprios e inteligíveis.* (Fortes, 1744, folha de rosto)

A escrita de uma obra de lógica em português prender-se-á não só com a importância do próprio assunto, mas também com a opinião que Manuel de Azevedo Fortes tem do ensino da lógica em Portugal:

> *Há muitos anos, que tenho reparado no pouco fruto, que os estudantes tiram do ano, que empregam no estudo da Lógica, que ordinariamente se ensina nas Escolas; e falando eu com muitas pessoas doutas, e de claro juízo, todos convieram em que semelhante estudo, mais servia para embaraçar, e confundir as nossas ideias, do que para aperfeiçoar as operações do nosso entendimento, que é o fim principal da Lógica.* (Fortes, 1744, s.p.)

Azevedo Fortes apresenta-nos uma lógica racional em oposição a uma lógica metafísica como a que era, segundo ele, ensinada nas escolas portuguesas e tem como objetivo primordial a instrução dos militares:

> *Sem embargo das minhas considerações, me determinei a sair à luz com esta Lógica, não com intenção se refutar os que seguem outras Lógicas; porque ainda que escrevo para todos com desejo de ser útil à minha Nação, mais particularmente escrevo a favor dos Oficiais militares da minha profissão, aos quais entendo ser precisa a Lógica Racional, para poderem satisfazer cabalmente as suas obrigações.* (Fortes, 1744, s.p.)

A necessidade do conhecimento da lógica racional por parte dos militares prender-se-á com a inevitabilidade de, no exercício das suas funções, terem de recorrer à argumentação ou à análise de raciocínios e hipóteses, tarefas onde o raciocínio lógico se mostraria verdadeiramente útil.

Tendo em consideração os temas abordados usualmente nos tratados de Lógica é pouco usual, e talvez se estranhe à primeira vista, a junção das três componentes –racional, geométrica e analítica– escolhidas por Azevedo Fortes e que ele próprio justifica nos seguintes termos:

> *Vemos, que todos os antigos Filósofos começaram os seus estudos pela Geometria, que entenderam absolutamente necessária para poder passar ao conhecimento de todas as coisas naturais; e esta se acha tão desprezada nas Escolas deste Reino, que são muito poucos os Filósofos, que passam de saber a Aritmética ordinária; e os Antigos entenderam ser tão necessária a Geometria, que proibiam a entrada das Academias Filosóficas, aos que não eram Geómetras.* (Fortes, 1744, s.p.)

Na ligação histórica entre a filosofia e a matemática, Azevedo Fortes parece estar a defender ideais Aristotélicos. Relembremos que foi a ligação entre estas duas áreas e a utilização de métodos filosóficos que levou à axiomatização da matemática e a que esta desenvolvesse a estrutura de raciocínio que ainda hoje se mantém e que o nosso autor, de resto, não esconde:

> *O mesmo Aristóteles, que nos deu o método, e regras para a boa demonstração, declara que se serviu da Geometria de Euclides (...).* (Fortes, 1744, s.p.)

Azevedo Fortes refere ainda, nesta sua introdução, que não existe qualquer obra publicada em português sobre a *Lógica Analitica*, ou Álgebra, o que o terá levado a incluir esta temática como terceira parte da sua obra.

No que concerne à primeira parte, *Lógica Racional*, esta é uma obra de filosofia, e segundo Coxito (1981, p. 2) é influenciada pela lógica de Port-Royal[84] assim como pelas ideias de Descartes sendo, segundo Ribeiro (2009, p. 144), inspirada pela obra *Entretiens sur les sciences, dans lesquels on apprend comment l'on doit étudier les sciences, et s'en servir pour se former l'esprit juste et le coeur droit* de Bernard Lamy[85].

Relativamente à *Lógica Geométrica*, e tal como o autor indica na introdução a esta segunda parte, ela é uma tradução para português dos *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps* de Bernard Lamy.

Comparando a obra de Azevedo Fortes com as diferentes edições da obra de Lamy a que tivemos acesso conseguimos estabelecer uma correspondência entre a tradução portuguesa e a 4.ª edição de Lamy[86], datada de 1710, edição que terá sido revista e aumentada pelo matemático francês[87]. A escolha deste autor, e em particular desta obra, é justificada por Azevedo Fortes:

[84] Lógica de Port-Royal é o nome usualmente dado à obra *La logique, ou l'art de penser*, publicada em 1662. (Coxito, 1981, p. 3)

[85] Um estudo detalhado da *Lógica Racional* pode ser encontrado em Coxito (1981).

[86] Comparamos a obra de Azevedo Fortes com as edições da obra de Lamy de 1685, 1692, 1710 e 1731, sendo a edição de 1710 a primeira cuja estrutura e conteúdo mais se aproxima da de Azevedo Fortes. Não nos foi possível comparar com a 3.ª edição do original de Lamy, datada de 1695, uma vez que não conseguimos ter acesso a qualquer exemplar dessa obra.

[87] Uma comparação entre a estrutura das obras de Azevedo Fortes e Lamy encontra-se no anexo E.

> *Nesta segunda parte, em que tratamos a Lógica geométrica, seguiremos ao M. R. Padre Bernardo Lamy da Congregação do Oratório, pela nova forma, que deu aos Elementos de Euclides, tratando separadamente, e com demonstrações novas as três dimensões do corpo: 1. das linhas, 2. das superfícies, 3. do corpo, ou sólido; emendando o defeito de Euclides, que não faz esta separação. Preferimos este autor moderno pela grande clareza, ordem e distinção, com que trata esta matéria.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 2)

Azevedo Fortes apresenta assim os fundamentos da geometria com uma nova roupagem, reorganizando as proposições, embora, à semelhança do que faz o matemático francês, sempre que considera relevante faça referência à proposição correspondente nas edições "tradicionais" dos *Elementos* de Euclides.

Ainda antes de iniciar a apresentação dos conteúdos desta parte, e logo após a explicação dos termos, Azevedo Fortes tece considerações didáticas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, salientando a importância da compreensão em lugar da memorização.

> *Deve-se advertir os principiantes, que considerem atentamente estes princípios, e as mais proposições desta obra; porque de ficarem bem entendidos, se lhe segue uma grande facilidade; e os mestres lhe devem inculcar, que façam sempre mais uso do entendimento, do que da memória.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 7)

Também a importância das representações é alvo de análise por Azevedo Fortes, que realça a vantagem da utilização de representações de conceitos, mas também as suas limitações.

> *(...) e ainda que nesta II parte senão podem isentar de fazer fixa a imaginação com as figuras, contudo procurem de as aperceber mentalmente, representando-se as suas propriedades, como inteligíveis.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 7)

No que concerne ao método que deve ser utilizado para o estudo também este é alvo de análise por Azevedo Fortes:

> *Os mestres devem inculcar aos discípulos, que façam reflexão em tudo o que forem estudando, aplicando-se os preceitos da Lógica Racional explicados na I. parte.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 7)

Azevedo Fortes surge, particularmente nesta obra, como um autor que se preocupa com o ensino da matemática em Portugal, tentando transmitir os seus conhecimentos sobre esta

temática, chamando à atenção dos seus leitores para a importância de um método correto para que se possa efetuar uma verdadeira aprendizagem.

A terceira parte desta obra, a *Lógica Analítica* contém um tratado sobre álgebra e é uma tradução para português da obra *Elemens des mathematiques, ou Traité de la grandeur en general, qui comprend l'arithmetique, l'algebre, l'analyse, et les principes de toutes les sciences qui ont la grandeur pour objet* também de Bernard Lamy[88], obra que tinha já sido traduzida para português por Azevedo Fortes nos manuscritos que se encontram na Biblioteca Nacional[89]. A *Lógica Analítica* terá sido, tanto quanto atualmente se sabe, a primeira obra imprensa sobre álgebra em português (Ribeiro, 2009, p. 142).

Apesar de no Antíloquo ter escrito que a publicação da *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* se deve ao facto de considerar que as obras de lógica existentes em Portugal para o ensino da mesma não serem as mais adequadas, esta obra de Azevedo Fortes não terá sido utilizada diretamente no ensino. Segundo Ribeiro (2009, p. 183), Fortes terá utilizado as obras de Lamy no ensino na Academia Militar tendo posteriormente reorganizado os seus conteúdos, particularmente nesta Lógica, os aspetos que, fruto da sua experiência de professor, seriam mais importantes.

3.5 O conceito de reta tangente ao círculo na *Lógica Geométrica*

O conceito de reta tangente ao círculo é abordado no capítulo VI do Livro I da *Lógica Geométrica* assim como nos capítulos I e II do Livro II.

No capitulo VI do Livro I é estudada a posição das linhas retas em relação ao círculo, surgindo neste capítulo a maioria dos resultados tradicionalmente associados ao nosso conceito. Já no capítulo I do Livro II, dedica-se ao estudo dos ângulos, e no capítulo II debruça-se sobre a comparação dos ângulos e as suas posições a respeito do círculo, abordando a relação entre o conceito de ângulo e o conceito de reta tangente ao círculo.

3.5.1 A definição

Azevedo Fortes, tal como Lamy, não define formalmente o conceito de reta tangente ao círculo, mas apresenta, na introdução que faz ao capítulo VI, as três posições possíveis para esta reta, sem nunca referir o termo tangente.

[88] Uma comparação detalhada entre as duas obras e uma análise a esta última parte pode ser encontrada em Ribeiro (2009, pp. 136-146).

[89] Veja-se a este propósito Domingues (2014, pp. 37-39)

> *Uma linha reta pode estar, ou inteiramente dentro de um círculo, ou fora dele: se ela é de fora, e lhe pode chegar, se poderá produzir de sorte, que o corte ou que o toque, sem entrar dentro.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 38-39)

Notemos que esta introdução contém em si três conceitos - reta exterior, reta secante e reta tangente ao círculo - que não são referidos. Embora estes conceitos não estejam definidos formalmente serão utilizados por Azevedo Fortes ao longo da sua obra, onde utiliza esta terminologia, explicitando-a quando considera útil e necessário.

Ainda relacionado com o conceito de reta tangente ao círculo Azevedo Fortes, continuando a seguir Lamy, apresenta o conceito de ângulo do segmento:

> **Definição IV**
>
> **35.** O ângulo formado por uma tangente, e uma corda, ou secante, tirado do ponto do contacto, se chama ângulo do segmento, como QPR, ou RPT [Fig. 3.13]. (Fortes, 1744, Parte II, p. 69)

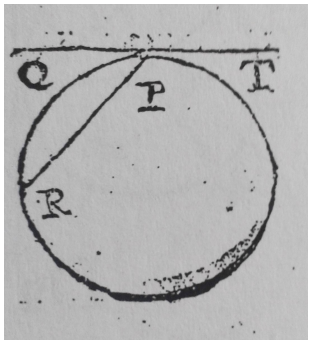


Figura 3.13: Ilustração da definição de ângulo do segmento.

3.5.2 As proposições

A primeira proposição relativa ao conceito de reta tangente ao círculo é o Teorema XIV do capítulo VI do Livro I, correspondendo ao Teorema XIII da secção correspondente em Lamy, e apresenta dois resultados distintos:

> ***Teorema XIV***
>
> ***103*** *Uma linha perpendicular sobre o extremo de um raio, toca o círculo, e o não toca em mais, que em um só ponto. Euclid. liv. 3. Prop. 16. e 18.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 48)

Comecemos por notar que Azevedo Fortes, à semelhança de Lamy, refere quais as proposições de Euclides cujos resultados apresenta neste teorema: as proposições 16 e 18 do Livro III dos *Elementos*. Contudo, a indicação de que este teorema apresenta resultados das Proposições 16 e 18 do livro III dos *Elementos* parece-nos enganadora, uma vez que o resultado apresentado corresponde unicamente à primeira parte da Proposição III, 16, não se vislumbrando qualquer referência ao resultado da Proposição III, 18 sobre a posição relativa de diferentes retas. Contudo, não nos foi possível encontrar, nem conjeturar, uma possível justificação para este engano.

Embora o resultado enunciado no teorema XIV se encontre presente nos *Elementos*, a demonstração proposta por Azevedo Fortes e Lamy é distinta da que se encontra em edições tradicionais da obra do matemático grego, como a de Thomas Heath.

> A linha BD é perpendicular sobre BK: devemos mostrar que esta linha toca o círculo X no ponto B [Fig. 3.14].

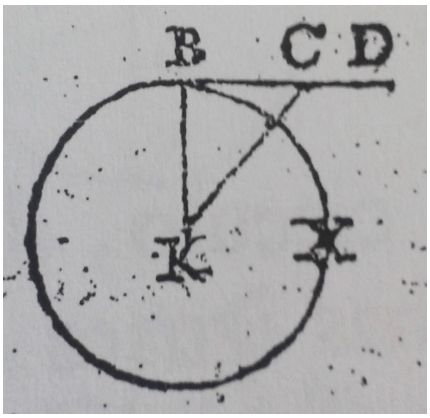


Figura 3.14: Ilustração da demonstração do teorema XIV, do capítulo VI, do livro I.

> Se nos derem um segundo ponto: como C, lance-se de K a C uma linha, a qual não é perpendicular sobre BD, senão pode lançar mais que uma só perpendicular (num. 50[90]) logo $KC > BK$, a qual é perpendicular sobre BD (número 52[91]) e assim o ponto C fica fora do círculo X: logo BD não toca o círculo em dois pontos B e C, mas somente no ponto B; e é o que se queria mostrar. ■

Notemos que esta demonstração assenta em resultados sobre linhas retas, em particular retas perpendiculares, e não em resultados sobre ângulos e triângulos como nos *Elementos*. O motivo

[90] ***50.*** *De um mesmo ponto sobre uma mesma linha não se pode lançar mais do que uma só perpendicular.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 25)

[91] ***52.*** *A linha perpendicular é a mais curta de todas, as que se podem lançar de um ponto a uma linha.* (Fortes, 1744. Parte II, p. 25)

desta alteração prender-se-á com a estrutura da *Lógica Geométrica* que começa por apresentar resultados apenas sobre linhas, não se encontrando, aquando do estudo desta proposição, ainda estudados os conceitos de ângulo ou as propriedades dos triângulos.

Apenso ao seu Teorema XIV Azevedo Fortes apresenta ainda um corolário igualmente presente na obra de Lamy.

> ***Corolário***
>
> ***104.*** *Não pode haver mais do que uma só linha que toque o círculo em um mesmo ponto.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 49)

Notemos que com com o Teorema XIV e com este corolário fica demonstrada a existência e unicidade da reta tangente ao círculo. A demonstração deste corolário é bastante simples e assenta na unicidade da reta perpendicular a outra reta por um ponto dado.

> *Duas linhas diferentes não podem tocar o círculo X no mesmo ponto B [Fig. 3.14]; porque seriam ambas perpendiculares, o que é impossível (num. 48*[92]*).* ■

Em seguida é apresentado outro dos resultados tradicionalmente associados ao conceito de reta tangente ao círculo.

> ***Teorema XV***
>
> ***105*** *Se dentro de um círculo se lançar uma linha perpendicular sobre o ponto de contacto, ou da tangente, esta linha passará pelo centro do círculo. Eucl. liv. 3. Prop. 19.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 49)

Neste teorema que, como é visível no enunciado, corresponde à Proposição III, 19 dos *Elementos*, Azevedo Fortes utiliza, pela primeira vez nesta sua obra, o termo tangente. Embora, como já vimos, este termo não se encontre definido formalmente, a sua introdução nesta proposição aliada à explicação inicial sobre a posição de uma reta relativamente ao círculo torna-lo-ia, implicitamente, compreensível. Na demonstração Azevedo Fortes, mais uma vez seguindo Lamy e a opção de trabalhar primeiramente só com linhas, apresenta uma demonstração diferente da tradicional de Euclides.

> A linha CD é tangente [Fig. 3.15]: de C, ponto de contacto se lance uma perpendicular para dentro do círculo, que passará pelo centro. Se disserem, que não passa

[92] ***48.*** *De qualquer ponto dado, não se pode lançar mais que uma só perpendicular.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 23)

pelo centro, mas que pelo ponto B, que não é centro mostraremos o contrário, porque se levantando de C o raio CK, e sobre o seu extremo C uma perpendicular, esta será tangente (num. 103) e será a mesma que CD, pois que do ponto C senão pode lançar mais que uma só tangente (num. 104) e assim sobre a linha CD, do mesmo ponto haveria duas perpendiculares CK e CB, o que implica (num. 50[93]) ■

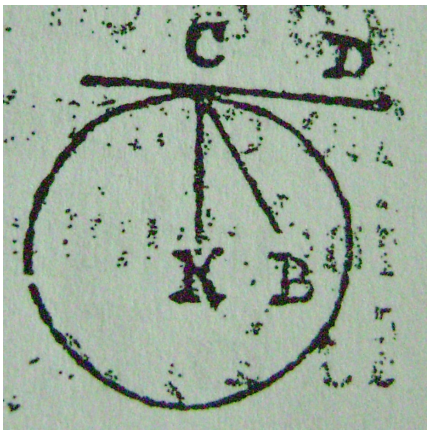


Figura 3.15: Ilustração da demonstração do teorema XV, do capítulo VI, do livro I.

Nesta demonstração, no original de Azevedo Fortes, encontram-se referidas as proposições número 100 e 101 como sendo as que justificam os passos da demonstração aqui assinalados com os números 103 e 104, respetivamente. A indicação do número 100 e 101 é claramente uma gralha de numeração de proposições, uma vez que os resultados nele contidos não têm qualquer relação com o conceito de reta tangente. A existência desta gralha, que se repetirá noutras proposições, pode dever-se à alteração da numeração das proposições numa versão final da obra, alteração que foi efetuada ao nível dos enunciados, mas que não terá sido corrigida aquando da sua utilização em demonstrações de outras proposições.

Seguidamente, Azevedo Fortes apresenta um outro resultado que contém, no seu enunciado, parte da Proposição III, 16 dos *Elementos*.

Teorema XVI

106. *Entre uma tangente, e a circunferência de um círculo, não se pode lançar nenhuma linha reta, ainda que se possam lançar um número indefinito de linhas circulares Euclid. liv. 3. Prop. 16* (Fortes, 1744, Parte II, p. 49)

Notemos que a referência ao número de linhas curvas que é possível lançar entre a tangente e a circunferência não se encontra presente na Proposição III, 16 dos *Elementos*, sendo contudo

[93] ***50.*** *De um mesmo ponto sobre uma mesma linha não se pode lançar mais do que uma só perpendicular.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 25)

referida por alguns autores de edições da obra do matemático grego, como é o caso de Manuel de Campos[94].

Tal como em resultados anteriores a demonstração de Azevedo Fortes da parte que se encontra nos *Elementos* é distinta da de Euclides, sendo apresentada pelo matemático português nos seguintes termos:

> Se entre BD, tangente, e o círculo X se pode lançar uma linha reta que divida o espaço entre a tangente BD e o círculo [Fig. 3.16]: seja se quiserem BF, sobre a qual se lance do ponto X outra linha que lhe seja perpendicular, a saber KE, que será mais curta que o raio BK que não é perpendicular sobre esta linha (num. 52[95]) e assim KE sendo menor que BK, o seu extremo E ficará dentro do círculo: logo a linha BF , que não fica fora do círculo, não pode dividir o espaço que há entre a circunferência, e a tangente BD, e é o que se queria mostrar.

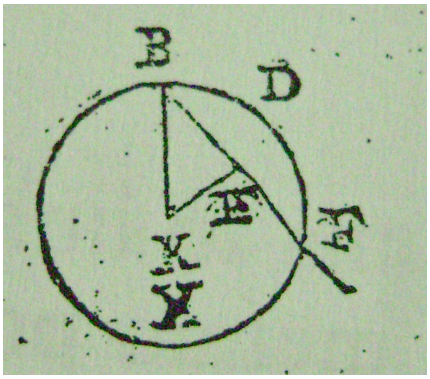


Figura 3.16: Ilustração da primeira parte da demonstração do teorema XVI, do capítulo VI, do livro I.

> Mas entre a tangente AB e o círculo Y podem passar indefinitos círculos, porque produzindo o raio AC para lá do centro C, por exemplo até E [Fig. 3.17]; e de E, como centro, e com o intervalo EA se descreva o círculo Z, a linha AB será tangente desse círculo (num. 103) o qual, sendo maior, cairá fora do círculo Y; e da mesma sorte do círculo X, de que P é centro, ficará também entre AB e Y; e assim indefinitamente: logo entre a tangente AB, e o círculo Y, se podem lançar indefinitas linhas circulares. ■

[94] A este propósito veja-se a página 44.

[95] ***52.*** *A linha perpendicular é a mais curta de todas, as que se podem lançar de um ponto a uma linha.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 25)

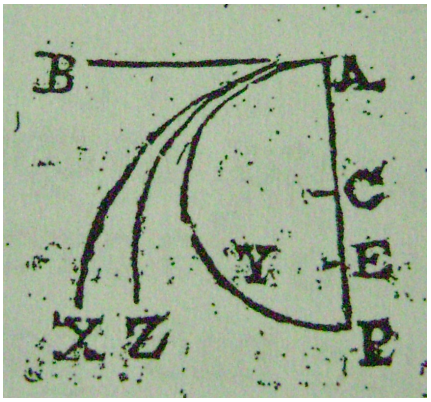


Figura 3.17: Ilustração da segunda parte da demonstração do teorema XVI, do capítulo VI, do livro I.

Mais uma vez é possível encontrar gralhas de numeração das proposições na demonstração, sendo referidos no original os resultados 33 e 105, em lugar dos resultados 52 e 103, respetivamente.

Azevedo Fortes apresenta em seguida um corolário relativo à divisão do espaço compreendido entre a reta tangente ao círculo e a circunferência.

> ***Corolário***
>
> ***107*** *Segue-se evidentemente, que o espaço compreendido entre a tangente, e a circunferência de um círculo, se pode dividir em um número indefinito de partes.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 50)

Esta divisão, que apenas é possível efetuar com arcos de circunferência, é de especial importância se tivermos em conta que se encontra diretamente relacionada com os argumentos por vezes utilizados para justificar que o ângulo de contingência é de facto um ângulo que pode ser dividido e comparado.

Azevedo Fortes apresenta em seguida um resultado que difere do resultado correspondente em Lamy (tabela 3.3).

Fortes, 1744, Parte II, p. 50	Lamy, 1710, p. 53
Teorema XVII **108.** De um ponto fora de um círculo, se lhe não pode lançar mais que uma só tangente.	**Teorema XVII** De um ponto fora de um círculo não se pode traçar ao círculo, de um mesmo lado, mais do que uma tangente.

Tabela 3.3: Teorema XVII na *Lógica Geométrica* de Azevedo Fortes e nos *Les élémens de géometrie* de Lamy.

É de notar que o resultado apresentado por Azevedo Fortes não é de todo verdadeiro uma vez que, como já vimos, dado um ponto fora do círculo é possível lançar duas retas tangentes distintas[96]. Este erro resulta de Azevedo Fortes não considerar no enunciado, como faz Lamy, apenas um dos lados do círculo. Vejamos a demonstração deste resultado em Azevedo Fortes:

> A razão é, porque qualquer outra linha cortará o círculo ou não chegará a ele: seja A, um ponto dado fora do círculo, que a linha AB toca no ponto B [Fig. 3.18]: digo, que de A para B senão pode lançar outra tangente; porque, em primeiro lugar, se é fora de AB não tocará o círculo: em segundo lugar, se ela passa por B, não será outra linha, mas a mesma tangente AB: em terceiro lugar, se ela passa para dentro do círculo, como pelo ponto D, pois que CB é maior que CD, o ponto D ficará dentro do círculo (num. 36[97]) logo etc. ■

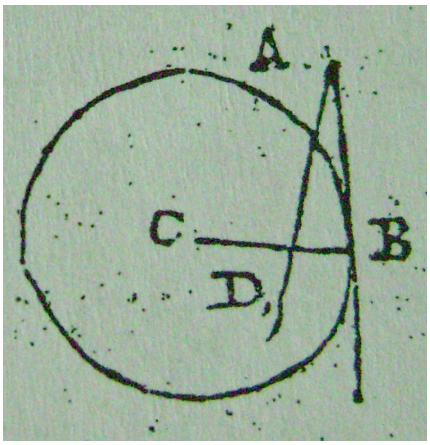


Figura 3.18: Ilustração da demonstração do teorema XVII, do capítulo VI, do livro I.

Notemos que a demonstração apresentada se encontra correta para o enunciado de Lamy, uma vez que ao considerar apenas um dos lados do círculo podemos garantir que $CB > CD$, facto que justifica a unicidade da reta tangente. Uma vez que Azevedo Fortes não refere que apenas considerará um dos lados do círculo não é possível na demonstração garantir que $CB > CD$.

No estudo que se segue a este teorema apenas é considerado um dos lados do círculo, pelo que a utilização deste resultado por Azevedo Fortes não compromete a validade dos resultados posteriores.

Seguidamente, são apresentados os problemas relativos à construção da reta tangente ao círculo por um ponto dado.

[96] Veja-se a este propósito a página 21.

[97] ***36.*** *Todas as linhas lançadas dos centro do círculo à circunferência, sendo todos os raios iguais, as que forem mais pequenas que o raio, se terminarão dentro no círculo, se forem mais compridas, se terminarão fora do círculo, e sendo iguais se terminarão na circunferência.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 19)

Problema II

109 *Lançar uma linha reta, que toque um círculo em um ponto dado.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 51)

Embora não o refira no enunciado, esta proposição reporta-se ao caso em que o ponto se encontra na circunferência do círculo, sendo um acrescendo de Lamy aos *Elementos* de Euclides que Azevedo Fortes mantém. A resolução deste problema na *Lógica Geométrica* é a seguinte:

> O centro do círculo é K, o ponto dado B [Fig. 3.19]: sobre o seu extremo se levante a perpendicular BD (num. 46[98]) e será BD a tangente (num. 103[99]) que se queria fazer. ■

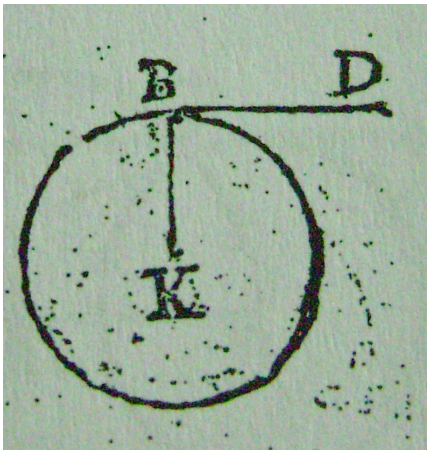


Figura 3.19: Ilustração do Problema II, do capítulo VI, do livro I.

Notemos que, à semelhança de Euclides, Azevedo Fortes e Lamy apresentam na resolução dos seus problemas duas partes distintas: a resolução propriamente dita e a justificação de que a resolução apresentada permite obter o resultado pretendido.

Analisado a posição mais simples é abordado, no problema seguinte, o caso em que o ponto se encontra no exterior do círculo apresentado por Euclides nos seus *Elementos*.

[98] ***46.*** *Sobre um ponto dado e uma linha, levantar uma perpendicular.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 22)
[99] Tal como nas demonstrações anteriores, no original de Azevedo Fortes é indicado, erradamente, o resultado número 100 como aquele que justifica a construção.

Problema III

110 *De um ponto dado fora do círculo tirar uma tangente. Euclid. liv. 3. Prop. 17.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 51)

Embora o enunciado corresponda à Proposição III, 17 dos *Elementos*, Azevedo Fortes apresentará, à semelhança de Lamy, um método de construção e respetiva demonstração diferente da que podemos encontrar em Euclides.

> Seja o círculo BEB [Fig. 3.20], e o ponto dado C, do qual se lance uma linha ao centro A, e no ponto B, onde esta linha corta o círculo, pela antecedente, se lance a tangente GD. Pelo ponto C se descreva um círculo concêntrico, e do ponto D, onde a tangente corta o círculo CGD, se tome $DF = DC$, e se lance a linha CF, que será a tangente, que se queria lançar.

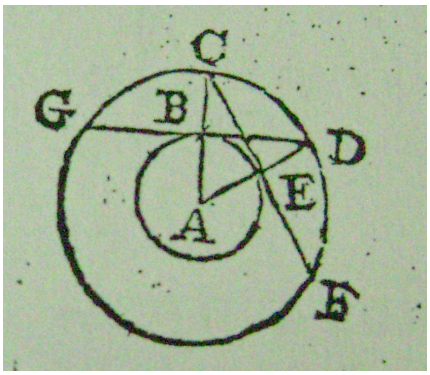


Figura 3.20: Ilustração do Problema III, do capítulo VI, do livro I.

Este método de construção apenas difere do proposto por Euclides no último passo onde, em vez de determinar o ponto de tangência E, Azevedo Fortes determina um outro ponto pertencente à tangente. A apresentação deste método alternativo prender-se-á com a necessidade de evitar a utilização dos resultados sobre ângulos e triângulos que se encontram nos *Elementos* e que Azevedo Fortes ainda não abordou na *Lógica Geométrica*.

> Pela construção, a corda $GD = CF$ [Fig. 3.20]; porque o arco GC é igual a CD (n. 31[100]) e o arco CD ao arco DF; e sendo iguais estes arcos,o serão também as suas cordas (num. 31). Lance-se de D ao centro A, a linha AD, que será perpendicular sobre CF, pois que os dois pontos A, e D, são igualmente distantes dos seus extremos;

[100] ***31.*** *Dentro de um mesmo círculo, ou dentro de círculos iguais, são iguais os arcos de cordas iguais, e vice versa.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 17)

> e pois que as cordas DG e CF são iguais (num. 93[101]) logo o ponto E, e o ponto B estão na circunferência do círculo BEB, e assim a linha CF perpendicular sobre o ponto E, extremo da linha AE (num. 103[102]). ■

Embora o método de construção da reta tangente ao círculo apresentado neste problema seja simples, era do conhecimento geral a existência de um método alternativo, ainda "mais fácil", que é apresentado por Azevedo Fortes, à semelhança do que faz Lamy.

> **Por outro modo mais fácil**
>
> Seja A o ponto dado, do qual se quer lançar uma tangente ao círculo X [Fig. 3.21]: do ponto A ao centro B se lance a linha AB, e sobre ela se descreva o semicírculo ACB, que tocará o círculo no ponto C: digo que AC é a tangente buscada; em outro lugar se dará a demonstração. ■

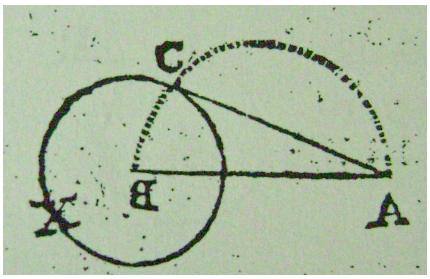


Figura 3.21: Ilustração da resolução alternativa do Problema III, do capítulo VI, do livro I.

A demonstração de que a reta AC é a tangente procurado depende do resultado que prova que o ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, e que Azevedo Fortes apresenta apenas no Corolário V, do Teorema II do segundo capítulo do Livro II[103]. A ausência da demonstração neste ponto pensamos dever-se ao facto de exigir resultados sobre ângulos, conceito que ainda não foi apresentado por Azevedo Fortes no livro I, como já vimos.

Com estes problemas Azevedo Fortes termina, no Livro I, o estudo das propriedades do conceito de reta tangente ao círculo, voltando a estudar este assunto no Livro II, onde relaciona o conceito de reta tangente ao círculo com o conceito de ângulo, começando por apresentar a parte mais controversa da Proposição III, 16 dos *Elementos*.

[101] ***93.*** *As cordas igualmente distantes do centro são entre si iguais, e sendo iguais são igualmente distantes do centro.* (Fortes, 1744, parte II, p. 43)

[102] A numeração original contém, novamente, uma gralha, sendo referido o número 100 em lugar da proposição 103 que é a que justifica a tangência da reta CF, perpendicular ao raio AE pelo seu extremo.

[103] ***42*** *O ângulo na circunferência, dentro do semicírculo, que tem por base o diâmetro, é reto. Euclid. liv. 3. prop. 31* (Fortes, 1744, Parte II, p. 72)

Teorema X

31 *O ângulo misto, formado entre o círculo, e a sua tangente, é menor que qualquer outro ângulo retilíneo. Euclid. liv. 3. prop. 16* (Fortes, 1744, Parte II, p. 67)

A demonstração apresentada por Lamy e replicada por Azevedo Fortes é a que se encontra em Euclides[104] mas, conscientes de toda a polémica em torno deste assunto, os autores acrescentam uma advertência, embora o seu conteúdo nas edições portuguesa e francesa sejam ligeiramente diferentes como se pode constatar na tabela 3.4.

Fortes, 1744, Parte II, pp. 67-68	Lamy, 1710, p. 71
Este ângulo da contingência tem causado grandes disputas entre os Matemáticos, a que deu ocasião a definição menos exata, que Euclides deu ao ângulo, fazendo-o consistir na inclinação dos lados, que o compõem; porque se só na inclinação consistisse a essência dos ângulos, não seria o ângulo reto, ângulo, que é formado de duas perpendiculares: de que se segue ser o ângulo essencialmente, o espaço compreendido entre as linhas que o formam, e para mostrar a inclinação, produzidas se cortam, como em seu lugar fica dito.	*Tem havido uma grande disputa, se o ângulo é uma quantidade que se pode dividir, & o que o fez duvidar é a má definição dada por Euclides. A definição que demos:* a abertura de duas linhas que se encontram indiretamente, *refere-se a um espaço, & por consequência é uma grandeza divisível.*

Tabela 3.4: Teorema XVII na *Lógica Geométrica* de Azevedo Fortes e nos *Les élémens de géometrie* de Lamy.

Nesta advertência os autores criticam a definição de ângulo de Euclides, definição essa que na sua opinião estaria na origem de todas as questões em torno da polémica do ângulo de contingência e embora na *Lógica Geométrica* não volte a analisar esta questão, Azevedo Fortes tecerá várias considerações sobre a temática do ângulo de contingência no final da *Lógica Analítica*[105].

O último resultado apresentado por Azevedo Fortes relativo ao conceito de reta tangente ao círculo é o apresentado na Proposição III, 32 dos *Elementos*:

Teorema I

36 *O ângulo do segmento tem por medida metade do arco, que ele compreende entre a sua corda Euclid. liv. 3. Prop. 32* (Fortes, 1744, Parte II, p. 69)

[104] Veja-se a referida demonstração na página 19.

[105] Uma análise detalhada desta abordagem encontra-se no capítulo 3.6.

Uma comparação mais desatenta entre este enunciado e o enunciado da Proposição III, 32 de Euclides pode levar a crer que se tratam de resultados distintos quando, efetivamente estão enunciados nas duas proposições dois resultados equivalentes: enquanto em Euclides o ângulo entre a tangente e a corda é comparado com o ângulo inscrito na circunferência, em Azevedo Fortes este ângulo é comparado com o arco subtendido pela corda, através do ângulo ao centro correspondente. Vejamos a demonstração apresentada por Azevedo Fortes.

Seja o ângulo CB formado pela tangente CB, e pela corda BE [Fig. 3.22]:

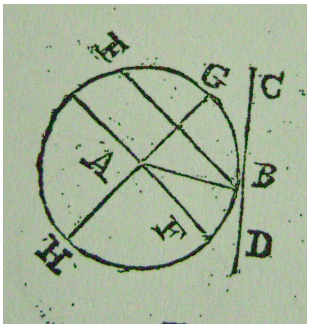


Figura 3.22: Ilustração do Teorema I, do capítulo II, do livro II.

Devemos mostrar, que este ângulo tem por medida metade do arco B: lance-se o diâmetro GH cortando o arco, e a corda EB em duas partes iguais, e lance-se mais o diâmetro AF paralelo à corda EB; e o raio AB, passando pelo ponto do contacto, formará o ângulo ao centro GAB, que tem por media o arco GB: isto suposto, só falta provar, que o ângulo CBE lhe é igual, o que é evidente, porque o ângulo CBA é reto, como também o ângulo GAF (liv. I. num. 90[106]) mas o ângulo EBA é igual ao ângulo BAF, pois que são alternos (num. 24[107]) logo tirando esses dois ângulos, a saber, FAB de GAF, e ABE do ângulo reto ABC, os restos BAG, CBE serão iguais, mas BAG tem por medida o arco BG: logo CBE, que lhe é igual, deve ter por medida um arco igual a BG, metade de BGE, e é o que se queria mostrar.

Da mesma sorte poderemos mostrar, que o ângulo da outra parte DBE tem por sua medida o arco BH, metade do arco BHE, compreendido entre a tangente BD, e a corda BE, juntando os ângulos retos DBA, FAH os ângulos alternos iguais EBA, BAF, em lugar, que na precedente demonstração se diminuirão. ■

[106] ***90.*** *Se uma linha cortar a corda de um arco de círculo em duas partes iguais, e passar pelo centro, ela cortará a corda perpendicularmente.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 42)

[107] ***24.*** *Se uma linha cortar obliquamente duas paralelas formará 8 ângulos, dos quais, quatro se chama alternos interiores, e outros quatro exteriores; e uns, e outros são iguais.* (Fortes, 1744, p. 63)

A equivalência entre o enunciado de Azevedo Fortes e de Euclides demonstra-se com recurso ao resultado seguinte:

> ***Teorema II***
>
> ***37*** *O ângulo na circunferência tem por medida metade do arco, sobre que se apoia ou se subtende.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 70)

Do estudo efetuado por Azevedo Fortes ao conceito de reta tangente ao círculo na *Lógica Geométrica* ressalta a originalidade da demonstração dos resultados apresentados, resultante, em particular, da ordem pela qual são apresentados os resultados. Estudando inicialmente apenas linhas, sendo introduzido posteriormente o conceito de ângulo e de superfície, permite que o conceito de reta tangente ao círculo seja relacionado apenas com outras linhas, não dependendo tão intrinsecamente de um conceito tão complexo como o conceito de ângulo. Esta abordagem ilustra, de forma muito clara, que é possível tratar o mesmo conceito de diferentes formas. É também de notar que estas diferentes abordagens podem ser utilizadas para públicos diferentes.

3.6 Manuel de Azevedo Fortes e as razões de Galileu sobre o ângulo de contingência

Azevedo Fortes apresenta, na sua *Geometria Especulativa*, uma posição clara relativamente à questão do ângulo de contingência ao não o considerar um ângulo, posição que apresenta logo na definição de reta tangente ao círculo[108]. Contudo, esta questão é também analisada logo no livro I da *Geometria Especulativa* aquando do estudo do conceito de ângulo.

> ***8.ª*** *O ângulo plano é um espaço indifinito formado por duas linhas retas inclinadas uma à outra, as quais se encontram de sorte que não formem ambas uma só linha, como ABC [Fig. 3.23].* (Fortes, 1724, fls. 2v-3)

Apresentado o conceito de ângulo, que remete para ângulos retílineos, Azevedo Fortes apresenta o conceito de ângulo misto, seguindo Ozanam, nos seguintes termos:

> *O ângulo mistilíneo se diz aquele que é compreendido por uma linha curva e outra reta: como ABC [Fig. 3.24]. Se do ponto B se laçasse a reta BD que tocasse a curva AB no ponto B; e deste ponto B se descrevesse, à vontade, uma circunferência do círculo, a porção, ou arco do círculo EF, seria a medida do ângulo misto ABC.*

[108] Veja-se a este propósito a página 67.

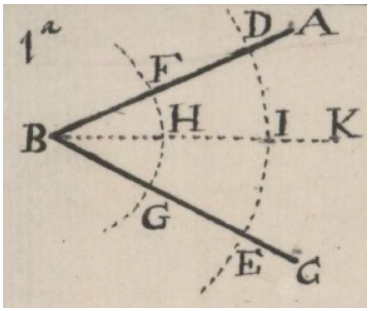


Figura 3.23: Ilustração da definição de ângulo na *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes.

> *Daqui se segue evidentemente que quando duas linhas se tocam elas não fazem ângulo algum, senão são inclinadas uma à outra: como uma linha reta que toca a circunferência de um círculo, sem o cortar, e assim impropriamente chamam ângulo ao ângulo de contacto, ou da contingência, como adiante veremos.* (Fortes, 1724, fl.4).

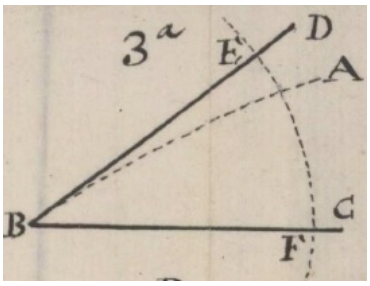


Figura 3.24: Ilustração do conceito de ângulo misto na *Geometria Especulativa* de Azevedo Fortes.

Notemos que Azevedo Fortes para trabalhar com ângulos mistos os transforma em ângulos retilíneos, passando apenas a comparar ângulos do mesmo tipo tal como fazemos hoje em dia, quase 300 anos volvidos desde a escrita destas obras que, neste caso particular, parecem nem ter merecido ficar imprimidas. Com esta transformação, como o próprio autor nota, o ângulo de contingência deixa de existir uma vez que as retas que o determinariam formam uma só reta, contrariando assim a definição de ângulo apresentada.

Já na sua *Lógica Geométrica* esta posição não é tão evidente, chegando mesmo o autor a apresentar a comparação entre este ângulo e um ângulo retilíneo agudo que é possível encontrar na Proposição III, 16 dos *Elementos*[109].

No estudo que faz a propósito do ângulo de contingência na *Geometria Especulativa* e na *Lógica Analítica*, Azevedo Fortes apresenta a posição defendida por Galileu um século antes, numa carta que o matemático italiano enviou a Giovani Camillo Gloriosi em 30 de outubro de 1635. A escolha de Galileu como fonte para este estudo parece-nos ir de encontro ao tipo de obra

[109] Veja-se a este propósito a página 91.

que é a *Geometria Especulativa*, à filosofia de Azevedo Fortes relativamente à matemática, assim como aos presumíveis destinatários destes ensinamentos, que seriam os engenheiros portugueses. Julgamos que a utilização de argumentos de Galileu, notabilizado entre outros aspetos pela importância que atribui às aplicações da matemática, enquadrar-se-ia na forma de pensar, de fazer e de ensinar matemática de Azevedo Fortes.

Estes argumentos surgem, na *Geometria Especulativa*, num apêndice ao livro III dedicado exclusivamente a este assunto, onde Azevedo Fortes apresenta a tradução de parte da carte de Galileu sobre esta temática, carta publicada por Viviani no seu *Quinto libro degli Elementi d'Euclide: ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov'ordine distesa*, publicado em 1674. Nessa carta Galileu apresenta três razões para a nulidade do ângulo de contingência que, nas palavras de Azevedo Fortes "não é verdadeiramente ângulo, mas assim chamado impropriamente"(Fortes, 1724, fl. 97v). Analisemos as razões apresentadas por Galileu para a nulidade do ângulo de contingência reproduzidas por Azevedo Fortes neste apêndice.

> ***1ª razão:*** *Se figurarmos um polígono equilátero e a um de seus lados aplicarmos qualquer linha reta, como AB [Fig. 3.25]. É evidente que aplicada ao lado CD não fará com ele ângulo algum, pois correm ambas em linhas pela mesma direção: pois formará ângulo com o lado seguinte, DE, porque o toca e se inclina, mas o Círculo é considerado um polígono de infinitos lados: Logo é necessário que no seu perímetro esteja todas as direções possíveis, a saber indfinitas, e assim terá o círculo a direção de qualquer linha reta, e esta não ode ser outra que a direção de um dos indfinitos lados do Círculo: Logo aplicada a linha a um destes lados, não forma com ele ângulo, mas o ponto dos indfinitos lados do Círculo: Logo com ele não faz ângulo a Tangente.* (Fortes, 1724, fl. 97v)

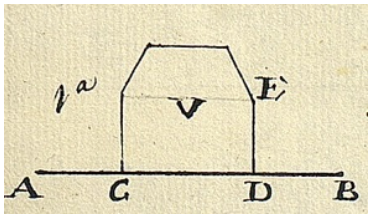


Figura 3.25: Ilustração da 1.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*.

O argumento desta razão prende-se com a consideração, já clássica, da circunferência como um polígono de infinitos lados, método que permite a obtenção de diversos resultados sobre o

círculo e que é aqui utilizado para mostrar que o ângulo de contingência não existe. Contudo, poder-se-ia pensar que, tal como a reta tangente a um dos lados do polígono faz ângulo com o lado seguinte, existisse inclinação entre a reta tangente e o círculo considerando não o ponto de tangência mas o ponto seguinte. Este aspeto é também previsto por Galileu e traduzido por Azevedo Fortes.

> *E não se diga que se a linha aplicada aquele ponto não faz com ele ângulo o fará com o ponto seguinte, assim como a linha AB com o lado DE [Fig. 3.25]; porque o ponto seguinte ao de contacto não toca a linha tangente, para poder constituir ângulo com ela, e além da inclinação das linhas se requer o tocamento: Logo entre o perímetro e a Tangente não há ângulo nem grandeza alguma.* (Fortes, 1724, fl. 97v)

Notemos o cuidado dos autores em garantir as duas condições necessárias para a existência de ângulo: a existência de inclinação e o facto de os lados do ângulo terem de se tocar. Ao conseguir provar que não é possível obter as duas condições simultaneamente quando se considera a circunferência como um polígono de infinitos lados os autores consideram demonstrada a não existência de ângulo, ou de qualquer grandeza, entre a reta tangente e o círculo.

Contudo, e porque o conceito de infinito levanta ainda hoje dificuldades aprendizes do conceito já então se assinala uma segunda razão:

> ***2ª razão:*** *Suponhamos firme a linha DE [Fig. 3.26] e que a linha AB a corta e gira à roda do ponto C, e que do lugar A vai passando para D, e passa da outra arte em CF, fazendo o ângulo FCE superior a linha DE, onde tinha o ângulo inferior ECB. É evidente que o ângulo BCE nesta conversão foi-se fazendo mais e mais agudo, diminuindo sempre a sua quantidade até se desvanecer de todo, o que havia de suceder justamente quando a reta AB veio a ter a mesma direção que a reta DE, fazendo ambas uma mesma linha.*

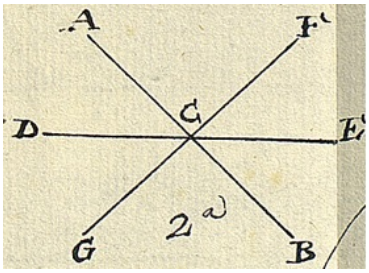


Figura 3.26: Ilustração da primeira parte da 2.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*.

Aplicando Galileu o mesmo discurso ao arco ABC [Fig. 3.27] cortada da linha ON no ponto C, e constituindo os supostos ângulos mistos ACO, NCB: Se considerarmos essa reta ON mover-se à roda do ponto C, de O para D, diminuindo sempre os ditos ângulos, e finalmente passando da outra parte a situar-se em GCF, de sorte que o ângulo inferior NCB, se faça superior como FCB, não sei como possa ser, sem ter passado daquela aniquilação desses ângulos: mas essa aniquilação de quantidade de ângulo só pode suceder quando esta reta não corta a curva ACB, e é justamente quando se une e ajusta em uma mesma linha com a Tangente DE: Logo no arco e na Tangente não há ângulo algum, antes o que há é aniquilação ou nulidade de ângulo. (Fortes, 1724, fls. 97v-98)

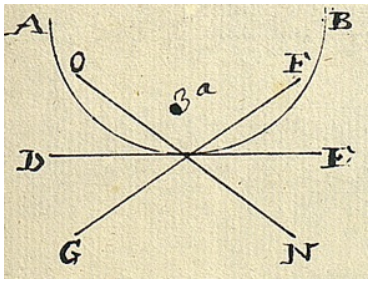


Figura 3.27: Ilustração da segunda parte da 2.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*.

O argumento aqui apresentado prende-se com o facto de, em grandezas contínuas, não ser possível passar de um dado valor dessa grandeza para outro sem passar pelo valor intermédio, pelo que os ângulos são aqui considerados, implicitamente, grandezas contínuas.

Azevedo Fortes apresenta ainda a 3.ª razão defendida por Galileu e que considerará novamente a circunferência como um polígono de infinitos lados. Azevedo Fortes, antes de enunciar os argumentos de Galileu, apresenta ao leitor uma justificação para a necessidade de se apresentar uma outra razão para a nulidade do ângulo de contingência:

Os que pretendem provar que o ângulo de contingência tem quantidade, e é indivisível se fundam em ser divisível o espaço entre a circunferência e circunferência de círculos desiguais maiores e maiores, que se tocam em um mesmo ponto e assim procede Galileu para mostrar o defeito do argumento. (Fortes, 1724, fls. 98-98v)

De facto, a possibilidade de interpor circunferências no espaço entre o círculo dado e a sua reta tangente está na origem de muitos dos argumentos a favor da consideração do ângulo de contingência como um verdadeiro ângulo, dada a possibilidade de dividir o espaço entre os seus lados. Vejamos os argumentos de Azevedo Fortes/Galileu para a nulidade deste argumento.

Este ângulo se eu não me engano /diz ele/ é defeituoso pois ângulo não é o que se divide, pois não tem quantidade, mas sim o espaço entre a Circunferência do menor círculo e a reta tangente, e subdividindo de maior e maior circunferência, o que claramente se pode demonstrar. Com o exemplo de muitos polígonos retilíneos semelhantes e desiguais na forma seguinte.

Sejam na reta MB [Fig. 3.28] perpendicular à linha AE, 2 centros M, N, de 2 círculos desiguais, que tocam ambos a tangente AE no ponto B. Suponhamos no menor círculo descrito um polígono equilátero cujos lados são as retas BI, IO, OS: e produzindo o lado BI se determina na circunferência do círculo maior o ponto C. É evidente que a linha BC é um lado de um polígono semelhante inscrito no círculo maior no qual os lados que se seguem são CD, DF.

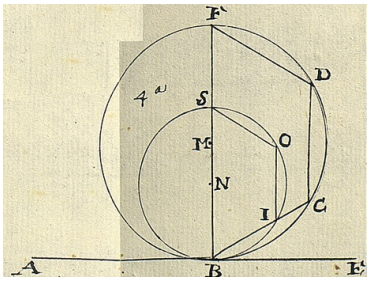


Figura 3.28: Ilustração da 3.ª razão para a nulidade do ângulo de contingência apresentada por Azevedo Fortes no apêndice ao livro III da *Geometria Especulativa*.

Aqui se vê manifestamente, que o perímetro $FDCB$ sem dividir o espaço entre o perímetro $F[S]OIB$ e a reta BE, Tangente, mas não divide o ângulo IBE pois que o lado IB é parte do lado BC, e o ângulo IBE comum.

Discorrendo do mesmo modo de todos os outros Polígonos semelhantes de qualquer o número de lados e de qualquer diferença de ângulos sempre o ângulo IBE será comum e como os círculos são considerados todos como polígonos semelhantes de um número indfinito de lados, não se pode dizer que o maior seja um polígono de maior número de lados que o menor; porque não se pode considerar círculos, ainda que imensos, ainda que imenso ou inumerável, que se não possa inscrever outro, ainda mínimo, semelhante de igual número de lados; e não se pode dizer que o ângulo de contacto não seja o mesmo, e comum a ambos os círculos: Logo se não é divisível não tem grandeza, e se não tem grandeza não é verdadeiramente ângulo, mas assim chamado equivocadamente. (Fortes, 1724, fls. 98v-99)

Notemos que com este argumento os autores consideram que o ângulo misto não é o espaço definido entre os seus lados, indo de encontro à definição de ângulo misto apresentado por Azevedo Fortes nesta sua *Geometria Especulativa*.

Em suma, as razões apresentadas parecem pretender rebater alguns dos argumentos mais utilizados para justificar que o ângulo de contingência é efetivamente um ângulo: as duas primeiras razões pretendem mostrar que o ângulo de contingência não é uma quantidade, sendo apenas a aniquilação de quantidade, enquanto a última razão, como o próprio Azevedo Fortes refere, pretende refutar o argumento que permite considerar o ângulo de contingência como uma grandeza através da possibilidade de construir círculos de diferentes raios com a mesma tangente e que, aparentemente, dividem o espaço do ângulo de contingência.

Embora na introdução deste apêndice Azevedo Fortes tenha apenas referido que iria apresentar as razões de Galileu, o matemático português apresenta também as razões de Vincenzo Viviani para a nulidade do ângulo de contingência. Estas razões são apresentadas pelo matemático italiano no seu *Quinto libro degli Elementi d'Euclide: ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov'ordine distesa* como complemento à carta de Galileu onde se encontram as razões apresentadas anteriormente. As razões de Viviani são de ordem mais filosófica e resultantes de uma reflexão mais teórica, apresentando Azevedo Fortes, neste apêndice, um resumo dos argumentos de Viviani:

> *Se entre as condições do ângulo plano Euclides, é uma delas que as linhas que o formam não sejam postas em direito, também se manifesta que Euclides não entenda o chamar ângulo ao encontro de uma linha curva com uma reta, como o da circunferência do círculo com a reta tangente, pois é impossível dispor ou ajustar uma linha de sorte que se ponha em direitura com uma linha reta, ainda mais impossível com 2 curvas, e assim parece só entender falar das linhas retas, e dos ângulos por elas formados: isto se confirma mais observando que o mesmo Euclides em todos os seus Elementos, ou outra qualquer obra, não propõe demonstrar ou resolver Teorema algum sobre os ângulos chamados curvilíneos, nem os compara entre eles como faz nos retilíneos.* (Fortes, 1724, fls. 99-99v)

Notemos que os autores, ao apresentarem este ponto de vista, defendem que a definição de ângulo plano apresentada por Euclides é apenas válida para ângulos retilíneos. Para justificar a inclusão da comparação entre o ângulo de contingência e ângulos retilíneos constante no enunciado na Proposição III, 16 de diversas edições dos *Elementos*, Azevedo Fortes apresenta parte da reflexão de Viviani, onde o matemático italiano questiona a autoria deste enunciado:

> *E na proposição 16 do livro 3 se acha essa comparação com os ângulos agudos retilíneos, e na 32 com os ângulos retos, não estou longe de crer o mesmo que com Pelletario suspeito o sublime Engenho Francês Francisco Vieta, a saber, que aquelas proposições foram acrescentadas por algum engenho dos antigos, e tiradas com o Corolário, e que por causa deste acrescentamento alterassem a definição proposta por Euclides no 1.º Livro, a qual sendo esta:*
>
> *Ângulo é aquela recíproca inclinação de 2 linhas retas, que tocando-se sobre um plano, não são postas por direito.*
>
> *E a deformassem tirando-lhe aquela palavra retas para a fazerem mais vulgar.* (Fortes, 1724, fl. 99v)

Um aspeto particular, analisado por Viviani e reproduzido por Azevedo Fortes nesta discussão prende-se com a importância do ângulo de contingência:

> *E que aquelas proposições do 3.º livro sejam improprias e não verdadeiras e se seguiria somente que o número das verdadeiras propriedades geométricas, que é sem dúvida, indfinito, terá menos duas outras verdadeiras e ficará sempre indfinito.*
>
> *Acresce mais que quando das linhas de Euclides se tirarem aquelas proposições tudo mais ficaria em sua força e vigor como de antes têm fim no seu mesmo princípio, e delas não dependem as mais demonstradas em todos os 15 livros de Euclides, ou outros tratados seus.* (Fortes, 1724, fl. 100)

Este comentário parece relegar para segundo plano a importância da polémica em torno do ângulo de contingência relativamente a questões mais profundas como a definição de ângulo e o entendimento do que é um ângulo.

Azevedo Fortes acrescenta ainda comentários originais, começando por questionar a validade da aplicação da definição de ângulo de Euclides ao ângulo de contingência.

> *Se considerei tudo sem disputa mais pergunto se é verdadeiramente ângulo a inclinação de uma linha curva sobre uma linha reta, qual e quanto é a parte da curva que determina a inclinação com a reta sendo circunferência de círculo.* (Fortes, 1724, fl. 100)

Na resposta a esta questão, Azevedo Fortes volta à terceira razão de Galileu, explorando os seus argumentos mas não acrescentando novos conteúdos, terminando este apêndice com

uma referência aos autores que deveriam ser lidos por aqueles que pretenderem aprofundar esta questão:

> *Isto basta para esta disputa de tão pouca utilidade, quem quiser ver o que afirmam ou negando escreveram vários Autores, leia Cardano, Peletier, Tacquet, Clavio e outros Célebres Matemáticos.* (Fortes, 1724, fl. 101)

Das razões apresentadas por Azevedo Fortes neste apêndice destacamos a importância da definição de ângulo e a sua opinião relativamente à utilidade do conceito, porventura condicionada com as polémicas registadas em torno do ângulo de contingência.

