



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Catarina Vasconcelos Pereira Gonçalves

O conhecimento matemático de professores portugueses de matemática dos primeiros anos

Tese de Doutoramento
Estudos da Criança e Especialidade Matemática Elementar
Trabalho realizado sob orientação da
Prof. Doutora Alexandra Gomes

Abril de 2020

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.



Atribuição

CC BY

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Agradecimentos

Aos meus pais e à minha irmã,
pelo sentir, cuidar, ensinar a aprender, estar sempre, acreditar...

À minha avó,
pelo ouvir, unir, fazer crescer, observar, reunir...

Ao terminar este trabalho, não posso deixar de agradecer a todos aqueles que, de alguma forma, tornaram possível a sua realização.

Começo por agradecer à Professora Doutora Maria Alexandra Gomes, que me acompanhou e orientou ao longo destes anos, por ter partilhado comigo os seus conhecimentos e saberes, pelas suas observações sempre pertinentes e pensadas, pelo tempo que dedicou a mim e ao meu trabalho e por ter sabido como gerir comigo as fases de trabalho árduo e persistente com as fases em que se precisava de outras pensagens e sensações para que o trabalho fluísse. Um Muito Obrigada.

Agradeço ao Professor Doutor Pedro Palhares, que orientou o meu trabalho em parte do primeiro ano de Doutoramento, por me ter mostrado diferentes áreas de investigação em torno da Educação Matemática e por me ter conduzido ao tema deste trabalho.

O meu obrigada ao Professor Doutor Leandro Almeida, presidente do Instituto da Educação da Universidade do Minho, que se disponibilizou a dar-me umas orientações relativamente às teorias de medida, e à Professora Doutora Merrie Blunk da Universidade de Michigan, por ter estado sempre disponível para prestar qualquer esclarecimento relativamente aos instrumentos de medição do MKT, construídos pelo LMT e por ter contribuído para que fosse possível se ter realizado o curso TKAS (Teacher Knowledge Assessment System).

A todos os professores que aceitaram participar no presente estudo, uma palavra de agradecimento por terem possibilitado a realização da presente investigação.

Aos Gambozinos por me terem mostrado o que é a verdadeira “Escola”.

Obrigada a ti, Raul, por me acompanhares sempre e por acreditares e fazeres comigo a “matemática com mãos e cabeça”.

Finalmente, uma palavra de gratidão aos meus pais e à minha irmã por estarem presentes em todas as fases e por acreditarem sempre em mim; aos meus amigos e à minha família por me lembrarem sempre que era capaz de chegar ao fim desta jornada; e à minha avó, sempre.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração. Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

O conhecimento matemático de professores portugueses de matemática dos primeiros anos

Resumo

Há cerca de 40 anos, instaurou-se um novo paradigma acerca das investigações relacionadas com o conhecimento do professor. Estes estudos direccionaram-se para a matéria que o professor ensina.

Nesta linha de ideias, o presente trabalho explora o Conhecimento Matemático para Ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal, tendo as seguintes questões de investigação orientadoras, a que se propôs responder: (1) Em que medida e de que modo se podem adaptar as medidas construídas nos EUA, de forma a poderem ser usadas para medirem o conhecimento matemático para se ensinar em Portugal?; (2) Qual o conhecimento matemático para ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal?.

Para isso, foi adotada uma abordagem de investigação mista, tendo sido utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: o instrumento de medição do Conhecimento Matemático para Ensinar com questões de escolha múltipla de Números, Operações e Conceitos e Geometria e Medida, desenvolvidas pelo grupo de investigação de Michigan nos EUA, com o projeto *Learning Mathematics for Teaching*, entrevistas cognitivas e análise documental.

Neste estudo, após a tradução do questionário de forma independente por dois investigadores e da sua adaptação ao contexto português; o mesmo foi validado por seis colaboradores – investigadores especialistas da educação matemática e/ ou professores dos primeiros anos, que deram o seu parecer sobre adequação do questionário à realidade portuguesa; por fim, o questionário foi aplicado a 61 professores portugueses dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico. Como principais conclusões do estudo efetuado, destacam-se as seguintes acerca do conhecimento matemático desta amostra de professores portugueses dos primeiros anos: – Os professores apresentaram um melhor desempenho em questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), do que nas que exigem Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) (Ball, Thames & Phelps, 2008); – Os docentes participantes na investigação revelaram as classificações mais baixas em perguntas que envolviam Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC) (Ball, Thames & Phelps, 2008); – Os professores participantes nesta investigação tiveram um melhor desempenho nas questões que envolviam “Geometria e Medida” do que nas perguntas de “Números e Operações”.

Palavras-chave: Validação de um teste de medição do MKT, Conhecimento Matemático para Ensinar.

The mathematical knowledge of Portuguese mathematics teachers of the early years

Abstract

About 40 years ago, a new paradigm was established about investigations related to the teacher's knowledge. These studies focused on the subject the teacher teaches.

In this line of ideas, the present work explores the Mathematical Knowledge for Teaching of 1st and 2nd cycle teachers in Portugal, having the following guiding research questions, which it proposed to answer: (1) To what extent and of How can US-built measures be adapted so that they can be used to measure mathematical knowledge for teaching in Portugal? (2) What is the mathematical knowledge for teaching of 1st and 2nd grade teachers in Portugal ?.

For this, a mixed research approach was adopted, and the following data collection techniques were used: the Mathematical Knowledge measurement tool to Teach with questions of multiple choice questions of Numbers, Operations and Concepts and Geometry and Measure, developed by the Michigan research group in the USA with the Learning Mathematics for Teaching project; cognitive interviews and document analysis.

In this study, after the translation of the questionnaire independently by two researchers and its adaptation to the Portuguese context; it was validated by six collaborators – researchers specializing in mathematics education and/ or teachers from the early years, who gave their opinion on the adequacy of the questionnaire to the Portuguese reality; finally, the questionnaire was applied to 61 Portuguese teachers from the 1st and 2nd cycles of Basic Education. The main conclusions of the study are the following about the mathematical knowledge of this sample of Portuguese teachers from the early years: - Teachers performed better on issues involving Common Content Knowledge (CCK) than on those requiring Specialized Knowledge of Content (SCK) (Ball, Thames & Phelps, 2008); - Teachers participating in the research revealed the lowest scores on questions involving Knowledge of Student and Content (KSC) (Ball, Thames & Phelps, 2008) – Teachers participating in this research performed better on questions involving “Geometry and Measure” than in the “Numbers and Operations” questions.

Keywords: Validation of an MKT measurement test, Mathematical Knowledge for Teaching.

Índice

Agradecimentos.....	iii
Resumo.....	v
Abstract.....	vi
Lista de Abreviaturas e Siglas ¹	ix
Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas	xiv
Índice de Anexos	xviii
Capítulo 1 – Introdução	19
1.1. Contexto.....	19
1.2. Problema de Investigação.....	20
1.3. Relevância.....	24
1.4. Organização da tese	26
Capítulo 2 – Estado da arte: conhecimento do professor	27
2.1. Conhecimento do professor	27
2.2. Estudos sobre o conhecimento matemático do professor	39
2.3. Teoria do Conhecimento Matemático para se Ensinar (MKT)	57
2.3.1 Domínios do MKT	61
2.3.2. Medir o MKT	68
2.4. Adaptação, validação e aplicação da Teoria do MKT noutros países/contextos	74
Capítulo 3 – Metodologia	76
3.1. Aspetos teóricos	76
3.1.1. Métodos de investigação	77
3.1.2. Plano de investigação	82
3.2. Metodologia Adotada neste Estudo	84
3.2.1. Métodos de investigação deste estudo	84
3.2.2. Fases do trabalho	86
3.2.3. Recolha de dados: instrumento de medição do MKT em Portugal.....	94
Capítulo 4 – Fase 1 do Estudo.....	97
Validação do Instrumento de medição do MKT no contexto português	97

4.1. Processo de seleção das questões do Teste de Medição do MKT	98
4.2. Descrição das questões	107
4.3. Tradução e adaptação do teste ao contexto português	126
Capítulo 5 – Fase 2 do Estudo	137
Análise dos resultados de professores Portugueses no questionário.....	137
5.1. Aplicação do teste a professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico	138
5.1.1. Caracterização da amostra	140
5.1.2. Análise geral do MKT de professores portugueses	146
5.1.3. Desempenho dos professores por domínios da matemática	158
5.1.4. Desempenho dos professores por domínios do MKT	168
5.1.5. Desempenho dos professores de acordo com o nível de dificuldade das questões em estudo.....	180
5.2. Prestação dos professores entrevistados em questões do questionário	206
5.2.1. Caracterização dos entrevistados	206
5.2.2. As questões analisadas nas entrevistas e a prestação dos professores entrevistados.....	207
5.3. Associação entre a prestação dos professores nas perguntas do questionário e o seu raciocínio apresentado nas entrevistas: análise caso a caso	214
Capítulo 6 – Conclusões e Implicações	233
6.1. Conclusões	234
6.1.1. O processo de seleção, adaptação e validação das questões construídas nos EUA ao contexto português	234
6.1.2. Conclusões sobre o conhecimento matemático para ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal.	238
6.2. Implicações com base no trabalho realizado – abertura a novos estudos.....	248
6.2.1. Implicações para a Formação Matemática de Professores dos primeiros anos	248
6.2.2. Implicações em termos de investigações futuras	249
Capítulo 7 – Referências Bibliográficas	252
Anexos	268

Lista de Abreviaturas e Siglas¹

CCK – *Common Content Knowledge* – Conhecimento Comum do Conteúdo.

CK – *Content Knowledge* – Conhecimento do Assunto.

COACTIV – *Cognitive Activation in the Classroom* – Ativação Cognitiva na Sala de Aula.

d – Grau de dificuldade obtido em estudos estatísticos nos EUA.

D – Grau de dificuldade obtido no presente estudo com professores portugueses.

GM – *Geometry and Measurement* – Geometria e Medida.

ICME – *International Congress on Mathematical Education* – Congresso Internacional de Educação Matemática.

IEA – *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* – Associação Internacional para a Avaliação do Desempenho Educacional.

IRT – *Item Response Theory* – Teoria de Resposta ao Item.

KCT – *Knowledge of Content and Teaching* – Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

KSC – *Knowledge of Student and Content* – Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos.

LMT – *Learning Mathematics for Teaching* – Aprendizagem da Matemática para a Ensinar.

MCK – *Mathematics Content Knowledge* – Conhecimento do Conteúdo Matemático.

MKT – *Mathematics Knowledge for Teaching* – Conhecimento Matemático para se Ensinar.

MPCK – *Mathematics Pedagogical Content Knowledge* – Conhecimento Pedagógico do Conteúdo Matemático.

MPDIs – *California's Mathematics Professional Development Institutes* – Instituto do Desenvolvimento Profissional Matemático da Califórnia.

MT21 – *The Mathematics Teaching for the 21st Century Project* – O Ensino da Matemática para o Projeto do século XXI.

MTLT – *The Mathematics Teaching Learning to Teach Project* – O Ensino da Matemática para aprender a ensinar com projetos.

NCTM – *National Council for Teachers of Mathematics* – Conselho Nacional de Professores de Matemática.

NO – *Numbers and Operations* – Números e Operações.

NSF – *National Science Foundations* – Fundação Nacional da Ciência.

PCK – *Pedagogical Knowledge Content* – Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

PFCM – Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico.

PISA – *Programm for International Student Assessment* – Programa de Avaliação Internacional de Alunos.

PME – *Psychology of Mathematics Education* – Psicologia da Educação Matemática.

PUFM – *Profound Understanding of Fundamental Mathematics* – Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental.

SKC – *Specialized Knowledge of Content* – Conhecimento Especializado do Conteúdo.

TEDS-M – *Teacher Education and Development Study in Mathematics* – Formação de Professores e Desenvolvimento de Estudos em Matemática.

TELT – *Teacher Education and Learning to Teach* – Formação de Professores e Aprendizagem para se Ensinar.

TIMSS – *Trends in International Mathematics and Science Study* – Tendências do Estudo Internacional de Matemática e Ciências.

TME – *Theory of Mathematics Education* – Teoria da Educação Matemática.

¹ – Ao longo deste trabalho, as abreviaturas e siglas representam as expressões em inglês. Optou-se por abreviar as expressões inglesas e não as respetivas traduções em português, pois as siglas em inglês, do tema do presente estudo, são muito reconhecidas na literatura.

Lista de Figuras

Figura 1 – Modelo de conhecimento de professores (Grossman, 1990, p.5) _____	p. 37
Figura 2 – Relação de dependência/ causalidade, do ponto de vista da conclusões do estudo (Gomes, 2003) _____	p. 54
Figura 3 – Domínios do MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) _____	p. 62
Figura 4 – Exemplo de uma questão presente num questionário de medição do MKT (Hill, Schilling & Ball, 2004) _____	p. 70
Figura 5 – Exemplos de questões, construídas pelo LMT, que requerem conhecimento do conteúdo (Hill, Schilling & Ball, 2004) _____	p. 71-72
Figura 6 – Exemplos de questões, construídas pelo LMT, que exigem KSC (Hill, Schilling & Ball, 2004) _____	p. 73
Figura 7 – Processo metodológico do presente trabalho _____	p. 85
Figura 8 – Esquema representativo das fases do presente trabalho investigativo _____	p. 87
Figura 9 – Esquema representativo da metodologia do presente trabalho (baseada em Mosvold et al. (2009, 2012)) _____	p. 92
Figura 10 – Problema com frações equivalentes (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo, 2013, p. 72) _____	p. 111 – 112
Figura 11 – Problemas de divisão em situações de agrupamento e de partilha, respetivamente (Caderno Apoio 1.ºciclo, 2013, p.41) _____	p. 113
Figura 12 – Problema de divisão em situação de agrupamento _____	p. 114
Figura 13 – Resolução de um algoritmo da subtração com dois transportes (Bivar et al., 2013, p. 72) _____	p. 115 – 116
Figura 14 – Problema sobre divisão de números racionais – retirado "Tarefas 6.º ano - Formação contínua de professores de matemática dos 1.º e 2.º ciclos – ESEV (ME, 2010)" _____	p. 118
Figura 15 – Problema sobre divisão de números racionais _____	p. 119
Figura 16 – Exemplo de um algoritmo da multiplicação com números decimais (Bivar et al., 2013, p. 72) e aplicação da regra utilizada para se determinar o local da vírgula neste algoritmo _____	p. 121
Figura 17 – Exemplo de uma questão de medição do MKT por traduzir (Hill, Schilling & Ball, 2004) _____	p. 133

Figura 18 – Questão presente num artigo de (Hill, Schilling & Ball, 2004) traduzida e adaptada ao contexto português _____	p. 135
Figura 19 – Gráfico circular demonstrativo do número de professores, participantes no estudo, que lecionam em cada ciclo de ensino _____	p. 141
Figura 20 – Idade (em anos) dos intervenientes na investigação _____	p. 142
Figura 21 – Distribuição dos professores intervenientes, em percentagem, por habilitações académicas _____	p. 143
Figura 22 – Histograma representativo das classificações, em percentagem, dos professores portugueses intervenientes neste estudo _____	p. 147
Figura 23 – Diagrama de extremos e quartis representativo das classificações, em percentagem, dos professores portugueses participantes nesta investigação _____	p. 148
Figura 24 – Histograma representativo do tempo de serviço (em anos) docente dos professores intervenientes neste estudo _____	p. 149
Figura 25 – Histograma representativo da média das pontuações de professores portugueses, de acordo com o tempo de serviço docente _____	p. 149
Figura 26 – Gráfico de barras representativo da percentagem de docentes que leciona em cada ciclo do Ensino Básico _____	p. 151
Figura 27 – Média das classificações dos professores, de acordo com o nível de ensino que lecionam. _____	p. 152
Figura 28 – Gráfico de barras representativo do número de professores intervenientes na investigação, em percentagem, de acordo com a sua formação académica _____	p. 153
Figura 29 – Média, em percentagem, das classificações dos professores por habilitações académicas _____	p. 154
Figura 30 – Respostas dos docentes participantes na investigação à questão: "em geral, conheço a matemática que preciso para ensinar" _____	p. 156
Figura 31 – Média, em percentagem, das classificações dos professores, de acordo com o tipo de conhecimento matemático presente nas questões de "Números e Operações" e de "Geometria e Medida" _____	p. 170
Figura 32 – Tarefa sobre identificação de frações não equivalentes (Pinto & Ribeiro, 2013, p. 14) _____	p. 177
Figura 33 – Representação de um paralelogramo obtusângulo e de um retângulo e das respetivas diagonais _____	p. 191

Figura 34 – Representação de um losango e de um quadrado e das suas diagonais _____ p. 191

Figura 35 - Exemplo com vantagens no uso da propriedade distributiva da multiplicação _____ p. 211

Figura 36 - Exemplo em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação não é vantajosa
_____ p. 216

Figura 37 – Esquema de organização da análise das entrevistas _____ p. 216

Figura ~~3228~~ – Representação geométrica do Professor Pedro em resposta à questão 20
_____ p. 230

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Estrutura do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo Matemático (MPCK) (Schmidt, Blümeke & Tatto, 2011)	p. 49 – 50
Tabela 2 – Tópicos do currículo de matemática e respetivo conhecimento analisados (Hill, Ball & Schilling, 2004, p. 16)	p. 71
Tabela 3 – Algumas características das abordagens qualitativa e quantitativa (Bogdan & Biklen, 1994)	p. 80 – 81
Tabela 4 – Categorização das questões do questionário quanto ao domínio da Matemática e do MKT	p. 95
Tabela 5 – Categorização dos questionários construídos pelo LMT	p. 99
Tabela 6 – Análise dos parâmetros slope e dificuldade no teste NO 2008	p. 100 – 101
Tabela 7 – Análise do parâmetro dificuldade no teste NO 2008	p. 102
Tabela 8 – Análise dos parâmetros slope e dificuldade nas questões de Geometria nas versões A e B	p. 102 – 103
Tabela 9 – Análise do parâmetro Dificuldade nas questões de Geometria	p. 103
Tabela 10 – Conteúdos matemáticos presentes em cada questão	p. 104 – 106
Tabela 11 – Categorização das questões em análise, segundo o parâmetro Grau de Dificuldade (d)	p. 108
Tabela 12 – Alterações relativas ao contexto cultural geral nas questões do instrumento do presente estudo	p. 130
Tabela 13 – Alterações relativas ao contexto cultural escolar nas questões do instrumento do presente estudo	p. 131
Tabela 14 – Alterações relacionadas com conteúdos matemáticos nas questões do instrumento do presente estudo	p. 131 – 132
Tabela 15 – Caracterização das questões de escolha múltipla, segundo os níveis de dificuldade d e D	p. 139
Tabela 16 – Estudo do grau de associação entre o nível de dificuldade obtido neste estudo e nos EUA	p. 140
Tabela 17 – Distribuição dos professores participantes neste estudo por nível de ensino em que lecionam	p. 141

Tabela 18 – Tempo de serviço docente (em anos) dos professores participantes no presente estudo	p. 143
Tabela 19 – Tempo dedicado à Matemática e a outros assuntos no último ano pelos professores participantes	p. 145
Tabela 20 – Análise da correlação entre as classificações dos professores e o tempo de serviço docente	p. 150
Tabela 21 – Análise da correlação entre as classificações dos 61 professores e o nível de ensino que lecionam	p. 151
Tabela 22 – Análise da correlação entre as classificações dos 61 professores e a sua formação académica	p. 152-153
Tabela 23 – Estudo da correlação entre as classificações dos docentes e a perceção que têm do que sabem da Matemática que precisam para ensinar	p. 157
Tabela 24 – Média das classificações dos professores intervenientes na investigação por domínio de Matemática	p. 158
Tabela 25 – Percentagem de respostas corretas e erradas nas questões do domínio de Números e Operações	p. 159 – 160
Tabela 26 – Caracterização da questão 1b	p. 160
Tabela 27 – Respostas corretas e erradas dos professores à questão 1b	p. 161
Tabela 28 – Caracterização da questão 1c	p. 161
Tabela 29 – Respostas dos professores à questão 1c	p. 162
Tabela 30 – Caracterização da questão 8c	p. 163
Tabela 31 – Respostas dos professores à questão 8c	p. 163
Tabela 32 – Percentagem de respostas corretas e erradas no domínio de Geometria e Medida	p. 163 – 164
Tabela 33 – Caracterização da questão 21e)	p. 166
Tabela 34 – Respostas dos professores à questão 21e	p. 166
Tabela 35 – Caracterização das questões 18b	p. 166
Tabela 36 – Respostas dos professores à questão 18b	p. 168
Tabela 37 – Média das classificações dos professores intervenientes na investigação nas questões organizadas por domínios do MKT	p. 169
Tabela 38 – Percentagem de respostas corretas e incorretas em questões que envolviam CCK	p. 171

Tabela 39 – Caracterização da questão 18c)	p. 171
Tabela 40 – Respostas à questão 18c)	p. 173
Tabela 41 – Caracterização da questão 19b)	p. 173
Tabela 42 – Respostas à questão 19b)	p. 174
Tabela 43 – Percentagem de respostas corretas e incorretas nas questões que envolviam Conhecimento Especializado do Conteúdo	p. 175 – 176
Tabela 44 – Caracterização da questão 4	p. 176-177
Tabela 45 – Respostas à questão 4	p. 177
Tabela 46 – Percentagem respostas corretas e incorretas nas questões que envolvem Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)	p. 178
Tabela 47 – Caracterização da questão 24b	p. 179
Tabela 48 – Respostas à questão 24 b	p. 179
Tabela 49 – Número de questões, categorizadas segundo o grau de dificuldade d e D observado	p. 181
Tabela 50 – Média dos professores portugueses nas questões de escolha múltipla, por grau de dificuldade (D) e por área da Matemática	p. 182
Tabela 51 – Grau de dificuldade (D) revelado pelas questões fáceis do questionário	p. 183 – 184
Tabela 52 – Caracterização da questão 21a	p. 185-186
Tabela 53 – Respostas à questão 21a	p. 186
Tabela 54 – Caracterização da questão 1d	p. 187
Tabela 55 – Respostas à questão 1d	p. 188
Tabela 56 – Caracterização da questão 12b	p. 189
Tabela 57 – Respostas à questão 12 b	p. 189
Tabela 58 – Caracterização da questão 18d	p. 189
Tabela 59 – Respostas à questão 18 d	p. 190
Tabela 60 – Caracterização da questão 18e	p. 190
Tabela 61 – Respostas à questão 18e	p. 191
Tabela 62 – Caracterização da questão 20	p. 192
Tabela 63 – Respostas à questão 20	p. 193
Tabela 64 – Caracterização da questão 22	p. 193
Tabela 65 – Respostas à questão 22	p. 194
Tabela 66 – Caracterização da questão 24c	p. 195
Tabela 67 – Respostas à questão 24c	p. 195

Tabela 68 – Grau de dificuldade (D) das questões difíceis ou um pouco difíceis do questionário_	p. 196
Tabela 69 – Caracterização da questão 11	p. 197
Tabela 70 – Respostas à questão 11	p. 197
Tabela 71 – Caracterização da questão 2	p. 200
Tabela 72 – Respostas à questão 2	p. 200
Tabela 73 – Caracterização da questão 6	p. 201
Tabela 74 – Respostas à questão 6	p. 202
Tabela 75 – Caracterização da questão 8a	p. 203
Tabela 76 – Respostas à questão 8a	p. 203
Tabela 77 – Caracterização da questão 12d	p. 204
Tabela 78 – Respostas à questão 12d	p. 204
Tabela 79 – Caracterização da questão 24a	p. 205
Tabela 80 – Respostas à questão 24a	p. 206
Tabela 81 – Dados dos professores entrevistados	p. 207
Tabela 82 – Questões selecionadas das entrevistas	p. 208 – 209
Tabela 83 - Avaliação das respostas dos professores entrevistados a questões de Números e Operações	p. 213
Tabela 84 – Avaliação das respostas dos professores a questões de Geometria e Medida	p. 214
Tabela 85 – Dados da entrevista da Maria	p. 225
Tabela 86 – Dados da entrevista do Pedro	p. 231 – 232

Índice de Anexos

Anexo 1 – Caracterização das questões de escolha múltipla construídas pelo LMT e estudadas no presente trabalho, por categorias do MKT. _____	p. 269
Anexo 2 – Conteúdos matemáticos de “Números e Operações” e “Geometria e Medida” avaliados nas questões do LMT presentes no questionário deste trabalho, organizados por anos de escolaridade, de acordo com o currículo português. _____	p. 270-281
Anexo 3 – Carta aos professores participantes do estudo. _____	p. 282
Anexo 4 – Guião da entrevista semi-estruturada realizada aos professores entrevistados. _____	p. 283
Anexo 5 – Os parâmetros “slope” e “grau de dificuldade”, obtidos em estudos estatísticos nos EUA e nesta investigação com professores portugueses. _____	p. 284-285

Capítulo 1 – Introdução

Que nada nos defina.

Que nada nos sujeite.

Que a liberdade seja a nossa própria substância.

Simone Beauvoir

Neste capítulo, irá realizar-se uma introdução ao assunto em estudo neste trabalho. Para isso, primeiro irá apresentar-se de que modo, em que contextos e porque motivos se chegou ao matéria a que se propôs estudar. Numa segunda secção, irá discutir-se a relevância da temática, segundo várias perspetivas e visões e, por último, descrever-se-á de que forma o presente trabalho está organizado.

1.1. Contexto

A formação em matemática, seguida da de educação matemática a alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, contrastante com o trabalho na escola dos Gambozinhos, no Porto, escola que abrange do pré-escolar ao 2.º ciclo, conduziu a estados de inquietude, inesperados, de como é difícil ensinar crianças a aprender matemática. Estes estados conduziram a uma procura de respostas, exigidas por um local de trabalho onde se pensa verdadeiramente a educação, em que se pretende, principalmente, “ajudar gente a crescer”, a crescer de modo que se formem adultos que pensem o mundo de uma maneira ampla e diversa, e que “tenham dele o conhecimento como um espaço de todos, (...), o conhecimento do valor da sua diversidade, heterogeneidade e potencialidade de felicidade para todos”, tal como refere Suzana Ralha (2015), da direção da Escola.

Nesta perspetiva, tendo-se um trabalho exigente ao nível da docência, encontrou-se no Doutoramento em Estudos da Criança, no âmbito da especialidade de Matemática Elementar, uma forma de alargar os conhecimentos no que concerne à matemática, à educação, mas, sobretudo, à educação matemática.

Ao longo destes anos de docência de matemática elementar, tem-se constatado a dificuldade em ensinar crianças a aprender matemática e, principalmente, em identificar as suas

dificuldades, o que pode estar na origem da ansiedade (de que tanto se fala em Portugal) associada à matemática.

Contrastando com esta perspectiva, continua-se a constatar a opinião unânime da facilidade dos conteúdos subjacentes à matemática elementar e da ausência de dificuldades no seu ensino. Num estudo de Gomes (2003), (futuros) professores do 1.º ciclo “denotam a ideia de que a matemática elementar é simples [e] assumem que o seu ensino é também uma tarefa fácil” (p. 294).

No entanto, segundo Ma (1999), a matemática elementar pode ser vista como *básica* – uma coleção de procedimentos – ou ainda como *fundamental*. Segunda a autora, a matemática elementar caracteriza-se como *fundamental*, descrevendo-a como “(...) um campo intelectualmente exigente, desafiante e excitante – uma base sobre a qual muito se pode construir” (Ma, 1999, p. 202).

Nesta perspectiva, os investigadores, ao longo dos anos, têm vindo a estudar a matemática dos primeiros anos e a descobrir que conhecimento precisa um professor de modo a visar “aprendizagens matemáticas relevantes e sustentáveis para todos os alunos”, como se refere no documento Aprendizagens Essenciais (ME, 2018, p.1).

Este trabalho segue, assim, esta linha de investigação, iniciada por Shulman e pelos seus colegas (1986), acerca do estudo do conhecimento matemático do professor, neste caso, de professores de 1.º e 2.º ciclos, em Portugal.

1.2. Problema de Investigação

Ao longo dos anos de docência de Matemática nos primeiros anos, tem-se deparado com o desafio que caracteriza o ato de ensinar crianças a aprender matemática e, principalmente, em identificar a origem das suas dificuldades na aprendizagem desta disciplina.

Por outro lado, também se deteta que existe uma opinião corrente, segundo a qual há uma facilidade dos conteúdos subjacentes à matemática elementar e uma ausência de dificuldades no seu ensino. Porque se pensa que este (dito) facilitismo que se patenteia no senso comum não é real, assim se gerou uma questão a investigar.

Alguns investigadores têm vindo a estudar este antagonismo entre a (dita) facilidade dos conceitos matemáticos dos primeiros anos e a dificuldade e complexidade que está inerente a

ensinar a aprender esta disciplina. Nesta linha de ideias, Aharoni (2012) afirma que a primeira matemática não é nada fácil, que pode não ser complexa, mas é *profunda*, pode “não ser sofisticada, mas é sábia” (Aharoni, 2012, p.34). Ma (1999), na mesma perspetiva, considera que a matemática elementar pode ser vista como básica – uma coleção de procedimentos – ou como fundamental. Segundo a autora, a matemática elementar caracteriza-se como fundamental, pois “constitui os alicerces da futura aprendizagem matemática e contém as ferramentas e os rudimentos de muitos conceitos importantes em ramos mais avançados da disciplina” (Gomes, 2003, p. 233).

A matemática elementar caracteriza-se por ser a base do edifício na aprendizagem da matemática dos alunos. A aprendizagem da matemática elementar está dividida em camadas, aparentemente em pouquíssimas camadas, estando algumas delas escondidas e outras de difícil caracterização (Aharoni, 2012). Assim, exige-se do professor uma observação exaustiva e atenta, de modo a aferir diagnósticos rigorosos que lhe permitam realizar o seu papel de orientador do aluno “para as noções corretas, na ordem certa” (Aharoni, 2012, p.22) e de modo a criar oportunidades às crianças para que experimentem “as bases concretas da abstração por si próprias” (Aharoni, 2012, p. 92), possibilitando-lhes a formulação de princípios.

Controvérsias acerca do ensino de matemática nos primeiros anos e sobre o conhecimento matemático necessário a um professor para ensinar as crianças a aprender matemática conduziram este estudo.

Desde 1980 que o *Psychology of Mathematics Education* (PME) desenvolveu novas perspetivas acerca do conhecimento dos professores, em que se destacaram os trabalhos de Elbaz (1983), Schön (1983) e Shulman (1986), que determinaram a direção dos estudos sobre os professores.

Shulman (1986) caracterizou-se como um dos principais (se não o principal) investigador desta temática. Shulman e os seus colegas revolucionaram as investigações sobre o conhecimento do professor, na medida em que se focaram e destacaram o estudo da perceção do conteúdo por parte do professor como uma forma especial de conhecimento que, segundo estes autores, determinaria a sua prática de ensino.

Baseando-se no trabalho deste investigador, Deborah Ball definiu-se, mais tarde, como uma das principais investigadoras na área do conhecimento do professor. Em 1990, no seu Doutoramento, através do estudo *Formação de Professores e Aprender a Ensinar* (projeto TELT

(*Teacher Education and Learning to Teach*) da Universidade do Estado de Michigan, desenvolveu instrumentos matemáticos “para testar o conhecimento matemático dos professores no contexto de práticas comuns que os professores adotam no processo de ensino” (Ma, 1999, p. 25).

Ao longo dos anos, Ball e outros investigadores, como Heather Hill e Hyman Bass, questionaram-se acerca daquilo que, na prática, “os professores precisam de saber sobre matemática para terem sucesso com os seus alunos” (Ball, Hill & Bass, 2005, p. 17). Nesta linha de ideias, Ball, Hill e Bass (2005) definiram *Conhecimento do Conteúdo para Ensinar Matemática*, que subdividiram em conhecimento *comum* da matemática, o que qualquer adulto possui, e conhecimento da matemática que se caracteriza como *especializado*, sendo este último tipo de conhecimento que os referidos investigadores consideram ser aquele que é específico para se ensinar esta disciplina, e que apenas os professores precisam de ter.

Este grupo de investigadores da Universidade de Michigan tem desenvolvido dois projetos intitulados de *The Mathematics Teaching and Learning to Teach Project*, liderado por Deborah Loewenberg Ball e Hyman Bass, e *Learning Mathematics for Teaching Project*, que tinha como principais investigadores Ball, Bass e Heather C. Hill. Com estes projetos têm-se expandido muitas estratégias para se aprofundar o construto do *Conhecimento Matemático para Ensinar* e, desta forma, construiu-se a *Teoria do Conhecimento Matemático para Ensinar*, que se caracteriza como o foco deste trabalho. Esta teoria foi concebida através do estudo da prática do ensino da disciplina em estudo, a partir da perspetiva matemática, tal como se irá realizar neste trabalho.

Tendo por base as suas investigações, para estudarem o Conhecimento Matemático para Ensinar, o grupo de Michigan construiu questões de escolha múltipla que aplicaram a professores americanos. Estas questões, ao contrário do que tinha vindo a ser desenvolvido até então, não avaliam apenas o conhecimento de conteúdo matemático (puro), mas sim as diferentes categorias que permitem caracterizar o “Conhecimento Matemático para Ensinar”.

Posteriormente à construção destas questões, estes investigadores realizaram uma análise psicométrica que demonstrou que as pontuações das questões de escolha múltipla, construídas por estes investigadores, que medem o “Conhecimento necessário para se Ensinar Matemática”- Mathematics Knowledge for Teaching (MKT), caracterizam-se como consistentes, de acordo com o conhecimento do professor (Hill et al., 2004). Assim, estas questões

permitiram, por um lado, estudar e categorizar o MKT e, por outro lado, estender estes instrumentos de medida a outros estudos e até contextos.

O presente estudo não foi desenvolvido, somente, para avaliar o conhecimento matemático dos professores, mas também se caracterizou por verificar a validade de se adaptar os instrumentos desenvolvidos nos Estados Unidos para avaliar este tipo de conhecimento na realidade portuguesa.

O trabalho caracteriza-se como uma validação empírica da transferência do construto “Conhecimento Matemático para Ensinar” matemática nos primeiros anos desenvolvido nos EUA a Portugal. Destina-se a examinar de que forma um estudo (neste caso sobre o “Conhecimento Matemático para Ensinar”), com um número possível de intervenientes, pode informar acerca da adaptação das medidas dos EUA a Portugal, e de que forma esse mesmo estudo pode medir esse tipo de conhecimento de professores portugueses.

Nesta linha de ideias, as medidas ou instrumentos, desenvolvidos pelo *Learning Mathematics for Teaching Project* (LMT) da Universidade de Michigan, têm sido adaptados e, posteriormente, usados em diferentes países, fora dos EUA.

A primeira adaptação destas questões de escolha múltipla foi de Delaney (2008), que adaptou estas medidas ao contexto irlandês. Seguindo os mesmos passos de Delaney (2008), outros investigadores têm realizado o processo, que se caracteriza como complexo, de adaptação das questões de escolha múltipla construídas pelo LMT para medirem o MKT dos professores de outros países, entre os quais: Cole (2009), que procedeu da mesma forma no Gana, Know (2009) na Coreia do Sul, Ng (2011) na Indonésia, e Mosvold et al. (2009) na Noruega.

Nesta perspetiva, as questões desenvolvidas e aplicadas a professores dos EUA, tendo como base a *Teoria do Conhecimento Matemático para ensinar*, podem ser estendidas a outros estudos, tendo já sido usadas por outros investigadores, noutros países (como, por exemplo, Delaney (2008), Cole (2009), Know (2009), Ng (2011) ou Mosvold et al. (2009)), pretende-se usar, similarmente, neste trabalho, a *Teoria do Conhecimento Matemático para Ensinar* com o propósito de se estudar o conhecimento matemático dos professores dos 1º e 2º ciclos em Portugal.

Deste modo, similarmente a estes países, pretende-se usar, similarmente, neste trabalho, a *Teoria do Conhecimento Matemático para ensinar* para se estudar o conhecimento matemático de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal.

Assim, tendo por base a definição de “Conhecimento Matemático para Ensinar” do LMT, da Universidade de Michigan, neste trabalho, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

- (1) Em que medida e de que modo se podem adaptar as medidas construídas nos EUA, de forma a poderem ser usadas para medirem o conhecimento matemático para se ensinar em Portugal?;
- (2) Qual o conhecimento matemático para se ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal?.

Para isso, neste estudo, ficará patente o trabalho de tradução, adaptação e validação dos instrumentos desenvolvidos pelo grupo de investigadores de Michigan, e a sua aplicação a um grupo de 61 professores portugueses, com o objetivo de se estudar o MKT destes docentes.

1.3. Relevância

A aprendizagem dos alunos caracteriza-se como o foco do processo de ensino.

Ao longo dos anos, têm sido realizados vários estudos e investigações que patenteiam a importância: do professor, do seu papel e do seu conhecimento na aprendizagem dos alunos. McKinsey e os seus colegas (2007) referem que, dos estudos já realizados, se conclui que a qualidade dos professores é o fator mais determinante na aprendizagem dos alunos.

Ensinar é aprender na e da prática o melhor caminho que suporte a aprendizagem de cada criança (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Ensinar é principalmente uma relação mútua entre o decidir e o fazer, que emerge da complexa interação entre o conhecimento, as crenças e os objetivos dos professores (Franke, Kazemi & Battey, 2007).

Ensinar matemática trata-se de criar um ambiente de aprendizagem que permita a emergência da individualidade de cada aluno e de cada um deles como um elemento de um grupo (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Ensinar é perceber os alunos, quem são na sua individualidade e no coletivo (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). Ensinar é ter a capacidade de diagnosticar e interpretar o que os alunos fazem e sabem, detalhando a trajetória de aprendizagem exata que cada aluno deve e precisa de realizar.

Numa investigação realizada por Sanders e Rivers (1996, citado em McKinsey et al., 2007), há dez anos atrás, com dados do Tennessee, patenteou-se que se dois alunos de oito anos aprendessem com dois professores com níveis de desempenho diferentes (um deles com alto desempenho e outro com baixo), a prestação destes alunos divergeria em mais de 50%, durante três anos.

Noutro estudo, desenvolvido em Dallas, verificou-se uma diferença de 49% no desempenho de alunos que foram ensinados três anos seguidos por bons professores e por docentes ineficazes (McKinsey et al., 2007).

Em Boston, quando se colocaram alunos a aprender matemática com professores de alto desempenho, observaram-se ganhos substanciais na aprendizagem destes discentes (Haycock, 2006, citado por McKinsey et al., 2007). Por outro lado, Haycock (2006) constatou que os alunos que trabalharam matemática com os piores professores, tiveram um retrocesso na aprendizagem da matemática.

Relativamente à aprendizagem dos primeiros anos, McKinsey e os seus colegas (2007) destacam que todas as evidências sugerem que, mesmo em bons sistemas de ensino, os alunos que não progredem rapidamente nos primeiros anos de escola, porque não estão expostos a professores com conhecimentos suficientes, irão ter muitas dificuldades em recuperar as aprendizagens não compreendidas e assimiladas.

Numa publicação da European Commission (2018), destaca-se mesmo que vários investigadores como Coleman e os seus colegas (1966), Hanushek (1992), Nyem Konstantopoulis e Hedges (2004), Motoko, Letendre e Scribner (2007) e Sanders e Rivers (1996) consideram que “a qualidade do professor caracteriza-se como o fator escolar que mais afeta os resultados dos alunos” (European Commission, 2018, p. 9).

A qualidade de um professor é influenciada pelo seu conhecimento.

O conhecimento do professor é considerado, inquestionavelmente, fulcral no processo de ensino e aprendizagem, na medida que determina o que se faz na sala de aula e a forma e o quê que o aluno aprende. Por outro lado, estudar o conhecimento do professor tem-se revelado uma tarefa difícil e complexa pois, tal como refere Gomes (2003, p. 61), “esse conhecimento apresenta-se numa forma heterogénea, formado por diferentes componentes interligadas e difíceis de isolar”.

Assim, ressalva-se a importância de estudos, como estes, como estudos o conhecimento do professor, mais especificamente no presente trabalho, o conhecimento matemático do professor.

1.4. Organização da tese

O presente estudo desenrolou-se, como se previa, de modo não linear, através de várias clarificações dos objetivos e métodos de investigação, acabando por se adotar a estrutura que se reflete nesta apresentação final, que se apresenta de seguida:

- O Capítulo 2 apresentará o estado da arte sobre o conhecimento do professor, descrevendo teorias e estudos de investigadores internacionais e nacionais sobre esta temática e, mais especificamente, acerca do conhecimento matemático do professor. Neste Capítulo irá explanar-se também a Teoria do Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT) desenvolvida por Ball e pelos seus colegas, procurando-se perscrutar em que consistem os domínios que caracterizam este tipo de conhecimento e como se podem medir. Por último, irá patentear-se de que forma outros países/ contextos adaptaram e aplicaram esta teoria.

- No Capítulo 3, serão discutidas as opções metodológicas que foram realizadas e também serão referidos os instrumentos usados na recolha de dados, tendo por base quer referências teóricas quer as questões e características específicas deste estudo.

- Os Capítulos 4 e 5 descrevem o “trabalho de campo” propriamente dito, sendo que o capítulo 4 se centra na validação do instrumento em estudo neste trabalho e o 5 na análise do desempenho de professores portugueses neste teste de medição do MKT.

- O Capítulo 6 tentará fazer uma síntese de todo o trabalho, procurando retirar as principais conclusões e implicações na formação de futuros professores e em futuras investigações.

Capítulo 2 – Estado da arte: conhecimento do professor

Nothing is absolute. Everything changes.

Frida Kahlo

Neste capítulo, irá apresentar-se uma revisão exaustiva dos vários estudos e teorias que têm por foco o conhecimento do professor e mais particularmente o conhecimento matemático do professor.

Este capítulo está organizado nas seguintes secções:

Na primeira secção, apresentam-se estudos sobre o conhecimento do professor, as suas características e os seus domínios.

Na segunda secção, descevem-se diferentes teorias e modelos acerca do conhecimento matemático do professor e estudos realizados em Portugal, tendo por base estes modelos.

Na terceira secção, apresenta-se a Teoria do Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT), construída pelo grupo de investigação Learning Mathematics for Teaching (LMT), em que se explana os domínios do MKT definidos por estes autores e de que forma mediram este conhecimento de professores dos EUA.

Por último, numa quarta secção, exploram-se estudos realizados noutros países, em que se traduziu, adaptou e validou as medidas construídas pelo grupo de Michigan, de forma a medir o MKT de professores desses contextos.

2.1. Conhecimento do professor

Um ensino de alta qualidade (high-quality) tem algumas características e várias componentes, entre as quais, se inclui o conhecimento do professor (exemplo Davis & Simmt, 2006; Tchoshanov, 2011). O conhecimento do professor é considerado, inquestionavelmente, fulcral no processo de ensino e aprendizagem, na medida em que determinar o que se faz em sala de aula, a forma e o que o aluno aprende. Por outro lado, estudar o conhecimento do

professor tem-se revelado uma tarefa difícil e complexa. Assim, ao longo dos anos, vários investigadores têm realizado diferentes estudos sobre o conhecimento do professor e alguns identificam ainda diferentes componentes deste conhecimento.

De acordo com Elmore (2002), para ensinar matemática, os professores precisam de uma extensa base de conhecimento, habilidades técnicas de ensino e posturas epistemológicas, que devem ser metas de preparação dos professores e dos programas de desenvolvimento profissional.

Sowder (2007) considera que um professor de matemática precisa de ter:

- (a) uma visão compartilhada para o ensino e a aprendizagem da Matemática;
- (b) uma boa compreensão da matemática para o nível que ensina;
- (c) compreensão de como os alunos aprendem matemática;
- (d) conhecimento pedagógico profundo do conteúdo;
- (e) uma compreensão do papel da equidade na matemática escolar;
- (f) uma capacidade de se autoavaliar como professor de matemática.

Ao longo dos anos, um número considerável de teorias sobre o conhecimento do professor tem emergido e os investigadores têm desenvolvido e experimentado o uso de medidas para entender mais sobre as diferentes componentes do conhecimento do professor. Por exemplo Hill, Sleep, Lewis & Ball (2007) referem que “Nas últimas duas décadas, o conhecimento matemático dos professores tem sido um objeto de preocupação e atenção” (p. 11).

Há cerca de 45 anos, elaboraram-se dois relatórios – *Equality of Educational Opportunity Survey* (Coleman et al., 1966) e *Inequality project* (Jencks, et al., 1972) – que destacaram que a aprendizagem dos alunos depende essencialmente dos professores. Nesta linha de ideias, vários investigadores debruçaram os seus estudos no modo como os professores e o seu ensino podem fazer a diferença na aprendizagem dos alunos. Estes estudos, denominados geralmente como *educational production function studies*, investigaram a relação entre o conhecimento do professor e a aprendizagem dos alunos.

Os estudos acerca do professor têm vindo a alterar-se. As primeiras investigações diziam respeito à avaliação da eficácia do ensino, relacionando as características pessoais dos professores e os resultados dos exames realizados pelos seus alunos.

Nas últimas décadas, as investigações têm vindo a aumentar o interesse no conhecimento do professor, nas atitudes e nas crenças dos professores (Ernest, 1989).

Em 1980, tal como referem Ponte e Chapman (2006), especialmente com a criação da organização PME (*Psychology of Mathematics Education*), foram desenvolvidas novas perspetivas acerca do conhecimento dos professores, em que se destacaram os trabalhos de Elbaz (1983), Shcön (1983) e Shulman (1986), que determinaram a direção dos estudos sobre os professores e que serão explanados neste subcapítulo.

Estes investigadores têm-se preocupado em estudar o conhecimento dos professores sobre a matéria que ensinam, instaurando, assim, um novo paradigma, no que diz respeito às investigações sobre o conhecimento do professor e definem um novo caminho nas investigações sobre o conhecimento do professor para a matéria que ensinam.

O conhecimento do professor segundo Elbaz

Freema Elbaz caracterizou-se como uma das principais investigadoras no campo do conhecimento do professor. Elbaz (1983) focou-se em identificar o que é que professores sabem que outros não sabem e definiu o conhecimento profissional dos professores como sendo um saber essencialmente prático. Isto é, um saber “datado e contextualizado, pessoalmente convincente e orientado para a ação” (Feiman-Nemser e Floden, 1986, citado em Ponte, 1992, p. 192).

No seu estudo, Elbaz (1983) estudou exaustivamente as práticas de uma professora de Inglês, partindo de uma definição de conhecimento prático:

“Ao desenvolver [o seu] trabalho, o professor exibe um vasto conhecimento que cresce com o acumular de experiência. Este conhecimento engloba experiência, em primeira mão, dos estilos de aprendizagem dos alunos, interesses, necessidades, potencialidades e dificuldades, e um repertório de técnicas de instrução e de gestão da sala de aula. O professor conhece a estrutura social da escola e o que é necessário, ao professor e ao aluno, para aí sobreviver e ter sucesso; conhece a comunidade de que a escola faz parte, e tem uma sensibilidade para o que aí será ou não aceitável. Este conhecimento experiencial é informado pelo conhecimento teórico da disciplina, e de áreas como o desenvolvimento da criança, teoria da aprendizagem ou teorias sociais. Todos estes tipos de conhecimento, enquanto integrados pelo professor individual em termos de valores pessoais

e crenças e enquanto orientados para a sua situação prática, serão aqui referidos como conhecimento prático” (Elbaz, 1983, p.5).

Assim, constatou que o conhecimento profissional dos professores, que designou como *conhecimento prático*, resulta de saberes teóricos e experienciais, “integrados pelo professor individual em termos de valores e crenças pessoais e orientados para a sua situação prática” (Elbaz, 1983, p. 5).

Esta investigadora ainda definiu “orientações” do conhecimento prático para esclarecer melhor de que modo o conhecimento é assimilado pelos professores e posto em ação. Elbaz (1983) identificou assim cinco orientações para explicar que o conhecimento pode ser visto como *situado, pessoal, social, experiencial e teórico*.

Além disso, Elbaz (1983) estudou a organização do conhecimento prático e identificou três níveis distintos:

- . *regras da prática;*
- . *princípios da prática*
- . *imagens.*

As primeiras, “regras da prática”, segundo Ponte (1992), referem-se ao conhecimento pedagógico e podem ser aplicadas em situações específicas ou mais gerais, mas referem-se sempre a aspectos concretos (Ponte, 1994a).

Os “princípios da prática”, para Elbaz (1983), caracterizam-se como menos explícitos do que as “regras da prática” e indicam propósitos. Estes princípios expressam mais a dimensão pessoal do conhecimento profissional dos professores. Segundo Ponte (1994a), os princípios podem estar na teoria, podem desenvolver-se a partir da experiência, ou ambos. Embora não garantam que perante a mesma situação a ação seja a mesma, permitem dizer que a prática é baseada em princípios (Ponte, 1994a). Um exemplo reportado por Elbaz (1983) é fazer com que os alunos vão felizes para as aulas.

O último nível, definido por Elbaz (1983), do conhecimento profissional do professor – “imagens” – dirige, segundo a investigadora, a tomada de decisões por parte dos professores. As imagens de como o ensino deve ser são o nível menos explícito e mais geral do conhecimento prático dos professores, segundo a investigadora, que as descreve como:

“os sentimentos, valores, necessidades e crenças do professor combinam-se para a criação de imagens de como o ensino deve ser, e misturam a experiência, conhecimento teórico e cultura da escola (*school folklore*) para dar substância a essas imagens” (Elbaz, 1983, p. 134).

Segundo Ponte (1994a), as “imagens” caracterizam-se como enunciados amplos e metafóricos que expressam de forma clara algum propósito e resultam da combinação de sentimentos, valores, necessidades e crenças. As “imagens” captam alguns aspectos essenciais da percepção de si mesmos, do seu ensino, de situações de sala de aula e dos assuntos que os professores ensinam.

Elbaz (1983) sintetizou, assim, as suas conclusões sobre o conhecimento prático, com a descrição de um estudo de caso de uma professora:

“O conhecimento prático da Sarah é estruturado em torno de um pequeno número de imagens que refletem todo o seu conhecimento e servem para reunir os princípios e regras que esta professora usa para levar o seu conhecimento às suas práticas” (p. 144-145).

O conhecimento do professor segundo Schön

Donald Schön (1983, 1987, 1991) caracteriza-se como outro investigador que determinou o caminho dos estudos acerca do conhecimento do professor.

Schön (1983) chamou a atenção para o estudo do conhecimento profissional que denominou de *conhecimento-na-ação*. O *conhecimento-na-ação* definido por Schön (1983) é “a componente inteligente que orienta toda a atividade humana, manifestando-se no saber-fazer” (Ponte, 1994b). Este tipo de conhecimento apresenta uma dimensão intuitiva, que se desenvolve através da prática e de várias formas de reflexão sobre a prática, não sendo por isso muitas vezes de fácil explicitação, mas não sendo por isso menos determinante na prática profissional.

Schön (1983) distingue diversas formas de reflexão, referindo-se em especial a *reflexão na ação* e a *reflexão sobre a ação*.

Schön (1983) caracterizou a *reflexão na ação* de índole intuitiva e tácita, marcada pela espontaneidade que é aprendida através da ação e da reflexão em situações da ação, isto é,

“quando feita no decurso da própria ação, sem a interromper, mas com breves instantes de distanciamento e de possível reformulação dessa ação” (Serrazina, 2014, p. 1054).

Por outro lado, a *reflexão sobre a ação* desenrola-se posteriormente à própria ação, desenvolvendo-se de forma mais formal, com apoio da linguagem e por isso com mais rigor e critério. Este tipo de reflexão, segundo Ponte (1994b), “tem lugar, muitas vezes, a partir de discussões e trocas de experiências entre professores preocupados com problemas comuns” (p.10).

O conhecimento do professor segundo Shulman

Lee S. Shulman é psicólogo e filósofo e foi professor doutorado de Psicologia Educacional e Educação Médica na Universidade de Michigan (no período de 1963 a 1982) e de Psicologia na Universidade de Stanford. Este autor é considerado um dos investigadores mais influentes no campo da formação de professores e, segundo Gaia, Cesário e Tancredi (2007) as suas decisões pessoais e profissionais “contribuíram para se tornar, na atualidade, um dos célebres teóricos da área, valorizando [nas] suas pesquisas a figura do professor como aquele que detém o saber de referência da profissão docente” (p.144).

Shulman (1986) revolucionou as investigações sobre o conhecimento do professor, na medida em que se focaram e destacaram o estudo da perceção do conteúdo por parte do professor como uma forma especial de conhecimento que, segundo estes autores, determinaria a sua prática de ensino.

Shulman (1986) referiu que na maioria dos estudos sobre o ensino, e como consequência na maioria dos programas, a avaliação e a certificação dos professores se caracterizavam por não ter em conta a compreensão do conteúdo a ensinar.

Ao destaque e atenção prestada ao conteúdo, Shulman (1986) designou como “missing paradigm”, uma vez que considerou o conteúdo como um “ponto cego” (*blind spot*), ignorado pelos investigadores até então.

Shulman (1987) definiu sete tipologias do conhecimento, de seguida explicitadas, para caracterizar o conhecimento profissional para o ensino, que consideraram ser necessário para que um professor possa ensinar:

“. Conhecimento do Conteúdo;

- . Conhecimento Pedagógico Geral, com referência especial aos princípios e estratégias amplos de gestão e organização da sala de aula que parecem transcender o assunto;
- . Conhecimento do Currículo, com compreensão particular dos materiais e programas que servem como “ferramentas do ofício” para os professores;
- . Conhecimento dos alunos e suas características;
- . Conhecimento de contextos educacionais, variando de trabalhos de grupo ou sala de aula, governo e financiamento de distritos escolares, até o caráter de comunidades e culturas;
- . Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais e seus fundamentos filosóficos e históricos” (Shulman, 1987, p. 8)

Shulman (1987) classifica as categorias: conhecimento pedagógico geral; conhecimento dos alunos e das suas características; conhecimento do contexto educativo; e conhecimento das metas, finalidades e valores da educação, numa dimensão de aspectos gerais do conhecimento do professor, nas quais não focou o seu trabalho.

Nas restantes três categorias, Shulman discute as perspetivas sobre o conhecimento do professor, propondo uma descrição das dimensões que devem constituir o conhecimento de conteúdo do professor. Estas três categorias juntas constituem aquilo que Shulman refere como o paradigma em falta na investigação em ensino, que serão exploradas com detalhe de seguida.

- (a) O *Conhecimento do Currículo* – “*Curricular Knowledge*” representa, segundo Shulman (1986), todos os programas, desenhados para ensinar determinados tópicos dos diferentes níveis, os materiais necessários ao seu ensino e um conjunto de características que servem como indicações e contraindicações no uso do currículo ou de materiais do programa em situações particulares.

Shulman subdividiu o Conhecimento do Currículo em *Conhecimento Horizontal do Currículo* e *Conhecimento Vertical do Currículo*. O primeiro subdomínio descreve-o como o conhecimento das diferentes áreas trabalhadas ao longo de um ano e o *Conhecimento Vertical do Currículo* caracteriza-o pela familiaridade com os tópicos e os problemas (de uma área) que decorrem ao longo dos anos.

- (b) *Conhecimento da Matéria* – “*Subject-Matter Content Knowledge*” envolve “a quantidade e a organização do conhecimento presente na mente dos professores”

(Shulman, 1986, p. 9). Este tipo de conhecimento inclui o conhecimento do objeto e organização da sua estrutura (Grossman, Wilson & Shulman, 1989; Wilson, Shulman & Richert, 1987, citado em Ball, Thames & Phelps, 2008). Inclui os factos e os conceitos do domínio, mas também as razões pelas quais os factos e os conceitos são verdadeiros e de que forma o conhecimento é gerado e estruturado na disciplina (Shulman, 1986; Wilson et al, 1987; Hill, Ball & Schilling, 2004).

Shulman (1986) afirmou que conhecer o assunto que se vai ensinar requer mais do que conhecer os seus factos e conceitos. Segundo este investigador, os professores precisam não só de saber que o que ensinam se define de uma forma, mas também a razão pela qual é desse modo, isto é, tal como referiu Ma (1999), um professor deve ter como atitude geral não se contentar em saber o “como”, mas também o “porquê”.

Ainda sobre o “conhecimento do conteúdo”, Grossman, Wilson e Shulman (2005) ressaltam a sua importância, na medida em que os estudos realizados sobre esta categoria do conhecimento do professor e analisadas por estes autores permitiram-lhes concluir que:

“os professores que têm um entendimento mais amplo do assunto que ensinam, que compreendem a relação de tópicos ou habilidades individuais com tópicos mais gerais, também podem ser mais eficazes no ensino das suas disciplinas” (p. 10).

(c) O *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)* – “*Pedagogical Content Knowledge*” foi definido por Shulman (1986) como os “modos de representar e formular a matéria, tornando-a compreensível para os outros” (p. 9) e, em 2005, o autor também caracterizou o PCK como “esa especial amalgama entre matéria y pedagogia que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional” (p.10).

Shulman (1986, 1987, 1989, 2005) demonstrou um interesse particular pela categoria: *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)*, uma vez que considera que o PCK “vai além do conhecimento do assunto em si, até à dimensão do conhecimento do assunto para o ensino” (Shulman, 1986, p. 9).

Segundo este autor, este tipo de conhecimento compreende “as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais importantes, as ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, numa palavra, a forma de representar e formular a matéria para a tornar compreensível” (Shulman, 1986, p. 5).

A expressão *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* foi pela primeira vez utilizada numa conferência na Universidade do Texas em 1983, cujo título era: “O paradigma perdido na investigação sobre o ensino”. Este paradigma definia-o como “perdido” pela escassa atenção que lhe era dado na formação dos professores.

Esta categoria do conhecimento caracterizou-se como o foco de estudo dos investigadores, dos professores e educadores, e é a mais enfatizada por Shulman (1986):

“as formas mais úteis de representação dessas ideias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações mais poderosas - em uma palavra, as maneiras mais úteis de representar e formular o assunto que o torna compreensível para os outros ... O conhecimento pedagógico também inclui a compreensão do que é mais fácil ou difícil o aluno aprender: as concepções e preconceitos que estudantes de diferentes idades e origens trazem consigo para o aluno dos tópicos e lições mais frequentemente ensinados (p. 9)”.

Shulman (1987) destacou a relevância do PCK como a categoria do conhecimento que distingue o conhecimento de um especialista numa matéria (por exemplo, matemática) de um professor, noção esta já reconhecida por Dewey em 1902:

“Todo o estudo ou assunto tem, portanto, dois aspetos: um para o cientista, como cientista; outro para o professor como professor. Esses dois aspetos não são de forma alguma opostos ou conflitantes. Mas também não são completamente idênticos. Para o cientista, o assunto representa simplesmente um dado corpo de verdade a ser empregado para localizar novos problemas, instituir novas pesquisas e conduzi-las a um resultado verificado... O problema do professor é outro. Como professor, não está preocupado em adicionar novos factos à ciência que ensina; na proposição de novas hipóteses ou na verificação delas. Está preocupado com o assunto da ciência como representando um determinado estágio ou fases do desenvolvimento da experiência” (Dewey, 1902, p. 29-30).

Em paralelo com as três categorias de conhecimento dos professores referidas, Shulman considera três formas de conhecimento segundo as quais cada uma dessas três categorias pode estar organizada:

- (a) conhecimento proposicional;
- (b) conhecimento de casos;
- (c) conhecimento estratégico.

Shulman (1986) destacou o estudo do *conhecimento proposicional*, que inclui princípios. No entanto, também explanou o *conhecimento de casos*, que se trata de um “conhecimento detalhado de situações concretas” (Ponte, 1994a, p.11), e o *conhecimento estratégico*, que permite a tomada de decisões.

O conhecimento do professor segundo Grossman

Ao longo dos anos, vários autores acrescentaram e especificaram as componentes do conhecimento profissional definidas por Shulman (1986), focando-se, principalmente, no *conhecimento do conteúdo* e no *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Grossman, 1990; Sherin et al., 1999; Shulman, 1987).

Grossman (1990), que foi orientada por Shulman no seu Doutorado, reorganizou a categorização de Shulman e dos seus colegas em quatro categorias: *conhecimento do objeto*, *conhecimento pedagógico geral*, *conhecimento pedagógico do conteúdo* e *conhecimento do contexto*.

Na Figura 1, apresentada de seguida, observa-se o Modelo de Conhecimento de Professores proposto por Grossman (1990). Neste modelo, Grossman (1990), utiliza o termo *Subject Matter Knowledge* (Conhecimento do Tema), no lugar do *Subject-Matter Content Knowledge* (Conhecimento da Matéria), definido por Shulman, pois considera que o conhecimento do professor deve conter a compreensão do porquê de um determinado tópico ser ensinado numa disciplina a não apenas o conhecimento desse tópico.

No modelo da investigadora fica clara a importância dada ao PCK, na medida que o considera central e constituído pelo conhecimento da compreensão dos alunos; pelo conhecimento do currículo e pelo conhecimento das estratégias de ensino.

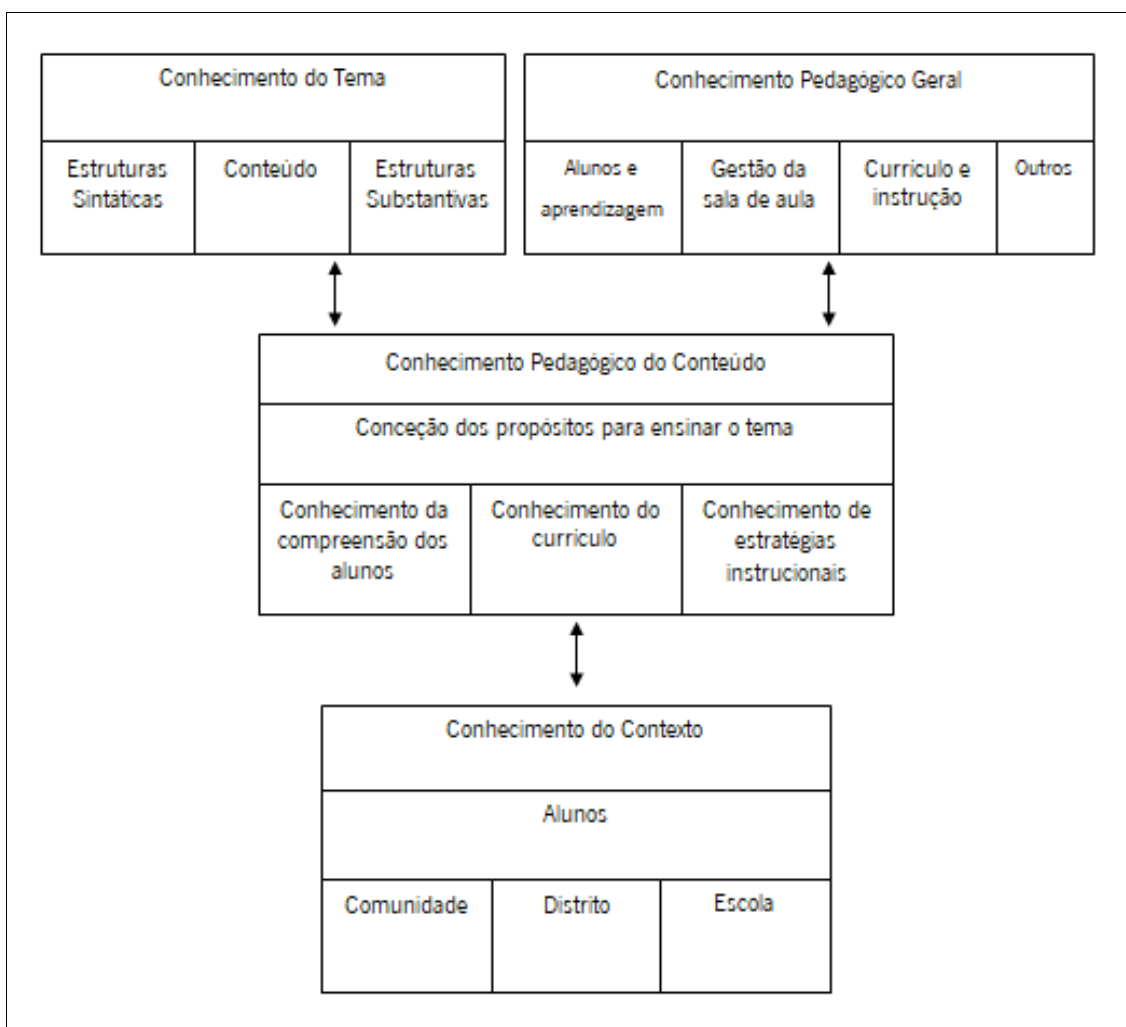


Figura 1 – Modelo do conhecimento de professores (Grossman, 1990, p.5).

Outros estudos sobre conhecimento do professor

Baseados nos trabalhos de Shcön (1983), de Elbaz (1983), de Shulman (1986) e de outros investigadores surgiram estudos que deram origem a mais especificidades do conhecimento do professor. Exemplo disso é a noção de *Conhecimento Profissional* de Ponte (1994a) que é determinada através de uma investigação, que fez parte do projeto “O Saber dos Professores”, sobre o conhecimento dos professores, as suas crenças, concepções e práticas. Este trabalho decorreu de estudos de caso de três professoras, no tema transversal resolução de

problemas, cada um deles explanado e discutidos, respectivamente, em Ponte et al. (1993); Delgado (1993); Canavarro (1993).

Em suma, Ponte (1994a) dividiu o Conhecimento Profissional do professor nas seguintes quatro categorias:

- (1) visões e relação pessoal dos professores com a matemática;
- (2) conhecimento dos professores e sua relação com os estudantes;
- (3) conhecimento do professor e sua visão do currículo;
- (4) forma como os professores vivem a profissão.

Ponte (1998) referiu que o Conhecimento Profissional era objeto de estudo de múltiplos investigadores e que se apoia “na própria experiência acumulada da profissão, com as suas tradições, normas e mitos, bem como o saber que se vai elaborando na interface entre a profissão e outras comunidades com quem interage mais directamente” (p. 32). Este investigador distinguiu três grandes vertentes do Conhecimento Profissional do professor (Ponte, 1998):

- (a) uma *vertente didática*, associada à prática letiva;
- (b) uma *vertente organizacional*, referente à participação nas diversas esferas da vida da escola e da sua relação com a comunidade;
- (c) uma *vertente pessoal*, relacionada com o modo como o professor encara e promove o seu próprio desenvolvimento profissional.

Além disso, seguiram-se muitos estudos que combinaram a noção de conhecimento do professor de Shulman com outras ideias teóricas, tal como referem Ponte e Chapman (2006).

Por exemplo, em investigações sobre o conhecimento de professores de matemática elementar, Klein e Tirosh (1997, citado em Ponte & Chapman, 2006) estudaram o conhecimento de futuros professores e professores no ativo, no tocante às dificuldades dos alunos em problemas que envolvessem a multiplicação e a divisão de números racionais. Destes estudos, Klein e Tirosh (1997, citado em Ponte & Chapman, 2006) observaram um conhecimento muito débil por parte dos futuros professores. No entanto, constataram a consciência destas dificuldades dos alunos, pelos professores em serviço, apesar de não terem o conhecimento da sua origem. Destas investigações também surgiu que a instrução direta com

formas dos alunos pensarem podem aumentar o conhecimento pedagógico do conteúdo pelos professores em serviço e por futuros professores.

2.2. Estudos sobre o conhecimento matemático do professor

Antigamente, nos estudos sobre o conhecimento matemático do professor, media-se o conhecimento do professor do ensino básico e do ensino secundário pelo número e tipo de cursos de matemática que os professores tinham frequentado e pela sua prestação em exames (Begle, 1979; Goldhaber & Brewer, 2001; Monk, 1994, citado em Cole, 2011, p. 26). No entanto, tal como mencionou Begle (1979, citado em Ma, 1999), não se encontrava grande correlação entre estas medidas de conhecimento dos professores e a aprendizagem dos alunos.

Begle (1979) conduziu uma grande investigação, durante um período de 16 anos, que analisava:

- . o número de cursos ao nível do cálculo que os professores tinham tirado;
- . o número de cursos de métodos matemáticos;
- . se a sua licenciatura foi de matemática;
- . a sua influência na performance dos alunos.

As suas descobertas nem sempre foram consistentes. Diga-se que primeiro descobriu que o número de cursos de um professor estava relacionado positivamente com a boa prestação dos alunos na disciplina de Matemática. Em segundo lugar, descobriu que ter um curso de métodos matemáticos também influenciava positivamente a função de docência. Finalmente, Begle (1979) verificou que ter um curso com mais ou menos matemática influenciava a *performance* dos alunos de forma positiva.

Monk (1994) usou os dados do *Longitudal Survey of American Youth* para estudar a influência do conhecimento dos professores na aprendizagem dos alunos. Este investigador descobriu que por cada curso de matemática que o professor acrescentasse ao seu percurso, os resultados dos alunos subiam 1,2%. A partir de 5 cursos, para cada curso adicional previa-se apenas uma subida de 0,2% no desempenho dos discentes. Apesar disso, estas descobertas não eram estatisticamente significativas.

Além disso, Monk (1994) verificou que cursos de métodos de matemática produziam um efeito maior do que cursos de conteúdos matemáticos.

Neste subcapítulo irão apresentar-se, de forma aprofundada, estudos sobre conhecimento matemático do professor. Nestes estudos e teorias são identificados diferentes tipos de conhecimento matemático e de compreensão (“understanding”) em matemática.

Apesar das investigações e teorias identificarem diferentes tipos de conhecimento matemático, observam-se semelhanças e sobreposições.

Decidiu-se, em primeiro lugar, apresentar a distinção entre “Compreensão Instrumental” e “Compreensão Relacional” de Skemp (1976), o Conhecimento Matemático Processual e Concetual de Hiebert e Lefevre (1986) e Conhecimento Matemático Operacional e Estrutural de Sfard (1991), na medida em que estas caracterizações da compreensão (“understanding”) e de conhecimento matemático do professor podem dar informações importantes acerca das ações dos professores em sala de aula e, conseqüentemente, a forma como os alunos aprendem matemática e, por isso, acrescentar informação importante à presente investigação.

Compreensão Instrumental versus Relacional por Skemp

Skemp (1976) distingue dois tipos de compreensão em Matemática: compreensão instrumental e relacional.

A *compreensão instrumental* diz respeito à realização de um procedimento que foi memorizado, a uma aprendizagem por meio do hábito (Skemp, 1989), isto é,

“ é o que eu descrevi no passado como “regras sem motivos”, sem perceber que, para muitos alunos e professores, a posse de uma regra e a capacidade de a usar era entendido por ‘compreensão’”(Skemp, 1976, p.2).

O tipo de aprendizagem que conduz à Matemática Instrumental consiste numa aprendizagem de planos fixos, pelos quais os alunos descobrem o seu caminho apartir de

pontos de partida específicos (dados) até obterem os pontos finais necessários (respostas às perguntas). O plano fornece aos alunos o que fazer em cada ponto (Skemp, 1976).

Por outro lado, a *compreensão relacional* refere-se à realização do procedimento com compreensão. Para Skemp (1989) a compreensão relacional é mais profunda, na medida em que requer saber-se “o que se fazer e porquê”.

Segundo Skemp (1976, p. 14), a matemática relacional consiste em:

“construir uma estrutura conceitual (*esquema*) a partir da qual seu possuidor pode (em princípio) produzir um número ilimitado de planos para ir de qualquer ponto de partida dentro de seu esquema a qualquer ponto de chegada. (Digo ‘em princípio’ porque é claro que alguns desses caminhos serão muito mais difíceis de construir do que outros).” (Skemp, 1976, p. 14)

Desta forma, a partir das suas investigações, Skemp afirmou que os alunos que tenham uma compreensão relacional serão mais capazes de resolver novas tarefas e terão uma maior habilidade para transferir o conhecimento que já detêm a situações novas e a problemas diferentes daqueles que já resolveram.

Conhecimento Matemático Processual versus Concetual por Hiebert e Lefevre

Hiebert e Lefevre (1986) distinguem entre conhecimento concetual e conhecimento processual.

Estes investigadores definiram o *conhecimento concetual* como “o conhecimento rico em relações” (Hiebert & Lefevre, 1986, p.3). Este conhecimento, segundo os investigadores, pode ser pensado como uma rede em que todos os conceitos estão interligados, o que permite flexibilidade no seu uso e no acesso à sua informação.

Hiebert e Lefevre (1986) afirmam que este tipo de conhecimento é formado por duas partes diferentes entre si: representação simbólica da matemática e os procedimentos passo-a-passo, técnicas ou algoritmos, como por exemplo os algoritmos da adição e da multiplicação. “Many of the procedures that students possess probably are chains of prescriptions for manipulating symbols” (Hiebert & Lefevre, 1986, pp. 7-8).

Assim, Hiebert e Lefevre (1986) consideram que o conhecimento concetual se caracteriza por muitos tipos diferentes de relações, enquanto que o processual é linear e requer

conexões mínimas para vincular cada etapa do procedimento. Como resultado, o conhecimento processual pode ser aprendido mecanicamente, mas o conhecimento conceitual não pode.

Apesar disso, ao contrário de discussões anteriores, Hiebert e Lefevre (1986) acreditam que é fundamental explorar-se as relações entre estes dois tipos de conhecimento, em vez de os ver como dicotômicos.

Conhecimento Matemático Operacional versus Estrutural por Sfard

Sfard (1991) propõe a classificação do Conhecimento Matemático em operacional e estrutural.

Na concepção estrutural, segundo Sfard (1991), um conceito matemático é concebido a partir do momento em que o aluno começa a tratar este conceito como um objeto abstrato, olhando-o como um todo sem se prender a detalhes. Já a concepção operacional ocorre na execução do conceito, ou seja, é vista como um processo, "which comes into existence upon request in a sequence of actions" (Sfard, 1991, 4).

Pode-se inferir que a concepção estrutural é estática, instantânea e integradora e a operacional é dinâmica, sequencial e detalhada.

Segundo Sfard (1991):

“(...) a abordagem estrutural deve ser considerada como o objeto num estado mais avançado. Ou seja, parece que no processo de formação de conceitos, as concepções operacionais precedem as estruturais (Sfard, 1991, p.10).

Sfard enfatiza que existem diferenças significativas entre concepções operacionais e estruturais, mesmo para o mesmo conceito matemático, mas ressalva que as duas concepções são complementares e não incompatíveis.

Um outro aspeto muito importante, senão central no presente trabalho, trata-se de conhecer e explorar as diferentes teorias e modelos que estudaram e categorizaram, de diversas formas, o Conhecimento Matemático do Professor.

Primeiramente, irão apresentar-se os estudos de Ball (1990), de Ma (1999) e de Rowland e dos seus colegas (2005). Estes modelos acerca do Conhecimento Matemático do Professor foram construídos a partir da observação direta da prática docente.

Conhecimento matemático do professor por Ball (1990)

Partindo do trabalho de Shulman (1986) e dos seus colegas, Ball (1990), no seu Doutoramento, através do estudo *Formação de Professores e Aprender a Ensinar* (projeto *TELT* (*Teacher Education and Learning to Teach*)) da Universidade do Estado de Michigan, desenvolveu instrumentos matemáticos “para testar o conhecimento matemático dos professores no contexto de práticas comuns que os professores adotam no processo de ensino” (Ma, 1999, p. 25).

Desta investigação, Ball (1988) identificou a compreensão matemática dos professores como um entrelaçar de ideias *de* e *sobre* a matéria, definindo duas dimensões do conhecimento matemático: o *conhecimento da matemática* e o *conhecimento acerca da matemática*.

A primeira dimensão, segundo Ball (1990) engloba os conceitos e os procedimentos matemáticos, tópicos específicos, procedimentos e conceitos e as suas inter-relações.

O conhecimento da matemática foi caracterizado por Ball (1990), segundo três critérios:

1. o conhecimento correto de conceitos e procedimentos;
2. o entendimento de princípios e significados subjacentes;
3. o entendimento e apreciação das conexões entre ideias matemáticas.

A segunda dimensão – *conhecimento acerca da matemática* – descreve o conhecimento sintático, já integra a compreensão da natureza e do discurso matemático, isto é, “de onde [a matemática] vem, para que serve e como as respostas certas são estabelecidas” (Ball, 1988, p. 39).

Durante este trabalho, Ball (1990) verificou que os futuros professores não têm um conhecimento matemático necessário para se conseguirem afastar das abordagens tradicionais do ensino e não detêm uma perceção clara dos princípios adjacentes aos procedimentos matemáticos que terão de ensinar. Deste modo, esta investigadora propõe que o conhecimento do conteúdo seja o centro dos programas de formação de professores e, além disso, ressalva que é fulcral realizarem-se mais estudos sobre de que forma se podem ajudar os (futuros)

professores a terem um entendimento mais profundo da matemática, de modo a serem capazes de praticarem um ensino diferente desta disciplina.

Ao longo deste trabalho, irá-se-á aprofundar mais as investigações de Ball, na medida em que esta investigadora foi uma das autoras da Teoria do MKT, foco deste trabalho.

Conhecimento matemático do professor por Liping Ma (1999)

Liping Ma, em 1999, também realizou um estudo sobre o conhecimento matemático do professor, partindo da sua perplexidade ao observar uma melhor compreensão da matemática (elementar) por parte dos professores chineses relativamente aos americanos, tendo estes, no entanto, “sido expostos a uma matemática mais avançada durante o ensino secundário e universitário” (p. 24).

Ma (1999) “não se centrou na avaliação do conhecimento adequado dos professores nos dois países, mas na descoberta de exemplos de conhecimento adequado dos professores sobre conteúdos matemáticos” (p. 24). Para isso, utilizou os instrumentos TELT, já mencionados, construídos por Ball (1990).

Nesta investigação, Ma (1999) concluiu que um professor do ensino básico tem de possuir uma *Compreensão Profunda da Matemática Fundamental* – *Profound Understanding of Fundamental Mathematics* – (PUFM), da matemática que ensina.

Ma (1999), de acordo com os resultados do seu estudo, descreve o conhecimento como *profundo* de acordo com a capacidade de o articular com as ideias da disciplina.