Azevedo Fortes volta a estes argumentos na sua *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, analisando esta temática na terceira questão do apêndice final:

> ***Questão III:*** *Se o ângulo de contingência é, ou não, quantidade?* (Fortes, 1744, Parte III, p. 201)

Para responder a esta questão, Azevedo Fortes escreve:

> *Esta definição [de Euclides] não explica bem a natureza do ângulo, considerado só pelas linhas, que o formam; porque estas não fazem o ângulo maior, ou menor, e como o ângulo é uma quantidade, e não pode ser linha, porque a linha não determina quantidade (...).* (Fortes, 1744, Parte III, p. 201)

Azevedo Fortes considera assim que a definição de Euclides coloca o ângulo na primeira dimensão do corpo, a das linhas, dimensão que na sua opinião não determina quantidade. Assim, e tendo em consideração que um ângulo é uma quantidade com a qual é possível operar, esta definição estaria errada. Azevedo Fortes justifica em seguida a definição de ângulo que apresenta na *Lógica Geométrica*[110]:

> *Esta definição é sem dúvida mais própria, que a de Euclides, e da maioria dos geómetras, porque explica claramente a natureza do ângulo plano retilíneo, que pertence à segunda dimensão do corpo.* (Fortes, 1744, Parte III, p. 202)

Depois Azevedo Fortes justifica, tendo por base que um ângulo é o espaço entre as linhas que o definem, porque razão o ângulo de contingência não é um ângulo:

[110] ***1.*** *O ângulo é o espaço, ou superfície compreendida entre duas linhas retas, que se tocam em um ponto, e produzidas se cortam.* (Fortes, 1744, Parte II, p. 53)

> *(...) entre a tangente de um círculo, e a linha da sua circunferência não há quantidade alguma, porque se houvesse, seria divisível; e para se dividir, de força se havia de dividir por uma linha, mas entre a circunferência do círculo, e a tangente não pode haver outra linha, que não seja a mesma tangente; logo o ângulo da contingência não é divisível.*(Fortes, 1744, Parte III, p. 202)

Azevedo Fortes utiliza assim as diferentes dimensões dos corpos para justificar a inexistência de quantidade no ângulo de contingência. Notemos que dado um corpo plano de segunda dimensão, ou seja uma superfície, ela é divisível por um corpo de primeira dimensão, uma linha, o que não acontece no ângulo de contingência que não pode ser dividido por uma linha reta. Contudo, um dos argumentos para considerar o ângulo de contingência um verdadeiro ângulo prende-se com a possibilidade de o dividir por linhas curvas, o que vai contra o pressuposto de Azevedo Fortes. Ciente desse facto, o matemático português recorre novamente a Galileu e às suas razões para justificar que esta interposição não acontece na superfície do ângulo de contingência uma vez que todas as linhas curvas consideradas fazem, com a reta tangente comum, o mesmo ângulo, apresentando Azevedo Fortes um resumo das segunda e terceira razões expostas por Galileu na sua carta.

O estudo desta questão termina com o regresso à análise da definição de ângulo. Azevedo Fortes, apresenta um novo argumento para validar a opção tomada em torno da definição de ângulo pela generalidade da sua definição, que ele considera aplicável a todo o tipo de ângulos, definição essa que, em conjunto com o conceito de tangente, permitirá comparar ângulos de diferentes tipos:

> *A definição que damos ao ângulo convém a toda a sorte de ângulos, assim mistilíneos, como curvilíneos; porque as quantidades destes ângulos, todas se determinam por tangentes; por exemplo, a quantidade de um ângulo mistilíneo se determina por uma tangente, lançada pelo ponto do curvo, e no ângulo curvilíneo por duas tangentes, lançadas do mesmo ponto, em que as duas curvas se tocam (...).* (Fortes, 1744, Parte III, p. 203)

Atentemos novamente na atualidade destas considerações, uma vez que ainda atualmente o ângulo entre duas curvas é o ângulo entre as suas tangentes tiradas no ponto de contacto. Com este entendimento do conceito de ângulo, que reduz todo o tipo de ângulos a ângulos retilíneos é fácil demonstrar a nulidade do ângulo de contingência, pois o ângulo de contingência seria formado pelo ângulo retilíneo em que os dois lados coincidiriam, logo não seria ângulo.

Azevedo Fortes termina este estudo considerando-o frívolo e referindo os principais autores que se debruçaram sobre esta questão, à semelhança do que faz na *Geometria Especulativa*.

Vemos assim que Azevedo Fortes é um defensor da nulidade do ângulo de contingência ao mesmo tempo que tenta apresentar aos seus leitores uma justificação para esta questão. Considerando que o problema advém da definição de ângulo proposta por Euclides, rejeita essa definição e adota uma nova.

3.7 Manuel de Campos & Azevedo Fortes

Azevedo Fortes estuda, como vimos, o conceito de reta tangente ao círculo em duas obras distintas. O facto de, na *Lógica Geométrica*, apresentar uma nova roupagem dos fundamentos da geometria, separando-os e estudando-os por ordem crescente de dimensão, faz com que o tratamento dado ao nosso conceito seja necessariamente distinto do que encontramos em Manuel de Campos[111].

Comparamos deste modo a abordagem de Azevedo Fortes na *Geometria Especulativa* com a de Manuel de Campos nos *Elementos de Geometria*, estudos realizados em contextos muito diferentes, embora estejamos, em ambos os casos, a tratar de traduções praticamente contemporâneas da mesma obra: os *Elementos* de Euclides.

Elementos	**Campos, 1735**	**Fortes, 1724**
Definição III, 2	Apresenta a ideia clássica "toca mas não corta".	Relaciona, à partida, o conceito de reta tangente com o conceito de ângulo.
Proposição III, 13	Enuncia a unicidade do ponto de tangência.	Não efetua qualquer referência ao conceito de reta tangente.
Proposição III, 16	Apenas enuncia a 1.ª parte da proposição de Euclides. Apresenta 11 corolários, dos quais seis são sobre a questão do ângulo de contingência. Acrescenta um escólio onde analisa em detalhe esta questão polémica, efetuando reflexões sobre os conceitos e as suas definições.	Apenas enuncia a 1.ª parte da proposição de Euclides. A demonstração incluiu uma preparação. Apresenta o uso desta proposição. No escólio rejeita a segunda parte do enunciado de Euclides, remetendo um estudo sobre este aspeto para um apêndice a este livro III.

[111] Uma comparação entre a abordagem dada ao nosso conceito na *Lógica Geométrica* e nos *Elementos* de Euclides encontra-se no estudo efetuado no capítulo 3.5.

Elementos	**Campos, 1735**	**Fortes, 1724**
Proposição III, 17	Introduz o significado do termo tangente, que passa a utilizar. No escólio apresenta um método mais simples de construir a reta tangente ao círculo, recorrendo à Proposição III, 31.	Introduz o uso da proposição.
Proposição III, 18	Demonstração por redução ao absurdo, utilizando resultados sobre triângulos.	Demonstração por redução ao absurdo recorrendo apenas à proposição III, 16. Apresenta no escólio uma demonstração alternativa e direta. Indica o uso desta proposição.
Proposição III, 19	Não se registam diferenças.	
Proposição III, 31	Não há qualquer referência ao conceito de reta tangente.	Indica, no uso desta proposição, um método mais simples para traçar a reta tangente ao círculo.
Proposição III, 32	Demonstração dividida em dois casos.	A demonstração apenas contempla o 2.º caso de Manuel de Campos. O 1.º caso da demonstração de Manuel de Campos é apresentado num escólio. Apresenta o uso desta proposição.

Tabela 3.5: Estudo comparativo entre Manuel de Campos e Azevedo Fortes

Capítulo 4

O conceito de reta tangente na Reforma Pombalina do Ensino Universitário

O ensino da matemática na Universidade de Coimbra encontra-se previsto, pelo menos, desde 1537, altura em que, depois de diversas deslocalizações entre Lisboa e Coimbra, a universidade se fixa definitivamente em Coimbra. Nessa altura, a disciplina de matemática tem como professor Pedro Nunes, que assume o cargo em 1544 (Queiró, 1993, pp. 4-7). Todavia, o ensino da matemática em Portugal, durante o século XVII e primeira metade do século XVIII, está maioritariamente entregue aos Jesuítas[112]. Após a expulsão dos Jesuítas, em 1759, é implementada uma reforma geral no ensino (Teixeira, 1934, pp. 223-232).

Ao nível universitário, é criada a Junta de Providência Literária, que conclui terem os Jesuítas efetuado estragos irreparáveis ao ensino. Assim, em 1772, são publicados os *Estatutos da Universidade*, que por ordem régia não podem ser revogados ou alterados, e que reformulam por completo o ensino ministrado na Universidade de Coimbra. A importância desta reforma é tal que é o próprio Marquês de Pombal a dar formalmente início à abertura do ano letivo de 1772 e à aplicação destes *Estatutos* (Freire, 1872, pp. 17-18).

Esta reforma faz com que da Universidade constem cinco Faculdades - Teologia, Cânones e Leis, Medicina, Matemática e Filosofia - das quais as de Matemática e Filosofia são criadas pelas primeira vez por estes *Estatutos*.

A criação da Faculdade de Matemática é justificada nos seguintes termos:

[112]Veja-se a este propósito o capítulo 2.1.

> *Tem as Matemáticas uma perfeição tão indisputável entre todos os conhecimentos naturais, assim na exatidão luminosa do seu método, como na sublime, e admirável especulação das suas Doutrinas, que Elas não somente em rigor, ou com propriedade merecem o nome de Ciências; mas também são as que tem acreditado singularmente a força, o engenho, e a sagacidade do Homem. Por isso é indispensavelmente necessário, ainda para segurança, e adiantamento das outras Faculdades, que estas Ciências tenham na Universidade um estabelecimento adequado ao lugar, que ocupam no Sistema Geral dos conhecimentos humanos: Sendo Manifesto, que se a mesma Universidade ficasse destituída das luzes Matemáticas, como infelizmente esteve nos dois séculos próximos precedentes, não seria mais do que um caos, semelhante ao Universo, se fosse privado dos resplandores do Sol.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, p. 141)

Os *Estatutos* da Faculdade de Matemática são redigidos por José Monteiro da Rocha, um dos matemáticos mais influentes da última metade do século XVIII português. Notemos que é escolhido para redigir este documento um ex-Jesuíta, familiarizado com o ensino ministrado pela Companhia, o que deve necessariamente ter influenciado a escrita destes *Estatutos*. Nas palavras de Gomes Teixeira:

> É uma Dissertação notável sobre o ensino das ciências, primorosa no fundo e na forma, é um monumento de sã pedagogia e elevada filosofia, escrita em linguagem vernácula e elegante, onde todas as disposições são nitidamente explicadas e justificadas, e onde se dão conselhos preciosos aos alunos e preceitos salutares aos mestres. (Teixeira, 1934, pp. 225-226)

4.1 O ensino da Matemática segundo os *Estatutos* de 1772

4.1.1 A importância da matemática e da sua história

A matemática é, neste documento, encarada como um exemplo

> *Porque elas [Ciências Exatas] não somente caminham por uma estrada de luzes, desde os primeiros Axiomas, até os Teoremas mais sublimes, e recônditos; mas também iluminam superiormente os entendimentos no estudo de quaisquer outras Disciplinas: Mostrando-lhe praticado o exemplo mais perfeito de tratar uma matéria com ordem, precisão, solidez, e encadeamento fechado, e unido de umas verdades com outras: Inspirando-lhe o gosto, e discernimento necessário para distinguir o Sólido,*

> *do Frívolo; o Real, do Aparente; a Demonstração, do Paralogismo: E participando-lhe uma exatidão, conforme ao Espírito Geométrico; qualidade rara, e preciosa, sem a qual não podem conservar-se, nem fazer progresso algum os conhecimentos naturais do Homem em qualquer objeto que seja.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 141-142)

Outro dos aspetos mais relevando para a aprendizagem da matemática é o das suas aplicações. A saber:

> *Por elas [Matemáticas] se regulam as Épocas, e Medidas dos tempos; as situações Geográficas dos Lugares; as demarcações e medições dos Terrenos; as manobras, e derrotas da Pilotagem; as operações táticas da Campanha, e da Marinha; as construções da Arquitetura Naval, Civil, e Militar; as Máquinas, Fábricas, Artifícios, e Aparelhos, que ajudam a fraqueza do homem a executar, o que de outra sorte seria impossível às suas forças.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 142-143)

O ensino da matemática na Universidade de Coimbra parece assumir deste modo não só uma ênfase teórica, mas também uma prática. De resto, a necessidade da vertente mais utilitária da matemática é realçada por D. Francisco de Lemos, na *Relação geral do Estado da Universidade de Coimbra desde o principio da nova reforma até o mez de Setembro de 1777*, quando, por exemplo, destaca a falta de formação matemática dos pilotos e a necessidade da existência de um local onde seja dada formação matemática aplicada à náutica (Lemos in Braga, 1894, p. 54).

Até à expulsão dos Jesuítas o ensino da náutica tinha lugar na "Aula da Esfera", e em 1761 fora criada uma "Aula de Náutica"(e uma de desenho) na cidade do Porto, gerida pela Junta Administrativa da Companhia Geral da Agricultura das Vinhas do Alto Douro; contudo, esta aula não é suficiente para satisfazer a necessidade de pilotos e marinheiros que existe em Portugal. A Faculdade de Matemática surge assim como o local natural para esse ensino, sendo desde logo destacadas as aplicações da matemática à pilotagem e à marinha nos seus*Estatutos*. Na prática, a Faculdade de Matemática parece nunca ter chegado a assumir esta formação que será, já no reinado de D. Maria I, preenchida com a criação da Academia Real de Marinha para onde se destinam vários dos professores graduados da Faculdade de Matemática.

A par da importância dada à matemática e às suas aplicações surge também uma ênfase na sua história:

> *[O mestre] recomendará porém muito aos seus discípulos, que à medida, que forem caminhando no Curso Matemático, se vão instruindo particularmente nela [História]:*

> *Mostrando-lhes, que a primeira coisa, que deve fazer quem se dedica a entender no progresso das Matemáticas, é instruir-se nos descobrimentos antecedentes; para não perder tempo em descobrir segunda vez as mesmas coisas; nem trabalhar em tarefas, e empresas já executadas.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, p. 170)

Para que esta instrução seja efetiva, os professores devem começar a lecionação das diferentes disciplinas pela apresentação de um resumo dos sucessos principais da história da matemática que

> *(...) será proporcionado à capacidade dos estudantes: De sorte, que os disponha, e anime para entrarem no estudo com gosto.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 169-170)

A história da matemática é também passível de ser utilizada como estratégia didática em contexto de sala de aula, destacando os *Estatutos* a importância dos conteúdos serem apresentados, na sala de aula, segundo os métodos pelos quais foram descobertos, ou seja, replicando a história dentro da sala de aula:

> *Cuidarão também muito os mesmos Lentes, em que os Discípulos se ponham no caminho dos Inventores: Apresentando-lhes para isso algumas matérias pelos passos, que se deram, ou podiam dar, até se chegar ao descobrimento das verdades, que nelas se contém: Mostrando-lhes os indícios por onde se suspeita, e conjetura primeiro o que se poderá achar; e os meios, e tentativas, que se aplicam para o descobrir: E dando-lhes uma ideia circunstanciada da evolução dos descobrimentos matemáticos, e de como por degraus se passou de uns para os outros: Porque este assunto merece particulares reflexões; em razão de servir de exemplo a quem pretende empregar-se utilmente nestas ciências.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 201-202)

Com estas indicações metodológicas e didáticas precisas, a história da matemática torna-se, desejavelmente, parte integrante do ensino da Matemática na Universidade de Coimbra, permitindo aos alunos uma visão humanista da matemática, conhecendo as figuras e os feitos principais que durante séculos contribuíram para o desenvolvimento da disciplina, tornando a Matemática mais acessível e humana, e fornecendo uma perspetiva interna da evolução dos conceitos e dos problemas.

4.1.2 Matemático: uma "carreira especial"

Nos *Estatutos* da Faculdade de Matemática é criada a profissão de "Matemático", sendo estabelecido que devem existir sempre matemáticos ao serviço da pátria, funcionando esta Faculdade com os mesmos direitos e as mesmas honras das Faculdades ditas Maiores (*Estatutos*, 1772, vol.3, pp. 145-146). Para estimular os estudos nesta área estão previstas vantagens para os detentores de estudos matemáticos.

Aos doutorados em matemática, além de outros privilégios, é dada preferência na candidatura a qualquer emprego, caso as restantes condições sejam iguais. Contudo, o objetivo da criação da Faculdade de Matemática não é apenas a preparação de doutores para a lecionação na Universidade, mas também dotar a sociedade de homens com conhecimentos matemáticos profundos que pudessem servir noutras profissões. São também dadas vantagens aos estudantes que não obtenham o grau de doutor no acesso a carreiras náuticas, militares e de engenharia (*Estatutos*, 1772, vol.3, pp. 148-150). Todas estas vantagens são complementadas com a atribuição de prémios, designados de "Partidos", aos alunos que se distingam obtendo classificações excecionais(*Estatutos*, 1772, vol.3, pp. 216-218). Pretende-se assim tornar apelativo o curso de matemática, o que não acontece nos primeiros anos do curso, havendo em 1777 apenas 5 alunos formados em matemática (Lemos in Braga, 1894, pp.48-49), sendo reafirmada a necessidade de garantir que determinados empregos sejam atribuídos apenas a detentores de formação matemática, entre eles os cargos de Cosmógrafo-mor e Engenheiro-mor.

4.1.3 As disciplinas matemáticas do Curso de Matemática

A formação matemática dos estudantes ordinários[113] do Curso de Matemática é composta por quatro disciplinas - Geometria, Álgebra, Foronomia e Astronomia (*Estatutos*, 1772, vol.3, pp. 166-167)[114] - e os conteúdos programáticos encontram-se descritos, de forma detalhada e precisa.

4.1.3.1 Geometria

A disciplina de Geometria, dado ser a do primeiro ano, é a introdução dos estudantes ao Curso de matemática, pelo que o professor desta disciplina deve, ainda antes de iniciar o estudo dos conteúdos de geometria, efetuar uma breve introdução ao estudo das ciências matemáticas,

[113]Nas aulas de Matemática há três tipos de estudantes: os Ordinários, que são os alunos matriculados no Curso de Matemática; os Obrigados, sendo os alunos das outras faculdades que tinham de frequentar como parte integrante dos seus cursos alguma das disciplinas da Faculdade de Matemática; os Voluntários, todas as pessoas que queiram buscar instrução, mesmo não estando matriculadas na Universidade (*Estatutos*, 1772, vol.3, pp. 151-152).

[114]Segundo Figueiredo (2011, pp. 66-68) a estrutura das disciplinas do curso de matemática segue a divisão da matemática enquanto ciência proposta por D'Alembert.

abordando o objeto de estudo da matemática, a divisão e prospeto geral da matemática, o método usado, a utilidade e a excelência dele bem como um resumo histórico das épocas mais notáveis desta ciência (*Estatutos*, 1772, vol.3, p. 169).

Estas temáticas encontram-se explicitadas no início do capítulo II, do título II da Parte II a identificação do objeto de estudo da matemática:

> *Tendo a Matemática por objeto as relações, e propriedades da Quantidade, ou Grandeza, tanto em geral, como em particular: (...) É manifesto, que não tem esta vasta Ciência outros limites, que não sejam; na especulação, os do entendimento humano; e na aplicação, os do Universo.* (*Estatutos*, 1772, vol.3, p. 162)

A divisão da matemática em áreas do saber também cabe ao lente de Geometria explicita-la da seguinte forma:

> *Para se tratar porém com a ordem, e distinção necessárias, divide-se [a matemática] em uma grande multidão de Disciplinas, conforme as divisões, e subdivisões do seu objeto. (...)*
>
> *A primeira Ciência na Matemática (...) é a Álgebra: A qual trata das propriedades, e relações da Grandeza em geral; e contém os Princípios fundamentais da Análise, que é a chave de todos os descobrimentos Matemáticos, que se podem fazer sobre a Quantidade; (...)*
>
> *E sendo a Primeira Divisão geral da Quantidade em Discreta, e Contínua; dela nascem as duas Ciências principais da Matemática, que são a Aritmética, e a Geometria. (...) A Trigonometria, tanto Retilínea, como Esférica, é um Ramo da Geometria. (...)*
>
> *Depois da Álgebra, Aritmética, e Geometria, que pelo seu objeto mais geral, e abstrato, se chamam Matemáticas Puras, seguem-se muitas outras Disciplinas, que tem o nome de Matemáticas Mistas, ou Ciências Físico-Matemáticas; (...) Todas estas ciências se reduzem à Foronomia, que é a ciência geral do movimento dos corpos.* (*Estatutos*, 1772, vol.3, pp. 162-163)

Efetuados estes prolegómenos, o professor deve entrar então na lecionação dos conteúdos específicos da disciplina de geometria, que se encontram divididos em três partes: Aritmética, Geometria e Trigonometria. Dos conteúdos estudados, e que são apresentados de forma detalhada nos *Estatutos* (1772, vol.3, pp. 170-175), salientamos o destaque dado mais uma vez

às aplicações da matemática e à prática. No âmbito da geometria deveria ser estudado o uso de instrumentos, bem como a estereometria e as suas aplicações na medição de toneis, pilhas, tulhas, navios, etc..

Dada a importância de um ensino prático são dadas indicações precisas dos trabalhos práticos a realizar:

> *O Lente do primeiro Ano, além de exercitar os seus Discípulos no Cálculo Aritmético, e nas Construções Geométricas, terá o cuidado de lhes mostrar o uso prático da Geometria, e Trigonometria Plana. Para o que lhes assinará alguns dias feriados, em que Eles se devam achar em algum lugar do Campo nas vizinhanças da Cidade. Tendo feito conduzir a ele Grafometros, Pranchetas; e outros instrumentos de Geodesia; lhes mostrará a praxe das Operações sobre o terreno. (...) Do mesmo modo praticará com Eles as Operações da Estereometria, Livelamento, etc.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 202-203)

Contudo, esta ideologia prática não é concretizada, pelo menos, nos primeiros anos de funcionamento do curso. José Anastácio da Cunha, professor de geometria entre 1773 e 1778 e que estudaremos mais adiante nesta tese, queixa-se da falta de material para estas aulas práticas:

> *(...) ninguém ainda viu o lente do 1.º ano no campo ensinando as praxes, que os Estatutos mandam. Debalde solicitei os instrumentos para isso necessários: não me consta que a Universidade tenha ainda nem uma prancheta.* (Cunha in Teixeira, 1891, p. 659)

Também a escolha do livro de texto é pensada, sendo dadas indicações específicas da obra a adotar:

> *Nele [livro de texto de geometria] se requer não somente que cada uma das verdades Geométricas seja demonstrada nervosa, e rigorosamente; mas também, que todas juntas formem uma cadeia firme, seguida, e contínua de Doutrina; não havendo Proposição alguma solitária; mas enlaçando todas necessariamente umas com outras. E como estas vantagens se não acham em Autor algum até o presente com tanta perfeição, como nos Elementos de Euclides, por eles fará o Lente as suas Lições.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 172-173)

Atendendo às obras existentes à época, são escolhidos os seguintes livros de texto para a disciplina de geometria (Freire, 1872, p. 38).

Obra	**Autor**	**Ano**
Elementos de Arithmetica	Bezout	1773
Elementos de Euclides	João Ângelo Brunelli	1768
Elementos de Trigonometria Plana	Bezout	1774

Tabela 4.1: Manuais adotados para a disciplina de geometria da Faculdade de Matemática na Reforma Pombalina.

Notemos que a obra de Bezout é traduzida para português quase de forma imediata, facilitando o estudo dos temas nelas tratados[115].

4.1.3.2 Álgebra

A disciplina do segundo ano é a Álgebra onde:

> *O Lente desta Cadeira deverá empenhar-se com o maior zelo, e indústria na instrução completa, e profunda dos seus Ouvintes nesta sublime, e importante Ciência, da qual dependem os avultados progressos, que podem, e devem fazer em todo o Curso Matemático: Porque ela é a oficina, em que se forma o espírito da invenção, tão necessário nestas Ciências; e é o instrumento de tudo o que se pode descobrir acerca da quantidade.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, p. 175)

Nos conteúdos desta disciplina (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 176-181) destacam-se a introdução, no ensino da matemática em Portugal, da geometria analítica e do cálculo diferencial e integral.

Notemos que, este programa, introduz em Portugal uma nova abordagem ao conceito de reta tangente. Esta nova abordagem, além de permitir o estudo do nosso conceito num contexto diferente do da geometria euclidiana, considerando-o como parte integrante quer da geometria analítica quer do cálculo diferencial, permite que sejam estudadas retas tangentes a diversas curvas e não apenas ao círculo.

No que concerne aos livros de texto a seleção volta a recair sobre compêndios de Bezout, nomeadamente dois volumes que, na tradução portuguesa, se intitulam *Elementos de Analisi Mathematica* (Freire, 1872, p. 38).

[115] Um estudo detalhado das obras adotadas na Faculdade de Matemática e das suas traduções para português encontra-se em Figueiredo (2011, pp. 92-159).

4.1.3.3 Foronomia

Na disciplina de Foronomia, isto é em física-matemática, abordando a ciência dos movimentos desde que esses movimentos se possam "determinar por Cálculo e Geometria"(*Estatutos*, 1772, vol. 3, p. 182).

Nos temas a estudar na disciplina de Foronomia (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 184-188) encontramos as aplicações da matemáticas, como a mecânica, a balística ou a ótica.

De salientar ainda que:

> *As Regras, que resultarem das ditas resoluções [de problemas mecânicos relativos à arquitetura], deverão passar logo das mãos dos Matemáticos para a dos Arquitetos, e Construtores.*[116] (*Estatutos*, 1772, vol. 3, p. 188)

Dada a diversidade dos temas estudados nesta disciplinas são adotados três livros de texto para a sua lecionação (Freire, 1872, p. 38).

Obra	**Autor**	**Ano**
Tratado de Mechanica	Marie	1775
Tratado de Hydrodinamica	Bossut	1775
Leçons Élémentaires D'Optique	La Caille	1756

Tabela 4.2: Manuais adotados para a disciplina de foronomia da Faculdade de Matemática na Reforma Pombalina.

4.1.3.4 Astronomia

A Astronomia é apresentada como uma parte da Foronomia; contudo, "pela sua grande vastidão e importância"deve ser estudada de forma autónoma (*Estatutos*, 1772, p. 189).

A importância do estudo da Astronomia é destacada nos *Estatutos* nos seguintes termos:

> *Mostrará pois o Lente desta Cadeira [astronomia] todo o seu zelo pelo Bem público, e glória da Universidade; formando Discípulos completos na Teórica, e Prática desta Ciência sublime; que não somente interessa a curiosidade, e admiração dos homens, presentando-lhes o espetáculo magnífico do Céu, em que resplandece o Poder, e Sabedoria do Criador; mas também serve de grandes utilidades; sendo Ela a que fixa*

[116] Os *Estatutos* apresentam desde logo uma definição clara de grupos profissionais, numa abordagem ainda pouco usual à época.

> *as Épocas; regula os tempos; determina a situação dos Lugares; e ensina as derrotas aos Mareantes.* (*Estatutos*, 1772, vol. 3, p. 189)

Essas aplicações encontram-se também presentas na descrição dos temas a abordar ao longo do ano (*Estatutos*, 1772, vol. 3, pp. 189-195).

Nestes *Estatutos* é dada especial atenção à prática das observações astronómicas. Para apoiar este desígnio prático foi mandado construir um observatório astronómico que foi apetrechado com os melhores instrumentos da época[117].

A escolha do livro de texto recai novamente sobre um autor francês, o Abade de La Caille e as suas *Leçons Élémentaires D'Astronomie Geometrique et Physique* (Lemos in Braga, 1894, p. 47).

4.2 O conceito de reta tangente ao círculo, segundo João Ângelo Brunelli

João Ângelo Brunelli nasce em Bolonha, a 22 de janeiro de 1722, e segue uma carreira eclesiástica sem nunca abandonar a ciência, obtendo formação em matemática e astronomia. Em junho de 1750 é contratado pela coroa portuguesa para integrar a comissão demarcadora de limites das terras portuguesas na América do Sul, na sequência do Tratado de Madrid, partindo para o Brasil em 1753. No Brasil participa em diversas expedições na Amazónia, regressando a Portugal em 1761. Em Lisboa ocupa o cargo de professor no Real Colégio dos Nobres e na Academia Real da Marinha. Falece em Bolonha, a 25 de fevereiro de 1804 (Mendes & Nobre, 2009, pp. 136 - 140).

Na obra que Brunelli deixa publicada é evidente a influência dos tempos passados na Amazónia ao serviço da coroa portuguesa (Mendes & Nobre, 2009, pp. 148-150), destacando-se dos temas mais naturais os *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo Da versão Latina de Federico Commandino Addicionados, e Illustrados por Robert Simson Professor de Matheatica na Academia de Glasgow, E traduzidos em Portuguez para uso do Real Collegio de Nobres*, publicados em 1768, onde o autor aborda a questão da reta tangente ao círculo.

[117] A este propósito veja-se Figueiredo (2011, pp. 277-337).

4.2.1 Os *Elementos de Euclides*

Os *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo Da versão Latina de Federico Commandino Addicionados, e Illustrados por Robert Simson Professor de Matheatica na Academia de Glasgow, E traduzidos em Portuguez para uso do Real Collegio de Nobres*, doravante designados de *Elementos de Euclides*, contêm a tradução para português dos livros geométricos dos *Elementos*, tradução da autoria de João Ângelo Brunelli e publicada em 1768 para utilização no Real Colégio dos Nobres, tal como é visível no seu título (Fig. 4.1).

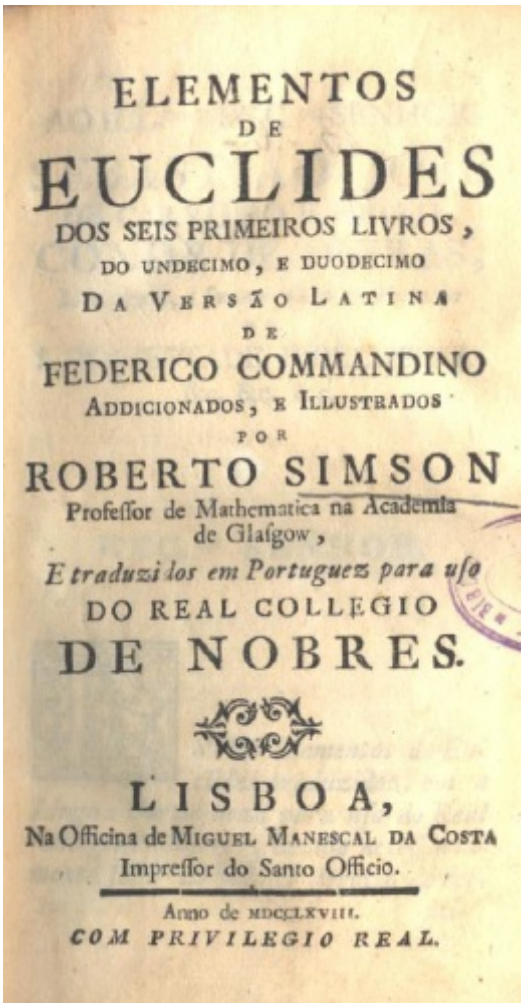

ELEMENTOS
DE
EUCLIDES
DOS SEIS PRIMEIROS LIVROS,
DO UNDECIMO, E DUODECIMO
DA VERSÃO LATINA
DE
FEDERICO COMMANDINO
ADDICIONADOS, E ILLUSTRADOS
POR
ROBERTO SIMSON
Profeſſor de Mathematica na Academia de Glaſgow,
E traduzidos em Portuguez para uſo
DO REAL COLLEGIO
DE NOBRES.
LISBOA,
Na Officina de MIGUEL MANESCAL DA COSTA
Impreſſor do Santo Officio.
Anno de MDCCLXVIII.
COM PRIVILEGIO REAL.

Figura 4.1: Frontispício dos *Elementos de Euclides* de Brunelli.

A tradução dos *Elementos de Euclides* por João Ângelo Brunelli teria sido composta a partir da obra *Euclidis Elementorum* publicada em 1756 por Robert Simson mas, segundo Bicudo (2009, p. 41), Brunelli terá efetuado a tradução a partir não da edição latina, mas da edição em inglês da mesma obra e que Simson publicou também em 1756 com o título de *The Elements of*

Euclid[118]. Brunelli, na introdução ao leitor, justifica esta escolha:

> *Um dos melhores é o livro dos Elementos de Euclides da versão Latina de Federico Commandino, expurgado de muitos erros, e restituído com algumas demonstrações mais inteligíveis, e mais cómodas, e também acrescentado com algumas Proposições de grande utilidade, e ilustrado com grande cópia de excelentes Notas por Roberto Simson, Professor de Matemática na Academia de Glasgow. (...)*
>
> *Sendo pois necessário, que na língua Portuguesa houvesse um bom livro dos Elementos de Euclides, se me ordenou que fizesse a tradução do referido livro de Simson em Português para uso também daqueles, que não sabem a língua Latina.* (Brunelli, 1768, s.p.)

Brunelli inicia este tratado defendendo junto do leitor a ordem pela qual se deve iniciar a aprendizagem da matemática:

> *O primeiro passo na grande e vasta carreia das ciências matemáticas é o estudo da Geometria Elementar. Mas não é de pouca importância a escolha de um bom livro, que desde o início acostumado ao rigor, e exatidão Geométrica os que se querem aplicar a este género de estudos, demonstre ao mesmo tempo clara e facilmente, e sem deixar a mínima dúvida, todas aquelas verdades, que constituem o corpo da Geometria Elementar.* (Brunelli, 1768, s.p.)

É com o objetivo de tornar a sua obra um livro útil aos estudante, cumpridor dos requisitos que enumerou, que Brunelli faz algumas alterações ao original:

> *Confesso, que não me quis sujeitar aquele modo servil, por que alguns traduzem, mas antes pelo contrário em alguns lugares deixei algumas coisas, que se acham no texto Latino, e em outros juntei o que me pareceu podia conduzir para a mais pronta inteligência de algumas demonstrações, sem porém mudar, ou alterar a ordem, e forma delas.* (Brunelli, 1768, s.p.)

De facto, numa comparação entre a estrutura das duas obras[119] é visível que Brunelli mantém, em todos os livros, as mesmas definições, axiomas, postulados e proposições que Simson. Contudo, Brunelli introduz na sua obra notação já usual no século XVIII como, por exemplo, os

[118]Seguindo a indicação de Bicudo, utilizamos neste trabalho a edição inglesa de 1756 dos *The Elements of Euclid* de Robert Simson.

[119]No anexo F encontra-se uma comparação da estrutura das duas obras.

símbolos de $+$, $-$ ou $=$, ou a notação de proporção $A : B :: C : D$. No que concerne às definições Brunelli introduzirá, no livro III, os conceitos de raio, semidiâmetro, arco e corda, considerando que a sua utilização simplifica os conteúdos trabalhados, embora não considere estas definições como sendo parte integrante das definições do Livro III.

A grande diferença entre a obra de Brunelli e o original de Simson encontra-se nas notas finais, onde Brunelli omite grande parte das notas apresentadas por Simson:

> *Também julguei, que se não deviam imprimir todas as Notas do dito Autor. Em uma grande parte delas só se tratam pontos de pura erudição, e crítica; e se notam os erros de alguns interpretes, que maltrataram os Elementos de Euclides. Como estas notícias, ainda que importantes, não são necessárias aos que principiam a estudar Geometria; e ao mesmo tempo querendo-se imprimir tudo, não podia este Livro guardar a medida de um justo, e cómodo volume, entendi, seguindo também o parecer de outras pessoas, que seria melhor pôr somente aquelas Notas, que são de uma notória utilidade para os estudantes.* (Brunelli, 1768, s.p.)

Para tal as notas que Brunelli apresenta contêm, essencialmente, enunciados e demonstrações alternativas de algumas proposições, bem como justificações mais completas de algumas das afirmações contidas no texto.

Este tratado é escrito com o intuito de servir para a instrução na geometria num ensino não superior; contudo, a sua adoção na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra leva a que conheça uma ampla divulgação, marcada por diversas reedições, influenciando de forma significativa a forma como o conceito de reta tangente ao círculo é visto no âmbito da geometria euclidiana em Portugal.

4.2.2 O conceito de reta tangente ao círculo nos *Elementos de Euclides*

4.2.2.1 A definição

O conceito de reta tangente ao círculo é apresentado na segunda das 11 definições do livro III, sendo a definição enunciada por Brunelli distinta da de Simson (tabela 4.3).

Brunelli, 1768, p. 81	Simson, 1756, p. 73
Def. III, 2: Uma linha reta se diz que toca um círculo, ou que é tangente de um círculo, quando estando no mesmo plano do círculo encontra a circunferência sem a cortar.	**Def. III, 2:** Diz-se que uma linha reta toca um círculo, quando encontra o círculo e sendo prolongada não o corta.

Tabela 4.3: Definição III, 2 dos *Elementos de Euclides* de Brunelli e dos *The Elements of Euclid* Simson.

Nesta definição destacamos a introdução do termo tangente por Brunelli, acrescentando o matemático italiano terminologia comum, à época, em lugar de continuar a designar a reta tangente apenas como a reta que toca o círculo.

É também de salientar a referência a que a reta e o círculo têm de se encontrar no mesmo plano e que é, novamente, um acrescento original de Brunelli. Este acrescento, que nos parece ser um detalhe didático, pretenderia eventualmente reforçar/recordar a ideia de que estamos perante geometria plana.

Esta definição é completada por uma representação, que se encontra em Simson e que Brunelli reproduz (Fig. 4.2).

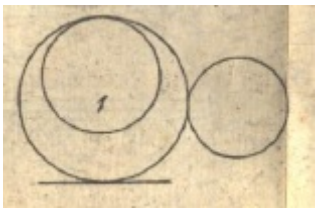


Figura 4.2: Ilustração da Definição III, 2.

Vemos, à semelhança do que é comum à época, face às dificuldades de impressão de imagens, a mesma figura servir para representar diferentes conceitos o que poderia, segundo os ditames contemporâneos, gerar possíveis confusões. Observe-se todavia, que esta obra é escrita para a utilização em ambiente de sala de aula, ou seja, com o acompanhamento direto de um mestre que esclareceria as possíveis confusões.

4.2.2.2 As proposições

A primeira proposição onde Brunelli aborda o conceito de reta tangente ao círculo é a Proposição III, 16 que Brunelli formula de forma distinta da que se encontra no original de Simson (Tabela 4.4).

Brunelli, 1768, p. 101	Simson, 1775, p. 90
Prop. III, 16: A reta, que de uma extremidade do diâmetro de um círculo se levantar perpendicularmente sobre o mesmo diâmetro, cairá toda fora do círculo; e entre esta reta, e a circunferência não se poderá tirar outra linha reta alguma; que é o mesmo que dizer, que a circunferência do círculo passará entre a perpendicular ao diâmetro, e a reta, que com o diâmetro fizer hum ângulo agudo por grande que seja; ou também que a mesma circunferência passará entre a dita perpendicular e outra reta, que fizer com a mesma perpendicular um ângulo qualquer, por pequeno, que seja.	**Prop. III, 16:** A linha reta traçada perpendicularmente ao diâmetro de um círculo, pela sua extremidade, cai fora do círculo; e nenhuma linha reta pode ser traçada entre a linha reta e a circunferência , sem cortar o círculo; o que é a mesma coisa que, nenhuma linha reta consegue fazer um ângulo agudo tão grande com o diâmetro na sua extremidade, ou um ângulo tão pequeno com a linha reta que lhe é perpendicular, sem cortar o círculo.

Tabela 4.4: Proposição III, 16 dos *Elementos de Euclides* de Brunelli e dos *The Elements of Euclid* Simson

A diferença nas duas formulações prende-se com a interpretação que os matemáticos fazem da última parte da proposição e que, na formulação dos *Elementos*, origina diversas polémicas a propósito do ângulo de contingência. Os motivos que levam Brunelli a afastar-se de Simson não são claros podendo, porventura, estar relacionados com objetivos didáticos distintos nas duas obras, nomeadamente o público-alvo.

A demonstração desta proposição coincide, na sua primeira parte (existência e unicidade da tangente), com a demonstração apresentada por Euclides[120] apresentando, em seguida, Brunelli a justificação da última parte da sua proposição.

> Logo entre a reta AE e a circunferência ABC (Fig. 4.3) não se poderá tirar outra linha reta alguma, isto é a circunferência do circulo passará entre a perpendicular sobre o diâmetro e a reta que com o diâmetro fizer um ângulo agudo, por grande que seja; ou também a mesma circunferência passará entre a dita perpendicular e outra reta, que faça com a perpendicular um ângulo qualquer, por pequeno que seja.
>
> Isto somente, e não outra coisa alguma se deve entender, quando no texto Grego e nas versões o ângulo do semicírculo vem chamado o maior entre todos os ângulos agudos; e o outro, que falta para o complemento de um ângulo reto, o menor entre todos os ângulos também agudos.■

[120] Veja-se a referida demonstração na página 17.

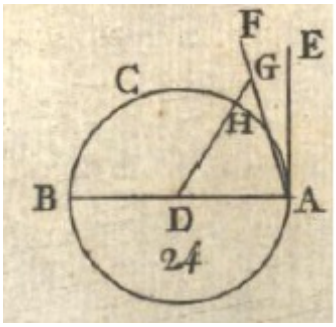


Figura 4.3: Ilustração da demonstração da Proposição III, 16.

Nesta demonstração que, segundo os parâmetros atuais, se trata mais de uma reflexão do que de uma demonstração propriamente dita, Brunelli apresenta a sua interpretação da questão do ângulo do semicírculo, interpretação onde se afasta da polémica questão do ângulo de contingência, apresentando uma demonstração que não depende diretamente do conceito de ângulo e da possibilidade, ou impossibilidade, de comparar ângulos de diferentes tipos.

No final da sua demonstração Brunelli, à semelhança de Simson, apresenta um corolário a esta proposição:

> ***COROL.*** *Do que se tem demonstrado fica claro, que a reta, a qual de uma extremidade do diâmetro de um círculo se levanta perpendicularmente sobre o mesmo diâmetro, é tangente do círculo, e o toca em um único ponto só; porque já temos visto, que uma reta, que encontra a circunferência de um círculo em dois pontos, está dentro do círculo (III, 2*[121]*). Também se faz evidente, que uma só linha reta pode ser tangente de um círculo no mesmo ponto.* (Brunelli, 1768, p. 103)

Deste corolário destacamos a inclusão da justificação da unicidade do ponto de tangência, justificação que se encontra ausente em diversas edições dos *Elementos*.

A Proposição III, 17, relativa à construção da reta tangente ao círculo, apresenta, na edição de Brunelli uma formulação e demonstração análogas às que se encontram nos *Elementos*[122]. Contudo, o matemático italiano acrescenta, no final da demonstração, o caso em que o ponto considerado pertence ao círculo e que não está contemplado na obra de Simson.

> Esteja agora o ponto D na circunferência do círculo BCD [Fig. 4.4]. Conduzida a reta DE [sendo E o centro do círculo], do ponto D tire-se a reta DF perpendicular

[121] ***Proposição III, 2:*** *Se na circunferência de um círculo se tomarem dois pontos quaisquer, e entre eles como extremos estiver tirada uma linha reta ; esta cairá toda dentro do círculo.* (Brunelli, 1768, p. 84)

[122] Veja-se a este propósito a página 20.

a DE. A reta DF tocará (Corolário III, 16) o círculo BCD no ponto D. Logo de um ponto dado temos conduzido uma tangente a um círculo dado. ■

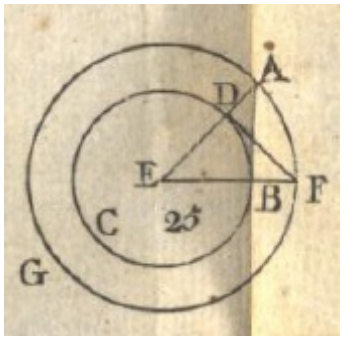


Figura 4.4: Ilustração da Proposição III, 17.

As restantes proposições relativas ao conceito de reta tangente ao círculo coincidem, na edição de Brunelli, com as apresentadas por Simson e com as encontradas nos *Elementos*, não havendo qualquer aspeto original nesta tradução[123].

4.3 Manuel de Campos & João Ângelo Brunelli

O estudo efetuado ao conceito de reta tangente pelo Pe. Manuel de Campos e por João Ângelo Brunelli apresenta algumas diferenças porventura resultantes de opções tomadas pelos dois matemáticos e não do facto de estarem a traduzir os *Elementos* a partir de obras distintas.

Elementos	**Campos, 1735**	**Brunelli, 1768**
Definição III, 2	A definição caracteriza a reta que toca o círculo.	Introduz o termo tangente na definição. Efetua uma referência ao facto de se estar a trabalhar em geometria plana.
Proposição III, 16	Apenas enuncia a primeira parte do enunciado de Euclides. Aborda a questão do ângulo de contingência nos corolários e no escólio.	Enuncia uma interpretação própria da segunda parte do enunciado de Euclides. Não faz qualquer referência ao ângulo de contingência. Refere no corolário, explicitamente, a relação de perpendicularidade entre tangente e o raio pelo ponto de tangência e a unicidade da tangente.
Proposição III, 17	Apresenta, no escólio, um segundo método de construção da reta tangente utilizando a Proposição III, 31.	Apresenta, na demonstração, a construção da reta tangente no caso em que o ponto está sobre a circunferência.

[123]Um estudo destas proposições encontra-se na página 21 e seguintes.

Elementos	**Campos, 1735**	**Brunelli, 1768**
Proposição III, 18	Não se registam diferenças.	
Proposição III, 19	Não se registam diferenças.	
Proposição III, 32	A demonstração contempla dois casos: o primeiro em que a secante é um diâmetro; e o segundo em que a secante não passa pelo centro.	A demonstração apenas contempla o caso em que a secante não é um diâmetro.

Tabela 4.5: Estudo comparativo entre Manuel de Campos e João Ângelo Brunelli.

4.4 Uma nova abordagem ao conceito de reta tangente, segundo Étienne Bezout

Étienne Bezout nasce a 31 de março de 1730, em Nemours. Em 1750, terminados os seus estudos, vai para Paris onde ganha a vida como professor de matemática e onde trava conhecimento com D'Alembert que o influência a dedicar-se ao estudo de temas de matemática avançada. Em 1764 é nomeado examinador dos Guardas de Marinha, cargo que está na origem da escrita, entre 1764 e 1769, de um curso de matemática para os guardas de marinha. Em 1768 Bezout é nomeado examinador do Corpo de Artilharia, escrevendo um curso de matemática para os guardas de marinha e artilheiros entre 1770 e 1782. Bezout falece a 27 de setembro de 1783, deixando uma obra matemática da qual se destacam os trabalhos em equações e os livros para o ensino.

Apesar de criticados, nomeadamente alegando falta de rigor, os seus cursos para os guardas de marinha e artilharia são um sucesso entre os estudantes, difundindo-se rapidamente não só em França, mas noutros países do mundo. O curso foi traduzido em russo, inglês, alemão e português, havendo registos do seu uso em Harvard como livro de texto de cálculo (O'Conner & Robertson, 2017, s.p.).

Em Portugal o *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* é traduzido para português com o objetivo de ser utilizado como livro de texto na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, nas disciplinas de geometria e álgebra, aquando da reforma pombalina da Universidade de Coimbra[124].

[124]A propósito das traduções da obra de Bezout para português veja-se Figueiredo (2011, pp. 92-118)

4.4.1 *Elementos de Analisi Mathematica* e *Elementos de Analyse*, de Bezout

Os *Elementos de Analisi Mathematica*, publicados em 1774 são o livro adotado para a disciplina de Álgebra da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra após a reforma em 1772. Constituídos por 2 tomos, contêm a tradução para português de parte do *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, doravante designado de *Cours de mathématiques*, publicado por Bezout na década de 60 do século XVIII para o ensino militar em França. O Tomo I dos *Elementos de Analisi Mathetmatica* aborda conteúdos de Álgebra e é a tradução do terceiro volume da obra de Bezout, enquanto o Tomo II contém os princípios do cálculo diferencial e integral e corresponde à tradução da primeira parte do quarto volume da obra do matemático francês.

Os *Elementos de Analisi Mathematica* são republicados em 1793 com o título *Elementos de Analyse*, sendo, segundo o seu frontispício [Fig. 4.5], alvo de melhoramentos e correções.

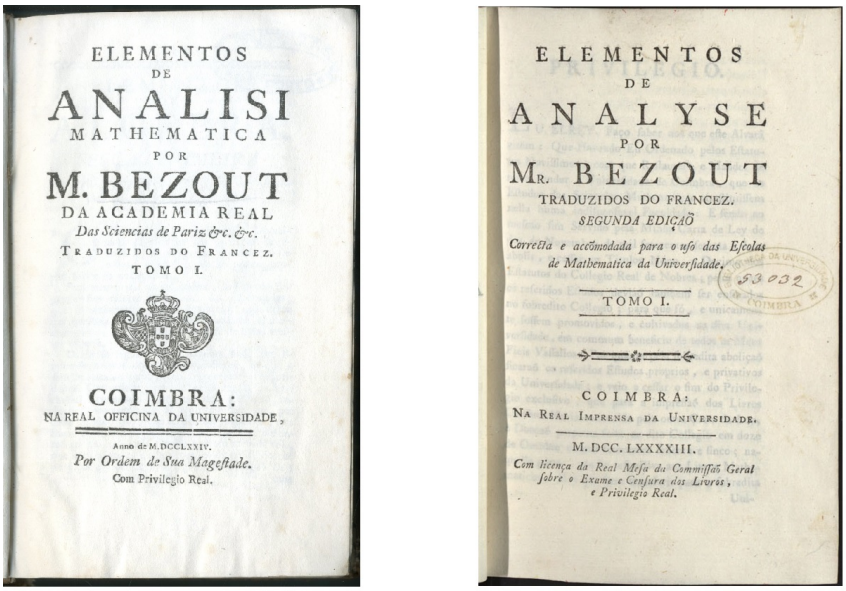


Figura 4.5: Frontispício da primeira edição dos *Elementos de Analisi Mathematica* e da segunda edição intitulada *Elementos de Analyse* de Bezout.

Esta segunda edição foi reeditada em 1801, 1818, 1825 e 1827 (Henriques, 2004, p. 188). A autoria das traduções para português dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* foi atribuída a diferentes autores, em particular a autoria da primeira edição. Segundo Domingues (2012, pp. 25-26) o tradutor dos *Elementos de Analisi Mathematica* poderá ser o Frei Joaquim de Santa Clara, excluindo-se desta autoria Monteiro da Rocha, que é tradicionalmente apontado, entre outros por Gomes Teixeira (1934, p. 229), como autor dessa tradução. Já a

tradução dos *Elementos de Analyse* atribui-se a José Joaquim de Faria.

Comecemos por notar que estas obras não apresentam explicitamente a estrutura determinada pelo método axiomático, não se encontrando divididas em definições, axiomas e proposições. Nas obras de Bezout, as definições e proposições apresentam numeração contínua, sendo apenas possível distingui-las após a sua leitura, numa estrutura afastada da dos *Elementos*.

São obras de um cariz claramente didático, onde são apresentados, além das definições e das proposições, exemplos de aplicação das proposições enunciados.

Embora as edições portuguesas sejam uma tradução da obras de Bezout, como o próprio frontispício indica, é possível encontrar algumas diferenças entre as três obras[125].

Relativamente ao conteúdo/estrutura, a diferença mais notória entre as traduções para português e o original acontece no início do tomo I com a não apresentação da tradução do prefácio de Bezout. Neste prefácio o matemático francês começa por apresentar a Análise enquanto método de estudo e demonstração e a Álgebra como instrumento de que a Análise se serve, distinguindo claramente os novos processos que vai usar dos utilizados anteriormente no tratamento da aritmética e da geometria, e referindo a utilidade destes novos métodos para o estudo de outras ciências, como a mecânica.

Além da omissão do prefácio não existe praticamente qualquer diferença entre a edição original e os *Elementos de Analisi Mathematica*, sendo esta efetivamente uma tradução fiel, e à letra, do original de Bezout. Já os *Elementos de Analyse* apresentam algumas diferenças em termos de estrutura e abordagem aos conteúdos relativamente ao original de Bezout.

Enquanto os *Elementos de Analisi Mathematica* começam logo com a primeira secção, à semelhança do que acontece no original, os *Elementos de Analyse* apresentam uma pequena introdução:

> *Os raciocínios que se fazem das indagações Matemáticas, não obstante a variedade dos objetos destas ciências, tem partes comuns, que se podem reduzir a regras gerais, resultando delas a vantagem de ser o nosso espírito aliviado de grande parte dos esforços, que seria necessário aplicar em cada uma das questões. O método que ensina a achar as ditas regras, chama-se Análise.*
>
> *Divide-se esta em duas partes: em Análise Finita ou Álgebra; e em Análise Infinitesimal, a qual compreende o Cálculo Diferencial, e Integral. (...)*
>
> *A Álgebra é o instrumento da Análise, ou a ciência, que tem por objeto ensinar*

[125] Uma comparação entre a estrutura do *Cours de Mathématique*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* encontra-se no anexo G.

> *os meios de reduzir a regras gerais a resolução de todas as questões, que se podem propor acerca das quantidades.* (Bezout, 1793, Tomo I, pp. 1-2)

Uma outra diferença entre as duas edições em português é a alteração efetuada nos *Elementos de Analyse* o no que diz respeito à referência a resultados de geometria euclidiana. Enquanto nos *Elementos de Analisi Mathematica*, tal como no original, são referidas as proposições da geometria de Bezout, correspondente ao volume 2 do *Cours de Mathematique*, nos *Elementos de Analyse* são referidas as correspondentes proposições nos *Elementos de Euclides*. Tal alteração dever-se-á ao facto de na Faculdade de Matemática o livro de geometria euclidiana serem os *Elementos de Euclides*, não sendo expectável que os alunos tivessem acesso fácil à geometria de Bezout, o que poderia causar diversos problemas na compreensão de alguns resultados.

Outra diferença notória está relacionada com o número de figuras nas diferentes edições da obra de Bezout, sendo superior o número de figuras constante nos *Elementos de Analyse*, existindo algumas acrescentadas, outras redesenhadas e havendo ainda algumas suprimidas.

Contudo, a principal diferença entre as duas edições em português apenas se torna visível após uma análise detalhada e cuidada das duas obras e prende-se com a forma como os conteúdos são apresentados.

4.4.2 O conceito de reta tangente nos *Elementos de Analyse*

Uma comparação na abordagem dada ao conceito de reta tangente no *Cours de Mathematique*, nos *Elementos de Analisi Mathematica* e nos *Elementos de Analyse* mostra-nos que as diferenças se encontram essencialmente ao nível da linguagem e das figuras que ilustram as diferentes proposições. A linguagem parece-nos mais simples nos *Elementos de Analyse*, sendo introduzida notação já usual à época e que simplifica, aos olhos de um investigador atual, os enunciados e as demonstrações, sendo omitidos os cálculos considerados desnecessários. As figuras são também, em nosso entender, mais simples nos *Elementos de Analyse* e manifestamente mais abundantes (em vez de se usar uma única figura representativa de conteúdos diferentes).

Tendo em consideração que, além de uma apresentação mais simples e cuidada, os *Elementos de Analyse* são reeditados diversas vezes, sendo mais utilizados e, consequentemente, mais influentes em Portugal, apresentamos o nosso estudo da abordagem ao conceito de reta tangente a uma curva nesta obra, não deixando de salientar aspetos que que esta tradução se afasta do original de Bezout.

4.4.2.1 O conceito de reta tangente na geometria analítica

A primeira referência ao estudo do conceito de reta tangente na obra de Bezout surge aquando do estudo das cónicas, num estudo realizado a propósito das aplicações da álgebra à geometria. Este estudo das linhas curvas inicia com uma introdução:

> *Para poder descrever as curvas de que trata a Geometria, é necessário conhecer a lei, a que estão sujeitos os diferentes pontos de seu perímetro. De muitos modos pode ela ser dada, ou indicando-se o meio para descrever as curvas por movimento contínuo, (...) ou antes ensinando-se uma propriedade que pertença constantemente a cada ponto da curva (...).*
>
> *Finalmente a lei também pode ser dada por uma equação, e assim o suporemos sempre, porque os dois primeiros modos servem para achar a equação que exprime a lei.*(Bezout, 1793, Tomo I, pp. 245-246)

Bezout opta por estudar separadamente cada uma das cónicas[126], pelo que não é possível encontrar nesta obra uma definição geral do conceito de reta tangente às cónicas, sendo este conceito introduzido para cada uma das cónicas em particular.

4.4.2.1.1 Elipse

O primeiro resultado relativo ao conceito de reta tangente à elipse é a proposição 298:

> ***298.*** *Para tirarmos uma tangente a qualquer ponto M [Fig. 4.6] da elipse, produziremos o raio vetor fM até G, de sorte que seja $MG = MF$; e tirando GF, conduziremos sobre ela por M a perpendicular MT, a qual será a tangente, isto é, encontrará a curva unicamente no ponto M.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 25)

A reta tangente à elipse surge aqui como uma generalização do conceito apresentado por Bezout para o círculo[127], sendo a tangente caracterizada pelo número pontos de interseção que tem com a curva considerada.

A acompanhar esta definição surge uma representação da mesma.

A demonstração de que a reta construída segundo as instruções apresentadas na proposição 298 é de facto tangente à elipse é apresentada nos seguintes termos:

[126] Um estudo do tratamento dado por Bezout às cónicas pode ser encontrado em Vieira (2006, pp. 85-100).

[127] *Chamamos, geralmente, secante a toda a linha, como DE, que encontra o círculo em dois pontos, e que fica em parte fora [do círculo]; e chamamos tangente, aquela que não faz mais do que encostar-se à circunferência: tal como AB.* (Bezout, 1765, vol. 2, p. 23)

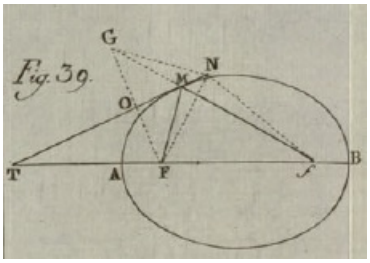


Figura 4.6: Ilustração do conceito de reta tangente à elipse.