Um professor que possui uma PUFM, segundo Ma (1999), apresenta além do conhecimento dos algoritmos fundamentais, uma “consciência da estrutura concetual e das atitudes básicas da matemática inerentes à matemática elementar e é capaz de a ensinar aos alunos” (Ma, 1999, p. 29).

A noção de Ma de PUFM, segundo Howe (2000), envolve tanto a especialidade em matemática, quanto o entendimento de como se comunicar com os alunos. Numa revisão crítica realizada por Roger Howe (2000) à obra de Liping Ma (1999), intitulada de “Knowing and Teaching Elementary Mathematics” – “Saber e Ensinar Matemática Elementar”, é apresentado o professor Mao, um dos professores que Ma (1999) identificou como possuindo uma PUFM, que

referiu a necessidade de saber matemática e, ao mesmo tempo, saber transmiti-la aos seus alunos, tal como se expõe na citação em baixo:

“Dispenso sempre mais tempo a preparar as aulas, do que a ensiná-las aos meus alunos. Às vezes três, até quatro vezes mais. Além disso, o meu tempo é dedicado a estudar os materiais de ensino; O que é que eu vou ensinar nesta lição? Como devo apresentar o tópico? Quais os conceitos ou habilidades que os alunos aprenderam que eu deveria desenvolver? (...)”
(Howe, 2000, p. 46)

Segundo a investigadora, a PUFM engloba três significados: *básica*, *primária* e *elementar*.

Ma (1999) considerou a matemática dos primeiros anos como *básica*, referindo que apesar do número de ramos desta disciplina se ter expandido e o próprio campo da disciplina ter aumentado, a matemática do ensino básico é composta pelos dois principais ramos da matemática: aritmética e geometria elementares, base da disciplina.

Também a caracteriza como *primária* e *elementar*, pois “surge no início da aprendizagem matemática dos alunos” (Ma, 1999, p.204).

No entanto, clarifique-se que a matemática dos primeiros anos não é nada fácil: pode não ser complexa, mas é profunda, pode “não ser sofisticada, mas é sábia” (Aharoni, 2012, p.34), na medida que as “ideias aparentemente simples formadas nas mentes dos alunos nesta ocasião irão ser necessárias durante todo o percurso da sua aprendizagem da matemática” (Ma, 1999, p.204).

Este conhecimento refere-se, segundo a autora, à percepção da matemática elementar, que considera *profunda*, *complexa* e *abrangente*.

Nesta linha de ideias, Ma (1999) sublinhou que um professor com PUFM revela e representa as conexões matemáticas no ensino e aprendizagem da matemática, que tende a ter quatro propriedades:

- . *conetividade*;
- . *perspetivas múltiplas*;
- . *ideias básicas*;
- . *coerência longitudinal*.

Um docente que tenha uma Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (PUFM) tende a ensinar com *conetividade*. No seu ato de ensinar, estabelece, de forma

intencional, conexões entre conceitos, procedimentos e/ ou técnicas matemáticas, o que irá conduzir a que a aprendizagem da matemática por parte dos seus alunos seja unificada e não fragmentada.

Um professor com PUFM, segundo Ma (1999), estabelece conexões matemáticas que apresentam a segunda propriedade referida em cima –*perspetivas múltiplas*, isto é, “conexões que valorizam diferentes facetas de uma ideia e várias abordagens para uma solução, bem como as suas vantagens e inconvenientes” (Ma, 1999, p.211).

Estes professores trabalham também, com os seus alunos, conceitos e princípios básicos da matemática, simples, mas poderosos, e que tendem a revisitar e reforçar estas ideias básicas – as tais *ideias básicas* a que essa investigadora reporta.

Além disso, um professor que compreenda, de forma profunda, a matemática fundamental representa conexões matemáticas que não estão limitadas ao conhecimento que deve ser ensinado em determinado ano escolar; pelo contrário, demonstra ter alcançado um entendimento de todo o curriculum de matemática elementar. Esta última propriedade relaciona-se com o conhecimento do currículo definida por Shulman (1986).

Conhecimento matemático do professor “Knowledge Quartet” por Rowland et al.

Rowland e os seus colegas (2005; 2008), de forma semelhante a Ball e os seus colegas, analisaram vídeos de aulas de professores estagiários de matemática do ensino básico, para estudarem o conhecimento do professor. Deste estudo, identificaram os domínios deste conhecimento – “Knowledge Quartet”: *Foundation*, *Transformation*, *Connection* e *Contingency*.

O domínio *Foundation* consiste no conhecimento, crenças e compreensão obtida na formação de um professor.

A *Transformation* envolve a representação das ideias dos professores para as crianças “in the form of analogies, illustrations, examples, explanations and demonstrations” (Rowland et al., 2004, p. 123), de modo a que as crianças consigam compreender estas ideias.

Connection, segundo Rowland e Turner (2007), “inclui a sequência de tópicos a serem ensinados dentro e entre as aulas, incluindo a ordem das tarefas e exercícios a serem trabalhados” (p. 114).

A última categoria, *Contingency* refere-se à capacidade que tem um professor de reagir perante uma atividade que não foi planeada para a aula, como por exemplo dar uma explicação e esclarecer uma dúvida de um aluno.

A inclusão das crenças no domínio “Foundation” distingue esta conceção “The Knowledge Quartet” da teoria de Shulman (1986) que não as inclui. Além disso, Rowland e os seus colegas (2005) propõem “contingency” como uma componente do conhecimento do professor e definem esta categoria como “a teachers’ preparedness to deviate from their teaching agenda” ou “the ability to think on one’s feet” (Rowland et al., 2005, p. 263), o que já não se verifica na categorização do conhecimento do professor construída por Ball e pelos seus colegas.

Rowland e os seus colegas não definiram formas de medir o “Knowledge Quartet”. De facto, o seu estudo apenas fornece a conceção do conhecimento do professor, mas não explicita como se pode medir este conhecimento.

Além destes modelos apresentados, baseados na observação de aulas, irão explorar-se, de seguida, mais duas teorias e categorizações do Conhecimento Matemático do Professor, desenvolvidas por Tatto e pelos seus colegas (2008) e por Baumert, Kunter, Blum e Bruner (2010).

Os modelos construídos por estes dois grupos de investigação acerca do Conhecimento Matemático do Professor têm em comum o facto de se basearem no estudo do desempenho de docentes aquando da aplicação de testes previamente realizados, como TIMSS, PISA e questões construídas pelo projeto LMT.

Estudo Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) (Tatto et al., 2008)

Como uma organização internacional de investigação sem fins lucrativos, a *Internacional Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) realizou, nos últimos 50 anos, um grande número de estudos, em que o foco principal de estudo reside nos fatores que influenciam os resultados escolares (Tatto et al., 2012).

O “Teacher Education and Development Study in Mathematics” (TEDS-M) representa o primeiro estudo internacional que fornece dados sobre o conhecimento que futuros professores do ensino básico e secundário adquiriram ao longo da sua formação. Foi também o primeiro e maior estudo que examinou as variações e a influência da formação de professores dentro do seu país e entre países (Tatto et al., 2008).

Segundo o relatório “Police, Practice and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 countries” (Tatto et al., 2012), foi o primeiro estudo comparativo internacional de grande escala sobre formação dos professores, especificamente de matemática, do ensino básico e secundário.

Esse projeto, como também está presente neste relatório (Tatto et al., 2012, p. 3), teve dois propósitos:

- (1) identificar de que modo os países participantes do TEDS-M preparam os professores para ensinar matemática a alunos do ensino básico e do ensino secundário;
- (2) estudar a variação na natureza e no impacto dos programas de formação de professores no ensino e aprendizagem de matemática dentro do próprio país e entre os países participantes.

Tatto e os seus colegas (2012) recolheram dados de futuros professores dos seguintes 17 países: Botswana, Canadá, Chile, China, Geórgia, Alemanha, Malásia, Noruega, Omã, Filipinas, Polónia, Rússia, Singapura, Espanha, Suíça, Tailândia, e EUA.

Aproximadamente 23000 professores estagiários do ensino básico e do ensino secundário responderam a um teste de aproximadamente 60 minutos (standardizado). Este teste continha questões baseadas em situações de sala de aula e abordava conceitos matemáticos de números, álgebra e geometria e, em menor quantidade, de estatística. *Saber, aplicar e raciocinar* impunham-se como as três dimensões cognitivas presentes no teste, baseadas e usadas no Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) (Garden et al., 2006; Mullis, Martin, Ruddock, O’Sullivan, Arora & Erberber, 2007, citado em Tatto et al., 2012).

O TEDS-M pretendeu medir o conhecimento do professor, tendo utilizado, para isso, a categorização do conhecimento matemático do professor definida por Shulman e pelos seus colegas (1987), categorização essa já explicitada neste capítulo deste trabalho.

Nesse projeto, o grupo de investigação de Maria Teresa Tatto e os seus colegas construíram questões e instrumentos de medição do *Conhecimento do Conteúdo Matemático (MCK)* e do *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo Matemático (MPCK)* de futuros professores do ensino básico e secundário de matemática.

Além das questões originais do TEDS-M, também utilizaram itens desenvolvidos noutros estudos, como o LMT (Hill, Schilling & Ball, 2004), que será descrito no próximo subcapítulo, e pelo *The Mathematics Teaching for the 21st Century Project (MT21)* (Schmidt et al., 2011). Este último, o MT21 caracterizou-se como um estudo internacional conduzido por diversos investigadores como William Schmidt, Sigrid Blömeke e Maria Teresa Tatto, financiado pelo *National Science Foundation*, para examinar a preparação de professores de matemática dos 6.º ao 8.º anos de escolaridade (“middle school”) (Schmidt et al., 2011). Neste estudo participaram os seguintes seis países: Bulgária, Alemanha, Coreia do Sul, Taiwan, México e nos EUA.

A estrutura do MPCK definida pelo TEDS-M (Schmidt et al., 2011) abrange três subdomínios: *Conhecimento do Currículo de Matemática (“Mathematics Curricular Knowledge”)*, *Conhecimento de Planificação do Ensino e da Aprendizagem da Matemática (“Knowledge of Planning Mathematics Teaching and Learning”)* e *Conhecimento de Promulgar o Ensino e Aprendizagem da Matemática (“Enacting Mathematics for Teaching and Learning”)*, explanados Tabela 1, em baixo.

Tabela 1 - Estrutura do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo Matemático (MPCK) (Schmidt et al., 2011)

Subdomínios	Tópicos
<i>Conhecimento do Currículo de Matemática</i> <i>(“Mathematics Curricular Knowledge”)</i>	Conhecer o currículo de matemática escolar; Estabelecer metas de aprendizagem apropriadas; Identificar ideias-chave em programas de aprendizagem; Selecionar possíveis caminhos e identificar conexões dentro do currículo; Conhecer diferentes formatos e propósitos de avaliação.
<i>Conhecimento de Planificação do Ensino e da Aprendizagem da Matemática</i> <i>(“Knowledge of Planning Mathematics Teaching and Learning”)</i>	Selecionar atividades adequadas; Prever respostas típicas dos alunos, incluindo

<i>and Learning”)</i>	concepções erradas; Planejar métodos apropriados para representar ideias matemáticas; Vincular métodos didáticos e projetos instrucionais; Identificar diferentes abordagens para resolver problemas matemáticos; Escolher formatos e itens de avaliação.
<i>Conhecimento de Promulgar o Ensino e Aprendizagem da Matemática</i> <i>(“Enacting Mathematics for Teaching and Learning”)</i>	Explicar ou representar conceitos ou procedimentos matemáticos e aprender a construir questões; Saber analisar as respostas dos alunos, incluindo concepções erradas; Analisar ou avaliar as soluções ou argumentos matemáticos dos alunos; Analisar o conteúdo das perguntas dos alunos; Responder a problemas matemáticos inesperados; Fornecer feedback apropriado-

A categorização do conhecimento matemático do professor definida pelo TEDS-M não será a utilizada no presente trabalho, uma vez que os instrumentos de medição construídos por este projeto destinavam-se a medir o MCK e o MPCK de futuros professores e não de professores em serviço, que foi o foco nesta investigação.

Estudo do *Cognitive Activation in the Classroom* (COACTIV) (Baumert et al., 2010)

Na Alemanha, têm sido desenvolvidos estudos de larga escala sobre o conhecimento matemático de professores do Ensino Secundário, com o objetivo de o relacionar com a qualidade do ensino e com a aprendizagem dos alunos.

Este estudo faz parte do projeto COACTIV – *Cognitive Activation in the Classroom*, que se caracteriza, segundo Baumert e os seus colegas (2010), como um método múltiplo que tem como objetivo descrever os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, combinando, por isso, três diferentes fontes: os alunos – *Individual Learning Support*, os professores – *Cognitive Activation* e os materiais de ensino – *Classroom Management*.

Segundo Baumert e os seus colegas (2010), esta abordagem inovadora permite a reconstrução dos processos de ensino e de aprendizagem com algum detalhe, concebendo o ensino como um compromisso competente na gestão da aula, ensino individualizado e mudanças cognitivas (Kunter et al., 2007).

Baumert e os seus colegas usaram 35 itens de resposta aberta para medir o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, aplicado a 181 professores do ensino secundário, com 194 turmas e 4533 alunos. Estes itens foram aplicados a professores de alunos do 10º ano que participaram no Programm for International Student Assessment (PISA) de 2004, permitindo assim comparar a *performance* dos professores com a dos seus alunos.

Concluiu-se, desta investigação, que quando “a avaliação matemática no 9º ano foi constante, os alunos foram ensinados por professores com um elevado conhecimento pedagógico do conteúdo e a prestação dos alunos no 10.º ano é melhor” (Blum & Krauss, 2008, p. 3). Assim, o conhecimento pedagógico do conteúdo é de importância fundamental para o progresso matemático dos alunos, sendo decisivo para a qualidade da instrução.

Não obstante, também o conhecimento do conteúdo deve merecer uma atenção especial na formação inicial e na prática letiva uma vez que o seu *deficit* pode comprometer o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo e, conseqüentemente, ter efeitos negativos sobre a instrução e o progresso dos alunos.

Segundo Delaney (2008), as descobertas deste estudo comprovam que é possível estabelecer uma relação entre a avaliação dos alunos e o conhecimento matemático dos professores.

Refira-se que estes testes aplicados por Baumert e pelos seus colegas não se adequam a este trabalho, na medida em que se dirigiam a professores de ensino secundário e não de ensino básico, a população em estudo no presente trabalho.

Baseando-se nos modelos e teorias sobre o Conhecimento Matemático do Professor, apresentados neste subcapítulo, alguns investigadores portugueses têm vindo a desenvolver estudos, em Portugal, acerca desta temática.

Apesar de (ainda) não existirem muitos trabalhos investigativos sobre o Conhecimento Matemática do Professor desenvolvidos com professores portugueses, parece importante explorar alguns deles, na medida em que podem trazer informação significativa para o presente trabalho.

Estudos portugueses acerca do Conhecimento Matemático do Professor

Ainda não existem muitas investigações, realizadas em Portugal, sobre o Conhecimento Matemático do Professor. Os estudos portugueses que serão aqui apresentados incidirão sobre as áreas da Matemática mesmo assim mais estudadas neste país, que dizem respeito à Geometria, aos Números Racionais e ao Pensamento Algébrico. Relativamente à Geometria, irá explanar-se um estudo de Alexandra Gomes (2003) e um de Ângela Couto (2015). De seguida, serão explorados alguns dos estudos do investigador Miguel Ribeiro e dos seus colegas acerca de Números Racionais e, por último, abordar-se-á uma investigação sobre o Pensamento Algébrico de Maria Teresa Pimentel Cardoso (2010).

Gomes (2003), no seu trabalho de Doutoramento, explorou o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo, em Portugal, com o objetivo principal de identificar obstáculos (cognitivos, didáticos, epistemológicos, e/ ou metacognitivos) na construção de conceitos geométricos elementares, bem como tentar perceber as possíveis causas dessas dificuldades.

Para isso, aplicou um questionário, construído pela investigadora, e realizou, posteriormente, entrevistas a alguns dos 216 estudantes de uma Universidade, 141 alunos da licenciatura em Ensino Básico do 1.º ciclo e 75 professores do 1.º ciclo inscritos em cursos de Complementos de Formação, participantes no estudo.

Alexandra Gomes (2003), no seu trabalho, referiu que:

“os obstáculos à aprendizagem manifestam-se através de erros cometidos pelos indivíduos (...) e os erros não são somente consequência da ignorância, (...) mas resultam de conhecimentos prévios que se revelam falsos ou desapropriados às novas situações” (p. 79)

Deste trabalho de investigação, a autora, aquando da identificação de obstáculos de natureza cognitiva, verificou que um número significativo dos (futuros) professores do 1.º ciclo participantes no seu estudo desconheciam alguns conceitos geométricos elementares e que alguns deles tinham imagens incompletas ou mesmo erradas de vários conceitos.

Ao identificar os obstáculos de natureza cognitiva, Gomes (2003) concluiu, no geral, que estes (futuros) professores do 1.º ciclo apresentam um conhecimento matemático deficitário.

Nas conclusões do seu estudo, Gomes(2003), ao identificar os obstáculos de natureza didática, deixou patente que é mesmo necessário olhar-se com mais atenção para a formação científica dos (futuros) docente do 1.º ciclo, uma vez que verificou que estes professores revelam um desconhecimento preocupante ao nível de conhecimentos de índole científica.

Quanto aos obstáculos de natureza epistemológica, Gomes (2003) salientou a falta de maturidade dos conhecimentos demonstrados pelos participantes.

Ao identificar os obstáculos de natureza metacognitiva, Alexandra Gomes (2003) concluiu que os participantes do seu estudo parecem não gostar de matemática e, por outro lado, referem ter muitas dificuldades nesta disciplina. Este tipo de obstáculos, segundo a investigadora, estão ligados ao facto dos (futuros) docentes desconhecerem as dificuldades reais presentes nos conceitos ditos elementares.

Po último, do seu trabalho investigativo, Gomes (2003) construiu um modelo (teórico) de relacionamento causal entre os quatro tipos de obstáculos estudados pela autora, quer em termos de aprendizagem, quer em termos de ensino da Matemática, que se pode observar na figura em baixo.

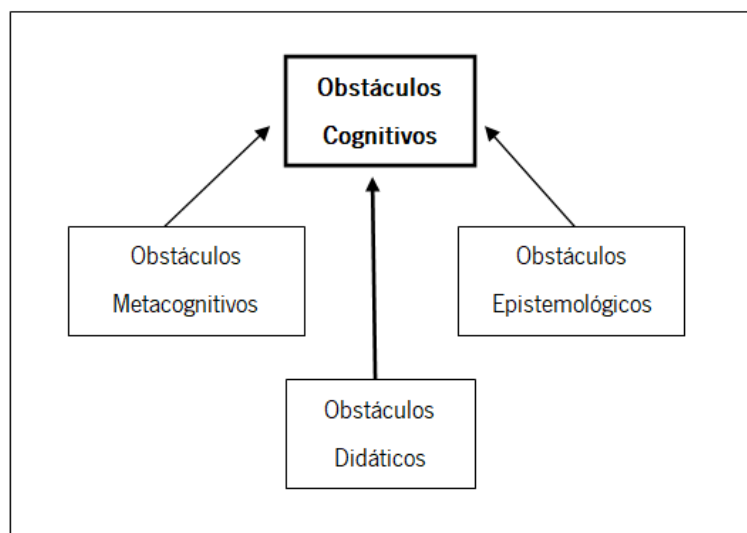


Figura 2 - Relações de dependência/ causalidade, do ponto de vista das conclusões do estudo (Gomes, 2003).

Couto (2015) realizou um estudo investigativo, de natureza qualitativa de caráter descritivo e interpretativo, com quatro alunas do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica, de uma Escola Superior de Educação, que constituíram dois grupos-caso, no âmbito da unidade curricular de Geometria, com os objetivos de caracterizar o conhecimento de Geometria dos alunos e o seu raciocínio geométrico tendo em conta os níveis de van Hiele (1986), identificando as principais dificuldades ao longo dos testes e das tarefas, e as atitudes que manifestaram relativamente às tarefas aplicadas.

Couto (2015), no que diz respeito ao conhecimento geométrico dos intervenientes da sua investigação, verificou várias lacunas em conceitos geométricos ditos elementares e constatou que “a manipulação de fórmulas faz perder a essência da Geometria” (Couto, 2015, p. 299) e conduz à não compreensão dos conceitos geométricos que estão por detrás das fórmulas.

Contudo, esta investigadora verificou uma evolução positiva, por parte dos intervenientes na sua investigação, no conhecimento e compreensão de conceitos geométricos e na linguagem matemática usada, comparando a sua prestação antes e depois da realização da unidade curricular de Geometria. Além disso, também constatou uma diminuição nos erros cometidos o que, para a investigadora, reflete, de alguma forma, as consequências positivas que a instrução teve nos conhecimentos geométricos.

No que diz respeito ao raciocínio geométrico, Couto (2015) verificou, num dos grupos-caso, uma evolução de mais de um grau no respetivo nível de van Hiele. Além disso, os

participantes nesta investigação de Couto (2015) revelaram-se mais motivados na resolução das tarefas que continham uma componente visual, as que se caracterizavam como desafios e as que poderiam ter utilidade num futuro, enquanto docentes.

Pinto e Ribeiro (2013) estudaram o conhecimento revelado por futuros professores dos primeiros anos, relativamente ao conceito do número racional e operações com números racionais, através de métodos quantitativos, com um estudo de caso instrumental (Stake, 2000, citado em Pinto & Ribeiro, 2013). Para isso, aplicaram algumas tarefas ao nível do 4.º ano de escolaridade, a 27 futuros professores, alunos de duas Instituições de Ensino Superior (IES), tendo por foco o desenvolvimento do MKT destes futuros docentes.

Desta investigação, Pinto e Ribeiro (2013) verificaram que a maioria dos estudantes apresentavam sérias lacunas em termos dos diferentes significados das frações e que tinham pouca familiaridade com o significado da fração como parte-todo, conceito este muito trabalhado ao longo da sua escolaridade. Estes futuros professores demonstraram dificuldades em fazer correspondência entre as diferentes representações de uma fração e em lidar com símbolos e linguagem matemática formal.

Sumariamente, Pinto e Ribeiro (2013) concluíram que a maioria destes futuros professores apresentavam dificuldades em todas as componentes do sentido de número que se situavam ao nível do CCK e que, por isso:

“definem um ponto de partida bastante baixo para a concetualização de formas de incrementar o MKT destes futuros professores e elevá-lo a níveis que consideramos minimamente aceitáveis à saída da formação inicial” (Pinto & Ribeiro, 2013, p. 15).

Ribeiro (2009) estudou o conhecimento matemático para se ensinar (MKT) (Ball, Thames & Phelps, 2008) num grupo de trabalho colaborativo, formado por 9 docentes, no âmbito de um Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM), onde refletiram as práticas do ensino e aprendizagem da Matemática, mais especificamente as bases teóricas da multiplicação de dois números decimais. Para isso, realizou um estudo de caso, com abordagem interpretativa.

Desta investigação, Ribeiro (2009) verificou que os professores possuíam um CCK, na ótica do utilizador, do algoritmo da multiplicação com números decimais, isto é, sabiam o procedimento de resolução desta operação matemática. No entanto, este investigador denotou que estes docentes não têm conhecimento de outras formas alternativas de abordar, junto dos

seus alunos, esta operação matemática, isto é, não possuem um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), “(...) não se encontrando, portanto capacitados a torná-lo compreensível para os seus alunos, de modo a que estes os utilizem com compreensão” (p.18)

Ribeiro (2009) referiu que as operações com números fracionários, em particular, com decimais não são tão intuitivas de se resolverem como por exemplo as operações que envolvem números naturais, sendo, por vezes, segundo este investigador “(...) encaradas pelos professores como apenas um conjunto de regras que os alunos devem aprender e aplicar” (p.18).

Para Ribeiro (2009), este trabalho centrado na memorização de regras, técnicas e procedimentos ensinados aos alunos no trabalho das operações matemáticas com números decimais só será ultrapassado se “(...) os próprios professores forem possuidores de um saber ensinar a fazer, mais do que apenas um saber fazer” (Ball & Bass, 2003; Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Rowan & Ball, 2005, citado em Ribeiro, 2009, p. 18).

Na mesma linha de ideias, Caseiro e Ribeiro (2012) estudaram o conhecimento revelado por futuros professores dos Primeiros Anos, sobre números racionais, em concreto, no que concerne à divisão e ao papel da unidade. Para isso, aplicaram uma tarefa a 80 futuros professores que frequentavam três turmas do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica, sobre a divisão equitativa, onde um dos objetivos era abordar o papel da unidade e o da representação das frações como parte-todo. Utilizaram métodos qualitativos, com um estudo de caso instrumental (Stake, 2005, citado em Caseiro & Ribeiro, 2012).

Caseiro e Ribeiro (2012) identificaram carências no Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), por parte destes futuros docentes, uma vez que estes revelaram dificuldades em fazer por si próprios a tarefa proposta, relativa aos números racionais.

Deste modo, estes investigadores alertaram que

“(...) apenas ultrapassando estas carências ao nível do CCK é que seria possível ensinar o MKT e, posteriormente, promover um desenvolvimento de um conhecimento do conteúdo em todos os seus subdomínios” (Caseiro & Ribeiro, 2012, p.10).

Cardoso (2010), no seu estudo de Doutoramento, investigou o impacto do programa de formação contínua no conhecimento matemático e didático dos professores participantes, com incidência no pensamento algébrico, nas perspetivas de docentes sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem e nas atitudes e aprendizagens dos alunos envolvidos. Procurou

compreender a influência da dinâmica da formação em quatro professores envolvidas, que acompanhou durante dois anos, numa Escola Superior de Educação.

Segundo a autora, com a criação e aplicação de tarefas em sala de aula e posterior reflexão sobre estas, os professores envolvidos desenvolveram o conhecimento matemático e didático. Além disso, o facto do trabalho ter incidido na temática do pensamento algébrico, segundo Cardoso (2010), deu a oportunidade aos professores envolvidos de desenvolverem “(...)o seu conhecimento matemático e didático num tema que se acabou por revelar integrador do currículo” (p. 7).

Ao longo do estudo, denotou-se que o modelo de formação contínua influencia, positivamente, o desenvolvimento profissional dos docentes. Segundo Cardoso (2010), este trabalho desenvolvido no programa de formação contínua vai ao encontro dos trabalhos mais recentes de Ball (2009, citado em Cardoso, 2010), “quando aponta que o ensino da matemática é um trabalho intrincado, não natural, que precisa de ser aprendido e, como tal ensinado” (p.453).

2.3. Teoria do Conhecimento Matemático para se Ensinar (MKT)

Um grupo de investigação da Universidade de Michigan tem realizado vários trabalhos sobre o conhecimento matemático necessário para um professor ensinar esta disciplina, trabalhos que são foco de estudo da presente investigação.

Estes investigadores têm contribuído para o desenvolvimento da teoria sobre o conhecimento matemático para ensinar matemática.

São três as contribuições do seu trabalho, muito na sequência das ideias pioneiras de Shulman:

- . voltar-se a focar a atenção (por parte dos investigadores) no objeto de estudo da importância do conhecimento para o ensino;
- . reconduzir-se a atenção na organização das disciplinas como base do que os professores têm de saber para ensinar;
- . focar-se a atenção no que se espera que os professores saibam sobre o conteúdo que ensinam e como o usam para ensinar (Hill, Schilling & Ball, 2004).

A teoria do conhecimento matemático para ensinar caracteriza-se como o ponto central deste trabalho.

Os estudos realizados sobre o ensino e a aprendizagem da matemática podem ser levados a efeito segundo uma perspectiva matemática, educacional ou ambas. Os métodos e técnicas de investigação diversificados utilizados por este grupo de investigação têm em comum o estudo do ensino da matemática, na prática, a partir de uma perspectiva matemática, propriamente dita, à semelhança de Ball (1999) e do seu grupo de trabalho, que estudaram o ensino a partir de uma perspectiva matemática, de tal modo a que lhes foi possível obter uma visão do conhecimento matemático para se ensinar:

“Uma tarefa analítica central é investigar as particularidades dos casos que estamos a examinar: descobrir questões matemáticas que podem ser vistas em momentos particulares da prática de ensino, a busca por conexões com outros elementos e considerar o papel que esses elementos da matemática desempenham no ensino. A outra é identificar o que é generalizável e o que é específico ao ensino, ou os casos específicos que estão a ser estudados” (p.33).

Esta abordagem de estudo do conhecimento matemático do professor inicia-se pela análise rigorosa e em contexto de algumas atividades específicas de ensino da matemática, sendo o foco a matemática. É incomportável estudar-se todos os instantes que se desenrolam numa aula de matemática. As atividades particulares estão relacionadas com outras, e com o auxílio da literatura torna-se possível identificar problemas comuns no ensino desta disciplina e compreender de, melhor forma, e com mais rigor o trabalho de se ensinar matemática. Contudo, esta análise não se confina ao estudo de instantes específicos de práticas de ensino, mas pretende também, através da observação de alguns elementos, generalizar, bem como reconhecer, alguns dos aspectos que decorrem numa aula de matemática.

O uso da perspectiva matemática habilita o investigador a verificar, efetivamente, o trabalho que emerge das interações, em sala de aula, do professor, dos alunos e da matemática (Bruner, 1960). Considerar, com seriedade, os aspetos matemáticos do ensino conduz à identificação da natureza matemática do trabalho e do conhecimento.

Um investigador que observa o ensino através de uma perspectiva matemática irá ter em conta as características matemáticas que vão ocorrendo numa sala de aula e o trabalho que o professor vai fazendo.

O uso de linguagem precisa e de conceitos são patenteados por ambas as perspectivas – perspectiva matemática e perspectiva educacional –, quando se estuda o conhecimento do professor (Leinhardt & Smith, 1985). Mas a presença ou ausência de características matemáticas aparecem principalmente para serem mais bem compreendidas, quando se pratica uma perspectiva matemática.

O construto MKT tem sido desenvolvido através do estudo das concepções do trabalho dos professores a partir dessa mesma perspectiva matemática. Os instrumentos de medição deste conhecimento, usados neste trabalho, foram construídos originalmente pelo e para o programa de investigação do MKT (Ball, 1999; Ball & Bass, 2003).

Nesta parte, irá explanar-se o progresso desta teoria nas duas últimas décadas.

No ano 2000, Ball e Bass referiram que “embora as concepções sobre o que se entende por “Conhecimento do Assunto” bem como medidas válidas se tenham desenvolvido, não se tem uma compreensão adequada do que e como o conhecimento matemático é usado na prática” (p.86).

Este grupo de investigação desenvolveu dois projetos intitulados: *The Mathematics Teaching and Learning to Teach Project* (MTLT), liderado por Deborah Loewenberg Ball e Hyman Bass, e *Learning Mathematics for Teaching Project* (LMT), que tem como principais investigadores Ball, Bass e Heather C. Hill. Com estes projetos desenvolveram-se muitas estratégias para se aprofundar o construto do *conhecimento matemático para ensinar*, e, durante 15 anos, foi estudado o ensino da matemática e a matemática usada no ensino (Ball & Bass, 2003; Ball et al., 2008).

O projecto MTLT investigou o conhecimento matemático exigido a um professor. Como refere Cole (2009), essa investigação foi levada a cabo através da análise de uma compilação de gravações de aulas, a partir das quais se desenvolveram um número de “hipóteses testáveis” (p. 390) sobre os domínios do MKT. Posto isso, o projeto LMT construiu as medidas para identificar estes domínios.

Ball, Bass e os seus colegas, tal como referiu Delaney (2008), detetaram que a matemática que os professores de matemática elementar precisavam de saber para ensinar não

coincidia com a que aprendiam nas Universidades. Precisavam de desenvolver um tipo de conhecimento específico, que denominaram de *Conhecimento Matemático para se Ensinar – MKT – Mathematics Knowledge for Teaching*, para serem capazes de ensinar (efetivamente) esta disciplina.

Para conceitualizarem o *MKT*, Ball e os seus colegas organizaram o seu trabalho segundo dois caminhos (Ball, 1999).

Primeiro, Ball e Bass e os seus colegas estudaram, a partir da perspetiva matemática, um conjunto de aulas lecionadas por Deborah Ball ao 3.º ano, no ano letivo de 1989-1990 (Ball, 1999; Ball & Bass, 2003), que fazem parte do projeto projeto *TELT (Teacher Education and Learning to Teach)* de Ball (1990) já explicitado no capítulo anterior.

Com esta análise, identificaram as tarefas exigidas aos professores, aquando do ensino de matemática e as suas componentes matemáticas. Ball (1999) descreve esta análise como um trabalho que vai

“mais além do que saber um conteúdo matemático em particular, como fazer um algoritmo da multiplicação por mais de dois algarismos, envolve também as exigências matemáticas de planificar uma aula, ouvir uma criança, colocar questões, e ajudar a desenvolver, validar e justificar definições, métodos e afirmações matemáticas” (p. 28).

Inicialmente, o trabalho de observação da prática de ensino foi relativamente desestruturada: anotavam as questões matemáticas que se desenrolavam nas aulas e comentavam segmentos dessas aulas (Ball, 1999). Com o decorrer das investigações, o grupo de Michigan foi estruturando a observação, desenvolvendo, em particular, um instrumento de “vídeo-código”, para estudar a qualidade da instrução matemática, nas aulas e os materiais dos currículos (Blunk & Hill, 2007), o que contribuiu para especificar o construto em estudo.

O segundo caminho da construção do *MKT* foi desenvolvido através da análise da literatura que se dividiu em duas grandes linhas de investigação. Uma linha, tal como mencionou Ball (1999), referente ao conhecimento do conteúdo dos professores e ao seu papel no ensino, e uma segunda linha relativa à caracterização da correlação, que devia existir, entre a matemática e da pedagogia no ensino e na aprendizagem dos professores.

O grupo de investigação de Michigan estudou o trabalho já desenvolvido nesta área da educação matemática já documentado na literatura, inspirando-se nos estudos de Shulman (1986) e dos seus colegas, e já descritos anteriormente neste trabalho.

Dos trabalhos realizados por Shulman (1986) e pelos seus colegas, estudaram-se, primeiramente, o conhecimento necessário para o professor ensinar. Numa segunda fase, centraram-se mais nos estudos desse investigador, relativos à educação matemática, mostrando que o que os professores deveriam saber de matemática deveria ser significativamente diferente daquilo que ensinam.

Além disso, sobre esta última temática da educação matemática, Ball e os seus colegas também estudaram a literatura de Simon (1993), Borko et al. (1992) e Thompson (1984). Os estudos de Simon (1993) incidiam no conhecimento concetual e procedimental de futuros professores acerca divisão. Borko, Einsenhart e os seus colegas (1992) analisaram, de vários pontos de vista, uma aula do 6.º ano de escolaridade de um aluno de um curso de ensino, em que a abordagem do algoritmo da divisão de frações não forneceu aos alunos uma explicação conceitualmente fundamentada. Estes investigadores estudaram as concepções e crenças deste futuro professor sobre o bom ensino de matemática, a abordagem de divisão de frações que realizou no curso de métodos matemáticos e o seu conhecimento sobre divisão de frações. Alba Gonzalez Thompson (1984), por sua vez, estudou a relação entre as concepções de três professoras sobre a matemática e o seu ensino na sua prática docente.

Não obstante, o estudo de Doutorado de Ball (1990) sobre o conhecimento matemático de professores e o de Liping Ma (1999) sobre o conhecimento matemático de professores chineses, também já explicitado anteriormente neste trabalho, acrescentaram informação importante à concetualização do construto *Conhecimento Matemático para Ensinar*.

2.3.1 Domínios do MKT

Ensinar Matemática requer saber apreciar/avaliar um raciocínio matemático, compreender o significado de ideias e procedimentos matemáticos, e saber de que forma as ideias e os procedimentos estão interligados (Hill & Ball, 2004, p.331).

Ball (1990) e Ma (1999) e outros investigadores evidenciaram que estas habilidades que um professor deve ter para ensinar matemática elementar estão desigualmente desenvolvidas.

Ao longo dos anos, os professores foram tendo diferentes oportunidades para aprender a ensinar esta disciplina, através de programas como o MPDIs – California's Mathematics Professional Development Institutes e o National Science Foundation's Math-Science Partnerships.

Em 2001, o grupo de investigação do *Learning Mathematics for Teaching (LMT)*, juntamente com financiamento do *Study of Instructional Improvement*, partindo de uma base teórica sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, no que tange à análise de currículos, de exemplos do trabalho dos alunos e de experiências pessoais, já explanados neste capítulo do trabalho, iniciaram a construção de questões de escolha múltipla, que pretendiam fazer uma representação, com alguma precisão do *Conhecimento Matemático para se Ensinar* ("*Mathematics Knowledge for Teaching*" – *MKT*). Estas questões, que pretendiam "representar o conhecimento matemático usado no ensino da matemática elementar" (Hill et. al., 2004, p.14), foram aplicadas mais tarde num estudo piloto implementado no *California's Mathematics Professional Development Institutes (MPDIs)*.

A necessidade de estudar o conhecimento matemático para ensinar partiu de alguns estudos como o de Ball (1990) e do Ma (1999), já explorados anteriormente no presente trabalho, em que se verificou que os professores dos EUA apresentavam um conhecimento matemático (para ensinarem) frágil.

Das evidências já investigadas sobre a influência do conhecimento do professor na aprendizagem dos alunos, Ball e outros investigadores como Heather Hill e Hyman Bass questionaram-se sobre "o que seria necessário os professores saberem sobre matemática para terem sucesso com os seus alunos" (Ball, Hill & Bass, 2005, p. 17).

Analisando os testes piloto de 700 professores do 1.º e do 3.º anos, os investigadores descobriram que o conhecimento do professor tem efeito no conhecimento dos seus alunos (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Gerada a discussão dos resultados da aplicação do teste piloto, Hill, Schilling e Ball (2004) pretendiam definir uma estrutura para o construto *Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT)*, isto é, tentaram perceber de que forma este conhecimento está organizado, e se

as questões de escolha múltipla que construíram e aplicaram (no teste piloto), mediam, de forma confiável, com rigor e precisão, este conhecimento.

Desta análise quantitativa, psicométrica, de correlação do ponto bisserial ficou evidente, por exemplo, que o MKT consiste num conhecimento matemático mais profundo ao que qualquer adulto pode ter (Hill, Schilling & Ball, 2004).

Nesta linha de ideias, Ball, Hill e Bass (2005) definiram o *Conhecimento do Conteúdo para Ensinar Matemática – Content Knowledge (CK)*, que subdividiram em *Conhecimento Comum do Conteúdo – Common Content Knowledge (CCK)*, da matemática, o que qualquer adulto possui, e conhecimento da matemática que se caracteriza como *Especializado – Specialized Knowledge of Content (SKC)*, o qual estes investigadores consideram ser o conhecimento necessário para se ensinar esta disciplina e que apenas os professores precisam de ter.

Assim, identificaram seis construtos que compõem MKT.

- (1) *Conhecimento Comum do Conteúdo – Common Content Knowledge (CCK)*;
- (2) *Conhecimento Especializado do Conteúdo – Specialized Knowledge of Content (SKC)*;
- (3) *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos – Knowledge of Student and Content (KSC)*;
- (4) *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino – Knowledge of Content and Teaching (KCT)*
- (5) *Conhecimento do Currículo*;
- (6) *Conhecimento Horizonte do Conteúdo*.

Até ao momento, desenvolveram um conjunto de questões de escolha múltipla, que pretendem medir as primeiras três dessas categorias: CCK, SCK e KSC.

Ball, Bass, Sleep e Thames (2006), no *Eighth Annual Chicago Symposium Series on Excellence in Teaching Mathematics and Science: Research and Practice*, apresentaram o esquema com os diferentes domínios do construto “Conhecimento Matemático para Ensinar” – “Mathematics Knowledge for Teaching” (MKT), tal como se apresenta em baixo.

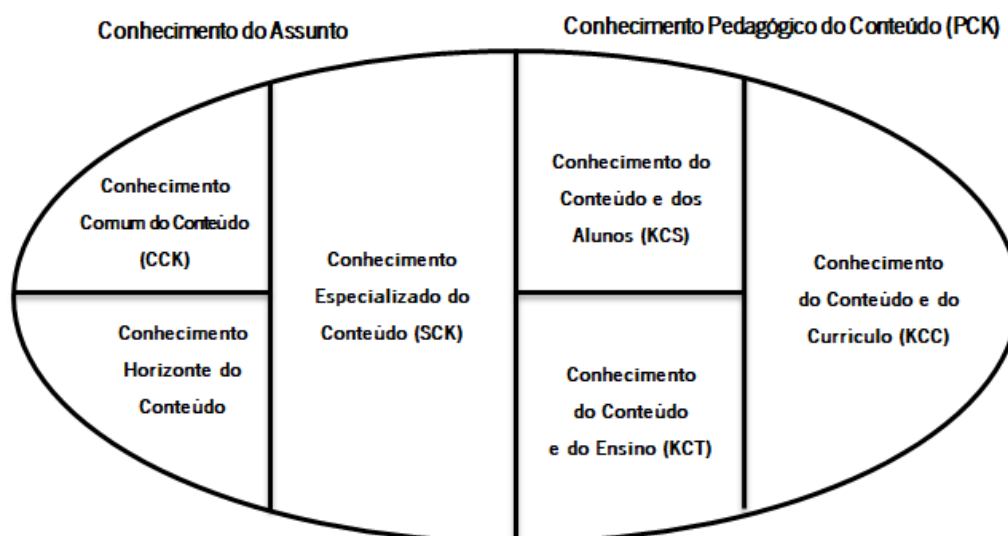


Figura 3 – Domínios do MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008)

O “Conhecimento Matemático para Ensinar” (MKT) divide-se, assim, em dois tipos de conhecimento: o “Conhecimento do Assunto” – *Subject Matter Knowledge* e o “Conhecimento Pedagógico do Conteúdo” – *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).

O “Conhecimento do Assunto” – *Subject Matter Knowledge* divide-se nos seguintes domínios:

- (a) “Conhecimento Comum do Conteúdo” – *Common Content Knowledge* (CCK);
- (b) “Conhecimento Especializado do Conteúdo” – *Specialized Knowledge of Content* (SKC);
- (c) “Conhecimento Horizonte do Conteúdo” – *Horizon Content Knowledge*.

Tal como se visualiza no esquema anterior, o *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* inclui os seguintes domínios:

- (d) “Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos” – *Knowledge of Student and Content* (KSC);
- (e) “Conhecimento do Conteúdo e do Ensino” – *Knowledge of Content and Teaching* (KCT);
- (f) “Conhecimento do Conteúdo e do Currículo” – *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC).

De seguida, vai-se descrever cada um dos domínios do MKT.

(a) Conhecimento Comum do Conteúdo – *Common Content Knowledge* (CCK)

Relativamente ao domínio do “Conhecimento do Assunto” (CK), Ball, Thames e Phelps (2008) referem que o primeiro subdomínio – “Conhecimento Comum do Conteúdo”, é o conhecimento necessário para efetuar “um simples cálculo ou responder corretamente a um dado problema” (p. 399).

Os professores precisam de conhecer os conteúdos que ensinam: conceitos matemáticos, procedimentos, técnicas, algoritmos e regras matemáticas práticas e porque razão estas regras funcionam. Só desse modo, os docentes desta disciplina serão capazes de reconhecer quando um aluno dá uma resposta errada ou quando o manual tem uma definição incorreta, tarefas estas que decorrem diariamente nas salas de aula.

Ball, Thames e Phelps (2008), apesar de denominarem este conhecimento como “comum”, esclarecem que não significa que toda a gente possua este conhecimento, mas que, no entanto, não é um conhecimento único para ensinar.

Exemplos de tarefas/atividades matemáticas que têm presente CCK:

- identificar que as figuras como o quadrado o retângulo ou o triângulo têm duas dimensões;
- saber realizar o cálculo de uma percentagem e identificar graficamente qual a parte de uma unidade representa.

(b) “Conhecimento Especializado do Conteúdo” – *Specialized Knowledge of Content* (SKC)

O segundo subdomínio, de grande interesse para os autores – “Conhecimento Especializado do Conteúdo” (SCK), os investigadores definem como o “conhecimento matemático e habilidade (skill) e caracterizam-no como a forma de conhecimento que é

unicamente necessária aos professores para conduziram o seu trabalho” (Ball et al., 2008, p. 400).

Assim, Ball, Thames e Phelps (2008) identificam que um professor que possua o SCK é capaz de executar as seguintes tarefas:

“apresentar ideias matemáticas; responder “porquê” a questões dos alunos; encontrar um exemplo para fazer um ponto específico da matemática; reconhecer o que se está a incluir no uso de determinada representação; usar diferentes tipos de representação para correlacionar diferentes ideias e diferentes representações; relacionar os tópicos que estão a ensinar com tópicos de anos anteriores e com outros que vão ser lecionados posteriormente; explicar os objetos da matemática e os seus propósitos aos pais; melhorar e adaptar o conteúdo matemático presente nos manuais; modificar questões para torná-las mais fáceis ou difíceis; avaliar rapidamente a plausibilidade das questões (reivindicações) dos alunos; dar ou avaliar explicações matemáticas; escolher ou desenvolver definições; usar a notação e a linguagem matemática e criticar o seu uso; fazer questões matemáticas “produtivas”; selecionar representações com um dado propósito; detetar equivalências” (p. 400).

O SKC inclui saber-se, por exemplo, um conjunto de definições de figuras que são compreensíveis pelos alunos em diferentes níveis de ensino, com diferentes especificidades matemáticas.

Com este tipo de conhecimento, os professores são capazes de realizar representações mais adequadas para ensinarem determinado conteúdo, para fazerem a exploração de determinado conceito de forma correta e para avaliarem o conhecimento matemático dos alunos.

(c) “Conhecimento Horizonte do Conteúdo” – *Horizon Content Knowledge*.

Foi descrito por Ball, Thames e Phelps (2008, in Delaney, 2008, p. 24), como uma estrutura, como “uma categoria provisória referente às conexões necessárias a realizar entre os diferentes tópicos do currículo”.

(d) “Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos” – *Knowledge of Student and Content (KSC)*;

O *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos* (KSC), segundo Ball, Thames e Phelps (2008), combina o conhecimento sobre os alunos e sobre a matemática. Este conhecimento é caracterizado pela capacidade de se antecipar o que os alunos vão pensar, o que vão confundir, o que lhes vai ser mais fácil e mais difícil, “(...) erros típicos, razões para esses erros, desenvolvimento de sequências e estratégias para resolver os seus problemas” (Hill, Schilling & Ball, 2004, p. 17). Por exemplo, os professores precisam de saber que muitos alunos que conseguem reconhecer um quadrado pensarão que é uma figura diferente se a rodarmos 45°.

(e) “Conhecimento do Conteúdo e do Ensino” – *Knowledge of Content and Teaching (KCT)*.

Outro subdomínio descrito, o *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino* – Knowledge of Content and Teaching (KCT), descrito como o conhecimento que engloba saber sobre o ensino e saber sobre a matemática (Ball, Thames & Phelps, 2008). Segundo Delaney (2008), este conhecimento engloba a capacidade de escolha de diferentes materiais para se ensinar e saber qual a sequência (a ordem) mais adequada para se ensinar determinado tópico. Por exemplo, um professor tem de ser capaz de selecionar figuras para mostrar aos alunos – figuras essas que incluam exemplos que não sejam os exemplos-tipo e estereotipados, de modo a tornar a percepção e o conhecimento dos alunos sobre figuras mais seguro e capaz.

(f) *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo – Knowledge of Content and Curriculum.*

Por fim, o *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo*, já definido por Shulman (1986), caracteriza-se pela noção dos tópicos a serem trabalhados em cada tema (nos diferentes níveis) e dos materiais necessários ao seu ensino

Além da estrutura do MKT, o grupo de investigação de Michigan realizou investigações para verificar se as questões de escolha múltipla que construíram mediam, com rigor e confiabilidade, o conhecimento dos professores, neste âmbito. Esta temática será abordada no próximo subcapítulo.

2.3.2. Medir o MKT

Através do projeto *Learning Mathematics for Teaching* (LMT), foi desenvolvido um conjunto de questões de escolha múltipla, a sua maioria (ainda) utilizadas atualmente, para estudar e medir o MKT. A *National Science Foundations* (NSF) financiou este trabalho, por várias subvenções, e o *Study Instructional Improvement* financiou a construção de um conjunto inicial destes itens. Heather C. Hill tornou-se a investigadora principal em muitas dessas concessões, juntamente com Deborah Ball, Hyman Bass, Geoffrey Phelps e Steve Schilling.

Este grupo de investigação, através do projeto LMT, desenvolveu e construiu as questões de escolha múltipla, pretendendo fazer uma representação do MKT e medir o conhecimento dos professores, neste âmbito.

As questões construídas pelos membros do *Study of Instructional Improvement/ Learning Mathematics for Teaching*, entre 2000 e 2008, tinham quatro objetivos (Hill, 2007):

- Refletir o conhecimento dos professores utilizado no seu ensino – tanto o conteúdo que ensinam aos seus alunos, como o conhecimento especializado do conteúdo, essencial para os professores ensinarem um assunto aos seus alunos (Hill, Schilling & Ball, 2004);
- Situar estes problemas em contextos que se desenrolam em sala de aula – examinar definições de manuais, desenhar tarefas de sala de aula, avaliar afirmações dos alunos;
- Escrever questões que não representassem qualquer visão particular de como a matemática deve ser pensada;
- Construir questões que diferenciariam os professores.

Os itens construídos pelo projeto LMT caracterizam-se como questões de resposta múltipla, o que conduziu a algumas ressalvas por parte de alguns investigadores, no que diz respeito à validade destas medidas do MKT. Beswick, Callingham & Watson (2012, p. 131) consideraram que as “várias facetas do conhecimento do professor se desenvolvem em conjunto”, e, por isso, não se conseguem medir separadamente através de questões de escolha múltipla. Na mesma linha de ideias, Haertel (2004) afirma que sendo estas questões de escolha múltipla podem conduzir a trivial o ato complexo de ensinar.

Não obstante, algumas das questões construídas pelo LMT diferem de questões de escolha múltipla standard.

As questões de escolha múltipla standard consistem em duas partes: um problema e uma lista de soluções sugeridas. Esta lista geralmente contém uma alternativa de resposta correta e uma ou mais respostas erradas.

Algumas das questões desenvolvidas pelo grupo de investigação de Michigan não conterm nenhuma alternativa de resposta errada, mas sim apresentarem uma mais correta ou mais completa, uma das opções de resposta descreve-se como “Todas as afirmações acima”. Sobre este aspeto, Osterlind (1997) recomenda que este tipo de questões têm de ser usadas com cuidado e que estas questões não devem ser incluídas no mesmo instrumento que contenha questões de escolha múltipla ditas standards (Haladyna, 2004).

Por outro lado, se uma questão de um teste tiver duas de três alternativas de resposta corretas, o participante pode responder corretamente através da opção de resposta: “Todas as afirmações acima”.

Outra diferença das questões de escolha múltipla do LMT caracteriza-se por algumas das questões terem como opção de resposta “Não tenho a certeza”, como se apresenta na Figura 4, em baixo, numa das questões de escolha múltipla em estudo na presente investigação. Esta opção é sempre codificada como incorreta. Assim, à partida, os professores sabem que uma das opções de resposta será um *distrator*. Isto pode convidar os professores a evitar esta solução. Outros professores escolhem esta solução para evitar responder de forma errada. Haladyna (2004) recomenda que todos os *distratores* têm de ser plausíveis.

Mr. Allen encontrava-se confuso numa manhã quando estava a preparar uma aula. Percebendo que dez elevado a dois era 100, questionou-se sobre que potência de 10 seria igual a 1. Perguntou a Ms. Berry na porta ao lado. O que deveria ela ter respondido?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) Não existe nenhuma potência de 10 que igual a 1
- (d) -1
- (e) Não tenho a certeza.

Figura 4 - Exemplo de uma questão presente num questionário de medição do MKT
(Hill, Schilling & Ball, 2004)

Baseados, assim, na hipótese dos domínios do *Conhecimento Matemático para Ensinar*, posteriormente organizados por Deborah Ball, Mark Thames e Georgey Phelps (2008), Ball, Hill e os seus colegas desenvolveram itens de escolha múltipla, que começaram a construir em 2001 e estas questões de escolha múltipla pretendiam medir o MKT.

Estas questões estavam divididas em diferentes domínios do conteúdo: *conceitos numéricos, operações, padrões, funções e álgebra*.

Segundo Hill, Schilling e Ball (2004), *conceitos numéricos* e *operações* foram tópicos selecionados porque compõem uma grande parte do currículo e porque existe um trabalho útil e importante no ensino e aprendizagem destes tópicos. *Padrões, funções e álgebra*, Hill, Schilling e Ball (2004) justificam o seu estudo por serem tópicos incluídos recentemente no currículo K-6, permitindo, assim, saber-se de que forma e o que os professores sabem sobre estes tópicos e, por outro lado, estudar-se a relação entre a profundidade do conhecimento dos professores de um dado tópico com a experiência do seu ensino desse tópico.

Por outro lado, dentro de cada tópico, Hill, Ball e Schilling (2004) dividiram as questões em duas áreas do conhecimento: o *Conhecimento do Conteúdo* – CK do professor – e o *Conhecimento dos Alunos e do Conteúdo* – KSC. Não obstante, em 2001, aquando desta investigação, o tópico *padrões, funções e álgebra* apresentava-se como recente nos currículos. Por esta razão, neste domínio, apenas se investigou a área *Conhecimento do Conteúdo*, tal como se apresenta em baixo na Tabela 2.

Tabela 2 – Tópicos do currículo de matemática e respetivo conhecimento analisados
(Hill, Ball & Schilling, 2004, p. 16)

Tópico	Domínios do conhecimento	
	<i>Conhecimento do conteúdo</i>	<i>Conhecimento dos alunos e do conteúdo</i>
Conceitos numéricos		
Operações		
Padrões, funções e álgebra		

Além de construírem questões referentes a diferentes domínios da matemática e que avaliavam áreas distintas do conhecimento do professor, como está explanado na Tabela 2, estes investigadores tiveram em conta, no desenho das questões a aplicar, as diferentes tarefas do professor, como por exemplo: escolha de representações, interpretação de uma resposta de um aluno, análise de dificuldades dos alunos, avaliação da correção e da adequação dos seus materiais ao currículo, entre outras (Hill, Schilling & Ball, 2004).

Refira-se que questões pertencentes à mesma célula da segunda coluna da Tabela 2 podem caracterizar-se como diferentes, na medida em que umas questões exigem apenas *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCK) e outras já requerem que o professor possua *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (SCK) (Ball, Hill & Bass, 2005).

Hill, Schilling e Ball (2004) mostram em dois exemplos, apresentados em baixo, respetivamente, o uso do *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCK) (Exemplo 1) e do *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (SCK) (Exemplo 2).

Exemplo 1
Mr. Allen encontrava-se confuso numa manhã quando estava a preparar uma aula. Percebendo que dez elevado a dois era 100, questionou-se sobre que potência de 10 seria igual a 1. Perguntou a Ms. Berry na porta ao lado. O que deveria ela ter respondido? (f) 0 (g) 1 (h) Não existe nenhuma potência de 10 que iguale a 1 (i) -1 (j) Não tenho a certeza.

Exemplo 2			
Imagine que estás a trabalhar com uma turma o algoritmo da multiplicação com mais do que um algarismo nos dois fatores. Entre as respostas dos teus alunos, verificaste que alguns deles usaram diferentes algoritmos:			
	Aluno A	Aluno B	Aluno C
	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 75 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ + 700 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 25 \\ 150 \\ 100 \\ + 600 \\ \hline 875 \end{array}$
	Método que trabalha com todos os números inteiros	Método que <u>não</u> trabalha com todos os números inteiros	Não sei
a) Método A	1	2	3
b) Método B	1	2	3
c) Método C	1	2	3

Figura 5 – Exemplos de questões, construídas pelo LMT, que requerem Conhecimento do Conteúdo (Hill, Schilling & Ball, 2004)

Como se pode observar nos exemplos a cima, no primeiro, exige-se apenas o conhecimento da noção de potência e do valor de uma potência de base diferente de zero e expoente zero. Isto é, esta questão requer apenas conhecimento de conteúdos matemáticos.

Por outro lado, no Exemplo 2, apresenta-se uma questão que pretende avaliar a destreza do professor na análise de resoluções levadas a efeito pelos seus alunos. Neste caso, além do professor ter de saber resolver o algoritmo da multiplicação, tem de ser capaz de atribuir a cada método apresentado pelos seus alunos qual ou quais se adequam ao trabalho com todos os números inteiros.

Na mesma linha de ideias, questões pertencentes a células da terceira coluna da Tabela 2 podem classificar-se como diferentes, na medida que o KSC que requerem aos professores é distinto, tal como se exemplifica em baixo, nos dois exemplos apresentados por Hill, Ball e Schilling (2004). Estes autores referem que nestes dois exemplos é exigido um conhecimento distinto do conteúdo e dos alunos, uma vez que no exemplo 3 para se resolver o problema corretamente exige-se um conhecimento dos erros mais frequentes dos alunos na ordenação de números decimais, enquanto que no exemplo 4, exige-se um conhecimento dos erros mais comuns dos alunos na resolução de algoritmos da adição, ou então pressupõe-se que o

professor tenha uma capacidade de analisar, com detalhe, uma resolução matemática, para lhe ser possível responder corretamente a esta questão.

Exemplo 3
Mr. Fitzgerald tem vindo a ensinar os seus alunos a comparar números decimais. Ele está a conceber um exemplo para aplicar aos seus alunos de modo a que lhe mostre se os seus alunos sabem ordenar corretamente números decimais. Qual destes conjuntos é mais adequado propor? (a) 0,5; 7; 0,01; 11,4 (b) 0,60; 2,53; 3,14; 0,45 (c) 0,6; 4,25; 0,565; 2,5 (d) Qualquer uma das três opções iria ser uma boa proposta. Requer-se que os alunos saibam ler e interpretem os números decimais.
Exemplo 4
Mrs. Jackson está-se a preparar para o exame de estado, e está a preparar umas mini-aulas para os seus alunos, focando-se, em particular, nas dificuldades que têm apresentado no algoritmo da adição. Para tornar a sua instrução mais individualizada, organiza os alunos em grupos, de acordo com o tipo de erro que cometeram no último teste. Mrs. Jackson verificou três erros dos alunos nestes testes: I) $\begin{array}{r} 1 \\ 38 \\ 49 \\ + 65 \\ \hline 142 \end{array}$ II) $\begin{array}{r} 1 \\ 45 \\ 37 \\ + 29 \\ \hline 101 \end{array}$ III) $\begin{array}{r} 1 \\ 32 \\ 14 \\ + 19 \\ \hline 64 \end{array}$ Quais são as opções que apresentam o mesmo tipo de erro? (a) I e II (b) I e III (c) II e III (d) I, II e III

Figura 6 – Exemplos de questões, construídas pelo LMT, que exigem KSC (Hill, Schilling & Ball, 2004)

Posteriormente à construção das questões, o grupo de Michigan realizou uma análise psicométrica que “foi conduzida para se estabelecer a consistência das pontuações dos itens de escolha múltipla” (Delaney, 2008, p.40) que foram consideradas “boas a excelentes” (Hill et al., 2004, p. 25). Segundo Hill et al. (2004), esta análise psicométrica foi realizada com o objetivo de estender os itens, que refletem os domínios do MKT colocados como hipótese pelo grupo de investigadores de Michigan, a outros estudos.

Posto isto, vários investigadores utilizaram estas questões de escolha múltipla para estudar o conhecimento matemático dos professores. Por exemplo, Hill (2007) usou estes itens de escolha múltipla para conduzir o primeiro estudo nacional do MKT de professores do 3.º ciclo do ensino básico (*middle school*).

Dos estudos referentes à aplicação das questões de escolha múltipla e à sua análise resultaram várias conclusões acerca do MKT. Por exemplo, em 2008, Hill e os seus colegas descobriram que os professores com elevado MKT pensam de forma qualitativa diferente dos professores que não obtiveram uma boa classificação nos testes. Além disso, neste estudo, também se verificou que professores com baixos resultados tendem a ter mais erros matemáticos nas suas aulas (Hill et al., 2008).

Posteriormente aos bons/excelentes resultados referentes à consistência das questões de escolha múltipla construídas pelo LMT, vários investigadores têm vindo a adaptar estas medidas ao seu país e aplicá-las, como se vai abordar no próximo subcapítulo.

2.4. Adaptação, validação e aplicação da Teoria do MKT noutros países/contextos

Os instrumentos para se medir o MKT têm sido associados de forma positiva no tocante à relação entre a qualidade matemática da instrução da matemática com a aprendizagem dos alunos. No entanto, como os instrumentos de medição do MKT foram desenvolvidos para serem aplicados nos EUA, até 2008, os testes de medição só foram aplicados nesse país.

Em 2008, Delaney foi considerado o investigador pioneiro ao aplicar estas medidas noutro contexto, pois adaptou e usou um conjunto de itens do MKT na Irlanda.

Desde esta data, vários investigadores têm adaptado e, posteriormente, usado as medidas ou instrumentos, desenvolvidos pelo *Learning Mathematics for Teaching Project* da Universidade de Michigan, em diferentes países, fora dos EUA.

A primeira tentativa foi de Delaney (2008), como já foi referido, seguindo-se Cole (2009), que procedeu da mesma forma no Gana, Know (2009) na Coreia do Sul, Ng (2011) na Indonésia, e Mosvold e Bjuland (2009) na Noruega, entre outros.

Vários investigadores, como Cole (2012), Delaney (2012), Fauskanger (2012), entre outros, têm demonstrado que a adaptação das medidas do *MKT* a outro país não se patenteia

como um processo fácil e que “requer um processo que considere as diferenças entre os contextos, incluindo a cultura, a língua e a prática de ensino” (Cole, 2011, p. 173).

Assim, Delaney (2012), com o objetivo de usar as medidas construídas, aplicadas e validadas nos EUA, para estudar o conhecimento matemático dos professores irlandeses, propôs e desenvolveu um processo constituído por três estádios:

- (1) estabelecer a equivalência do construto *Conhecimento para Ensinar Matemática – MKT*, nos EUA e na Irlanda, descritos por Singh (1995);
- (2) adaptar as questões construídas e aplicadas nos EUA ao contexto irlandês;
- (3) validar o uso destas questões na Irlanda.

Assim, apesar do processo se ter caracterizado como trabalhoso, da sua investigação, Delaney concluiu que “as medidas podiam ser usadas para descrever o MKT dos professores da Irlanda” (2012, p. 212).

Na mesma linha de ideias, outros investigadores, já mencionados, também provaram ser possível adaptar e aplicar as medidas desenvolvidas nos EUA nos seus países. Por exemplo Cole referiu que “as medidas do MKT podem ser usadas no contexto do Gana depois de uma adaptação cuidadosa” (2011, p. 173).

Nesta perspetiva, tendo o grupo de Michigan, através de uma análise psicométrica, concluído que as questões desenvolvidas por estes investigadores e aplicadas a professores dos EUA, tendo como base a *Teoria do Conhecimento Matemático para Ensinar* – podem ser estendidas a outros estudos, e até já tendo sido usadas por outros investigadores – Delaney (2008), Cole (2009), Know (2009), Ng (2011), Mosvold e Bjuland (2009) – noutros países, pretende-se usar, similarmente, neste trabalho, a *Teoria do Conhecimento Matemático para Ensinar* para se estudar o Conhecimento Matemático dos professores de 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, em Portugal.

Capítulo 3 – Metodologia

Insanity: doing the same thing over and over again and expecting different results.

Albert Einstein (1949)

Neste capítulo irão descrever-se as diferentes metodologias de investigação adotadas para o desenvolvimento deste estudo. Neste sentido, tenciona-se:

- (1) expor alguns aspetos teóricos sobre metodologias de investigação;
- (2) descrever as várias etapas do presente estudo e apresentar, de forma fundamentada, a(s) metodologia(s) adotada(s) em cada uma.

Assim, este capítulo está dividido em diferentes secções: na primeira descrevem-se os aspetos teóricos relativos às metodologias investigativas, aos instrumentos de recolha de dados e aos planos de investigação e na segunda secção explora-se a metodologia adotada neste estudo, em que se abordam as diferentes fases do presente trabalho e o tipo de investigação associado a cada uma.

3.1. Aspetos teóricos

Em Educação e em Psicologia, são diversos os critérios que podem ser utilizados para categorizar as investigações. Segundo Almeida e Freire (2017), se o critério disser respeito à *finalidade* do estudo, podem-se dividir as investigações em *básicas* ou *puras* se estão mais focadas na definição de leis gerais; em *investigações aplicadas* ou *investigações práticas* se são movidas pela resolução de problemas. Se conjugam estas duas finalidades, a investigação tem vindo a ser denominada de “*investigação-ação*”.

Considerando outro critério – a *profundidade* – segundo Almeida e Freire (2017), a investigação caracteriza-se como *exploratória*, *descritiva*, *correlacional* e *experimental*, partindo-se gradativamente, de um grau mais indutivo (*exploratória*) para um nível mais dedutivo (*experimental*), em que aqui (nesta última), o foco são as relações de causa-efeito.

Em termos da *metodologia*, segundo Almeida e Freire (2017, p. 17), “as investigações psicológicas podem ser objeto de várias classificações”. Almeida e Freire (2017) referem que se a atenção estiver sobre o terreno, as investigações podem ser mais *laboratoriais* ou mais de *campo*; por outro lado, podem ser estudos ou mais de índole *transversal* ou *longitudinal*; ou podem procurar a definição de leis gerais – *investigação nomotética*, ou então mais centrada num dado aspeto, na singularidade – *investigação ideográfico*.

Por último, as investigações nas ciências sociais e comportamentais podem ser caracterizadas segundo três categorias: *investigação qualitativa*, *investigação quantitativa* e *investigação mista*. Teddie e Tashakkori (2009) caracterizaram a *investigação quantitativa* – orientada para as ciências sociais e comportamentais – como aquela trabalha com o paradigma positivista/pós-positivista e que está principalmente interessada em dados numéricos e na sua análise. Estes investigadores referem que a metodologia qualitativa se baseia no paradigma construtivista e foca-se em dados narrativos e na sua análise. Teddie e Tashakkori (2009) referem que a metodologia mista se baseia no pragmatismo e interessa-se pela recolha e análise de ambos os tipos de dados: numéricos e narrativos.

3.1.1. Métodos de investigação

A escolha da metodologia ou metodologias utilizada(s) numa dada investigação decorre da análise de diversos fatores de entre os quais se destacam os objetivos operacionais. Estes objetivos “vão depender da natureza dos fenómenos e das variáveis de presença, bem como das condições de maior ou menor controlo em que a investigação vai ocorrer” (Almeida & Freire, 2017, p. 15).

A natureza das questões de investigação caracteriza-se como um dos fatores mais determinantes na escolha do tipo de metodologia a ser usada para a realização de um estudo. As questões qualitativas caracterizam-se como abertas, evolutivas, não direcionadas (Creswell, 2003), suaves, flexíveis e subjetivas, estando associadas à descrição e narração de experiências, em que a sua formulação usa frequentemente os termos *como* e *porquê*. As questões de natureza quantitativa, geralmente iniciam-se com *qual* ou *quais* e são mais objetivas e específicas, precisas e inflexíveis.

Além da natureza das questões, o tipo de metodologia a adotar num estudo é condicionada por outros aspetos que, segundo Creswell (2003), devem responder a três questões:

- (1) Que paradigma é seguido pelo investigador?
- (2) Quais as estratégias de investigação mais adequadas?
- (3) Que procedimentos de recolha e análise de dados vão ser utilizados? .

O *paradigma* designa os pressupostos filosóficos subjacentes às escolhas, ao pensamento e à ação do investigador (Mertens, 1998).

A metodologia qualitativa, apesar de ter surgido antes da metodologia quantitativa, tem tido grande relevância nas Ciências Sociais, uma vez que tem em conta a vertente interpretativa dos fenómenos sociais e dos comportamentos humanos. Esta metodologia tem por objetivo descrever e compreender fenómenos (Almeida & Freire, 2017), descrever o que os sujeitos pensam e as suas ações. Assim, ao contrário dos estudos de metodologia quantitativa, em geral, a metodologia qualitativa exige uma amostra de pequena dimensão, bem como a vivência dum longo período de tempo do investigador com o sujeito a investigar no seu contexto natural.

A investigação qualitativa assenta no *paradigma interpretativo* (Erickson, 1986). Erickson (1986) utiliza a expressão “investigação interpretativa” pelo facto de ser possível serem usadas diferentes designações no âmbito destas abordagens recusando-se por isso a defini-las como não quantitativas.

No entanto, há autores que, relativamente à investigação qualitativa, também fazem referência ao *paradigma construtivista* (Guba & Lincoln, 1994) e ao *paradigma fenomenológico* (Patton, 2002), que, por vezes, são considerados sinónimos. Os construtivistas têm por objetivo estudar a realidade humana, que consideram ser uma realidade socialmente construída (Mertens, 1998). Neste *paradigma* foca-se a não separação entre o objeto de estudo e o investigador.

A investigação qualitativa possui cinco características, de acordo com Bogdan e Biklen (1994):

- (1) Os dados são recolhidos no ambiente natural e cabe ao investigador revê-los e analisá-los, sendo o investigador o instrumento principal.
- (2) Os dados apresentam-se em forma de palavras ou imagens e não de números, sendo notas de campo, vídeos, transcrições de entrevistas, documentos pessoais

e/ou outros documentos, o que caracteriza a investigação qualitativa como descritiva.

- (3) Os investigadores qualitativos, mais do que os resultados ou produtos dos estudos, interessam-se pelo processo.
- (4) A análise dos dados é realizada indutivamente, isto é, à medida que os dados vão sendo recolhidos e analisados vão-se construindo abstrações.
- (5) O significado tem uma importância fulcral numa investigação qualitativa.

Na metodologia qualitativa destacam-se como instrumentos de investigação a narrativa, o estudo de caso, estudo fenomenológico, o estudo etnográfico e *event-record*.

Por outro lado, a metodologia quantitativa é utilizada pelo investigador quando se pretende quantificar dados e controlar variáveis empíricas, usando-se, geralmente, amostras de grande dimensão. Neste tipo de investigação, usam-se procedimentos estatísticos para efetuar o tratamento e análise dos dados.

Segundo alguns autores, como Almeida e Freire (2017), a metodologia quantitativa pode-se dividir em *quantitativa-experimental* e *quantitativa-correlacional*.

O primeiro tipo de metodologia pretende a “predição e explicação de fenómenos” (Almeida & Freire, 2017, p. 18) está associado ao método experimental e é orientado pela corrente filosófica do *positivismo*. Este *paradigma*, o *positivismo*, “reflete uma filosofia determinista na qual as causas determinam os efeitos ou resultados obtidos” (Creswell, 2003, p. 7). Os *positivistas* defendem que há uma só verdade, e a realidade é objetiva, independente da percepção humana. A constante procura por uma verdade absoluta, através da observação objetiva e da medição, requer que o investigador seja neutro, que se distancie do seu objeto de estudo para não comprometer os resultados da experiência.

Além da limitação que foi apontada aos *positivistas*, devido à noção da verdade absoluta em sede do conhecimento, verdade essa passível de ser totalmente conhecida, nos estudos da criança, este *paradigma* foi criticado na medida em que a criança era estudada através de um padrão, o que pressuporia a existência de um não padrão, isto é, de crianças anormais.

Por outro lado, a metodologia *quantitativa-correlacional* estuda as relações entre variáveis, ou seja, utiliza os coeficientes de correlação (Almeida & Freire, 2007). Esta metodologia situa-se entre o método descritivo e o método experimental (Almeida & Freire,

2007), na medida em que não só descreve fenómenos, mas estabelece também relações entre as variáveis.

Na metodologia de investigação quantitativa os métodos de recolha de dados mais frequentes são: questionários, observações estruturadas, escalas, entrevistas estruturadas e testes.

A investigação qualitativa e quantitativa distinguem-se e complementam-se em diversos aspetos. Na tabela 3 a baixo, apresenta-se um sumário descrito por Bogdan e Biklen (1994) sobre as características destes dois tipos de investigação, no que diz respeito: à afiliação teórica e académica, aos objetivos e ao plano pelo qual se regem, ao tipo de dados e de amostra, à relação que se estabelece com os sujeitos, aos instrumentos, ao tipo de análise de dados e aos problemas inerentes ao uso de cada tipo de investigação.

Tabela 3 – Algumas características das abordagens qualitativa e quantitativa
(Bogdan & Biklen, 1994).

	Investigação qualitativa	Investigação quantitativa
Afiliação teórica	Interação simbólica; cultura; etnometodologia; idealismo; fenomenologia.	Funcionalismo estrutural; empirismo lógico; realismo; positivismo; teoria dos sistemas; comportamentalismo.
Afiliação académica	Sociologia; antropologia; história.	Psicologia; sociologia; economia; ciência política.
Objetivos	Desenvolver conceitos sensíveis; teoria fundamentada; descrever realidades múltiplas; desenvolver a compreensão.	Tese de teorias; encontrar relações entre variáveis; encontrar factos; descrição estatística; predição.
Plano	Progressivo; flexível; geral; intuição relativa ao modo de avançar.	Estruturado; predeterminado; formal; específico; plano detalhado de trabalho.
Dados	Descritivos; fotografias; documentos pessoais; o discurso dos sujeitos; notas de campo; documentos oficiais e outros.	Quantitativos; variáveis operacionalizadas; codificação quantificável; estatística; contagens; medidas.
Amostra	Pequena; amostragem teórica; não representativa.	Ampla; seleção aleatória; estratificada; controlo de variáveis extrínsecas; grupos de controlo; precisa.
Técnicas ou métodos	Observação; observação participante; estudo de documentos vários; entrevista aberta.	Experimentos; inquéritos; entrevista estruturada; observação estruturada; conjuntos de dados.
Relação com os sujeitos	Empatia; contacto intenso; ênfase na confiança: o sujeito como amigo;	Circunscrita; distante; curta duração; sujeito-investigador.

	igualdade; ser neutral.	
Instrumentos	Gravador; transcrição.	Inventários; computadores; questionários; escalas; índices; resultados de testes.
Análise de dados	Contínua; indução analítica; modelos, temas, conceitos; método comparativo constante; indutivo.	Dedutiva; estatística; verifica-se após a conclusão dos dados.
Problemas com o uso da abordagem	Demorada; os procedimentos não são estandardizados; difícil de síntese de dados; garantia; dificuldade em estudar populações de grandes dimensões.	Controlo de outras variáveis; intrusão; reificação; validade.

Ao longo dos anos, os investigadores puristas das metodologias qualitativas e quantitativas consideravam-nas incompatíveis e que quando fundidas causavam um conflito ontológico e epistemológico.

No entanto, na década de 90, com a Guerra de Paradigmas (Tashakkori & Teddlie, 2003), como se intitulou, estas ideias puristas foram ultrapassadas, com uma nova metodologia, a *metodologia mista*, que integra as metodologias de investigação qualitativa e quantitativa.

Das controvérsias inerentes ao *positivismo* e ao *construtivismo* emergiu o paradigma mais adequado à metodologia mista: o *pragmatismo*.

A metodologia mista utiliza no mesmo estudo métodos quantitativos e qualitativos, pretendendo o equilíbrio entre as duas vertentes, tendo por objetivo usufruir das potencialidades de cada um destes dois métodos e enfraquecer as suas limitações. Por um lado, o uso da metodologia qualitativa vem colmatar o facto de a metodologia quantitativa não assegurar a subjetividade dos fenómenos sociais e dos comportamentos humanos e da (quase) impossibilidade da separação do investigador e do objeto de estudo, e, por sua vez, a metodologia quantitativa introduz mais rigor e objetividade à investigação.

3.1.2. Plano de investigação

O plano (*design*) caracteriza-se por um conjunto de ações e orientações a que uma investigação deve obedecer, sendo determinante no processo investigativo. Uma investigação terá tantos melhores resultados, quanto for mais bem planificada (Jimenez, 1986).

Durante esta etapa do processo de investigação, segundo Jimenez (1986), devem ser delimitados pelo menos os seguintes aspetos:

- a) O problema científico que motiva a investigação;
- b) Os métodos que serão utilizados para o resolver;
- c) Os recursos necessários e disponíveis;
- d) O tempo necessário para o realizar;
- e) A forma como será processada a informação e os métodos que serão usados na sua análise.

Segundo Almeida e Freire (2017), em primeiro lugar, um plano de investigação deve garantir que os procedimentos vão de encontro aos objetivos do estudo e se adequam à natureza do problema de investigação, isto é, um plano deve ser *rigoroso e adequado*.

Em segundo lugar, segundo Almeida e Freire (2017), o plano de investigação deve ser *válido*, isto é, deve garantir a validade da informação recolhida, sendo crucial que controle as diferentes origens do erro que poderão colocar em causa o significado dos resultados – *validade interna* – e a generalização destes resultados a outras amostras e situações – *validade externa*.

A validade interna diz respeito ao “grau com que, no final da investigação, se consegue atribuir os resultados observados na variável dependente à manipulação da variável independente” (Almeida & Freire, 2017, p. 52). Estes autores enumeram vários fatores que afetam a validade interna de um estudo: contexto; maturação e/ou desenvolvimento dos sujeitos; seleção diferencial dos sujeitos; mortalidade experimental; efeitos de interações; reatividade da medida; instrumentação; regressão estatística; difusão ou imitação do tratamento.

A validade externa está relacionada com a generalização dos resultados obtidos a outras amostras, à população em geral ou a outras situações ou condições reais. Segundo Almeida e Freire (2017), a reatividade experimental, as interações tratamento-atributos, o efeito reativo ou interativo do pré-teste, as interferências de tratamentos múltiplos e a novidade do tratamento são fatores que influenciam a validade externa de uma investigação.

Quando se realiza um plano de investigação e uma investigação propriamente dita é crucial garantir-se a sua qualidade. A qualidade de uma investigação está diretamente relacionada com questões de *validade* (interna e externa) e *fiabilidade*.