> Porque se a encontra em outro ponto, por exemplo N, então tirando Nf e NF, pela propriedade fundamental da elipse será $FN + Nf = FM + Mf$, ou (4.[128] e 5.[129] I. Eucl.) $NG + Nf = Gf$; mas isto é absurdo (20. I. Eucl.[130]); logo o ponto N não pertence à elipse. ■

Notemos que este resultado é enunciado e demonstrado recorrendo exclusivamente a ferramentas de geometria euclidiana.

Em seguida Bezout apresenta uma das principais características da tangente à elipse:

> ***299.*** *O ângulo $FMO = GMO = fMN$ [Fig. 4.6]. Logo na elipse os raios vetores formam ângulos iguais com a tangente. Como se sabe por experiência, que um raio de luz, quando encontra uma superfície, se reflete fazendo o ângulo de reflexão igual ao ângulo da incidência; os raios que partirem do foco luminoso F, e encontrarem a elipse, irão reunir-se no outro foco f; e reciprocamente.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 251)

Esta proposição dá-nos a demonstração teórica de um resultado prático já conhecido e com diversas aplicações, quer ao nível da ótica quer da engenharia.

Na proposição 301, Bezout enuncia um segundo método para determinar a reta tangente à elipse recorrendo a ferramentas da geometria analítica e utilizando o conceito de subtangente que definiu, na Proposição 300, como sendo a linha PT:

> ***301.*** *A subtangente $PT = \frac{PM^2}{PI} = \frac{a^2y^2}{b^2\left(\frac{1}{2}a-x\right)} = \frac{ax-xx}{\frac{1}{2}a-x}$.*
>
> *As expressões de PI e PT [Fig. 4.7] podem servir para tirar uma perpendicular, e uma tangente a qualquer ponto M da elipse.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 256)

[128] ***Proposição I, 4.*** *Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um; e os ângulos compreendidos por estes lados forem também iguais; as bases, e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.* (Brunelli, 1968, p. 10)

[129] ***Proposição I, 5.*** *Em qualquer triângulo isósceles os ângulos, que estão sobre a base, são iguais; e produzidos os lados iguais,os ângulos, que se formam debaixo da base, são também iguais.* (Brunelli, 1968, p. 12)

[130] ***Proposição I, 20.*** *Em qualquer triângulo dois lados tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro.* (Brunelli, 1968, p. 25)

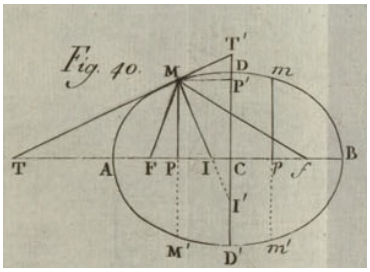


Figura 4.7: Ilustração da subtangente à elipse.

Bezout determina o comprimento da subtangente PT utilizando o facto de, num triângulo retângulo, a altura relativamente à hipotenusa ser meio proporcional entre os dois segmentos de reta que esta altura define na hipotenusa, proposição enunciada no corolário da Proposição 8 do livro VI dos *Elementos de Euclides*, não sendo referido este resultado na demonstração, ao contrário do que acontece no original de Bezout.

Nesta caracterização da reta tangente à elipse é utilizada a equação da elipse deduzida na proposição 286[131].

Bezout apresenta em seguida um resultado que se prende com a existência de um ponto comum às tangentes a todas as elipses com o mesmo eixo maior:

> ***302.*** *Como PT não depende de b, todas as tangentes a pontos correspondentes de todas as elipses, descritas sobre AB como eixo maior, se encontram no mesmo ponto T do eixo. Pelo que a tangente ao ponto N do círculo descrito sobre AB como diâmetro [Fig. 4.8] encontrará no mesmo ponto do eixo T a tangente ao ponto correspondente M da elipse.*
>
> *Porque $CP = \frac{1}{2}a - x$ (fig. 40), será $CT = CP + PT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a-x} = \frac{AC^2}{CP}$; logo $\frac{CP}{AC} = \frac{AC}{CT}$; proporção pela qual se determina com suma facilidade o ponto T, por onde passa a tangente MT.* (Bezout, 1793, Tomo I, pp. 256-257)

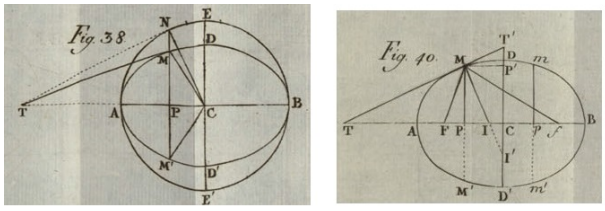


Figura 4.8: Ilustração da Proposição 302.

[131] Considere-se o ponto C, ponto médio de Ff, a reta Ff como eixo das abcissas, e o ponto A, tal que $CA = \frac{1}{2}a$, como a origem deste eixo. Em seguida marque-se um ponto B tal que $CB = CA$ e considere-se a ordenada MP. Fazendo $AP = x$, $MP = y$ e $AF = c$ a elipse tem equação $y^2 = \frac{4ac-c^2}{a^2}\left(ax - x^2\right)$. (Bezout, 1793, Tomo I, p. 351)

Destacamos o facto desta proposição apresentar, implicitamente, um novo método para a construção da reta tangente à elipse.

O último resultado sobre o conceito de reta tangente à elipse é enunciado na proposição 303:

> ***303.*** *O triângulo retângulo TPM dá* $TM = \sqrt{\left(ax - xx + \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2\right)\frac{ax-xx}{\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2}}$.
> (Bezout, 1793, Tomo I, pp. 256-257)

Este resultado é de demonstração direta, por aplicação do Teorema de Pitágoras, não sendo contudo referido explicitamente este facto.

Terminado o estudo do conceito de reta tangente à elipse, são estudadas outras propriedades e aplicações desta curva, sendo retomado o estudo do conceito de reta tangente aquando do estudo da hipérbole.

4.4.2.1.2 Hipérbole

A reta tangente à hipérbole é caracterizada na proposição 327, nos seguintes termos:

> ***327.*** *Se sobre Mf [Fig. 4.9], tomarmos a parte $MG = MF$, a perpendicular MT tirada de M sobre FG será tangente da hipérbole, isto é, não encontrará a curva senão em um só ponto M.*(Bezout, 1793, Tomo I, p. 268)

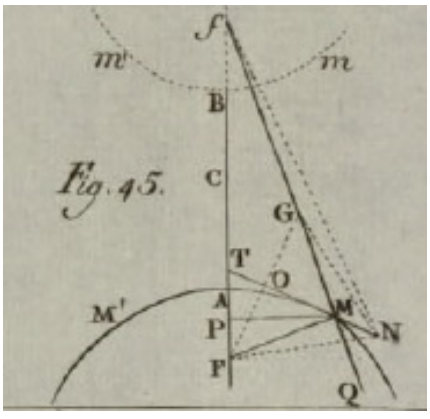


Figura 4.9: Ilustração do conceito de reta tangente à hipérbole.

Também aqui a reta tangente é caracterizada pelo número de pontos em comum com a curva, numa nova generalização do conceito de reta tangente ao círculo.

A demonstração de que a reta construída de acordo com o enunciado é efetivamente tangente à hipérbole utiliza apenas resultados de geometria euclidiana:

> Porque se a encontra em algum outro ponto N de TM, tirando NF, Nf, e NG, será $NF = NG$. Mas é $Nf < NG + Gf$, logo será $Nf - NF < Gf$, isto é, $Nf - NF < Mf - MF$; logo o ponto N não pertence à hipérbole.■

Em seguida, Bezout apresenta a propriedade refletora da hipérbole:

> *Pela construção $FMO = OMG = NQM$. Logo se F for um ponto luminoso, os raios que dele saírem, e encontrarem a concavidade MAM', se refletirão como se partissem de f.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 268)

Bezout apresenta assim uma justificação teórica de um resultado prático da ótica, fundamentando cientificamente propriedades conhecidas por experiência.

Depois é apresentada por Bezout a determinação do comprimento da subtangente à hipérbole:

> ***328.*** *Porquanto temos (3. 6. Eucl*[132]*)* $\frac{fM(z+a)}{MF(z)} = \frac{fT(a+2c-FT)}{FT}$*; será* $FT = \frac{2c+a}{2z+a}z = ... = \frac{(2c+a)\frac{2cx+ac+ax}{a}}{(2c+a)\frac{2x+a}{a}} = \frac{2cx+ac+ax}{2x+a}$*: logo* $PT = FT - c + x = \frac{ax+xx}{x+\frac{1}{2}x}$*; valor da subtangente da hipérbole, a qual difere somente nos sinais da que se achou para a elipse.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 269)

Nesta proposição, onde já é utilizada a geometria analítica, parte dos cálculos são omitidos. Contudo, a reconstituição dos passos em falta poderia ser deixada como exercício, tal como se encontra estipulado nos *Estatutos*, onde é indicado que os alunos devem realizar demonstrações de proposições previamente estudadas (*Estatutos*, 1772, pp. 199-200).

A propriedade enunciada fornece também, de forma implícita, um novo método para a determinação da reta tangente à hipérbole. Um outro método de construção de reta tangente pode ainda ser deduzido da proposição apresentado por Bezout em seguida:

> ***329.*** *É pois a distância do vértice ao ponto em que a tangente encontra o eixo, ou* $AT = PT - AP = \frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} - x = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$*.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 269)

Em virtude deste resultado, Bezout faz uma reflexão sobre as propriedades da reta tangente à hipérbole:

> ***330.*** *Esta expressão mostra, que sem embargo de que os ramos da hipérbole se estendem até o infinito, contudo as tangentes a cada um dos seus pontos cortam o*

[132] ***Proposição VI, 3:*** *Se um ângulo de um triângulo for dividido em partes iguais por uma reta, que divida ao mesmo tempo a base em dois segmentos; estes segmentos estarão entre si na razão dos outros dois lados do triângulo (...).* (Brunelli, 1768, p. 209)

eixo em pontos T situados entre A e C. Porque se substituirmos em lugar de x todas as quantidades imagináveis desde 0 *até o infinito, o valor de AT cresce somente desde* 0 *até* $\frac{1}{2}a$. *Logo a tangente na extremidade infinita de cada um dos ramos AM, AM′ passa pelo centro C; e como os ramos opostos Bm, Bm′ são perfeitamente iguais aqueles, e os pontos A e B estão em igual distância de C, segue-se que as ditas tangentes também o são nas extremidades infinitas dos ramos Bm, Bm′, como se representa [Fig. 4.10] nas linhas CX, CY.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 269)

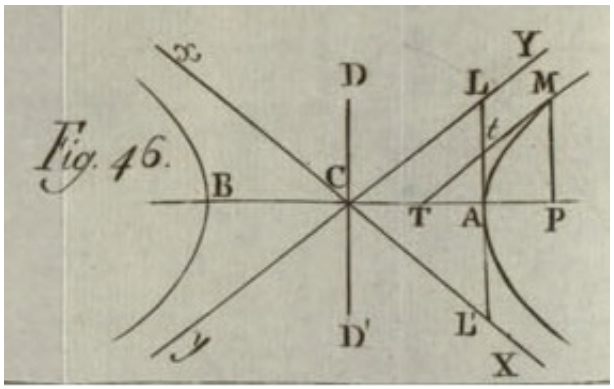


Figura 4.10: Ilustração do conceito de assintota da hipérbole.

Notemos que Bezout recorre aqui à noção de infinito e, implícita e intuitivamente, à noção de limite, noção essa que é explicitada quando introduz o conceito de assíntota:

331. *Dá-se a estas tangentes o nome de Assintotas, as quais, como se vê, são umas linhas, que partindo do centro se avizinham cada vez mais da hipérbole, sem que possam encontrá-la senão em uma distância infinita, e portanto são os limites das tangentes.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 270)

Notemos que a palavra limite surge aqui sem ter sido ainda definida. Contudo, apesar de utilizar este conceito intuitivo para definir assintota, o estudo que Bezout efetua destas retas e das suas propriedades é puramente geométrico. Relativamente ao conceito de reta tangente à hipérbole este não volta a ser estudado, abordando Bezout novamente a questão das tangentes aquando do estudo da parábola.

4.4.2.1.3 Parábola

O estudo da reta tangente à parábola surge na proposição 361:

361. *Se do ponto M [Fig. 4.11] conduzirmos sobre FH a perpendicular MOT, esta será tangente da parábola.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 282)

Porque se encontra a curva em algum outro ponto N, tirando as linhas NF, NH, e NZ perpendicular a XZ, será $NZ = NF$; mas por outra parte é $NZ < NH$, $NH = NF$, e por conseguinte $NZ < NF$; logo o ponto N não pertence à curva.

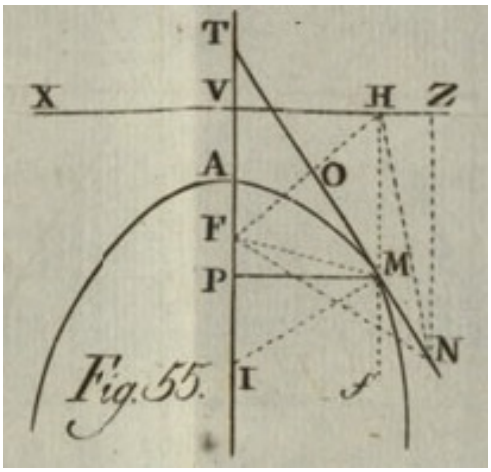


Figura 4.11: Ilustração do conceito de de reta tangente à parábola.

Embora não se encontre explicitamente referido, a tangente à parábola é considerada como uma reta que tem um único ponto em comum com a curva Sabemos contudo, que existem retas com um único ponto em comum com a parábola que não lhe são tangentes, como é a reta perpendicular a XZ por M. No entanto, o método de construção apresentado permite de facto obter a reta tangente à parábola sendo que, com exceção das retas perpendiculares à diretriz, todas as retas que apenas intersetam a parábola num ponto são tangentes à mesma.

Temos assim um enunciado que, mais do que definir o conceito de reta tangente à parábola, apresenta um método de construção dessa mesma tangente.

Em seguida, tal como fez para as restantes cónicas, Bezout estuda a propriedade refletora da parábola:

> ***362.*** *O ângulo $FMO = OMH = fMN$; logo os raios luminosos que saírem de F, e encontrarem a concavidade $M'AM$, se refletirão paralelamente ao eixo; e reciprocamente os paralelos ao eixo se reunirão no foco F.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 282)

Mais uma vez são apresentados resultados que se revestem de particular importância dada a sua aplicabilidade em ramos da física-matemática.

A última propriedade da reta tangente à parábola encontra-se enunciada na proposição 363:

> ***363.*** *Porquanto $HO = OF$, os triângulos HOM, TOF serão iguais; logo $FT = MH = PV = x + c$, e conseguintemente $PT = FT + TP = 2x$. Logo a subtangente PT da parábola é dupla da abcissa.* (Bezout, 1793, Tomo I, p. 282)

Esta proposição apresenta mais um método de construção da reta tangente à parábola, sendo o último resultado a propósito do estudo do conceito de reta tangente às cónicas e das suas propriedades, ao qual Bezout regressa nas aplicações do cálculo diferencial à geometria.

4.4.2.2 O conceito de reta tangente no cálculo diferencial

O cálculo diferencial, em conjunto com o cálculo integral, é abordado no segundo tomo da tradução portuguesa da obra de Bezout.

Este tomo inicia com o estudo dos conceitos de função, limite e diferencial, assim como o estudo das regras para a determinação de diferenciais, seguindo-se a aplicação dessas mesmas regras:

> ***29.*** *Para mostrarmos em alguns exemplos o uso das regras dadas, e a sua grande vantagem na Álgebra ordinária, vamos aplica-las aos objetos de que temos ideias, isto é, a problemas de Geometria e de Cálculo.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 28)

Os primeiros exemplos prendem-se com a "Aplicação às Subtangentes, Tangentes, Subnormais, &c. das linhas Curvas".

4.4.2.2.1 A definição

Uma vez que Bezout ainda não definiu, de forma explicita e genérica, o conceito de reta tangente a uma curva, e tendo em atenção que a generalização de reta tangente ao círculo que faz para as cónicas não é válida para a generalidade das curvas, é expectável que Bezout apresente, de forma explícita, uma definição geral do conceito de reta tangente. Esta definição é apresentada nos seguintes termos:

> ***30.*** *Para tirarmos uma tangente a qualquer linha curva AM [Fig. 4.12] representamos esta linha como um polígono de infinitos lados infinitamente pequenos; o prolongamento MT de um deles Mm é a tangente (...).* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 29)

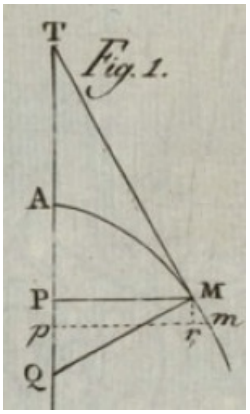


Figura 4.12: Ilustração do conceito de reta tangente a uma curva.

A ideia de considerar a reta tangente como um dos lados de um polígono de infinitos lados equivalente à curva não é nova, tendo já sido apresentada por Leibniz no artigo *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, qua nex fractas, nec irrationales quantitates moratur & singulare pro illis calculi genus*, publicado na *Acta Eruditorum* em 1684.

4.4.2.2.2 As proposições

O primeiro exemplo apresentado por Bezout é a determinação da tangente a uma linha curva qualquer recorrendo ao cálculo diferencial, determinando para isso o comprimento da subtangente PT:

> Pelas extremidades do lado infinitamente pequeno Mm imaginemos as duas ordenadas MP, mp, e pelo ponto M da linha Mr paralela ao eixo das abcissas AP. Seja $AP = x$, $PM = y$; será Pp ou $Mr = dx$, e $mr = dy$. Isto posto o triângulo infinitamente pequeno Mrm é semelhante ao triângulo finito TPM, e assim teremos $\frac{rm(dy)}{rM(dx)} = \frac{PM(y)}{PT}$; logo $PT = \frac{ydx}{dy}$. ■

Embora não se encontre referido, a semelhança entre o triângulo diferencial Mrm e o triângulo finito TPM advém da definição de reta tangente que se encontra implícita na proposição 30. Com este resultado a determinação da reta tangente a uma curva deixa de ser um problema geométrico, reduzindo-se a um problema de determinação de diferenciais, problema que se enquadra no âmbito do cálculo diferencial.

Notemos que todo este estudo é uma replicação do estudo efetuado por Leibniz.

Salientemos contudo a chamada de atenção efetuada por Bezout para o facto de o referencial considerado não ter de ser ortogonal:

> *Esta é a fórmula geral para determinar a subtangente de qualquer curva, seja qual o for o ângulo das coordenadas, com tanto que os y sejam paralelos entre si.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 29)

Esta chamada de atenção não é uma referência isolada, estudando Bezout o problema das tangentes em diversos referenciais, nomeadamente referenciais em que este resultado não é válido[133].

Em seguida Bezout explica de que forma esta fórmula geral deve ser aplicada na determinação da reta tangente a uma curva:

> *Para isso não há mais do que diferenciar a equação dada da curva, a fim de tirar o valor de* $\frac{dx}{dy}$*; então se multiplicarmos esta expressão por y, e pusermos nela em lugar de y o seu valor deduzido da mesma equação da curva, teremos PT expressa simplesmente em x e constantes; e querendo determinar a subtangente para qualquer ponto M, substituiremos em lugar de x o valor da abcissa correspondente a M.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 29)

Após esta explicação a tradução portuguesa afasta-se do original de Bezout, na ordem pela qual apresenta as proposições. Nos *Elementos de Analyse* surgem em primeiro lugar todos os resultados relevantes, que se encontram relacionados entre si, e em seguida diversos exemplos onde se podem aplicar todas as propriedades estudadas.

Vejamos de que forma é determinado o comprimento da tangente por Bezout:

> *Do mesmo modo o triângulo retângulo TPM dá a tangente* $MT = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$*. Se as coordenadas não forem ortogonais, será (Trig. 180*[134]*)* $MT = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2} - \frac{2dx}{dy}\cos a}$*, sendo a o ângulo das coordenadas.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 30)

Deste enunciado salientamos a determinação do comprimento da tangente quando os eixos não são ortogonais, determinação que não se encontra no *Cours des mathematiques*. Esta introdução pretende, possivelmente, evitar uma generalização da fórmula do comprimento da tangente obtida anteriormente, mas apenas válida no caso do referencial considerado ser ortogonal. O facto de a fórmula para a determinação da subtangente ser válida para todos os sistemas de eixos, e a indicação de uma única fórmula para a determinação do comprimento da tangente

[133] A este propósito veja-se a página 139.

[134] ***180.*** *O quadrado de qualquer lado de um triângulo retilíneo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do quadrado dos mesmos lados multiplicado pelo cosseno do ângulo por eles compreendido.* (Bezout, 1774b, p. 64)

poderia levar a que o leitor generalize essa fórmula e a aplicasse em casos de eixos não ortogonais, o que estaria errado. Ao acrescentar o caso em que os eixos não são ortogonais o tradutor dos *Elementos de Analyse* garante, à partida, que esse erro não é cometido por falta de explicação, ao mesmo tempo que permite que o problema das tangentes seja resolvido em todos os tipos de eixos.

Todos estes resultados são mais facilmente compreendidos quando analisamos a imagem que contém os triângulos referidos nos diversos passos, ilustração essa que é ainda a apresentada para representar a determinação da reta tangente a uma curva (Fig. 4.12).

Vejamos então os exemplos apresentados por Bezout para estes resultados, começando pela elipse:

> Na elipse, cuja equação (Alg. 294) é $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, temos $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$; logo $PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2a^2y^2}{ab^2 - 2b^2x} = \frac{ax-xx}{\frac{1}{2}a-x}$, que é o mesmo resultado que achamos (Alg. 301), mas de um modo menos expedito que o presente.

A relação estabelecida com o primeiro volume e com o resultado do comprimento da subtangente à elipse obtido na geometria analítica, mostra a existência de diferentes métodos para a resolução deste mesmo problema; contudo, é de salientar à referencia à facilidade do método agora apresentando, surgindo o cálculo diferencial como uma poderosa ferramenta simplificadora da resolução de determinados problemas.

Neste exemplo não é determinado o comprimento da tangente, sendo apenas referido que a aplicação da fórmula a este caso particular originará resultados já conhecidos da álgebra.

Em seguida Bezout apresenta o exemplo da parábola, que repete após o estudo das parábolas gerais:

> **III.** A equação geral $y^m = x^n a^{m-n}$, que exprime as *parábolas* de todos os géneros, sendo m e n números positivos dá $my^{m-1}dy = na^{m-n}x^{n-1}dx$; logo $\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{na^{m-n}x^{n-1}} = \frac{m}{n}x$. Donde se vê, que nestas curvas a subtangente é igual à abcissa x tomada tantas vezes, quantas são as unidades do expoente de y, dividido pelo expoente de x. Se $m = 2$, e $n = 1$, que é o caso da parábola ordinária, temos a subtangente igual a $2x$, como já vimos.
>
> Se $m = 3$, e $n = 1$, temos $y^3 = a^2x$, equação que pertence à *primeira parábola cúbica*; se $m = 3$, e $n = 2$, a curva é a *segunda parábola cúbica*, cuja equação é $y^3 = ax^2$.

Em seguida é apresentado o exemplo da curva logarítmica onde Bezout se limita a aplicar as fórmulas já deduzidas.

O quinto exemplo apresenta o caso em que a curva considerada é decrescente:

> ***31.*** *Quando a equação da curva é tal, que y diminui crescendo x, como na figura 3 [Fig. 4.13], então rM deve exprimir-se por −dy (21*[135]*), o que dá* $PT = -\frac{ydx}{dy}$. *O cálculo pois é aqui o mesmo em tudo, à exceção de que a tangente em vez de cair para além da origem A das abcissas em ordem a PM, cai para a aparte oposta.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 32)

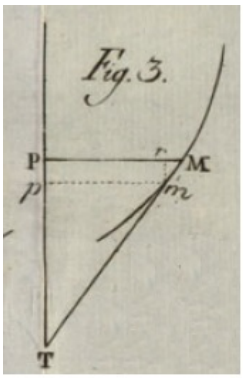


Figura 4.13: Ilustração da construção da reta tangente a uma curva decrescente.

Embora tal não seja referido, esta proposição estabelece a correspondência entre a monotonia da curva no ponto considerado e o sinal do declive da reta tangente à curva nesse ponto, que é aqui apresentado como o lado para o qual deve ser marcado o ponto T no eixo das abcissas.

Bezout apresenta em seguida dois exemplos para este caso: o círculo e a hipérbole. Analisaremos apenas o exemplo da hipérbole, uma vez que se tratam de exemplos semelhantes, diferindo apenas nas equações das curvas:

> A equação geral das *Hipérboles* referidas às assintotas $y^m x^n = a^{m+n}$ dá $mly + nlx = (m+n)la$[136]; logo $\frac{mdy}{y} = -\frac{ndx}{x}$, e conseguintemente a subtangente $\frac{ydx}{dy} = -\frac{m}{n}x$. Se $m = n = 1$, ou na hipérbole ordinária (Alg. 347), temos a subtangente $-x$; logo devemos tomar na assimptota próxima ao ponto M de que se trata [Fig. 4.14] e no sentido dos x, a linha $PT = AP = x$. Assim se determinam em geral por um só cálculo as tangentes, subtangentes, &c. de todas as curvas de uma mesma família.

[135] ***21.*** *ADVERTÊNCIA. Havemos até aqui suposto, que as variáveis x, y, &c. aumentam todas no mesmo tempo, isto é, que tornando-se x em x + dx, y vem a ser y + dy, e assim das outras. Acontecendo porém que diminuam umas enquanto as outras crescem, devemos depois de fazer a diferenciação mudar no resultado o sinal da diferencial da variável, que vai diminuindo (...).* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 20)

[136] ly, lx e la representam, respetivamente, o logaritmo numa determinada base das quantidades y, x e a.

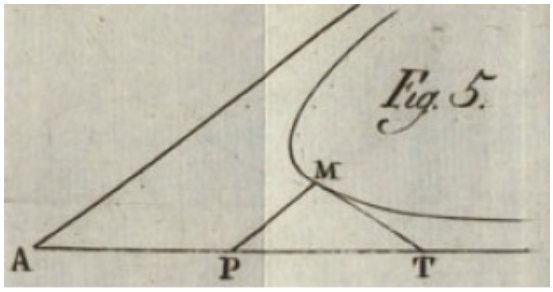


Figura 4.14: Ilustração da determinação da tangente à hipérbole utilizando o cálculo diferencial.

Da determinação da subtangente à hipérbole comecemos por notar que Bezout utiliza a equação relativa às assintotas e não a equação geral, obtendo por isso um resultado distinto do que tinha obtido no tomo I relativo à álgebra, o que seria de esperar pois estão a ser considerados sistemas de eixos distintos.

É também de salientar as alterações introduzidas pelo tradutor nos *Elementos de Analyse*, afastando-se do original de Bezout. Nestas alterações opta-se por determinar o valor da subtangente para todas as hipérboles, surgindo a hipérbole ordinária como um caso particular. Esta opção permite ilustrar de modo mais completo a afirmação final em que se realça a generalidade do método que permite, num só cálculo, determinar as subtangentes a todas as curvas da mesma família.

Notemos ainda que este exemplo é resolvido, na edição portuguesa analisada, aplicando logaritmos à equação geral das hipérboles, transformando o produto de potências numa soma de dois logaritmos. Deste modo, em vez de aplicar diretamente as regras de diferenciação das potências, que conduziriam ao resultado obtido com cálculos muito semelhantes aos realizados anteriormente para as parábolas, o tradutor determina os diferenciais das quantidades afetas de logaritmos obtendo o resultado pretendido de forma simples e direta. Esta introdução dos logaritmos não se encontra justificada contudo, e tendo em atenção que as regras das potências tinham já sido aplicadas aquando da determinação das subtangentes às parábolas generalizadas, esta introdução dos logaritmos poderá ter como objetivo apresentar um método diferente de resolução.

Estudada a determinação das subtangentes por um ponto da curva Bezout dedica-se à resolução de um novo problema sobre o conceito de reta tangente:

> *1.º Tirar uma tangente a qualquer curva de um ponto dado fora dela.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 34)

Notemos que este enunciado é uma generalização da Proposição III, 17 dos *Elementos* a uma

curva genérica. Vejamos a resolução proposta por Bezout:

> Porque supondo que DM [Fig. 4.15] é a tangente procurada, tire.se pelo ponto dado D a reta DB paralela a PM, e seja $AB = g$, $DB = b$, $AP = x$, $PM = y$; será $BP = g + x$, e conseguintemente $BT = PT - BP = \frac{ydx}{dy} - g - x$. Os triângulos semelhantes TBD, e TPM, dão $\frac{TB}{BD} = \frac{TP}{PM}$; logo substituindo os valores teremos a equação $\frac{ydx}{dy} - x - g = \frac{bdx}{dy}$, isto é $(y - b)\frac{dx}{dy} = g + x$, a qual juntamente com a equação da curva dará o valor de x correspondente ao ponto M onde a tangente deve terminar. Se for possível tirar de D mais que uma tangente, a equação dará os valores de x, que correspondem aos diferentes pontos, em que tem lugar a solução.

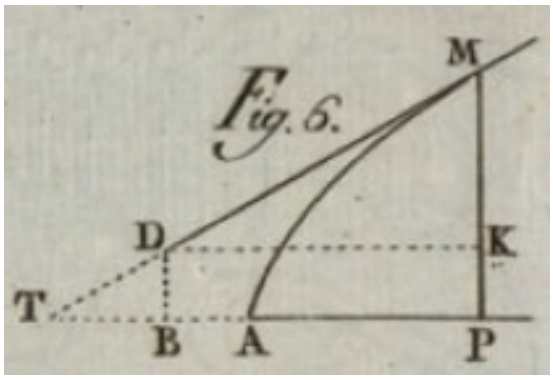


Figura 4.15: Ilustração da determinação da reta tangente a uma curva por um ponto no seu exterior.

Ao contrário do que efetua para as proposições anteriores, Bezout não apresenta qualquer exemplo para este problema.

Bezout termina o estudo do conceito de reta tangente com a determinação de tangentes a curvas definidas em sistemas de eixos não convencionais:

> ***35.*** *Até aqui havemos suposto, que as ordenadas eram paralelas, e se contavam desde a mesma linha, sobre a qual se contam as abcissas. Porém umas vezes fazemos partir as ordenadas de um ponto fixo; outras vezes tomamos por abcissas os arcos de uma curva, e por ordenadas linhas retas, ou linhas curvas. De qualquer modo que se reportem os pontos da curva principal, sempre temos, ou ao menos sempre podemos ter uma equação, que exprima a relação entre as abcissas e as ordenadas. Querendo fazer uso dela para determinar as tangentes, ou outras linhas, devemos praticar de maneira, que as linhas que para isso nos servimos não contenham outras diferenciais, que não sejam as das variáveis da equação, como vamos mostrar em alguns exemplos.* (*Elementos de Analisi Mathematica*, 1774, Tomo II, p. 43)

Seguidamente são apresentados cinco exemplos de curvas definidas nestas condições, curvas para as quais se apresenta primeiramente o método geral para determinar as tangentes procuradas. Vejamos o primeiro exemplo apresentado:

> ***36. I*** *Seja BS [Fig. 4.16] uma curva que tem por abcissas os arcos AM de uma curva conhecida AM, à qual sabemos já tirar tangentes, e por ordenadas as retas MS paralelas a uma linha dada; supondo que a relação de AM para MS se exprime por uma equação qualquer, isto é, que MS é uma função qualquer de AM, tirar uma tangente a um ponto dado S da curva proposta BS.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 39)

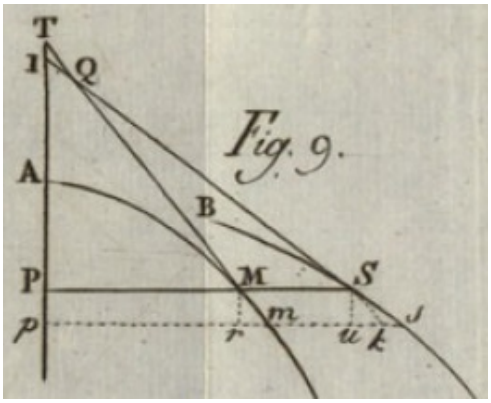


Figura 4.16: Ilustração da proposição 36.

> Imaginemos o elemento Ss produzido até encontrar em Q a tangente MT ao ponto correspondente M da curva AM; tire-se Sk paralela a MT ou Mm, se ja $AM = x$, $MS = y$; será $Mm = Sk = dx$, e $sk = sm - SM = dy$.
>
> Isto posto, os triângulos semelhantes Sks, QMS dão $MQ = \frac{ydx}{dy}$; logo tomando sobre MT a parte MQ igual ao valor de $\frac{ydx}{dy}$ que der a equação diferencial da curva, teremos o ponto Q; a linha QS pois tirada por ele e por S será a tangente procurada.
>
> ■

Salientemos que, tal como acontece com a determinação da reta tangente a uma curva definida num sistema de eixos usual, é utilizada a semelhança entre um triângulo finito e o triângulo diferencial para obter o segundo ponto da reta procurada.

Depois é apresentado um exemplo:

> *Suponhamos, por exemplo, que a curva BS se constrói tomando sempre MS igual a uma parte $\frac{a}{b}$ do arco AM; então teremos $by = ax$, e conseguintemente $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$; logo*

> *$MQ = x$. Assim, em todas as curvas, cujas ordenadas paralelas forem proporcionais às abcissas correspondentes, ou estas sejam retas ou curvas, será a subtangente igual à abcissa correspondente.* (Bezout, 1793, Tomo II, p. 39)

Uma vez que a determinação das tangentes a curvas assenta da determinação do quociente $\frac{dx}{dy}$, caso as curvas sejam caracterizadas, num sistema de ordenadas paralelas, por equações muito complexas, a determinação destes valores torna-se um exercício bastante complexo. Contudo, ao ser mudado o referencial, o grau de complexidade das equações das curvas pode diminuir, obtendo-se não uma curva de equação complexa, mas duas curvas com equações mais simples, pelo que a determinação das duas quantidades necessárias para a resolução deste problema pode ser mais simples.

Este raciocínio é replicado nos exemplos seguintes onde, através da semelhança entre um triângulo finito e um triângulo diferencial se deduz, em cada caso, o comprimento da subtangente correspondente. Termina deste modo o estudo do conceito de reta tangente na tradução para português da obra de Bezout.

Com o estudo aqui apresentado, o ensino e aprendizagem do conceito de reta tangente em Portugal dria uma enorme salto qualitativo, passando a acompanhar o desenvolvimento científico do mesmo, sendo apresentada uma nova definição, novas propriedades e vários métodos para resolver o problema das tangentes que, até à data, se encontrava limitado ao caso do círculo.

Capítulo 5

O conceito de reta tangente, segundo José Anastácio da Cunha

José Anastácio da Cunha nasce em Lisboa a 11 de maio de 1744, filho de um pintor, Lourenço da Cunha, que lhe terá ensinado as primeiras noções de desenho e perspetiva. Estuda na Congregação do Oratório, em Lisboa, onde–num ambiente moderno como era o recém estreado Palácio das Necessidades– para além do Latim, da Retórica e da Filosofia também aprendeu matemáticas (Tosca, Tacquet e Clairaut, em particular). Entre 1762 e 1773 foi militar, com o posto de Tenente dos Bombeiros, no Regimento de Artilharia do Porto, mas sedeado em Valença do Minho e aí, entre militares estrangeiros e particularmente ingleses, pode continuar a dedicar-se ao estudo das matemáticas, de onde destacamos as obras de Newton que estuda com gosto e afinco.

As suas capacidades e conhecimentos são alvo de elogios por parte do Conde de Lipe e do Tenente General Francisco Maclean, elogios que chegam ao conhecimento do Marquês de Pombal que, aquando da reforma da Universidade de Coimbra, nomeia Anastácio da Cunha para professor de geometria,cargo que exerce entre 1773 e 1778.

A 1 de julho de 1778 Anastácio da Cunha é preso pela inquisição, acusado de diversos crimes cometidos maioritariamente em Valença do Minho, e acaba condenado à reclusão na Congregação do Oratório de Nossa Senhora das Necessidades em Lisboa, ao degredo em Évora, fica proibido de voltar a Valença e a Coimbra, e ainda perde todos os seus bens, em particular sua biblioteca. O degredo em Évora é-lhe perdoado e, depois de cumprida a reclusão nos Oratorianos, trabalha para o Intendente Pina Manique, na Casa Pia de Lisboa, sendo o diretor do Colégio de S. Lucas para o qual idealizou o plano de estudos.

Anastácio da Cunha falece a 1 de janeiro de 1787, vítima de doença (Estrada, 2006, pp.

99-130).

Apesar de todas as contrariedades a matemática é uma constante na sua vida, tendo-se dedicado sempre ao desenvolvimento dos seus estudos matemáticos, deixando-nos trabalhos em diferentes ramos desta ciência, vários deles apenas recentemente descobertos[137].

O valor de Anastácio da Cunha é reconhecido à época, sendo mesmo designado de "um génio extraordinário":

> *Não posso deixar Valença, sem mencionar um dos mais extraordinários génios de quem ouvi falar. É um jovem com cerca de 24 anos, Português, e tenente de Artilharia aqui; é oriundo de uma família pobre e, sem qualquer ajuda na educação, por força do seu próprio génio, e grande aplicação, quase se tornou um prodígio.*
>
> *É um grande matemático, que o Coronel Ferrier, que é ele próprio grandemente versado nessa ciência, me disse que este jovem homem está muito à sua frente. Ele domina todos os trabalhos de Sir Isaac Newton, mesmo aqueles cujas partes mais profundas são consideradas difíceis pelos melhores matemáticos. Ele é, consequentemente, um algebrista completo e um grande astrónomo, e aplicou o seu conhecimento matemático no conhecimento específico requerido na sua profissão, que incluiu a engenharia, artilharia e muitas outras coisas desnecessárias na matemática pura.* (Frazier, 1772, pp. 119-120)

5.1 Os *Principios Mathematicos*

Os *Principios Mathematicos para instrucção dos alumnos do Collegio de São Lucas da Real Casa pia do Castello de São Jorge*, doravante designados apenas por *Principios Mathematicos*, são a obra mais estudada de Anastácio da Cunha e aquela onde o autor apresenta a sua versão dos fundamentos da matemática (Fig. 5.1).

Notemos que o título desta obra nos lembra para os *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Newton. Conjeturamos que esta ligação não é mera coincidência, optando Anastácio da Cunha por intitular a sua obra no seguimento do que é principal trabalho de um dos seus autores de referência.

Como o próprio nome indica esta obra, na sua versão final, tem como objetivo ser utilizada no ensino da matemática no Colégio de S. Lucas da Casa Pia de Lisboa. Contudo, o início da sua redação poderá remontar aos tempos de Valença uma vez que, no seu processo da inquisição,

[137] Sobre a vida e obra de Anastácio da Cunha veja-se Rodrigues et al (2013).

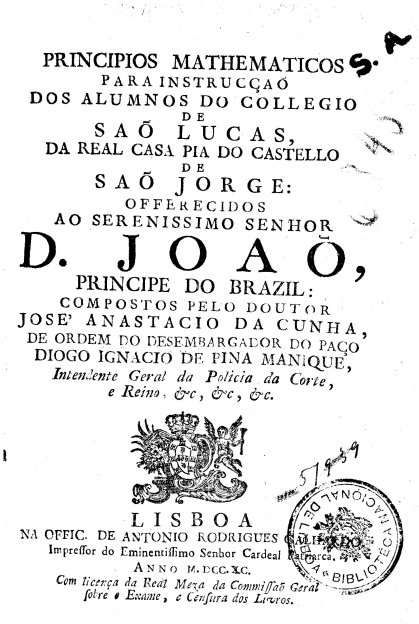

PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAÓ
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSE' ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
Intendente Geral da Policia da Corte,
e Reino, &c, &c, &c.
LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO
Impreſſor do Eminentiſſimo Senhor Cardeal Patriarca.
ANNO M.DCC.XC.
Com licença da Real Meza da Commiſſaõ Geral
ſobre o Exame, e Cenſura dos Livros.

Figura 5.1: Folha de rosto dos *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha.

Anastácio da Cunha refere uma obra cuja escrita iniciou em 1766 e na qual se encontrava ainda a trabalhar.

> *Disse mais que ele [Anastácio da Cunha] espera (...) poder ser útil ao público e ao Estado dando à luz uma obra, que é a Base de toda a Matemática, em que trabalha há doze anos com a mais assídua, e incansável aplicação e que já tinha completa ao tempo da sua prisão e só lhe faltava por em limpo.* (Ferro, 1987, p. 139)

Os *Principios Mathematicos* parecem ter sido publicados, pelo menos em parte e muito possivelmente em fascículos, ainda durante a vida de Anastácio da Cunha, tendo obtido autorização para publicação da Real Mesa Censória.

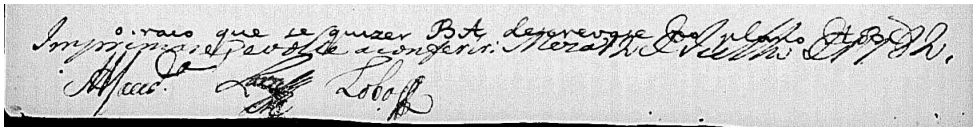


Figura 5.2: Autorização para a impressão dos *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha.

Nesta autorização, datada de 12 de julho de 1782, lê-se "imprima-se e volte-se a conferir", e encontra-se escrita no fim de uma página correspondente ao final do Livro VI. Todavia não se conhecem ainda quaisquer vestígios desses fascículos que o discípulo e amigo, João Manuel de Abreu descreve:

> *Os primeiros livros dos "Principios mathematicos"são conhecidos em Lisboa, se bem*

> *me lembro, desde 1782. Foi nesse tempo que M. da Cunha os compôs e os fez imprimir para uso do Real Colégio de S. Jorge, onde era o diretor. Eu os explicava sob a sua direção à medida que saiam da prensa.* (Abreu in Cunha, 1811, p. i)

A versão que conhecemos dos *Principios Mathematicos*, é publicada apenas em 1790, fruto do esforço dos seus amigos, tendo sido também traduzida em francês e publicada em 1811 e 1816, cuja tradução é da responsabilidade de João Manuel de Abreu. As versões portuguesa e francesa são reeditadas, em fac-simile, em 1987 na comemoração do bicentenário da morte de Anastácio da Cunha.

Esta obra, na versão impressa, contém os fundamentos de grande parte da matemática conhecida no século XVIII e os seus amigos consideraram que Anastácio da Cunha poderia, com este trabalho, ter correspondido ao apelo de D'Alembert sobre a escrita de um bom livro elementar de matemática:

> *O senhor d'Alembert, nos seus Elementos de Filosofia, exprime o desejo de ver publicado um bom livro elementar sobre Matemática, e acrescenta que, para se obter tal livro, os Newton e os Bernouilli não seriam demasiados. Nós próprios apresentaremos, brevemente, aos sábios geómetras, membros do Instituto nacional que honram a França, uma tradução francesa dos Principios Mathematicos de José Anastácio [da Cunha]. Tais sábios julgarão até que ponto o geómetra português cumpriu o desejo de d'Alembert.* (Rodrigues et al, 2013, pp. 47-49)

Os *Principios Mathematicos* são escritos utilizando o método axiomático e geométrico, encontrando-se dividido em vinte e um livros (capítulos) e

> *(...) contêm uma parte substancial da Matemática conhecida na época, desde as primeiras noções de geometria, aritmética e álgebra até questões sofisticadas de geometria diferencial, integração, equações diferenciais e cálculo das variações.* (Queiró, 1994, p. 4)

Ao contrário do que acontece na maioria das obras da época, os *Principios Mathematicos* não contêm qualquer introdução ou prólogo, não havendo qualquer referência às fontes utilizadas ou mesmo justificação da escolha e ordenação dos temas.

A tradução para francês dos *Principios Mathematicos* permite que a obra seja lida e conhecida por matemáticos de diferentes países europeus e não apenas por portugueses. Fruto

dessa divulgação são publicadas algumas recensões da obra[138] das quais destacamos a publicada no *Göttingische gelehrte Anzeigen* e que está na origem de um elogia de Gauss ao nosso matemático[139].

O conceito de reta tangente a uma curva surge, nos *Principios Mathematicos* em dois momentos distintos: nos livros geométricos, a propósito do estudo do círculo, e nos livros de análise, aquando do estudo das aplicações do cálculo diferencial à geometria.

5.2 O conceito de reta tangente ao círculo por Anastácio da Cunha

Anastácio da Cunha estuda o conceito geométrico de reta tangente ao círculo nos *Principios Mathematicos*, sendo também possível encontrar um estudo deste conceito numa obra inédita, autógrafa de Anastácio da Cunha e por ele intitulada de *Principios de Geometria tirados dos de Euclides*, doravante designados *Principios de Geometria*(Fig. 5.3). Notemos que, mesmo incluindo o nome de Euclides no título, Anastácio da Cunha volta a optar por designar esta obra de 'Principios', em lugar de 'Elementos', como era mais comum à época, na que nos parece ser mais uma referência à admiração que sente por Newton.

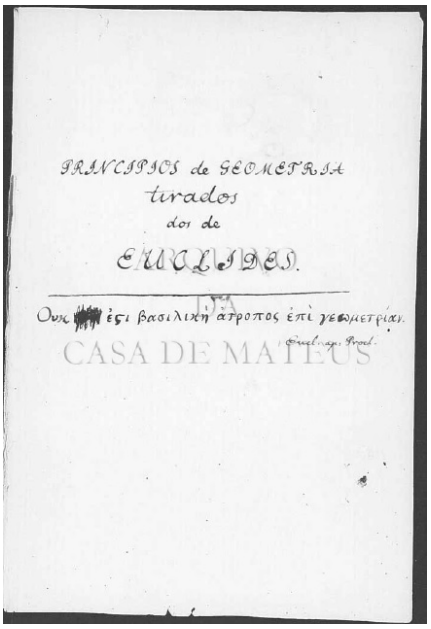

PRINCIPIOS de GEOMETRIA
tirados
dos de
EUCLIDES.
Ουκ [redacted] ἐστι βασιλικὴ ὁδὸς ἐπὶ γεωμετρίαν.
Euclog. Prod.
CASA DE MATEUS

Figura 5.3: Folha de rosto dos *Principios de Geometria* de Anastácio da Cunha.

Não há qualquer referência à data de escrita deste manuscrito nem referência a esta obra

[138]Veja-se a este propósito Domingues (2010, pp. 89-98)
[139]A este propósito veja-se Youschkevitch (1978. pp. 327-332).

noutros trabalhos de Anastácio, pelo que não é possível data-la com exatidão, embora conjeturemos que se trata da obra apresentada à Congregação de Matemática para a lecionação da disciplina de Geometria na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra.

O nosso conceito encontra-se presente nestes *Principios de Geometria* desde o seu prólogo[140], que aqui apresentamos ao mesmo tempo que comparamos[141] os dois manuscritos deste prólogo encontrados.

5.2.1 A definição

Anastácio da Cunha efetua, no prólogo dos *Principios de Geometria*, uma profunda reflexão em torno dos conceitos e das definições, sendo o conceito de tangência um dos analisados:

> *A falta de generalidade nas definições também tem sido causa de notáveis embaraços e erros, e de estarem ainda por demonstrar várias relevantes teóricas. Por exemplo: todos, seguindo a Euclides, põem o contacto de duas linhas em concorrerem sem se tocarem*[142] *mutuamente, e não reparam na infinidade de linhas (e linhas vulgares), que por esse/desse modo não admitem tangentes.* (Cunha, s.d., Prólogo, fl. 7v)

Embora se refira a um caso geral de tangência, e não ao caso particular da reta tangente ao círculo para a qual a definição de Euclides é válida, esta reflexão leva a que Anastácio da Cunha apresente um conceito original e geral de tangência que utiliza na determinação do conceito de reta tangente ao círculo, apresentando essa definição no livro II dos seus *Principios Mathematicos*:

> ***Definição II, 3****: Se os lados de um ângulo concorrerem no vértice, de sorte que deste não se possam tirar duas retas entre eles, dir-se-á que cada um dos lados é tangente ao outro, ou, que toca no dito vértice.*(Cunha, 1790, p. 13)

Surpreenderá, um leitor menos atento, o facto de aqui se reportarem "duas"retas (em vez de nenhuma ou de uma única) porque se levarmos em linha de conta os resultados enunciados nos *Elementos*, que mostram ser impossível interpor uma linha reta entre a tangente e o círculo,

[140] O prólogo deste manuscrito encontra-se, numa versão apógrafa, publicado na obra *José Anastácio da Cunha Os Inéditos*, encontrando-se um estudo detalhado do mesmo em (Duarte et al, 2006, pp. 219-254)

[141] O estudo estudo comparativo entre estes dois documentos foi realizado por Ângela Lopes no âmbito da sua própria investigação doutoral.

[142] Na versão apógrafa deste manuscrito, o Ms. 912.18 do ADB, o copista alterou tocarem para cortarem. De facto, analisando o texto o contacto de duas linhas ocorre quando elas concorrem sem se cortarem, já que ao concorrerem têm obrigatoriamente um ponto em que se tocam, pelo que o original conterá, neste ponto, uma gralha.

poder-se-ia esperar que este resultado fosse suficiente para o conceito geral; contudo, há casos em que tal não se verifica. Por exemplo, considerando dois círculos tangentes externamente é possível interpor uma reta entre as duas circunferências, a reta tangente comum aos dois círculos, pelo que para garantir um conceito de tangência válido para todo o tipo de curvas é necessário garantir que não é possível interpor duas retas, e não apenas uma, entre as curvas consideradas.

Giusti (1990, pp. 40-41) critica esta definição de tangência na análise que faz dos *Principios de Mathematica*. Embora reconheça que se trata de uma definição mais geral que a de reta tangente, considera-a desnecessária uma vez que os desenvolvimentos da geometria analítica tinham já resolvido, à época de Anastácio da Cunha, os problemas em torno deste conceito e da sua generalização. No prólogo dos seus *Principios de Geometria* Anastácio da Cunha parece antever estas críticas:

> *Na praxe os bem sabidos teoremas algebraicos e fluxionários emendam este defeito [falta de generalidade na definição de tangência] mas, para se adotarem, é necessário primeiramente rejeitar a imperfeita definição que os contradiz.* (Cunha, s.d., Prólogo, fl. 7v)

A apresentação de uma nova definição por Anastácio da Cunha ilustra assim o rigor da sua obra. Embora existam, de facto, resultados que permitem a determinação de retas tangentes a diversas curvas, é necessário que o conceito que se vai determinar/estudar esteja corretamente definido, pelo que o nosso matemático apresenta uma definição puramente geométrica, mas de tal forma genérica que pode ser utilizada não só no âmbito da geometria euclidiana, como também nas geometrias analítica e diferencial.

5.2.2 As proposições

No que diz respeito ao caso particular da reta tangente ao círculo, Anastácio da Cunha enunciará nas suas obras apenas duas proposições sobre ele: um teorema e um problema.

O primeiro resultado relativo ao conceito de reta tangente ao círculo é a Proposição 6 do livro II dos *Principios Mathematicos*:

> ***Proposição II, 6**: A reta, que passa pelo extremo da corda de um arco de círculo, se faz com esta corda um ângulo igual ao que está no arco externo, toca naquele ponto ambos os arcos, externo e interno; e se toca naquele ponto um dos arcos, também toca o outro, e faz com a corda ângulos iguais aos que estão nos arcos externos, cada um a cada um.* (Cunha, 1790, pp. 15-16)

Notemos que esta proposição, que enuncia uma equivalência, contém no seu enunciado a Proposição III, 32 dos *Elementos*, uma vez que a proposição enunciada pelo matemático grego corresponde à segunda implicação enunciada por Anastácio da Cunha. Vejamos a demonstração do resultado apresentado nos *Principios Mathematicos*:

Demonstração:

Pelo extremo A da corda AB de um arco do círculo ABC [Fig. 5.4]esteja tirada a reta DAE fazendo o ângulo BAE igual ao ângulo ACB que está no arco ACB externo a respeito do ângulo BAE. Digo que DE toca em A os arcos AFB, ACB.

A reta que se tirar do ponto A a qualquer outro ponto do arco AFB, estará toda dentro do círculo [2.5][143], e fará com AB um ângulo que por estar em arco $> ACB$, será $< ACB$ [2.4.cor.][144], e logo também $< BAE$: logo está o arco AFB todo entre AB e AE.

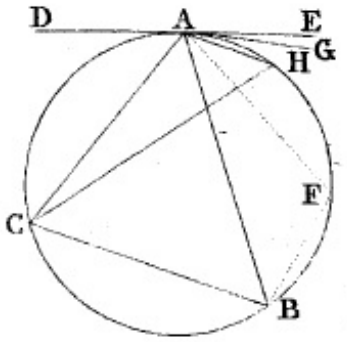


Figura 5.4: Ilustração da primeira parte da demonstração da Proposição II, 6.

Se é possível, tire-se do ponto A entre AE, e o arco AFB uma reta AG. Pois é o ângulo $BAE = BCA$ [por suposição], será o ângulo $BAG < BCA$: faça-se pois o ângulo $BCH = BAG$, e tire-se AH. Será também o ângulo $BCH = BAH$ [2.4.cor.][145], e logo também o ângulo $BAH = BAG$. Absurdo.

Logo, entre AE, e o arco AFB não pode tirar-se do ponto A reta alguma:logo AE e o arco AFB tocam-se em A.

[143] ***Proposição II, 5:*** *Na corda de um arco de círculo não há ponto, que não esteja dentro do círculo, exceto os extremos.* (Cunha, 1790, p. 15)

[144] ***Proposição II, 4. Corol. 1:*** *Em maior arco está menor ângulo, e maior ângulo está em menor arco.* (Cunha, 1790, p. 15)

[145] ***Proposição II, 4. Corol. 2:*** *ângulos iguais estão em arcos iguais; e em arcos iguais estão ângulos iguais.* (Cunha, 1790, p. 15)

De um ponto qualquer F do arco AFB tirem-se as retas FA e FB: serão iguais a dois retos os ângulos ACB, AFB juntos [2. 4. cor][146]: mas também os dois BAE, BAD juntos são iguais a dois retos [1. 6. cor.][147]; logo os dois ACB, AFB juntos são iguais aos dois BAE, BAD juntos: mas é o ângulo $BAD = AFB$ [supp.]; logo também o ângulo $BAD = AFB$; e logo também AD, e o arco ACB se tocam em A.

Toquem-se em I o arco IL do círculo ILM e a reta IN [Fig. 5.5]. Tire-se a reta IL. Faça-se no arco externo um ângulo LMI. Digo eu o ângulo $LIN = LMI$. Se possível , não seja o ângulo $LIN = LMI$. Faça-se o ângulo $LIO = LMI$; será também IO tangente ao arco IL em I [dem], mas do ponto I podem tirar-se entre as retas IN, IO quantas retas se quiser; logo entre o arco IL, e uma sua tangente poderão tirar-se duas retas, contra a definição III, e logo o ângulo $LIN = LMI$. Pois o ângulo LIN é $= LMI$, tocará a reta NIP ambos os arcos [dem]. ■

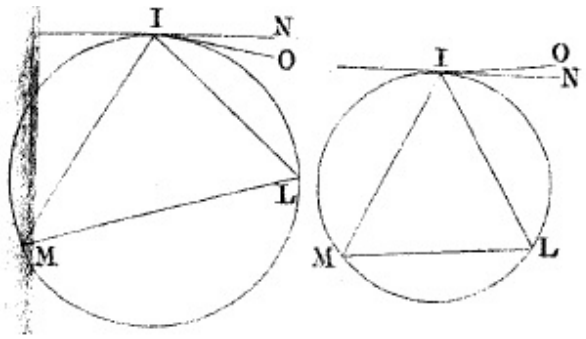


Figura 5.5: Ilustração da segunda parte da demonstração da Proposição II, 6.

Embora os *Principios Mathematicos* sejam escritos seguindo a estrutura dos clássicos gregos, Anastácio da Cunha não se coíbe de utilizar os mais recentes desenvolvimentos da matemática, nomeadamente a introdução de notação matemática com os símbolos de maior, menor e igual, mostrando a capacidade exemplar de Anastácio da Cunha em aliar o tradicional ao moderno.

Anastácio da Cunha apresenta em seguida corolários que resumem as propriedades mais conhecidas do conceito de reta tangente ao círculo e que correspondem às proposições usualmente associadas a este conceito nos *Elementos*.

1. *Desta proposição, e do princípio da sua demonstração se colige que a reta, que*

[146] ***Proposição II, 4. Corol. 4:*** *No quadrilátero inscrito em um círculo [isto é, no quadrilátero, que tem os vértices de tosos os seus ângulos na circunferência] cada dois ânguls opostos são, juntos, iguais a dois retos.* (Cunha, 1790, p. 15)

[147] ***Proposição I, 6. Corol. 2:*** *O ângulo que tem os seus lados em direitura é igual a dois retos.* (Cunha, 1790, p. 8)

> *toca a circunferência de um círculo em um ponto, não a encontra em outro ponto.* (Cunha, 1790, p. 17)

Este corolário não se encontra demonstrado nos *Principios Mathematicos*, embora encontremos a sua demonstração nos *Principios de Geometria*. Na verdade, tal demonstração assenta num resultado ainda não demonstrado nos *Principios Mathematicos* pelo que não pode ser aqui utilizada. Notemos que este primeiro corolário, que enuncia a unicidade do ponto de tangência, não se encontra nos *Elementos*, embora seja possível encontrar este resultado em diversas edições da obra do matemático grego, tais como as de Tacquet e Manuel de Campos.

Anastácio da Cunha explora, no corolário 2, a relação de perpendicularidade entre a tangente e cordas passando pelo ponto de tangência:

> ***2.*** *A reta, que passa pelo centro, e pelo ponto de contacto, faz ângulos retos com a tangente; e a reta que no contacto faz ângulo reto com a tangente, passa pelo centro [produzida, se necessário for].* (Cunha, 1790, p. 17)

As duas afirmações enunciadas neste corolário correspondem, respetivamente, às Proposições 18 e 19 dos *Elementos* e, novamente, não se encontram demonstradas. Contudo, Anastácio da Cunha demonstra este corolário nos *Principios de Geometria* nos seguintes termos:

> O ângulo que está em semicírculo é reto [4. cor.[148]]; e o arco em que estiver um ângulo reto não pode ser maior nem menor que semicírculo [4. cor.]. (Cunha, s.d. Livro II, fl. 4)

Notemos que nesta demonstração Anastácio da Cunha se limita a indicar qual o resultado que, em conjunto com a Proposição II, 6 permite demonstrar o corolário, num exemplo da forma sintética como expõe os seus resultados.

O corolário seguinte corresponde ao resultado tradicionalmente associado ao conceito de reta tangente ao círculo: a relação de perpendicularidade entre a tangente e o raio pelo ponto de tangência:

> ***3.*** *A reta, que de um ponto da circunferência de um círculo faz ângulo reto com uma reta, que passa pelo centro, toca nesse ponto a circunferência.* (Cunha, 1790, p. 17)

[148] ***Proposição II, 4. Corol. 3:*** *O ângulo que está em semicírculo, é reto; o que está em arco maior que semicírculo, agudo; e o que está em arco menor que semicírculo, obtuso.* (Cunha, s.d., Livro II, fl. 2v)

Este corolário corresponde ao porisma da Proposição II, 16 dos *Elementos*, e que se deduz de forma imediata da primeira parte dessa proposição. Mais uma vez a demonstração deste corolário não é aqui apresentada.

O estudo das propriedades do conceito de reta tangente ao círculo termina com o enunciado de um último corolário:

> ***4.*** *Um arco de círculo não pode em um mesmo ponto tocar duas retas.* (Cunha, 1790, p. 17)

Este corolário não se encontra, à semelhança dos anteriores, demonstrado e é equivalente à segunda arte da Proposição III, 16 dos *Elementos*, pelo que vemos Anastácio da Cunha apresentar numa única proposição, e respetivos corolários, todas as proposições dos *Elementos* relacionados com as propriedades do nosso conceito. Contudo, a ordem original pela qual apresenta estes resultados faz com que as demonstrações se tornem bastante mais simples do que nos *Elementos*, sendo possível obter grande parte dos resultados como corolários de uma só proposição. Assim, parece-nos que a ordem escolhida por Anastácio da Cunha não poderia ter sido arbitrária, mas sim demonstrativa de uma profunda reflexão em torno dos conceitos e das suas propriedades, que resulta na capacidade de síntese e concisão que lhe são reconhecidas.

Terminado o estudo das propriedades da reta tangente ao círculo seria de esperar que surgisse, numa das proposições seguintes, o método de construção dessa tangente, contudo tal método apenas é enunciado no livro VII dos *Principios Mathematicos* nos seguintes termos:

> ***Proposição VII, 3:*** *De um ponto dado tirar uma reta que toque um círculo dado.* (Cunha, 1790, p. 86)

Embora esta proposição corresponda à Proposição III, 17 dos *Elementos*, a abordagem de Anastácio da Cunha é bastante diferente da que usualmente encontramos nas edições da obra de Euclides. Anastácio da Cunha começa por apresentar uma investigação sobre a resolução deste problema, investigação essa onde aplica o método analítico, isto é, supondo o problema resolvido:

> **Investigação**
>
> Se o ponto dado estiver dentro do círculo dado, será impossível o que se pede.
>
> Esteja o ponto A na circunferência [Fig. 5.6]. Suponha-se AD a tangente pedida: tire-se o raio AE, que será perpendicular a AD [2. 6. cor.]

Esteja o ponto A fora do círculo BC. Suponha-se AB a tangente pedida: tire-se o raio BF: será reto o ângulo ABF [2. 6. cor.].

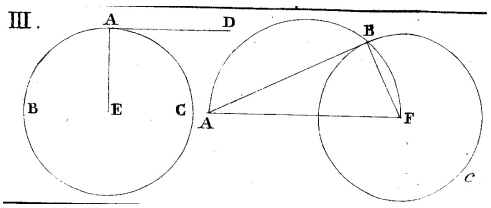


Figura 5.6: Ilustração da demonstração da Proposição VII, 3.

Salientemos que Anastácio da Cunha considera todas as posições possíveis para o ponto A o que não acontece nos *Elementos*. Com esta investigação, Anastácio da Cunha consegue perceber quais os passos necessários à resolução deste problema, resolução que é apresentada ao leitor recorrendo ao método sintético:

Composição

Esteja o ponto A na circunferência [Fig. 5.6]. Tire-se o raio AE: levante-se AD perpendicular a AE: será AD a tangente pedida [2. 6. cor.]

Esteja o ponto A fora do círculo BC. Ache-se o centro F, e tire-se AF. Sobre o diâmetro AF descreva-se o semicírculo ABF (isto é, sobre AF como corda descreva-se o arco de círculo ABF capaz de ângulo reto [7. 2.][149]), o qual cortará a circunferência BC em algum ponto B. Tire-se AB que será a tangente pedida.

Tire-se BF. Será reto o ângulo ABF [construção e 2.4. cor.[150]]; e logo a reta AB tangente ao círculo [2. 6. cor.]. ■

É de referir que este método de resolução de problemas, utilizando o método analítico na investigação e o método sintético na composição, é o método escolhido por Anastácio da Cunha para a resolução dos problemas que apresenta neste livro VII, sendo um exemplo da forma exímia com que Anastácio da Cunha aplica ambos os métodos sintético e analítico na sua obra.

À semelhança do que acontece com a Proposição II, 6 dos *Principios Mathematicos*, também aqui o facto de Anastácio da Cunha apresentar esta proposição numa ordem pouco ortodoxa torna a sua demonstração mais simples, fruto da utilização do teorema da construção do arco capaz de um ângulo reto. Notemos também que este resultado se encontra num livro dedicado

[149] ***Proposição VII, 2:*** *Sobre uma reta dada como corda descrever um arco de círculo capaz de um ângulo dado.* (Cunha, 1790, p. 85)

[150] ***Proposição II, 4, corolário 3:*** *O ângulo que está em semicírculo é reto.* (Cunha, 1790, p. 15)

à resolução de problemas envolvendo o círculos, sendo a sua localização escolhida em função do tipo de proposição e não apenas de conteúdo. Esta proposição é seguida de dois corolários que enunciam resultados que não se encontram usualmente nas obras de geometria portuguesas do século XVIII:

> ***Corolário***
>
> ***1.*** *De qualquer ponto, que esteja fora de um círculo, podem tirar-se duas retas que toquem esse círculo.*
>
> ***2.*** *E essas retas serão iguais entre si.* (Cunha, 1970, p. 87)

O primeiro destes corolários não se encontra demonstrado por Anastácio da Cunha, talvez devido ao facto de, novamente, ser uma demonstração evidente, que assenta apenas no facto de sobre um segmento de reta ser possível descrever dois semicírculos. A demonstração do segundo corolário é apresentada por Anastácio da Cunha nos seguintes termos:

> As retas GH, GI toquem nos pontos H e I o círculo HI [Fig. 5.7]. Tirem-se os raios IL e LH. Serão retos os ângulos GHL e GIL [2. 6. cor], e logo agudos os ângulos HGL e LGI [I. 12]; mas os ângulos GHL, GIL são iguais entre si; e por ser $LH = LI$, e $GL : LH = GL : LI$, logo também será $GH : GL = GI : GL$ [5. 8.][151], e logo $GH = GI$ [3. 3. cor.][152]. ■

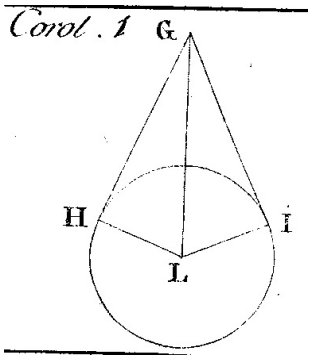


Figura 5.7: Ilustração da demonstração do corolário da proposição VI, 3.

Anastácio da Cunha termina assim o estudo do conceito de reta tangente ao círculo nos seus *Principios Mathematicos*, embora utilize a sua noção de tangência na procura de uma solução para a questão do ângulo de contingência.

[151] ***Proposição V, 8:*** *Se um ângulo de um triângulo for igual a um ângulo de outro triângulo; e os lados de outros dois ângulos, um de um triângulo, outro do outro, forem proporcionais; os terceiros ângulos serão, ou iguais entre si, ou juntos iguais a dois retos.* (Cunha, 1790, p. 66)

[152] ***Proposição III, 3, Corolário:*** *Consequentes iguais entre si têm antecedentes iguais entre si.* (Cunha, 1790, p. 22)

5.3 José Anastácio da Cunha e o "desaventurado cornicular"

Anastácio da Cunha critica, no Prólogo dos seus *Principios de Geometria*, a definição de ângulo proposta por Euclides nos seus *Elementos*[153]pelo que apresenta nos seus *Principios Mathematicos* uma definição alternativa deste conceito:

> **Definição I, 7**: Ângulo é a figura, que duas linhas formam concorrendo em um ponto. Este ponto chama-se Vértice; e as linhas Lados. (Cunha, 1790, p. 1)

Anastácio da Cunha a palavra "inclinação"que criticara duramente por ser, tal como "ângulo"igualmente confusa e vaga e pouco familiar.

Apesar das objeções a este conceito, a questão que lhe merece uma crítica mais profunda é a consideração do ângulo de contingência como um verdadeiro ângulo e a sua comparação com ângulos retilíneos, efetuada por Euclides na Proposição III, 16 dos *Elementos*:

> *Nenhum porém é tão digno de nota como o da décima sexta do terceiro, pelas muitas perplexidades, e relevantes paradoxos, que introduziu na matemática. Ali Euclides (ou talvez algum dos seus antigos editores), supondo que o círculo e a tangente formam ângulo, contradiz manifestamente a definição oitava do primeiro. Supondo esse ângulo menor que qualquer ângulo agudo, contradiz manifestamente a proposição primeira do décimo. Enfim os geómetras sabem quanto se tem guerreado por causa do desaventurado κερατωδης* (Cunha, s.d., Prólogo, fl. 10-10v)

Para contrariar a comparação entre o ângulo de contingência e um ângulo retilíneo agudo, Anastácio da Cunha recorre à Proposição X, 1 dos *Elementos*:

> ***Proposição X, 1:*** *Dadas duas grandezas desiguais, se da maior se subtrair uma grandeza maior que a sua metade, e da restante se subtrair uma grandeza maior que a sua metade, repetindo continuamente este processo, restará uma grandeza menor que a menor das grandezas inicialmente consideradas.* (Heath, 1956, vol. III, p. 14)

Deste modo, é fácil verificar que considerando o ângulo de contingência e um ângulo retilíneo agudo, e aceitando a Proposição III, 16 de Euclides como verdadeira, o ângulo retilíneo agudo será o maior dos ângulos considerados. Assim, aplicando-lhe a Proposição X, 1, restará sempre um ângulo agudo, cada vez mais pequeno que, pela Proposição III, 16, será sempre maior que o ângulo de contingência, logo a Proposição X, 1 não seria válida. Uma vez que se aceita a

[153]A estre propósito veja-se Duarte et al (2006, pp. 232-234).

Proposição X, 1, princípio basilar do método de exaustão de demonstração, não é possível aceitar como verdadeira a comparação entre o ângulo de contingência e o ângulo retilíneo agudo.

Anastácio da Cunha termina a crítica que faz à Proposição III, 16 dos *Elementos* fazendo referência às quezílias em torno deste ângulo, denominando-o mesmo de "desaventurado cornicular".

A definição alternativa de ângulo apresentada por Anastácio da Cunha nos seus *Principios Mathematicos*, assim como todo o tratamento dado ao conceito de reta tangente nessa obra, evitam esta questão polémica ao mesmo tempo que permitem a dedução de todos os resultados usualmente associados à reta tangente ao círculo.

A originalidade de Anastácio da Cunha é criticada por Giusti (1990, pp. 40-41):

> *Mas o preço que devemos pagar para a obter [generalização do conceito de tangência] é muito elevado, pois faz esquecer uma das lições mais importantes da geometria cartesiana, nomeadamente que o ângulo entre duas curvas é o ângulo entre as suas tangentes (...).* (Giusti, 1990, p. 41)

Embora não o defina diretamente desta forma, Anastácio da Cunha considera de facto o ângulo entre duas curvas como o ângulo entre as tangentes, em particular enquanto quantidade, como é possível ver pela definição de quantidade de ângulo curvilíneo que apresenta no livro XVI dos seus *Principios Mathematicos*:

> ***Definição XVI, 8:*** *Quantidade de um ângulo curvilíneo é o ângulo que fazem as retas que no vértice tocam os lados.* (Cunha, 1790, p. 229)

Esta definição, a exemplo da de Azevedo Fortes, que estudámos anteriormente, permite a comparação entre diferentes tipos de ângulos, uma vez que todos são reduzidos a ângulos retilíneos. É também de notar que a definição apresenta faz com que o ângulo de contingência seja uma quantidade nula, não sendo sequer um ângulo, uma vez que considerando o ângulo retilíneo cujos lados são as tangentes dos lados do ângulo de contingência obtemos apenas uma reta, a própria tangente, que consigo própria apenas faz o ângulo nulo, ângulo que à época contraria a definição apresentada.

Anastácio da Cunha apresenta mais uma vez não só críticas pertinentes mas uma solução para os problemas que encontra nos fundamentos da matemática, procurando que o seu leitor não seja confrontado com questões dúbias mas sim com todas as ferramentas necessárias para a resolução dos problemas.

5.4 Anastácio da Cunha & João Ângelo Brunelli

Anastácio da Cunha, enquanto professor de geometria na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, tem de lecionar os fundamentos da geometria euclidiana seguindo Euclides.

Anastácio da Cunha, apesar do reconhecido valor que atribui à obra do matemático grego, não deixa de lhe imputar alguns defeitos pelo que tenta utilizar um compêndio da sua autoria para esta lecionação, havendo disso registo na ata de 20 de abril de 1776 da Congregação de Matemática:

> *E propondo o Doutor José Anastácio Lente de Geometria um Compêndio dos Elementos práticos da mesma Geometria, por método mais breve e mais fácil para os Estudantes aprenderem; se mandou examinar pelos mais professores.* (Actas, 1982, p. 30)

Apesar da indicação de que esta obra seria examinada pelos restantes professores não se encontra, em nenhuma outra ata, qualquer referência ao resultado deste exame. Encontramos sim referência a este facto nas reminiscências do Morgado de Mateus que a este propósito escreve:

> *Na própria Congregação em que propôs que lhe deixassem ensinar os estudantes sem se adstringir aos Elementos de Euclides - sempre fastidiosos aos principiantes e que não os desembrulham para, por si mesmo, exercitarem a invenção e a aplicação à prática - negou-se-lhe.* (Rodrigues et al, 2013, p. 62)

Assim, Anastácio da Cunha encontra-se numa situação paradoxal: tem de ensinar os fundamentos da geometria utilizando Euclides, havendo indicações da Universidade para que se utilize a tradução de João Ângelo Brunelli, mas defende uma abordagem diferente a estes fundamentos que, posteriormente, apresenta nos *Principios Mathematicos*. Essa visão díspar é evidente no que diz respeito ao tratamento dado ao nosso conceito.

Elementos	**Brunelli, 1768**	**Cunha, 1790**
Definição III, 2	Válida apenas para o círculo.	Definição geral de tangência, aplicável a todo o tipo de curvas.
Proposição III, 16	O enunciado da primeira parte é o clássico, apresentando uma interpretação original da questão do ângulo de contingência, sem lhe efetuar qualquer referência. Apresenta o porisma de Euclides, explicitando a relação de perpendicularidade entre a tangente e o raio pelo ponto de tangência. Prova a unicidade do ponto de tangência.	Apenas o porisma é apresentado de forma explícita. Enuncia, como corolários da Proposição II, 6 dos *Principios Mathematicos* a unicidade da tangente e o ponto de tangência. A formulação da proposição que encontramos em Euclides é alvo de críticas no prólogo dos *Principios de Geometria*, não sendo aceite como verdadeira a comparação envolvendo o ângulo de contingência e o ângulo do semicírculo.
Proposição III, 17	Apresenta a resolução do problema para os casos em que o ponto está sobre a circunferência ou no exterior do círculo.	Resolve o problema para todas as posições possíveis do ponto (interior do círculo, sobre a circunferência ou exterior do círculo). A resolução propriamente dita é antecedida de uma investigação onde é aplicado o método analítico. A demonstração utiliza a construção do arco capaz do ângulo reto. Contém um corolário onde é provada a existência de duas tangentes iguais em inclinação e comprimento.
Proposição III, 18 e Proposição III, 19	São enunciadas separadamente, seguindo Euclides.	São apresentadas num único corolário, numa formulação que torna evidente o facto de serem recíprocas parciais.
Proposição III, 32	Enunciada apenas uma implicação, seguindo Euclides.	Resultado principal sobre o nosso conceito, a partir do qual todos os outros são deduzidos. Além do resultado enunciado por Euclides é demonstrado o seu recíproco.

Tabela 5.1: Estudo comparativo entre João Ângelo Brunelli e José Anastácio da Cunha.

5.5 O conceito de reta tangente a uma curva no cálculo diferencial de Anastácio da Cunha

Anastácio da Cunha, reconhecendo o rigor e a exatidão do método geométrico, pretende aplicá-lo ao cálculo diferencial. Uma reflexão a este propósito encontra-se nos *Principios do Calculo Fluxionario*, um manuscrito que se encontra no Arquivo da Casa de Mateus e cuja versão mais completa, embora apógrafa, se encontra publicada na obra *José Anastácio da Cunha Os Inéditos*[154].

No prólogo dos *Principios do Calculo Fluxionario*, Anastácio da Cunha defende uma abordagem ao cálculo semelhante à utilizada na geometria:

> *Pode pois ensinar-se a doutrina das fluxões sem recorrer a noções alheias da geometria. (...)*
>
> *Com a fraseologia e cláusulas que proponho, fica este nobilíssimo método estabelecido sobre noções geométricas (...).* (Cunha, 1780, s.p.))

É assim evidente a vontade de Anastácio da Cunha em unir a geometria e análise, o que no caso do nosso conceito é particularmente relevante dado o seu estudo nos dois contextos.

Para entender o tratamento dado por Anastácio da Cunha ao conceito de tangente a uma curva, e os respetivos métodos comecemos por analisar os conceitos fundamentais do cálculo diferencial apresentados pelo nosso autor.

5.5.1 Os conceitos fundamentais do cálculo diferencial no livro XV dos *Principios Mathematicos*

O primeiro conceito apresentado por Anastácio da Cunha é o conceito de variável que é definido nos seguintes termos:

> ***Definição XV, 1.*** *Se uma expressão admitir mais de um valor, quando outra expressão admite um só, chamar-se-á esta constante, e aquela variável.* (Cunha, 1790, p. 193)

A esta definição, que é a definição atual de constante e variável, segue-se a definição de quantidade infinita e infinitésimo, dois dos conceitos mais relevantes para o entendimento e fundamentos do cálculo infinitesimal.

[154]Um estudo deste manuscrito encontra-se em Domingues et al (2006, pp. 265-275).

> ***Definição XV, 2.*** *A variável que poder sempre admitir valor maior que qualquer grandeza que se proponha chamar-se-á infinita; e a variável que poder sempre admitir valor menor que qualquer grandeza que se proponha, chamar-se-á infinitésima.* (Cunha, 1790, p. 193)

Como nota Youschkevitch (1973, p. 17) Anastácio da Cunha não utiliza a noção de infinito em potencial nem a noção de limite nestas suas definições. De resto, o uso do infinito em potencial, ou infinito escolástico, é apontado por Anastácio da Cunha como sendo a causa das dificuldades de entendimento do cálculo infinitesimal:

> *(...) o verdadeiro objeto das controvérsias acerca das fluxões é o infinito escolástico.* (Cunha, 1780, s.p.)

A comparação de grandezas efetuada na Definição XV, 2, em que uma grandeza é apresentada como sendo sempre inferior/superior a uma grandeza dada, é algo comum nos *Elementos*, podendo nós inferir, desde logo a intenção de Anastácio da Cunha em tratar o cálculo fluxionário com o rigor e as ferramentas da geometria.

A terceira definição apresentada neste livro é a definição de função:

> ***Definição XV, 3.*** *Se o valor de uma expressão A depender de outra expressão B, chamar-se-á A função de B; e B raiz de A.* (Cunha, 1790, p. 193)

A esta definição segue-se a notação a utilizar: as primeiras letras do alfabeto para as constantes; as últimas letras do alfabeto para as varáveis; letras gregas maiúsculas para as funções.

A definição 4 do livro XV é reconhecidamente uma das definições mais notáveis de Anastácio da Cunha: a definição de fluxão:

> ***Definição XV, 4.*** *Escolhida qualquer grandeza, homogénea a uma raiz x, para se chamar fluxão dessa raiz, e denotada assim dx; chamar-se-á fluxão de Γx, e se denotará assim de $d\Gamma x$, a grandeza que faria $\frac{d\Gamma x}{dx}$ constante e $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ infinitésimo ou cifra, se dx fosse infinitésimo, e constante tudo o que não depende de dx.* (Cunha, 1790, p. 194)

Como nota Youschkevitch (1973, pp. 18-19) esta definição é equivalente à definição atual de diferencial de uma função, apresentando-a mesmo como a primeira definição analítica e rigorosa de diferencial.

É também de notar que, nesta definição, Anastácio da Cunha une a terminologia de Newton à notação de Leibniz, optando pela terminologia de um dos seus autores de referência, mas abdicando da sua notação.

As fluxões de ordem superior são também definidas por Anastácio da Cunha:

> ***Definição XV, 5.*** *$d(dz)$ chama-se segunda fluxão de z; $d(d(dz))$, terceira fluxão de z; e assim por diante.* (Cunha, 1790, p. 194)

Anastácio da Cunha utiliza estas definições para deduzir, nas primeiras proposições deste livro XV, regras para a determinação das fluxões de diversas funções, aliando em seguida o conceito de fluxão ao de tangente para a resolução do problema genérico da determinação de retas tangentes a curvas.

5.5.2 As proposições

A primeira proposição envolvendo o cálculo diferencial em que Anastácio da Cunha utiliza o conceito de tangente é a proposição 14 do livro XV onde o nosso matemático relaciona o conceito de tangente com o problema da retificação de curvas:

> ***Proposição XV, 14.*** *A reta GH [Fig. 5.8] toque a mesma curva no ponto C [Fig. 5.8], e encontre em G e H as coordenadas EA, ED, produzidas se necessário for: se BE for fluxão de AB, será FH fluxão da ordenada BC, e CH fluxão do arco AC.* (Cunha, 1790, p. 201)

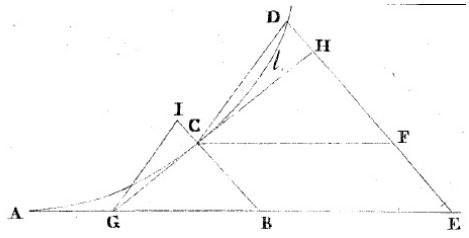


Figura 5.8: Ilustração da Proposição XV, 14.

Esta proposição começa por referir uma curva que não está definida, tratando-se da curva que Anastácio da Cunha tinha anteriormente considerado na Proposição XV, 13[155]. A demonstração desta proposição, onde são enunciados dois resultados distintos é apresentada de forma sucinta, não apresentando Anastácio da Cunha uma justificação detalhada de vários dos passos apresentados:

[155] *Represente AB a abcissa, e BC a ordenada correspondente ao arco qualquer AC de uma curva regular AD [isto é, de uma curva, cuja ordenada é função da abcissa] (...).* (Cunha, 1790, p. 200)

Tire-se a corda CD, e tire-se GI paralela a CD. Suponha-se AB constante, e BE infinitésima, e seja proposta qualquer linha λ: tome-se $BE < \lambda$: e se CI não sair $< \lambda$, tome-se $CI < \lambda$, e tirada GI, tire-se CD paralela a GI; e cortará CD o arco em algum ponto D, por se não poder tirar entre a tangente CH e o arco CD reta alguma: tirada então a ordenada DE, será BE ainda menor do que se havia suposto: logo AB constante, e BE infinitésima fariam GB, BC e CG constantes, e CI e por consequência $CG \backsim GI$[156] infinitésima. Os triângulos semelhantes dão $\frac{FH}{BE}\left[=\frac{FH}{CF}\right] = \frac{BC}{BG}$; logo AB constante e BE infinitésima fariam $\frac{FH}{BE}$ constante, e $\frac{ED-BC}{BE} - \frac{FH}{BE}\left[=\frac{DF}{BE} - \frac{FH}{BE} = \pm\frac{DH}{BE} = \frac{CI}{BG}\right]$ infinitésimo. Logo se BE for fluxão de AB, será FH fluxão da ordenada BC.

É o arco $ClD > CD$, e $< CH + DH$; logo $\frac{ClD}{BE} > \frac{CD}{BE}$, e $< \frac{CG+DH}{BE}$ isto é, $> \frac{GI}{BG}$, e $< \frac{CG}{BG} + \frac{CI}{BG}$: Mas AB constante e BE infinitésimo fariam $GI = CG \pm infinitesimo$, e CI infinitésimo; e logo $\frac{ClD}{BE} > \frac{CG}{BG} \pm infinitesimo$, e $< \frac{CG}{BG} + infinitesimo$; e logo $\frac{ClD}{BE} = \frac{CG}{BG} \pm infinitesimo$; e logo $\frac{CH}{BE}\left[=\frac{CG}{GB}\right]$ constante, e $\frac{ACD-AC}{BE} - \frac{CH}{BE}\left[=\frac{ClD}{BE} - \frac{CH}{BE} = \frac{CG}{BG} \pm infinitesimo - \frac{CH}{BE}\right]$ infinitésimo. Logo, se BE for fluxão de AB, será CH fluxão de AC. ■

Nesta demonstração, Anastácio da Cunha deduz que $\frac{CH}{BE} = \frac{CG}{GB}$, resultado que apresenta em termos geométricos no manuscrito *Principios de cálculo fluxionário*:

> *(...) vemos que a fluxão do arco é para a da abcissa como a tangente para a subtangente.* (Cunha, 1780, s.p.)

Como notam Domingues et al (2006, p. 268) a tangente corresponde ao comprimento de CG e a subtangente ao comprimento de GB, pelo que a fluxão do arco AC será dada por $\frac{CG}{GB}$. Considerando a curva num referencial ortogonal vem que a tangente é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a ordenada e a subtangente pelo que, se for conhecida a subtangente fica o triângulo completamente determinado, resumindo-se a determinação do comprimento do arco a um problema de integração. Anastácio da Cunha estabelece assim a equivalência entre o problema da determinação da reta tangente a uma curva por um ponto dado com a determinação do comprimento do arco.

Na primeira parte desta proposição Anastácio da Cunha apresenta, implicitamente, um método que permite a determinação da subtangente uma vez que $\frac{GB}{CB} = \frac{BE}{HF}$, de onde resulta

[156] O símbolo $\backsim$ é utilizado por Anastácio da Cunha para denotar a diferença entre duas grandezas.

que a subtangente é dada por $y\frac{dx}{dy}$, sendo y a ordenada do ponto, dx a fluxão da abcissa e dy a fluxão da ordenada.

Anastácio da Cunha aplica este resultado na determinação da reta tangente a curvas específicas, sendo as primeiras curvas estudadas as secções cónicas:

> ***Proposição XVII, 1.*** *Por um ponto A, dado em um arco AB de secção cónica, também dado, tirar uma tangente.* (Cunha, 1790, p. 237)

Este enunciado é válido para qualquer secção cónica, apresentando Anastácio da Cunha um método geral para este problema e não um método específico para cada uma das cónicas. Vejamos a resolução deste problema que o nosso autor propõe:

> Ache-se o vértice C e a posição de algum diâmetro CD [Fig. 5.9]; tire-se a ordenada AD paralela às cordas, que CD corta pelo meio, e se chame y; Chame-se CD x, e achem-se os coeficientes que fazem $y^2 = Ax + Bx^2$:[157] Represente AE a tangente, e encontre em E o diâmetro DC produzido.
>
> Será $\frac{DE}{y} = \frac{dx}{dy}$ [XV, 14], e logo $DE = \frac{ydx}{dy}$. A equação dá $2ydy = Adx + 2Bxdx$, e logo $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{A+2Bx}$; logo é $DE = \frac{2y^2}{A+2Bx} = \frac{A+Bx}{A+2Bx} \times 2x$. ■

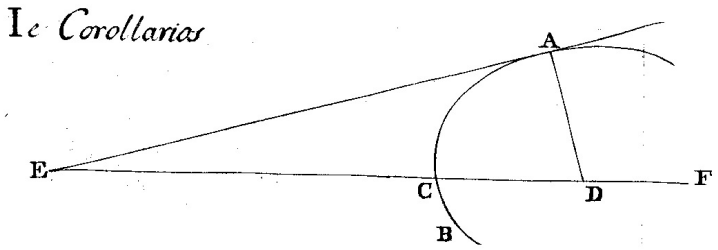


Figura 5.9: Ilustração da Proposição XVII, 1.

Anastácio da Cunha apresenta assim o método usual, à época, de determinação da reta tangente a uma curva, método que consiste em determinar o comprimento da subtangente. Fica evidente nesta proposição, o resultado provado na Proposição XV, 14, que dá o comprimento da subtangente como $\frac{ydx}{dy}$. Para obter esta subtangente é necessário calcular a derivada da expressão analítica da função que define a curva, aplicando-se as regras de diferenciação anteriormente apresentadas no livro XV.

[157] Anastácio da Cunha deduz, na segunda proposição do Livro XIV, a equação das secções cónicas concluindo que uma cónica tem uma equação do tipo $0 = \varsigma x + \delta x^2 + \zeta y^2$ (Cunha, 1790, pp. 172-173).

Uma vez que esta proposição contém o comprimento da subtangente a qualquer cónica, em função dos coeficientes que a definem, Anastácio da Cunha apresenta em seguida, como corolários, os casos particulares em que a curva é uma parábola e uma elipse:

> ***Corolário 1.*** *Seja a curva a Parábola. Será* $B = 0$ *logo* $DE = 2x$. (Cunha, 1790, p. 236)

Os valores das constantes A e B para cada uma das curvas resultam do estudo das secções cónicas efetuado no livro XIV por Anastácio da Cunha, onde o matemático português estuda as condições que satisfazem os coeficientes da equação geral para se obter cada uma das cónicas[158] obtendo-se o valor da subtangente substituindo A e B no resultado geral e por manipulação algébrica, numa demonstração que Anastácio da Cunha não apresenta na sua obra.

No caso da elipse tem-se o seguinte corolário:

> ***Corolário 2.*** *Seja Elipse; e* F *o centro. Chame-se* CF f*, e outro semidiâmetro conjugado* g*; Será* $A = \frac{2g^2}{f}$*, e* $B = -\frac{g^2}{f^2}$*, e logo* $DE = \frac{2f-x}{f-x}x$. (Cunha, 1790, p. 237)

Tal como no caso da parábola não é aqui apresentada uma demonstração detalhada deste corolário.

Anastácio da Cunha não enuncia qualquer resultado sobre a tangente à hipérbole, talvez devido à semelhança de tratamento com a elipse, dado as equações das duas curvas serem do mesmo tipo, o que resultaria em cálculos semelhantes e resultados análogos. Tendo em conta a forma sintética com que Anastácio da Cunha escreve a sua obra, não é de estranhar que evite a apresentação de exemplos em tudo semelhantes.

Contudo, Anastácio da Cunha apresenta uma caracterização completa da tangente à elipse, analisando no corolário seguinte o caso particular em que o ponto de tangência corresponde ao vértice do semidiâmetro g, ou seja, o caso em que $x = f$:

> ***Corolário 3.*** *Seja o ponto do contacto o vértice do semidiâmetro* g*: Será* $DE = \frac{f^2}{0}$*; expressão absurda, que, contudo, indica não concorrerem então a abcissa e a tangente. Por consequência, a tangente, tirada pelo vértice de um diâmetro, é paralela ao outro diâmetro conjugado.* (Cunha, 1790, p. 237-238)

Notemos que, considerando os eixos ortogonais e na posição usual - horizontal e vertical - a reta tangente assim encontrada pode ser vertical.

[158] Um estudo detalhado da abordagem de Anastácio da Cunha às secções cónicas pode ser encontrado em Vieira (2006, pp. 109-156).

O corolário 4 prende-se com o caso em que, na elipse, a abcissa e a interseção da subtangente com o eixo estão em lados opostos do centro.

> ***Corolário 4.*** *Quando x excede a f, sai negativo o valor da subtangente DE, e indica jazerem a abcissa e a subtangentes para partes opostas.* (Cunha, 1790, p. 238)

Anastácio da Cunha termina o estudo desta proposição com a determinação, para a elipse, da distância entre o centro e o ponto onde a tangente interseta o eixo.

> ***Corolário 5.*** $EF = \left[\frac{2f-x}{f-x}x + f - x = \frac{f^2}{f-x}\right] = \frac{CF^2}{DF}$. (Cunha, 1790, p. 238)

Ao contrário dos restantes corolários este encontra-se plenamente justificado, contendo em si um segundo método para determinar a tangente a uma elipse ao permitir determinar o ponto E de interseção da tangente com o eixo pela sua distância ao centro F.

Anastácio da Cunha caracteriza, na Proposição 4 deste Livro XVII, a reta tangente a uma outra curva: a Ciclóide de Huygens.

> ***Proposição XVII, 4.*** *Seja reto o ângulo das coordenadas x e y de uma curva, cuja equação é $dy = dx\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$: pede-se a subtangente.* (Cunha, 1790, p. 239)

A caracterização da tangente ocorre pela determinação da subtangente que, como já vimos, determina completamente a reta tangente à curva. Notemos que essa caracterização é bastante simples uma vez que a curva dada está definida à custa de dy e dx.

> A subtangente será para y como dx para dy, e logo como $\sqrt{x}$ para $\sqrt{2r-x}$, isto é, como x para o seno[159] de um arco circular, cujo seno verso[160] é x e raio r. ■

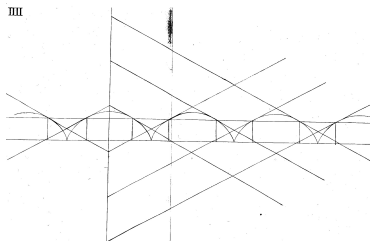


Figura 5.10: Ilustração da Proposição XVI, 4.

[159] ***Definição XVI, 1:*** *Seno reto, ou somente seno, de um arco de círculo, é a perpendicular conduzida de um extremo do arco ao raio que se termina no outro extremo.* (Cunha, 1790, p. 205)

[160] ***Definição XVI, 2:*** *Seno verso é o segmento que o arco e o seno reto cortam nesse raio.* (Cunha, 1790, p. 205)

Novamente demonstração de Anastácio da Cunha é bastante sucinta não havendo referência aos resultados que a sustentam.

A relação que Anastácio da Cunha estabelece entre a curva e as razões trigonométricas tem como objetivo permitir a construção da reta tangente à ciclóide, pois dados o seno verso x e o raio r é fácil construir o triângulo retângulo que permite obter o valor do seno, ficando determinadas todas as entidades necessárias à determinação do comprimento da subatangente.

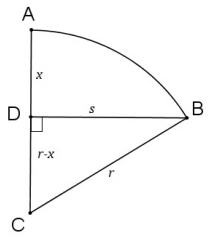


Figura 5.11: Ilustração da relação entre o raio, o seno e o senoverso de um arco AB.

Esta forma de definir a subtangente, em termos trigonométricos, poderia também ter como objetivo ajudar na compreensão do scholio onde a Ciclóide de Huygens é caracterizada sem recurso a fluxões.

Na proposição seguinte Anastácio da Cunha volta a determinar retas tangentes a curvas, neste caso nos pontos múltiplos das curvas:

> ***Proposição XVII, 5.*** *Dada a equação de uma curva algébrica, achar-lhe os pontos múltiplos; isto é, achar onde a curva se cruza. Tirar também por este ponto tangentes.* (Cunha, 1790, p. 240)

Esta proposição contém em si dois resultados, sendo que a determinação da reta tangente depende, diretamente, da caracterização efetuada por Anastácio da Cunha dos pontos múltiplos. Comecemos por notar que esta proposição é válida para curvas algébricas, curvas definidas por Anastácio da Cunha na Definição 4 do Livro XIV, como curvas que podem ser representadas por uma equação do tipo $0 = \alpha + \beta x + \delta x^2 + \eta x^3 + \&c. + \gamma y + \epsilon xy + \theta x^2 y + \&c. + \zeta y^2 + \iota xy^2 + \&c.$ com um número finito de termos, onde x e y são as coordenadas e $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ são números positivos, negativos ou zero (Cunha, 1790, p. 170). Vejamos a demonstração que Anastácio da Cunha apresenta para o primeiro resultado:

> Sejam x e y as coordenadas da curva proposta; denotem $A, B, C, D, \&c.$ expressões tais como $\alpha + \varsigma x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + xy^3 + \&c.$; e seja $A = 0$ a equação da curva proposta. Será $dA = Bdx + Cdy = 0$. Se dois ramos da curva se

cruzarem, corresponderão ao ponto do cruzamento duas coordenadas pertencentes a um ramo, coincidindo com as duas coordenadas pertencentes ao outro ramo: e então considerando x como número principal[161], terá a equação $A = 0$ duas raízes iguais, e considerando y como número principal também terá duas raízes iguais: e será $B = 0$, e $C = 0$, como se colhe facilmente do corolário da proposição XI, do livro X[162].

As três equações $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ determinarão a abcissa e a ordenada que correspondem ao ponto onde a curva se cruza. Seja r a abcissa x, e s a ordenada y que correspondem a esse ponto: Da mesma sorte que da proposição XI do livro X se colige, no corolário, que duas raízes iguais em uma equação $\Gamma x = 0$, dão $\frac{d\Gamma x}{dx} = 0$, se colige também facilmente, que três raízes iguais dão $\frac{d^2\Gamma x}{dx^2}$; e quatro $\frac{d^3\Gamma x}{dx^3}$; e assim por diante. Por isso, se três porções da curva se cruzarem, terá x três valores iguais, cada um a r, e y outros três valores iguais cada um a s, que farão $\frac{d^2A}{dx^2} = 0$, e $\frac{d^2A}{dy^2} = 0$; se quatro arcos se cruzarem terá x quatro valores iguais cada um a r, e y quatro valores iguais cada um a s, que farão $\frac{d^3A}{dx^3} = 0$, e $\frac{d^3A}{dy^3} = 0$: e assim por diante. ■

Esta demonstração apresenta assim um método de determinação dos pontos múltiplos de uma curva, método que embora possa ser traduzido em termos de fluxões assenta a sua demonstração num resultado de álgebra, sendo esta proposição mais um exemplo da forma como Anastácio da Cunha consegue juntar diferentes ramos da matemática que são muitas vezes tratados separadamente.

Conhecido o procedimento para determinar os pontos múltiplos, Anastácio da Cunha apresenta o método para traçar as tangentes à curva por estes pontos:

Por isso, cruzando-se só dois arcos, a relação entre dx e dy, que determina a posição das tangentes, se achará na equação $d^2A = d\left(\frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy\right) = d(Bdx + Cdy) = dBdx + Bd^2x + dCdy + Cd^2y = dBdx + dCdy = Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2 = 0$; cruzando-se só três arcos, achar-se na equação $d^3A = d\left(Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2\right) = dEdx^2 + 2Edxd^2x + dFdxdy + Fd^2xdy + Fdxd^2y + dGdy^2 + 2dGdyd^2y = Hdx^3 +$

[161] A definição de número principal é apresentada por Anastácio da Cunha nos seguintes termos:
Definição X, 2: *Raízes de um trinómio x^2+ax+b, são os números α, ς, que fazem $(x-\alpha)(x-\varsigma) = x^2+ax+b$: raízes de um quadrinómio $x^3 + ax^2 + bx + c$, são os números α, ς, "γ, que fazem $(x - \alpha)(x - \varsigma)(x - \gamma) = x^3 + ax^2 + bx + c$: (...) e assim em semelhantes casos. As letras a, b, c, d, &c. denotam quaisquer números positivos, ou negativos, ou também cifras: e o número, de que se subtraem as raízes para formar os fatores, chamar-se-á o número principal.* (Cunha, 1790, p. 121)

[162] ***Proposição X, 11. Corolário:*** *Se o polinómio proposto tiver duas raízes iguais entre si, uma delas será raiz do polinómio que resulta de multiplicar cada termo por uma fração que tenha por numerador o expoente que o número principal tem nesse termo, e por denominador o número principal multiplicado pelo expoente que o número principal tem no primeiro termo.* (Cunha, 1790, p. 133)

$Idx^2dy + Ldxdy^2 + Mdy^3$: e assim por diante; sendo estas equações as mesmas que se achariam se as fluxões se tomassem considerando dx independente de x, e dy independente de y. ■

Anastácio da Cunha apresenta em seguida dois exemplos de aplicação desta proposição:

Seja proposta a curva, cuja equação é $y = b \pm (x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}$. Será $ay^2 - 2ayb + ab^2 - x^3 + 2ax^2 - a^2x = 0$. Tomando a fluxão é $2aydy - 2abdy - 3x^2dx + 4axdx - a^2dx = 2a(y-b)dy + \left(-3x^2 + 4ax - a^2\right)dx = 0$; mas $2a(y-b) = 0$, e $-3x^2 + 4ax - a^2 = 0$, dão $y = b$, e $x = a$, valores que concordam com a equação $ay^2 - 2ayb + ab^2 - x^3 + 2ax^2 - a^2x = 0$; logo à abcissa a corresponde ponto múltiplo.

Tomando a segunda fluxão, como se dx e dy não dependessem de x e de y, é $2ady^2 - 6xdx^2 + 4adx^2 = 0$, e escrevendo a em lugar de x, $2ady^2 - 2adx^2 = 0$, que dá $dx = dy$, e logo a subtangente é igual à ordenada.

Embora Anastácio da Cunha não o indique, é possível verificar que existem duas retas tangentes, sendo a subtangente marcada para os dois lados da abcissa do ponto de tangência, como se comprova na representação deste primeiro exemplo para o caso particular em que $a = 2$ e $b = 1$ [Fig. 5.12].

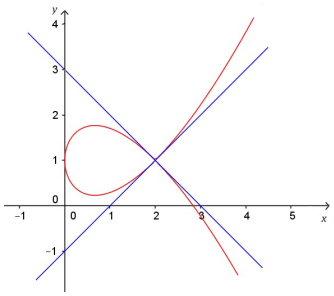


Figura 5.12: Ilustração do primeiro exemplo da Proposição XVII, 5, no caso particular em que $a = 2$ e $b = 1$.

No segundo exemplo Anastácio da Cunha apresenta uma curva que contém um ponto múltiplo onde se cruzam três ramos:

Seja $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$ a equação da curva. Será $4y^3dy - 2axydy - ay^2dx + 3bx^3dx = 2\left(2y^3 - axy\right)dy - \left(ay^2 - 3bx^2\right)dx = 0$. A equação $2y^3 - axy = 0$ dá $y = 0$, e este valor escrito na equação $ay^2 - 3bx^2 = 0$, faz $x = 0$. A equação $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$ admite estes valores, e rejeita os outros $x = \frac{a^2}{6b}$, $y = \sqrt{\frac{a^3}{12b}}$, que as duas equações

$2y^3 - axy = 0$ e $ay^2 - 3bx^2 = 0$ dão também. Logo, à abcissa 0 corresponde ponto múltiplo.

Tomando as fluxões como se dx e dy não dependessem de x e y, é $d^2\left(y^4 - axy^2 + bx^3\right) = 12y^2dy^2 - 2axdy^2 - 4aydxdy + 6bxdx^2 = 0 \times dy^2 - 0 \times dxdy + 0 \times dx^2$, equação que nada determina. Mas $d^3\left(y^4 - axy^2 + bx^3\right) = 24ydy^3 - 6adxdy^2 + 6bdx^3 = 0$ dá $dx = 0$, ou $dx = \pm dy\sqrt{\frac{a}{b}}$. O primeiro valor, $dx = 0$, indica uma tangente paralela às ordenadas.

Com este exemplo, Anastácio da Cunha mostra a necessidade de se recorrer às fluxões seguintes até ser possível obter uma relação entre dx e dy. É também de salientar a escolha de um exemplo com uma reta tangente vertical. Neste caso tem-se que é possível traçar três retas tangentes à curva pelo ponto múltiplo (veja-se, por exemplo, a representação da curva no caso particular em que $a = 2$ e $b = 1$ [Fig. 5.13]).

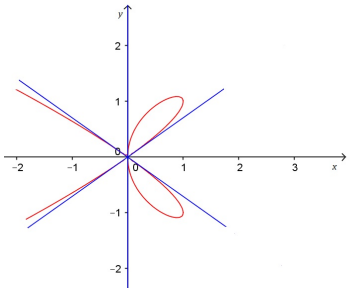


Figura 5.13: Ilustração do segundo exemplo da Proposição XVII, 5, no caso particular em que $a = 2$ e $b = 1$.

Com estes exemplos fica terminado o estudo que Anastácio da Cunha faz ao conceito de reta tangente a uma curva nos seus *Principios Mathematicos*. Do estudo efetuado a este conceito nos livros de análise destacamos a capacidade de Anastácio da Cunha em unir diferentes ramos da matemática, nomeadamente a geometria, a álgebra e a análise, apresentando demonstrações rigorosas, baseadas em princípios geométricos dos conceitos de análise.

É também de destacar a unificação, que nos parece original de Anastácio da Cunha, da definição de tangente no âmbito da geometria e da análise.

De salientar também é a profundidade com que Anastácio da Cunha estuda o conceito de reta tangente, não se limitando a traçar a reta tangente a uma curva por um ponto genérico, mas analisando o caso dos pontos múltiplos, caso particular que exige um maior e mais profundo entendimento do conceito e das suas propriedades.

A forma como escolhe e encadeia os resultados, procurando sempre analisar casos gerais e restringindo os exemplos aos que apresentam características significativamente diferentes, mostram-

nos a sua capacidade em apresentar os conteúdos de forma sucinta, sem contudo sacrificar as demonstrações ou os exemplos relevantes para o entendimento dos resultados apresentados. Estas opções permitiram-lhe apresentar num pequeno livro uma elevada quantidade de assuntos matemáticos. Contudo, esta concisão exige um trabalho árduo por parte do leitor para, por vezes, acompanhar o mestre, trabalho esse que tem como recompensa a aquisição de conhecimentos de diferentes áreas do saber matemático com todo o rigor e profundidade.

5.6 Anastácio da Cunha & Étienne Bezout

Anastácio da Cunha, pelo menos nos anos passados em Coimbra, tem contacto direto com as obras de Bezout; contudo, não encontramos, no que diz respeito ao conceito de reta tangente a uma curva, influências de Bezout no seu trabalho, seguindo os dois matemáticos caminhos distintos.

	Cunha, 1790	**Bezout, 1793**
Definição	Definição original e geral de tangência, puramente geométrica, utilizando o conceito de ângulo.	Começa por generalizar, para as cónicas, a definição de tangente ao círculo, caracterizando a tangente às cónicas pelo número de pontos em comum entre a curva e a tangente. No cálculo diferencial segue Leibniz, considerando a reta tangente como um dos lados da curva, sendo esta um polígono de infinitos lados.
Determinação da reta tangente	Método geral, válido para todas as curvas, a partir da determinação do comprimento da subtangente, comprimento que é determinado utilizando a sua definição rigorosa de fluxão.	Apresenta um primeiro método, geométrico, para as cónicas. Apresenta o método geral, proposto inicialmente por Leibniz, recorrendo ao triângulo diferencial para determinar o comprimento da subtangente.

	Cunha, 1790	**Bezout, 1793**
Tangente às cónicas	É deduzido um método geral para todas as cónicas, sendo os casos particulares da elipse e da parábola apresentados em corolário. Estuda o caso particular em que o ponto de tangência coincide com a extremidade do diâmetro da elipse e onde a aplicação da fórmula geral conduz a uma divisão por zero. Utiliza a elipse como exemplo do caso de curvas decrescentes.	São estudadas segundo dois métodos distintos: um estudo completo no âmbito da geometria diferencial; um exemplo de aplicação do método geral deduzido no cálculo diferencial, que é utilizado para realçar a simplicidade deste método geral.
Outros problemas e exemplos	Relaciona o problema das tangentes com o problema da retificação da curva. Além das cónicas o único exemplo da determinação da reta tangente é à Ciclóide de Huygens. Estuda o problema das tangentes nos pontos múltiplos de uma curva.	Apresenta diversos exemplos de determinação da tangente (parábolas gerais, hipérboles gerais, círculo, curva logarítmica, etc.). Analisa o caso em que a curva é decrescente. Resolve, genericamente, o problema da determinação da reta tangente a uma curva por um ponto no seu exterior. Resolve o problema das tangentes para curvas definidas em sistemas de eixos pouco convencionais.

Tabela 5.2: Estudo comparativo entre Anastácio da Cunha e Étienne Bezout.

Capítulo 6

Francisco Gomes Teixeira e o conceito de reta tangente a uma curva

Francisco Gomes Teixeira (Fig. 6.1) nasce a 28 de janeiro de 1851 no concelho de Armamar[163].



Figura 6.1: Quadro a óleo de Gomes Teixeira na Galeria dos Retratos da Universidade do Porto.

Frequenta o curso de Matemática na Universidade de Coimbra, obtendo diversos prémios e distinções, sendo-lhe conferido o grau de doutor em 1875 com classificação de Muito Bom com 20 valores. Nesse mesmo ano inicia a sua carreira de professor na Universidade de Coimbra, transferindo-se em 1883 para a Academia Politécnica do Porto, onde é nomeado diretor.

Aquando da criação da Universidade do Porto, em 1911, assume o cargo de reitor, cargo que ocupa até 1917. Durante os anos passados no Porto é responsável pela lecionação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Falece a 8 de fevereiro de 1933.

Gomes Teixeira tem uma carreira científica notável, publicando artigos inúmeros científicos em revistas nacionais e estrangeiras, maioritariamente na área da análise e da geometria.

[163]Um estudo detalhado da vida e obra de Gomes Teixeira encontra-se em Alves (2004).

Destacamos também o seu papel na quebra do isolamento vivido na matemática portuguesa. Em 1876, um ano após o término da sua formação, funda o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, o primeiro periódico português dedicado exclusivamente às ciências matemáticas e peça fundamental no desenvolvimento da matemática em Portugal.

> O JSMA, como meio difusor de novos conhecimentos, como meio promotor da abertura à colaboração de muitos cientistas internacionais e como meio de troca de correspondência entre matemáticos de diferentes países, muito contribuiu, por certo, para o desenvolvimento do ensino e da investigação da matemática em Portugal e foi canal de comunicação, que permitiu a abertura e o alargamento das fronteiras científicas portuguesas. (Alves, 2004, p. 198)

Também digno de destaque é o seu *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, obra em três volumes, onde apresenta um estudo completo de diversas curvas[164].

Outro dos grandes interesses de Gomes Teixeira é a história, em particular a história da matemática, deixando-nos a sua *História das Matemáticas em Portugal*, obra póstuma publicada em 1934 e contendo as lições que profere em abril de 1932, nos Altos Estudos da Academia das Ciências.

Também no campo pedagógico Gomes Teixeira deixou a sua marca. Reconhecido pelos seus alunos como um notável professor, publica para a lecionação da disciplina de "Cálculo diferencial e Integral"o *Curso de Analyse Infinitesimal*, obra de reconhecido valor pedagógico[165].

A obra científica de Gomes Teixeira é considerada de tal forma importante que o governo Português, a 8 de fevereiro de 1902, decide reunir e publicar os artigos sobre matemática e astronomia do então diretor da Academia Politécnica do Porto. Esta obra, intitulada *Obras sobre Matemática*, começa a ser publicada em 1904, sendo o seu sétimo e último volume publicado em 1915. Estas *Obras sobre Matemática* contêm parte dos trabalhos de Gomes Teixeira, e são uma forma de reconhecimento do papel desempenhado por Gomes Teixeira no desenvolvimento da matemática em Portugal.

> *Grande analista, no caso no sentido especial das matemáticas e em um sentido geral, e de robusta faculdade generalizadora, servido por uma técnica maravilhosa do algoritmo, extraordinário virtuosismo na penetração e desenvolvimento das expressões matemáticas, trouxe um sem número de aperfeiçoamentos na Análise infinitesimal e*

[164] A este propósito veja-se o capítulo 6.4.
[165] A este propósito veja-se o capítulo 6.2.

> *na geometria das curvas algébricas e transcendentes; (...) Veio assim ligar, com forte nexo, os conhecimentos correlativos do passado aos do presente e futuro, marcar, naquela ordem das matemáticas, momento seguro e destacante, que todos vindouros, na consulta da obra que o traduz, e estudando-a, e inspirando-se no seu ensinamento, terão de reconhecer e agradecer.* (Vilhena, 1936, p. 47)

6.1 O ensino da matemática aquando da criação da Universidade do Porto

Em 1803 é criada na cidade do Porto, a pedido da Companhia Geral da Agricultura das Vinhas do Alto Douro, a Academia Real de Marinha e Comércio, que vem a ser extinta em 1837, dando lugar à Academia Politécnica do Porto que tem como objetivo de formar especialistas em áreas técnicas, nomeadamente, engenheiros, oficiais de marinha, pilotos e comerciantes.

Durante os primeiros 50 anos pouco muda no funcionamento da Academia Politécnica do Porto,[166] que sofre uma reforma em 1885. Os conteúdos matemáticos delineados pela reforma são[167]:

Cadeira	**Conteúdos**
1.ª cadeira Geometria analítica; Álgebra superior; Trigonometria esférica	- **Álgebra** (Determinantes; séries; frações contínuas; princípios gerais da teoria das funções) - **Geometria analítica** (Trigonometria esférica; estudo das cónicas; estudo geral das equações do 2.º grau a 2 e 3 variáveis; sólidos de revolução).
2.ª cadeira Cálculo diferencial e integral; Cálculo das diferenças e das variações	- **Cálculo diferencial** (Noção de limite, derivada e diferencial; derivadas de funções; desenvolvimento de funções em série; aplicações geométricas do cálculo diferencial) - **Cálculo integral** (Princípios gerais e principais métodos de integração; aplicações do cálculo integral; equações diferenciais; funções de variáveis imaginárias)
3.ª cadeira Mecânica Racional; Cinemática	- **Mecânica Racional** (Foronomia; estática; dinâmica) - **Cinemática**

[166] A criação e funcionamento da Academia Politécnica do Porto encontram-se analisadas em detalhe em Santos (2011, pp.67-101) e Pinto (2012, pp. 107-179).

[167] Os programas das diferentes disciplinas, logo para o ano letivo 1885-1886 são publicados no *Annuario da Academia Politecnica do Porto* (1885, pp.53-68); contudo, o programa da 2.ª cadeira não se encontra no *Annuario Da Academia Polytechnica Do Porto*, embora tenha sido enviado ao Conselheiro Geral d'Instrução Pública (Pinto, 2012, pp.476-478), sendo os conteúdos apresentados na tabela 6.1 os constantes desse programa.

Cadeira	**Conteúdos**
4.ª cadeira Geometria descritiva	**- 1.ª parte** (geometria descritiva e projetiva; grafo-estática) **- 2.ª parte** (Aplicações da geometria descritiva)
5.ª cadeira Astronomia e geodésia	**- Astronomia e geodésia** **- Topografia**

Tabela 6.1: Programa das cadeiras de matemática na Academia Politécnica do Porto no ano letivo 1885-1886.

Este programa deixa de fora os fundamentos da matemática, como a aritmética, a geometria euclidiana ou a trigonometria plana, que são exigidos como pré-requisitos aos alunos (*Anuário da APP*, vol. 4. 1885, p. 30).

O estudo da matemática no Porto ganha ainda maior ímpeto com a criação, em 1911, da Universidade do Porto que tem por objetivo:

> *(a) Fazer progredir a ciência, pelo trabalho dos seus mestres, e iniciar um escol de estudantes - nos métodos de descoberta e invenção cientifica;*
>
> *(b) Ministrar o ensino geral das ciências e das suas aplicações, dando a preparação indispensável às carreiras que exigem uma habilitação científica e técnica;*
>
> *(c) Promover o estudo metódico dos problemas nacionais e difundir a alta cultura na massa da Nação pelos métodos de extensão universitária.* (Decreto de 19 de abril de 1911, p. 1638)

Aquando da sua criação, a Universidade do Porto compreende três Faculdades - Ciências, Medicina e Comércio - sendo a Faculdade de Ciências apresentada como uma "faculdade de ciências matemáticas, físico-químicas e histórico-naturais"(Decreto de 19 de abril de 1911, p. 1638).