A *fiabilidade* está relacionada com a presunção que a repetição de um estudo nas mesmas condições conduziria aos mesmos resultados. Bogdan e Biklen (1994) consideraram que, numa investigação qualitativa, a garantia é entendida mais como uma correspondência entre os dados que são registados e aquilo que de facto se passa no local de estudo do que como uma consistência literal entre diferentes observações.

Nesta linha de ideias, pode-se considerar que dois investigadores que realizem o mesmo estudo, no mesmo local, nas mesmas condições, tirem diferentes conclusões e obtenham dados diferentes, apesar de ambas as investigações serem consistentes.

Neste trabalho, irá utilizar-se uma metodologia mista que, segundo Tashakkori e Creswell (2007), se refere à integração de descobertas e inferências “using both qualitative and quantitative approaches or methods in a single study or program of inquiry” (p. 4).

Ao longo dos anos, os investigadores foram definindo diferentes planos de investigação baseados em metodologias mistas. Tedlie e Tashakkori (2009) referiram que estes planos são produzidos por dois fatores: pela componente qualitativa do estudo e pela sua natureza oportunista. O primeiro fator refere-se a uma investigação que tem uma estratégia emergente, mas que finaliza com métodos de investigação qualitativos. O segundo fator diz respeito a estudos que têm à partida definida a natureza dos seus métodos de investigação, mas, ao longo da realização dos trabalhos, surgem dados de outro cariz que exigem outros tipos de recolha e de análise.

Tedlie e Tashakkori (2009) agruparam sete critérios que os investigadores criaram para definirem as metodologias de pesquisa mistas (e.g., Creswell, Plano Clark, Gutmann & Hanson, 2003; Greene, Caracelli & Graham, 1989; Greene et al., 1997b; Johnson & Onwuegbuzie, 2004; Morgan, 1998; Morse, 1991, 2003, citado em Tedlie & Tashakkori, 2009):

- Número de metodologias utilizadas;
- Número de vertentes ou fases;
- Tipo do processo de implementação;
- Estado de integração das abordagens;
- Abordagem metodológica prioritária;
- Funções do estudo de pesquisa;

– Perspetiva teórica e ideológica.

3.2. Metodologia Adotada neste Estudo

Neste subcapítulo, irá ser descrito o processo metodológico utilizado nesta investigação. Para isso, na primeira secção apresentar-se-á as metodologias de investigação utilizadas neste estudo; em 3.2.2. irá explorar-se as diferentes fases do trabalho e os objetivos inerentes a estas e na terceira secção deste subcapítulo vai-se descrever a estrutura do instrumento de recolha de dados central neste trabalho.

3.2.1. Métodos de investigação deste estudo

Neste trabalho, e de acordo com as considerações feitas, pretende-se utilizar uma metodologia mista, que envolva métodos de investigação qualitativos e quantitativos. De um modo geral, pretende-se estudar o conhecimento matemático para ensinar, dos professores que ensinam matemática nos primeiros anos de escolaridade, em Portugal.

O presente estudo utilizou um instrumento de recolha de dados constituído por questões de escolha múltipla construídas por um grupo de investigação da Universidade de Michigan para avaliar o “conhecimento matemático para se ensinar” de professores dos Estados Unidos da América. Para isso, este estudo envolveu a tradução, a adaptação e a validação deste instrumento à realidade portuguesa. Ao longo deste trabalho, quando se aludir ao “questionário” estar-se-á a fazer-se referência ao instrumento de medição do MKT traduzido, adaptado e validado em Portugal, na presente investigação.

Este processo de adaptação do questionário a Portugal caracterizou-se como dinâmico e heterogéneo, composto por métodos qualitativos e quantitativos, uma vez que investigadores que já realizaram esta adaptação a outros países concluíram que o uso de diferentes tipos de

metodologias “podem assegurar com maior qualidade a adaptação das medidas do MKT” (Mosvold et al., 2012, p. 397).

Este estudo será desenvolvido através de métodos qualitativos e quantitativos, como já se disse, que se complementarão ao longo de todo o processo investigativo, tendo como objetivo final o estudo do conhecimento matemático de professores dos 1.º e 2.º ciclos de Matemática em Portugal.

Assim, tal como se apresenta na Figura 7 a baixo, o processo metodológico deste trabalho envolverá abordagens de investigação qualitativas na seleção fundamentada das questões de escolha múltipla, de entre todas as construídas no âmbito do projeto *Learning Mathematics for Teaching*, pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan e na sua tradução e adaptação ao contexto português.

Posteriormente, com recurso ao programa *IBM SPSS Statistics, versão 25*, utilizar-se-ão estatísticas descritivas, como medidas de correlação, para se caracterizar o MKT de uma amostra de professores portugueses.

Todo o processo investigativo será dividido em duas fases que serão descritas no próximo subcapítulo.

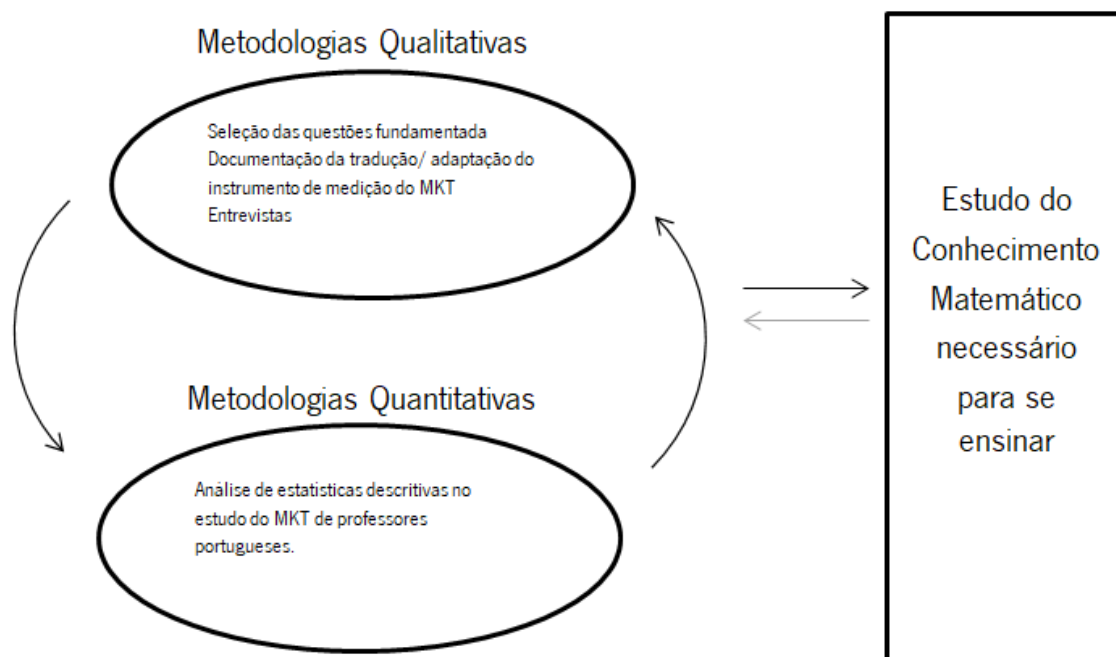


Figura 7 – Processo metodológico do presente trabalho.

3.2.2. Fases do trabalho

Para se realizar este trabalho utilizaram-se diferentes caminhos para se dar resposta às questões de investigação orientadoras do estudo. É oportuno referir que este trabalho desenvolveu-se em duas fases gerais, complementares.

A primeira fase do estudo, que será descrita no Capítulo 4, consistiu na realização do processo de validação dos testes construídos nos EUA, visando adaptar o questionário ao contexto português.

A segunda fase, explorada no Capítulo 5, corresponde ao estudo, propriamente dito, do conhecimento matemático para se ensinar, por parte de professores de matemática dos primeiros anos, em Portugal.

Tal como se pode observar na Figura 8, a primeira fase deste trabalho decorreu durante os dois primeiros momentos.

Nos dois primeiros momentos, concretizou-se a seleção das questões de escolha múltipla, de forma fundamentada, dos testes construídos no âmbito do projeto *Learning Mathematics for Teaching* na Universidade de Michigan. Seguiu-se o processo de tradução e de adaptação das questões selecionadas à realidade portuguesa. Este processo iniciou-se por uma tradução dupla e respetiva adaptação do questionário, seguida da sua validação por parte de seis colaboradores.

O terceiro momento disse respeito à aplicação de um teste, constituído por questões de escolha múltipla trabalhadas nos dois primeiros momentos, já explicitados, a 61 professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico português, bem como a sua análise.

Num quarto momento, realizaram-se entrevistas a dois dos professores intervenientes nesta investigação, com o objetivo de verificar se as suas respostas destes docentes ao questionário são consistentes com o seu raciocínio apresentado nas entrevistas e com a pretensão de se acrescentar mais informação acerca do conhecimento matemático dos professores portugueses.

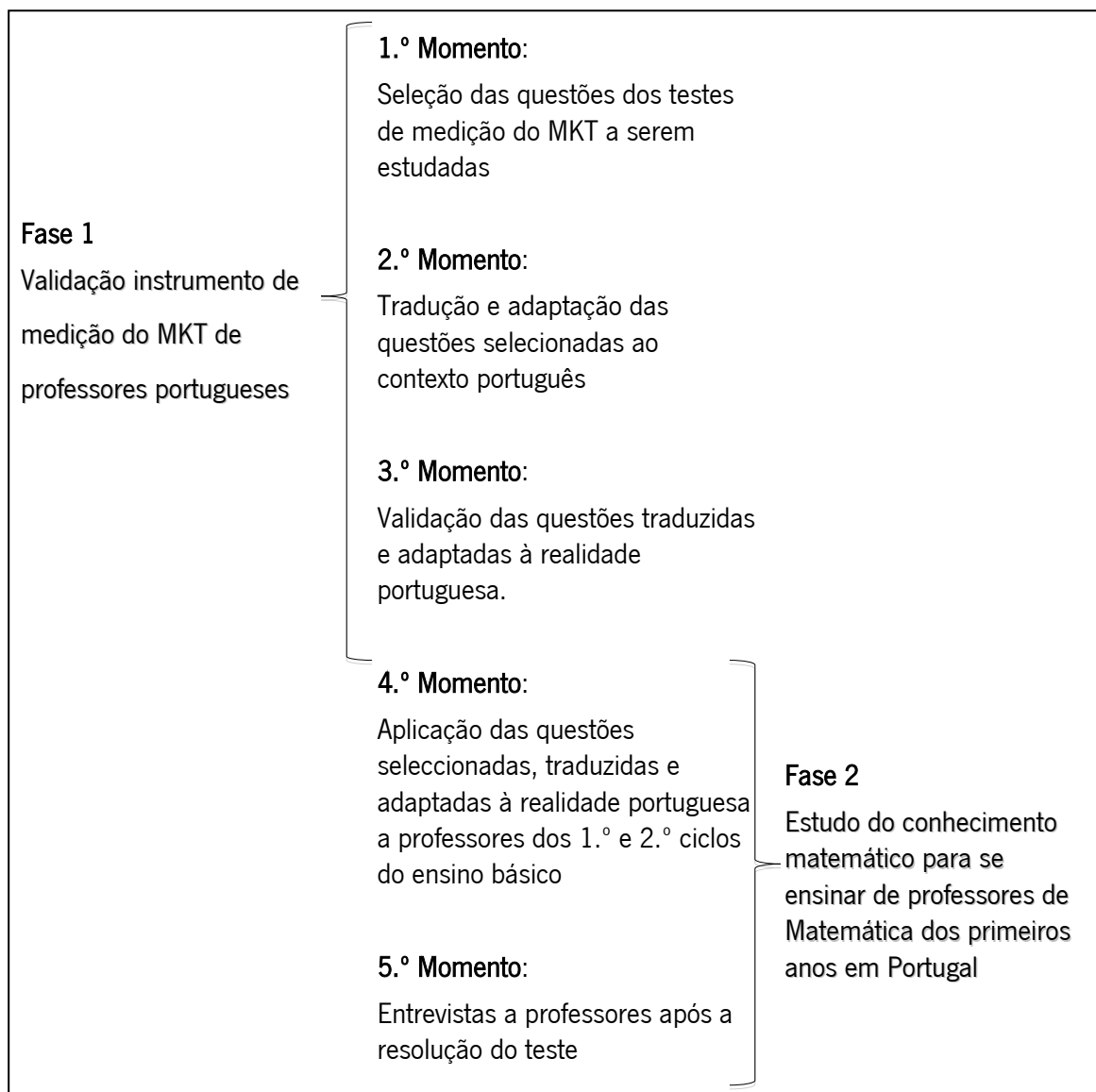


Figura 8 – Esquema representativo das fases do presente trabalho investigativo.

Após a apresentação esquemática das fases da investigação, importa especificar os objetivos inerentes a cada uma, tal como se realiza de seguida.

Fase 1 – Validação do instrumento de medição do MKT de professores portugueses

Objetivos:

- a) Analisar as questões de escolha múltipla dos instrumentos construídos pelo projeto LMT na Universidade de Michigan, selecionando as questões que dizem respeito aos primeiros anos do ensino básico e aos domínios de Matemática predominantes no currículo nacional, as que apresentaram melhores resultados no que diz respeito ao “slope” e às “dificuldades” apresentados em estudos estatísticos nos EUA, e que mais se adequam ao contexto português, tendo em conta o Programa do Ensino Básico de Matemática em Portugal.
- b) Traduzir e adaptar o questionário, construído nos EUA, ao contexto português e documentar estes processos;
- c) Validar este instrumento pelo parecer de seis colaboradores investigadores especialistas em educação matemática e professores dos 1.º e/ ou 2.º ciclos do Ensino Básico.

No primeiro momento – *Seleção das questões dos testes de medição do MKT a serem estudadas*, em que se pretende dar resposta ao objetivo a), apresentado em cima, um dos processos realizados disse respeito à análise dos parâmetros “slope” e “dificuldade”, apresentados pelas questões de Número e Operações de 2008 e de Geometria e Medida de 2004, em estudos estatísticos realizados pelo grupo de investigação de Michigan, nos EUA.

No estudo dos testes do LMT, nos EUA, as respostas dos professores às questões de escolha múltipla, presentes no instrumento de recolha de dados, foram analisadas através da “Teoria de Resposta ao Item” (IRT). Este modelo é um ramo da Teoria da Medida usado predominantemente na análise de questionários e, ao invés da Teoria Clássica dos Testes (TCT), investiga de forma individual as propriedades de cada item.

A IRT, teoria da psicometria moderna, é utilizada para medir os traços que são características dos indivíduos que não podem ser medidas diretamente. Neste modelo, a probabilidade de acerto de um item é obtida de acordo com a proficiência do traço latente (Andrade, Tavares & Vale, 2000).

Nestas investigações, o grupo de Michigan, tal como é recomendado no estudo de amostras de grandes dimensões (Harris, 1989), usou a IRT com um parâmetro: a *Dificuldade*.

Além disso, é uma prática nas análises IRT usar-se uma medida denominada de *Slope* para examinar a habilidade de cada item para diferenciar os professores, identificando os que detêm um nível de habilidade particular (Hambleton, Swaminathan & Rogers, 1991). Este valor deve rondar 0,4.

Fornecer apenas as classificações que os professores obtiveram na resolução das questões de escolha múltipla podia não demonstrar com fidelidade o seu “conhecimento matemático para ensinar”, na medida que as questões que o compõem apresentam diferentes graus de dificuldade. Assim, o uso do modelo IRT, pelo LMT, colmatou este facto e relatou o desempenho dos professores americanos na resposta a estas questões, tendo em conta os desafios impostos pelo relatório de pontuações brutas (Bock, Thissen & Zimowsky, 1997).

A “Teoria de Resposta ao Item” apresenta uma escala com um média de 0 e um desvio padrão 1 para estimar o MKT. A IRT utiliza também a mesma escala para estudar dificuldades em questões específicas, o que significa que uma questão com uma dificuldade média apresenta 0, o que implica que um professor com um resultado médio tem 50% de hipóteses de responder a esta questão correctamente (Hambleton, Swaminathan & Rogers, 1991); por sua vez, uma questão considerada fácil apresentará uma dificuldade de -3 e uma questão difícil +3.

No entanto, refira-se desde já que, na Fase 2 do presente trabalho, no 4.º momento, aquando da análise do MKT dos docentes portugueses envolvidos neste estudo, um dos critérios de análise também será o “grau de dificuldade” apresentado pelas questões de escolha múltipla que compõem o questionário. Contudo, este “grau de dificuldade” não será o referido anteriormente, obtido em estudos estatísticos nos EUA, mas sim o apresentado na presente investigação com docentes portugueses. Como se irá verificar mais à frente, este parâmetro do “grau da dificuldade”, ao contrário do que foi feito nos EUA, foi obtido com o uso da Teoria Clássica dos Testes (TCT).

No segundo momento desta fase do presente trabalho, realizou-se a tradução e a adaptação das 52 questões.

O processo de tradução caracterizou-se como uma *tradução dupla* do teste, recomendada por Adams (2005), que se trata de um método de tradução mais utilizado em estudos desta tipologia. Num processo de dupla tradução, e neste processo especificamente, dois tradutores portugueses, traduziram, de forma independente, o mesmo instrumento e, de seguida, compararam-no, discutiram a sua tradução e a sua adaptação ao contexto português, chegando ao produto final: questionário traduzido para a língua do estudo.

Delaney (2012), com o objetivo de usar as medidas construídas, aplicadas e validadas nos EUA, para estudar o conhecimento matemático dos professores irlandeses, propôs e desenvolveu um processo constituído por três estádios:

- (1) estabelecer a equivalência do construto conhecimento para ensinar Matemática – MKT, nos EUA e na Irlanda, descritos por Singh (1995);
- (2) adaptar as questões construídas e aplicadas nos EUA ao contexto irlandês;
- (3) validar o uso destas questões na Irlanda.

O primeiro, *equivalência funcional*, verifica se o construto tem ou não a mesma função em todos os países onde o instrumento será usado (Singh, 1995).

Delaney e os seus colegas (2008) argumentaram que desde que o MKT se definiu como “o conhecimento matemático necessário para se realizar o trabalho de se ensinar matemática” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 395), esta noção do MKT é a mesma em todos os países onde se pensa a matemática. Assim, e usando-se a argumentação lógica, estes investigadores deduziram que se em qualquer lugar os professores necessitam de algumas formas de conhecimento matemático para ensinarem os seus alunos, revela-se evidente que o construto do MKT satisfaz o que é requerido para haver equivalência funcional, apesar de existir a possibilidade de haver diferentes currículos, tradições de ensino ou expectativas diferentes nos respetivos sistemas de ensino (Delaney et al., 2008). O que se deduz que também existe uma equivalência funcional entre o construto MKT, nos EUA e em Portugal.

Em termos de *equivalência concetual*, o grupo de investigadores examinou o construto do MKT mais de perto, estudando o trabalho acerca do ensino na Irlanda. Compararam o seu trabalho com as conceções do trabalho sobre o ensino patente no desenvolvimento do MKT. Estes investigadores também estudaram a literatura sobre o construto, e analisaram as questões baseadas no construto. Descobriram poucas diferenças.

No estudo na Noruega, Mosvold e os seus colegas (2009) definiram duas questões, relacionadas com a equivalência concetual do construto: “o construto MKT tem o mesmo significado na Noruega e nos EUA?” e “as metas para o ensino de matemática no 1.º ciclo na Noruega caracterizam-se como semelhante às dos EUA, de forma a ser-se possível conceptualizar o construto dos EUA - o MKT na Noruega?”.

A *equivalência do instrumento* relaciona-se com a forma e o conteúdo das questões do instrumento. Delaney (2008), baseado em Singh (1995), afirmou que se as questões de escolha

múltipla fossem interpretadas da mesma forma na Irlanda e nos EUA, ter-se-ia um instrumento equivalente. Do mesmo modo, neste trabalho serão analisadas as questões dos questionários, de forma a verificar-se equivalência do instrumento em Portugal e nos EUA.

No presente estudo, à semelhança do que foi realizado por Delaney (2008), garante-se a equivalência funcional e conceitual do construto MKT no contexto português. Quanto à equivalência do instrumento de medição construído pelo LMT na Universidade de Michigan, resume-se a dar-se resposta às questões apresentadas na Figura em baixo, construídas e organizadas por Mosvold e pelos seus colegas (2009).

Além disso, tal como também se apresenta na Figura 9 (em baixo), irá igualmente considerar-se a “equivalência linguística” – assim denominada por Peña (2007) – das questões de escolha múltipla do questionário, à semelhança do que realizou Mosvold (2009), aquando da tradução e adaptação do instrumento de medição do MKT aos professores noruegueses.

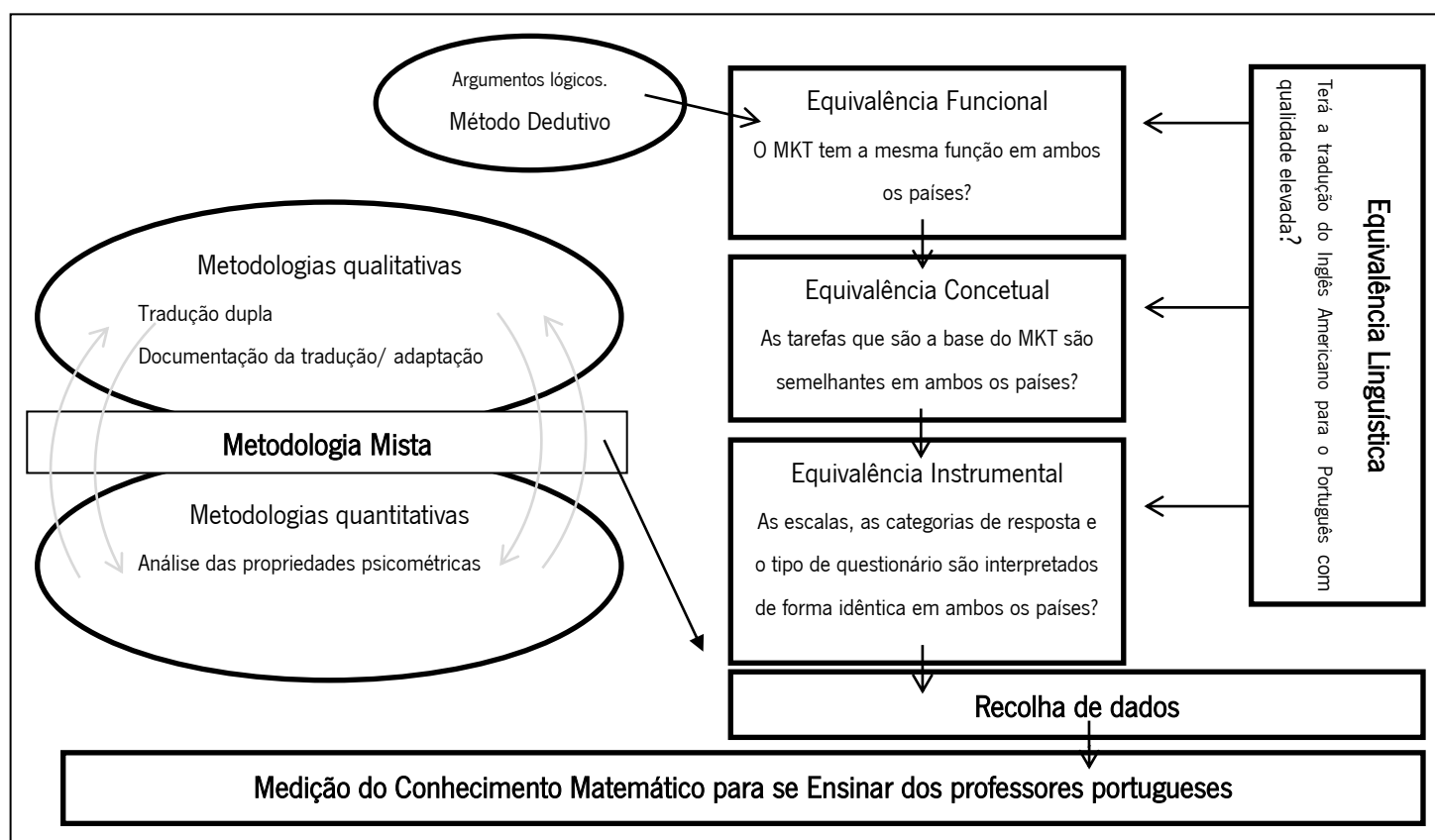


Figura 9 – Esquema representativo da metodologia do presente estudo, baseada em Mosvold et al. (2009, 2012).

Assim, para se garantir que não se realiza o que criticam Crossley e Watson (2003) “uncritical transfer”, e à semelhança do que definiu Cole (2011) na sua investigação, as questões de escolha múltipla a serem aplicadas a professores em Portugal serão adaptadas a este país segundo duas linhas:

- (1) Acessibilidade: O significado literal das questões de escolha múltipla é perceptível pelos professores portugueses?
- (2) Validade do instrumento: Os contextos explicitados nas questões são relevantes e representam de forma autêntica situações reais de ensino em Portugal?

Num 3.º momento – *validação do instrumento de medição do MKT, para se garantir estes dois aspetos*, após a dupla tradução do teste construído pelo grupo de investigadores da Universidade de Michigan e sua adaptação ao contexto português, seis colaboradores – um Professor Doutor especialista na área de educação matemática, uma Professora e Investigadora do ensino do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, duas professoras experientes do 1.º ciclo e duas do 2.º ciclo – resolveram o teste e deram o seu parecer fundamentado quanto: à adequação das questões à realidade portuguesa; à estrutura das questões e à dificuldade que os professores de

1.º e 2.º ciclos de Portugal deveriam ter para lhes dar resposta; à capacidade do questionário, como um todo, para medir o conhecimento matemático necessário para um professor ensinar e/ ou para medir os diferentes tipos de conhecimento exigidos a esses professores.

Fase 2 – Estudo do conhecimento matemático para ensinar de professores de Matemática dos primeiros anos em Portugal

Objetivos:

- a) Analisar, no geral, o desempenho dos professores intervenientes neste estudo, em função das respostas dadas.
- b) Verificar a existência de correlações entre as classificações dos docentes participantes nesta investigação com as seguintes variáveis estatísticas: o tempo de serviço docente; nível de ensino; formação académica; percepção que os professores têm acerca do conhecimento que têm sobre a matemática que precisam de saber para ensinar esta disciplina.
- c) Interpretar a prestação dos docentes de acordo com o domínio da matemática presente nas questões de escolha múltipla.
- d) Estudar as respostas dadas pelos docentes, tendo em conta o domínio do Conhecimento de MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) que as questões avaliam.
- e) Observar o tipo de respostas dadas em função do parâmetro *grau de dificuldade* das questões, obtido na presente investigação.
- f) Verificar a consistência das respostas dadas pelos professores entrevistados no questionário e nas entrevistas, posteriormente realizadas.
- g) Estudar o conhecimento matemático dos professores portugueses entrevistados.

Relativamente a esta Fase 2, ao 4.º momento, mais especificamente ao objetivo e), apresentado em cima, considera-se importante explicitar de que forma foi obtido o parâmetro “grau de dificuldade”.

Como já tinha sido explorado neste subcapítulo, relativamente à Fase 1, em particular ao 1.º momento do trabalho, recorde-se que o “grau de dificuldade” observado nos EUA, pelo LMT, foi obtido através da Teoria de Resposta ao Ítem (IRT).

No presente trabalho, como estará patente no Capítulo 6, a *dificuldade* de cada questão, presente no questionário, será estudada através da Teoria Clássica dos Testes (TCT) que, segundo Pasquali (2003) define o “grau de dificuldade” em termos de percentagem de acertos, logo, e segundo este autor, quanto mais próximo estiver de 100% a taxa de acertos mais fácil é a pergunta. Refira-se quanto às duas teoria de medida que a TCT analisa o resultado final de um teste e IRT as partes e probabilidades, que geram o resultado final (Pasquali, 2003).

No Capítulo 6, irá esclarecer-se de forma (ainda) mais aprofundada, de que forma se calcula o grau de dificuldade das questões que compõem o questionário em estudo e irá estudar-se se existe alguma associação entre este e o grau de dificuldade obtido através de estudos estatísticos com professores americanos, recorrendo-se à IRT.

3.2.3. Recolha de dados: instrumento de medição do MKT em Portugal

O instrumento, em estudo neste trabalho, é constituído por questões de escolha múltipla presentes em dois questionários construídos no âmbito do projeto *Learning Mathematics for Teaching*. “Elementary Number Concepts and Operations – Content Knowledge 2008 versão B” e “Elementar Geometry – Content Knowledge 2004 versão B” (Hill & Ball, 2004; Hill et al., 2004).

O questionário é composto por duas secções – 1.^a Secção: Matemática; 2.^a Secção: Dados pessoais, profissionais e de ensino. Estas secções são antecedidas da capa, que contém o tema do estudo do Doutoramento e os direitos de autor do projeto LMT da Universidade de Michigan, e de uma folha de “Instruções”.

Na folha de instruções apresenta-se um exemplo de uma questão de escolha múltipla, também elaborada no âmbito deste projeto, não presente no questionário, que pretende exemplificar como lhe dar resposta. Também refere o tempo previsto a ser gasto na resposta a cada questão (1'-2') e as condições de voluntarismo e confidencialidade de que este instrumento de recolha de dados depende.

A primeira secção, denominada de “Matemática” é composta por 24 questões. Contabilizando, em cada questão as alíneas, o questionário totaliza 52 perguntas, traduzidas e adaptadas à realidade portuguesa.

As perguntas caracterizam-se por questões de escolha múltipla que contêm diferentes conteúdos matemáticos de dois domínios da Matemática: “Números e Operações” e “Geometria e Medida”.

Pretendem avaliar diferentes tipos de conhecimento do professor, identificados pela equipa de investigação da Universidade de Michigan: como *Conhecimento Comum do Conteúdo*, *Conhecimento Especializado do Conteúdo* e *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos*, na categorização do “Conhecimento Matemático para ensinar” de Ball, Thames e Phelps (2008).

Realizou-se uma caracterização das questões (ver Anexo 1), de acordo com o domínio do MKT que avaliam. De seguida, agupou-se o número de questões, segundo o domínio da Matemática que abordam e o tipo de conhecimento matemático que exigem tal como se apresenta na Tabela 4.

Tabela 4 – Categorização das questões do questionário quanto ao domínio da Matemática e do MKT.

	Números e Operações	Geometria e Medida	Total
Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)	6	10	16
Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)	20	9	29
Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)	3	4	7
Total	29	23	52

A segunda secção “Dados pessoais, profissionais e de ensino” contém questões que visam obter informação sobre os participantes desta investigação, de carácter generalista, profissional, académico, ao nível da sua formação para a docência e ao nível da sua atividade enquanto professores de Matemática. Estes dados têm como objetivos a caracterização dos intervenientes neste estudo e a recolha de variáveis passíveis de serem usadas e correlacionadas com outras presentes na primeira secção do questionário.

Esta parte do questionário, além de ter presente questões de escolha múltipla, também apresenta itens de Likert (Likert, 1932), em que as opções de resposta são as seguintes:

“Discordo Completamente”; “Discordo”; “Indiferente”; “Concordo”; e “Concordo Completamente”.

Com a aplicação deste questionário pretende-se validar, em Portugal, as questões de escolha múltipla presentes no questionário e estudar o conhecimento matemático de professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico em Portugal.

O questionário foi aplicado entre janeiro de 2017 e abril de 2017. Por questões de confidencialidade dos dados e para garantir a veracidade e o rigor dos resultados, quanto ao conhecimento dos intervenientes e à sua gestão de tempo na resolução do questionário, estes questionários foram respondidos no fim de reuniões de avaliação das escolas, na presença da investigadora.

Capítulo 4 – Fase 1 do Estudo

Validação do Instrumento de medição do MKT no contexto português

*A essência do conhecimento consiste em aplicá-lo,
uma vez possuído.*

Confúcio

Esta investigação foi desenhada para validar as questões construídas pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan, liderado pela Deborah Ball, e para medir o conhecimento matemático dos professores necessário para se ensinar no contexto português e, posteriormente, analisar e discutir este conhecimento.

Neste capítulo 4, intitulado de *Fase 1 do Estudo: Validação do Instrumento de medição do MKT de professores Portugueses*, pretende-se apresentar o processo de seleção, tradução, adaptação e validação das questões que constituem o questionário, construídas pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan para medir o MKT de professores nos EUA.

Nesta perspetiva, com este capítulo, pretende-se dar resposta à primeira questão de investigação do presente trabalho: (1) Em que medida e de que modo as medidas construídas nos EUA podem ser usadas para medirem o MKT em Portugal.

Este capítulo está dividido em três subcapítulos. O primeiro subcapítulo – 4.1. Seleção das questões do Teste de Medição do MKT – descreve o processo de seleção das perguntas que virão a formar o instrumento de recolha de dados do presente estudo, tendo em conta vários critérios, entre os quais (e com grande relevância) a adequação dos conteúdos matemáticos presentes nas questões ao programa português.

No segundo subcapítulo, 4.2. Descrição das questões, irão caracterizar-se as 52 questões selecionadas no primeiro subcapítulo, tendo em conta o (s) conteúdo (s) matemático (s) contemplados, o conteúdo da tarefa, o tipo de conhecimento matemático do professor que avalia, segundo a categorização de Ball, Thames e Phelps (2008) e o grau de dificuldade que apresentaram nos estudos realizados nos EUA.

Por último, em 4.3. Tradução e adaptação do teste ao contexto português, irá documentar-se estes dois processos complementares divididos em duas fases. Numa primeira fase irá

descrever-se a tradução/ adaptação realizada por dois tradutores independentes e, posteriormente, discutida. Numa segunda fase, irá apresentar-se o parecer de seis colaboradores acerca da tradução/ adaptação do instrumento à realidade portuguesa. Por último, irá tirar-se conclusões acerca da validade deste teste em Portugal.

4.1. Processo de seleção das questões do Teste de Medição do MKT

Este momento caracterizou-se pela escolha fundamentada das questões de escolha múltipla a serem contempladas no instrumento de medição do “conhecimento matemático para ensinar”. Para isso, após o contacto com o grupo de Investigação da Universidade de Michigan e da aprovação num teste aplicado por estes, realizou-se um curso *on-line*, intitulado *Teacher Knowledge Assessment System (TKAS)*, em Março de 2017, disponibilizado e administrado pelos investigadores do *Learning Mathematics for Teaching Project*, permitindo o acesso a todos os instrumentos construídos até agora pelo grupo de investigação de Michigan.

O grupo de investigação da Universidade de Michigan, através do projeto LMT, que tinha como principais investigadores Heather C. Hill, Deborah Ball, Hyman Bass, Geoffrey Phelps e Steve Schilling, desenvolveu e construiu, aproximadamente, 100 questões de escolha múltipla para medir o MKT de professores dos EUA. As questões de escolha múltipla, criadas com o projeto de investigação LMT, estão agrupadas em questionários, organizados por níveis de ensino e por domínios da Matemática, como se observa na Tabela 5. Todos estes questionários apresentam duas versões (*Form A e B*), que contêm diferentes itens.

Tabela 5 - Categorização dos questionários construídos pelo LMT.

Nível de ensino	Domínio da Matemática	Ano
Pré-escolar (<i>Kindergarten</i>)	Números racionais	2008
	Geometria e Medida	2008
	Raciocínio Proporcional	2008
	Probabilidades, Dados e Estatística	2008
Ensino Básico (<i>Elementary school</i>)	Padrões, Funções e Álgebra	2001, 2004, 2006
	<u>Geometria e Medida</u>	<u>2004</u>
	<u>Números e Operações</u>	2001, 2002, 2004, <u>2008</u>
	Place Value	2006
Ensino Secundário (<i>Middle School</i>)	Padrões, Funções e Álgebra	2005, 2006
	Geometria e Medida	2005
	Números e Operações	2007

No presente trabalho, como já se referiu no capítulo 3, a seleção das questões de escolha múltipla, a serem agrupadas num questionário, tiveram em conta os seguintes critérios:

1. nível de ensino dos professores de matemática do presente trabalho;
2. os domínios da matemática mais predominantes no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013) e nas Aprendizagens Essenciais (2018), relativos aos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico;
3. os valores dos parâmetros “slope” e “dificuldade” das questões obtidos nos estudos dos EUA;
4. a adequação dos conteúdos matemáticos contemplados nas questões ao programa português;
5. o número de questões que formariam o questionário, tendo em conta que cada pergunta tem um tempo médio de resposta 1-2 minutos.

Nesta linha de ideias, tendo em conta os critérios (1) e (2) apresentados anteriormente, selecionaram-se questões relativas aos questionários assinalados (sublinhados) na Tabela 5 em cima, que dizem respeito aos dois domínios da Matemática mais dominantes no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013) e nas Aprendizagens Essenciais (2018): “Geometria e Medida” e “Números e Operações”.

Os questionários de Geometria e Medida de 2004 e de Números e Operações de 2008 têm duas versões: A e B. Para se determinar qual das versões se iriam trabalhar analisaram-se

os valores dos parâmetros “slope” e “dificuldade” das questões obtidos nos estudos dos EUA – quarto critério considerado.

Para se decidir qual das versões A ou B dos questionários de Números e Operações e de Geometria se iria trabalhar, analisaram-se os parâmetros “slope” e “dificuldade”, obtidos nos EUA, nas questões de cada versão.

Refira-se que, no presente trabalho, teve-se em conta os valores do parâmetro de “dificuldade” obtidos em estudos estatísticos nos EUA, como referências. No entanto, como se vai constatar no capítulo 6, posteriormente à aplicação do questionário, analisou-se a prestação dos professores portugueses envolvidos neste estudo, tendo em conta o “grau de dificuldade” obtido nesta investigação, em cada pergunta do questionário.

Na tabela 6, em baixo, apresentam-se, em cada versão, a questão que apresentou o nível de slope mínimo e máximo. Além disso, agruparam-se as questões das versões A e B, respetivamente, do teste de Números e Operações de 2008, construído pelo grupo de investigação de Michigan, segundo o grau de dificuldade.

Tabela 6 - Análise dos parâmetros slope e dificuldade no teste NO 2008.

Parâmetros/	Slope*		Dificuldade				Total de questões
Versões do teste	≈0,4						
Elementary 2008 NO	Mínimo	Máximo	Fácil	Um pouco fácil	Um pouco difícil	Difícil	
			d<-2	-2<d<0	0<d<2	d>2	
Versão A	0,268	0,735	1d	1a, 1b,1c, 12, 18, 20c, 21a, 21b, 21c, 27a,	5, 8, 9, 17, 25, 13, 20a, 32, 35 20b, 20d,21d, 24, 27c, 27d		
	questão 20 d	questão 27 e					

27b, 27e								
Total de questões			1	12	11	4	28	
Versão B	0,312	0,863	-	3a,	3c,	3b,	3d, 4, 19	
				11,	12,	5, 9, 14,		
				15a,		15c, 16,		
	questão	questão		15b,	18,	22b, 29,		
	22 d	9		22a,		30a, 30c		
				22c,				
				22d,				
				23a,				
				23b,				
				23c,				
			23d,	28,				
			30b					
Total de questões			-	0	16	11	2	29

Posto isto, como se apresenta em baixo, contabilizaram-se o número de questões fáceis e o número de questões difíceis. Do número de questões fáceis fazem parte as questões *fáceis* ($d < -2$) e as questões *um pouco fáceis* ($-2 < d < 0$). De forma semelhante, o número de questões difíceis diz respeito às questões *um pouco difíceis* ($0 < d < 2$) e às *difíceis* ($d > 2$).