Nesta Faculdade, a matemática, além de fazer parte integrante da formação de base dos alunos dos diferentes cursos ministrados, passa também a ser estudada de forma independente, passando a existir o bacharelato em Ciências Matemáticas (Decreto de 22 de agosto de 1911, p. 3578). Este bacharelato tem a duração de 4 anos e nele são estudadas as seguintes disciplinas:

Ano	**Disciplina**
1.º Ano	Álgebra superior, geometria analítica e trigonometria esférica
	Geometria descritiva e estereometria
	Química (curso geral)
	Desenho rigoroso
2.º Ano	Cálculo diferencial, integral e das variações
	Geometria projetiva
	Física (curso geral)
	Desenho de máquinas
3.º Ano	Análise superior
	Mecânica racional
	Astronomia e geodésia
	Cálculo das probabilidades e suas aplicações
	Desenho topográfico
4.º Ano	Mecânica Celeste
	Física matemática

Tabela 6.2: Plano curricular do bacharelato em ciências matemáticas na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 1911.

Notemos que parte destas disciplinas existia já na Academia Politécnica do Porto, sendo mesmo instituído um sistema de equivalências entre as disciplinas das duas instituições (*Anuário FCUP*, 1915, p. 29).

Neste contexto, o conceito de reta tangente a uma curva vê o seu tratamento ser enquadrado no âmbito da geometria diferencial, sendo estudado como uma das aplicações do cálculo diferencial à geometria. Neste estudo, Francisco Gomes Teixeira tem um papel central dado ser, simultaneamente, o professor da disciplina onde o conceito é lecionado e o autor do livro de texto para essa disciplina, o *Curso de Analyse Infinitesimal*.

6.2 O *Curso de Analyse Infinitesimal* de Gomes Teixeira

O *Curso de Analyse Infinitesimal*, doravante designado apenas de *Curso*[168], é considerada uma das obras pedagógicas mais importantes para o ensino dos fundamentos da análise em Portugal.

Na Universidade de Coimbra, desde a reforma de 1772 que são dadas indicações aos professores para comporem os seus compêndios (Estatutos, 1772, pp. 164-165); contudo, como nota Alves (2004, pp. 220-221), Gomes Teixeira quer enquanto aluno quer nos primeiros anos

[168] O *Curso* é composto por duas partes: a primeira relativa ao cálculo diferencial; a segunda relativa ao cálculo integral. Neste trabalho abordamos apenas a primeira parte, uma vez que é nela que se encontra o estudo do conceito de reta tangente a uma curva.

como professor utilizou sempre livros de autores estrangeiros. Ciente da importância de um bom compêndio para o processo de ensino aprendizagem da matemática, Gomes Teixeira pouco tempo após a sua chegada à Academia Politécnica do Porto começa a publicação de um livro de texto para a cadeira de que é responsável designada "Cálculo diferencial e integral; cálculo das diferenças e das variações".

Esta obra começa a ser publicada, em fascículos, no ano letivo 1884-1885, sob o título *Fragmentos de um Curso d'Analyse Infinitesimal*, doravante designados de *Fragmentos*, no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, publicação que se mantém até ao ano letivo 1887-1888, altura em que é publicado o 4.º e último fascículo (Fig. 6.2).

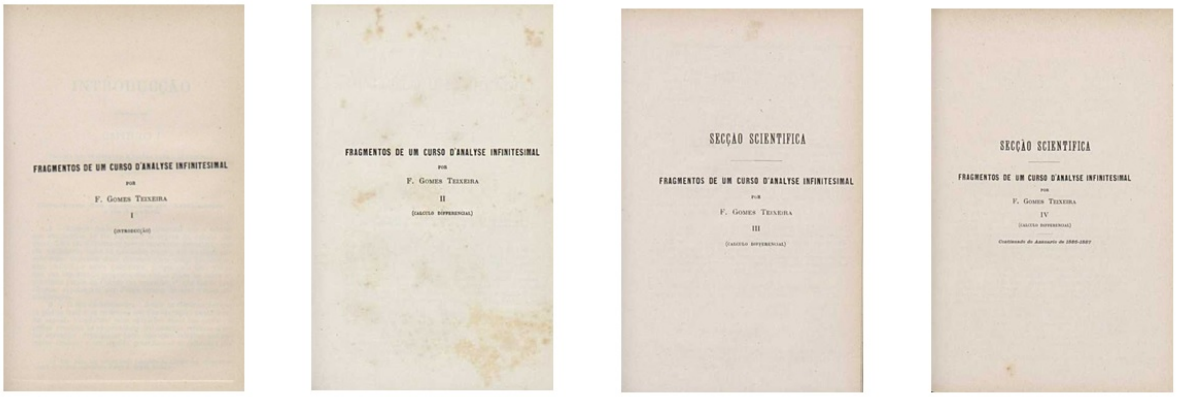
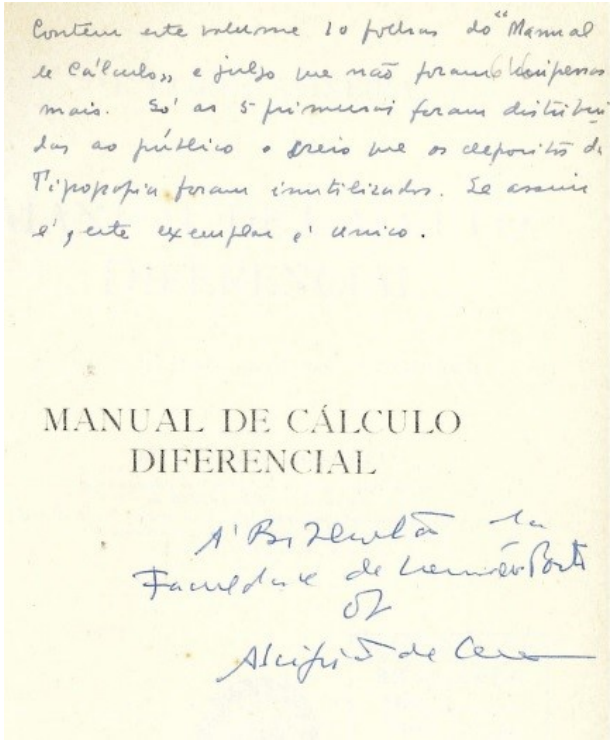


Figura 6.2: Primeira página dos 4 fascículos dos *Fragmentos*.

Os 4 fascículos publicados dos *Fragmentos* correspondem, em conjunto, à primeira edição da primeira parte do *Curso* publicada em 1887.

A parte relativa ao cálculo diferencial do *Curso* tem posteriormente mais três edições: em 1890; em 1896; em 1906, incluída no 3.º volume das *Obras Sobre Mathematica*.

Posteriormente, em 1926, Gomes Teixeira dá início à publicação de um *Manual de Cálculo Diferencial, Extrato do Curso de Analyse Infinitesimal*, doravante referido apenas como *Manual*, do qual conhecemos um único exemplar, que se encontra no Fundo Antigo da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (Fig. 6.3). Este exemplar encontra-se inacabado e, segundo a nota manuscrita que se encontra na página de rosto, que conjeturamos ser da autoria de Aníbal Scipião de Carvalho que doou este exemplar à biblioteca, trata-se uma obra não divulgada ao grande público:


Contém este volume 10 folhas do "Manual de Cálculo" e julgo que não foram impressas mais. Só as 5 primeiras foram distribuídas ao público e creio que os depósitos da Tipographia foram inutilizados. Se assim é, este exemplar é único.

MANUAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

A Biblioteca da Faculdade de Ciências do Porto

Alcifro de Cerveira

Figura 6.3: Página de rosto do *Manual* de Gomes Teixeira.

> *Contém este volume 10 folhas do "Manual de Cálculo"e julgo que não foram impressas mais. Só as cinco primeiras foram distribuídas ao público e creio que os depósitos da Tipografia foram inutilizados. Se assim é, este exemplar é único.* (Teixeira, 1926, folha de rosto)

Dada a publicação do *Curso*, que aborda os temas deste *Manual*, Gomes Teixeira apresenta no início deste *Manual* uma justificação para a sua escrita:

> *Este volume contem a doutrina essencial para um primeiro estudo do Cálculo Diferencial a fazer nas cadeiras de Análise das faculdades de ciências ou congéneres das outras escolas superiores.*
>
> *Para um estudo mais amplo, pode recorrer-se ao volume primeiro do meu Curso de Análise infinitesimal, tomo III das minhas obras sobre matemática.* (Teixeira, 1926, p. 5)

Notemos que Gomes Teixeira apresenta profundas preocupações pedagógicas, pretendendo fornecer as bases essenciais da análise a todos os estudantes que frequentem disciplinas nesta área.

Ao longo das diferentes edições do *Curso* Gomes Teixeira efetua alterações na estrutura e no conteúdo da sua obra, com o intuito de a melhorar/atualizar[169]. Apesar destas alterações os temas abordados no tomo relativo ao cálculo diferencial são os mesmos em todas as edições.

No contexto do *Curso*, o conceito de reta tangente a uma curva surge, em todas as edições analisadas, na apresentação das noções preliminares do cálculo diferencial e nas aplicações geométricas das derivadas.

Nas alterações que vai efetuando ás diferentes edições, é visível que Gomes Teixeira está a par das obras mais recentes sobre as diferentes temáticas da análise infinitesimal, acrescentando e/ou retirando em cada edição conteúdos de acordo com a importância que lhes atribui, procurando que a sua obra se mantenha sempre cientificamente atualizada, sendo também pedagogicamente inovadora e de reconhecido valor. De facto, o *Curso* de Gomes Teixeira é considerado, logo à época e a nível nacional e internacional, um dos melhores tratados de análise existentes. Em Portugal, o seu mérito foi reconhecido com a atribuição do Prémio D. Luiz pela Academia das Ciências de Lisboa. A nível internacional várias são as recensões positivas a esta obra, como a publicada por Pierpont no *Bulletin of the American Mathematical Society.*

> *Ao usar este livro, senti-me permanente triste por a língua portuguesa não ser mais conhecida no nosso país. De outra maneira, esta obra admirável sobre o Cálculo gozaria uma popularidade generalizada entre nós. O seu autor, o distinto diretor da Academia Polytechnica do Porto, foi consistentemente bem-sucedido na difícil tarefa de seleção de entre o imenso material disponível. O modo de apresentação não deixa nada a desejar. O estilo é lúcido e elegante, e em toda a obra há a marca refrescante duma mente original. Em muitas passagens o autor incorporou partes dos seus extensos e valiosos escritos sobre o assunto. No que diz respeito ao rigor, parece-nos que o Professor Teixeira foi muito feliz na escolha da justa medida. O excessivo rigor Weierstrassiano foi sensatamente evitado; ao mesmo tempo, o autor prestou a devida atenção a este assunto. Alguma falha ocasional será seguramente corrigida em edições posteriores. No seu conjunto a obra impressionou-nos tão favoravelmente, que a veríamos traduzida para inglês de preferência a qualquer outra que conheçamos. É deplorável confessar que a língua inglesa não possui hoje uma obra desta craveira sobre o cálculo.* (Pierpont in Alves, 2004, pp. 1430-1431)

[169]Uma comparação da estrutura das 4 edições do *Curso* encontra-se no anexo H.

6.3 O conceito de reta tangente no *Curso de Analyse Infinitesimal*

Nas quatro edições do *Curso*, assim como no *Manual*, o conceito de reta tangente é abordado em quatro aspetos distintos: definição; propriedades; história da matemática e resolução de problemas.

Uma vez que Gomes Teixeira tem o cuidado de melhorar/atualizar o *Curso* corrigindo, eventualmente, imprecisões das edições anteriores, analisamos o nosso estudo no tratado dado ao conceito de reta tangente a uma curva apenas na 4.ª edição desta obra.

6.3.1 A definição

A definição de reta tangente a uma curva é apresentada no Capítulo I nos seguintes termos:

> ***58-I*** *Consideremos uma reta MM' que corte uma curva em dois pontos, e suponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para o limite M, a reta tende para um limite MT', e que este limite é único, qualquer que seja a série de pontos pelos quais passa M' quando se aproxima de M. A esta reta MT' chama-se tangente à curva no ponto M.* (Teixeira, 1906, p. 109)

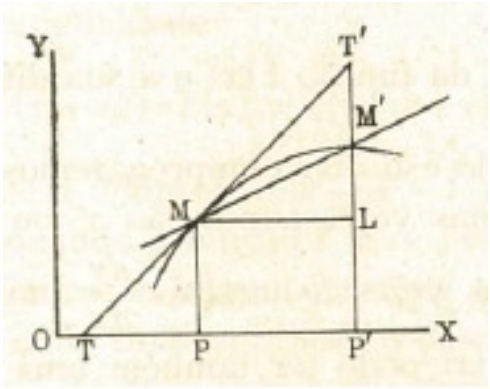


Figura 6.4: Ilustração do conceito de reta tangente.

Esta é não só uma definição rigorosa do nosso conceito, como é genérica e aplicável a qualquer curva, onde as noções do cálculo diferencial, como o limite, são utilizadas para que o conceito de tangente não seja definido apenas de forma intuitiva. O rigor da definição é tal que Gomes Teixeira inclui nela uma nota de rodapé onde explicita o que entende por limite de uma reta e de um ponto.

> *Diz-se que uma reta fixa é o limite para que tende uma reta variável, se o ângulo das duas retas tende para zero; e que um ponto fixo é o limite para que tende um ponto variável, se a distância dos dois pontos tende para zero.* (Teixeira, 1906, p. 109))

Esta nota pretende clarificar a noção de limite em termos de retas e pontos uma vez que a noção de limite é introduzida no início do capítulo I nos seguintes termos:

> *(...) uma quantidade constante A é limite para que tende uma quantidade variável u, que passa por uma infifnidade de valores sucessivos u_1, u_2, u_3, ..., quando a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um número n_1 tal que a desigualdade*
>
> $$|A - u_n| < \delta$$
>
> *quando os valores sucessivos da variável se aproximam cada seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1.* (Teixeira, 1906, p. 20)

Embora a definição de limite seja introduzida antes da de reta tangente, o facto de a definição de limite apresentada por Gomes Teixeira se referir apenas a quantidades é complementada com a nota de rodapé, evidenciando o cuidado de Gomes Teixeira na explicitação dos conceitos matemáticos.

No que concerne à figura que representa o conceito de reta tangente, é uma figura simples e esclarecedora, que ilustra verdadeiramente o conceito em causa.

6.3.2 As propriedades

A primeira propriedade relativa ao conceito de reta tangente prende-se com a determinação do seu coeficiente angular:

> ***58-I*** *Se forem $y = f(x)$ a equação da curva, referida a eixos retangulares, (x, y) e $(x + h, y + k)$ as coordenadas dos pontos M e M', θ e α as inclinações $T'ML$ e $M'ML$ da tangente e da secante sobre o eixo das abcissas, a resolução do triângulo retângulo LMM' dará a igualdade*
>
> $$\tan\alpha = \frac{M'L}{ML} = \frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
>
> *por meio da qual se determina a inclinação da secante sobre o eixo das abcissas, substituindo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva.*

> *Mas, quando o ponto M' tende para M, h tende para zero; logo temos a igualdade*
>
> $$\tan\theta = \lim\frac{k}{h} = \lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
>
> *por meio da qual se determina a direção θ da tangente, substituindo* $\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *pelo seu valor, tirado da equação da curva.* (Teixeira, 1906, pp. 109-110)

Comecemos por notar que a posição da reta tangente é determinada a partir da inclinação que faz com o eixo das abcissas, sendo a tangente trigonométrica desta inclinação designada de coeficiente angular da reta, embora Gomes Teixeira não apresente nesta dedução essa designação.

Em seguida Gomes Teixeira apresenta um exemplo, determinando a posição da reta tangente por um ponto genérico de uma circunferência centrada na origem e de raio R:

> No caso, por exemplo, de ser $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = R^2$, teremos, mudando x em $x + h$ e y e $y + k$,
>
> $$x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 = R^2,$$
>
> ou
>
> $$2xh + h^2 + 2ky + k^2 = 0,$$
>
> que dá
>
> $$\frac{h}{k} = -\frac{2x+h}{2y+k},$$
>
> e portanto
>
> $$\tan\theta = \lim\frac{h}{k} = -\frac{x}{y}.$$
>
> Temos assim o coeficiente angular da tangente à circunferência no ponto (x, y). ■

Gomes Teixeira utiliza neste exemplo pela primeira vez a designação "coeficiente angular de uma reta", sendo porventura expectável que os alunos estivessem já familiarizados com este conceito uma vez que ele é estudado na disciplina de geometria analítica.

Depois Gomes Teixeira dedica-se ao estudo de outras questões referindo, no final do capítulo I, a relação entre este problema e o problema das derivadas:

> *Somos assim levados pela questão importante da determinação das tangentes às curvas a considerar o problema de cálculo que tem por fim achar as derivadas das funções. Este problema é o objeto do Cálculo Diferencial.* (Teixeira, 1906, p. 116)

Salientemos que esta é a primeira referência à relação existente entre o problema das tangentes e a determinação de derivadas de funções, conceito introduzido no *Curso* nos seguintes termos:

> *Seja $f(x)$ uma função da variável real x, definida na vizinhança de cada ponto. Se, quando h tende para zero, a fração*
>
> $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> *tende para um limite determinado $f'(x)$, qualquer que seja a série dos valores sucessivos pelos quais passa h, quando tende para zero, a este limite dá-se o nome de derivada da função $f(x)$ no ponto x.* (Teixeira, 1906, pp. 106-107)

Embora nesta definição utilize a notação dita de Lagrange para derivada (o uso de pelica para denotar derivada), Gomes Teixeira caracteriza também o conceito de derivada a partir da noção de diferencial, representando a derivada de uma função por um quociente de diferenciais (da variável dependente y e da variável independente x - dy, dx). Gomes Teixeira introduz também a terminologia e a notação de Leibniz, escolhendo posteriormente a notação ou caracterização de derivada a utilizar em função da situação.

A relação entre o problema geométrico das tangentes e o problema de análise do cálculo das derivadas é aprofundado no capítulo III, onde Gomes Teixeira se dedica ao estudo das aplicações geométricas das "derivadas de primeira ordem das funções reais de variáveis reais".

Este capítulo começa com o estudo das tangentes e normais, sendo apresentado no primeiro resultado uma forma de determinar a equação da reta tangente à curva num determinado ponto:

> ***86 - I*** *Seja $F(x,y)=0$ a equação de uma curva dada, referida a coordenadas retangulares. A tangente a esta curva no ponto (x,y) passa por este ponto e o seu coeficiente angular é igual a igual a $\frac{dy}{dx}$ (n.º 58-I); a sua equação desta reta é (representando X e Y as coordenadas correntes dos seus pontos)*
>
> $$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$
>
> *ou, substituindo $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva,*
>
> $$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0.$$
>
> (Teixeira, 1906,p. 163)

A determinação da equação da reta tangente à custa da derivada da função representada implicitamente advém do facto de, no resultado n.º 72 (Teixeira, 1906, p. 136), Gomes Teixeira ter já demonstrado que $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Em seguida Gomes Teixeira define subtangente e o comprimento da tangente:

> ***86-III.*** *Dão-se respetivamente os nomes de subtangente, subnormal, comprimento da tangente e comprimento da normal aos segmentos de reta TP, PN, TM e NM determinados pela tangente e pela normal.* (Teixeira, 906, pp. 164-165)

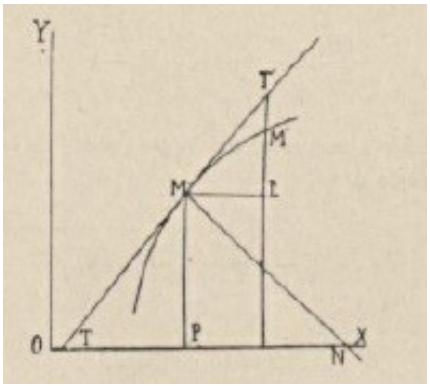


Figura 6.5: Ilustração dos conceitos de subtangente e comprimento da tangente.

Seguidamente, Gomes Teixeira determina o valor da subtangente e do comprimento da tangente recorrendo à resolução do triângulo retângulo MTP, de onde se obtém que:

$$\text{subtangente} = \frac{y}{\tan\theta} = y\frac{dy}{dx}$$

$$\text{tangente} = \sqrt{y^2 + TP^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Deduzidas as fórmulas da subtangente e do comprimento da tangente em coordenadas retangulares, Gomes Teixeira caracteriza a reta tangente a uma curva definida em coordenadas polares.

> ***86-IV*** *O ângulo ω da reta OM, que une a origem das coordenadas a um ponto M da curva, e da tangente MT à curva neste ponto é dado pela fórmula*
>
> $$\tan\omega = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}y'} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}$$
>
> *visto que y' e $\frac{y}{x}$ são os valores dos coeficientes angulares das suas retas.*

Em coordenadas polares temos, pondo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$\tan\omega = \frac{\rho d\theta}{d\rho}.$$

(Teixeira, 1906, p. 165)

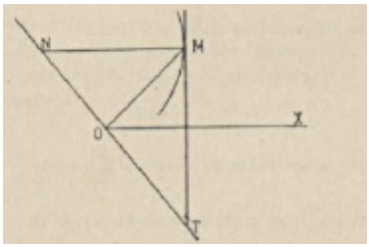


Figura 6.6: Ilustração da determinação da tangente a uma curva em coordenadas polares .

Nesta dedução Gomes Teixeira não explicita os cálculos que lhe permitem a obtenção dos resultados apresentados. Notemos que a determinação de $\tan\omega$ advém da aplicação da determinação do ângulo entre duas retas conhecidos os seus coeficientes angulares, resultado conhecido da geometria analítica[170]. A obtenção da fórmula de $\tan\omega$ para uma curva em coordenadas polares prende-se com a determinação dos valores de dy e dx em função de ρ, θ, $d\rho$ e $d\theta$ e que, substituídos no resultado inicial e após alguma manipulação algébrica, permitem obter o resultado apresentado.

Uma vez que caracteriza a subtangente e o comprimento da tangente em coordenadas retangulares Gomes Teixeira apresenta também a determinação destes comprimentos quando a curva é dada em coordenadas polares, sendo que a *subtangente polar* corresponde ao comprimento do segmento de reta $[OT]$ e a *tangente polar* ao comprimento de $[MT]$ (Teixeira, 1906, p. 166).

Para obter os valores destes comprimentos Gomes Teixeira considera a reta NT, perpendicular a OM e resolvendo o triângulo retângulo $[OMT]$ vem que:

$$\text{subtangente} = \rho\tan\omega = \frac{\rho^2 d\theta}{d\rho},$$

$$\text{tangente} = \rho\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}.$$

Mais uma vez Gomes Teixeira apresenta apenas os resultados finais, fomentando o envolvimento dos alunos no seu processo de aprendizagem.

[170]Considerem-se duas retas r e r', não verticais, e α e α' as suas inclinações, respetivamente. Sendo ω o ângulo entre as duas retas tem-se que $\tan\omega = \frac{\tan\alpha - \tan\alpha'}{1+\tan\alpha\cdot\tan\alpha'}$. (Silva, 1970, pp. 76-77)

Com a apresentação do estudo do problema das tangentes, quer em coordenadas retangulares quer em coordenadas polares, Gomes Teixeira fornece ferramentas ao leitor para este trabalhar com uma maior variedade de curvas de forma simplificada.

Gomes Teixeira apresenta ainda outra abordagem ao problema das tangentes, neste caso com recurso a coordenadas homogéneas[171]. Vejamos a resolução do problema das tangentes recorrendo a estas coordenadas proposta por Gomes Teixeira:

> ***86-V*** *À equação da tangente dá-se muitas vezes, principalmente no caso das curvas algébricas, uma forma que vamos ver.* (Teixeira, 1906, p. 166)
>
> É evidente que, mudando na equação da curva x e y em $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$, podemos representar a curva proposta pelas equações
>
> $$F(x, y, z) = 0,\ z = 1,$$
>
> $F(x, y, z)$ representando uma função homogénea de x, y e z. A equação da tangente pode também ser escrita debaixo da forma
>
> $$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0,$$
>
> onde $Z = z = 1$.
>
> Temos porém (n.º 70[172])
>
> $$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z = nF(x, y, z) = 0.$$
>
> Logo podemos dar à equação da tangente a forma

[171] *Dado um ponto P de coordenadas cartesianas (x, y), o terno (wx, wy, w) com $w \neq 0$ representa o ponto P em coordenadas homogéneas, utilizando de forma usual o caso em que $w = 1$.* (Melo, 2010, pp. 17-18)

Estas coordenadas tornam-se conhecidas com a utilização que lhes dá Julius Plucker no segundo volume da sua obra *Analytisch-geometrische Entwickelungen*, publicado em 1831, onde as aplica à geometria projetiva.

[172] ***70****-Funções homogéneas-Diz-se que $f(x, y, ...)$ é uma função homogénea, do grau m, quando satisfaz a condição seguinte*

$$f(tx, ty, ...) = t^m f(x, y, ...).$$

Derivando os dois membros desta identidade relativamente a t por meio do teorema anterior, vem:

$$f'_x(tx, ty, ...)x + f'_y(tx, ty, ...)y + ... = mt^{m-1}f(x, y, ...)$$

e, pondo $t = 1$,

$$f'_x(x, y, ...)x + f'_y(x, y, ...)y + ... = mf(x, y, ...).$$

(Teixeira, 1906, p. 134)

$$(A) \quad \frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y + \frac{\partial F}{\partial z}Z = 0,$$

onde, depois de formar as derivadas, se deve pôr $Z = z = 1$. ■

Ao passar de coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas homogéneas (X, Y, Z), onde $x = \frac{X}{Z}$ e $y = \frac{Y}{Z}$, Gomes Teixeira garante que a função que define a curva é uma função homogénea, sendo possível aplicar a identidade de Euler relativa às funções homogéneas deduzida no resultado n.º 70. Deste modo, Gomes Teixeira passa a trabalhar com uma função definida com três variáveis, aproximando o estudo de curvas no plano ao estudo de curvas no espaço que efetuará no capítulo seguinte.

Para além das diferentes abordagens, dos diferentes exemplos e dos resultados abordados a propósito do conceito de reta tangente, Gomes Teixeira explora ainda o uso da história da matemática no seu *Curso*.

6.3.3 História da Matemática

Diz Gomes Teixeira:

> *Nas universidades portuguesas não existe cadeira alguma com este destino [ensino da história das ciências], mas nós, nos cursos que professamos durante mais de meio século nas Universidades de Coimbra e Porto, tivemos sempre o cuidado de acompanhar, quando possível, cada doutrina da respetiva história, e notamos quanto isso interessava aos alunos.* (Teixeira, 1934, p. 226)

Em particular, no *Curso*, a primeira referência à história do problema das tangentes surge após a dedução do coeficiente angular da reta tangente:

> *Foi Descartes quem primeiro considerou as tangentes como limite das posições das secantes, e foi também este grande geómetra quem deu pela primeira vez um método geral para as achar, o qual foi publicado em 1637 na sua celebre* Geometria. *Outros métodos foram depois empregados, para resolver esta questão, por Fermat, Roberval, Sluse, etc. O método das tangentes que vimos de expor, é o de Fermat, com a forma simples que lhe deu Barrow nas suas* Lectiones geometricae, *publicadas em 1679.* (Teixeira, 1906, p. 110)

Destacamos a concisão, precisão e relevância desta informação histórica, que é ainda complementada com fontes bibliográficas de excelência, seguramente inspiradoras para os aprendizes.

Sobre a importância histórica do problema das tangentes no desenvolvimento da matemática Gomes Teixeira escreve:

> *O Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral constituem a Análise infinitesimal, cuja descoberta é devida a Newton e Leibniz. A determinação das tangentes às curvas e a quadratura das áreas planas foram as duas questões que principalmente levaram estes dois célebres geómetras a esta grande descoberta.* (Teixeira, 1906 p. 116)

Esta informação é posteriormente desenvolvida, com um relato detalhado entre os trabalhos de Newton e os de Leibniz, bem como um resumo dos trabalhos dos matemáticos que se lhes seguiram.

6.3.4 Resolução de problemas

A resolução de problemas é um aspeto fundamental no ensino da matemática, apresentando Gomes Teixeira no Capítulo III do *Curso* problemas relativos às aplicações geométricas das derivadas. Diz o nosso autor:

> *A teoria das tangentes e das normais às curvas dá lugar a muitos problemas importantes.* (Teixeira, 1906, p. 166)

Sobre a teoria das tangentes são apresentados quatro problemas:

> ***1.º*** *- Por um ponto* (a, b) *exterior a uma curva dada, tirar tangentes a esta curva.* (Teixeira, 1906, p. 166)

Usualmente a determinação da reta tangente a uma curva é efetuada em um ponto da própria curva. Ora, Gomes Teixeira propõe-nos que o estudo se faça em um ponto (a, b) no exterior da curva. Vejamos a sua proposta de resolução do problema:

> Para resolver este problema, temos de eliminar x e y entre a equação da curva e a equação
>
> $$\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial y}b + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$
>
> que exprime que as tangentes passam pelo ponto dado. Os sistemas de valores, que estas equações dão para x e y, são as coordenadas do ponto de contacto.
>
> Considerando x e y como variáveis, a última equação representa uma curva, que passa pelos pontos de contacto da curva dada com as tangentes tiradas pelo ponto (a, b). A esta curva chama-se *polar* do ponto (a, b) relativamente à curva dada.

Se a curva proposta for algébrica de ordem n, a sua polar é também algébrica de ordem $n-1$, vito que as derivadas de $F(x,y,z)$ relativamente a x, y e z são de grau $n-1$. Neste caso, estas duas curvas não podem cortar-se em mais do que $n(n-1)$ pontos; e portanto, *por um ponto exterior a uma curva algébrica não se podem tirar mais do que* $n(n-1)$ *tangentes a esta curva.* ■

Relevamos neste problema a definição de um novo conceito, o de curva polar, que de resto Gomes Teixeira havia investigado num artigo de 1905[173].

Vejamos agora o segundo problema proposto por Gomes Teixeira:

2.º *- Achar a condição para que a reta*

$$AX + BY + CZ = 0,\ Z = 1$$

seja tangente a uma curva dada. (Teixeira, 1906, p. 167)

A resolução proposta por Gomes Teixeira é:

Para que a reta representada por esta equação coincida com a reta representada pela equação (A)[174], é necessário e suficiente que seja

$$\frac{\partial F}{\partial x} : A = \frac{\partial F}{\partial y} : B = \frac{\partial F}{\partial z} : C.$$

Eliminando pois x e y entre estas equações e a equação $F(x,y) = 0$ da curva, obtém-se a equação de condição para que a reta dada seja tangente à curva. Se esta equação for satisfeita, as duas equações anteriores dão depois as coordenadas x e y dos pontos de contacto. ■

Também este problema nos parece, a exemplo do anterior, não rotineiro no contexto da nossa temática.

Um terceiro problema é:

3.º *- Tirar tangentes comuns a duas curvas dadas.* (Teixeira, 1906, p. 167)

[173]Trata-se um artigo que analisaremos mais adiante, que foi publicado no volume VII do *L'Enseignement Mathématique* e que é mesmo referenciado numa nota de rodapé apensa a este problema do seu curso.

[174]A equação (A) é a equação que caracteriza a tangente em coordenadas homogéneas, isto é, a equação $\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial y}b + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

Sejam $F(x, y, z) = 0$, $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$ as equações das curvas dadas. A equação geral das tangentes à primeira é dada pela fórmula (A). Basta pois procurar a condição para que esta equação coincida com a equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} Z = 0,$$

para resolver o problema. Temos assim as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$$

que, juntamente com as equações das curvas dadas determinam as coordenadas x, y, x_1, y_1 dos pontos de contacto da tangente com as duas curvas. ■

Estes três problemas, embora de resolução simples (assentam apenas na resolução de sistemas de equações), não se limitam a aplicar diretamente as fórmulas deduzidas anteriormente, exigindo que se pense nas propriedades da reta tangente a uma curva para se entender o método apresentado.

O último problema relativo ao nosso conceito é o seguinte:

5.º - Procurar o lugar geométrico dos pés das perpendiculares às tangentes a uma curva dada por um ponto fixo. (Teixeira, 1906, p. 168)

Tomando este ponto para origem das coordenadas, obtém-se a equação da curva procurada eliminando x e y entre a equação da curva dada e as seguintes:

$$Y - y = y'(X - x), \quad y'Y + X = 0,$$

que representam a tangente e a perpendicular a esta reta, tirada pela origem das coordenadas. A curva que vem de definir-se chama-se *pedaria* da curva dada. ■

Aqui vemos introduzida/definida uma nova curva, dita pedaria, denotando também aqui o recurso de Gomes Teixeira aos problemas para a introdução de novos conceitos matemáticos.

Estes exemplos vêm mostrar a valorização dada por Gomes Teixeira aos verdadeiros problemas, optando por os apresentar e resolver, deixando para segundo plano os exemplos de aplicação direta de fórmulas, valorizando assim o raciocínio necessário a uma efetiva resolução de problemas.

Do estudo aqui analisado destacamos o rigor da definição de reta tangente a uma curva apresentada, numa definição genérica e aplicável a todo o tipo de curvas. Salientamos também a importância atribuída à história da matemática e à resolução de problemas não rotineiros, vendo-se o conceito de reta tangente a ser alavanca para novos conceitos.

O estudo do conceito de reta tangente a uma curva não se esgota nesta obra de cariz mais didático de Gomes Teixeira, sendo possível encontrar estudos afins na sua obra mais emblemática o *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, bem como em artigos científicos que publica.

6.4 *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*

O *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, doravante designado de *Traité*, é escrito por Gomes Teixeira na sequência da participação num concurso promovido pela Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid[175].

Publicado, em espanhol, nas Memórias dessa Academia, parece ter sido recebido de forma entusiástica pela comunidade matemática internacional, Gomes Teixeira revê-o e publica-o em francês. O *Traité* é deste modo uma obra publicada em três volumes, contendo os dois primeiros volumes, um catálogo de curvas ditas especiais para as quais Gomes Teixeira efetua um estudo completo:

> *(...) nós estudamos a forma, a construção, a retificação e a quadratura, as propriedades e a história de cada curva; consideramos as relações de cada curvas com as outras; indicamos os problemas onde as curvas estudadas surgem; etc. Os autores de cada questão considerada são mencionados, sempre que possível. Em muitas ocasiões damos proposições que podem ainda não ter sido notadas.* (Teixeira, 1908, p. VII)

Ao longo deste trabalho Gomes Teixeira aborda inúmeras vezes o conceito de reta tangente a uma curva e amplia-o ao conceito de curvas tangentes a curvas.

[175] Em 1893, a Real Academia espanhola abre um concurso para um prémio a atribuir a um catálogo de curvas, suas equações, propriedades e autores que as descobriram/estudaram. Ao concurso de 1893 não chegam respostas de qualidade, pelo que o concurso é novamente publicitado em 1894, desta feita também em revistas e associações estrangeiras. Gomes Teixeira concorre a este prémio com a obra *Tratado de las Curvas Especiales Notables*, doravante designado de *Tratado*, sendo um dos premiados do concurso, ex-æquo com Gino Loria, e vendo o seu trabalho publicado, em 1905, nas *Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid*, no tomo XXII.

6.5 O conceito de reta tangente no *Traité*

O conceito de reta tangente a uma curva surge no *Traité* associado a diferentes problemas e propriedades, nomeadamente:

- Determinação da equação geral das retas tangentes a uma curva dada por um ponto dado;
- Caracterização das retas tangentes a uma curva através do seu coeficiente angular, determinação do ângulo entre a tangente e outra reta ou determinação do ângulo entre a tangente e a curva;
- Estudo de propriedades das retas tangentes a uma dada curva;
- Estudo das propriedades de retas tangentes em pontos específicos ou com características específicas (por exemplo, tangentes paralelas aos eixos coordenados);
- Referências históricas à determinação de retas tangentes a determinadas curvas;
- Caracterização de retas tangentes cujas equações têm coeficientes imaginários (determinação de Foyers - focos);
- Determinação de curvas tangentes a curvas dadas;
- Resolução de problemas envolvendo retas tangentes cuja solução são curvas especiais.

É de notar que, apesar dos diferentes aspetos do conceito de tangente abordados nesta obra, Gomes Teixeira não define aqui o conceito de tangente, mas torna-se evidente, nomeadamente pelo tratamento feito, que a definição usada é a que apresenta no seu *Curso*[176], utilizando as propriedades gerais aí estudadas para caracterizar cada uma das tangentes às curvas que aborda no *Traité*.

Dada a magnitude do *Traité*, na nossa investigação cingirnos-e-mos a uma única curva, nomeadamente o caso da cissóide de Diocles. A seleção da cissoide de Diócles é feita porque esta é a primeira de uma família (cissoides) que Gomes Teixeira aborda nesta sua obra, mas também porque as cissoides são curvas recorrentes na história da matemática, podendo em particular o seu início ser traçado até à Grécia com o problema da duplicação do cubo.

[176] Veja-se a este propósito o capítulo 6.3.1.

6.5.1 O conceito de reta tangente à cissoide

À semelhança do que faz para as restantes curvas que analisa no *Traité*, Gomes Teixeira apresenta um estudo completo da família das cissoides, começando por caracterizar a família de curvas com que vai trabalhar. Apresentando-nos em primeiro lugar a *cissoide de Diocles* define-a, enquanto lugar geométrico, nos seguintes termos:

> ***1.*** *Considere-se um círculo de centro C e raio a [Fig. 6.7] e na sua circunferência um ponto O, e na outra extremidade A do diâmetro que passa por O, trace-se a reta AM, tangente ao círculo. Tome-se em cada uma das retas que passa por O um segmento OP igual ao segmento MN, compreendido entre o círculo e linha AM e traçado na direção OM. O lugar geométrico dos pontos P que se obtem é a curva designada por cissoide de Diocles.* (Teixeira, 1908, p. 1)

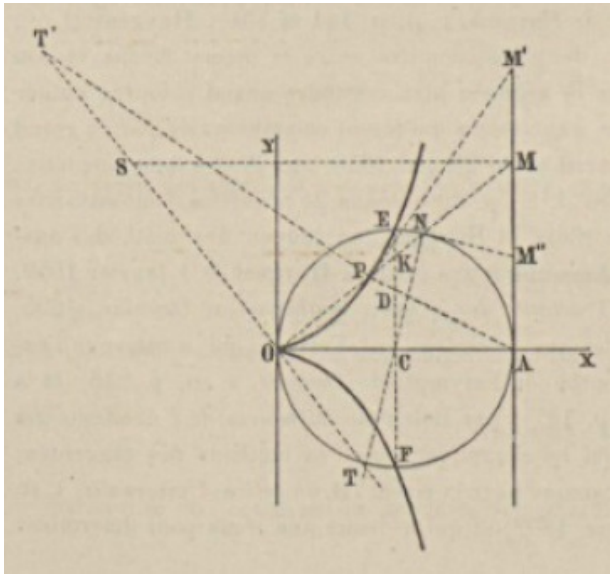


Figura 6.7: Ilustração da cissoide.

A imagem que representa o conceito de cissoide é complexa e será utilizada para ilustrar outras propriedades da curva, tornando-se essencial uma análise detalhada para que, em cada situação, se entendam quais os aspetos que devem ser considerados e quais os aspetos a ignorar.

Caracterizada a curva, Gomes Teixeira apresenta as equações polar e cartesiana da cissoide. Assim, sendo ρ o comprimento do segmento OP e θ o ângulo POC a equação polar da cissoide é:

$$\rho = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

A equação cartesiana correspondente é:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Tratando-se de um catálogo de curvas é de esperar esta caracterização completa da cissoide, sendo de notar que Gomes Teixeira utiliza, no estudo que se segue, a equação mais conveniente a cada situação.

No ponto seguinte Gomes Teixeira aborda a história da cissoide e no que concerne à determinação das tangentes à cissoide Gomes Teixeira destaca Fermat e Roberval como os autores da resolução do problema das tangentes a esta curva.

A resolução proposta por Gomes Teixeira para o problema das tangentes à cissoide de Diócles é apresentada no ponto 5:

> ***5.*** *A tangente em P à cissoide corta a reta AM num outro ponto M', cuja ordenada y_1 é dada pela equação*
>
> $$y_1 = y + \frac{dy}{dx}(2a - x),$$
>
> *ou, dadas as relações $x = \rho\cos\theta = 2a\sin^2\theta$ e $y = 2a\frac{sin^3\theta}{\cos\theta}$,*
>
> $$y_1 = 3a\tan\theta,$$
>
> *donde deduzimos um método muito simples para traçar esta tangente, uma vez que*
>
> $$CK = a\tan\theta.$$
>
> (Teixeira, 1908, p. 3)

Notemos que todos estes resultados são apresentados sem qualquer justificação e sem cálculos, tornando-se necessário que o leitor deduz, ele próprio, os resultados. Foi isso mesmo que nós fizemos. Por exemplo, no caso acima reportado ter-se-á:

> A equação da reta tangente a uma curva de equação $f(x, y) = 0$ pelo ponto de coordenadas (x, y) é $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ onde (X, Y) são as coordenadas de um ponto genérico da tangente. Considerando como origem do referencial o ponto O e OA como eixo das abcissas, tem-se que o ponto M' tem coordenadas $(2a, y_1)$ pelo

que, substituindo estas coordenadas na equação da reta tangente vem que

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}(2a - x).$$

Atendendo à equação em coordenadas retangulares da cissoide, o coeficiente angular $\frac{dy}{dx}$ não fornece um método simples de determinação deste ponto M', o que leva Gomes Teixeira a apresentar o mesmo resultado quando a curva é dada em coordenadas polares.

Considerando a equação da cissoide em coordenadas polares temos que $x = 2a\sin^2\theta$ e $y = \frac{2a\sin^3\theta}{\cos\theta} = 2a\sin^2\theta\tan\theta$. Aplicando as regras de diferenciação obtém-se que

$$dx = 4a\sin\theta\cos\theta d\theta \text{ e } dy = 4a\sin\theta\cos\theta\tan\theta + 2a\tan^2\theta d\theta.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a\sin\theta\cos\theta\tan\theta + 2a\tan^2\theta d\theta}{4a\sin\theta\cos\theta d\theta} = \tan\theta + \frac{\tan\theta}{2\cos^2\theta}.$$

Substituindo x, y e $\frac{dy}{dx}$, na equação que dá y_1, pelos seus valores em coordenadas polares vem que:

$$y_1 = 2a\sin^2\theta\tan\theta + \tan\theta + \frac{\tan\theta}{2\cos^2\theta}(2a - 2a\sin^2\theta) = 2a\tan\theta + \frac{2a\tan\theta\left(1-\sin^2\theta\right)}{2\cos^2\theta} = 3a\tan\theta.$$

Este valor de y_1 é facilmente determinável uma vez que, como nota Gomes Teixeira (1908, pp. 3-4), sendo K a interseção da reta OP com a perpendicular a OA por C tem-se que $CK = a\tan\theta$ uma vez que $[OCK]$ é um triângulo retângulo cujo ângulo KOC tem de amplitude θ e $\overline{OC} = a$. Uma vez que, para cada ponto P da cissoide, o ponto K se encontra determinado, fica também determinado o valor de $a\tan\theta$ o que, por sua vez, permite obter de forma rigorosa o ponto M'.

Seguidamente, Gomes Teixeira aplica um raciocínio semelhante para determinar a ordenada do ponto M'', ponto de interseção da reta AM com a tangente ao círculo ONA pelo ponto N, obtendo que esta ordenada é dada por $y_2 = a\tan\theta$ (Teixeira, 1908, pp. 3-4). Tendo em atenção que o ponto M, ponto de interseção da reta OP com a tangente ao círculo por A, tem ordenada $y_3 = 2a\tan\theta$ é possível concluir, como faz Gomes Teixeira:

> *O ponto onde o vetor OP do ponto P da cissoide corta a assíntota é equidistante de dois outros pontos onde esta assíntota é cortada pelas tangentes PM' e NM'' à cissoide e ao círculo nos pontos de interseção de OP com estas duas curvas.* (Teixeira, 1908, p. 4)

Gomes Teixeira atribui a publicação desta propriedade a Longchamps que a apresenta no Congrès de Grenoble da Association Française pour l'avancement des sciences, em 1885 [177].

> *Desta propriedade da cissoide resulta outro método de construir as suas tangentes.*
> (Teixeira, 1908, p. 4)

Gomes Teixeira não explicita, mais uma vez, o método a seguir, embora ele seja bastante simples. Para tal basta considerar a cissoide, o seu círculo gerador, a sua assíntota e o ponto P por onde se pretende determinar a tangente, procedendo do seguinte modo:

- Determine-se o ponto M, interseção de OP com a assíntota, e o ponto N, interseção de OP com o círculo;
- Trace-se a tangente ao círculo por N[178] e seja M'' a interseção desta tangente com a assíntota da cissoide;
- Assinale-se o ponto M' na assíntota tal que $\overline{MM''} = \overline{MM'}$. A reta PM' é a tangente procurada.

Assim, ficam especificados dois métodos distintos de obtenção da reta tangente à cissoide por um ponto P da curva, devendo o leitor utilizar o método com o qual se sente mais confortável.

No ponto 6 do *Traité* Gomes Teixeira continua o estudo das propriedades da tangente à cissoide, neste caso por um ponto no exterior da curva:

> *Vamos agora determinar as tangentes à cissoide passando por um ponto dado* (α, β).
> (Teixeira, 1908, p. 4)

Vejamos o método inicialmente proposto por Gomes Teixeira para a obtenção das tangentes procuradas.

> Os pontos de contacto das tangentes procuradas com a curva coincidem com os pontos de interseção da cissoide com a *polar* do ponto (α, β), representada pela equação
>
> $$\alpha(3x^2 + y^2) + 2\beta y(x - 2a) - 2ay^2 = 0, \tag{6.1}$$

[177] Nas atas deste congresso publicadas em 1886, nomeadadamente entre as páginas 131 e 135, encontramos o estudo de Longchamps a propósito da determinação de tangentes a cúbicas circulares unicursais. (Uma cúbica circular unicursal é uma curva definida por uma equação do 3.º grau, que tem como elementos básicos para a sua geração um ponto, uma circunferência e uma reta, e cujas coordenadas do ponto que a descreve são funções algébricas racionais de um mesmo parâmetro. (Ferreto, 2003, pp. 21-24))

[178] A construção da tangente ao círculo encontra-se na página 19.

de onde vem que as três retas representadas pela equação

$$(\alpha - 2a)y^3 + 3\alpha y x^2 - 2\beta x^3 = 0, \tag{6.2}$$

que resulta de eliminar $x - 2a$ entre a equação precedente e a da cissoide, passam pelo ponto duplo e pelos três pontos de contacto das tangentes procuradas. ■

Gomes Teixeira não refere como obtém a equação da polar da cissoide nem porque a interseção dessa curva com a cissoide permite obter os pontos de tangência que definem as tangentes procuradas, podendo encontrar-se essa a justificação no seu *Curso*[179].

No entanto, é de salientar que a obtenção geométrica das três retas que determinam os pontos de tangência utilizando apenas a equação deduzida não é simples, pelo que Gomes Teixeira apresenta outra forma de obter os três pontos de tangência.

Estes três pontos [pontos de tangência] determinam um circulo e, para encontrar a sua equação, é suficiente multiplicar o primeiro membro de 6.1 por $3\alpha y + 2\beta x$, o primeiro membro da equação

$$y^2(2a - x) - x^3 = 0 \tag{6.3}$$

da cissoide por $6\alpha\beta$, adicionando em seguida as equações obtidas, membro a membro, vem

$$(9\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 + 3\alpha(\alpha - 2a)y^2 + 2\beta(\alpha - 2a)xy - 8a\beta^2 x = 0,$$

e substituindo y^2 pelo valor $\frac{x(x^2+y^2)}{2a}$, dado pela equação 6.3. Obtemos assim a equação

$$3\alpha(\alpha - 2a)(x^2 + y^2) + 4\beta(\alpha - 2a)y + 18a\alpha^2 x + 8\beta^2 a(x - 2a) = 0. \tag{6.4}$$

O círculo representado por esta equação corta a cissoide em quatro pontos e, substituindo no primeiro e no último termo $x^2 + y^2$ e $x - 2a$ pelos valores $\frac{2ay^2}{x}$ e $-\frac{x^3}{y^2}$, que resultam de 6.3, obtém-se a equação

$$(3\alpha x + 2\beta y)[(\alpha - 2a)y^3 + 3\alpha y x^2 - 2\beta x^3] = 0,$$

que representam quatro retas, das quais três coincidem com as retas definidas por

[179] A este propósito veja-se a página 189 da presente tese.

6.2, e passam consequentemente pelos pontos de contacto das tangentes procuradas, e uma, representada pela equação

$$3\alpha x + 2\beta y = 0, \tag{6.5}$$

passa pelo quarto ponto. Mas, se substituirmos na equação 6.4 x^2+y^2 e $x-2a$ pelos valores $2ax$ e $-\frac{y^2}{x}$ dados pela equação

$$x^2 + y^2 - 2ax = x(x-2a) + y^2 = 0, \tag{6.6}$$

que representa o círculo que figura na definição de cissoide dada no n.º1, teremos:

$$[2\beta y + 3\alpha x][\beta y + (a-2\alpha)x] = 0,$$

por meio da qual vemos que o círculo corta o círculo representado por 6.4 em dois pontos situados sobre as retas

$$2\beta y + 3\alpha x = 0, \beta y + (a-2\alpha)x = 0. \tag{6.7}$$

Resulta daqui que, para resolver o problema proposto, é suficiente procurar o ponto onde a reta 6.5 corta a cissoide e os pontos onde as retas 6.7 cortam o círculo OAN [fig. 6.7], e em seguida o círculo que passa por estes três pontos. Este círculo determina, na sua interseção com a cissoide, os pontos de contacto das tangentes procuradas. ■

Este método, que no final consiste apenas em determinar a interseção de círculos e retas, resulta de um método algébrico que consiste em ir determinando, sucessivamente, a interseção de diferentes curvas e comparando as interseções obtidas concluindo que é possível chegar aos pontos de tangência procurados de diferentes formas. O método aqui exposto é, como o próprio Gomes Teixeira refere, da autoria de J. Walker e encontra-se publicado nos *Proceedings of the London Mathematical Society* (vol. II, pp. 161-165), trabalho esse apresentado por Walker à *London Mathematical Society* a 11 de fevereiro de 1869 e onde o matemático inglês aborda métodos para a determinação das tangentes à cissoide utilizando coordenadas homogéneas nesse seu estudo. É de notar que Gomes Teixeira apresenta aqui os mesmo resultados recorrendo apenas a coordenadas retangulares e referindo apenas os passos que lhe permitem obter o resultado pretendido, deixando de lado cálculos extensos e fastidiosos que tornariam a sua obra menos

interessante.

Gomes Teixeira dedica-se nos pontos seguintes ao estudo de outras propriedades da cissoide de Diócles, voltando a analisar as propriedades do conceito de reta tangente no estudo que faz da cissoide oblíqua.

A primeira abordagem que faz a este conceito a propósito da cissoide oblíqua prende-se com o seu método de construção:

> ***15.*** *(...) O método de Longchamps para traçar as tangentes à cissoide reta, exposto no n.º 5, é também aplicável à cissoide oblíqua, e mesmo a uma classe mais geral de cúbicas, como veremos posteriormente.* (Teixeira, 1908, p. 13)

Verificamos que, no estudo que se segue, Gomes teixeira replica o estudo já efetuada para a cissoide de Diócles, utilizando as propriedades do conceito de reta tangente já estudadas no *Curso*, não acrescentando nada de novo ao nosso conceito, diferindo apenas nas equações utilizadas e nos diferentes métodos para resolver as equações que resultam da aplicação da equação da reta tangente[180].

Contudo, Gomes Teixeira não trabalha apenas com tangentes reais, caracterizando no resultado 28 pontos especiais da curva, os chamados focos, que são definidos à custa de retas tangentes de coeficientes imaginários.

> ***28.*** *Damos aqui o nome de foco de uma curva qualquer a todos os pontos* (α_1, β_1) *pelos quais passam duas tangentes à curva de coeficientes iguais a* $+i$ *e* $-i$*, i representando* $\sqrt{-1}$*; (...)* (Teixeira, 1908, p. 23)

Gomes Teixeira estuda em seguida as propriedades dos focos da cissoide, utilizando para isso transformações geométricas[181].

O estudo que aqui apresentamos para o caso da cissoide é reproduzido, ao longo dos dois primeiros volumes para outras curvas, sendo evidente que Gomes Teixeira aplica aqui os resultados sobre retas tangentes que expõe no *Curso* e que aplica, de forma magistral, às curvas estudadas, apresentando apenas no *Traité*, e como seria esperar numa obra com estas características, os resultados e propriedades principais, deixando grande parte dos cálculos e das demonstrações para o leitor.

Gomes Teixeira publica ainda três artigos científicos sobre o nosso conceito, que a seguir referimos.

[180] Optamos assim por não apresentar os restantes resultados obtidos por Gomes Teixeira a propósito do conceito de reta tangente à cissoide.

[181] Deixamos de fora este estudo uma vez que não se encontra no âmbito deste trabalho dado recorrer a métodos que não estão diretamente relacionados com o nosso conceito.

6.6 O conceito de reta tangente nos artigos científicos

Dos numerosos artigos sobre temas de geometria que Gomes Teixeira publica ao longo da sua vida, três são relativos ao conceito de reta tangente e apresentam resultados originais de Gomes Teixeira resultantes da generalização ou desenvolvimentos de outros resultados já conhecidos a propósito do nosso conceito.

O artigo *Sobre as tangentes à astróide*, inicialmente publicado no tomo VIII dos *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* em 1913, encontra-se incluído no 3.º volume do *Traité*. Neste artigo Gomes Teixeira estuda os casos em que é possível construir as retas tangentes à astróide utilizando régua e compasso, aliando um problema clássico, as construções passíveis de serem efetuadas com régua e compasso, com as modernas técnicas da análise, uma vez que deduz os casos em que é possível a construção pretendida utilizando a álgebra e a análise.

O artigo *Sobre a construção das tangentes à cissoide oblíqua que passam por um ponto exterior à curva* encontra-se publicado no tomo XIII dos *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, datado de 1917, e embora se enquadre nos temas estudados no *Traité* a sua publicação tardia impede que este trabalho seja incluído no 3.º volume desta obra. No 1.º volume do *Traité* Gomes Teixeira apresenta um método para construir as tangentes à cissoide reta por um ponto no seu exterior[182], método esse que não pode ser generalizado às cissoides oblíquas. Esse caso é aqui analisado por Gomes Teixeira, recorrendo às equações paramétricas da cissoide e aos métodos que explora no *Traité*.

Original no tema que aborda é o artigo *Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener a une courbe par un point situé sur la courbe*, que passamos a analisar.

6.6.1 O conceito de reta tangente no *Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener a une courbe par un point situé sur la courbe*

O artigo *Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener a une courbe par un point situé sur la courbe*, publicado em 1905 no *L'Enseignement Mathématique*, contém uma demonstração alternativa de um resultado já conhecido sobre as tangentes a uma curva.

Neste artigo, Gomes Teixeira começa por efetuar uma revisão da literatura referindo os principais resultados sobre o número de tangentes que se pode traçar a a uma curva por um ponto da curva. O primeiro resultado que refere é o relativo ao caso em que a curva é algébrica e são apenas consideradas as tangentes reais. Este resultado é enunciado por Basset na sua obra *An elementary Treatise on cubic and quartic curves* onde o matemático inglês apresenta o

[182] Veja-se a este propósito a página 197.

seguinte resultado para uma curva algébrica de grau n:

> ***25.*** *Por um ponto na curva, não se podem traçar mais do que* $(n+1)(n-2)$ *tangentes à curva, excluindo a tangente por esse ponto.* (Basset, 1901, p. 17)

Ao contrário do que se poderia supor a partir do título, não são procuradas retas tangentes cujo ponto de tangência é o ponto dado, mas sim retas tangentes à curva, em qualquer ponto, que passam por um ponto dado na curva, sendo este um problema não trivial.

Gomes Teixeira procura contudo analisar o caso mais geral, onde se consideram tangentes reais e imaginárias, caso estudado por Salmon na obra *Traité de Géométria Analytique* para curvas planas, onde é enunciado o resultado que Gomes Teixeira refere e estuda neste seu artigo:

> *O número de tangentes que podemos traçar por um ponto múltiplo de ordem* k *é* $n(n-1)-k(k+1)$. (Salmon, 1884, p. 90)

Neste artigo Gomes Teixeira não pretende apresentar um resultado novo mas uma demonstração que considera mais simples do que a apresentada por Salmon na obra referida. Salmon demonstra o resultado enunciado recorrendo ao que Gomes Teixeira designa de "um elegante método algébrico"(Teixeira, 1905, p. 138), onde utiliza a teoria dos determinantes para garantir que determinadas equações representam efetivamente as retas tangentes e, conhecendo o grau das equações obtidas, consegue determinar quantas soluções existem. Gomes Teixeira demonstra o mesmo resultado recorrendo à polar da curva e ao seguinte lema:

> *Se* (x_1, y_1) *é um ponto múltiplo de ordem* k *da curva considerada, ele é também um ponto múltiplo da mesma ordem da sua polar, e os* k *ramos da curva que se cortam nesse ponto são tangentes aos* k *ramos da polar que se cortam aí.* (Teixeira, 1905, p. 139)

Para demonstrar este lema Gomes Teixeira recorre ao cálculo diferencial, aplicando propriedades básicas do conceito de diferencial e de reta tangente a uma curva, numa demonstração mais simples e utilizando conceitos mais básicos do que a demonstração de Salmon. Demonstrado este lema Gomes Teixeira consegue então provar o resultado pretendido.

> Baseados no lema anterior, vamos determinar o número de tangentes que podemos traçar a uma curva dada pelo ponto (x_1, y_1). Suponhamos primeiramente que a curva tem apenas um ponto múltiplo, que coincide com (x_1, y_1), e que a ordem deste ponto é k. A curva dada e a sua polar cortam-se em $m(m-1)$pontos e um desses pontos

coincide com (x_1, y_1). Ora, este ponto é múltiplo de ordem k na curva e na polar, logo conta por k^2 interseções. Mas, como os k ramos da curva são tangentes aos k ramos da polar, cada ramo dela tem um outro ponto, consecutivo a (x_1, y_1), em comum com a polar. Pelo que o número de interseções da curva e da polar, distintos de (x_1, y_1), é igual a

$$m(m-1) - k(k+1).$$

Ora, estes pontos coincidem com os pontos de contacto das tangentes à curva traçadas por (x_1, y_1); temos, consequentemente, representando o número destas tangentes por t,

$$t = m(m-1) - k(k+1),$$

resultado que coincide com o obtido por Salmon. Se (x_1, y_1) é um ponto simples, esta fórmula ainda se verifica, supondo $k = 1$. Se a curva dada tem δ pontos duplos e ν pontos de cúspide, distintos de (x_1, y_1), o valor de t pode obter-se facilmente empregrando o método habitualmente utilizado para demonstrar as fórmlas de Plücker que determinam a classe da curva (SALMON, *l.c.*, p. 77-78) e o lema anteriormente demonstrado. Teremos assim

$$t = m(m-1) - 2\delta - 3\nu - k(k+1).\blacksquare$$

Embora inicialmente Gomes Teixeira comece por dizer que vai apresentar apenas uma nova demonstração de um resultado já enunciado pro Salmon o que, comparando as duas demonstrações é por si só de valorizar, principalmente tendo em atenção que a demonstração de Gomes Teixeira é efetivamente mais simples e utiliza técnicas que surgem de forma mais natural no estudo das curvas. No final deste artigo Gomes Teixeira acaba por enunciar uma generalização do resultado inicial e que permite obter o número de tangentes a uma curva por um ponto dado não só quando a curva tem pontos múltiplos mas também quando tem pontos de cúspide[183], contribuindo deste modo Gomes Teixeira para o desenvolvimento do estudo das curvas, um dos assuntos mais relevantes na matemática do final do século XIX e inícios do século XX.

[183]Ponto de cúspide de uma curva é um ponto a partir do qual o sentido do movimento do ponto gerador da curva muda bruscamente. (Ferreto, 2003, p. 15)

Capítulo 7

José Sebastião e Silva

José Sebastião e Silva (Fig. 7.1) nasce a 12 de dezembro de 1914 na vila de Mértola.



Figura 7.1: Fotografia de Sebastião e Silva.

Frequenta a licenciatura de Ciências Matemáticas, na Faculdade de Ciências de Lisboa, terminando o curso em julho de 1937 com uma média de 17 valores.

Em 1940 inicia a sua atividade como investigador, no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, no Instituto de Alta Cultura, publicando os seus primeiros trabalhos de investigação, que desde logo são reconhecidos.

Em fevereiro de 1943 parte para Itália, para o Istituto Nazionale di Alta Matemática di Roma, como bolseiro do Instituto de Alta Cultura, especializando-se em Análise Funcional e onde escreve a tese de doutoramento que apresenta, em 1948, à Faculdade de Ciências de Lisboa e que o projeta enquanto matemático a nível internacional.

De regresso a Portugal, dedica-se à investigação e ao ensino, passando pelo Instituto Superior de Agronomia e terminando a sua carreira na Faculdade de Ciências de Lisboa. Nesta faculdade leciona, entre outras, a disciplina de História do Pensamento Matemático criada por sua iniciativa, a primeira disciplina dedicada exclusivamente à história da matemática de que há registo no sistema de ensino português, abordando aí principalmente a história da matemática grega.

José Sebastião e Silva faz parte da equipa responsável pela reforma do ensino da matemática em Portugal, na década de 60, resultante do Projeto Regional do Mediterrâneo. Assumindo esse projeto publica manuais escolares, elabora guias de utilização dos manuais publicados, organiza cursos de formação para os professores de matemática e, com as opções curriculares tomadas, contribuindo de forma direta para a introdução da matemática moderna em Portugal.

Falece em 25 de maio de 1972 (Guimarães, 1972, s.p.).

Deixa publicada uma vasta obra cientifica e pedagógica que tem influência direta em todos aqueles que acompanham os seus trabalhos:

> *Em termos gerais, Sebastião e Silva teve relativamente ao Ensino da Matemática uma visão globalizante capaz de compreender o que se passava desde o Ensino Primário ao Ensino Superior. Via a Matemática não como um conjunto de técnicas a dominar mas como um meio de conseguir a formação integral de um cidadão.* (Silva, s.d., s.p.)

7.1 A introdução da matemática moderna no ensino português

O século XX, fruto das alterações sociais nele registadas, é fértil em mudanças no sistema de ensino, registando-se as principais mudanças após a 2.ª guerra mundial, em virtude das necessidades tecnológicas e profissionais que dela resultam.

Em Portugal, o ministro Leite Pinto enceta conversações com a OCDE no sentido de elaborar um plano de trabalho comum relativo às questões da educação. Estas conversações originam o "Projeto Regional do Mediterrâneo", um projeto de assistência aos países do sul da Europa, no âmbito do qual o ensino da matemática sofre profundas alterações (Carvalho, 1986, pp. 784-797).

No âmbito destas reformas uma delegação portuguesa participa, em 1957, na conferência "Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques", onde toma contacto com as ideias da matemática moderna e as introduzem no seio da comunidade de professores de matemática portugueses, dando-se assim início ao que Matos (2009, p.

3) designa de "princípios"do movimento da matemática moderna em Portugal. Entre 1963 e 1968 decorre o período da "experimentação", altura em que o ensino da matemática moderna se inicia em Portugal com turmas experimentais, entrando-se no período da "disseminação"a partir de 1968. O ensino da matemática moderna mantém-se nas escolas primárias até 1974 e nos liceus até 1990 (Matos, 2009, pp. 4-5).

Assim, na década de 60 o ensino liceal[184] está dividido: as turmas regulares, onde são seguidos os programas publicados em 1954 e utilizados os livros únicos escolhidos pelo estado; as turmas piloto, onde se estudam novos conteúdos[185] e para as quais são escritos livros de texto específicos.

No que concerne aos conteúdos a abordar, há um acentuado acréscimo de matéria nos programas das turmas piloto. A inclusão de temas como a lógica, a teoria de conjuntos, a álgebra de Boole ou as transformações geométricas, dever-se-à crença de Sebastião e Silva de que o ensino de matemática deveria acompanhar o desenvolvimento da própria matemática.

O conceito de reta tangente a uma curva não surge no ensino fruto destas alterações, mas sim como conteúdo integrante do programa em vigor em todas as turmas. O nosso conceito é abordado no âmbito da geometria analítica e no âmbito da introdução ao estudo do cálculo diferencial, embora a influência da matemática moderna também se faça sentir na forma como é trabalhado:

> *A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino.* (Silva, 1975, p. 11)

Esta mudança de métodos de ensino, assim como a familiarização dos professores com a matemática moderna, faz-se com uma aposta na formação de professores. Um primeiro passo nesta formação é dado com a organização, por Sebastião e Silva, do "Curso de Introdução à Matemática Moderna", levado a cabo no ano letivo 1962/63.

Com a implementação do projeto piloto torna-se necessário formar os professores, pelo que em agosto de 1964 funciona em Oeiras o primeiro curso de atualização de professores, curso esse ministrado pelos responsáveis da implementação do projeto. Em setembro de 1965 há uma repetição do curso de Oeiras para novos professores, o que permite um alargamento do número de turmas inserido no projeto piloto, mantendo-se os "Cursos de Oeiras"por diversos anos.

[184] O 3.º ciclo do ensino liceal é, à época, constituído pelos 6.º e 7.º anos correspondentes aos atuais 10.º e 11.º anos.

[185] No anexo I encontra-se uma tabela comparativa dos programas em vigor nas turmas regulares e nas turmas piloto para os 6.º e 7.º anos do ensino liceal.

Para os professores que não estão presentes nestas formações e que lecionam os programas da matemática moderna, Sebastião e Silva deixa indicações metodológicas precisas no seu *Guia para a utilização do compêndio de matemática* onde, no 1.º volume apresenta uma lista de 16 normas gerais que o professor deve seguir nas suas aulas (Silva, 1975, pp. 11-14). Dela realçamos os seguintes aspetos:

- Envolvimento do aluno no seu processo de aprendizagem, deixando de ser um agente passivo na sala de aula;
- A importância da definição dos conceitos e da demonstração dos teoremas;
- A importância das aplicações da matemática a outras disciplinas;
- O não ter medo de errar, "porque só errando se aprende verdadeiramente".

Os livros de texto que Sebastião e Silva escreve, acompanhado dos respetivos guias, tornam-se uma referência neste processo de modernização do ensino da matemática:

> *Os textos, que foram surgindo em fascículos, surpreenderam toda a gente, porque, para além dos conhecimentos científicos, revelavam excecionais dotes pedagógicos, grande cultura humanística e sobretudo uma segurança de perspetivas e de modernidade só possível a quem está na crista da Ciência como investigador.* (Lima, 1997, p. 103)

Dada a qualidade destes textos eles são posteriormente compilados e publicados em forma de livro, intitulados *Compêndio de Matemática*, publicados em 3 volumes em 1975, bem como os respetivos *Guia para a utilização do compêndio de matemática.*

A qualidade dos livros de texto da autoria de Sebastião e Silva é tal que ainda hoje são referência no ensino da matemática em Portugal:

> *Estes Compêndios de Álgebra de Sebastião e Silva e Silva Paulo são referências para grande parte dos conceitos de Álgebra e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados na disciplina de Matemática Aplicada. (...)*
>
> *Estes livros são o ponto de referência de muitos aspetos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho dos professores. As "Normas Gerais"contidas no 1º volume do Guia devem ser objeto de reflexão por parte dos professores.* (DGFV, 2005, p. 14)

Outro aspeto a ter em linha de conta é a importância atribuída à utilização da história da matemática no ensino:

> *Os factos da historia da matemática relacionados com os assuntos a estudar, quando adaptados à mentalidade dos alunos, constituem poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho.* (Decreto n.º 39807, 1954, p. 1060)

Para tal,

> *Os compêndios devem inserir notas biográficas dos matemáticos a que, segundo o desenvolvimento dos programas, haja de fazer-se referência.* (Decreto n.º 39807, 1954, p. 1060)

Estas notas históricas encontram-se espalhadas nas diversas obras da autoria de Sebastião e Silva para o ensino liceal, e respetivos guias, encontrando-se a história da matemática efetivamente presente no seu ensino. Além disso, em 1964 começa a funcionar, na Faculdade de Ciências de Lisboa, sob a responsabilidade de Sebastião e Silva, a disciplina de *História do pensamento Matemático*, permitindo que os futuros professores de matemática obtenham formação nesta área específica da matemática, permitindo-lhes a:

> *(...) inserção das matérias no quadro de uma cultura geral, que tempere e humanize o abstratismo inerente à matemática, procurando explicá-la como processo histórico (...).* (Paulo & Silva, 1963, p. 5)

7.2 O *Compêndio de Álgebra*

A obra *Compêndio de Álgebra*, escrita em colaboração com J. D. Silva Paulo, tem a primeira edição datada de 1956 e foi o livro único nos concursos do Ministério da Educação Nacional de 1958, 1963 e 1968 para o ensino liceal (Fig. 7.2). Utilizado até, pelo menos, aos anos de 1973 e 1974 é composto por 2 tomos: o primeiro para o 6º ano e o segundo para o 7º ano do liceu.

Nesta obra são abordados diversos temas como, por exemplo, a análise infinitesimal, a álgebra ou a análise combinatória. O conceito de reta tangente a uma curva surge neste contexto no primeiro volume, a propósito do estudo das derivadas.

No prefácio a esta obra os autores destacam a importância de adaptar o ensino às diferentes necessidades dos alunos, realçando já na década de 60 do século XX a importância de uma

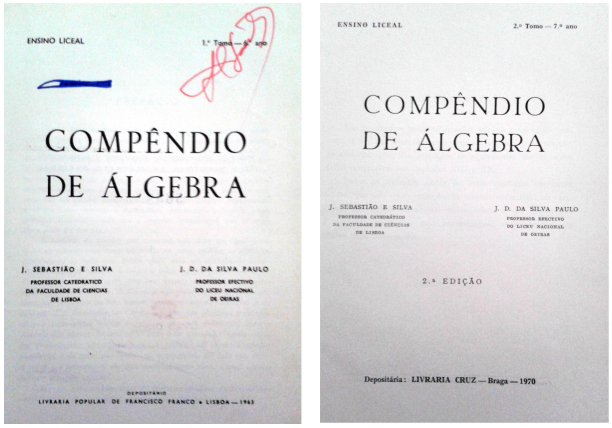


Figura 7.2: Frontispicios dos dois tomos do *Compêndio de Álgebra*.

pedagogia diferenciada. Nesse sentido, preparam este manual para ser utilizado não só pelos alunos com um desempenho regular, mas também por aqueles que se destacam e pretendem aprofundar conhecimentos:

> *É também de admitir que o ensino não deva ser igual para todos os alunos, mas antes adaptado, em certa medida, às aptidões particulares de cada um. (...) A eles [bons alunos] se dirige grande parte do que, neste livro, vai impresso em tipo menor, bom como alguns exercícios mais difíceis.* (Paulo & Silva, 1963, p. 5)

Assim este manual contém diversos conteúdos facultativos, devidamente assinalados, destinados aos alunos mais interessados.

No sentido de introduzir os alunos no assunto que irão estudar, cada capítulo do tomo I inicia-se com uma pequena introdução ou citação sobre essa tema, das quais destacamos a seguinte pela importância que atribui às aplicações da matemática:

> *Não seria possível construir um navio, um automóvel, um avião, uma ponte, um edifício ou mesmo objetos de uso comum; não seriam possíveis viagens marítimas ou aéreas (...) sem efetuar contagens, medições e cálculos (...).*
>
> *De resto, a matemática está a tornar-se cada vez mais necessária em todas as ciências da natureza, puras e aplicadas (desde a física à biologia), bem como nas ciências sociais (economia, finanças, etc.). Até na psicologia tem sido utilizada com êxito.* (Paulo & Silva, 1963, p. 7)

Em termos de estrutura cada um dos capítulos do *Compêndio de Álgebra* encontra-se organizado da seguinte forma: exposição dos conceitos teóricos e exemplos, encontrando-se no final do

capítulo os exercícios de consolidação e as respetivas soluções. Alguns dos capítulos terminam com notas históricas.

7.3 O conceito de reta tangente no *Compêndio de álgebra*

O conceito de reta tangente surge, no *Compêndio de Álgebra*, associado ao conceito de declive de uma curva na introdução ao estudo de Cálculo Diferencial, que encontramos no capítulo VIII, dedicado ao estudo das derivadas.

A motivação para o estudo deste capítulo é apresentada pelos autores pela necessidade, na análise de gráficos de funções contínuas, de estudar a rapidez da variação ocorrida nesse mesmo gráfico (Paulo & Silva, 1963, pp. 214-215).

Este capítulo inicia-se com a definição de declive de uma curva:

> *Consideremos agora, mais geralmente, a curva C representativa duma função contínua $y = f(x)$ e seja x_0 um valor de x, ao qual corresponde um valor de y, que designaremos por $y_0 = f(x_0)$.*
>
> *Deste modo, o ponto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ pertence à curva C [Fig. 7.3]. Consideremos, por outro lado, um ponto $P \equiv (x, y)$, móvel sobre a curva C, sendo portante a sua ordenada $y = f(x)$. Quanto $x \to x_0$, a variável y tende para y_0 (visto a função ser contínua); diz-se então que* ***o ponto P tende para*** *P_0. Designando por d o declive da reta P_0P, teremos:*
>
> $$d = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (para\ x \neq x_0).$$
>
> *Suponhamos agora que, quando $x \to x_0$, a variável d, função de x, tende para um limite finito (já sabemos o que isto significa, depois do que foi dito no Cap. VII). Representando esse limite por d_0 será:*
>
> $$d_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
>
> *Diremos então que d_0 é o* ***declive da curva C no ponto P_0.*** (Paulo & Silva, 1963, pp. 217-218)

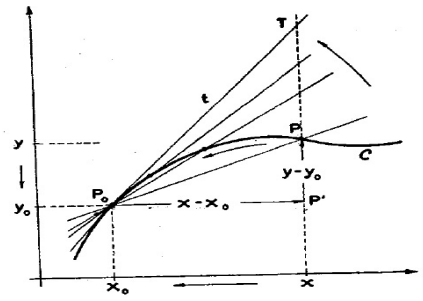


Figura 7.3: Ilustração do conceito de declive de uma curva.

Destacamos a referência ao capítulo onde foi abordada a noção de limite, dando indicações aos leitores com mais dificuldades de onde poderão encontrar os esclarecimentos necessários.

Salientamos ainda a presença da ideia de movimento realçada pela figura representativa do conceito.

Depois os autores introduzem o conceito de reta tangente nos seguintes termos:

> *A reta t, que passa por P_0 e tem declive d_0, diz-se* ***tangente à curva no ponto*** P_0 (Paulo & Silva, 1963, pp. 217-218).

Assim, a reta tangente é-nos apresentada a partir de um dos seus pontos e do seu declive. Contudo, a ideia transmitida pela representação do conceito de declive de uma curva é utilizada para apresentar uma caracterização alternativa da reta tangente:

> *Quando um ponto móvel P tende para o ponto fixo P_0, a secante P_0P tende para uma posição limite t, que é a tangente à curva no ponto P_0. O declive da curva no ponto P_0 é o declive da tangente à curva nesse ponto.* (Paulo & Silva, 1963, p. 218)

Os autores utilizam aqui a noção de uma reta a tender para outra, e que clarificam numa nota de rodapé nos seguintes termos:

> *Dizer que a reta P_0P tende para a reta t, significa que o ângulo das duas retas tende para zero (quando $P \to P_0$).* (Paulo & Silva, 1963, p. 218)

Vemos assim a mesma obra apresentar duas definições do mesmo conceito. Notemos contudo que, para estas definições serem cientificamente equivalentes, é necessário aceitar que as retas verticais têm declive e definir qual o seu valor, pois quando as retas secantes tendem para retas verticais o valor de d_0 não é um número real. Este aspeto não é esquecido pelos autores que, aquando da definição de declive de uma reta (Paulo & Silva, 1963, p. 217), tinham considerado que as retas verticais têm declive infinito. Todavia, impõe uma condição a esse declive para a existência de reta tangente nesse ponto:

> *Se aquele limite d_0 for ∞, diremos que o declive da curva em P_0 é infinito. Mas só quando o sinal deste for determinado se pode então falar de «tangente à curva em P_0».* (Paulo & Silva, 1963, p. 218)

Com este resultado vemos ser restringida a existência de retas tangentes verticais aceitando-se, por exemplo, retas tangentes verticais em pontos de inflexão, mas não se considerando como retas tangentes as retas verticais que surgem em pontos angulosos de determinadas curvas.

Em seguida é definido o conceito de derivada:

> *Chama-se* ***derivada da função*** $f(x)$ ***em*** x_0*, e representa-se por $f'(x_0)$, o limite da razão incremental de $f(x)$ entre x_0 e x, quando x tende para x_0 (se esse limite existir). Em fórmula:*
>
> $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
>
> (Paulo & Silva, 1963, p. 219)

A relação entre este conceito e o conceito de reta tangente surge aquando do estudo do significado geométrico de derivada, concuindo-se:

> *(...) a derivada $f'(x_0)$ é o declive da reta tangente à curva em P_0.* (Paulo & Silva, 1963, p. 221)

Assim, encontra-se aqui implícita a relação direta entre um problema de análise e um problema de geometria, relação essa que é explicitada pelos autores:

> *Como o declive duma curva num ponto é, por definição, o declive da tangente à curva nesse ponto, o cálculo da derivada traduz, em análise, o problema geométrico da determinação da tangente.* (Paulo & Silva, 1963, p. 221)

Ao contrário do que seria de esperar, não existe qualquer exemplo ou exercício relativo à determinação da equação da reta tangente ao gráfico de uma função por um dado ponto, embora em vários gráficos surjam traçadas retas tangentes para facilitar, por exemplo, a compreensão da relação existente entre o sinal da derivada e a monotonia da função.

Analisando os programas em vigor, verificamos que não existem referências explícitas ao estudo do conceito de reta tangente neste nível de ensino, pelo que os autores optam por não aprofundar esse estudo com a inclusão de exercícios.

No que concerne à utilização da história da matemática, vemos o desenvolvimento científico do conceito de reta tangente servir de inspiração para a sua lecionação; contudo, nas notas

históricas que terminam o capítulo, apenas é referido o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, não sendo abordada a questão da determinação das retas tangentes a curvas.

O estudo do conceito de reta tangente a uma curva volta a ser estudado no âmbito da *Geometria Analítica Plana*.

7.4 A *Geometria Analítica Plana*

A obra *Geometria Analítica e Plana*, publicada pela primeira vez em 1956, é o livro único do 7º ano do liceu nos concursos do Ministério da Educação Nacional entre 1957 e 1972. A sua longa utilização levou que fosse diversas vezes editada, sendo revista pelo seu autor e sofrendo ligeiras alterações/melhoramentos[186].

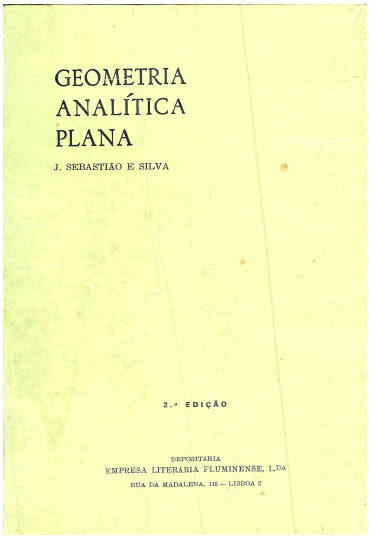

GEOMETRIA
ANALÍTICA
PLANA
J. SEBASTIÃO E SILVA
2.ª EDIÇÃO
DEPOSITARIA
EMPRESA LITERARIA FLUMINENSE, L.DA
RUA DA MADALENA, 145 — LISBOA 2

Figura 7.4: Capa do livro *Geometria Analítica Plana*.

Trata-se de um pequeno livro destinado à lecionação dos conteúdos de geometria analítica previstos no programa para o 7º ano do ensino liceal. O conceito de reta tangente surge, nesta obra, no capítulo dedicado ao "Estudo Elementar das Cónicas", em particular no estudo da circunferência.

Ainda antes do primeiro capítulo esta obra contém três secções: introdução, notas históricas e algumas indicações bibliográficas.

A introdução, um pequeno texto de duas páginas, começa por apresentar uma distinção entre a geometria e a análise:

A matemática compreende dois ramos principais: a análise, que trata dos números

[186]Na investigação que relatamos nesta tese utilizamos apenas a edição revista de 1970.

> *e das relações entre números (expressa por equações, inequações, etc.), e a geometria, que estuda as propriedades relativas a pontos e a conjuntos de pontos (lugares geométricos).* (Silva, 1970, p. 5)

Notemos, tal como Sebastião e Silva (1970, p. 5) que é a transformação do enunciado dessas propriedades da geometria da linguagem retórica clássica para a linguagem simbólica da análise que está na base da geometria analítica, estando esta união na base do progresso da matemática:

> *Na verdade, a geometria analítica e o cálculo infinitesimal tornaram-se, a partir do século XVII, os instrumentos principais do progresso da matemática, justificando o êxito espetacular da matemática na física.* (Silva, 1970, p. 6)

Sebastião e Silva considera como natural o surgimento deste novo método em matemática, exemplificando um caso simples em que a utilização de coordenadas é essencial.

> *Note-se que a ideia de definir um ponto por meio de números foi sugerida ao homem, de modo natural, em problemas impostos pela sua existência sobre a Terra. Assim, foram sobretudo os problemas de navegação que levaram a adotar o sistema das coordenadas geográficas, por meio da qual cada ponto da superfície fica determinada por dois números: a latitude e a longitude. E, se o ponto está situada acima ou abaixo do nível do mar, um terceiro número se torna necessário para o localizar: a altitude (positiva ou negativa).* (Silva, 1960, p. 6)

A necessidade de justificar de forma tão enfática e detalhada a importância da geometria analítica pode também estar relacionada com a mudança de paradigma relativamente à geometria e ao seu ensino desencadeada pela reforma da matemática moderna. Depois de séculos a ser estudada a partir dos *Elementos* de Euclides, a geometria euclidiana é posta de parte por este movimento, ficando célebre a frase de Dieudonné "Abaixo Euclides". De facto, com a matemática moderna pretende-se, entre outros aspetos, que a geometria deixe de ser ensinada segundo os métodos da geometria euclidiana, passando a sua lecionação a estar mais próxima dos métodos da álgebra e da análise (Gonçalves, 2007, pp. 16-18).

A introdução à *Geometria Analítica Plana* termina com a referência aos matemáticos associados ao surgimento da geometria analítica: Descartes e Fermat.

A segunda secção, intitulada "Notas Históricas", apresenta, além das biografias de Descartes e Fermat, diversas referências históricas que nos parecem ter como objetivo um entendimento completo dos matemáticos referidos.

No sentido de ajudar o leitor no aprofundamento das diversas temáticas abordadas ao longo desta obra, são apresentadas na secção seguinte algumas indicações bibliográficas, das quais destacamos as obras em história da matemática assim como a inclusão de uma fonte primária, o *Discours de la Méthode* de Descartes.

Nos quatro capítulos onde são expostos os conteúdos a estudar é seguida a seguinte estrutura: exposição teórica, exemplos e no final do capítulo exercícios. Analisemos um exemplo desta exposição, com a abordagem ao conceito de reta tangente.

7.5 O conceito de reta tangente na *Geometria Analítica Plana*

Na obra *Geometria Analítica Plana* Sebastião e Silva estuda diversas propriedades geométricas recorrendo a equações, efetuando um estudo detalhado dos lugares geométricos representados por equações do 1.º grau (retas) e do 2.º grau (cónicas), abordando a questão do conceito de reta tangente a propósito do estudo da circunferência. Contudo, a primeira referência ao nosso conceito surge logo nas notas históricas:

> *Além disso, Fermat foi considerado por Newton um percursor do cálculo diferencial, no seu estudo das tangentes ao gráfico das funções, assunto que também mereceu a atenção de Descartes.* (Silva, 1970, p. 14)

7.5.0.1 A definição

O conceito de reta tangente à circunferência é apresentado por Sebastião e Silva a propósito da determinação da interseção de uma reta com uma circunferência. Para isso, começa por fazer notar que, sendo uma reta representada por uma equação de 1.º grau em x e y e uma circunferência representada por uma equação de 2.º grau em x e y, determinar a interseção de uma reta com uma circunferência se reduz à resolução de um sistema de duas equações em x e em y. Apresentado o método de resolução deste sistema, Sebastião e Silva conclui que este levará à resolução de uma equação do 2.º grau com uma só incógnita, pelo que é possível dizer que o problema da interseção de uma reta com uma circunferência se reduz à resolução de uma equação de 2.º grau, de coeficientes reais, numa incógnita. Sebastião e Silva analisa então as diferentes soluções desta equação:

> *Como se sabe, uma equação do 2.º grau, de coeficientes reais, numa incógnita, pode ter duas raízes reais (distintas), uma só raiz real (dupla) ou duas raízes imaginárias. Assim, no 1.º caso, a interseção será formada por dois pontos distintos (a reta*

é secante); no 2.º caso, a interseção será formada de um único ponto (a reta é tangente); no 3.º caso, a interseção será vazia (a reta não encontra a circunferência). (Silva, 1970, p. 107).

Seguem-se três exemplos que visam representar as três situações definidas anteriormente. Analisemos o exemplo relativo à reta tangente à circunferência.

II. *Achar a interseção da reta* $3x + 2y - 18 = 0$ *com a circunferência* $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$. (Silva, 1970, pp. 107-108)

Resolvendo a primeira equação a respeito de y e entrando com a expressão obtida na segunda equação vem:

$$x^2 + \left(\frac{18 - 3x}{2}\right)^2 + 2x - 4(18 - 3x) + 4 = 0,$$

ou seja

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

equação esta com uma raiz dupla: $x_1 = 2$. A reta é pois *tangente* à circunferência num ponto de abcissa 2; a ordenada deste ponto será

$$y_1 = \frac{18 - 3 \times 2}{2} = 6$$

A interseção reduz-se pois ao ponto (2, 6). ■

Neste exemplo grande parte dos cálculos são omitidos, sendo apenas apresentados os passos principais da resolução do sistema formado pelas equações da reta e da circunferência. Sebastião e Silva foca-se assim nos aspetos essenciais do exercício em causa, deixando para os seus leitores a confirmação dos cálculos.

No subcapítulo seguinte, intitulado "Problemas relativos a tangentes ", é apresentado um estudo detalhado da questão da reta tangente à circunferência.

7.5.0.2 Os problemas/exercícios

A resolução de problemas/exercícios relativos ao conceito de reta tangente à circunferência encontra-se dividida em duas partes, a primeira de estudo obrigatório e a segunda de estudo

facultativo, correspondendo às duas espécies em que Sebastião e Silva divide o problema das tangentes:

> ***46. problemas relativos a tangentes.*** *- Os mais simples problemas em que intervêm retas tangentes a circunferências podem dividir-se em duas espécies. Nos problemas que diremos de 1.ª espécie: é dada uma circunferência e pede-se uma reta que seja tangente à circunferência, em dadas condições. Nos problemas que diremos de 2ª espécie: é dada uma reta e pede-se uma circunferência que seja tangente à reta, em dadas condições.* (Silva, 1970, p. 108)

Estes problemas são aprofundados com a apresentação de vários exemplos sendo que, relativamente aos problemas da 1.ª espécie, são apresentados dois exemplos:

> ***Exemplo I****: Determinar analiticamente a reta que é tangente à circunferência*
>
> $$x^2 + y^2 - 10x = 0$$
>
> *no ponto de abcissa 8 e de ordenada positiva.* (Silva, 1970, pp. 108-109)
>
> O método mais elementar para resolver este problema é o que se baseia na seguinte propriedade: a tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

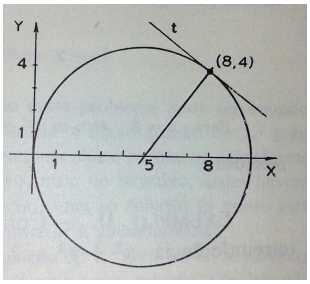


Figura 7.5: Ilustração do Exemplo I de 1.ª espécie.

Fazendo $x = 8$ na equação dada obtém-se

$$y^2 - 16 = 0,$$

donde $y = \pm 4$. Será pois $(8, 4)$ o ponto de tangência. Por outro lado, o centro da

circunferência é $(5,0)$. Logo a reta que une estes pontos tem por declive

$$m = \frac{4-0}{8-5} = \frac{4}{3}.$$

Então, como a tangente é perpendicular a esta reta, o seu declive será

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{4}$$

e, como passa pelo ponto $(8,4)$, terá por equação

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x-8) \quad \text{ou seja} \quad y = -\tfrac{3}{4}x + 10.\blacksquare$$

Sebastião e Silva recorre assim à propriedade mais conhecida da reta tangente a uma circunferência, a perpendicularidade ao raio pelo ponto de tangência, propriedade essa que não demonstra nem refere anteriormente nesta obra. Contudo, segundo o programa da disciplina de matemática, é efetuada uma abordagem ao estudo da circunferência e da reta tangente à circunferência no 3º ano, pelo que este facto seria já do conhecimento dos alunos.

O autor apresenta um método semelhante ao utilizado por Descartes na sua geometria e que consiste em, conhecido o ponto de tangência, utilizar a reta normal para obter a equação da reta tangente[187]. Sebastião e Silva chama contudo, a atenção do leitor para a existência de outros métodos de resolução deste problema:

> ***Nota**: O declive da tangente também pode ser determinado pelo método das derivadas, que é aplicável não só a circunferências mas a toda a curva representativa duma função derivável. Com efeito, sabe-se que a derivada duma função $f(x)$ num ponto x_0 é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa x_0; de modo que se designarmos por y_0 a ordenada deste ponto, a tangente terá por equação*
>
> $$y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$
>
> *No nosso problema, a função $f(x)$ é o ramo não negativo da função de x definida pela equação dada: $y = \sqrt{10x - x^2}$. A sua derivada será então*
>
> $$y' = \frac{10 - 2x}{2\sqrt{10x - x^2}}.$$

[187] Veja-se o tratamento dado por Descartes ao conceito de reta tangente em Mota C. (2008, pp. 46-55).

Para $x = 8$, tem-se $y' = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$, resultado este que confirma o precedente. (Silva, 1970, pp. 109-110)

Com a apresentação desta nota Sebastião e Silva estabelece uma correspondência entre a resolução no âmbito da geometria analítica e a resolução recorrendo às derivadas, tendo o método das derivadas já sido estudado pelos alunos no ano anterior utilizando o *Compêndio de Álgebra*.

Vejamos o segundo exemplo destes problemas de 1.ª espécie:

Exemplo II. *Conduzir pelo ponto $(-1, 0)$ tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$.* (Silva, 1970, pp. 110-111).

A equação geral das retas (não verticais) que passam pelo ponto $(-1, 0)$ é:

$$y = m(x + 1).$$

A interseção duma tal reta com a circunferência considerada determina-se, resolvendo o sistema de equações em x, y:

$$\begin{cases} y = m(x + 1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

Eliminando y e simplificando, obtém-se a equação em x:

$$\left(1 + m^2\right) x^2 + 2\left(m^2 - 1\right) x + m^2 - 1 = 0.$$

Então é fácil ver que a reta é tangente à circunferência, se (e só se) esta equação tiver uma única raiz (dupla), isto é, se for nulo o seu discriminante. A condição de tangência será pois, adotando a forma simplificada do binómio discriminante[188]:

$$\left(m^2 - 1\right)^2 - \left(m^2 + 1\right)\left(m^2 - 1\right) = 0$$

ou seja $m^2 - 1 = 0$, donde $m = \pm 1$. Os declives das tangentes pedidas são portanto 1 e -1; e, como as tangentes passam pelo ponto $(-1, 0)$, têm por equações

$$y = x + 1 \quad \text{e} \quad y = -x - 1.\blacksquare$$

[188] Sebastião e Silva opta por considerar o binómio discriminante dado por $k^2 - ac$, sendo $k = b/2$, em vez de $b^2 - 4ac$.

Tal como nos exemplos anteriores, também aqui apenas são deixados os cálculos essenciais para a resolução do problema sendo omitidos todos os cálculos auxiliares.

Embora apresente métodos de resolução distintos para pontos sobre a circunferência ou no seu exterior, Sebastião e Silva generaliza esta resolução para todas as possíveis posições do ponto dado:

> ***Nota.*** *O método adotado na resolução deste problema pode ser seguido em problemas análogos. Geralmente é-se conduzido a uma equação do 2.º grau em m, que permite determinar os valores admissíveis deste parâmetro. Conforme o discriminante desta equação em m for positivo, nulo ou negativo, assim haverá duas soluções (o ponto é exterior à circunferência), uma só solução (o ponto está sobre a circunferência) ou nenhuma (o ponto é interior à circunferência).* (Silva, 1970, p. 111)

Ciente de que, a resolução do sistema nem sempre conduz a uma equação do 2.º grau, como acontece no exemplo e é estudado na nota, Sebastião e Silva analisa o o caso em que a equação em m resultante é do 1.º grau.

> *Mas pode acontecer que, em vez de uma equação do 2.º grau em m, se obtenha uma equação do 1.º grau em m, que terá portanto uma única solução. Ora isto não quer dizer que só exista uma tangente à circunferência passando pelo ponto dado, mas sim que uma das tangentes é vertical, correspondendo portanto ao valor ∞ de m.* (Silva, 1960, p. 106)

Para esclarecer o procedimento a adotar neste caso, Sebastião e Silva apresenta um exemplo:

> *Seja por exemplo, o problema: « Conduzir pelo ponto $(-1, 3)$ tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$».* (Silva, 1970, p. 111)
>
> Procedendo como anteriormente tem-se o sistema
>
> $$\begin{cases} y - 3 = m(x + 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
>
> do qual se deduz a equação em x
>
> $$\left(1 + m^2\right) x^2 + 2\left(m^2 + 3m\right) x + m^2 + 6m + 8 = 0.$$

Ora o discriminante simplificado desta equação é: $-6m - 8$. Obtém-se então a equação do 1.º grau

$$6m + 8 = 0$$

que tem a raiz $m = -\frac{4}{3}$. Uma das tangentes pedidas será a reta

$y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1)$. *A outra é vertical, e como passa pelo ponto* $(-1, 3)$*, será a reta* $x = -1$.■

Embora analise os casos em que, ao exigir que a interseção entre a reta e a circunferência se reduza a um ponto (situação de tangência), a equação resultante em m é de 2.º ou 1.º grau, Sebastião e Silva nada refere sobre o caso em que esta mesma equação, depois de simplificada, não depende de m, situação que acontece no caso particular de se tratar de um ponto sobre a circunferência em que a reta tangente é vertical. Conjeturamos que tal exclusão se possa dever ao facto de uma reta vertical ter como equação $x = k$, onde k é a abcissa de um dos seus pontos, pelo que a sua equação não satisfaz a equação geral da reta que é considerada no sistema de duas equações inicial.

Estudados os problemas de 1.ª espécie, Sebastião e Silva apresenta dois exemplos de problemas de 2.ª espécie, sendo o primeiro deles o seguinte:

Exemplo I. *Determinar analiticamente a circunferência que passa pelo ponto* $(-3, 7)$ *e é tangente à reta* $3x + 2y - 18 = 0$ *no ponto* $(2, 6)$*.* (Silva, 1970, pp. 111-112)

O centro da circunferência deve estar sobre a *perpendicular à reta dada no ponto* $(2, 6)$ e sobre a *mediatriz do segmento de extremos*$(2, 6)$ *e* $(-3, 7)$, visto ser equidistante destes dois pontos: estará pois na interseção das referidas retas. A primeira tem por equação (ver n.º 38)[189]

$$2(x - 2) - 3(y - 6) = 0.$$

A segunda tem por equação

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-7)^2}$$

equivalente a

$$5x - y + 9 = 0.$$

[189]No ponto 38 Sebatião e Silva (1970, p. 82) mostra que a equação da reta que passa pelo ponto de coordenadas (x_1, y_1) e é perpendicular à reta de equação $y = mx + b$ é dada por $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$, se $m \neq 0$.

O sistema das duas equações admite a solução única $(-1, 4)$. Será pois este o centro da circunferência. O raio será então, por exemplo, a distância de $(-1, 4)$ a $(2, 6)$:

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{13}$$

A circunferência pedida tem pois equação

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 13 \blacksquare$$

Embora sejam concisos em termos dos cálculos apresentados, estes exemplos apresentam todos os resultados teóricos necessários à justificação dos procedimentos a adotar, sendo um exemplo de exposição didática de exercícios resolvidos: dão relevância aos resultados essenciais e, para evitar exemplos muito longos, dispensam os cálculos intermédios.

O último exemplo apresentado por Sebastião e Silva a propósito do nosso conceito é o seguinte:

Exemplo II. *Determinar analiticamente uma circunferência que passe pelos ponto* $(1, 2)$ *e* $(2, 1)$ *e seja tangente ao eixo dos* x*.* (Silva, 1970, pp. 112-113)

A circunferência pedida poderá ser representada por uma equação do tipo

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

Para que passe pelos pontos dados deverá ter-se:

$$(12) \qquad d + 2e + f + 5 = 0, \quad 2d + e + f + 5 = 0.$$

Para que seja tangente à reta $y = 0$, deverá ser nulo o discriminante da equação

$$x^2 + dx + f = 0$$

que se obtém eliminado y entre a equação $y = 0$ e a primeira. Deverá pois

$$(13) \qquad d^2 - 4f = 0$$

Ora, eliminando e entre as equações (12), obtém-se $f = -3d - 5$. Entrando com esta

expressão de f em (13), obtém-se a equação em d

$$d^2 + 12d + 20 = 0,$$

que admite as duas raízes $d_1 = -2$, $d_2 = -10$. A estes valores de d correspondem os valores de f:

$$f_1 = -3d_1 - 5 = 1, \quad f_2 = -3d_2 - 5 = 25$$

e os dois valores de e:

$$e_1 = -5 - 2d_1 - f_1 = -2, \quad e_2 = -5 - 2d_2 - f_2 = -10$$

Existem portanto duas soluções do problema, que são as circunferências

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \ \blacksquare$$

Com este exemplo fica esgotada a apresentação teórica do conceito de reta tangente à circunferência, tema que é retomado nos exercícios. Dos vinte e um exercícios sobre a circunferência, oito referem-se ao conceito de reta tangente: os exercícios 12 a 19, inclusive. Os dois primeiros, 12 e 13, são exercícios de consolidação de conceitos e procedimentos, sendo análogos aos exemplos de 1.ª espécie apresentados no corpo do texto. Já o exercício 14, embora também pretenda a determinação da reta tangente a uma circunferência dada, não fornece pontos da reta mas sim uma reta paralela à reta pretendida.

O exercício 15 parece, à partida, não ter relação com o conceito de reta tangente à circunferência, embora uma análise detalhada mostre que tal não é verdade.

> ***15.*** *Achar equações das retas paralelas à reta* $2x + y = 0$*, situadas à distância* 3 *do ponto* $(-1, 2)$*. (Há pelo menos dois processos de resolução)* (Silva, 1970, p. 139)

Não sabemos a que processos se estaria Sebastião e Silva a referir mas, dado o conjunto de exercícios em que se encontra inserido, somos levados a crer que um desses métodos seria através da determinação de retas tangentes à circunferência. De facto este exercício resume-se a encontrar a reta paralela a uma reta dada e tangente a uma circunferência dada, sendo análogo ao exercício 14. Este exercício é um exemplo da importância do entendimento dos enunciados, uma vez que só depois de se entender completamente o que é pedido num dado problema é possível abordar a sua resolução.

Com o exercício 15 terminam os exercícios dedicados aos problemas da 1.ª espécie, sendo os restantes exercícios relativos aos problemas de 2.ª espécie, dos quais destacamos o seguinte:

> ***18.*** *Achar equações das circunferências que satisfazem as seguintes condições: (...)*
>
> *f) inscrita no triângulo* $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y = 24$. (Silva, 1970, p. 139)

Para a resolução deste exercício é necessário ter em conta que a circunferência inscrita num triângulo é tangente aos lados do triângulo, resultado estudado em anos anteriores na disciplina de matemática, pelo que se procura circunferência tangente a três retas dadas, numa resolução análoga à dos exercícios anteriores. A diferença deste exercício prende-se mais uma vez com o seu enunciado, que não invoca diretamente o problema das tangentes.

Termina assim o estudo efetuado por Sebastião e Silva ao nosso conceito nos manuais elaborados para o ensino liceal; contudo, este estudo é aprofundado no ensino superior no âmbito da geometria descritiva.

7.6 O conceito de reta tangente nas *Transformações Geométricas*

A obra *Transformações Geométricas* é um tratado editado em 1950 pela Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, e é escrita por Sebastião e Silva para os seus alunos da disciplina de Geometria Descritiva.

Este trabalho encontra-se atualmente publicada no primeiro volume dos seus textos didáticos (Silva, 1999, I, p. 187-300) e aborda temas de geometria projetiva e diferencial. O conceito de reta tangente é estudado em três capítulos distintos: no 14.º capítulo, aquando do estudo das secções cónicas; no 26.º capítulo, aquando da introdução da geometria diferencial; e no 27.º capítulo, no estudo da relação entre o conceito de tangente e de assíntota.

No âmbito do estudo das homologias[190], Sebastião e Silva introduz o conceito de reta tangente nos seguintes termos:

> *Uma reta r se diz secante ou tangente a uma circunferência $[C]$, conforme o número de pontos comuns a r e a $[C]$ é 2 ou 1.* (Silva, 1999, p. 241)

Esta definição coincide com a apresentada aos alunos no ensino liceal aquando do estudo da geometria analítica, embora nesse nível de ensino o número de pontos de interseção entre a reta

[190] *Homologia entre dois planos α e β é uma transformação pontual biunívoca que transforma retas em retas, deixa invariante os pontos de uma reta (eixo da homologia) e tal que retas que unem pontos correspondentes passam todas pelo mesmo ponto (centro da homologia).* (Silva, 1990, p. 216)

tangente e a circunferência seja apresentado em termos do número de soluções de uma equação do 2º grau[191].

Esta definição é estendida a todas as cónicas e, utilizando as homologias, é estabelecida a relação entre o conceito de reta tangente e o conceito de assíntota:

> *Se r é tangente a $[C]$, a imagem r^* de r por meio de uma homologia Θ será ainda tangente à imagem de $[C]$ por meio de Θ. Em particular, se j encontra $[C]$ em dois pontos M, N, as tangentes a, b a $[C]$ em M, N serão convertidas por Θ nas tangentes a^*, b^* a $[C]^*$ nos pontos impróprios*[192] *M^*, N^*. (...)*
>
> *Diz-se que uma reta é assíntota de uma cónica quando é tangente à cónica num seu ponto impróprio.* (Silva, 1999, p. 241)

Notemos que esta definição de assíntota estabelece, de modo formal, a relação entre o conceito de tangente e assíntota, relação muitas vezes estabelecida apenas de modo intuitivo.

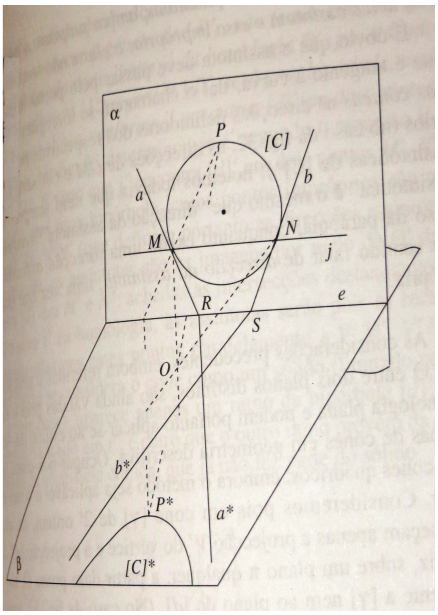


Figura 7.6: Ilustração da relação entre o conceito de reta tangente e o conceito de assíntota.

É em seguida analisado o problema geral da determinação da reta tangente a uma cónica.

> *Definida uma cónica $[c]$ como imagem homológica duma circunferência $[c]^*$, conduzir por um ponto P, qualquer, uma tangente a $[c]$.* (Silva, 1999, p. 245)

Sebastião e Silva começa por salientar a falta de rigor da solução empírica.

[191] Veja-se a este propósito o capítulo 7.5.

[192] *Pontos impróprios ou pontos de infinito são os pontos que se juntam ao espaço euclidiano para obter o espaço projetivo.* (Silva, 1999, p. 192)

> *A primeira ideia seria construir a curva* $[c]$ *ponto por ponto e conduzir depois por* P *as tangentes a* $[c]$ *empiricamente, isto é, levando o bordo da régua a tocar sensivelmente num só ponto; mas este processo, além de moroso, carece de rigor geométrico.* (Silva, 1999, p. 244)

Face a todas as dificuldades inerentes a este método empírico, Sebastião e Silva apresenta um novo método:

> Seja Φ a homologia que transforma $[c]^*$ em $[c]$; determine-se a imagem P^* de P por meio de Φ^{-1}; conduzam-se por P^* as tangentes r^*, s^* à circunferência $[c]^*$, (problema que sabemos resolver de maneira rigorosa): é agora evidente que r, s, imagens de r^*, s^* por meio de Φ, são as tangentes a $[c]$ que passam por P. O número de soluções possíveis é 2, 1 ou 0: no caso da figura [Fig. 7.7] tiveram-se duas soluções.

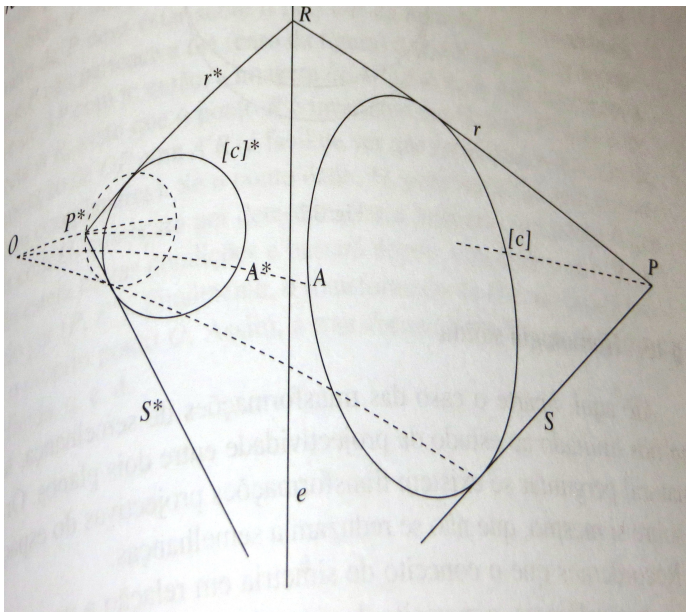


Figura 7.7: Ilustração da determinação das tangentes à elipse.

A construção rigorosa aqui apresentada é importante não só porque permite resolver o problema da determinação das tangentes, mas também porque pode ser efetuado mesmo sem se ter a curva original traçada:

> *(...) o prévio conhecimento de tangentes à curva em vários pontos é mesmo um auxiliar técnico para o traçado perfeito da mesma.* (Silva, 1999, p. 244)

O estudo do conceito de reta tangente é retomado, já no final da obra, no capítulo 24.º onde Sebastião e Silva introduz as "Primeiras noções de geometria diferencial".

Ainda antes de definir formalmente o nosso conceito no âmbito da geometria diferencial, Sebastião e Silva apresenta uma chamada de atenção ao leitor:

> *O conceito de tangente é inicialmente definido, para o caso da circunferência, de maneira elementar. Tal definição pode ainda ser aplicada no caso das cónicas, como se fez no 14º, mas é inaplicável ao caso de uma linha qualquer.* (Silva, 1999, p. 278)

Depois é apresentada uma ideia intuitiva do nosso conceito:

> *(...) a tangente num ponto M é a posição limite para que tende a secante que passa por M, quando o outro ponto da interseção tende para M. É esta ideia intuitiva que vamos tentar definir de maneira rigorosa.* (Silva, 1999, p. 278)

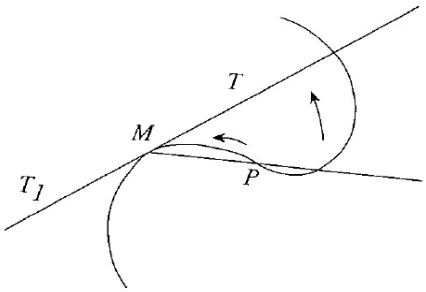


Figura 7.8: Ilustração da ideia intuitiva do conceito de reta tangente a uma curva.

Esta ideia intuitiva é já apresentada por Sebastião e Silva no seu *Compêndio de Álgebra* para os alunos do 6º ano do liceu, sendo aqui formalizada no âmbito da geometria diferencial:

> *Seja C uma linha contínua e M um ponto simples (próprio[193]) de C. É claro que M divide C em duas partes, que podemos chamar anterior e posterior a M (supondo a linha C orientada, isto é, percorrida num determinado sentido). Seja agora P um ponto variável de C posterior a M; diz-se que a semirreta $\hat{M}P$ (de origem $\hat{M}$) tende para a posição limite MT ao tender de P para M, quando, qualquer que seja o número $\epsilon > 0$, se possa sempre associar-lhe $\delta > 0$, de modo que se tenha*
>
> $$P\hat{M}T < \epsilon, \text{ desde que } dis(P, M) < \delta;$$
>
> *nesta hipótese, diz-se ainda que a semirreta $\hat{M}T$ é semitangente a C em M, à direita, e analogamente à esquerda (basta considerar um ponto variável de C anterior a M).*

[193] Ponto próprio é um ponto do espaço euclideano. (Silva, 1999, p. 192)

> *Pode acontecer que a linha C admita em M duas semitangentes $\hat{M}T$, $\hat{M}T_1$ diretamente opostas; então a reta TT_1 formada pelas duas semitangentes é chamada tangente a C no ponto M.* (Silva, 199, pp. 278-279)

Em seguida, e talvez numa tentativa de garantir uma completa interiorização do conceito agora apresentado, Sebastião e Silva chama a atenção dos seus leitores para vários casos particulares do nosso conceito.

A primeira chamada de atenção prende-se com o número de pontos em comum entre a curva e a reta tangente.

> *(...) tratando-se de uma linha qualquer C o facto de uma reta r ser ou não tangente a C nada tem que ver com o número de pontos que r encontra C.* (Silva, 1999, p. 279)

Notemos que muitas vezes o número de pontos em comum entre a tangente e a curva é encarada como a definição ou uma das propriedades deste conceito, sendo rejeitadas como tangentes a curvas retas que de facto o são com base no facto de terem em comum com a curva mais do que um ponto[194] .

A questão seguinte prende-se com o facto de a tangente poder ou não intersetar o gráfico da função no ponto de tangência.

> *Pode também acontecer que a tangente r atravesse a linha C no ponto de tangência M, dizendo-se então que M é um ponto de inflexão de C [Fig. 7.9].* (Silva, 1999, p. 279)

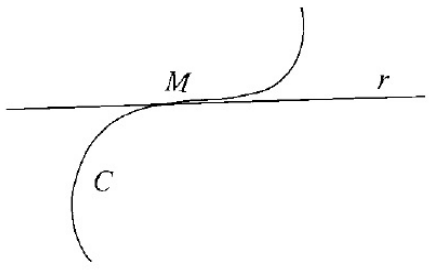


Figura 7.9: Ilustração da reta tangente a uma curva num ponto de inflexão.

Notemos que construção de retas tangentes a uma curva em pontos de inflexão é uma reconhecida dificuldade do nosso conceito[195].

[194] A este propósito veja-se o estudo efetuado por Biza (2008, s.p.).

[195] A título de exemplo, notemos os resultados obtidos por Vinner (2002, p. 77) onde a maioria dos inquiridos

Neste exemplo,vemos o conceito de ponto de inflexão ser definido à custa do conceito de reta tangente e não da mudança do sentido da concavidade da curva.

Em seguida Sebastião e Silva aborda o caso em que a curva considerada é uma reta:

> *(...) toda a reta r admite como tangente, em cada um dos seus pontos, a própria reta r.* (Silva, 1999, p. 279)

Sebastião e Silva utiliza em seguida a existência (ou não) de reta tangente a uma curva num ponto para caracterizar esse ponto.

> *Um ponto M duma linha C diz-se regular ou ordinário, quando C admite tangente em M; diz-se singular no caso oposto.* (Silva, 1999, p. 279)

Dado existirem diversos motivos para a não existência de tangente, Sebastião e Silva separa esses motivos utilizando-os para caracaterizar diversos tipos de pontos singulares (Silva, 1999, p. 280), nomeadamente:

Ponto ânguloso: M é um ponto ânguloso de C quando C admite em M duas semitangentes $\hat{M}T_1$, $\hat{M}T_2$ não colineares (fig. 7.10).

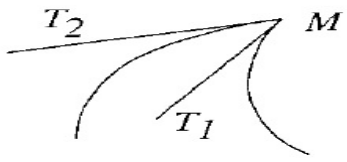


Figura 7.10: Ilustração de um ponto anguloso.

Ponto de reversão: M diz-se um ponto de reversão de C se C admite em M duas semitangentes coincidentes (Fig. 7.11).

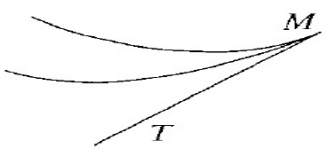


Figura 7.11: Ilustração de um ponto de regressão.

Ponto de suspensão: M é um ponto de suspensão de C sendo M um extremo de C com uma semitangente a C (Fig. 7.12).

responde de forma incorreta a uma questão sobre a determinação da reta tangente a uma curva por um ponto de inflexão.



Figura 7.12: Ilustração de um ponto de suspensão.

O caso em que o ponto não admite semitangente é também referido, embora este ponto não tenha um nome específico (fig. 7.13).

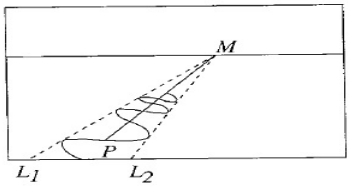


Figura 7.13: Ilustração de um ponto que não admite semitangentes.

De salientar também a referência por Sebastião e Silva a curvas que não admitem reta tangente em qualquer dos seus pontos, como é o caso da curva representativa da função de Weierstrass.

Neste seguimento é também abordado o caso das retas tangentes a curvas por pontos múltiplos:

> *Se o ponto M de C é múltiplo, não faz sentido falar da tangente a C em M, mas pode acontecer que algumas partes da linhas C admitam tangentes em M, as quais serão ainda chamadas, por extensão de linguagem, tangentes a C em M.* (Silva, 1999, p. 281)

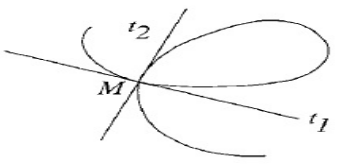


Figura 7.14: Ilustração das retas tangentes num ponto múltiplo.