Tabela 7 - Análise do parâmetro dificuldade no teste NO 2008.

	Dificuldade				Total de questões	Total de questões (em %)
	nº de questões fáceis (d<0)		nº de questões difíceis (d>0)			
Versão A	13	≈47%	15	≈53%	28	100%
Versão B	16	≈55%	13	≈45%	29	100%

Como se observa na tabela 7 em cima, apesar dos valores serem muito próximos, a percentagem de questões fáceis (55%) é superior à de questões difíceis (47%) na versão B do teste de Números e Operações de 2008, o que não se verifica na versão A. Por essa razão, no presente trabalho, irão ser utilizadas as questões de Números e Operações que dizem respeito à versão B.

No que diz respeito às questões de Geometria, analisaram-se também os valores dos parâmetros “slope” e “grau de dificuldade”. Na tabela em baixo, apresentam-se as questões de Geometria com o menor e o maior valor de “slope”. Além disso, agruparam-se as questões segundo o seu grau de dificuldade.

Tabela 8 - Análise dos parâmetros Slope e Dificuldade nas questões de Geometria nas versões A e B.

Parâmetros/	Slope		Grau de dificuldade				Total de questões
Versões do teste	≈0,4						
Elementary	mínimo	Máximo	Fácil	Um pouco fácil	Um pouco difícil	Difícil	
2004			d<-2	-2<d<0	0<d<2	d>2	
Geometria							
	0,437	1,109	–	15a, 15d, 15e,	15b, 15c, 16d,	–	
Versão A				16a, 16b, 16c,	18, 19, 21		
	questão	questão		16e, 17a, 17b,			

	18	16 d		17c, 17d, 20, 22			
Total de questões			0	13	6	0	19
Versão B	0,417	1,109	19b2	15, 16a, 16c, 16b, 16d, 16e, 17a, 17b, 17c, 17d, 19a1, 19b1, 19a2, 21, 22a, 22b	18, 20, 22c, 22d	-	
	questão	questão					
	19 b2	20					
Total de questões			1	15	7	0	23

Para se comparar o grau de dificuldade nas questões das versões A e B do teste de Geometria, agruparam-se as questões *um pouco fáceis* e *fáceis* e as *difíceis* e *um pouco difíceis*, como se verifica na tabela em baixo.

Tabela 9 - Análise do parâmetro Dificuldade nas questões de Geometria.

	Dificuldade				Total de questões	Total de questões (em %)
	n° de questões fáceis (d<0)		n° de questões difíceis (d>0)			
Versão A	13	≈68%	6	≈32%	19	100%
Versão B	16	≈70%	7	≈30%	23	100%

Tendo em conta que o número de questões fáceis da versão B é (ligeiramente) superior ao da versão A, as questões de Geometria em estudo nesta investigação serão as que compõem a versão B do questionário de Geometria, construído pelo LMT.

Deste modo, nesta investigação, procedeu-se de forma semelhante a investigadores de outros países que utilizaram uma das versões dos instrumentos completos de um ou dois domínios da Matemática (ou três, no caso da Noruega) e adaptaram ao contexto do seu país, com exceção de Delaney (2008), na Irlanda, que seleccionou questões de diferentes instrumentos de vários tópicos da Matemática.

Em suma, o questionário em análise neste estudo é assim constituído por 52 questões: 29 do domínio da Matemática *Números e Operações* e 23 questões de *Geometria e Medida*.

De seguida, e considerando-se o terceiro critério de seleção de questões – (3) a adequação dos conteúdos matemáticos contemplados nas questões ao programa português – analisaram-se os conteúdos matemáticos avaliados nestas questões para se garantir que não continham conceitos, técnicas e/ou procedimentos não trabalhados em Portugal (Anexo 3).

Assim, apresentam-se, na Tabela 10, todos os conteúdos matemáticos do Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013) e das Aprendizagens Essenciais (2018), por ano de escolaridade, avaliados nas questões de escolha múltipla em análise (Anexo 2).

Tabela 10 - Conteúdos matemáticos presentes em cada questão.

Conteúdos matemáticos presentes nas questões	1.º ano	2.º ano	3.º ano	4.º ano	5.º ano	6.º ano	7.º ano	8.º ano	9.º ano
Adição de números racionais.						1a; 1c; 9			
Adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais não negativos representados na forma de fração.					1d; 11				
Algoritmo da divisão inteira.				6					
Conjunto de números inteiros relativos e conjuntos de números racionais.						1 a; 1b			
Critérios de divisibilidade por 3, 4 e 9.					3				

Divisão de um número; número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.	2	
Divisão inteira por métodos informais.	1d	
Equação linear com uma incógnita		16a , 16b
Figuras equidecomponíveis e figuras equivalentes.	22	
Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respectivos lados e vértices, circunferência, círculo;	17 18a 18b	
Fórmula para a área do círculo.		18d
Fórmula para o volume do paralelepípedo retângulo com dimensões de medida racional.		20
Fórmulas para a área de paralelogramos e triângulos.		22
Frações equivalentes e noção de número racional.	4	
Medições de áreas em unidades do sistema métrico.	24	
Multiplicação de números racionais representados por dízimas finitas, utilizando o algoritmo.	15	
Multiplicação e divisão de números racionais por naturais e por racionais na forma de fração unitária.	10	
Múltiplo de um número.	3	
Polígonos e linhas poligonais.	19b	
Polígonos inscritos numa circunferência.		19d
Problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.	5	

Problemas de vários passos envolvendo números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos.	14	
Problemas de vários passos envolvendo números racionais, aproximações de números racionais e as quatro operações.	12, 13.	
Produto e quociente de um número representado por uma dízima por 10, 100, 1000, 0,1, 0,001, 0,0001.	1b	
Proporção	16c	
Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto; cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10-	3	
Representação de frações na reta numérica.	10	
Rotação de sentido positivo ou negativo como isometria.1	23	
Simplificação de frações.	4	
Sólidos geométricos – poliedros e não poliedros; pirâmides e cones; vértice, aresta e face;	18c 21	
Subtração e soma algébrica de números racionais.	1 ^a	
Subtrações de números até 100.	9, 8a, 8b, 8c	
Teorema de Pitágoras e o respetivo recíproco.	24a	
Trapézios: bases; trapézios isósceles, escalenos e retângulos.	17 18e 19a 19c	

Destaque-se que todos os conteúdos matemáticos presentes no questionário fazem parte do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013) e das Aprendizagens Essenciais (2018).

Além disso, como se pode constatar na Tabela 10 em cima, a maioria dos conceitos patentes no questionário fazem parte do Programa de Matemática (2013) e das Aprendizagens Essenciais (ME, 2018) dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico.

Contudo, identificaram-se em algumas questões conteúdos matemáticos do 7.º e 8.º anos de escolaridade. Na questão 16 avalia-se equações lineares com uma incógnita, que se caracteriza como um conteúdo matemático do 7.º ano de escolaridade. A pergunta 24a contém o teorema de Pitágoras, que é um conceito presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) do 8.º ano de escolaridade. Nas perguntas 17, 18e, 19a, 19c avalia-se o conceito do trapézio, que integra conteúdos do 7.º ano de escolaridade.

Apesar disso, consideraram-se todas as questões no questionário, uma vez que se considera que os docentes dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico têm de ter conhecimentos do 3.º ciclo, isto é, têm de saber mais do que o que ensinam aos seus alunos.

4.2. Descrição das questões

Após a fase de seleção das questões, neste subcapítulo, irá fazer-se uma caracterização de cada uma das questões que compõem o questionário em estudo no presente trabalho, tendo em conta o (s) *conteúdo (s) matemático (s)* contemplados, o *conteúdo da tarefa*, o *tipo de conhecimento matemático do professor* que avalia, segundo a categorização de Ball, Thames e Phelps (2008) e o *grau de dificuldade* que apresentaram nos estudos realizados nos EUA.

Relativamente aos conceitos matemáticos avaliados em cada questão, verificou-se em que ciclo e em que ano de escolaridade devem ser abordados no ensino da Matemática em Portugal, tendo em conta o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (ME, 2013) e as Aprendizagens Essenciais (2018).

O *conteúdo da tarefa* refere-se ao que a questão exige exatamente que o professor faça, isto é, por exemplo: se se trata de analisar várias explicações matemáticas de alunos e verificar a correta, se é uma questão que pressupõe a análise de definições de manuais diferentes e

identificar a mais correta didaticamente e matematicamente, ou se requer a avaliação da resolução de um algoritmo por um aluno.

No que diz respeito ao *tipo de conhecimento matemático do professor*, em cada questão, identificou-se se era exigido um *Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)*, *Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)* ou um *Conhecimento dos Alunos e do Conteúdo (KSC)*, tendo em conta as características que definem cada um destes domínios do MKT, estudados e definidos pelos investigadores de Michigan, já descritas no Capítulo 2. Apenas nas questões 4, 8a, 8b e 8c esta caracterização foi fornecida, quando se realizou o curso *on-line*, intitulado *Teacher Knowledge Assessment System (TKAS)*. Como se vai verificar na descrição das questões, a pergunta 4 avalia o SCK e as alíneas da 8 o KSC.

O *grau de dificuldade*, como já se referiu anteriormente neste trabalho, é um parâmetro que foi obtido através de estudos estatísticos realizados aos testes de medição do conhecimento matemático de professores dos EUA, pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan. As questões denominam-se como *fáceis*, se o seu *grau de dificuldade* é inferior a -2 e designam-se por *um pouco fáceis* se este parâmetro está entre -2 e 0. Questões que apresentem um *grau de dificuldade* entre 0 e 2 caracterizam-se com *um pouco difíceis* e, por último, se este parâmetro for maior ou igual a dois serão denominadas de *difíceis*.

Tabela 11 - Categorização das questões em análise, segundo o parâmetro Grau de Dificuldade (d).

Questões <i>fáceis</i>	Questões <i>um pouco fáceis</i>	Questões <i>um pouco difíceis</i>	Questões <i>difíceis</i>
$d \leq -2$	$-2 < d \leq 0$	$0 < d < 2$	$d \geq 2$

Devido à confidencialidade das questões, exigida pelos autores do projeto LMT, não irão apresentar-se as perguntas, apenas se fará a sua descrição e caracterização, segundo os parâmetros definidos anteriormente.

Além disso, em algumas questões, irão fazer-se referência a alguns exemplos presentes no Caderno de Apoio ao 1.º e/ ou 2.º ciclos (2013) por se ter considerado que acrescentam informação relevante à sua descrição. Optou-se por se utilizar informação destes documentos por serem agregados ao Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013) e por estarem, por isso, acessíveis a todos os professores.

Questão 1

Nesta questão são apresentadas um conjunto de regras práticas relativas às quatro operações aritméticas, frequentemente usadas pelos professores dos primeiros ciclos de escolaridade. Para responder corretamente a esta questão, os professores teriam de identificar se a regra prática apresentada é verdadeira ou não para todos os números. Assim, nesta tarefa, em todas as alíneas, era exigido (apenas) *Conhecimento Comum do Conteúdo*.

Questão 1a

Nesta questão, a regra diz respeito à subtração de números, podendo incluir-se na “subtração e soma algébrica de números racionais” (ME, 2013, p. 20).

Esta questão foi classificada de *um pouco fácil*, dado que apresentou um grau de dificuldade de $-1,444$ no estudo realizado pelo grupo de investigação de Michigan, em 2008.

Questão 1b

A questão 1b apresenta uma regra relacionada com a multiplicação por 10, que se relaciona com os conteúdos seguintes: “produto e quociente de um número representado por uma dízima por 10, 100, 1000, 0,1, 0,01, 0,001” (ME, 2013, p. 21).

Na investigação do LMT de 2008, esta pergunta já apresentou um valor de 1,185 para este parâmetro, sendo, assim, designada de “um pouco difícil”.

Questão 1c

Esta pergunta contém os seguintes conteúdos matemáticos: “adição de números racionais” (ME, 2013, p. 17) e “conjuntos números inteiros relativos e conjunto dos números racionais” (ME, 2013, p.20), e apresenta uma regra relacionada com a adição e ordenação de números.

De acordo com a categorização das questões quanto ao grau de dificuldade, esta questão apresentou o valor de $-0,738$ num estudo do grupo de investigação de Michigan, em 2008, sendo, por isso, denominada de *um pouco fácil*.

Questão 1d

Finalmente, a questão 1d refere-se à divisão, apresentando uma regra que questiona o facto do quociente de uma divisão nem sempre ser menor do que o dividendo. Em situações que o divisor é um número racional, entre 0 e 1, o quociente é maior do que o dividendo (sendo igual se o divisor for igual a 1), como se verifica nos exemplos em baixo:

$$3:0,5=6; 50:1/4=200; 0,5:0,5=1$$

Num estudo realizado nos EUA pelos investigadores do LMT, em 2008, esta questão apresentou o valor do parâmetro do grau de dificuldade de 0,701. Assim, caracteriza-se esta questão como *um pouco difícil*.

Questão 2

Esta questão aborda o conceito da divisão por zero. Para responder corretamente a esta pergunta o professor teria de identificar que a divisão por zero se caracteriza como impossível por não existir nenhum número que quando multiplicado pelo divisor (0) resulte no dividendo. Assim, constata-se que a questão 2 aborda o conteúdo matemático no programa do 3.º ano: “divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor” (ME, 2013, p.10).

No que diz respeito ao tipo de conhecimento matemático do professor, esta questão exige um Conhecimento Especializado do Conteúdo, na medida em o professor para responder a esta questão tem “(...) avaliar explicações matemáticas” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p.400).

Num estudo realizado em 2008, por Ball e pelos seus colegas, esta pergunta denominou-se de *difícil*, pois apresentou um valor de 2,043 no parâmetro dificuldade.

Questão 3

Nesta questão avalia-se o critério de divisibilidade de um número por 4. Este conteúdo matemático faz parte do Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013) do 5.º ano de escolaridade.

Esta tarefa exige que o professor seja capaz de avaliar diferentes explicações matemáticas do critério de divisibilidade por 4 e de selecionar a melhor explicação. Assim, nesta pergunta é avaliado o Conhecimento Especializado do Conteúdo.

Esta pergunta no estudo de 2008 da equipa de investigação de Michigan foi denominada de *um pouco difícil*, apresentando um grau de dificuldade de 1,185.

Questão 4

A questão 4 aborda o conceito matemático de frações equivalentes, que faz parte do programa do 4.º ano de escolaridade (ME, 2013, p.11).

Nesta questão, os professores tinham de selecionar a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido porque é que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente. Assim, era exigido, nesta questão, ao professor, um *Conhecimento Especializado do Conteúdo* para “avaliar rapidamente a plausibilidade das questões (reivindicações) dos alunos” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400).

Um professor responderia corretamente se identificasse que a simplificação das frações se resume à divisão das frações por um e que, por essa razão, a nova fração representa a mesma quantidade do que a primeira.

Esta questão, segundo os investigadores de Michigan, caracteriza-se, quanto ao grau de dificuldade, como *um pouco difícil*, pois apresentou um valor de 0,617, num estudo estatístico realizado por estes investigadores em 2008.

Em baixo, apresenta-se um exemplo fornecido aos professores pelo Caderno de Apoio ao 1.º ciclo, com base nas Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo, 2013, p. 72), que mostra como pode ser abordada a equivalência de frações com os alunos de modo a entenderem os conteúdos presentes na questão 4 deste teste.

Problema com frações equivalentes

Considera a fração $\frac{3}{5}$.

Se multiplicares ambos os termos por 4 obténs uma nova fração. Compara-as.

R.: Multiplicando ambos os termos por 4, a fração que se obtém é $\frac{(3 \times 4)}{(5 \times 4)}$, ou seja, $\frac{12}{20}$.

A unidade, inicialmente dividida em 5 partes iguais, passou a estar dividida em 20 partes iguais, ou sejam, cada uma das cinco partes foi dividida em 4 partes iguais

($5 \times 4 = 20$). Assim, as 3 partes que inicialmente estavam a ser contabilizadas na construção da fração $\frac{3}{5}$, corresponde agora a 3×4 (12) das novas partes em que a unidade foi dividida. Portanto, o número racional representado por qualquer daquelas frações é o mesmo.

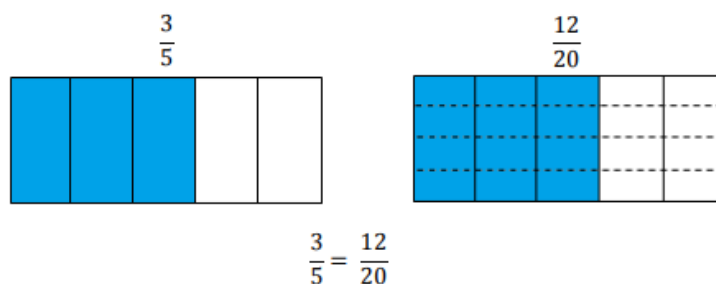


Figura 10 - Problema com frações equivalentes (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo, 2013, p. 72).

Após a resolução geométrica desta questão, o professor poderia também chamar a atenção aos seus alunos que:

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{12}{20}$$

$$\frac{12}{20} : 1 = \frac{12}{20} : \frac{4}{4} = \frac{3}{5}$$

Assim, os alunos verificariam que realmente através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente, na medida em que na realidade só se está a dividir a fração (neste caso, $12/20$) por um, logo esta fração representa a mesma quantidade (do que $3/5$), o que justifica a opção correta à questão 4.

Questão 5

Esta questão envolve avaliação de problemas até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento. Este conteúdo faz parte do Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013, p. 11) do 3.º ano de escolaridade.

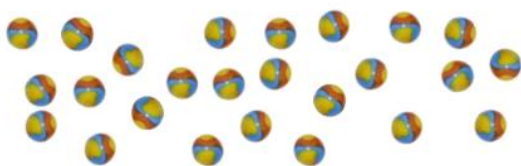
Esta pergunta envolve um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*, na medida em que requer a análise de um problema presente num manual e a sua alteração a um novo contexto, mantendo, no entanto, o conteúdo matemático.

Para responder corretamente a esta questão, um professor teria de ser capaz de verificar que os dois problemas de divisão, presentes na pergunta, envolvem divisões em situações de *agrupamento* e nenhum em situação de *partilha*. Em baixo, apresenta-se um exemplo de um problema que envolve a divisão numa situação de agrupamento e outro em que a divisão aparece numa situação de partilha (Caderno Apoio 1.º ciclo, 2013, p.41).

Exemplo 1 (divisão como agrupamento)

O Ricardo tem 25 berlindes e vai dividi-los em conjuntos de 6 berlindes.

Quantos conjuntos de 6 berlindes consegue fazer?



Exemplo 2 (divisão como partilha)

A mãe da Rita vai dividir igualmente 30 bolos por 4 caixas.

Quantos bolos vai colocar em cada caixa?

Figura 11 - Problemas de divisão em situações de agrupamento e de partilha, respetivamente (Caderno Apoio 1.º ciclo, 2013, p.41).

Os problemas de divisão como agrupamento ou medida, como o exemplo 1, em cima, são caracterizados por fornecerem o número total de objetos e o número de objetos de cada grupo. O número de grupos (crianças, recetores, etc) é um valor desconhecido.

Por outro lado, os problemas que envolvem a divisão como partilha, ou divisão partitiva, segundo Carpenter e os seus colegas (1999), referem uma quantidade (o número total de objetos) que é partilhada igualmente entre um dado número de recetores e pedem para se determinar o número de objetos que ficará para cada recetor, tal como o exemplo 2.

Além disso, a questão 5 exigia ao professor a interpretação do significado do resto da divisão em cada um dos problemas apresentados.

Atente-se no exemplo 1 apresentado em cima e no exemplo 3 em baixo. Ambos os problemas envolvem uma situação de divisão como agrupamento. No entanto, apesar de para se

resolver qualquer um dos problemas se resolver a seguinte divisão: $25:6=4(r=1)$, no exemplo 1 a resposta ao problema não tem em conta o resto da divisão, isto é, a resposta é *4 conjuntos*, enquanto no exemplo 3, a resposta ao problema é *5 sacos* e não 4.

Exemplo 3 (situação de agrupamento) O Ricardo tem 25 berlindes e vai dividi-los em sacos de 6 berlindes. Qual o número mínimo de sacos que precisa para transportar os 25 berlindes?
--

Figura 12 - Problema de divisão em situação de agrupamento

Quanto ao grau de dificuldade, esta questão foi denominada de *um pouco fácil*, num estudo realizado pelo LMT em 2008, tendo apresentado um valor de $-0,854$ para este parâmetro.

Questão 6

Esta questão aborda o algoritmo da divisão inteira. Este conteúdo matemático está presente no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013, p.12) do 4.º ano de escolaridade.

Nesta pergunta os professores têm de avaliar uma abordagem não *standard* do algoritmo da divisão, utilizada por um aluno, e caracterizar a sua validade. Assim, para responder a esta questão o professor utiliza um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

Esta questão apresentou um valor do parâmetro *grau de dificuldade* de $-1,157$, num estudo realizado em 2008 pelo grupo de investigação de Michigan, tendo sido, por isso, designada de *um pouco fácil*.

Questão 7

Na questão 7 patenteia-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração. Este conteúdo matemático no Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) está presente no capítulo da Álgebra, do 5.º ano.

Para responder corretamente a esta pergunta, um professor teria de “encontrar um exemplo para fazer um ponto específico da matemática” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p.400), mais especificamente, teria de selecionar o melhor exemplo, dos quatro exemplos apresentados, para ajudar a sua turma a perceber que a propriedade distributiva da multiplicação em algumas situações faz com que as expressões numéricas sejam mais fáceis de se resolver. Nesta linha de ideias, a resposta à questão 7 exigia um *Conhecimento matemático Especializado do Conteúdo*.

Esta questão foi considerada *um pouco difícil* num estudo do LMT, em 2008, por ter apresentado um valor de grau de dificuldade de 1,462.

Questões 8a, 8b e 8c

Nas questões 8a, 8b e 8c apresenta-se um algoritmo da subtração com números da ordem das centenas. Este conteúdo matemático faz parte do Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013, p.8) do 2.º ano de escolaridade.

Cada uma das alíneas a), b) e c) apresenta uma explicação de um aluno por que razão um procedimento semelhante ao apresentado em baixo funciona.

Exemplo: Subtração com dois transportes

Calcula a diferença entre 623 e 475.

$623 - 475 = 148$

R.:

centenas dezenas unidades

$623 - 475 = 148$

1 4 8

Neste exemplo, dado que os algarismos das ordens das unidades e das dezenas do aditivo têm valores inferiores aos respectivos algarismos do subtrativo, é necessário começar por decompor uma dezena em dez unidades e, em seguida, decompor uma centena em dez dezenas, fazendo os correspondentes transportes.

$$\begin{array}{r}
 623 \\
 -475 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 113 \\
 6\cancel{2}\cancel{3} \\
 -475 \\
 \hline
 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 5\cancel{1}13 \\
 6\cancel{2}\cancel{3} \\
 -475 \\
 \hline
 148
 \end{array}$$

Figura 13 – Resolução de um algoritmo da subtração com dois transportes (Bivar et al., 2013, p. 72).

Para responder corretamente a estas três questões, um professor teria de avaliar as explicações dos alunos e verificar se evidenciavam que os alunos tinham ou não percebido o procedimento. Assim, estas questões exigiam um *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)*.

Num estudo realizado pelos investigadores que compõem o grupo de Michigan, em 2008, as questões 8a e 8b foram consideradas de *um pouco fáceis*, tendo apresentado, respectivamente, os valores de -0,808 e -0,957 de grau de dificuldade. Na questão 8c, o parâmetro em causa, apresentou um valor de 1,542, em 2008, sendo, por isso, designada como uma questão *um pouco difícil*.

Questão 9

Esta questão avalia o conteúdo matemático do algoritmo da subtração com números das ordens das dezenas. Este conteúdo matemático faz parte do Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013, p.8) do 2.º ano de escolaridade.

Para responder corretamente a esta questão, um professor tinha de analisar um algoritmo da subtração e verificar que era válido para todos os números. Esta questão envolve um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

Num estudo realizado em 2008, pelo projeto LMT, observou-se um valor de 0,556 do parâmetro grau de dificuldade, tendo-se, por isso, considerado esta questão *um pouco difícil*.

Questão 10

Na questão 10 avalia-se a representação de frações na reta numérica, presente no Programa e Metas Curriculares da Matemática do Ensino Básico (2013, p. 11), no 3.º ano.

Para responder a esta questão teria de se usar *Conhecimento Comum do Conteúdo*.

Num estudo estatístico de 2008, realizado pelo grupo de investigação de Michigan, esta pergunta, para o parâmetro grau de dificuldade, apresentou o valor de $-0,360$, sendo designada de um *pouco fácil*.

Questão 11

Esta questão aborda a divisão de números racionais na forma de fração. Este conteúdo está presente no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013, p. 18) do 5.º ano.

Para responder corretamente a esta pergunta, um professor tinha de analisar um método proposto pelo aluno para a divisão de números fracionários e verificar que este procedimento estava correto, mas que para muitos números resultaria em respostas desorganizadas.

Nesta linha de ideias, esta questão exigia um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

Quanto ao grau de dificuldade, esta questão caracterizou-se como *difícil*, num estudo realizado por Ball e pelos seus colegas, em 2008, apresentando um valor de $2,343$.

Questões 12a, 12b, 12c e 12d

Nas alíneas que fazem parte da questão 12 apresentam-se “problemas de vários passos envolvendo números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos” (ME, 2013, p.18). Este conceito integra os conteúdos matemáticos do 5.º ano de escolaridade, do Programa de Matemática do Ensino Básico (2013).

No que diz respeito ao nível de dificuldade, as questões 12a, 12 c e d são consideradas *um pouco fáceis*, tendo apresentado nos estudos estatísticos de 2008 já mencionados os valores de $-0,752$, $-0,807$ e $-1,150$. A pergunta 12b revelou um grau de dificuldade de $1,620$, sendo assim, caracterizada como *um pouco difícil*.

Esta questão apresenta um problema sobre divisão de números racionais e, em cada alínea, exige identificar se os problemas apresentados têm a mesma interpretação da divisão ou uma interpretação diferente. Estas perguntas requerem assim um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

O problema fornecido no enunciado da pergunta 12 exige a mesma interpretação da divisão do que o Problema 1, apresentado em baixo. Neste tipo de problemas de divisão de números racionais é apresentado a medida total (*5 metros*, que corresponde ao comprimento da unidade), a medida de cada uma das partes (*$1/4$ metros*) e é pedido o número de vezes que a parte cabe na unidade.

Na questão 12, apenas a alínea c descrevia um problema com esta interpretação da divisão, isto é, com a mesma interpretação do que a do enunciado da pergunta.

Problema 1 – “A passo de caracol”

Um caracol, que está no fundo de um poço com 5 metros de profundidade, sobe por dia $\frac{1}{4}$ metros.

Quantos dias demorará a atingir o topo do poço?

Explica como chegaste à resposta.

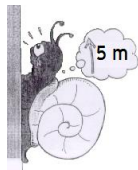


Figura 14 - Problema sobre divisão de números racionais
– retirado "Tarefas 6.º ano - Formação contínua de professores de matemática dos 1.º e 2.º ciclos – ESEV (ME, 2010)"

Nas restantes alíneas (a), b) e c)) da questão 12, apresentavam-se problemas com uma interpretação diferente da divisão, relativamente ao problema fornecido no enunciado desta pergunta.

Observe-se o problema 2 em baixo e verifique-se que a interpretação da divisão nesta tarefa é diferente da do problema 1. Neste tipo de problemas, como o mostrado em baixo, referem-se a quantidade que vai ser utilizada (neste caso, $\frac{3}{4}$ do total) e qual a sua medida (12 cm) e é pedido o comprimento inicial (isto é, a medida da unidade).

Problema 2 – “A pulseira da Mafalda”

A Mafalda tem em casa um fio verde para fazer pulseiras.

Se ela usasse $\frac{3}{4}$ do fio para fazer uma pulseira com medida de 12 cm, que comprimento tinha o fio inicial da Mafalda?

Explica como chegaste à resposta.

Figura 15 - Problema sobre divisão de números racionais

Questões 13a, 13b, 13c e 13d

As perguntas que compõem a questão 13 contêm os seguintes conteúdos matemáticos: números racionais negativos; módulo da diferença de dois números como medida da distância entre os pontos que representam esses números na reta numérica (ME, 2013, p. 17). Estes dois conceitos matemáticos integram os conteúdos do Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) do 6.º ano de escolaridade.

Nesta questão, apresenta-se um problema sobre temperaturas e é pedido aos alunos para o traduzirem numa expressão numérica que represente a diferença entre a temperatura mais alta e mais baixa.

Para responder de forma correta a cada uma destas perguntas, um professor tinha de ser capaz de analisar as expressões propostas pelos alunos para representarem o problema e identificar se traduzem ou não raciocínios corretos, exigindo assim, um *Conhecimento Especializado do Conteúdo* para dar resposta a estas questões.

As questões 13a, 13b, 13c e 13d, num estudo efetuado em 2008, estas quatro perguntas foram consideradas *um pouco fáceis*, apresentando um grau de dificuldade de – 0,501, –0,501, –1,076 e –0,533, respetivamente,

Questão 14

A questão 14 aborda o conceito de porcentagem.

Nesta questão apresentam-se vários retângulos e é pedido que se identifique em qual deles se apresenta menos de 1% pintado. Assim, esta questão exigia um *Conhecimento Comum do Conteúdo*.

Esta questão apresentou um nível de dificuldade de $-0,711$, numa investigação realizada pelo grupo de Michigan em 2008, tendo sido, por isso, denominada de *um pouco fácil*.

Questão 15

Nesta questão aborda-se a regra utilizada para se determinar o local onde se coloca a vírgula num algoritmo da multiplicação de números decimais. A “multiplicação de números racionais representados por dízimas finitas, utilizando o algoritmo” (ME, 2013, p. 12) é um conteúdo que faz parte do Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (2013) referente ao 4.º ano de escolaridade.

Para responder corretamente a esta questão, um professor tinha de selecionar a melhor explicação para esta regra, isto é, que como um número decimal é um número inteiro dividido por potências de 10, o número de casas decimais fornece o número de vezes que se dividiu o número por 10. Logo, somar o número de casas decimais dos dois fatores, indica o número de vezes que se dividiu o total por 10.

Em baixo, apresenta-se um algoritmo da multiplicação de números decimais, presente no Caderno de Apoio ao 1.º ciclo (2013, p. 80), e a explicação para a resposta correta a esta questão. Como se pode observar a soma do número de casas decimais – três – corresponde ao número de vezes que se dividiu o produto por 10.

Exemplo de um algoritmo da multiplicação com números decimais

Calcula o produto de 37,6 por 0,38.

				3	7	6	
		x		0	3	8	
			3	0	0	8	
	+	1	1	2	8		
			1	4	2	8	8

O produto de 37,6 por 0,38 é 14,288.

Aplicação da regra utilizada para se determinar o local onde se coloca a vírgula no algoritmo da multiplicação de números decimais no exemplo em cima

$$37,6 \times 0,38 = (376 \times 0,1) \times (38 \times 0,01) = 376 \times 38 \times 0,1 \times 0,01 = \\ = 14288 \times 0,001 = 14288 \times 10^{-3} = 14288 : 10^3 = 14,288$$

Figura 16 – Exemplo de um algoritmo da multiplicação com números decimais (Bivar et al., 2013, p. 72) e aplicação da regra utilizada para se determinar o local da vírgula neste algoritmo.

Esta pergunta envolvia, assim, segundo a categorização de Ball, Thames e Phelps (2008), *Conhecimento Comum do Conteúdo*.

Esta questão foi considerada *um pouco difícil*, num estudo realizado em 2008, tendo revelado um grau de dificuldade 0,708.

Questões 16a, 16b, 16c

As alíneas a) e b) da questão 16 contêm uma equação linear com uma incógnita. Este conceito, no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013, p. 22), faz parte dos conteúdos matemáticos do 7.º ano e integra o domínio da álgebra. A alínea c), por sua vez, aborda o conceito das proporções, que faz parte dos conteúdos do 6.º ano (ME, p. 21).

A questão 16 apresenta um problema matemático e as alíneas a), b) e c) que o constituem dizem respeito a estratégias de resolução de alunos. Para responder corretamente a

estas questões, um professor teria de identificar quais dos métodos de resolução apresentados pelos alunos podem ser considerados válidos.

Segundo a categorização do MKT de Ball e dos seus colegas (2008), para responder a esta questão um professor teria de utilizar o *Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)*, na medida que lhe era exigido “avaliar rapidamente a plausibilidade das questões (reivindicações) dos alunos (...)” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400) e caracterizá-las como válidas ou inválidas.

Quanto ao grau de dificuldade, em estudos realizados pelo LMT em 2008, as alíneas a) e c) da questão 16 foram consideradas de *um pouco difícil*, apresentando um índice de dificuldade de 1,497 e de 0,812, respetivamente. A segunda alínea revelou um índice de dificuldade de -0,098, sendo, por isso, denominada de *um pouco fácil*.

Questão 17

A questão 17 avalia conteúdos matemáticos do domínio da Geometria, mais especificamente a definição de trapézio. Este conceito matemático faz parte dos conteúdos do 7.º ano do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013, p. 23).

Nesta pergunta, são apresentadas duas definições de trapézio presentes em dois manuais, apresentadas de seguida: *um trapézio é um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos*; *um trapézio é um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos*.

Para responder corretamente a esta questão, um professor teria de identificar que, segundo a segunda definição, um retângulo é um trapézio, mas não é de acordo com a primeira definição.

Tendo em conta que nesta questão era exigido ao professor a análise de definições de um conceito matemático e sua validação, era necessário um *Conhecimento Especializado do Conteúdo* para responder a esta questão.

Esta pergunta num estudo de 2004, pelo grupo de investigação de Michigan, foi considerada um *pouco fácil*, apresentando - 0,363 de grau de dificuldade.

Questões 18a, 18b, 18c, 18d e 18e

As questões 18a, 18b e 18c envolvem os seguintes conteúdos geométricos "figuras planas: retângulo, quadrado, (...) circunferência, círculo; sólidos: cubo (...)" (ME, 2013, p. 10), que estão presentes no Programa de Matemática do 1.º ano.

A alínea d envolve a fórmula para a área do círculo que faz parte do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) do 6.º ano.

Na questão 18 é avaliado o conceito de paralelogramos, mais especificamente a sua: caracterização através das diagonais. No Programa de Matemática (ME, 2013) este conceito aparece no domínio da Geometria, nos conteúdos do 7.º ano de escolaridade.

Para responder corretamente à questão 18, um professor tinha de analisar afirmações que dizem respeito a casos particulares de Geometria e verificar se são sempre verdadeiras, às vezes verdadeiras, ou nunca verdadeiras. Por exemplo, nas alíneas a) e b) um professor teria de ter o conhecimento que um quadrado é sempre um retângulo, no entanto um retângulo pode não ser um quadrado, pois "os quadrados podem (...) ser reconhecidos como casos particulares de retângulos (Caderno de Apoio ao 1.º ciclo, p. 12)

As alíneas da questão 18 exigiam um *Conteúdo Comum do Conteúdo* (CCK), na medida que era necessário (apenas) o professor ter conhecimento dos conceitos geométricos em questão.

Quanto ao parâmetro relativo ao grau de dificuldade, as alíneas a) e c) foram consideradas *um pouco fáceis*, tendo apresentado, respetivamente, os seguintes valores -0,690 e -0,630, numa investigação do projeto LMT, em 2004. As perguntas 18b, 18d e 18e, por sua vez, exibiram os seguintes valores deste parâmetro: 0,378, 0,125 e 0,177, sendo, por isso, denominadas de *um pouco difíceis*.

Questões 19a, 19b, 19c e 19d

As perguntas 19a e 19c abordam os conceitos de trapézio e de paralelogramo e sua caracterização que fazem parte do Programa de Matemática (2013) do 7.º ano de escolaridade. A alínea b diz respeito à definição de polígono e a pergunta 19d à de polígono inscrito numa circunferência. Cada um destes conteúdos matemáticos integram o Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) dos 2.º e 6.º ano de escolaridade, respetivamente.

A questão 19 envolvia um *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCK), na medida em que um professor para responder corretamente tinha de identificar se as afirmações são possíveis ou impossíveis, tendo em conta as características das figuras planas em questão.

As quatro alíneas da questão 19 foram consideradas *um pouco fáceis*, em 2004, tendo apresentado os seguintes valores de grau de dificuldade: $-0,072$, $-1,713$, $-1,515$ e $-1,271$.

Questão 20

Nesta questão apresenta-se um problema matemático que envolve o conceito de paralelepípedo e das suas dimensões e a noção de volume.

Esta pergunta exigia um *Conhecimento Especializado* por parte do professor, na medida que tinha de identificar de entre as afirmações matemáticas dadas pelos alunos a afirmação verdadeira.

Esta questão, num estudo realizado pelo grupo de investigação de Michigan, em 2004, apresentou o valor de $1,228$, tendo, por isso, sido considerada *um pouco difícil*.

Questões 21a, 21b, 21c, 21d, 21e e 21f

A questão 21 tem presente os conceitos de sólido geométrico, prisma, pirâmide e tetraedro. Estes conteúdos fazem parte do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) do 2.º ano de escolaridade.

Para responder a esta pergunta, era exigido ao professor analisar a definição de prisma, pirâmide e tetraedro apresentadas na questão e, de seguida, identificar se correspondiam à representação dos dois sólidos geométricos apresentados. Assim, para responder a estas três alíneas da questão 21, o professor tinha de ter um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

Quanto ao grau de dificuldade, as alíneas a), b), c), d) e f) da pergunta 21 foram denominadas de *um pouco fáceis*, tendo apresentado os seguintes valores para este parâmetro: $-1,876$; $-1,041$; $-0,757$; $-0,674$ e $-0,736$. Enquanto que a questão 21e) como apresentou um valor de dificuldade de $-2,262$ foi considerada *fácil*.

Questão 22

Esta pergunta diz respeito ao conceito de área de um triângulo. Este conteúdo faz parte do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) do 5.º ano de escolaridade.

Nesta questão apresenta-se uma representação de dois triângulos inscritos num retângulo. Para responder a esta pergunta, um professor tinha de analisar argumentos apresentados pelos alunos e verificar que o correto dizia respeito a que a base a altura dos triângulos são as mesmas e que, por isso, têm a mesma área.

Assim, nesta pergunta, um professor tinha de “(...) avaliar rapidamente a plausibilidade das questões (reivindicações) dos alunos (...)” (Ball, Thames & Phelps, 2012, p. 400) e identificar a correta, utilizando assim um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

Quanto ao grau de dificuldade, denomina-se de questão *um pouco difícil*, tendo apresentado um valor de 0,001, em 2004, para este parâmetro.