O estudo do conceito de reta tangente é terminado, no capítulo 25.º, com a análise do carácter projetivo deste conceito.

> *(...) se M é um ponto próprio regular de C, a projeção da tangente a C em M*

> *é ainda tangente a C' em M', desde que M' seja próprio e a tangente t não seja projetante (isto é, não passe por O[196]).* (Silva, 1999, p. 283)

Nste resultado é necessário levar em linha de conta o que acontece quando algum dos pontos, M e/ou M', não é próprio, o que leva a uma generalização do conceito de tangente a pontos não regulares:

> *Consideremos pois uma linha C e designe M um seu ponto impróprio. Seja agora Φ transformação projetiva (de $\overline{R_3}$[197] sobre si mesmo) que converta o ponto impróprio M num ponto próprio M'; e seja C' a imagem de C por meio de Φ. Diremos que o ponto M é regular em C, quando M' for regular em C', e, nesta hipótese, chamaremos tangente a C em M a imagem, por meio de Φ^{-1}, da tangente a C' em M'.* (Silva, 1999, pp. 283-284)

Com esta generalização Sebastião e Silva torna a propriedade da tangência uma propriedade com caráter projetivo:

> *É fácil ver que, com tal definição, se pode levantar a restrição de M e M' serem próprios, na proposição há pouco enunciada: a projeção da tangente será sempre a tangente da projeção, desde que a primeira não seja projetante. Mais ainda: podemos afirmar que a propriedade da tangência tem caráter projetivo, isto é, mantém-se em todas as transformações projetivas.* (Silva, 1999, p. 284)

Com esta generalização do conceito de tangente a todos os pontos regulares do espaço projetivo, Sebastião e Silva termina o estudo que faz do conceito de reta tangente, estudo de onde se destaca o rigor e o formalismo das definições, embora sempre complementado com uma ideia intuitiva que pretende ajudar a entender o conceito. De salientar também é a importância atribuída a uma análise completa de todos os casos, por mais contra-intuitivos que sejam, permitindo que o leitor forme uma imagem mental do conceito completa e desejavelmente próxima da definição do mesmo.

[196] O é o centro da projeção considerada.

[197] *(...) $\overline{R_3}$ [representa] o espaço projetivo ou arguesiano (que se obtém do primeiro [espaço euclideano ou cartesiano] pela adjunção dos pontos impróprios ou pontos do infinito).* (Silva, 1999, p. 192)

Considerações finais

A investigação que realizamos nos últimos anos, e que relatamos nesta tese, pretendia esclarecer de que forma o conceito de reta tangente é estudado em Portugal desde o século XVIII.

Começamos por estudar a reforma pombalina da Universidade de Coimbra, marco do ensino da matemática em Portugal. A análise que efetuamos dos *Estatutos*, então publicados, permitiu-nos perceber que o conceito de reta tangente era abordado em diferentes vertentes: na geometria euclidiana, cujo texto base eram os *Elementos de Euclides*, na tradução de João Ângelo Brunelli; na geometria analítica, com base no tomo I dos *Elementos de Analyse* de Étienne Bezout; e no cálculo diferencial, que se encontra no tomo II da mesma obra de Bezout. Este *Elementos* de "Euclides"e de "Bezout"tornaram-se assim o ponto de partida do nosso estudo.

Depois, no contexto da investigação em torno desta reforma de 1772, surgiu naturalmente a figura de José Anastácio da Cunha, professor de Geometria da Universidade e autor dos *Principios Mathematicos*, onde o nosso conceito é também abordado. A importância desta obra, bem como a recente descoberta de manuscritos inéditos de Anastácio da Cunha, aliados ao ambiente proporcionado pela orientação das Doutoras Elfrida Ralha e Fernanda Estrada – responsáveis por estas descobertas e que nos últimos anos se têm dedicado, de forma quase exclusiva, ao estudo da obra matemática de Anastácio da Cunha – conduziram-nos a uma investigação mais profundo, que terá, porventura, ultrapassado o inicialmente previsto.

O século XVIII, tornava-se por isso o ponto central do nosso estudo. Os *Elementos de Euclides* haveriam de ser comparados com os *Elementos de Geometria* do padre Jesuíta Manuel de Campos, primeira tradução portuguesa da obra de Euclides. Alargamos então a nossa investigação ao ensino do conceito de reta tangente pelos Jesuítas portugueses.

Pesquisamos a existência de outras traduções dos *Elementos* e assim deparamo-nos com um texto manuscrito, da autoria do engenheiro-mor Manuel Azevedo Fortes, que prendeu a nossa atenção, quer no âmbito da história do nosso conceito, quer no do ensino da matemática para os militares.

A dimensão dos achados setecentistas provocou, necessariamente, uma escolha ainda mais

criteriosa de autores e/ou obras nos séculos posteriores. Deste modo, na transição do século XIX para o século XX, Francisco Gomes Teixeira surgiu naturalmente no nosso estudo dada a sua importância enquanto matemático e enquanto professor, para além de estar ligado a outro momento marcante do ensino da matemática em Portugal que é a criação da Universidade do Porto.

Finalmente, já na segunda metade do século XX, selecionamos José Sebastião e Silva porque para além da importância já reconhecida enquanto matemático e pedagogo, é também o rosto mais visível de um novo paradigma do ensino da matemática em Portugal que é o da introdução da, dita, matemática moderna. A reforma da matemática moderna haveria de continuar a realçar o ensino da geometria mas, desta vez, evidenciando as transformações geométricas.

Detalhado o âmbito do nosso estudo, e analisadas profundamente as diferentes vertentes, fomos conduzidos a uma conclusão geral de que independente do impacto, da inovação e/ou da ênfase, todos os autores estudados viriam a contribuir de forma decisiva para o desenvolvimento do ensino do nosso conceito nos últimos três séculos, em Portugal. Fomos também testemunhas da importância dada, por esses autores, à história da matemática no ensino, no nosso país. Em particular:

Manuel de Campos destaca-se pela originalidade no âmbito da querela em torno do ângulo de contingência; assinalamos também que a ele parece dever-se a introdução do termo "tangente"complementada com correspondente explicação. No que à história da matemática diz respeito, o Pe. Manuel de Campos começa os seus *Elementos de Geometria* com uma prolusão histórica da matemática na Grécia e, ao longo da sua tradução, encontramos inúmeras referências a problemas históricos.

Azevedo Fortes rompe com a tradição euclidiana; a sua *Lógica Geométrica* mostra-nos um tratamento original, na sequência da sua tradução de Bernard Lamy. Também ele reflete sobre o conceito de ângulo de contingência, associando-o a Galileu (e a Viviani). Neste autor não encontramos, todavia, referências à história da matemática.

João Ângelo Brunelli é, porventura, o menos inovador dos autores que estudamos. Contudo, não podemos deixar de destacar a interessante interpretação que faz da questão do ângulo de contingência, bem como a ênfase colocada na Proposição III, 17 dos *Elementos de Euclides*. Enquanto livro de texto selecionado para o ensino de uma das cadeiras da recém reformada Universidade de Coimbra, podemos pressupor que o mesmo estaria complementado com referências históricas implementadas pelos respetivos Lentes.

Étienne Bezout, com as suas obras traduzidas para português, surge-nos como o responsável pela introdução no ensino da geometria analítica e do cálculo diferencial em Portugal. Também aqui, e no âmbito da reforma pombalina da Universidade, admitimos que estes conteúdos matemáticos pudessem ser abordados pelos Lentes com referências históricas apropriadas.

Anastácio da Cunha, defensor acérrimo do rigor do método geométrico, está todavia consciente das vantagens do cálculo diferencial e, se por um lado os seus *Principios Mathematicos* relevam uma vertente mais teórica do ensino da matemática, muitas das suas reflexões estão também associadas a uma vertente prática, nomeadamente cariz militar. É, possivelmente, o autor mais sintético de todos os que estudamos e só o estudo complementar de vários dos seus manuscritos nos permitirão decifrar a verdadeira dimensão da sua obra e do seu método de ensino da matemática. Consciente também das vantagens do conhecimento histórico da matemática, de resto estipuladas nos próprios *Estatutos* da reforma pombalina da Universidade de Coimbra, vemos realçada esta dimensão, particularmente nos manuscritos geométricos a que tivemos acesso.

Gomes Teixeira apresenta-nos já uma definição de reta tangente em termos puramente analíticos e assente na noção de limite. A correspondência que estabelece, de forma rigorosa, entre a resolução do problema das tangentes e a determinação da derivada da curva no ponto de tangência, permite-nos realçar novos resultados e definir novos conceitos. A utilização da história da matemática na lecionação do conceito de reta tangente a uma curva surge de forma explícita nas obras que estudamos, onde vimos o nosso autor não só apresentar um resumo histórico do problema das tangentes, contextualizando-o e referindo a sua importância no desenvolvimento do cálculo diferencial, como também utilizar a história do desenvolvimento deste conceito, como inspiração para a abordagem que dele faz, no seu *Curso*. A Gomes Teixeira se deve uma das histórias das matemáticas em Portugal que nós próprios também consultamos em diferentes ocasiões.

Sebastião e Silva, dando ênfase a métodos das geometrias projetiva e diferencial analisa também problemas, muitas vezes contra-intuitivos, das retas tangentes em pontos singulares. Também ele é defensor do uso da história da matemática no ensino. Consciente do papel fundamental da história da matemática, a Sebastião e Silva se deve a criação da primeira disciplina (na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa) de história da matemática nas licenciaturas de formação de futuros professores de matemática.

A ênfase que em Portugal se tem dado à história da matemática fica também patente, já no início do século XIX, com o *Ensaio histórico sobre a origem e progressos das matemáticas em Portugal* de Francisco de Borja Garção Stockler. O ímpeto lançado pela história da matemática aquando da reforma pombalina manteve-se em Portugal com a publicação, nos séculos XIX e XX, de diversas obras sobre esta temática (Mota et al, 2012, pp. 388-400). Outros métodos e/ou outras abordagens poderão, eventualmente, encontrar-se em obras e em autores sobre os quais, pelas razões anteriormente apontadas, não nos debruçamos. De facto, a nossa tese dará passo a outros estudos que, no futuro, nos propomos também realizar.

Um último objetivo, que nos propusemos no início da nossa investigação, prendia-se com a identificação de possíveis utilizações da história do conceito de reta tangente a uma curva, no ensino atual da matemática. Uma vez que, durante os anos em que esta investigação foi sendo realizada, a autora manteve sempre a atividade profissional de professora de matemática, não pudemos naturalmente deixar de permear as nossas aulas com os conhecimentos que íamos adquirindo. Todavia, o desígnio inicial de desenvolvermos módulos históricos para a nossa lecionação (e, possivelmente, de os partilhar com outros) foi gradualmente sendo abandonado à medida que a própria história da matemática se ia tornando, cada vez mais, o foco exclusivo da nossa investigação. Numa fase inicial do nosso estudo ainda desenvolvemos um primeiro módulo histórico, de forma mais empírica do que profunda, e onde não fizemos uso das obras dos matemáticos abordados na nossa tese; por isso, optamos por não apresentar aqui esse estudo, apesar do mesmo se encontrar publicado (Mota et al, 2013, pp. 2048-2057). Não abandonamos todavia, este objetivo; simplesmente o relegamos para um futuro, que esperamos próximo. Por exemplo: assim que possível, pretendemos debruçar-nos sobre a análise que efetuamos das diversas edições dos *Elementos*, o estudo do prólogo e respetivas notas dos *Principios de Geometria* de Anastácio da Cunha, bem como dos prolegómenos de *Monteiro da Rocha*, cientes da potencialidade dos mesmos na lecionação do capítulo relativo à axiomática da geometria, no atual programa do 9.º ano de escolaridade.

No desenvolvimento desta nossa investigação fomos também, naturalmente, lançados em direções que não se encontravam pré-definidas e a relevância da história da matemática obrigou-nos a percorrer caminhos que, em alguns casos, também não incluímos na presente tese. Por exemplo:

- a investigação em torno de uma demonstração paralogistica dos *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha. Exemplo das diversas querelas "literárias"que envolveram Anastácio da Cunha e que os mais recentes estudos já identificaram, apresentamo-la, em outubro de

2017, no Encontro Internacional 3M+1 realizado em Braga.

- Um estudo, já publicado (Mota et al, 2015, pp. 163-170), sobre o problema da triangulação nas obras de dois engenheiros militares setecentistas: Azevedo Fortes e o Brigadeiro Alpoim.

- O estudo do livro V dos *Elementos de Geometria* do Pe. Manuel de Campos, que pretendemos submeter brevemente para publicação numa revista da especialidade.

Estas nossas investigações tornaram-se assim não um destino mas um ponto de partida, abrindo caminhos em diversas direções que ambicionamos percorrer no futuro. De entre elas destacamos um estudo da *Synopse Trigonometrica* de Manuel de Campos, a que apenas recentemente conseguimos ter acesso, bem como, naturalemnte, o estudo de obras matemáticas inéditas de José Anastácio da Cunha.

Em suma, a nossa história dos últimos anos dedicada ao conceito elementar e fundamental de reta tangente a uma curva em Portugal vai ter, é nosso desejo, novos episódios dos quais daremos outras notícias.

Bibliografia

[1] Actas (1982). *Actas das Congregações da Faculdade de Matemática (1772-1829)*, vol. 1. Coimbra: Arquivo da Universidade de Coimbra.

[2] Alves, M. G. (2004). *Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo*. PhD Thesis Universidade do Minho. Retrieved from http://hdl.handle.net/1822/2603

[3] Andersen, K. (2007). *The Geometry of an Art: The history of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York, U.S.A.: Springer.

[4] Annuario da Academia Polytechnica do Porto (1885). *Ano lectivo 1885-1886*. Porto: Typographia Occidental

[5] Anuário da Faculdade de Sciências da Universidade do Porto (1915) *Anos letivos 1911-1912 e 1913-1914*. Coimbra: Imprensa da Universidade

[6] Baldini, U. (2001). GLORIOSI, Giovanni Camillo. In *Dizionario Biografico degli Italiani*, vol. 57. Retrieved from http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-camillo-gloriosi(Dizionario-Biografico)

[7] Baldini, U. (2004). The teaching of mathematics in the Jesuit Colleges of Portugal from 1640 to Pombal. In H. Leitão & L. Saraiva (Eds) *The Practice of Mathematics in Portugal* (pp. 293-465). Coimbra: Acta Universitatis Conimbrigensis.

[8] Basset, A. B. (1901). *An Elementaru Treatise on Cubic and Quartic Curves*. Cambridge: Deighton Bell.

[9] Bezout, E. (1765/1770). *Cours de mathématiques, à l'usage de la marine et de l'artillerie*, Vol. 2, 3 e 4. Paris: J. B. G. Musier fils.

[10] Bezout, E. (1774a). *Elementos de Analisi Mathematica*, 2 Tomos. Coimbra: Real Officina da Universidade.

[11] Bezout, E. (1774b). *Elementos de trigonometria plana*. Coimbra: Real Officina da Universidade.

[12] Bezout, E. (1793). *Elementos de Analyse*, 2 Tomos. Coimbra: Real Imprensa da Universidade.

[13] Bicudo, I. (2009). *Os elementos*. São Paulo: UNESP.

[14] Biza, I., Christou, C. & achariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. In *Research in Mathematics Education*, 10:1, pp. 53-70. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1080/14794800801916457

[15] Borges, J. V. & Canas, A. C. (2005). Uma Cronologia da História do Ensino Superior Militar em Portugal. In *Revista Militar*, N.º 2440, Maio, pp. 445 - 452.

[16] Braga, T. (1984). *Dom Francisco de Lemos e a Reforma da Universidade de Coimbra*. Lisboa. Typographia da Academia Real das Sciencias.

[17] Brasseur, R. (2011) Gaston Gohierre de Longchamps. In *Bulletin de l'UPS*, n.° 235, pp. 15-22. Retrieved from http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Transversale%20reciproque.pdf

[18] Brótons, V. N. (1987). La personalidad científica de Tomás Vicente Tosca (1651-1723). In *Boletín Informativo. Fundación Juan March*, n.º167, pp. 3-14.

[19] Brunelli, J. A. (1768). *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros do undecimo e duodecimo da versão de Frederico Commandino/addicionados e illustrados por Roberto Simson*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

[20] Camenietzki, C. Z. (1999). Esboço biográfico de Valentin Stansel (1621-1705), matemático, jesuíta e missionário na Bahia. In *Ideação, Feira de Santana*, vol.3, pp. 159-182. Retrieved from https://bibliotecaquimicaufmg2010.files.wordpress.com/2012/02/ziller-sobre-estancel.pdf

[21] Campos, M. (1735). *Elementos de geometria plana, e solida, segundo a ordem de Euclides princepe dos geometras*. Lisboa Occidental: Officina Rita Cassiana.

[22] Carvalho, A. S. (1919). *A teoria das tangentes antes da invenção do cálculo diferencial*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

[23] Carvalho, R. (1986). *História do Ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

[24] Coolidge, J. L. (1951). The Story of Tangents. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 58, N. 7., pp. 449-462.

[25] Costa, M. J., Estrada, M. F., Queiró, J. F., Sá, C. C. & Silva, M. C. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

[26] Costa, C. J. & Rosolen, S. M. (2012). Dom Francisco de Lemos e a reforma pombalina na Universidade de Coimbra. In *Anais da Semana de Pedagogia da UEM*, vol. 1. n.º 1, pp. 1-11. Retrieved from http://www.ppe.uem.br/semanadepedagogia/2012/pdf/T4/T4-012.pdf

[27] Coxito, A. A. (1981). *O compêndio de lógica de M. de Azevedo Fortes e as suas fontes doutrinais*. Coimbra : Centro de História da Sociedade e da Cultura da Universidade de Coimbra.

[28] Cruz, J. G. da (1754). *Elogio Fúnebre de Manuel de Azevedo Fortes*. Lisboa: Oficina Jozé da Silva da Natividade.

[29] Cunha, J. A. da (s.d.). *Princípios de Geometria tirados dos de Euclides*. PT/SICM/07.02/SUBSI JAC/ 2,27/1126.04_PRINCIPIOS DE GEOMETRIA Ms.

[30] Cunha, J. A. da (1780?). *Princípios de Cálculo Fluxionário*. PT-ADB/UM-SIFAA/SS 08.01/SR/LIVRARIA/Ms. 885.2

[31] Cunha, J. A. da (1790). *Principios Mathematicos para instrucção dos alumnos do Collegio de São Lucas da Real Casa pia do Castello de São Jorge*. Lisboa: Oficina de Antonio Rodrigues Galhardo.

[32] Cunha, J. A. da (1811). *Principes Mathématiques*. Bordeus: L'Imprimerie D'André Racle.

[33] Decreto de 19 de abril. (1911) *Diário do Govêrno n.º 93/1911, Série I*. Lisboa: Ministerio do Interior - Direcção Geral da Instrucção Secundaria, Superior e Especial

[34] Decreto de 22 de agosto. (1911) *Diário do Govêrno n.º 197/1911, Série I*. Lisboa: Lisboa: Ministerio do Interior - Direcção Geral da Instrucção Secundaria, Superior e Especial

[35] Decreto 39807, de 7 de Setembro. (1954) *Diário do Governo n.º 198/1954, Série I*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional - Direcção-Geral do Ensino Liceal

[36] DGFV (2005). *Programa de Matemática Aplicada*. Lisboa: Direcção-Geral de Formação Vocacional

[37] Domingues, J. C., Ralha, M. E., Rodrigues, J. F., Silva, J. C. (2006). Notas ao manuscrito 'Principios do Calculo Fluxionario'. Março de 1780 de José Anastácio da Cunha. In Ralha, M. E., Estrada, M. F., Silva, M. C. & Rodrigues, A. (org.) *José Anastácio da Cunha O Tempo, as Ideias, a Obra e... Os Inéditos*, pp. 265-275

[38] Domingues, J. C. (2010). Uma recensão italiana dos PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS de José Anastácio da Cunha. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º65, pp. 89-98.

[39] Domingues, J. C. (2012). Os Elementos de Análise de Bézout: recriações portuguesas. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º 67, pp. 25-26.

[40] Domingues, J. C.(2014). TRACTADO DA GRANDEZA EM GERAL de B. Lamy: uma introdução cartesiana à matemática no ensino militar português. In *Suplemento do Boletim da SPM*, n.º 71, pp. 37-39.

[41] Duarte, A. L., Estrada, M. F., Ralha, M. E., Silva, M. C. (2006). Um estudo sobre o manuscrito "Principios de Geometria tirados dos de Euclides Prologo"de José Anastácio da Cunha. In Ralha, M. E., Estrada, M. F., Silva, M. C. & Rodrigues, A. (org.) *José Anastácio da Cunha O Tempo, as Ideias, a Obra e... Os Inéditos*, pp. 265-275

[42] Duarte, A. L. (2007). Azulejos que ensinam. In C. Simões (Comissária) *Azulejos que Ensinam*, pp. 10-15. Retrieved from http://www.museumachadocastro.gov.pt

[43] Eecke, P. V. (1948). *Proclus de Lyceie. Les commentaires sur le premier livre des Eléments D'Euclide*. Bruges: Dexclée De Brower et Cie.

[44] *Estatutos Da Universidade De Coimbra: Compilados Debaixo Da Immediata E Suprema Inspecção De El Rei D. José I. Nosso Senhor Pela Junta De Providencia Literaria*(1772), Vol. 3. Coimbra: UC.

[45] Estrada, M. F. (2006). José Anastácio da Cunha: Vida e Obra. In Maria Eldrida Ralha, Maria Fernanda Estrada, Maria do Céu Silva e Abel Rodrigues (organização) *José Anastácio da Cunha. O Tempo, as Ideias, a Obra e... os Inéditos*, pp. 99-130.

[46] Eves, H. (1966). The Brenoulli family. In *The Mathematics Teacher*, Vol. 59, n.º 3, pp. 276-278.

[47] Ferreto, D. (2003). *Curvas: Estudo e visualizaçao com o software Cabri-Geométre II.* Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Retrieved from https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96807/Daniel_Ferreto.PDF?sequence=1

[48] Ferro, J. P. (1987). *O processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778).* Lisboa: Palas Editores.

[49] Figueiredo, F. (2011). *José Monteiro da Rocha e a atividade científica da Faculdade de Matemática e do Real Observatório da Universidade de Coimbra: 1772 - 1820* PhD's thesis, Universidade de Coimbra, Coimbra. Retrieved from http://hdl.handle.net/10316/17927

[50] Fortes, M. A. (1720). *Elementos de Euclides ou Tractado de Geometria Elementar* . Biblioteca Nacional, Cód. 5194//2. Ms

[51] Fortes, M. A. (1724). *Geometria Especulativa. Trigonometria Espherica, modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares.* Biblioteca Pública de Évora, Cód. Manizola 258. Ms

[52] Fortes, M. A. (1728-1729). *O Engenheiro Português.* Lisboa, Portugal: Oficina de Manuel Fernandes da Costa.

[53] Fortes, M. A. (1739). *Oração Acadêmica pronunciada na presença de sua magestade, indo a Academia ao Paço em 22 de outubro de 1739.* Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra. Misc. 468, N.º 8000

[54] Fortes, M. A. (1744). *Lógica Racional, Geométrica e Analítica.* Lisboa, Portugal: Oficina de José António Plates.

[55] Frazier (1772). An extraordinary Genius in Portugal. In *The Gentleman's Magazine*, Vol. 42, pp. 419-420,

[56] Freire, F. C. (1872). *Memoria historica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos desde a reforma da Universidade em 1772 até o presente.* Coimbra: Imprensa da Universidade.

[57] Giusti, E. (1990). Quelques réflexions sur les "Principios" de Da Cunha. In M. L. Ferraz, J. F. Rodrigues e L. Saraiva (eds.) *Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta*, pp. 33-52.

[58] Gonçalves, F. M. B. (2007). *O Movimento da Matemática Moderna. Concepções, Dinâmicas e Repercussões*. Master Thesis. Universidade do Porto. Retrieved from https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/4/94003_TESE-238_TM_01_C.pdf

[59] Gregoire, M. (1992). La Querelle entre Descartes et Fermat a propos des tangentes. In *Mnemosyne*, n.º 2 (Dezembro), pp. 29-57.

[60] Guimarães, A. A. (1972). *Vida e Obra do Professor José Sebastião e Silva*. Porto: não publicado. Retrieved from http://www.esec-sebastiaosilva.rcts.pt/JSS/biograf/entrada.htm

[61] Guimarães, L. C., Pitombeira, J. B., Schubring, G. (2011). Manoel de Campos, um percursor. In *Llull*, Vol. 34, n.º 74, pp. 315-340.

[62] Heath, T. L. (1956). *Euclid. The thirteen books of the Elements*. Vol 1, 2 e 3. New York: Dover Publications, Inc.

[63] Heath, T. L. (1970). *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Oxford University Press.

[64] Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys"and "hows"of using history in mathematics education. In *Educ Stud Math*, 71, pp. 235 - 261. DOI 10.1007/s10649-008-9174-9

[65] Lamy, B. (1710) *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps*. Paris; Florentin De Laulne.

[66] Leibniz, W. (1684). Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, qua nex fractas, nec irrationales quantitates moratur & singulare pro illis calculi genus. In *Acta Eruditorum*, vol. 3, pp. 467-473.

[67] Leitão, H. (2005). Pedro Nunes (1502-1578). Sa vie, son oeuvre. In Raymond d'Hollander *Loxodromie et Preojection de Mercator*, p. 19-22. Paris, Mónaco: Institut Océanographique.

[68] Leitão, H. (2008). Sphæra Mundi. In H. Leitão (comissário científico), L. Martins (coordenação técnica e catalográfica), *Sphæra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos científicos do Colégio de Santo Antão nas coleções da BNP*, pp. 19-23.

[69] Lévy, T. (1989). L'étude des sections coniques dans la tradition médiévale hébraïque. Ses relations avec les traditions arabe et latine. *Revue d'histoire des sciences*, 42(3), pp. 193-239.

[70] Lima, Y. (1997). Modernização da Matemática no Liceu: um programa inédito de Sebastião e Silva. In *Actas do Colóquio de Homenagem realizado em 12 de Dezembro de 1997 na Torre do Tombo*, pp. 99-114

[71] Loget, F. (2010). La digression sur l'angle de contact dans le Libro de Algebra de Pedro Nuñez. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, vol. 11, pp. 79-100.

[72] Longchamps, M. G. (1886). Construction par points et tangentes des cubiques circulaires unicursales. In *Association française pour l'avancement des sciences. Comptes-rendus de la 14e session Grenoble 1885.*, pp. 131-135

[73] Machado, D. B. (1747). *Bibliotheca Lusitana Historica, Critica, e Cronologica.* Tomo II. Lisboa Ocidental: Officina de António Isidoro da Fonseca.

[74] Machado, J. P. (2003). *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa*, 5ª Edição, 5 Vol. Lisboa: Livros Horizonte.

[75] Maierù, L. (1990). "... in Christophorum Clavium de Contactu Linearum Apologia"Considerazioni attorno alla polemica fra Peletier e Clavio circa l'angolo di contatto (1579-1589). *Archive for History of exact Sciences*, vol. 41(2), pp.115-137.

[76] Martins, R. A. (2001). História e história da ciência: encontros e desencontros. *Actas do 1º. Congresso Luso-Brasileiro de História da Ciência e da Técnica*, pp. 11-46. Retrieved from http://ghtc.ifi.unicamp.br/pdf/ram-86.pdf

[77] Matos, J. M. (2009). Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. In Bjarnadóttir, K. Furinghetti, F., & Schubring, G. (Eds.). *"Dig where you stand". Proceedings of the conference "On-going research in the History of Mathematics Education"*. Reykjavik: University of Iceland - School of Education.

[78] Melo, H. F. S. (2010). *Isometrias no plano uma abordagem segundo a geometria analítica.* Açores: Influir

[79] Mendes, I. A., Nobre, S. (2009). João ângelo Brunelli: um padre matemático e astrônomo italiano participante da comissão demarcadora de limites da Amazônia na Era Pombalina. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol. 9, n.º 18, pp. 133-152.

[80] Miller, J. (2017). *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics.* Retrieved from http://jeff560.tripod.com/mathword.html

[81] Miranda, M. (Ed.) (2009). *Código Pedagógico dos Jesuítas. Ratio Studiorum da Companhia de Jesus. Regime escolar e curriculum de estudos. Edição bilingue latim-português* (pp. 17-36). Lisboa: Esfera do Caos Editores Lda.

[82] Morujão, C. (2006). A Logica Modernorum: Lógica e Filosofia da Linguagem na Escolástica dos séculos XIII e XIV. *Revista Portuguesa de Filosofia*, vol. 28, pp. 301-322.

[83] Mota, B. (2008). *O estatuto da matemática em Portugal nos séculos XVI e XVIII*. PhD's thesis. Universidade de Lisboa, Lisboa. Retrieved from http://hdl.handle.net/10451/530

[84] Mota, C. (2008). *O conceito geométrico de reta tangente: um percurso milenar* (Unpublished master's thesis). Universidade do Minho.

[85] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2011a). "The teaching of Mathematics in Portugal in the 18th century - The creation of the 1st Faculty of Mathematics in the World", In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 1750-1759.

[86] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2011b). "The concept of tangent line: historical and didactical aspects in Portugal (18th century)". In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds.) *Proceedings of the Sixth European Summer University in History and Epistemology in Mathematics Education*, pp. 687-695.

[87] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E. (2012a). "Francisco Gomes Teixeira: O conceito de reta tangente no Curso de Analyse Infinitesimal". In Associação de Professores de Matemática (Ed.) *Proceedings of XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 153-165.

[88] Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2012b). "Matemática em Portugal: marcos da história do ensino e do ensino da história". In J. M. Matos & M. Saraiva (Eds.): *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*, pp. 388-400.

[89] Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2013). "The teaching of the concept of tangent line using original sources". In B. Ubuz, C. Haser and M. A. Mariotti (Eds.): *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2048-2057.

[90] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2014a). *Teoria e prática do conceito geométrico de reta Tangente no início do século XVIII Português*. Artigo apresentado no 4.º Encontro Nacional de História das Ciências e da Tecnologia. Aveiro, Portugal.

[91] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2014b). *O conceito de reta tangente na obra pedagógica de Sebastião e Silva*. Artigo apresentado no 7.º Encontro Lusobrasileiro de História da Matemática. Óbidos, Portugal.

[92] Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2015). "Engenheiros portugueses do século XVIII: as suas geometrias especulativas"in Francisco A. González Redondo (coord.) *Ciencia y Técnica entre la Paz y la Guerra*. 1714, 1814, 1914, Vol. 1. pp. 163-170.

[93] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E (2016). *José Anastácio da Cunha e o "desaventurado cornicular"*. Artigo apresentado no 2.º Encontro Ibérico de História da Matemática. Coimbra, Portugal.

[94] Mota, C. , Estrada, M. F. & Ralha, M. E. (2017a). *História da Matemática na sala de aula: Anastácio da Cunha e os conceitos de ângulo e reta tangente*. Comunicação apresentada no Profmat. Viseu, Portugal.

[95] Mota, C., Ralha, M. E. & Estrada, M. F. (2017b). *José Anastácio da Cunha e a demonstração paralogistica da Proposição III, 7 dos "Principios Mathematicos"*. Artigo apresentado no Encontro Internacional 3M+1: História da Matemática, da Música e Militar. Braga, Portugal.

[96] Nicodemi, O. (2014). Galileo and Aristotle's Wheel. IN *Journal of Humanistic Mathematics*, 4(1), pp. 2-15.

[97] O'Conner, J. J. & Robertson, E. F. (2017). *MacTutor History of Mathematics archive*. Retrieved from http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

[98] Obituary Notices (1931). In *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, n.º 131 (818), pp. i-xxv.

[99] *Ordenatio ad suscitandum fovendumque in Provincia Lusitaniæ Studium Mathematicæ* (1692/2004). In H. Leitão & L. Saraiva (Eds) *The Practice of Mathematics in Portugal* (pp. 704-723). Coimbra: Acta Universitatis Conimbrigensis.

[100] Ortiz, J. V. P. (2006). *La medición del tiempo y los relojes de sol*. Discursos Académicos 20. Academia de Ciencias e Ingenierias de Lanzarote.

[101] Ozanam, J. (1693). *Cours de Mathématique*. vol. 1. Paris, França: Jean Jombert.

[102] Ozanam, J. (1720). *La trigonometrie rectiligne et spherique*. Paris, França: Claude Jombert.

[103] Paulo, S. & Silva, J. S. (1963). *Compêndio de Álgebra*. 1º Tomo. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

[104] Pinto, H. B. M. (2013). *A matemática na Academia Politécnica do Porto.* PhD Thesis. Universidade de Lisboa. Retrieved from http://hdl.handle.net/10451/8653

[105] Piva, T. C. C. (2007). *O Brigadeiro Alpoim: Um Politécnico no Cenário lusobrasileiro do século XVIII.* (PhD Thesis) UFRJ. Rio de Janeiro.

[106] Queiró, J. F. (1993). A MATEMÁTICA (1537-1771). In *História da Universidade em Portugal* - Sec. 5, Cap. V, A. Ferrer Correia, L. A. Oliveira Ramos, Joel Serrão, A. Oliveira (eds), pp. 1537 - 1571.

[107] Queiró, J. F. (1994). José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º29, pp. 1-18. Retrieved from http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/cunha.pdf

[108] Ralha, M. E., Estrada, M. F., Silva, M. C. & Rodrigues, A. (2006). *José Anastácio da Cunha O Tempo, as Ideias, a Obra e... Os Inéditos*. Braga: Barbosa& Xavier.

[109] Ribeiro, D. M. (2009). A formação dos engenheiros militares: Azevedo Fortes, matemática e ensino da engenharia militar no século XVIII em Portugal e no Brasil. PhD Thesis, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. Retrieved from http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-08122009-151638/

[110] Rocha, J. M. da (s.d.). *Elementos de Mathematica*. ACL Ms. Azul 371

[111] Rodrigues, A., Duarte, A. L., Ralha, M. E. & Malato, M. L. (Org.) (2013). *ANEDOCTAS DE J. a. d. C. Reminiscências de D. José Maria de Sousa Morgado de Mateus sobre o Mestre e Amigo José Anastácio da Cunha*. V. N. Famalicão: Edições Húmus.

[112] Salmon, G. (1884). *Traité de Géométrie Analytique (Courbes Planes)*. Paris: Gauthier-Villars

[113] Sampaio, P. A. (2008). Infinito, uma história a contar. in *Millenium*, vol. 34, pp. 205-222.

[114] Santos, C. (2011). *História da Universidade do Porto*. Porto: Universidade do Porto.

[115] Sarton, G. (1957). *The study of the history of mathematics and The study of the history of science*. Nova iorque: Dover Publications.

[116] Sierra Vázquez, M.; González Astudillo, M. T.; López Esteban, C. (2003) El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. In *Educación Matemática*, vol. 15, n. 1, pp. 21-49. Retrieved from http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515102

[117] Silva, J. C. (s.d). *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva - uma primeira abordagem*. Coimbra: não publicado. Retrieved from https://www.mat.uc.pt/ jaimecs/pessoal/sebsilva.html

[118] Silva, J. S. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literári Fluminense, L.DA.

[119] Silva, J. S. (1975). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática*. Vol. 1. Lisboa: Edição G.E.P.

[120] Silva, J. S. (1950/1999). Transformações Geométricas. In: *Textos Didácticos*. Vol. I. Lisboa. Fundação Calouste de Gulbenkian.

[121] Simson, R. (1756). *The Elements of Euclid, Viz. the first six books together with the eleventh and twelfth.* Glasgow: Robert and Andrew Foulis.

[122] Siu, M. K. (1997). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. In *Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society*, n.º 1, pp. 143 - 154. Retrieved from http://hkumath.hku.hk/ mks/ABCD.pdf

[123] Soromenho, M. (2002). Manuel Pinto Vilalobos, da engenheria militar à arquitectura. In *Pedra & Cal*, n.º 15, pp. 16-17. Retrieved from http://www.gecorpa.pt/Upload/Revistas/Rev15Art05.pdf

[124] *Sphæra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos científicos do Colégio de Santo Antão nas coleções da BNP.* (2008). Henrique Leitão (comissário científico), Lígia Martins (coordenação técnica e catalográfica). Lisboa: Biblioteca Nacional de Portugal.

[125] Tacquet, A. (1665). *Elementa Geometriæ planæ ac solidæ: quibus accedunt selecta ex Archimed theoremata*. Antuérpia: Iacobum Meursium.

[126] Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. *Proceedings of the* 11th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 69-75.

[127] Teixeira, A. J. (1890 - 1892). Questão entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha in *O Instituto: jornal scientifico e litterario*, vol. 38 (1890-1891) pp. 20-27, pp. 119-131, pp. 187-202, pp. 268-279, pp. 350-357, pp. 431-442, pp. 512-521, pp. 573-576, pp. 653-662, pp. 739-746, pp. 816-820; vol. 39 (1891-1892) pp. 490-497.

[128] Teixeira, F. G. (1887). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial*. Porto: Typographia Occidental.

[129] Teixeira, F. G. (1890). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial*, 2.ª ed.. Porto: Typographia Occidental.

[130] Teixeira, F. G. (1896). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial*, 3.ª ed.. Porto: Typographia Occidental.

[131] Teixeira, F. G. (1905). Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe par un point situé sur la courbe. In *L'Enseignement Mathématique*, vol. VII, pp. 138-141.

[132] Teixeira, F. G. (1906). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial*, 4.ª ed.. Coimbra: Imprensa da Universidade.

[133] Teixeira, F. G. (1908). Traité des Courbes Spéciales Remarquables planes et gauches, Tome I, in *Obras sobre Mathematica*, vol. 4. Coimbra: Imprensa da Universidade.

[134] Teixeira, F. G. (1913). Sobre as tangentes à astroide, In *Annaes Scientificos da Academia Polytecnica do Porto*, vol. VIII, pp. 220-225.

[135] Teixeira, F. G. (1917). Sobre a construção das tangentes à cissoide obliqua que passa por um ponto exterior à curva. In *Annaes Scientificos da Academia Polytecnica do Porto*, vol. XII, pp. 14- 17.

[136] Teixeira, F. G. (1926). *Manual de Cálculo Diferencial, Extrato do Curso de Análise Infinitesimal*. Porto: Tip. da Enciclopédia Portuguesa, Lda.

[137] Teixeira, F. G. (1934). *História das Matemáticas em Portugal*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

[138] Thuillier, G. & Tulard, J. (1991). *La méthode en histoire*. Paris: Presses universitaires de France.

[139] U.C. (2017). *FARIA, José Joaquim de (1759-1828)*. Retrieved from: https://www.uc.pt/org/historia_ciencia_na_uc/autores/FARIA_josejoaquimde

[140] Universidade Digital (2017). *Antigos Estudantes Ilustres da Universidade do Porto*. Retrieved from https://sigarra.up.pt/up/pt/web_base.gera_pagina?p_pagina=122497

[141] Vieira, R. S. A. (2006). *As secções cónicas na obra de José Anastácio da Cunha: um estudo comparativo*. (Master's thesis) Universidade de Aveiro. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/2894

[142] Vilhena, H. D. (1935). *O professor doutor Francisco Gomes Teixeira: elogio, notas, notas de biografia, bibliografia, documentos.* Libsoa: Oficinas Fernandes.

[143] Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking*, pp. 65-81.

[144] Viviani, V. (1674). *Quinto libro degli Elementi d'Euclide: ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov'ordine distesa*. Florença: Alla Condotta.

[145] Walker, J. J. (1869). Tangents to the Cissoid. In *Roceedings of the London Mathematical Society*, vol. II, pp. 161-165.

[146] Youschkevitch, A. P. (1973). J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale. In *Revue d'histoire des sciences*, tomo 26, n°1, pp. 3-22.

[147] Youschkevitch, A. P. (1978). C. F. Gauss et J. A. da Cunha. In *Revue d'histoire des sciences*, tomo 31, n°4,pp. 327-332.

Apêndice A

Biografias

Abreu, João Manuel de (1757 - 1815): Professor de Matemática no Colégio de S. Lucas da Casa Pia, no Colégio dos Nobres e na Academia Real de Marinha, foi um dos discípulos de José Anastácio da Cunha sendo o responsável pela edição em francês dos *Principes Mathématiques de Feu Joseph-Anastase da Cunha.* (Ferro, 1987, p. 22)

d'Alembert, Jean Le Rond (1717 - 1783.): Matemático francês, destacou-se enquanto investigador na área da física-matemática. Com Diderot leva a cabo a publicação da *Encyclopédie*, a primeira enciclopédia como hoje as conhecemos. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Alpoim, Brigadeiro José (1700 - 1765): Militar e engenheiro de fortificação, natural de Viana do Castelo, viveu parte da sua vida no Brasil onde foi professor na Academia Militar do Rio de Janeiro. Publicou duas obras para o ensino nesta academia *Exame de Artilheiros*, em 1744, e *Exame de Bombeiros*, em 1748. (Piva, 2007, pp. 85-104)

Apolónio de Perga (262a.C. - 190a.C.): Conhecido como "O grande geómetra", adquiriu notoriedade principalmente graças à publicação das suas *Cónicas*, obra em 8 livros/capítulos onde estuda de forma profunda as secções cónicas. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Aristóteles (384a.C. - 322a.C.): Filósofo grego, contribuiu largamente para a sistematização da lógica dedutiva. Frequentou a Academia de Platão e fundou a sua própria escola em Atenas, o Liceu, onde difundiu as suas ideias, nomeadamente a aplicação da lógica à ciência. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Arquimedes (287 a.C. - 212 a. C.): Viveu quase toda a sua vida em Siracusa, tendo na sua juventude estudado com os discípulos de Euclides no Egipto. Considerado como um dos maiores matemáticos do mundo, utilizou o método de exaustão para obter resultados importantes de cálculo integral. A sua aproximação do valor de π obtida na *Da Medida do círculo*, a *Quadratura da Parábola* ou o *O método*, onde descreve como chegou a muitos dos seus resultados geométricos, são alguns dos seus resultados mais conhecidos. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Basset, Alfred Barnard Basset (1854 - 1930): Matemático inglês, iniciou a sua carreira no mundo das leis dedicou a sua vida ao estudo da matemática. Dedicou-se essencialmente ao estudo da hidrodinâmica, embora também tenha publicado uma obra sobre o estudo das curvas, intitulada *An elementary treatise on cubic and quartic curves* (Obituary Notices, 1931, pp. i-ii)

Barocius, Franciscus (1537 - 1604): Matemático italiano também conhecido por Francesco Barozzi, é essencialmente reconhecido pelas suas traduções de obras de matemáticos gregos como Héron, Papo e Arquimedes. O seu último tratado, publicado em Veneza em 1586, é um trabalho sobre assíntotas *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum quod docet duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur: et quanto longius producuntur, tanto sibiinuicem propiores euadant.* (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Barrow, Isaac (1630 - 1677): Matemático inglês, professor em Cambridge, ganha notoriedade matemática pelas as lições que profere na universidade e que são publicadas já no final da sua vida, em três volumes intitulados *Lectiones Opticae*, *Lectiones Geometricæ* e *Lectiones Mathematica*. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Bernoulli (sec. XVII - XVIII): Família suíça que, em três gerações, viu 8 dos seus membros apresentarem contribuições relevantes para o desenvolvimento da matemática. Dos trabalhos realizados pelos diversos elementos da família destacam-se as contribuições para a teoria das probabilidades, cálculo infinitesimal e hidrodinamica. (Eves, 1966, pp. 276-278).

Bettinus, Marius (1582 - 1657): Conhecido por Mario Bettini, era um jesuíta italiano que se dedicou à filosofia, matemática e astronomia. Ficou conhecido principalmente pela sua obra *Apiaria Universae Philosophiae Mathematicae*, publicada em dois volumes em 1642 e 1648, onde aborda diversos temas e curiosidades matemáticas (Andersen, 2007, p. 374).

Bezout, Étienne: Veja-se página 122.

Bossut, Charles (1730 - 1814): Matemático francês, foi aluno de d'Alembert. Escreveu obras sobre mecânica e dinâmica, adotadas para a disciplina de foronomia da Universidade de Coimbra, tendo também publicado uma obra em história da matemática. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Brunelli, João Ângelo: Veja-se página 114.

Campos, Manuel de: Veja-se página 29.

Caille, Nicholas Louis de la (1713 - 1762): Reconhecido como um dos principais astrónomos franceses do século XVIII, a par da sua obra científica destacam-se os compêndios

intitulados *Leçons Élémentaires* que escreve para as suas aulas no colégio de Mazarin. (Figueiredo, 2011, p. 84)

Cardanus, Girolamo (1501 - 1576): Matemático e médico italiano, ficou conhecido pelos seus trabalhos em álgebra e pela publicação da sua *Ars Magna* em 1545. Publicou também duas enciclopédias de ciências naturais, sendo a mais conhecida o *De Subtilitate Libri XXI*, uma obra dividida em 21 livros sobre os diferentes temas das ciências naturais e no qual, no livro 16, se debruça sobre as cónicas. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Carvalho, Aníbal Scipião de (1897 - 1981): Matemático português, foi discípulo de Gomes Teixeira, tendo exercido o cargo de professor na Universidade do Porto onde foi também bibliotecário. Dos seus trabalhos destacamos a sua tese de doutoramento sobre a história do problema das tangentes antes da invenção do cálculo diferencial. (Universidade Digital, 2017, s.p.)

Clairaut, Alexis Claude (1713 - 1765): Matemático francês, fez a sua primeira apresentação na Academia de Paris com 13 anos. Da sua obra destacam-se os trabalhos sobre cálculo de variações, sobre a forma da Terra, bem como os *Elements de géometrie* e *Elements d'algèbre* utilizados no ensino da matemática em França durante largos anos. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Clara, Frei Joaquim de Santa (1740 - 1818):Doutor pela Faculdade de Teologia da Universidade de Coimbra, lente da cadeira de hebraico, assume em 1814 o bispado de Évora. Vê o seu nome associado a uma das traduções das obras de Bezout para a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra.(Figueiredo, 2011, pp. 137-138)

Clavius, Christopher (1538 - 1612): Matemático Jesuíta, recebeu educação no colégio Jesuíta de Roma, tendo sido enviado para Coimbra, em 1556, para continuar a sua educação no colégio Jesuíta aí existente. Dedicou-se ao estudo da astronomia, da geometria e da álgebra e foi um dos intervenientes na reformulação do calendário. Foi autor de uma das mais conhecidas edições dos *Elementos* onde acrescenta ideias próprias. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Commandino, Frederico (1506 - 1575): Matemático italiano, é autor de traduções para latim de diversas obras de matemáticos gregos, das quais se destacam os *Elementos* de Euclides que comenta de forma detalhada. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Cunha,José Anastácio da: Veja-se página 143.

Dechales, Claude François Millet (1621 - 1678): Padre Jesuíta francês reconhecido pelos seus talentos matemáticos. Passou pelos colégios Jesuítas em Marselha, Lyon e Paris tendo falecido em Turim. Da sua obra destaca-se o *Cours de Mathématiques* publicado em 1674. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Descartes, René (1596 - 1650): Filósofo francês, recebeu instrução no colégio Jesuíta de La Fléche. Formou-se em leis na Universidade de Poitiers voluntariando-se em seguida para o exército. Viajou pela Europa tendo-se fixado na Holanda entre 1628 e 1648 para trabalhar longe do rebuliço de Paris. Publicou diversos trabalhos de filosofia e teologia destacando-se o seu *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences.* Um dos apêndices deste tratado, *La géométrie*, contém as bases da área da matemática atualmente designada de "geometria analítica". (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Dieudonné, Jean Alexandre Eugène (1906 - 1992): Matemático francês, estudou na École Normale de Paris. Foi professor em diferentes escolas, embora a sua paixão fosse a investigação e não o ensino. É um dos fundadores grupo Bourbaki, defensor da matemática moderna, publicand diversos trabalhos em análise e geometria. De destacar também é o seu papel enquanto historiador da matemática. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Estancel, Valentim (1621 - 1705): Matemático Jesuíta, estudou no colégio de Praga, seguindo estudos em filosofia e matemática na Universidade de Praga. Passou por Portugal, passando pela "Aula da Esfera"e por Elvas onde deu aulas de matemática, terminando a sua vida na Bahia, no Brazil. Escreveu diversos trabalhos de filosofia, religião e matemática, destacando-se os registos que faz das observações astronómicas de cometas, tendo sido uma delas citada por Newton. (Camenietzki, 1999, pp. 159-182)

Euclides: Veja-se página 13.

Faria, José Joaquim de (1759 - 1828): Professor de Matemática na Universidade de Coimbra, onde estudou filosofia, teologia e matemática, é o autor da tradução da 2.ª edição da obra de Bezout utilizada para o ensino da álgebra em Coimbra que foi também utilizada nas Escolas Politécnicas de Lisboa e Porto. (U.C., 2017, s.p.)

Fermat, Pierre de (1601 - 1665): Matemático e jurista francês, desenvolveu os seus estudos matemáticos de forma paralela ao seu trabalho enquanto homem das leis. Manteve correspondência com alguns dos matemáticos mais destacados do seu tempo, com quem foi partilhando as suas descobertas, não tendo publicado em vida qualquer trabalho sobre matemática. Dos seus estudos destacam-se o seu *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* que esteve na origem de uma controvérsia com Descartes, assim como os seus trabalhos em teoria de números, uma área à época pouco considerada em matemática. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Ferrier, Coronel (1734 - ?): Diogo Ferrier, ou James Ferrier, escocês, foi um dos militares que veio para Portugal a acompanhar o Conde de Lipe em 1762. Foi colocado em Valença em 1765, deslocado para o Algarve em 1774, regressando a Valença em 1775. Foi responsável pela organização dos Regimentos de Artilharia de Lagos e do Algarve, assim como da fortificação de Valença. Em 1778 regressou a Inglaterra onde escreveu, sob o pseudónimo de Arthur William Costigan, os *Sketches of Society and Manners in Portugal* onde critica a sociedade portuguesa. (Ferro, 1987, pp. 9-10)

Fincke, Thomas (1561 - 165): Matemático dinamarquês que recebeu educação em várias das mais importantes universidades europeias: Basileia, Leipzig, Heidelberg e Pádua. A sua obra mais famosa *Geometriae rotundi* foi publicada quando tinha apenas 22 anos, é composta por 14 livros sendo os 4 primeiros dedicados ao estudo do círculo e os restantes ao estudo da trigonometria. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Fortes, Manuel de Azevedo: Veja-se página 59.

Galileu Galiei (1564 - 1642): Matemático italiano, desde cedo se destacou como reputado matemático, tendo sido professor em Pisa e Pádua. Opositor das teorias de Aristóteles, dedicou-se ao estudo das aplicações da matemática à física, tendo-se debruçado sobre as leis do movimento dos projéteis, a queda de objetos, centros de gravidade, assim como a astronomia, refutando o sistema geocêntrico. Uma das características particulares de algumas das suas obras é o facto de estarem escritas na forma de diálogos, onde o conhecimento vai surgindo e sendo transmitido ao leitor através de conversas científicas entre duas personagens. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Gauss, Johann Carl Friedrich(1777 - 1855): Matemático alemão, considerado um dos matemáticos mais destacados do seu tempo, deixou uma vasta obra onde aborda temas como a

teoria dos números, a análise matemática, a geometria diferencial e a astronomia. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Gloriosi, Giovanni Camillo (1572 - 1643): Matemático e astrónomo italiano, foi o sucessor de Galileu na Universidade de Pádua. destaca-se pela publicação de obras de astronomia e das *Exercitationum mathematicarum*, obra em três volumes contendo teoremas, problemas e esclarecimentos de diversas questões. (Baldini, 2001, s.p.)

González, Pe. Tirso (1624 - 1705): Teólogo e Jesuíta espanhol, Prepósito Geral da Companhia de Jesus entre 1687 e 1705, é o responsável pela reforma no ensino da matemática ministrado pelos Jesuítas em Portugal no final do século XVII. (Baldini, 2004, pp. 316-320)

Huygens, Christiaan (1629 - 1695): Matemático holandês, destacou-se pelos seus trabalhos em física-matemática, desenvolvendo um relógio de pêndulo, com o intuito de resolver o problema das longitudes, e aplicando as ideias cartesianas no tratamento matemático dos fenómenos físicos. O estudo que desenvolveu da cicloide permitiu-lhe desenvolver uma teoria geral das evolutas de curvas. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Lagrange, Joseph-Louis (1736 - 1813): Matemático de origem italiana, desenvolveu os seus estudos sozinho. Fundador da Real Academia das Ciências de Turim, trocou correspondência com Euler que, desde logo, reconheceu as suas capacidades. Foi professor de matemática em Paris tendo-se dedicado ao estudo da álgebra e da análise.(O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Lamy, Bernard (1640 - 1715): Padre oratoriano francês, ensinou literatura, línguas clássicas, gramática, história e geografia em diversos colégios Jesuítas. Autor anónimo da obra *De l'Art de parler* foi exilado por defender de forma acérrima e ensinar fervorosamente as ideias de Descartes. Publicou diversas obras de matemática de onde se destacam as suas traduções dos *Elementos* de Euclides.(O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Leibniz, Gottfried Wilhelm von (1646 - 1716): Matemático e filósofo alemão, formou-se na Universidade de Leipzig. Em Paris e Londres estabeleceu contactos com alguns dos mais destacados cientistas da época. Do seu trabalho matemática destaca-se o artigo *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, qua nex fractas, nec irrationales quantitates moratur & singulare pro illis calculi genus* onde apresenta os seus fundamentos do cálculo diferencial. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Lemos, Dom Francisco (1733 - 1822): Natural do Rio de Janeito, obteve formação nos colégios Jesuítas. Doutorou-se em Cânones na Universidade de Coimbra, é nomeado reitor desta mesma Universidade em 1770. É sob a sua reitoria que se dá a reforma pombalina da Universidade, sendo exonerado do cargo de reitor e reformador em 1779. (Costa & Rosolen, 2012, pp. 1-11)

Lippe, Conde de (1724 - 1777): Friedrich Wilhelm Ernst zu Schaumburg-Lippe, conhecido por Conde de Lipe, foi o marechal-general encarregue da reorganização militar que aconteceu em Portugal em meados do século XVIII, sendo também conhecida a sua dedicação à matemática. (Rodrigues et al, 2013, p. 86)

Longchamps, Gaston Albert Gohierre de (1842 - 1906): Matemático francês, dedica-se à matemática desde cedo, sendo ao longo da sua vida professor de matemática em diversos liceus. Em 1882 assume a direção do *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* publicando diversos artigos sobre o pseudónimo Elgé. (Brasseur, 2011, p. 3)

Marie, Joseph François (1738 - 1801): matemático francês, vulgarmente conhecido por Abbé Marie foi professor de matemática no Colégio de Mazarin. Da sua obra destaca-se o *Traité de Mécanique* publicado em 1774 e utilizado na Universidade de Coimbra na disciplina de foronomia. (Figueiredo, 2011, p. 118)

Narbonensis, Rabbis Moyses (sec. XIV): Conhecido por o Provençal, terá sido um filosofo judeu que escreveu a obra *Libelli Delicidatio* traduzida e publicada em italiano por Barocius no seu *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum* (Lévy, 1989, p. 230).