Questão 23

A pergunta 23 aborda o conceito geométrico de isometria, mais especificamente, “rotação de sentido positivo ou negativo como isometria” (ME, 2013, p. 21).

Nesta questão são apresentadas seis figuras do jogo TETRIS. Para responder corretamente a esta questão, um professor tinha de selecionar uma de quatro figuras, de modo que, independentemente da rotação que se fizesse esta não coincidissem com nenhuma das figuras patentes. Deste modo, esta pergunta avalia um *Conhecimento Comum do Conteúdo*.

Num estudo realizado em 2004, pelo grupo de investigação de Michigan, esta questão apresentou um valor de grau de dificuldade de -0,920, sendo, por isso, considerada *um pouco fácil*.

Questões 24a, 24b, 24c e 24d

A pergunta 24 tem presente os seguintes conceitos matemáticos: medições de áreas em unidades do sistema métrico e teorema de Pitágoras e o respetivo recíproco, que fazem parte, respetivamente, do Programa do Ensino Básico de Matemática (ME, 2013) do 4.º e do 8.º anos de escolaridade.

Nesta questão, são apresentadas estratégias apresentadas por alunos para calcular a área de um quadrado construído por um aluno num geoplano. Em cada alínea, o professor tinha de identificar qual ou quais as afirmações seriam matematicamente aceitáveis, de acordo com a imagem.

Para reponder corretamente a esta questão um professor tinha de ter *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos* (KSC), segundo Ball, Thames e Phelps (2008), isto é, tinha de possuir conhecimentos sobre os alunos e sobre a matemática.

No que diz respeito ao grau de dificuldade, as alíneas a) e b), em 2004, foram consideradas *um pouco fáceis*, tendo revelado os seguintes valores: $-0,424$ e $-0,891$. As alíneas c) e d) apresentaram valores de $0,004$ e $0,119$ de grau de dificuldade, tendo sido, por isso, denominadas de *um pouco difíceis*.

4.3. Tradução e adaptação do teste ao contexto português

No segundo momento deste trabalho, realizou-se a tradução e a adaptação das 52 questões já descritas no “1.º Momento” deste capítulo: 29 questões do domínio da Matemática *Números e Operações* e 23 questões de *Geometria e Medida*.

No presente trabalho, o processo de tradução e adaptação destas questões à realidade portuguesa realizou-se em duas fases que serão explicitadas neste subcapítulo.

Em primeiro lugar, realizou-se uma *tradução dupla* do teste, recomendada por Adams (2005), que se caracteriza como o método de tradução mais utilizado em estudos desta tipologia. Num processo de dupla tradução, e neste processo, dois tradutores portugueses, traduziram, de forma independente, o mesmo instrumento e, de seguida, compararam-no, discutiram a sua tradução e a sua adaptação ao contexto português, chegando ao produto final – instrumento de medição traduzido para a língua do estudo. Neste subcapítulo irá documentar-se esta primeira fase de tradução/ adaptação do instrumento ao contexto português.

Após a dupla tradução do teste construído pelo grupo de investigadores da Universidade de Michigan, seis colaboradores – um Professor Doutor especialista na área de educação matemática, uma Professora e Investigadora do ensino do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico; duas professoras experientes do 1.º ciclo e duas do 2.º ciclo – resolveram o teste e deram o seu parecer fundamentado quanto: à adequação das questões à realidade portuguesa; à estrutura

das questões e à dificuldade que os professores de 1.º e 2.º ciclos de Portugal poderiam ter para lhes dar resposta; à capacidade do questionário, como um todo, de medir o conhecimento matemático necessário para um professor ensinar. Assim, neste subcapítulo, irá também apresentar-se o parecer dado por estes seis colaboradores, de forma a garantir a validade da tradução dupla realizada, que consistirá na segunda fase de tradução e adaptação das questões selecionadas do MKT ao contexto português.

Traduzir os instrumentos do MKT para serem aplicados em Portugal não significa apenas uma tradução de uma língua para outra, mas sim uma tradução e adaptação de um conjunto de questões, que foram desenvolvidas originalmente para serem usadas num contexto, para um contexto diferente. Assim, não é possível separar-se o processo de tradução e de adaptação neste trabalho.

O processo de tradução de um instrumento de medição que tem por base a construção de um construto - neste caso, o “conhecimento matemático para se ensinar” - não se reduz apenas a uma tradução palavra a palavra do instrumento. De acordo com Peña (2007), as normas metodológicas não são de fácil tradução. Se essas normas forem desenvolvidas para serem usadas num país em particular, não devem ser simplesmente traduzidas, mas sim adaptadas ao contexto do novo país onde serão aplicadas e às pessoas que o compõem.

I. Tradução/ adaptação do teste ao contexto português

Esta primeira fase de tradução do teste e sua adaptação à realidade portuguesa, tal como já foi referido neste subcapítulo, foi realizada por dois tradutores, de forma independente, e, posteriormente, discutida.

Ao longo do processo de tradução/ adaptação do questionário à realidade portuguesa, agruparam-se as alterações realizadas em quatro categorias apresentadas de seguida. As três categorias também foram utilizadas por Delaney e pelos seus colegas (2008) aquando da adaptação deste instrumento ao contexto irlandês:

- (1) alterações relativas ao contexto cultural no geral;
- (2) mudanças relacionadas com o contexto cultural escolar;
- (3) alterações relacionadas com os conteúdos matemáticos.

A primeira categoria refere-se, por exemplo, a alterações no nome das pessoas, para serem mais familiares para os professores; adaptação da linguagem não matemática – palavras ou situações/contextos relacionados com a realidade americana, mas que não são tão familiares aos portugueses; alteração de atividades especificamente culturais relativas ao países a outros contextos culturais, como se apresenta na tabela 12.

Nas “alterações relacionadas com o contexto cultural escolar” agruparam-se as palavras e/ou frases traduzidas do inglês americano para o português e adaptadas a esta nova realidade, em duas categorias: “Termos escolares” e “Estrutura do sistema educativo”, como se apresenta na Tabela 13.

Estas duas primeiras categorias não estão relacionadas com alterações que afetem o conteúdo matemático do instrumento, mas sim são importantes para que os professores pertencentes a outro país e contexto, que não o dos EUA, neste caso a realidade portuguesa, não sejam distraídos por termos ou contexto que não lhes sejam familiares.

A terceira categoria – alterações relacionadas com os conteúdos matemáticos – diz respeito a alterações nas unidades de medida, alterações na linguagem matemática para a que é usada nas escolas, alterações das representações usadas e alterações nas respostas dos alunos que são antecipadas.

Refira-se que Mosvold (2009) no seu estudo também considerou uma outra categoria que dizia respeito a alterações relacionadas com directrizes escolares, que não será incluída no presente estudo, uma vez que não se encontraram diferenças significativas entre as directrizes políticas escolares seguidas EUA e Portugal.

De seguida, apresenta-se todas as alterações realizadas aquando da tradução e adaptação do questionário construído nos EUA ao contexto português.

A tradução do inglês americano para o português de algumas palavras ou frases foram alteradas por não se enquadrarem no contexto da questão onde estão inseridas, este tipo de alterações também foram introduzidas por Mosvold e pelos seus colegas (2009) aquando da sua tradução do questionário construído pelos investigadores da Universidade de Michigan ao contexto norueguês. Por exemplo na questão 11, que se refere à divisão de números fracionários, traduziu-se a palavra “problema” em inglês americano para o português como “operação matemática”, uma vez que a palavra “problema” não faria sentido aquando da tradução do inglês americano para português.

(1) Alterações relativas ao contexto cultural geral

Na Tabela 12, em baixo, apresentam-se as alterações que foram realizadas na tradução e adaptação do questionário, relativas ao contexto cultural no geral. Estas alterações acarretam mudanças no “Nome de pessoas”, em palavras ou expressões que contêm “Linguagem não Matemática”, em “Atividades” e em mudanças “do inglês para o português”.

Tabela 12 - Alterações relativas ao contexto cultural geral nas questões do instrumento do presente estudo

Tipo de alteração	Questão	Forma EUA	Forma adaptada a Portugal
Nome de pessoas	2	Hosko	Luís
	2	King	Andreia
	3	Harris	Maria
	4	West	Paula
	5	Walker	Fátima
	5	Kelly	Joana
	6	Barber	Catarina
	6	Chad	Tiago
	7	Catalano	Filipa
	8	Bisson	Laura
	9; 11	Lewis	Pedro
	9	Braun	Sara
	10	Stone	Francisco
	11	Charlie	Diogo
	12	Sander	Marta
	12	Alex	Tiago
	12	Frank	Afonso
	13	Barton	Lúisa
	14	Vasquez	Ana
	16	Montgomery	Graça
	17	Starr	Margarida
	18	Marco	Nuno
	19	Erikson	Miguel
	20	Nager	Rui
	21	Moreno	Beatriz
	22	Juarez	Gonçalo
	23	Markhill	Cátia

	24	Lewis	Helena
	24	Emilio	João
Linguagem não matemática	1	"Rules of thumb"	Regras práticas
	2	Mr.	Professor
		Mrs.	Professora
	5	Box of candy	Caixa de bombons
	23	Video game	Jogo
Atividades	5	Field trip	Visita de estudo
	12	Relay race	Corta mato
Do Inglês para o Português	1	Handy memory devices	Técnicas de fácil memorização
	2	Is undefined	É indeterminada
	9	Problem	Subtração
	11	Problem	Operação matemática
	16	Each type animal	Espécie animal

Como se observa na tabela em cima, na tradução das questões do inglês americano para o português teve-se o cuidado de alterar os nomes dos professores e de alunos para nomes utilizados em Portugal. Além disso, no caso dos professores adaptou-se o tratamento dado nos EUA de "Mr." e "Ms." para "professor" ou "professora" seguido do nome, pois é desta forma que, em Portugal, abordamos um(a) professor(a).

Nesta categoria, também se apresentam as alterações relacionadas com termos não matemáticos como "box of candy" que numa tradução de inglês americano diz respeito a "caixa de doces" que foi traduzido, em vez disso, para "caixa de chocolates", uma vez que a primeira expressão não é usual em Portugal.

(2) Alterações relacionadas com o contexto cultural escolar

Na tabela 13, em baixo, apresentam-se alterações relacionadas com o contexto cultural escolar, mais especificamente mudanças relativas a "termos escolares" e à "estrutura do sistema educativo".

Tabela 13 - Alterações relativas ao contexto cultural escolar nas questões do instrumento do presente estudo. Tipo de alteração	Questão	Forma EUA	Forma adaptada a Portugal
Termos escolares	3; 4; 5; 23 10	Class Materials	Turma Fichas de trabalho
Estrutura do sistema educativo	17	College	Universidade

(3) Alterações relacionadas com os conteúdos matemáticos

Nesta terceira categoria agruparam-se às alterações relativas aos conteúdos matemáticos. Consideraram-se mudanças que diziam respeito a unidades de medida, à linguagem matemática escolar propriamente dita e a representações matemáticas.

Tabela 14 - Alterações relacionadas com conteúdos matemáticos nas questões do instrumento do presente estudo.

Tipo de alteração	Questão	Forma EUA	Forma adaptada a Portugal
Unidades	5	\$38 dollars	38 €
	5	\$4	4€
	12	Milhas	Quilómetros (Km)
	12	Feet	Metros
Linguagem matemática escolar	3	Divisibility rules	Critérios de divisibilidade
	3	7,548	7548
	3	7,500	7500
	15	7.34	7,34
	15	5.8	5,8
	24	3.5	3,5
	6	Single-digit divisors	Divisores com um algarismo
	7	$7(5 + 4)$	a) $7 \times (5 + 4)$
		$23(38 + 62)$	b) $23 \times (38 + 62)$
		$\frac{1}{3}(8 + 4)$	c) $\frac{1}{3} \times (8 + 4)$
		$12\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$	d) $12 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$
	7	Multi-digit subtraction	Subtração de números com números

	11	Divid numerators and denominators	de vários algarismos
	15	Digits	Divido os numeradores pelos numeradores e os denominadores pelos denominadores
	19	Circle	Algarismos
	21	Solid figure	Circunferência
			Sólido geométrico
Representações	6	$\begin{array}{r} 10 \\ 7 \overline{) 127} \\ - 70 \\ \hline 57 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 R 1 \\ 7 \overline{) 57} \\ - 56 \\ \hline 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ + 8 R 1 \\ \hline 18 R 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 127 \overline{) 17} \\ - 70 \overline{) 10} \\ \hline 57 \end{array}$ $\begin{array}{r} 57 \overline{) 17} \\ - 56 \overline{) 8} \\ \hline 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ + 8 \\ \hline 18 (R=1) \end{array}$
	22	Retângulo ABCD Triângulo AED Triângulo AEF ΔAED , ΔAFD , ΔAGD , ΔAEG , ΔDGF	Retângulo [ABCD] Triângulo [AED] Triângulo [AEF] [AED], [AFD], [AGD], [AEG], [DGF]

Nesta categoria consideraram-se alterações relativas às unidades de medida. Procurou-se utilizar unidades que se usam em Portugal. Como se observa na tabela, o “dólar”, presente nos testes americanos, foi substituído pela moeda oficial de Portugal o “euro”. Além disso, substituiu-se a “milha”, que não é uma unidade muito usual em Portugal, pelo “quilómetro” e, de forma semelhante, a unidade “feet”, traduzida por “pés” pelos “metros”.

Relativamente a mudanças relativas à “linguagem matemática escolar” refira-se, por exemplo, à diferença existente entre os EUA e Portugal relativamente à representação dos números inteiros e decimais. Nos EUA o ponto é utilizado para separar a parte inteira da parte decimal, o que em Portugal é substituído por uma vírgula. Por sua vez, nos EUA, a vírgula tem como função separar as diferentes classes inteiras dos números, o que é omitido em Portugal. Por exemplo, na questão 24 “3.5” foi traduzido para “3,5” e na questão 3 “7,500” para “7500”.

Ainda nesta categoria agruparam-se mudanças nas representações matemáticas. Por exemplo, como se verifica na tabela em cima, na questão 6, a representação do algoritmo da divisão apresentado no questionário americano teve de ser adaptado por não ter a mesma

apresentação em Portugal. Além disso, na questão 22 realizaram-se alterações relacionadas com a escrita matemática.

Para se clarificar de que modo se realizou a tradução e a adaptação do instrumento de medição do MKT à realidade portuguesa, de seguida, irá utilizar-se um exemplo presente num artigo de Hill, Schilling e Ball (2004) para se mostrar como se realizou este processo. Note-se que não se irão utilizar as questões em estudo no presente trabalho para ilustrar o método de tradução e adaptação, uma vez que, como já se referiu, estas perguntas não podem ser reveladas, por questões de confidencialidade exigidas pelo LMT.

Este processo envolveu diferentes tipos de alteração, aquando da tradução do inglês americano para o português. Serão assinaladas a cinzento as palavras, frases, números e/ ou representações que foram sujeitas a alteração. Estas alterações serão caracterizadas de acordo com as categorias já descritas anteriormente neste estudo.

Mr. Fitzgerald has been helping his students learn how to compare decimals. He is trying to devise an assignment that shows him whether his students know how to correctly put a list of decimals in order of size. Which of the following sets of numbers will best suit that purpose?

- a) .5 7 .01 11.4
- b) .60 2.53 3.14 .45
- c) .6 4.25 .565 2.5
- d) Any of these would work well for this purpose. They all require the students to read and interpret decimals

Figura 17 – Exemplo de uma questão de medição do MKT por traduzir (Hill, Schilling & Ball, 2004).

Em baixo, apresenta-se a mesma questão, mas traduzida e adaptada ao contexto português.

O Professor José tem vindo a ensinar os seus alunos a comparar números decimais. Ele está a tentar conceber uma tarefa que lhe mostre se os seus alunos sabem ordenar corretamente uma lista de números decimais. Qual dos seguintes conjuntos melhor atenderá esse propósito?

- a) 0,5; 7; 0,01; 11,4
- b) 0,60; 2,53; 3,14; 0,45
- c) 0,6; 4,25; 0,565; 2,5
- d) Qualquer uma das três opções funcionaria bem para esse fim. Todas as opções exigem que os alunos saibam ler e interpretem os números decimais.

Figura 18 - Questão presente num artigo de Hill, Schilling e Ball (2004), traduzida e adaptada ao contexto português.

Na tradução desta questão, realizaram-se diferentes alterações de tipos diferentes, de modo a que esta questão fosse adaptada ao contexto português.

A primeira alteração refere-se a uma mudança de *contexto cultural geral*, em que se traduziu *Mr. Fitzgerald* para *Professor José*. Em Portugal, é comum usar-se o primeiro nome do professor(a).

Quanto a mudanças relacionadas com a *linguagem matemática escolar*, destaque-se a alteração do “.”, utilizado nos EUA para a “,” que é usada no ensino, em Portugal. Assim, os números *11.4; 2.53; 3.14; 4.25 e 2.5*, na tradução e adaptação ao contexto português, foram substituídos pelos seguintes: *11,4; 2,53; 3,14; 4,25 e 2,5*.

Além disso, ainda nas alterações relacionadas com conteúdos matemáticos, observe-se que nos EUA se omite o zero à esquerda da vírgula, enquanto que em Portugal isso não se verifica. Deste modo, os números *.5; .01; .60; .45; .6 e .565* foram substituídos por *0,5; 0,01; 0,60 e 0,565* na questão em português.

II. Tradução/ adaptação do teste ao contexto português

Como já foi mencionado no início deste subcapítulo, após a a dupla tradução do teste e sua adaptação à realidade portuguesa, seis colaboradores deram o seu parecer sobre este processo.

No geral, os colaboradores (apenas) fizeram sugestões de alteração ao questionário de índole linguístico. Consideraram as questões do teste adequadas ao contexto português e capazes de medir os diferentes tipos de conhecimento matemático necessários para se ensinar matemática nos primeiros anos.

Quanto à estrutura das questões, as duas colaboradoras do 2.º ciclo caracterizaram-nas como “questões demasiado extensas”.

Além disso, estas duas colaboradoras referiram ter tido dificuldades em responder às questões que tinham subjacentes conteúdos e/ou técnicas matemáticas do 1.º ciclo, aludindo “desconhecer as estratégias mais usadas, [tendo] dificuldades em “desmontar” problemas para a sua resolução”.

De todas as questões do teste, apenas um colaborador referiu considerar que três questões – 6, 8 e 9 – não caracterizavam o conhecimento necessário que o professor deve ter para ensinar matemática em Portugal, pois, segundo este professor do 2.º ciclo, estas questões “apresentam resoluções que não são usuais no nosso ensino”. Apesar deste parecer do colaborador, decidiu-se manter as questões 6, 8 e 9 no questionário final, a aplicar a professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico de Portugal, pois os conhecimentos matemáticos aludidos nestas três questões dizem respeito a técnicas e/ou conteúdos que fazem parte do Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013) e das Aprendizagens Essenciais (2018), relativos ao domínio de “Números e Operações” do 2.º ciclo.

Relembre-se do subcapítulo 5.2 – Descrição das questões em que consistia cada uma destas três questões.

A questão nº 6 refere-se a uma abordagem não standard da divisão, que se exige que um aluno adquira no 5º ano, tal como está presente no Programa (2013), “reconhecer que numa dada uma divisão inteira, que se um número divide o divisor (d) e o resto (r) então divide o dividendo (D)” (Ministério da Educação, 2013, p. 29).

As questões nº 8 e 9 requerem conhecimento sobre algoritmos com representação vertical devem ser trabalhados com os alunos no 1.º ciclo, tal como se refere no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013), no domínio “Números e Operações” relativo a conteúdos matemáticas da “Adição e Subtração” do 2º ano.

Na questão 8, pede-se a resolução de uma “subtração com dois transportes”, assim denominada no Caderno de Apoio ao 1.º ciclo (2013) e também usado como um exemplo de uma tarefa a ser efetuada com os alunos no 2.º ano para trabalharem a subtração de dois números naturais até 1000.

A questão 9 solicita a análise de um algoritmo não standard da subtração. Apesar de não ser um algoritmo referido no Programa de Matemática português, como referem Hill e Ball (2004), um professor de Matemática deve ser capaz de “avaliar um raciocínio matemático, compreender o significado de ideias e procedimentos matemáticos” (p. 331) de modo a validar ou não as conjecturas apresentadas pelos alunos.

Após o processo de seleção, tradução e adaptação das questões construídas para medir o MKT de professores americanos à realidade portuguesa, apresentado ao longo deste capítulo, considera-se o instrumento constituído por estas 52 questões: 29 questões do domínio da

Matemática *Números e Operações* e 23 questões de *Geometria e Medida* validadas no contexto português. Nesta linha de ideias, estas questões foram aplicadas a uma amostra de 61 professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, com vista a estudar o seu conhecimento matemático necessário para ensinarem, como se irá explanar no próximo capítulo (capítulo 6).

Capítulo 5 – Fase 2 do Estudo

Análise dos resultados de professores Portugueses no questionário

How we in mathematics education hold a mirror up to ourselves?
Jeremy Kilpatrick (1984)

Após a tradução, adaptação e validação do questionário que mede o conhecimento necessário para se ensinar matemática nos 1.º e 2.º ciclos, ao contexto português, aplicou-se este instrumento a uma amostra de 61 professores, de modo a ser possível responder à segunda questão de investigação deste trabalho: 2) Qual o conhecimento matemático para se ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal?.

Neste capítulo 6, intitulado de *Fase 2 do Estudo: Análise dos resultados de professores Portugueses no questionário*, pretende-se analisar o conhecimento matemático necessário para se ensinar de professores portugueses dos primeiros anos.

Este capítulo está dividido em três subcapítulos.

No primeiro subcapítulo – 5.1. Aplicação do teste a professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico – caracteriza-se a amostra dos 61 docentes participantes neste trabalho e estuda-se o Conhecimento Matemático para se Ensinar (MKT) destes professores.

No segundo subcapítulo – 5.2. Prestação dos professores entrevistados em questões do questionário – apresenta-se a caracterização dos professores entrevistados, descrevem-se as questões selecionadas para análise nas entrevistas e analisa-se a prestação destes docentes entrevistados nestas perguntas.

Por último, no terceiro subcapítulo – 5.3. Associação entre a prestação dos professores nas perguntas do questionário e o seu raciocínio apresentado nas entrevistas: análise caso a caso – realiza-se a associação entre o desempenho destes professores entrevistados no questionário e o raciocínio apresentado nas entrevistas.

5.1. Aplicação do teste a professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico

Neste subcapítulo irá apresentar-se o desempenho de professores portugueses aquando da aplicação do questionário.

Para isso, dividiu-se este subcapítulo em cinco secções.

Na primeira, descrevem-se os 61 professores portugueses, intervenientes nesta investigação.

Na segunda secção, apresenta-se uma análise geral do MKT dos docentes participantes nesta investigação, em que se estudam possíveis correlações entre os resultados destes professores com algumas variáveis estatísticas.

Nas restantes três secções, analisa-se o desempenho dos professores intervenientes neste estudo, tendo em conta os domínios da matemática, os domínios do MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) e o nível de dificuldade das questões, obtido neste estudo.

Relativamente ao *grau de dificuldade*, decidiu-se analisar este parâmetro, tendo em conta os dados obtidos neste estudo (D) e não o grau de dificuldade (d) apresentado, por cada questão, nos estudos dos EUA.

Tal como já se referiu no capítulo 3, referente à Metodologia, mais especificamente em 3.2.2., o nível de *dificuldade* (D) foi estudado, no presente trabalho, com recurso à TCT. Sendo assim:

$$\text{nível de dificuldade de cada questão } (D) = \frac{\text{n.º de respostas corretas nessa questão}}{\text{n.º total de respostas}}$$

Tendo em conta o *nível de dificuldade* (D) de cada questão, classificar-se-á as perguntas que compõem o questionário como: “difíceis”, “um pouco difíceis”, “um pouco fáceis” e “fáceis”. De forma similar também se fez esta categorização das questões, de acordo com o grau de dificuldade (d) obtido, através da IRT, nos EUA, já apresentada no capítulo 4. Repare-se na tabela em baixo que os valores que se observaram de d e de D são bastante diferentes, o que já era esperado, tendo em conta que um estuda o nível de dificuldade segundo a IRT e outro a TCT, o que não significa que não estejam correlacionados, como se vai verificar de seguida.

Tabela 15 - Caracterização das questões de escolha múltipla, segundo os níveis de dificuldade: d e D .

	Questões	Questões	Questões	Questões
	<i>Difíceis</i>	<i>um pouco difíceis</i>	<i>um pouco fáceis</i>	<i>Fáceis</i>
Variação do grau de dificuldade (d) nos estudos realizados EUA	$d \geq 2$	$0 < d < 2$	$-2 < d \leq 0$	$d \leq -2$
Variação do grau de dificuldade (D) neste estudo com professores de Portugal	$0 \leq D < 0,25$	$0,25 \leq D < 0,50$	$0,50 \leq D < 0,75$	$0,75 \leq D \leq 1,00$

Apesar de se ter decidido utilizar o grau de dificuldade (D) apresentado para cada questão, no presente estudo, pareceu importante, primeiramente, verificar se existe associação entre os valores observados deste parâmetro nos EUA e na presente investigação.

Sendo ambas as variáveis estatísticas quantitativas – grau de dificuldade observado neste estudo e em investigações dos EUA – estudou-se, através do IBM SPSS Statistics versão 25, o coeficiente de correlação de Pearson.

Como se verifica na tabela em baixo existe uma correlação negativa forte ($r = -0,621$) e estatisticamente significativa ao nível de 0,01 entre estas duas variáveis estatísticas.

Note-se que já se esperava que o coeficiente de correlação apresentasse um valor negativo, na medida em que o parâmetro d varia de -3 a $+3$, em que $d \leq -2$ se referem as questões fáceis e $d \geq 2$ as difíceis, e, por outro lado, D tem uma variação entre 0 a 1, sendo que as questões difíceis variam entre 0 a 0,50 e as fáceis de 0,50 a 1, como se observa na tabela 15 em cima. Deste modo, à medida que o grau de dificuldade (d) obtido nos EUA aumenta, as questões caracterizam-se como mais difíceis, e à medida que o grau de dificuldade (D) encontrado neste estudo cresce, as questões são mais fáceis.

Assim, tendo em conta que observou uma correlação negativa e forte, pode-se concluir que quanto mais difícil foi considerada uma questão nos EUA, mais difícil também demonstrou ser neste estudo, realizado com professores portugueses.

Tabela 16 - Estudo do grau de associação entre o nível de dificuldade obtido neste estudo e nos EUA.

		Grau de dificuldade neste estudo realizado em Portugal	Grau de dificuldade nos estudos dos EUA
Grau de dificuldade neste estudo realizado em Portugal	Correlação de Pearson	1	-0,621
	Significância (2 extremidades)		0,000
	N	52	52
Grau de dificuldade nos estudos dos EUA	Correlação de Pearson	-0,621 ^{**}	1
	Significância (2 extremidades)	0,000	
	N	52	52

^{**}. A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

5.1.1. Caracterização da amostra

Intervenientes – dados pessoais e profissionais

Neste estudo, participaram num total 61 professores, a quem foi entregue uma carta com a descrição do projeto e com a informação do total sigilo relativamente ao conteúdo e à forma de todas as questões que compõem o questionário (Anexo 3).

Como se pode visualizar no gráfico circular e na tabela de frequências absolutas e relativas apresentadas em baixo, a maioria dos professores 59% (36) lecionam o 1.º ciclo do Ensino Básico, 35% (21) ensinam Matemática ao 5º e/ou 6º anos de escolaridade, 3% (2) ensinam anos relativos aos 1.º e 2.º ciclos. Pode-se também visualizar que 3% (2) dos professores não responderam a esta questão. Os valores mais precisos estão especificados no gráfico e na tabela, já referidos.

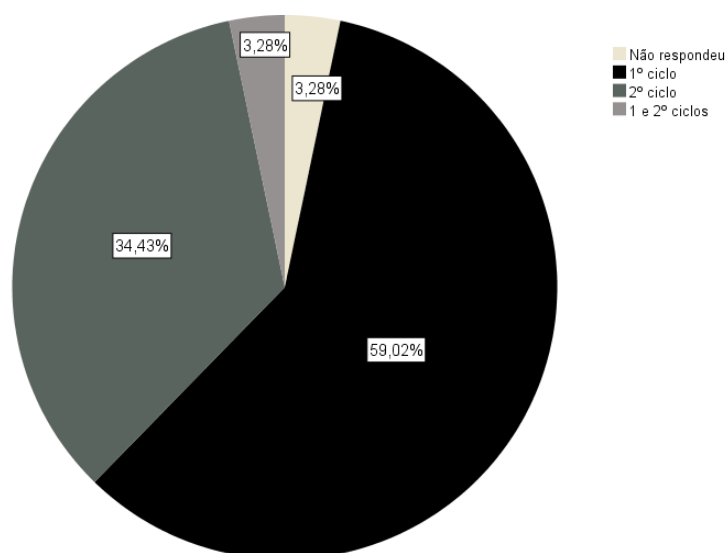


Figura 19 – Gráfico circular demonstrativo do número de professores, participantes do estudo, que lecionam em cada ciclo de ensino.

Tabela 17 – Distribuição dos professores participantes neste estudo por nível de ensino em que lecionam.

Nível de ensino em que leciona	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulativa
Não respondeu	2	3,3	3,3	3,3
1.º ciclo	36	59,0	59,0	62,3
2.º ciclo	21	34,4	34,4	96,7
1.º e 2.º ciclos	2	3,3	3,3	100,0
Total	61	100,0	100,0	

Os 61 professores pertencem à zona Norte de Portugal e lecionam nos distritos de Braga e Porto. Dos 61 professores, 79 % (48) são do género feminino e os restantes, 16 % (10) do masculino, sendo que três professores não indicaram o seu género.

A amostra de professores que responderam ao instrumento de medição do conhecimento matemático para ensinar, em estudo neste trabalho, exercem funções de docência em quatro agrupamentos de Escolas da Zona Norte, dos quais três pertencem ao distrito de Braga e um ao distrito do Porto e em dois colégios privados também localizados na região Norte de Portugal, um localizado em cada um destes distritos.

No que diz respeito à idade (em anos) dos intervenientes desta investigação, pode-se classificar esta variável estatística como bimodal, pois existem o mesmo número de professores com idades compreendidas entre os 41 e os 45 anos e entre os 46 e os 50 anos, cerca de 16,4 % (10 professores). Por outro lado, repare-se no gráfico de barras em baixo que quanto à idade (em anos) esta amostra de docentes se caracteriza como heterogénea, contendo professores com idades compreendidas entre os 21 e os 25 anos e até professores com mais de 60 anos.

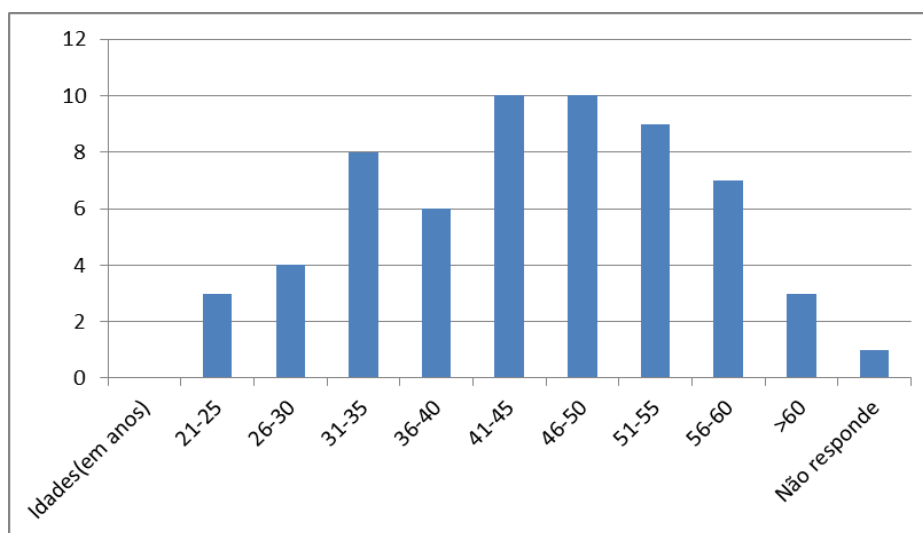


Figura 20 – Idade (em anos) dos intervenientes desta investigação.

Dos 61 professores que participaram neste estudo e dos 57 que deram resposta às questões relacionadas com as “Habilitações Académicas” e com as “Habilitações Profissionais”, 54 caracterizavam-se como profissionalizados e três referiram possuir (apenas) habilitação própria para a docência, Bacharelato.

Quarenta e dois dos intervenientes (69%) completaram um programa de formação para a docência antes de ingressarem no ensino, enquanto que 4 (7%) começaram a leccionar sem completarem qualquer curso ou programa, por mais breve que fosse. Um professor referiu ter completado um “programa de formação alternativo” antes de ingressar na docência. Além disso, 13 professores (21%) não responderam à questão que abordava esta temática.

Dos 82% dos professores, do grupo dos profissionalizados para a área da docência do 1.º e/ou 2.º ciclos do Ensino Básico, constata-se no gráfico circular (em baixo) que 41 (67%) afirmaram ser licenciados, 10 (16%) disseram ter Mestrado, três (5%) referiram ter completado, para além da Licenciatura, um Curso de Pós-graduação, e também três mencionaram, ter Bacharelato.

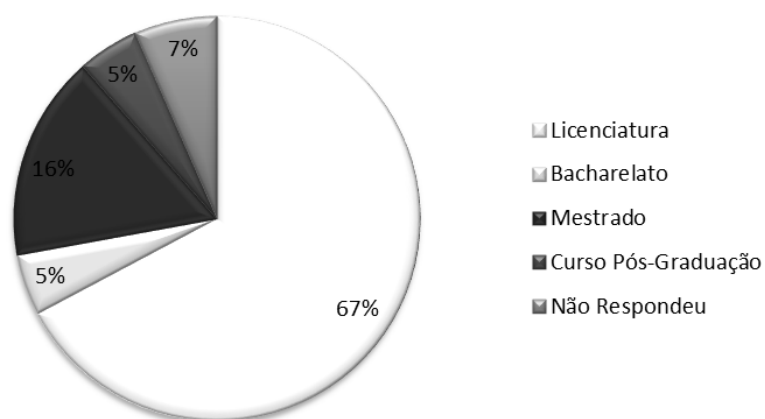


Figura 21 – Distribuição dos professores intervenientes, em percentagem, por habilitações académicas.

O grupo de professores intervenientes nesta investigação pode ser caracterizado, maioritariamente, como uma amostra de docentes experientes, no que diz respeito ao tempo de serviço para a docência. Efetivamente, como se pode observar na tabela em baixo, é certo que 13 (21%) dos professores que responderam ao teste de medição do conhecimento matemático para se ensinar descrevem-se como pouco experientes, tendo apenas lecionado entre 0 a 5 anos, e 2 (aproximadamente 3%) professores tinham entre 5 a 10 anos de tempo de serviço para a docência, mas os restantes 76% (46 professores) caracterizavam-se como professores experientes, apresentando mais de 10 anos de exercício de funções docentes.

Tabela 18 – Tempo de serviço (em anos) docente dos professores participantes no presente estudo.

Tempo de serviço docente (em anos)	Percentagem dos professores
[0;5[	21%
[5;10[	3%
[10;15[	12%
[15;20[	18%
[20;25[	8%
[25;30[	15%
≥ 30	23%

Intervenientes – dados de ensino

No presente estudo, além de uma caracterização geral da amostra dos professores participantes, decidiu-se incluir também no questionário as questões desenvolvidas pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan, questões essas que permitem recolher alguns dados sobre:

- a formação dos professores intervenientes nos campos da matemática e da educação;
- o tempo que esses professores dedicaram à matemática e a outros assuntos letivos no último ano;
- a avaliação que fazem acerca do seu conhecimento matemático;
- as estratégias que privilegiam para ensinar matemática.

Objetivos desta parte do questionário:

- caracterizar a amostra, quanto à sua perceção desses professores, enquanto docentes de matemática;
- realizar correlações entre estas variáveis e outras mais relacionadas com o conhecimento matemático para o ensino, correlações essas que podem vir a fornecer dados importantes para esta investigação.

Quanto ao tempo que dedicaram à formação em matemática ou ao seu ensino no último ano letivo, 30 (49%) professores consideraram ter dedicado mais de 35 horas, 5 professores (8%) 16 a 35 horas, 9 professores (15%) referiram utilizar entre 6 a 15 horas, 8% menos de 6 horas e (ainda) 12 professores (20%) responderam não terem usado nenhum do seu tempo, no ano passado, com a matemática.

Tabela 19 – Tempo dedicado à matemática e a outros assuntos no último ano, pelos professores intervenientes nesta investigação.

Respostas	Tempo dedicado à Matemática no último ano		Tempo dedicado com outros assuntos no último ano	
	Frequência absoluta	Percentagem	Frequência absoluta	Percentagem
Nenhum	12	19,7	10	16,4
Menos de 6 horas	5	8,2	4	6,6
6-15 horas	9	14,8	8	13,1
16-35 horas	5	8,2	8	13,1
Mais de 35 horas	17	27,9	13	21,3
Não responde	13	21,3	18	29,5
Total	61	100,0	61	100,0

No que diz respeito à formação nas áreas da matemática e da metodologia do ensino desta disciplina, apesar de 24 professores (39%) intervenientes neste estudo terem referido que a sua formação conteve seis ou mais disciplinas de Matemática e 20 professores (33%) de Didática da Matemática, 13 professores (21%) consideraram não ter tido nenhuma disciplina de Matemática e 15 (25%) consideraram não ter tido nenhuma disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática. Quatro professores (7%) mencionaram terem tido (apenas) uma ou duas disciplinas de Matemática, sete (12%) entre três a cinco e os 13 professores restantes (22%) não responderam a esta questão. Quanto ao número de disciplinas de Metodologia do Ensino da Matemática, oito intervenientes neste trabalho (13%) disseram ter frequentado (apenas) uma ou duas disciplinas desta área e 6 professores (10%) entre três a cinco disciplinas.

Os professores participantes nesta investigação, na sua maioria, não realizara, atividades, além das suas funções de docência. Apenas 5 (8%) professores dos 61 referiram ter tido redução do tempo letivo para serem orientadores de futuros professores de Matemática, e sete (12,1%) mencionaram ter exercido funções de orientação de futuros professores, embora tivessem continuado com as mesmas responsabilidades e o mesmo tempo de trabalho. Além disso, 10 (16%) professores realizaram, enquanto formadores, cursos ou *workshops* relacionados com matemática ou com o ensino da matemática e 26 % dos professores

intervenientes neste estudo colaborou num grupo de trabalho ou numa associação de matemática ao nível de distrito ou de escola.

Da análise dos dados, pode-se também concluir que estes professores, no geral, consideram conhecer a matemática que precisam para ensinar, pois 46 professores (75 %) dos 61 responderam positivamente a esta questão, apenas um referiu indiferença e 5 professores (8%) indicaram não ter este conhecimento e 9 professores (15%) deixaram a resposta em branco.