Newton, Isaac (1643 - 1727): Matemático inglês, professor em Cambridge, publica na obra *De Methodis Serierum et Fluxionum* os seus fundamentos do cálculo diferencial. Contudo a sua obra mais destacada são os *Philosophiae naturalis principia mathematica* onde Newton estuda o movimento dos corpos e apresenta a lei da gravitação universal. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Nunes, Pedro (1502 - 1578): Considerado o maior matemático português, natural de Alcácer do Sal, estudou medicina na Universidade de Salamanca. Voltou a Portugal em 1527-1528, sendo nomeado cosmógrafo do reino em 1529. Foi tutor dos príncipes, professor nos

Estudos Gerais (em Lisboa) e na Universidade de Coimbra e assumiu o cargo de cosmógrafo-mor em 1547. Da sua vasta obra destacam-se livros como *De Crepusculis*, considerada a sua obra mais criativa, ou o *Libro de álgebra en arithemética y geométrica* alvo de elogios de vários matemáticos internacionais. Já no final da sua vida, e fruto da sua reputação internacional, foi um dos matemáticos consultados pela Santa Sé aquando da reforma gregoriana do calendário. (Leitão, 2005, p. 19-22)

Oliveira, Filipe Rodrigues de (1700 - ?): Sargento-mor de infantaria, lente na Academia Militar, destacou-se como professor e engenheiro, em particular na construção e desenho de cartas topográficas. (Ribeiro, 2009, pp. 84-85)

Ozanam, Jacques (1649 - 1717): Matemático francês cuja família pretendia que ingressasse no clero, contudo não mostrou interesse numa vida eclesiástica, havendo relatos de que terá tido uma vida boémia. Estudou teologia, mas foram as ciências que acabaram por atrair a sua atenção. Foi membro da Académie Royale des Sciences e, de entre as suas obras, destacam-se o *Dictionaire mathématique* publicado em 1691, os 5 volumes do *Cours de mathématiques*, datados de 1693, e o *Récriations mathématiques* publicado em 1694. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Peletier Du Mans, Jacques (1517 - 1582): Matemático, médico e poeta francês, reconhecido pela sua obra poética original e pela tradução para francês de Horácio, destacou-se enquanto matemático pela sua *Álgebra*, publicada em 1545, e pela sua *Aritmética*, datada de 1549. Em 1557 publicou os *In Euclidis elmenta demonstrationum* onde se debruça sobre a questão do ângulo de contingência e que levou a uma disputa com Clavius. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Pierpont, James (1866 - 1938): Matemático americano, recebeu a sua formação em matemática na Europa, obtendo o grau de doutor pela Universidade de Viena. De regresso aos Estados Unidos, foi professor em Yale desenvolvendo estudos na área das equações e da análise. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Platão (427a.C. - 347a.C.): Filósofo grego que se destacou em áreas como a matemática e as ciências físico naturais. Escreveu cerca de trinta diálogos onde apresenta os seus pontos de vista filosóficos, metafísicos e matemáticos. Fundou uma Academia em Atenas, dedicada à investigação e à instrução em filosofia e ciências, onde se encontraria sobre a porta de entrada

a seguinte inscrição "Que ninguém inculto em geometria entre aqui". (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Plucker, Julius (1801 - 1868): Matemático alemão, frequentou as Universidades de Heidelberg, Bona e Paris. Dedicou-se ao estudo da geometria analítica, publicando diversos trabalho sobre curvas. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Proclo (411 - 485): Estudou filosofia e matemática em Alexandria e posteriormente na Academia de Platão em Atenas. Autor dos *Les commentaires sur le premier livres des Éléments d'Euclide* tornou-se uma das maiores fontes sobre a história da matemática na antiga Grécia. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Roberval, Gilles Personne de (1602 - 1675): Matemático francês, foi professor de filosofia no Collège Gervais em Paris e mais tarde no Collège Royale. Durante a sua mantém contacto com os mais destacados matemáticos da época, nomeadamente Pascal, Torricelli e Descartes. Durante a sua vida quase não publica os seus estudos, encontrando-se muitos deles nas *Divers ouvrages de mathématique et de la physique par messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, publicadas em 1693. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Rocha, José Monteiro da (1734 - 1819): Matemático português, natural de Canavazes, ingressou na Companhia de Jesus em 1752 à qual pertenceu até 1759 altura da expulsão dos Jesuítas de Portugal pelo Marquês de Pombal. Estudou no Colégio da Baía, no Brasil, tendo aí sido também professor. Regressou a Portugal em 1766 e colaborou com a Junta Literária na reforma da Universidade de Coimbra, onde foi professor. A sua obra cientifica é vasta, destacando-se os seus trabalhos em matemática aplicada e Astronomia. (Figueiredo, 2011, pp. 13-21)

Sacrobosco, João (1195 - 1256): Matemático inglês, recebeu educação em Oxford, indo para Paris em 1220 onde é professor na Universidade. Nesse mesmo ano escreve o *Tratado da Esfera*, obra de astronomia que será uma referência nos séculos seguintes. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Salmon, George (1819 - 1904): Matemático irlandês, padre anglicano, foi professor de matemática e de teologia em Dublin. Desenvolveu os seus estudos matemáticos principalmente na área da geometria algébrica. Fruto do seu trabalho recebeu graus honorários de diversas

universidades. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Silva, José Sanches (sec. XVIII): Sargento-mor de infantaria e engenheiro militar, destacou-se pelos seus conhecimentos matemáticos, tendo publicado obras sobre pirotecnia. (Machado, 1747, p. 897)

Silva, José Sebastião e: Veja-se página 205.

Simson, Robert (1687 - 1768): Matemático escocês, professor na Universidade de Glasgow, é autor de uma edições dos *Elementos* de Euclides mais influentes, come cerca de 70 edições espalhadas por toda a europa. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Sluse, René François Walter de (1622 - 1668): Matemático nascido na Holanda Espanhola, atual Bélgica, estudou leis na Universidade de Louvain. Em 1642 parte para Roma, cidade onde desenvolve os estudos em matemáticos. Mantém contacto com matemáticos em diversos países, encontrando-se nessa correspondência alguns dos seus trabalhos sobre tangentes. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Tacquet, André(1612 - 1660): Matemático francês, estudou lógica, fisica e matemática com os jesuítas, ordem religiosa na qual ingressou em 1629. Ensinou matemática nos colégios jesuitas de Louvain e Antuérpia e publicou parte da sua obra tendo como objetivo a sua utilização para o ensino da matemática nos colégios Jesuítas. Os seus *Elementa Geometriæ* publicados em 1654, uma tradução para latim dos *Elementos* de Euclides acrescidos de resultados de Arquimedes foram utilizados em vários colégios jesuítas espalhados pela Europa, adaptados e traduzidos por diversos matemáticos. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Teão de Alexandria (sec. IV d.c): Um dos principais comentadores gregos, tendo editado e comentado obras como o *Alamagesto* de Ptolomeu e os *Elementos* de Euclides. A sua edição dos *Elementos* tornou-se uma das fontes mais utilizadas para posteriores edições da obra. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Teixeira, Francisco Gomes: Veja-se página 173.

Teodósio (160 a.C. - 90 a.C.): Matemático grego, é essencialmente conhecido pelo seu trabalho em três volumes *Sphaerics* onde estuda a geometria da esfera e onde apresenta, entre outros resultados, generalizações de alguns dos resultados apresentados por Euclides no livro III

dos seus *Elementos*. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Torricelli, Evangelista (1608 - 1647): Matemático italiano, obtém formação nos colégios Jesuítas. Conhecedor da obra de Galileu, o agora resultado que prova no *De motu gravium* sobre o fluxo do líquido através de uma determinada abertura, atualemnte conhecido como o teorema de Torricelli, sugere que pode ser considerado como o fundador da hidrodinamica. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Tosca, Tomás Vicente (1651 - 1723): Matemático e filósofo natural de Valência, padre da Congregação de S. Filipe de Neri, fundou uma Academia de Matemática, tertúlias onde eram discutidos temas de todas as áreas desta ciência. Da sua obra destaca-se o *Compendio Mathematico* composto por nove tomos abordando temas de matemática pura e aplicada. (Brótons, 1987, pp. 3-9)

Viète, François (1540 - 1603): Advogado francês, ficou conhecido pelos seus trabalhos sobre matemática, embora nunca tenha feito da matemática profissão. A sua obra mais conhecida é a *In artem analyticam isagoge*, publicada em 1591 onde mostra as vantagens da utilização de símbolos na escrita matemática. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Vilalobos, Manuel Pinto (sec. XVII - XVIII): Engenheiro e arquiteto português, recebeu formação na Aula de Fortificação de Lisboa. Destacado como engenheiro da província em Viana do Castelo, é responsável por diversas obras de engenharia e arquitetura no norte do país. É autor de diversas obras, entre elas um Tratado de Fortificação e um Calendário e Lunário Perpétuo. (Soromenho, 2002, pp. 16-17)

Vivinani, Vincenzo (1622 - 1703): Matemático italiano, considerado o último discípulo de Galileu. O grande objetivo da sua vida foi a publicação das obras de Galileu, tendo reunido grande parte das obras do seu mestre, embora nunca tenha chegado a efetuar a desejada publicação. Ao longo da sua vida dedicou-se ao estudo dos grandes matemáticos gregos, tendo publicado reconstruções das obras sobre cónicas de Aristeu e Apolónio. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Walker, John James (1825 - 1900): Matemático inglês, formou-se no Trinity College onde obteve diversas distinções pelos seus trabalhos em matemática e física. Alguns dos seus trabalhos mais importantes sobre o estudo das linhas curvas e encontram-se publicados nos *Proceedings of*

the London Mathematical Society. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

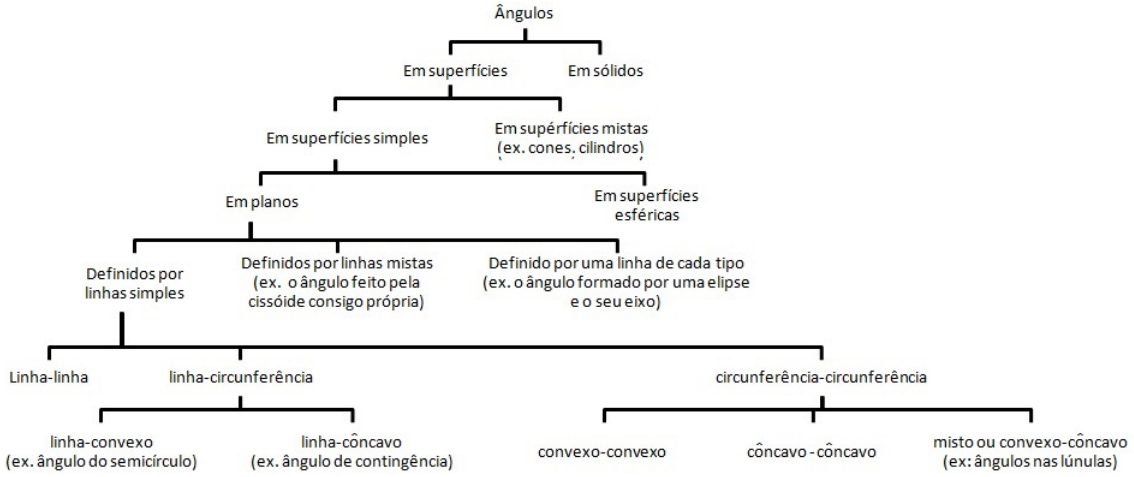
Wallis, John (1616 - 1703): Matemático inglês, foi detentor da Savilian Chair de geometria em Oxford durante 50 anos. Usualmente conhecido pela publicação da sua *Arithmetica Infinitorum*, publicada em 1656, contribuiu reconhecidamente no campo da história da matemática com o seu *Treatise on Algebra.* (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Zenão de Elea (490 a.C. - 425 a.C.): Matemático grego, ficou conhecido essencialmente graças aos quatro paradoxos que enunciou envolvendo a noção de infinito e de continuidade. (O'Connor & Robertson, 2017, s.p.)

Apêndice B

Classificação dos Ângulos segundo Proclo

Proclo apresenta, nos *Les commenatires sur le premiére livre des Éléments d'Euclide* a classificação tradicional de ângulo (Proclo in Eecke, 1948, pp. 114-116). Essa classificação pode ser esquematizada, tal como faz Heath (1956, vol. 1, p. 178), da seguinte forma:



Apêndice C

Comparação da estrutura dos *Elementos de Geometria* de Manuel de Campos e dos *Elementa Geometriæ* de André Tacquet

Elementos de Geometria Manuel de Campos, 1735	*Elementa Geometriae* André Tacquet, 1654
Prolusão Geométrica Ecomiastica - histórico - crítica 1. Da natureza, excelência e progresso da geometria. 2. De Euclides e das suas obras. 3. Dos *Elementos* de Euclides	Narração histórica da origem e progresso da Matemática
Livro I Introdução Definições 1 a 39 Postulados 1 a 3 Axiomas 1 a 14 Proposições (introdução) Proposições I a XLVII	**Livro I** Introdução Definições 1 a 39 Postulados 1 a 3 Axiomas 1 a 14 Proposições (introdução) Proposições I a XLVII
Livro II Introdução Definições 1 e 2 Nota Proposições I a XIV	**Livro II** Introdução Definição 1 Nota Proposições I a XIV[198]
Livro III Introdução Definições 1 a 10 Proposições I a XXXVII	**Livro III** Introdução Definições 1 a 8 Proposições I a XXXVII
Livro IV Introdução Definições 1 e 2 Proposições I a XVI	**Livro IV** Introdução Definições 1 a 3 Proposições I a XVI

[198]Embora na obra de Tacquet a última proposição tenha como numeração Proposição XVI trata-se de uma gralha, uma vez que o livro II contém apenas 14 proposições, sendo a penúltima numerada como Proposição XIII.

Elementos de Geometria Manuel de Campos, 1735	*Elementa Geometriae* André Tacquet, 1654
Livro V Introdução Definições 1 a 7 Nota Definições 8 a 11 Nota Definições 12 a 18[199] Teoremas Fundamentais 1. Explica-se, e demonstra-se o Princípio de Euclides das *Equimultiplices* 2. Explica-se, e demonstra-se o Princípio dos Modernos Equialiquotas Conclusão Proposições (Introdução) Axioma Proposições I a XXV Nota Proposições XXVI a XXX	**Livro V** Introdução **Primeira Parte** *Método elementar e fácil das proporções proposto* Definições 1 a 6 *Explicação da igualdade e desigualdade das proporções* *Definição de igualdade de proporções desejada por Euclides* *Critérios principais e infalíveis de igualdade de proporções* Definições 7 a 11 Axioma Proposições I a XXXV **Segunda Parte** *Explicação dos Princípios dos Equimultiplos de Euclides* **Terceira Parte** *Dos denominadores, algoritmos e composição de proposções*
Apêndice I *Dos Denominadores, Algarismo, e Composição das Proporções*	
Livro VI Introdução Definições 1 a 6 Proposições I a XXXIII	**Livro VI** Introdução Definições 1 a 4 Proposições I a XXXIII
Livro VII ou XI Introdução Definições 1 a 14 Proposições I a XL	**Livro XI ou VII** Introdução Definições 1 a 14 Proposições I a XL

[199]Devido a uma gralha de numeração as definições passam do número 12 ao 14, não existindo qualquer definição com o número 13.

C Comparação da estrutura dos *Elementos de Geometria* de Manuel de Campos e dos *Elementa Geometriæ* de André Tacquet

Elementos de Geometria Manuel de Campos, 1735	*Elementa Geometriae* André Tacquet, 1654
Livro VIII ou XII Introdução Definições 1 a 6 Proposições I a XVIII	**Livro XII ou VIII** Introdução Definições 1 a 6 Proposições I a XVIII
Livro IX ou XIII Introdução Definição única Lema Proposições I a XVIII	
Apêndice II *Dos Teoremas Selectos de Arquimedes, pertencentes à Esfera, Cilindro, e Pirâmide Cónica* Introdução Definições 1 a 4 Axiomas 1 a 4 Proposições I a XLV	**Teoremas de Arquimedes** Introdução Definições 1 a 4 Axiomas 1 a 6 Proposições I a XLV
	Apêndice *Sobre as demonstrações de falsa posição*
Apêndice III *Da Linha quadratriz* Introdução Descrição da Quadratriz Definição 1 Proposições I a VIII	
Diatriba do Ponto e da Unidade Introdução 1. Do Ponto 2. Da Unidade	

Apêndice D

Comparação da estrutura da *Geometria Especulativa* de Manuel Azevedo Fortes e dos *Les Elemens D'Euclid* de Jaques Ozanam

Geometria Especulativa Azevedo Fortes, 1724	*Les Elemens D'Euclid* Jaques Ozanam, 1693
Livro I Definições 1 a 35 Postulados 1 a 3 Axiomas 1 a 4 Proposições 1 a 48 Modo de achar em números quantos triângulos retângulos quiserem	**Livro I** Definições 1 a 35 Postulados 1 a 3 Axiomas 1 a 4 Proposições 1 a 48
Livro II Definições 1 e 2 Proposições 1 a 14	**Livro II** Definições 1 e 2 Proposições 1 a 14
Livro III Definições 1 a 8 Proposições 1 a 37 Apêndice ao Livro Terceiro	**Livro III** Definições 1 a 8 Proposições 1 a 37
Livro IV Definições 1 a 6 Proposições 1 a 16	**Livro IV** Definições 1 a 7 Proposições 1 a 16
Livro V Definições 1 a 8 Proposições 7 a 25	**Livro V** Definições 1 a 10 Proposições 7 a 25
Livro VI Definições 1 a 4 Proposições 1 a 33	**Livro VI** Definições 1 a 4 Proposições 1 a 33
Livro XI Definições 1 a 12 Proposições 1 a 40	**Livro XI** Definições 1 a 12 Proposições 1 a 40
Livro XII Definições 1 a 12 Proposições 1 a 18	**Livro XII** Definições 1 a 12 Proposições 1 a 18

Apêndice E

Comparação da estrutura da *Lógica Geométrica* de Manuel Azevedo Fortes e dos *Les Elemens de Geometrie ou la mesure du corps* de Bernard Lamy

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Livro I *Capítulo I: Da explicação dos termos, e sinais* Explicação dos Termos e Sinais Axiomas I a VIII Definição I a IX	Explicação dos termos & das notações de que nos vamos servir Axiomas I a X Advertência **Livro I: Da primeira espécie de dimensão que é o Comprimento. Das Linhas retas & circulares** *Secção I: Das diferentes espécies de dimensões* Definições I a X
Capítulo II: Do comprimento, que é a primeira e a mais simples dimensão do corpo Proposições I a X	*Secção II: Do comprimento, que é a primeira & a mais simples dimensão do corpo* Proposições I a X
Capítulo III: Da Linha Circular Definições I a X Proposições I a IX	*Secção III: Da linha que é circular* Definições I a X Proposições I a IX
Capítulo IV: Das diferentes posições de duas linhas a respeito uma da outra Definição I Proposições I a V Problemas I e II Teoremas I a V *Das linhas oblíquas* Definições I e II Lemas I e II Teoremas I a V *Das Linhas Paralelas* Definição Proposições I a V Lemas I a III Problema Teorema	*Secção IV: Das diferentes posições de duas linhas retas a respeito uma da outra* *Das linhas Perpendiculares* Definição Proposições I a VI Problemas I e II Teoremas I a V *Das linhas Oblíquas* Definições I e II Lemas I e II Teoremas I a V *Das linhas Paralelas* Definição Proposições I a V Lemas I a III Problema I Teorema
Capítulo V: Da diferente posição de dois círculos, a respeito um do outro Proposições I e II Teoremas I a V	*Secção V: Da diferente posição de dois círculos a respeito um do outro* Proposições I e II Teoremas I a V

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Capítulo VI: Da posição da linha reta a respeito do círculo Teoremas I e II Problema I Teoremas III a XVII Problemas II e III	*Secção VI: Da posição de uma linha reta em relação a um círculo* Teoremas I e II Problema I Teoremas II a XVI Problemas I e II[200]
Livro II: Da segunda espécie de existência, que é a largura das superfícies planas *Capítulo I: Dos ângulos, ou superfícies que estão entre duas linhas, que se encontram indiretamente* Definições I a IV Proposições I a VI *Das diferentes sortes de ângulo* Definições I a IV Teoremas I a IV Definições V e VI Teoremas V a IX Problemas I a III Teorema X	**Livro II: Da segunda espécie de existência, que é a Largura. Das Superfícies planas** *Secção I: Dos Ângulos, ou Superfícies que estão entre duas linhas, que se encontram indiretamente* Definições I a IV Proposições I a VII *Das diferentes sortes de ângulo em relação à sua abertura, ou em relação ao círculo* Definições I a IV Teoremas I a IV Definições IV e V[201] Teoremas V a IX Problemas I a III Teorema X
Capítulo II: Da comparação dos ângulos, e da sua diferente posição a respeito do círculo Definições I a IV Teoremas I e II Problemas I a III Teoremas III a VI	*Secção II: Da comparação dos ângulos, & da sua diferente posição a respeito do círculo* Definições I a IV Teoremas I e II Problemas I a III Teoremas III a VI

[200] Existe, neste capítulo, um erro de numeração nos teoremas e problemas, surgindo dois teoremas com o número II e dois problemas com o número I.

[201] Embora surja duas vezes a referência à definição IV o seu conteúdo é distinto.

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Capítulo III: Dos triângulos Definições I a XI Teorema I Problemas I a III Definição XII Teoremas II a XI Problema IV Teoremas XII e XIII Problemas V a VII Teorema XIV	*Secção III: Dos triângulos* Definições I a XI Teorema I Problemas I a III Definição XII Teoremas II a XI Problema IV Teoremas XII e XIII Problemas V a VII Teorema XIV
Capítulo IV: Das figuras de muitos lados Definições I a V Lemas I a III Teoremas I a VI Problema I Teorema VII Problemas II a V	*Secção IV: Das figuras de vários lados* Definições I a V Lemas I a III Teoremas I a VI Problema I Teorema VII Problemas II a V
Capítulo V: Da medida da área das superfícies Teoremas I a IV *Modo de medir os triângulos* Teorema V Problemas I a III Definição Teorema VI Problema IV Teoremas VII e VIII Definição Teorema IX Proposições I a III Teoremas X a XIII	*Secção V: Da medida da área das superfícies* Teoremas I a V Problemas I a III Definição Teorema VI Problema IV Teoremas VII e VIII Definição Teorema IX Proposições I a III Teoremas X a XIII

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Livro III: Das propriedades que convém a qualquer grandeza aplicadas às linhas, aos planos, aos sólidos, e demonstradas *Capítulo I: Das operações Aritméticas: somar, diminuir, multiplicar, e repartir linhas, planos e sólidos* *Operação I: Do somar* *Operação II: Do diminuir* *Operação III: Do multiplicar* *Operação IV: Da divisão* Definição *Somar grandezas complexas* *Da diminuição das grandezas complexas* *Da multiplicação das grandezas complexas* Regras I a III *Da divisão das Grandezas complexas*	**Livro III: Das propriedades que convém a qualquer grandeza aplicadas às linhas, aos planos, aos sólidos, e demonstradas** *Capítulo I: Das quatro Operações da Aritmética, Adição, Subtração, Multiplicação, & Divisão sobre as Linhas, sobre os Planos, & sobre os Sólidos* *Operação I* *Operação II: Subtração* *Operação III: Multiplicação* *Operação IV: Divisão* *As mesmas operações, Adição, Subtração, Multiplicação, & Divisão, quando as grandezas são complexas.* *Adição de grandezas complexas* *Subtração de grandezas complexas* *Multiplicação de grandezas complexas* Regras I a III *Divisão de Grandezas complexas*
Capítulo II: Das potências das linhas Definições I a VI Proposições I a XII	*Secção II: Das potências das linhas* Definições I a VI Proposições I a XII
Capítulo III: Das razões, e proporções, das superfícies e dos sólidos Definições I a XII Proposições I e II Lema Proposições III a XVI Definição Proposições XVII e XVIII	*Secção III: Das razões & proporções das Linhas, das Superfícies e dos Sólidos* Definições I a XII Proposições I e II Lema Proposições III a XVI Definição Proposições XVII e XVIII *Proposições tocando as Proporções que Euclides enuncia no seu quinto Livro de outra maneira* Proposições I a VI
Capítulo IV: Das razões compostas, e suas propriedades Definições I a III Teoremas I a XI	*Secção IV: Das razões compostas, e suas propriedades* Definições I a III Teoremas I a XI

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
	Secção V: Das comparações de razões Proposições I a IX
Livro IV: Das razões e proporções das linhas, dos triângulos, das figuras, assim dos lados como dos seus contornos e superfícies *Capítulo I: Modo de achar, e demonstrar as proporções das linhas* Definição I Lemas I a III Teoremas I a III	**Livro IV: Das razões e proporções das linhas, dos triângulos, das figuras, assim dos lados como dos seus contornos e superfícies** *Secção I: Método para achar e demonstrar as razões e proporções das linhas* Definição I Lemas I a III Teoremas I a III
Capítulo II: Das razões, e proporções dos lados dos triângulos Definições I e II Teoremas I a VIII Definição III Teorema IX Problemas I a VII Lema I Teorema X Problemas VIII e IX Teorema XI Lema II Problema X	*Secção II: Das razões, e proporções dos lados dos triângulos* Definições I e II Teoremas I a VIII Definição I[202] Teorema IX Problemas I a VII Lema I Teorema X Problemas VIII e IX Teorema XI Lema II Problema X
Capítulo III: Das proporções, e razões dos circuitos, que muitas figuras têm entre si com o raio do círculo, a que estão inscritos Definição Teoremas I a V	*Secção III: Das razões e proporções que os circuitos de duas ou mais figuras têm entre si, & e com os raios dos círculos onde estão inscritos.* Definição Teoremas I a VI Lema Teorema VII

[202]Existe, mais uma vez, uma gralha na numeração das definições, sendo esta a terceira definição desta secção.

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Capítulo IV: Das razões, e proporções das superfícies Teoremas I a XI Lema Teoremas X a XIV Problemas I a III Teoremas XV a XVIII	*Secção IV: Das razões e proporções das superfícies* Teoremas I a XV Lema Teoremas XVI e XVII Problemas I e II Teoremas XVIII e XIX Problemas III a V Teoremas XX a XXIII Problemas VI a VIII
	Secção V: Da comensurabilidade ou incomensurabilidade das linhas e superfícies Proposições I a XII Teoremas I a III Lema Teorema IV Lema Teoremas V a XI Problemas I e II Teoremas XII e XIII
Capítulo V: Da razão, que têm entre si as cordas, e os raios Teorema I Lema I Teorema II Problemas I a III	*Secção VI: Das razões das cordas com os raios dos círculos* Teoremas I e II Lemas I a III Teorema III Lema IV Teoremas IV e V Problemas I a VIII Teorema VI Problema IX Teoremas VII a IX *Da quadratura do Círculo*

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Livro V: Da terceira espécie da existência ou dos sólidos *Capítulo I: Das secções, ou encontros dos planos, para conhecimento da formação dos sólidos* Proposições I a XIII Teoremas I a III Problema I Teoremas IV a VI Problema II Teoremas VII a XX	**Livro V: Da terceira espécie da existência, que são os sólidos, como os sólidos se formam e se medem** *Secção I: Das secções e encontro de planos de onde podemos conceber a formação dos sólidos* Proposições I a XIII Teoremas I a III Problema I Teoremas IV a VI Problema II Teoremas VII a XX
Capítulo II: Da composição dos sólidos Definições I a X Teoremas I e II Problemas I e II Teorema III Proposições I a XI	*Secção II: Da composição dos sólidos de acordo com as suas superfícies e solidez* Definições I a V Teoremas I e II Problemas I e II Teoremas III e IV Proposições I a XI
Capítulo III: Das superfícies dos sólidos Teoremas I a VI	*Secção III: Da superfície dos sólidos* Teoremas I a VII Lemas I a III Teoremas VIII a XII Problema I Teoremas XIII a XVII
Capítulo IV: Da solidez dos corpos Proposições I a XII Teoremas I a IX Lema Teoremas X a XXIV	*Secção IV: Da solidez dos sólidos* Proposições I a XII Teoremas I a IX Lema Teoremas X a XXVI

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
	Secção V: Da maneira de inscrever ou circunscrever a uma esfera os cinco poliedros regulares Teorema I Problema I e II Lema I Teoremas II e III Problema III Teorema IV Problema IV Teoremas V a VIII Problema V Teorema IX Problema VI Teorema X Lemas II a V Problema V Teorema XI a XII Problema VI Teorema XIII Lemas VI e VII Teoremas XIV a XVI Problemas VII e XI
	Livro VI: Do método[203]

[203]Este livro, composto por 11 capítulos, contém uma introdução á geometria analítica, não existindo na obra de Azevedo Fortes qualquer correspondência com este livro.

Lógica Geométrica Azevedo Fortes, 1744	*Les Elemens de Geometrie* Bernard Lamy, 1710
Apêndice: Das secções cónicas *Capítulo I: Da ideia das linhas curvas* *Capítulo II: Da Parábola* *Capítulo III: Da Elipse* *Capítulo IV: Da Hipérbole*	**Introdução às secções cónicas** *Capítulo I: Das ideia das linhas curvas que representam as diferentes secções do cone. Os seus nomes e o método mais simples para conhecer as suas principais propriedades* *Capítulo II: Da Parábola ou linha curva que representa a secção de um cone reto, cortado por um plano paralelo a um dos seus lados* *Capítulo III: Da Elipse ou da linha que representa da secção de um cone cortado por um plano que interseta os seus dois lados e que não seja paralelo à base* *Capítulo IV: Da Hipérbole, ou da linha que representa a secção de um cone cortado por um plano paralelo ao seu eixo, que mesmo cortando apenas um dos seus lados pode cortar o outro prolongando-se para depois do vértice*

Apêndice F

Comparação da estrutura dos *Elementos de Euclides* de João Ângelo Brunelli e dos *The Elements of Euclid* de Robert Simson

F Comparação da estrutura dos *Elementos de Euclides* de João Ângelo Brunelli e dos *The Elements of Euclid* de Robert Simson

Elementos de Euclides João Ângelo Brunelli, 1768	*The Elements of Euclid* Robert Simson, 1756
Livro I Definições 1 a 35 Postulados 1 a 3 Axiomas 1 a 12 Explicação dos Sinais Proposições 1 a 48	**Livro I** Definições 1 a 35 Postulados 1 a 3 Axiomas 1 a 12 Proposições 1 a 48
Livro II Definições 1 e 2 Proposições 1 a 14	**Livro II** Definições 1 e 2 Proposições 1 a 14
Livro III Definições 1 a 11 Explicação dos conceitos de raio, semidiâmetro, arco e corda. Proposições 1 a 37	**Livro III** Definições 1 a 11 Proposições 1 a 37
Livro IV Definições 1 a 7 Proposições 1 a 16	**Livro IV** Definições 1 a 7 Proposições 1 a 16
Livro V Definições 1 a 11 Definição A Definições 12 a 20 Axiomas 1 a 4 Explicação da notação de proporção Proposições 1 a 6 Proposições A a D Proposições 7 a 19 Proposição E Proposições 20 a 25 Proposições F a K[204]	**Livro V** Definições 1 a 11 Definição A Definições 12 a 20 Axiomas 1 a 4 Proposições 1 a 6 Proposições A a D Proposições 7 a 19 Proposição E Proposições 20 a 25 Proposições F a K
Livro VI Definições 1 a 4 Proposições 1 a 3 Proposição A Proposições 4 a 33 Proposições B e C	**Livro VI** Definições 1 a 4 Proposições 1 a 3 Proposição A Proposições 4 a 33 Proposições B e C

[204]Não existem as proposições I e J na edição de Brunelli nem de Simson.

Elementos de Euclides João Ângelo Brunelli, 1768	*The Elements of Euclid* Robert Simson, 1756
Livro XI Definições 1 a 29 Definição A Proposições 1 a 23 Proposições A a C Proposições 24 a 33 Proposição D Proposições 34 a 40	**Livro XI** Definições 1 a 29 Definição A Proposições 1 a 23 Proposições A a C Proposições 24 a 33 Proposição D Proposições 34 a 40
Livro XII Lema 1 Proposições 1 a 16 Lema 2 Proposições 17 e 18	**Livro XII** Lema 1 Proposições 1 a 16 Lema 2 Proposições 17 e 18
Notas escolhidas das de Robert Simson, a algumas proposições dos *Elementos* de Euclides **Livro I** Proposições 22, 29 **Livro III** Proposição 1	**Notas Críticas e Geométricas** **Livro I** Definições 7, 8, 17, 33 Proposições 7, 11, 20 e 21[205], 22, 24, 29, 35, 45 **Livro II** Proposições 13, 14 **Livro III** Proposições 1, 13, 15, 16, 20, 21, 23 e 24, 25, 33, 34, 35, 37 **Livro IV** Definições Proposições 4, 5, 15 e 16 **Livro V** Definições 3, 11, 13 Proposições 4, corolário da Prop. 4, 5, 6, A, B, C, D, 8, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 20 a 24, F a H

[205]A repetição do número 2 deve-se à existência de uma nota para a definição seguida de uma formulação alternativa da mesma, o que acontecerá noutras definições e proposições.

Elementos de Euclides João Ângelo Brunelli, 1768	*The Elements of Euclid* Robert Simson, 1756
Notas escolhidas das de Robert Simson, a algumas proposições dos *Elementos* de Euclides	**Notas Críticas e Geométricas**
Livro VI Definições 2, 2[206] Proposições 28 e 29, 32, 32	**Livro VI** Definições 2 e 5, 2 Proposições 1 e 2, 3, 7, 8, 9, 18, 23, 24, 25, 27, 28 e 29, 31, 32, 32, 33, *B* e *C*
Livro XI Definições 9 e 11, 10 Proposição I, Problema Proposição II, Problema Proposição III, Teorema	**Livro XI** Definições 9 e 11, 10 Proposição I, Problema Proposição II, Problema Proposição III, Teorema Proposições 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 25 e 26, 28, 29, 30, 31, 32, *D*, 34, 35, 36, 37, 38, 39
Livro XII Corolário da Proposição 8	**Livro XII** Proposições 2, 3, 4, 5, 6, corolário da Prop. 8, 11 e 12, 13, 15, 17

[206]Existem notas que se referem a duas proposições simultaneamente, sendo nesta tabela separadas pela conjunção, ao passo que notas diferentes se encontram separadas por vírgula.

Apêndice G

Comparação da estrutura do *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* de Bezout

G Comparação da estrutura do *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* de Bezout

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 3, 1766	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo I, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo I, 1793
		Introdução
Da Álgebra	**Da Álgebra**	**Álgebra**
Primeira Secção, em que damos os princípios do cálculo das quantidades algébricas	**Primeira Secção**, na qual se expoem os princípios do Cálculo das quantidades algébricas	**Secção 1**, Dos Princípios do Cálculo Literal
Das Operações fundamentais sobre as Quantidades geralmente consideradas	Das Operações fundamentais sobre as quantidades consideradas em geral	Das Operações Fundamentais do Cálculo literal
Da Adição e da Subtração	Da Adição e subtração	Da Adição e Subtração
Da Multiplicação	Da multiplicação	Da Multiplicação
Da Divisão	Da Divisão	Da Divisão
Da maneira de determinar o máximo Divisor comum de duas Quantidades literais	Do modo de achar o máximo comum divisor de duas quantidades literais	Do modo de achar o maior divisor comum de duas quantidades literais
Das Frações literais	Das Frações literais	Das Frações literais
Das Equações	Das Equações	Das Equações
Das Equações do primeiro grau com uma só incógnita	Das Equações do primeiro grau em uma só incógnita	Da resolução das Equações do primeiro grau a uma incógnita
Aplicação dos Princípios precedentes à resolução de quaisquer Questões simples	Aplicação dos Princípios precedentes à resolução de algumas questões simples	Aplicação dos princípios precedentes à resolução de alguns problemas
Reflexões sobre as Quantidades positivas & as Quantidades negativas	Reflexões sobre as quantidades positivas, e as Quantidades negativas	Reflexões sobre as quantidades positivas e negativas
Das Equações do primeiro grau com duas Incógnitas	Das Equações do primeiro grau a duas Incógnitas	Das Equações lineares a muitas incógnitas
Das Equações do primeiro grau com três & um maior número de Incógnitas	Das Equações do primeiro grau a três, e a um maior número de Incógnitas	_____ a três e mais incógnitas
	Aplicações das regras precedentes à resolução de algumas questões, que incluem mais de uma incógnita	Aplicação à resolução de alguns problemas

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 3, 1766	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo I, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo I, 1793
Dos Casos em que as Questões propostas ficam indeterminadas, ainda que tenhamos tantas Equações como Incógnitas, & dos casos em que as Questões são impossíveis	Dos casos, em que as questões propostas ficam indeterminadas, ainda que hajam tantas equações, como incógnitas, e dos casos, em que as questões são impossíveis	Dos casos em que os problemas ficam indeterminados, ainda que haja igual número de equações e de incógnitas Dos casos em que os problemas são impossíveis
Dos Problemas indeterminados	Dos Problemas indeterminados	Dos Problemas indeterminados
Das Equações do segundo grau com uma só Incógnita	Das Equações do segundo grau a uma só incógnita	Das Equações do segundo grau a uma incógnita
Aplicação da Regra precedente à resolução de quaisquer Questões do segundo grau	Aplicação da Regra precedente à resolução de algumas questões do segundo grau	Aplicação a algumas problemas do segundo grau
Da Extração da raiz quadrada das Quantidades literais	Da Extração da raiz quadrada das quantidades literais	Da extração da Raiz quadrada das quantidades literais
Do Cálculo das Quantidades afetadas pelo Sinal $\sqrt{\ }$	Do Cálculo das quantidades afetas pelo sinal $\sqrt{\ }$	Do cálculo das quantidades afetas pelo sinal $\sqrt{\ }$
Da Formação das Potências das Quantidades monómias, da Extração das suas Raízes, & do Cálculo dos Radicais e dos expoentes	Da Formação das potências das quantidades monómias, da extração das suas raízes, e do cálculo dos radicais, e dos expoentes	Da formação das potências dos monómios, e extração das suas raízes Do cálculo dos radicais, e dos expoentes
Da Formação das Potências das Quantidades complexas, & da Extração das suas Raízes	Da Formação das potências das quantidades complexas, e da extração das suas raízes	Da formação das potências das quantidades complexas
Da Extração das Raízes das Quantidades Complexas	Da extração das raízes das quantidades complexas	Da extração das raízes das quantidades complexas
Da maneira de aproximar à raiz as Potências imperfeitas das Quantidades literais	Do modo de aproximar à raiz das potências imperfeitas das quantidades literais	Do modo de ter a raiz aproximada das potências imperfeitas das quantidades literais

G Comparação da estrutura do *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* de Bezout

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 3, 1766	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo I, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo I, 1793
Das Equações com duas incógnitas quando elas passam do primeiro grau	Das Equações a duas incógnitas quando elas passam do primeiro grau	Das Equações superlineares a duas incógnitas
Das equações com mais de duas incógnitas, quando elas passam do primeiro grau	Das equações a mais de duas incógnitas quando elas passam do primeiro grau	_____ a mais de duas incógnitas
Das Equações a dois termos	Das Equações a dois termos	Das Equações a dois termos
Das Equações que se podem resolver à maneira das do segundo grau	Das Equações, que podem resolver-se à maneira das do segundo grau	Das Equações que podem resolver-se à maneira das do segundo grau
Da Composição das Equações	Da Composição das Equações	Da composição das Equações
Das Transformações que podemos fazer subir nas Equações	Das Transformações, a que se podem fazer subir as Equações	Do modo de transformar as equações
Da Resolução de Equações Compostas	Da resolução de Equações compostas	Da resolução de Equações compostas
Aplicação ao terceiro grau	Aplicação ao terceiro grau	Aplicação ao terceiro grau
Aplicação ao quarto grau	Aplicação ao quarto grau	_____ ao quarto grau
Reflexões sobre o Método precendete, & sobre a sua aplicação a graus superiores ao quarto	Reflexões sobre o método precedente, e sobre a sua aplicação aos graus superiores ao quarto	Reflexões sobre o método precedente, e sobre a sua aplicação às Equações dos graus superiores ao quarto
Dos Divisores comensuráveis das Equações	Dos Divisores comensuráveis das Equações	Dos Divisores comensuráveis das Equações
Da extração das Raízes das Quantidades em parte comensuráveis & em parte incomensuráveis	Da Extração das raízes das quantidades em parte comensuráveis,e em parte incomensuráveis	Da extração das raízes das quantidades parte comensuráveis,e parte incomensuráveis
Da maneira de aproximar das Raízes das Equações compostas	Do modo de aproximar às raízes das equações compostas	Do modo de achar as raízes aproximadas das Equações compostas
Reflexões sobre o método precedente	Reflexões sobre o Método precedente	Reflexões sobre o método precedente

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 3, 1766	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo I, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo I, 1793
Da maneira de ter as Raízes iguais das Equações	Do modo de ter as raízes iguais das Equações	Do modo de achar as raízes iguais das Equações
Da maneira de ter as Raízes imaginárias das Equações	Do modo de ter as raízes imaginárias das Equações	Do modo de achar as raízes imaginárias das Equações
Segunda Secção, onde aplicamos a Álgebra à Aritmética & à Geometria	**Segunda Secção** Na qual se aplica a Álgebra à Aritmética, e à Geometria	**Secção II** Da aplicação Álgebra à Aritmética e Geometria
Propriedades gerais das Progressões aritméticas	Propriedades gerais das progressões aritméticas	Propriedades gerais das Progressões Aritméticas
Da Soma das Potências dos termos de uma Progressão aritmética qualquer	Da somação das potências dos termos de uma progressão aritmética qualquer	Da soma das potências dos termos de qualquer Progressão Aritmética
Propriedades & usos das Progressões geométricas	Propriedades e usos das progressões geométricas	Das propriedades, e uso das Progressões Geométricas
Da soma das séries recorrentes	Da Somação das séries recorrentes	Da Soma das Séries Recorrentes
Da Construção geométrica das Quantidades algébricas	Da construção geométrica das quantidades algébricas	Da Construção Geométrica das Quantidades Algébricas
Diversas Questões de Geometria, & Reflexões, tanto sobre a maneira de os pôr em Equação, como sobre as diversas soluções que podem dar as Equações	Diversas questões de Geometria, e reflexões tanto sobre o modo de as pôr em Equação, como sobre as diversas soluções, que dão estas Equações	Problemas de Geometria, e reflexões tanto sobre o modo de os pôr em equação, como sobre as diferentes soluções, que dão as equações
Outras Aplicações da Álgebra a diversos objetos	Outras aplicações da Álgebra a diversos objetos	Outras aplicações da Álgebra
Das Linhas curvas em geral, & em particular das Secções cónicas	Das Linhas curvas em geral, e em particular das secções cónicas	Das Linhas curvas em geral, e em particular das Secções Cónicas
Da Elipse	Da Elipse	Da Elipse
Da Hipérbole	Da Hipérbole	Da Hipérbole
Da Hipérbole entre as Assintotas	Da Hipérbole entre as suas assintotas	Da Hipérbole entre as Assintotas
Da Parábola	Da Parábola	Da Parábola

G Comparação da estrutura do *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* de Bezout

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 3, 1766	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo I, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo I, 1793
Reflexões sobre as Equações das Secções cónicas	Reflexões sobre as equações às secções cónicas	Reflexões sobre as Equações das Secções Cónicas
Meios de reduzir a Secções cónicas, todas as Equações do segundo grau com duas incógnitas, quando ela exprime uma coisa possível	Meios de reduzir às secções cónicas, todas a equação do segundo grau com duas indeterminadas, quando ela exprime uma coisa possível	Meios de reduzir às Secções Cónicas, todas a equação indeterminada do segundo grau
Aplicação do precedente, à resolução de algumas Questões indeterminadas	Aplicação do precedente, à resolução de algumas questões indeterminadas	Aplicação à resolução de alguns problemas indeterminados
Aplicação dos mesmos Princípios a algumas Questões determinadas	Aplicação dos mesmos princípios a algumas questões determinadas	_____ dos mesmos princípios à resolução de alguns problemas determinados
Apêndice	Apêndice	

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 4, 1770	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo II, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo II, 1793
Princípios de Cálculo que servem de introdução às Ciências Físico-Matemáticas	**Elementos do Cálculo Diferencial e Integral**	
Noções Preliminares	Noções Preliminares	Noções Preliminares
Elementos de Cálculo Diferencial	*Elementos de Cálculo Diferencial*	*Cálculo Diferencial*
Das Diferenças segundas, terceiras, &c.	Das Diferenças segundas, terceiras, &c.	Das Diferenciais segundas, e terceiras, &c.
Dos Diferenciais de senos, cossenos, &c.	Das Diferenciais dos senos, cossenos, &c.	Das Diferenciais das quantidades afetas de Senos, Cossenos, &c.
Dos Diferenciais logarítmicos	Das Diferenciais logarítmicos	Das Diferenciais logarítmicos
Dos Diferenciais das quantidades exponenciais	Das Diferenciais das Quantidades exponenciais	Das Diferenciais das quantidades exponenciais
Aplicações das regras precedentes	Aplicações das Regras antecedentes	Aplicações das regras antecedentes
Aplicações às Subtangentes, Tangentes, &c., das Linhas curvas	Aplicações às Subtangentes, Tangentes, Subnormais &c. das linhas curvas	_____ às Subtangentes, Tangentes, Subnormais &c. das Curvas
Aplicações aos limites das linhas curvas, & em geral aos limites das quantidades, & às questões de Máximos & Minímos	Aplicações aos limites das linhas curvas, e em geral aos limites das quantidades, e às questões de *maximis* & *minimis*	_____ aos limites das linhas curvas, e em geral aos limites das quantidades, e aos problemas de *Maximis* & *Minimis*
Dos Pontos múltiplos	Dos Pontos múltiplos	Dos Pontos múltiplos
Dos Pontos de inflexão, visíveis & invisíveis	Dos Pontos de inflexão, visíveis, e invisíveis	Dos Pontos de inflexão visíveis e invisíveis
		Reflexão sobre um *Maximum* & *Minimum*

G Comparação da estrutura do *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, dos *Elementos de Analisi Mathematica* e dos *Elementos de Analyse* de Bezout

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 4, 1770	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo II, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo II, 1793
Dos Pontos de reversão	Dos Pontos de Retrogradação de diferentes espécies, e das diferentes sortes de toque dos ramos de uma mesma curva	Dos Pontos de Reversão, e das diferentes espécies de contacto dos ramos de uma curva
Dos Raios de curvatura ou da evoluta	Dos Raios de curvatura, ou da evoluta	Dos Raios de Curvatura ou da Evoluta
		Outras aplicações do Cálculo Diferencial
Elementos de Cálculo integral	*Elementos de Cálculo integral*	*Cálculo Integral*
Dos Diferenciais com uma só variável, que têm um integral algébrico; & primeiramente dos Difrenciais monómios	Das Diferenciais de uma só variável, que tem uma integral algébrica; e primeiramente das difrenciais monómias	Das Diferenciais de uma variável suscetíveis de integração Algébrica; e primeiramente das diferenciais binomias
Dos Diferenciais complexos cuja integração se faz pela regra fundamental	Das Diferenciais complexas, cuja integração se compreende na regra fundamental	_____ complexas que se integram pela regra fundamental
Dos Diferenciais binómios que podem ser integrados algebricamente	Das Diferenciais binómias, que se podem integrar algebricamente	_____ binomias, que se podem integrar algebricamente
		Da integração das quantidades diferenciais, que constam de Senos, Cossenos, &c.
Aplicação das Regras precedentes, à quadratura das curvas	Aplicação das regras antecedentes à quadratura das curvas	Aplicação das regras precedentes à quadratura das curvas
Aplicação à retificação das linhas curvas	Aplicação à retificação das linhas curvas	_____ à retificação das linhas curvas
Aplicação às superfícies curvas	Aplicação às superfícies curvas	_____ às superfícies curvas
Aplicação à medida dos sólidos	Aplicação à medida das solidezas	_____ à medida dos sólidos

Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. 4, 1770	*Elementos de Analisi Mathematica*, Tomo II, 1774	*Elementos de Analyse*, Tomo II, 1793
Da integração das quantidades que contêm senos & cossenos	Da integração das quantidades, que constam de senos, e cossenos	
Da maneira de integrar por aproximação, & alguns usos deste método	Do método de integrar por aproximação, e de alguns usos deste método	Do método de integrar por aproximação
Usos das aproximações precedentes por integração de diversas quantidades	Uso das aproximações antecedentes na integração de quantidades diversas	Uso das aproximações antecedentes na integração de várias quantidades
Da maneira de reduzir, desde que seja possível, a integração de um diferencial proposto, a um outro diferencial conhecido, & distinguir os casos em que isto pode acontecer	Do modo de reduzir (quando pode ser) a integração de uma diferencial proposta à de outra diferencial conhecida, e de distinguir os casos em que isto pode acontecer	Do modo de reduzir a integração de uma diferencial proposta à de outra diferencial conhecida, e de distinguir os casos em que isto é possível
Das Frações racionais	Das Frações racionais	Das Frações racionais
De algumas transformações que podem facilitar a integração	De algumas transformações, que podem facilitar a integração	De algumas transformações que podem facilitar a integração
Da integração de quantidades exponenciais	Da Integração das quantidades exponenciais	Da integração das quantidades exponenciais e logarítmicas
Da integração de quantidades com duas ou mais variáveis	Da Integração de quantidades com duas, ou de mais variáveis	_____ das quantidades de duas, ou mais variáveis
Das Equações diferenciais	Das equações diferenciais	Das Equações diferenciais
Das equações diferenciais de segunda, terceira, &c. ordem	Das equações diferenciais da segunda, terceira, &c. ordem	Das Quantidades, e Equações diferenciais da segunda, terceira, &c. ordem

Apêndice H

Comparação da estrutura das edições do *Curso de Analyse Infinitesimal* de Gomes Teixeira

1.ª Edição (1887)	**2.ª Edição** (1890)	**3.ª Edição** (1896) e **4.ª Edição** (1906)
Introducção *Capitulo I - Theoria dos imaginarios e regras para o seu calculo* **I** Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra **II** Theoria analytica dos imaginarios **III** Theoria geometrica dos imaginarios **IV** Operações sobre imaginarios **V** Series **VI** Productos infinitos **VII** Fracções continuas *Capitulo II - Principos geraes da theoria das funcções, funcções algebricas, logarithmicas, etc.* **I** Princípios gerais **II** Funcções algebricas **III** Funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares Nota à pagina 40	*Introducção* *Capítulo I - Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. Regras para o seu calculo* **I** Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra **II** Theoria dos numeros irracionaes **III** Numeros negativos e numeros imaginarios **IV** Noção de limite **V** Series **VI** Produtos infinitos **VII** Fracções continuas *Capítulo II - Principios gerais da theoria das funcções. Funcções algebricas , logarithmicas, etc.* **I** Principios gerais **II** Funcções algebricas **III** Funcçóes exponenciaes, logarithmicas e circulares	*Introducção* *Capítulo I - Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. Regras para o seu calculo* **I** Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra **II** Theoria dos numeros irracionaes **III** Numeros negativos e numeros imaginarios **IV** Noção de limite **V** Series **VI** Produtos infinitos **VII** Fracções continuas *Capítulo II - Principios gerais da theoria das funcções. Funcções algebricas , logarithmicas, etc.* **I** Principios gerais **II** Funcções algebricas **III** Funcçóes exponenciaes, logarithmicas e circulares

1.ª Edição (1887)	**2.ª Edição** (1890)	**3.ª Edição** (1896) e **4.ª Edição** (1906)
Calculo Differencial *Capitulo I - Noções Preleminares* **I** Noção de limite, de continuidade, de infinitamente pequeno e de derivada **II** Methodos dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal *Capitulo II - Derivada de primeira ordem das funcções* **I** Theoremas geraes **II** Derivadas das funcções algebricas exponenciaes, logarithmicas e circulares **III** Funcções implicitas **IV** Relação entre as funcções e suas derivadas **V** Derivadas das funcções de variaveis imaginarias **VI** Funcções de muitas variaveis **VII** Derivadas dos determinantes. Determinantes funcionaes **VIII** Derivada de limites de sommas. Derivada de um arco de curva **IX** Mudança das variaveis	*Calculo Differencial* *Capitulo I - Noções Preleminares* **I** Noção de infinitamente pequeno e de derivada **II** Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal *Capitulo II - Derivadas de primeira ordem das funcções* **I** Theoremas geraes **II** Derivadas das funcções algebricas exponenciaes, logarithmicas, circulares, etc. **III** Relações entre as funcções e suas derivadas **IV** Funcções de muitas variaveis **V** Derivadas das funcções de variaveis imaginarias **VI** Funcções implicitas **VII** Derivadas dos determinantes. Determinantes funcionaes **VIII** Derivada de limites de sommas. Derivada de um arco de curva **IX** Mudança das variaveis	*Calculo Differencial* *Capitulo I - Noções Preleminares* **I** Noção de infinitamente pequeno e de derivada **II** Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal *Capitulo II - Derivadas de primeira ordem das funcções* **I** Theoremas geraes **II** Derivadas das funcções algebricas, logarithmicas, circulares, etc. **III** Relações entre as funcções e suas derivadas **IV** Funcções de muitas variaveis **V** Funcções implicitas **VI** Derivadas dos determinantes. Determinantes funccionaes **VII** Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva **VIII** Mudança das variaveis

1.ª Edição (1887)	**2.ª Edição** (1890)	**3.ª Edição** (1896) e **4.ª Edição** (1906)
Capitulo III - Applicações geométricas dos princípios precedentes **I** Curvas planas **II** Curvas no espaço **III** Superfícies **IV** Curvas e superfícies envolventes	*Capitulo III - Applicações geométricas dos princípios precedentes* **I** Curvas planas **II** Curvas no espaço **III** Superfícies **IV** Curvas e superfícies envolventes	*Capitulo III - Applicações geométricas dos princípios precedentes* **I** Curvas planas **II** Curvas no espaço **III** Superfícies **IV** Curvas e superfícies envolventes
Capitulo IV - Derivadas e differenciaes de ordem qualquer **I** Formação das derivadas de ordem qualquer **II** Applicações **III** differenciaes d'ordem superior **IV** Relações entre as funcções e suas derivadas	*Capitulo IV - Derivadas e differenciaes de ordem qualquer* **I** Formação das derivadas de ordem qualquer **II** Applicações **III** Differenciaes d'ordem superior **IV** Relações entre as funcções e suas derivadas	*Capitulo IV - Derivadas e differenciaes de ordem qualquer* **I** Formação das derivadas de ordem qualquer **II** Applicações **III** Relações entre as funcções e suas derivadas
Capitulo V - Applicações analyticas da formula de Taylor **I** Desenvolvimento em série de algumas funcções algébricas **II** Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentes **III** Interpolação **IV** Máximos e minimos **VI** Indeterminações	*Capitulo V - Applicações analyticas da formula de Taylor* **I** Desenvolvimento em série do binómio e de algumas funcções algébricas **II** Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentes **III** Interpolação **IV** Desenvolvimento em série das funcções implicitas **V** Máximos e minimos **VI** Indeterminações	*Capitulo V - Applicações analyticas da formula de Taylor* **I** Desenvolvimento em série do binómio e de algumas funcções algébricas **II** Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentes **III** Interpolação **IV** Desenvolvimento em série das funcções implicitas **V** Máximos e minimos **VI** Indeterminações

1.ª Edição (1887)	**2.ª Edição** (1890)	**3.ª Edição** (1896) e **4.ª Edição** (1906)
Capitulo VI - Applicações geométricas da formula de Taylor **I** Curvas planas **II** Curvas no espaço **III** Superficies	*Capitulo VI - Applicações geométricas da formula de Taylor* **I** Curvas planas **II** Curvas no espaço **III** Superficies	*Capitulo VI - Applicações geométricas da formula de Taylor* **I** Curvas planas **II** Curvas no espaço **III** Superficies
Capitulo VII - Funcções definidas por séries. Singularidade da algumas funcções **I** Funcções definidas por séries **II** Singularidade da algumas funcções	*Capitulo VII - Funcções definidas por séries. Singularidade de algumas funcções* **I** Funcções definidas por séries **II** Singularidade de algumas funcções	*Capitulo VII - Funcções definidas por séries. Singularidade de algumas funcções* **I** Funcções definidas por séries **II** Singularidade de algumas funcções
Capitulo VIII - Funcções de variaveis imaginarias **I** Definições e princípios geraes **II** Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias **III** Applicações **IV** Outros methodos para desenvolver as funcções em série **V** Funcções regulares n'uma região do plano **VI** Funcções regulares em todo o plano **VII** Funcções uniformes regulares em todo o plano excepto em pontos isolados	*Capitulo VIII - Funcções de variaveis imaginarias* **I** Definições e princípios geraes **II** Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias **III** Funcções regulares n'uma região do plano **IV** Funcções regulares em todo o plano **V** Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados	*Capitulo VIII - Funcções de variaveis imaginarias* **I** Definições e princípios geraes **II** Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias **III** Funcções regulares n'uma região do plano **IV** Funcções regulares em todo o plano **V** Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados

1.ª Edição (1887)	**2.ª Edição** (1890)	**3.ª Edição** (1896) e **4.ª Edição** (1906)
Nota - Theoria dos números irracionais, dos números negativos e dos números números imaginarios. Regras para o seu calculo **I** Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra **II** Theoria dos números irracionaes **III** Numeros negativos e numeros imaginarios		

Apêndice I

Comparação do programa de matemática das turmas regulares e das turmas piloto na década de 60 do século XX

I Comparação do programa de matemática das turmas regulares e das turmas piloto na década de 60 do século XX

6.º ano Decreto n.º 39807, Diário do Governo, 198, 09/07/1954	**6.º ano** Programa das turmas piloto como lecionado por Lima (1997, p. 113)
Álgebra Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema de números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções. Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função. Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos mais simples. Propriedades dos polinómios inteiros. Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios. Divisão por $(x - a)$; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini. Frações algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $0 \times \infty$; verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.	*Lógica Material* *Lógica Formal* Equações e inequações inteiras ou fracionárias. Sistemas de equações. Equações irracionais. *Lógica de conjuntos* *Relações binárias - Classes de equivalência* Definições por abstração (forma, direção, comprimento, cardinal) *N.º Naturais* Como cardinais de conjuntos. Operações. Relações de ordem. Cardinal do produto cartesiano. *Cálculo combinatório* *Geometria analítica plana* Domínios planos. Estudo geral da reta. *Programação linear* Introdução - duas variáveis *Funções de 1 variável ou aplicações* *Operações binárias - grupóides* *Grupos* Isomorfismos Logaritmos

6.º ano Decreto n.º 39807, Diário do Governo, 198, 09/07/1954	**6.º ano** Programa das turmas piloto como lecionado por Lima (1997, p. 113)
Trigonometria Generalização da noção de ângulo e de arco; medidas. Funções circulares diretas: definição, variação e representação gráfica; funções circulares correspondentes a ângulos complementares, suplementares, que diferem de π radianos simétricos, e cuja soma é igual a 2π radianos. Redução de um ângulo ao 1.º quadrante. Relações entre as funções circulares do mesmo ângulo; valores destas funções para alguns casos particulares. Funções circulares inversas. *Aritmética racional* Teoria dos números inteiros e das operações fundamentais. Potenciação; sistemas de numeração. Divisibilidade. Números primos. Máximo divisor comum e menor múltiplo comum.	*Anéis e corpos* Anéis de polinómios. Binómios de Newton. Equações em corpos. Decomposição em fatores. Corpo complexo - representação geométrica. Álgebras de Boole.