Além disso, 25 (41%) docentes mencionaram ter um conhecimento profundo de *todas* as áreas da matemática escolar, 17 (28%) referiram indiferença neste campo, 11 (18%) não responderam, e oito docentes (13%) consideraram não ter um conhecimento profundo para o ensino da matemática.

Ainda neste campo do conhecimento matemático para o ensino, 29 professores (48%) descrevem-se como “mestres” enquanto professores de matemática, 16 (26%) discordam desta caracterização do seu papel enquanto docentes desta disciplina e 16 (26%) responderam 3 na escala de Lickert de (1 a 5).

5.1.2. Análise geral do MKT de professores portugueses

Neste subcapítulo, fornece-se uma visão geral da prestação dos docentes intervenientes neste estudo na resolução deste instrumento e apresentam-se possíveis correlações com outras variáveis em análise neste trabalho.

Nesta linha de ideias, neste subcapítulo, irá verificar-se, com auxílio do programa computacional IBM SPSS Statistics versão 25, se existe correlação entre as classificações dos 61 professores portugueses e as seguintes variáveis estatísticas:

- (1) O tempo de serviço docente;
- (2) O ciclo do Ensino Básico que ensinam;
- (3) Formação Académica dos professores;
- (4) Perceção que os professores têm sobre o conhecimento que têm da matemática que precisam de saber para ensinar.

Da análise das respostas dos professores ao questionário composto pelas questões de escolha múltipla em estudo no presente trabalho refira-se que, em média, estes docentes obtiveram uma classificação de, aproximadamente, 56%.

Além disso, como se pode observar no histograma apresentado em baixo, os 61 docentes apresentaram classificações bastante dispares, sendo que todas as classes referentes às percentagens que obtiveram no questionário apresentaram valores diferentes de zero.

Observe-se também que classe modal é entre os 50% e os 60%, sendo que 12 professores obtiveram classificações neste intervalo percentual.

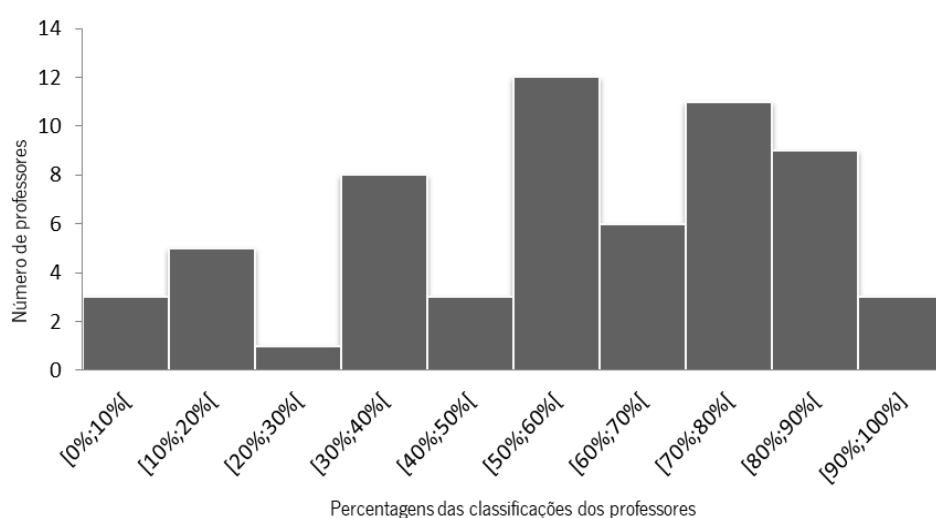


Figura 22 - Histograma representativo das classificações, em percentagem, dos professores portugueses intervenientes neste estudo.

Os dois professores com melhor pontuação obtiveram 92,31%, tendo um dos professores deixado uma questão por responder e o outro não tendo deixado nenhuma resposta em branco.

O docente com menor classificação obteve (apenas) 3,85%. Note-se que este docente não respondeu a mais de metade do questionário – deixou 67% das questões por responder – e das dezassete questões que respondeu, apenas duas das respostas estavam corretas.

Por outro lado, observe-se na Figura 21, no diagrama de extremos e quartis que a mediana é um valor próximo dos 60%, mais precisamente 59,6%, que 25% das classificações são inferiores a 37% - primeiro quartil - e 25% são superiores a 79%. Existe algum enviesamento do lado esquerdo, isto é, os dados estão mais dispersos, ou seja, menos concentrados na parte inferior do que na parte superior.

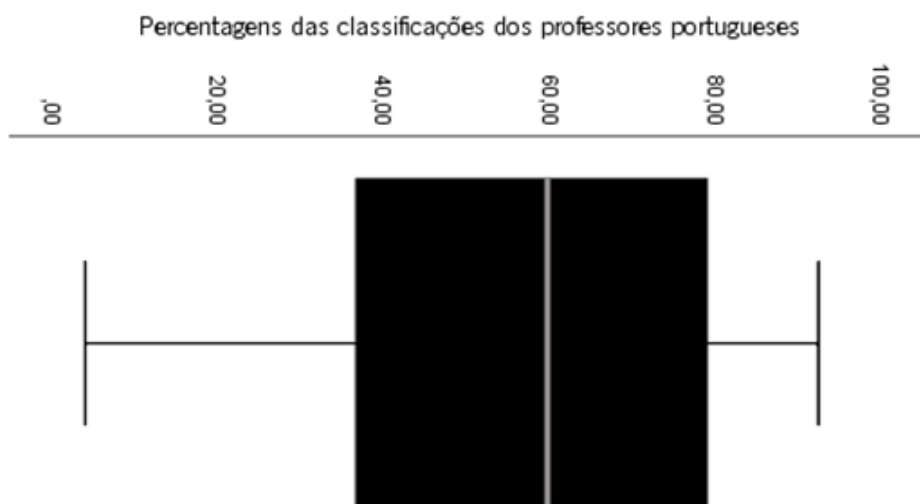


Figura 23 - Diagrama de extremos e quartis representativo das classificações, em percentagem, dos professores portugueses participantes nesta investigação.

(1) Relação das classificações dos professores com o tempo de serviço docente

Analisou-se, através do programa IBM SPSS Statistics versão 25, se existe correlação entre as pontuações que os 61 docentes participantes neste estudo obtiveram neste teste de medição do conhecimento matemático, com o tempo de serviço de docência.

Recorde-se do subcapítulo anterior, através do histograma apresentado em baixo, que 76% (46 professores) dos 61 docentes caracterizavam-se como professores experientes, apresentando mais de 10 anos de exercício de funções docentes.

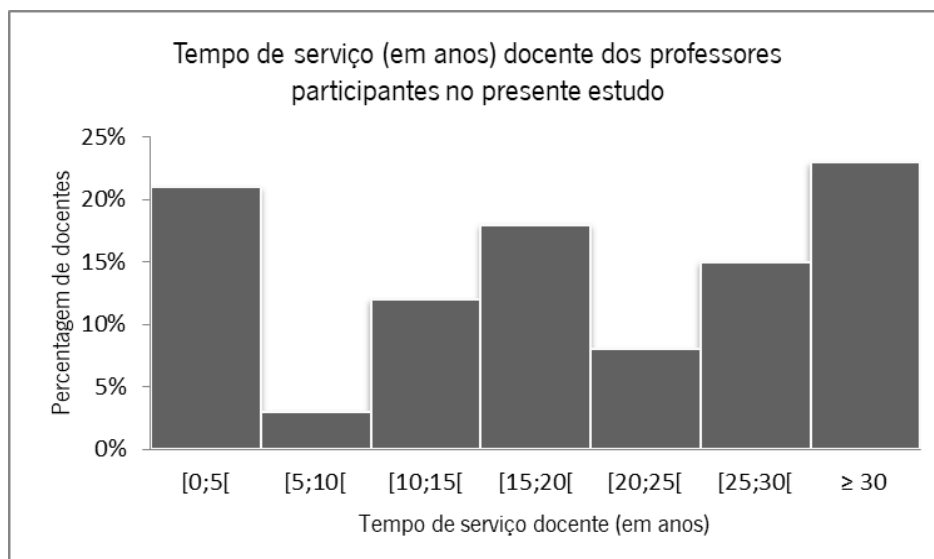


Figura 24 - Histograma representativo do tempo de serviço (em anos) docente dos professores intervenientes neste estudo.

Na tabela em baixo, observa-se a média da classificação dos professores intervenientes, de acordo com o tempo de serviço docente (em anos).

Apesar se constatar que os professores com melhores pontuações têm entre 5 e 10 anos de serviço, lembre-se que apenas se está a falar de dois docentes. Por outro lado, os docentes menos experientes, que têm até 5 anos de serviço, apresentaram as classificações mais baixas, tendo, em média, obtido 30,6%.

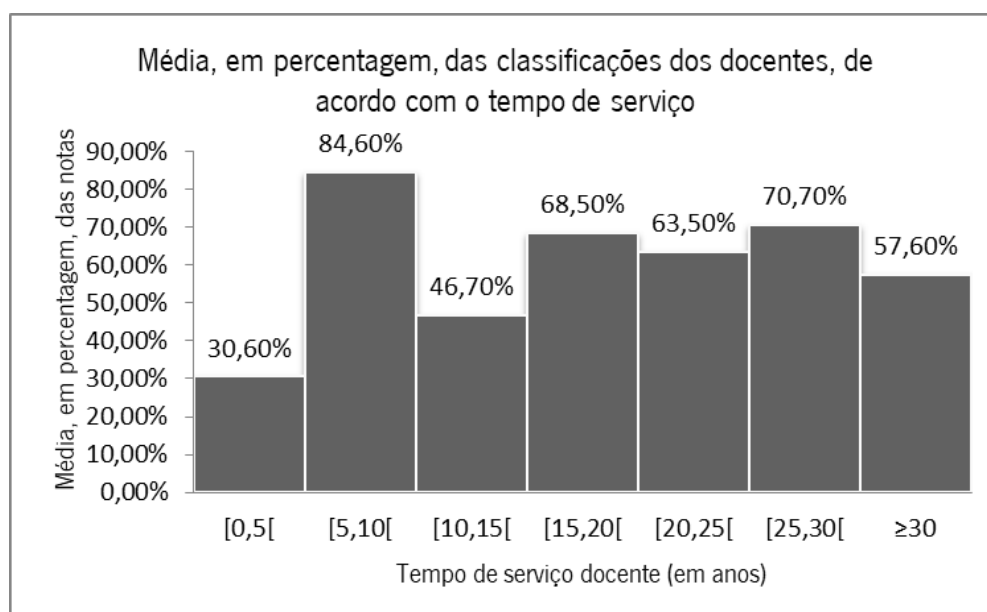


Figura 25 - Histograma representativo da média das pontuações de professores portugueses, de acordo com o tempo de serviço docente.

Para se estudar, de forma mais rigorosa e precisa, a relação entre as variáveis estatísticas pontuações da amostra de docentes e o tempo de serviço docente analisou-se o coeficiente de correlação de Pearson, pois “este coeficiente mede a intensidade e a direção da associação de tipo linear entre duas variáveis quantitativas” (Marôco, 2014, p. 23).

Note-se que este coeficiente varia entre -1 e $+1$ ($-1 \leq R \leq 1$) e se $r > 0$ as variáveis variam no mesmo sentido; se $r < 0$ as variáveis variam em sentido oposto (Marôco, 2014).

Repare-se e analise-se a tabela apresentada em baixo, construída no programa SPSS.

Tabela 19 - Análise da correlação entre as classificações dos professores e o tempo de serviço docente.

		Tempo de serviço docente	
	Classificações		
Classificações	Correlação de Pearson	1	0,408**
	Sig. (2 extremidades)		0,001
	N	61	61
Tempo de serviço docente	Correlação de Pearson	0,408**	1
	Sig. (2 extremidades)	0,001	
	N	61	61

** . A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

Verifica-se na tabela em cima que existe uma correlação positiva ($r=0,408$) e estaticamente significativa ao nível de 0,01. A associação entre as classificações dos professores e o tempo de serviço docente caracteriza-se como moderada, segundo Marôco (2014), pois $0,25 \leq |r| \leq 0,5$.

Assim, pode concluir-se que, neste conjunto de dados, parece existir uma associação positiva e moderada entre a classificação destes professores na resolução do teste e número de anos de experiência de ensino, isto é, quanto maior é o tempo de serviço docente, maior é a pontuação que obtida neste teste.

(2) Relação das classificações dos professores com o ciclo do Ensino Básico que ensinam

Neste subcapítulo também se explora a existência de associação entre as pontuações da amostra de professores portugueses intervenientes nesta investigação e o ciclo do Ensino Básico em que lecionam.

Como se explanou no subcapítulo anterior, na descrição dos participantes desta investigação, e como se observa no gráfico em baixo, a maioria dos docentes, 59% (36), leccionam o 1.º ciclo do Ensino Básico, 34% (21) ensinam Matemática ao 2.º ciclo, 3% (2) docentes referiram que dão aulas a alunos dos 1.º e 2.º ciclos e os restantes não forneceram nenhuma informação sobre o ciclo do Ensino Básico a que ensinam.

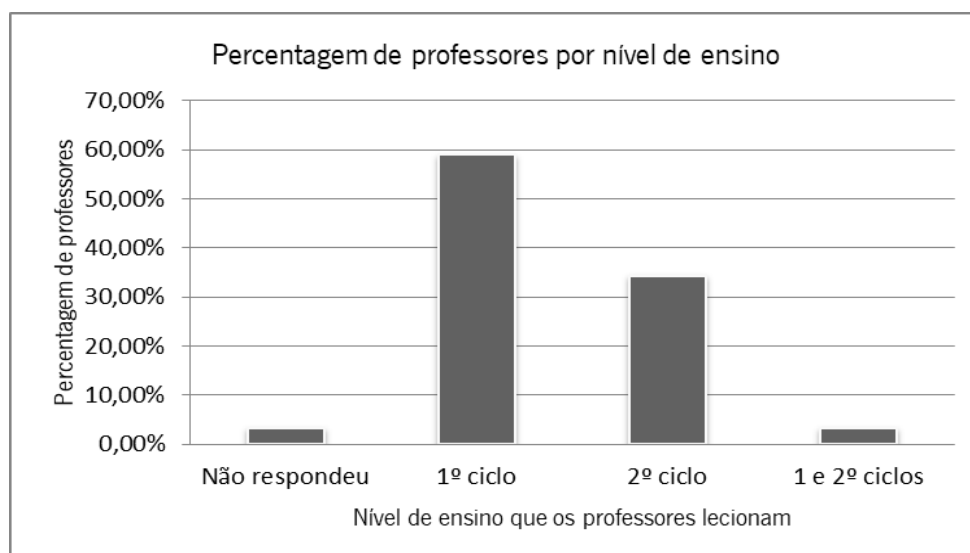


Figura 26 - Gráfico de barras representativo da percentagem de docentes que lecionam em cada ciclo do Ensino Básico.

No geral, constata-se, no gráfico de barras apresentado em baixo, que a média das classificações dos docentes que lecionam no 1.º ciclo é inferior à dos professores do 2.º ciclo. Na coluna denominada “Todos” apresenta-se a média dos professores que ensinam matemática a alunos dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico.

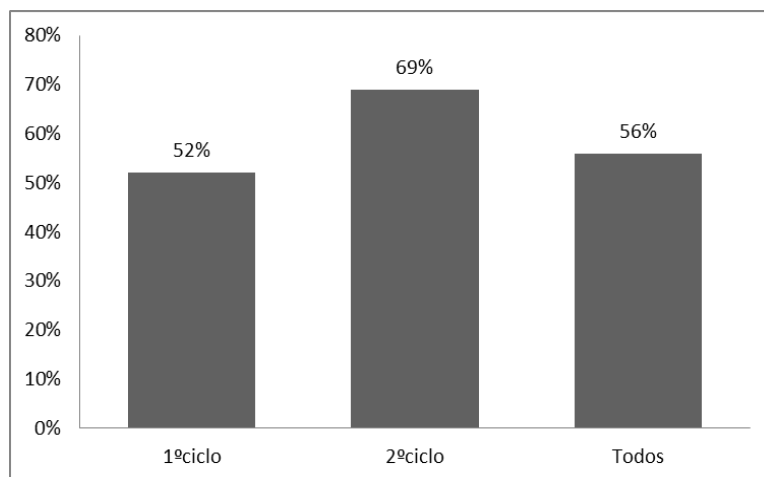


Figura 27 - Média das classificações dos professores, de acordo com o nível de ensino que lecionam.

De seguida, analisou-se, através do programa IBM SPSS Statistics versão 25, a associação entre as pontuações dos 61 docentes e o nível de ensino que lecionam.

Note-se que a variável estatística relativa às classificações se classifica como quantitativa discreta e o nível de ensino caracteriza-se como uma variável qualitativa ordinal. Deste modo, para se estudar a relação entre estas duas variáveis, utilizou-se o coeficiente de correlação de Spearman ($-1 \leq R_s \leq 1$) por se tratar de “(...) medida de associação entre duas variáveis pelo menos ordinais” (Marôco, 2014, p. 25).

Observe-se a tabela em baixo:

Tabela 21 - Análise da correlação entre as classificações dos 61 professores e o nível de ensino que lecionam.

		Classificações de professores	Nível de ensino que leciona
rô de Spearman	Classificações de professores	Coeficiente de Correlação	1,000
		Sig. (2 extremidades)	0,000
		N	61
Nível de ensino que leciona		Coeficiente de Correlação	0,447 ^{**}
		Sig. (2 extremidades)	0,000
		N	61

	N	61	61
--	---	----	----

** . A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

Observa-se através do valor obtido do coeficiente de correlação de Spearman (0,447) que existe uma associação positiva e moderada entre as classificações dos professores e o nível de ensino que lecionam e que é estatisticamente significativo ao nível 0,01 . Por essa razão, parece poder dizer-se que quanto maior o nível de ensino que os professores participantes lecionam, maior será a sua classificação no teste.

(3) Relação das classificações dos professores com a sua formação académica

Estudou-se também a relação entre as pontuações da amostra de professores portugueses intervenientes nesta investigação e a sua formação académica.

Como se referiu no subcapítulo anterior e se mostra no gráfico de barras em baixo, a maioria dos professores profissionalizados que responderam ao questionário deste trabalho, 67% (41), indicaram ser licenciados; cerca de 16% (10) disseram ter Mestrado, 5% (3) referiram ter completado, para além da Licenciatura, um Curso de Pós-graduação, e também 5% (3) mencionaram, ter Bacharelato.

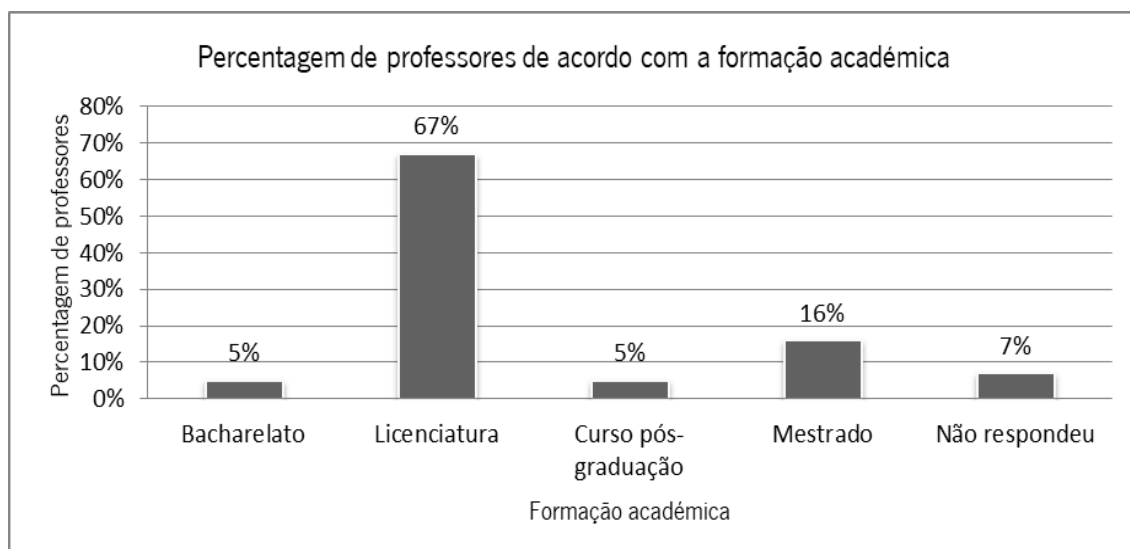


Figura 28 - Gráfico de barras representativo do número de professores intervenientes na investigação, em percentagem, de acordo com a sua formação académica.

Observe-se o gráfico de barras que se apresenta em baixo referente à média das pontuações dos professores no questionário de medição do MKT, distribuídas pelo grau académico.

Apesar de não se constatar valores percentuais muito discrepantes, denota-se que os docentes com o grau académico mais elevado (Mestrado) apresentaram, em média, classificações superiores aos docentes que possuem menos formações académicas.

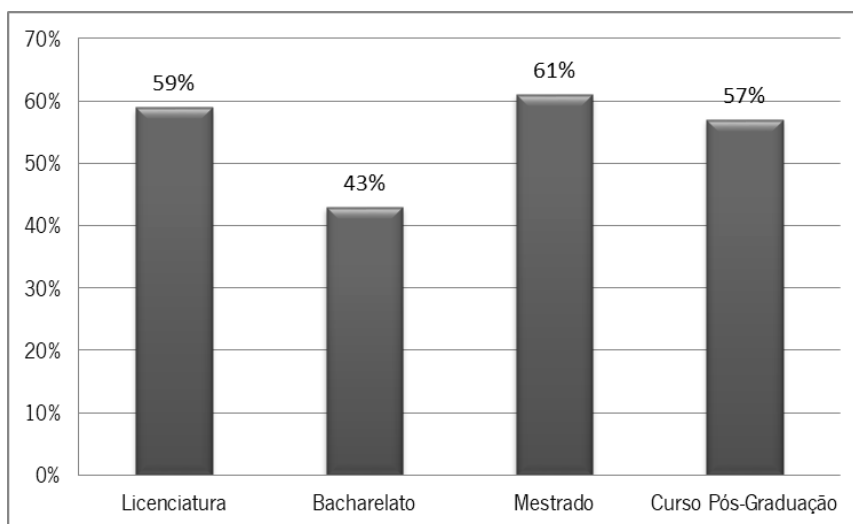


Figura 29 - Média, em percentagem, das classificações dos professores por habilitações académicas.

Como a variável estatística relativa às classificações se classifica como quantitativa discreta e a formação académica se caracteriza como uma variável qualitativa ordinal, para se estudar o grau de associação destas variáveis recorreu-se ao coeficiente de correlação de Spearman ($-1 \leq R_s \leq 1$). Para isso, atribuiu-se no SPSS o valor 0 aos professores que afirmaram ter “Bacharelato”, 1 os que indicaram possuir “Licenciatura”, 2 aos que referiram ter “Cursos de pós-graduação”, 3 para “Mestrado”, 4 “Doutoramento” e o valor 5 foi atribuído às respostas em branco.

Observando-se a tabela em baixo, verifica-se que o coeficiente de correlação de Spearman apresentou um valor de $-0,085$, logo que a associação entre as classificações dos professores intervenientes nesta investigação e a sua formação académica é negativa e fraca, pois $|r_s|$ é inferior a $0,25$. Por esta razão, neste caso, o coeficiente de correlação de Spearman não acrescenta grande informação, além da que já tinha sido referida neste ponto deste trabalho, acerca da relação entre estas duas variáveis.

Tabela 22 - Análise da correlação entre as classificações dos 61 professores e a sua formação académica.

		Formação académica	Classificações dos professores participantes
rô de Spearman	Formação académica	Coeficiente de Correlação	1,000
		Sig. (2 extremidades)	– 0,085
			0,514
		N	61
	Classificações dos professores participantes	Coeficiente de Correlação	– 0,085
		Sig. (2 extremidades)	1,000
			0,514
		N	61

(4) Relação entre as classificações dos professores e a sua percepção acerca do conhecimento que têm da matemática que precisam de saber para ensinar.

Por último, analisou-se, com auxílio do IBM SPSS Statistics versão 25, se existe uma associação entre as classificações que os professores obtiveram no questionário e a percepção que têm sobre o que sabem da matemática que precisam para ensinar.

Como se observa no gráfico de barras em baixo, recorde-se que, na resposta à pergunta “Em geral, conheço a matemática que preciso para ensinar”, 46 professores (75%) concordaram com a afirmação, 9 (15%) não responderam e (apenas) 5 docentes (8%) consideraram não conhecerem a matemática que precisam para ensinar.

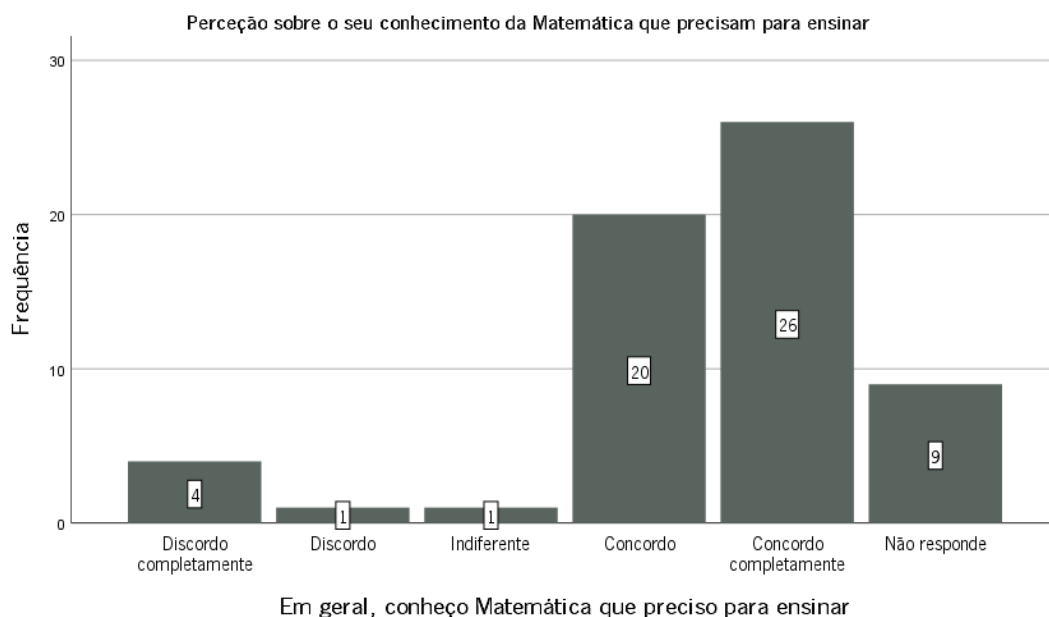


Figura 30 - Respostas dos docentes participantes na investigação à questão: "em geral, conheço a matemática que preciso para ensinar".

Como a variável estatística relativa às classificações se classifica como quantitativa discreta e a percepção dos professores sobre a matemática que precisam para ensinar que conhecem se caracteriza como uma variável qualitativa ordinal, para explorar a associação destas variáveis recorreu-se ao coeficiente de correlação de Spearman ($-1 \leq R_s \leq 1$).

Para se analisar esta questão no software informático SPSS, atribuiu-se o número 0 à resposta "Discordo Completamente", 1 a "Discordo", 2 a quem respondeu "Indiferente", 3 a "Concordo", 4 a "Concordo Completamente" e introduziu-se o 5 para "Não responde".

Como se constata na tabela em baixo, o coeficiente de correlação de Spearman apresentou um valor de $-0,361$, logo o grau de associação entre as classificações dos docentes e a sua percepção sobre o que conhecem da matemática que ensinam é negativa e moderada, pois $0,25 \leq |r| \leq 0,5$ (Marôco, 2014). Como o coeficiente de correlação é negativo, "as variáveis variam em sentido oposto" (Marôco, 2014, p. 23).

Tabela 23 – Estudo da correlação entre as classificações dos docentes e a percepção que têm do que sabem da matemática que precisam para ensinar.

		Percepção sobre o seu conhecimento da Matemática que precisam para ensinar	Prestação dos professores portugueses
rô de Spearman	Percepção sobre o seu conhecimento da Matemática que precisam para ensinar	Coeficiente de Correlação	1,000
		Sig. (2 extremidades)	-0,361**
		N	61
	Prestação dos professores portugueses	Coeficiente de Correlação	1,000
		Sig. (2 extremidades)	-0,361**
		N	61

** . A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

Assim, da análise do coeficiente de correlação entre estas duas variáveis, parece poder constatar-se que quanto mais elevadas foram as classificações obtidas pelos docentes no questionário, mais afirmam não conhecer, no geral, a matemática que precisam para ensinar.

5.1.3. Desempenho dos professores por domínios da matemática

Neste subcapítulo, irá estudar-se o desempenho dos professores intervenientes neste estudo nos domínios “Números e Operações” e “Geometria e Medida”.

Como se pode observar na tabela em baixo, os professores, em média, apresentaram maior número de respostas corretas em questões que envolviam “Geometria e Medida” do que nas perguntas de “Números e Operações”. Irá verificar-se ao longo deste subcapítulo que os docentes demonstraram um melhor desempenho no primeiro domínio referido do que no segundo.

Tabela 24 - Média das classificações dos professores intervenientes na investigação por domínio de Matemática.

Questões por domínio	Números e Operações	Geometria e Medida
Matemático		
Número de questões	29	23
Média das pontuações dos professores	49,8%	60,81%

Números e Operações

Na primeira parte do questionário relativo ao domínio “Números e Operações”, os professores intervenientes nesta investigação obtiveram, em média, 49,75% e uma mediana de 52,5%.

Em baixo, apresenta-se a percentagem de respostas corretas e incorretas em cada uma das questões relativas a conteúdos deste domínio da matemática.

Tabela 25 - Percentagem de respostas corretas e erradas nas questões do domínio de Números e Operações.

N.º questão	Percentagem respostas corretas	Percentagem respostas erradas
1 a	65,2%	34,8%
1b	77%	23%
1c	77%	23%
1d	64%	36%
2	36,1%	63,9%
3	31,1%	68,9%
4	18%	82%
5	57,4%	42,6%
6	47,5%	52,5%
7	37,7%	62,3%
8 a	32,8%	67,2%
8 b	55,7%	44,3%
8 c	9,8%	90,2%
9	41%	59%
10	63,9%	36,1%
11	23%	77%
12 a	55,7%	44,3%
12 b	52,5%	47,5%
12 c	70,5%	29,5%
12 d	30%	70%
13 a	68,9%	31,1%
13 b	73,8%	26,2%
13 c	55,7%	44,3%
13 d	37,7%	62,3%
14	75,4%	24,6%

15	44,3%	55,7%
16 a	37,7%	62,3%
16 b	57,4%	42,6%
16 c	45,9%	54,1%

Como se pode observar na tabela 25, nas 29 perguntas que envolviam conceitos deste domínio da Matemática, em 14 questões, os professores intervenientes nesta investigação obtiveram resultados negativos (abaixo dos 50%). Apenas as perguntas 1b, 1c, 12c, 13b e 14 apresentaram médias superiores a 70%.

De todas as questões que abordavam conceitos relativos ao domínio da Matemática “Números, Operações e Conceitos”, as questões 1b e 1c caracterizaram-se pelas perguntas que os professores mais acertaram. A questão 8c, por outro lado, destacou-se pelo menor número de respostas corretas, número esse muito baixo (9,8%).

As questões 1b e 1c diziam respeito a regras práticas, que os professores ensinam aos seus alunos para os ajudar a relembrarem-se de ideias matemáticas ou procedimentos particulares.

A questão 1b, como está patente na tabela em baixo, e como já se descreveu em 5.2., exigia um Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), foi considerada um “pouco difícil”, em estudos estatísticos feitos nos EUA em 2008 e “um pouco fácil” neste estudo.

Tabela 26 - Caracterização da questão 1b.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 1b	Regra de multiplicação de um número por 10.	Avaliar se o procedimento prático apresentado é verdade ou não para todos os números.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)</i>	d=1,185 D=0,77

Nesta pergunta, verifica-se na tabela em baixo, que nenhum professor deixou a resposta em branco e, como já se tinha referido, 47 (77%) docentes responderam corretamente que a afirmação “para se multiplicar qualquer número por 10, acrescenta-se um zero à direita do número” nem sempre é verdadeira, por exemplo, no caso dos números decimais.

Tabela 27- Respostas corretas e erradas dos professores à questão 1b.

Caracterização das respostas	Frequência	Porcentagem
Incorretas	14	23
Corretas	47	77
Não responde	0	0
Total	61	100,0

A questão 1c, como já foi descrita no subcapítulo 5.2., dizia respeito a regras de cálculo com números racionais relativas ao 6.º ano de escolaridade e tinha as seguintes características apresentadas em baixo. Exigia um Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) para avaliar a validade de uma regra de cálculo e em estudos realizados nos EUA foi considerada um pouco fácil, tendo em conta o grau de dificuldade apresentado, na tabela em baixo.

Tabela 28 - Caracterização da questão 1c.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 1c	Adição de números racionais conjuntos números inteiros relativos Conjunto dos números racionais	Avaliar se o procedimento prático apresentado é verdade ou não para todos os números.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)</i>	d=-0,738 D=0,77

Nesta questão, 77% (47) dos docentes responderam de forma correta, isto é, selecionaram a opção esta regra de cálculo funcionava para todos os números.

Tabela 29 - Respostas dos professores à questão 1c.

Caracterização das respostas	Frequência	Porcentagem
Correta	47	77,0
Incorreta	12	19,7
Não responde	2	3,3
Total	61	100,0

A partir dos resultados destas questões e de outras semelhantes que se irão analisar mais à frente, verifica-se que os professores, no geral, sabem regras e procedimentos de cálculo, isto é, estes docentes possuem um conhecimento matemático processual (Hiebert & Lefevre, 1986).

É importante os professores saberem as técnicas que ensinam aos seus alunos. No entanto, se o conhecimento destes docentes se restringir a um conhecimento matemático processual, segundo Hiebert e Lefevre (1986), o seu ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem por parte dos seus alunos caracterizar-se-á (apenas) pela memória e mecanização de regras, sem estabelecimento de quaisquer conexões entre conceitos, o que é preocupante na aprendizagem da matemática. É pois necessário que também possuam um conhecimento concetual (Hiebert & Lefevre, 1986).

Por outro lado, das questões que abordavam este domínio da Matemática, a questão 8c caracterizou-se como a que teve menor número de respostas corretas.

Nesta pergunta, como se apresenta em baixo, os docentes, tinham de avaliar explicações de alunos e identificar que a afirmação dada por aluno *não* evidenciava que o aluno tinha compreendido o algoritmo da subtração com dois transportes, um conteúdo matemático do 2.º ano de escolaridade. Esta questão envolvia assim um Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC). Observando-se o grau de dificuldade: em estudos realizados nos EUA, em 2008, a

pergunta 8c foi considerada *um pouco difícil*, na presente investigação com docentes .portugueses, caracterizou-se como *difícil*.

Tabela 30 - Caracterização da questão 8c.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 8c	Algoritmo da subtração com números da ordem das centenas	Avaliar as explicações dos alunos e verificar se evidenciavam que os alunos tinham ou não percebido o procedimento.	<i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC).</i>	d=1,542 D=0,01

Como se pode constatar na tabela apresentada em baixo apenas, aproximadamente, 10% (6) dos professores responderam corretamente a esta questão. Refira-se ainda que a maioria dos professores, 65,6% (40), respondeu de forma incorreta à questão. Ressalte-se ainda que 15 (24,6%) professores não responderam à pergunta 8c.

Tabela 31 - Respostas dos professores à questão 8c.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	40	65,6
Correta	6	9,8
Não responde	15	24,6
Total	61	100,0

A baixa percentagem de respostas corretas a esta questão parece preocupante, quer pela facilidade dos conteúdos matemáticos que patenteia, quer pela parte pedagógica dos

conteúdos que exige e além disso, coloca a seguinte questão: – Como podem os professores ensinar o algoritmo da subtração se não são capazes de avaliar os raciocínios dos alunos?

Geometria e Medida

Na segunda parte do questionário relativo ao domínio “Geometria e Medida”, os professores intervenientes nesta investigação obtiveram, em média, 60,81% e uma mediana de 60,7%.

Em baixo, apresentam-se a percentagem de respostas corretas e incorretas dos professores participantes neste estudo em questões que continham conceitos de Geometria e de Medida. Como se observa na tabela, das 23 questões deste domínio matemático, (apenas) em duas perguntas, na 18b e na 24 a, se observou uma percentagem de respostas corretas abaixo dos 50%. Verifica-se também que em oito perguntas a percentagem de respostas corretas foi superior a 70%.

Tabela 32 - Percentagem de respostas corretas e erradas no domínio de Geometria e Medida.

N.º questão	Percentagem respostas corretas	Percentagem respostas erradas
17	55,4%	44,6%
18 a	77%	23%
18 b	31,1%	68,9%
18 c	83,6%	16,4%
18 d	57,4%	42,6%
18 e	55,7%	44,3%
19 a	52,5%	47,5%
19 b	83,6%	16,4%
19 c	78,7%	21,3%
19 d	77%	23%
20	57,4%	42,6%
21 a	83,6%	16,4%
21 b	63,9%	36,1%

21 c	55,7%	44,3%
21 d	60,7%	39,3%
21 e	86,9%	13,1%
21 f	62,3%	37,7%
22	59%	41%
23	62,3%	37,7%
24 a	42,6%	57,4%
24 b	72,1%	27,9%
24 c	50,8%	49,2%
24 d	55,7%	44,3%

Nesta secção dos conceitos geométricos, os professores obtiveram maior número de respostas corretas na questão 21e) e menor número na 18b).

Na pergunta 21e) de escolha múltipla, como se verifica na tabela em baixo, os professores tinham de analisar as definições de prisma, pirâmide e tetraedro e verificar que a representação do sólido geométrico apresentado se tratava de uma pirâmide. Refira-se que no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013) se considera o reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares, como os sólidos geométricos, como as primeiras noções básicas a serem trabalhadas com os alunos do 1º ciclo do Ensino Básico, no domínio da Geometria. Mais especificamente, a pirâmide e as características aparecem como conteúdos a serem abordados no 2º ano do Ensino Básico (Programa e Metas Curriculares, 2013, p.9).

Também se constata na tabela que, tanto nas investigações nos EUA como no presente estudo com professores portugueses, esta questão se classificou como *fácil*.

Tabela 33 - Caracterização da questão 21e).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 21e	Conceitos de sólido geométrico, prisma, pirâmide e tetraedro.	Analisar as definições de prisma, pirâmide e tetraedro e identificar que a representação do sólido geométrico apresentado correspondia a uma pirâmide.	<i>Conhecimento Especializado (SCK)</i>	d=-2,262 D=0,87

A esta pergunta 87% (53) professores responderam corretamente e 13% (8) docentes não responderam à questão, como se constata na tabela que se segue. Esta questão destacou-se pela maior percentagem de respostas corretas, em todo o questionário.

Tabela 34 - Respostas dos professores à questão 21e.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Correta	53	86,9
Incorreta	0	0
Não responde	8	13,1
Total	61	100,0

Estes resultados observados eram esperados, na medida que esta questão além de fornecer a definição dos sólidos geométricos, apresenta a sua representação gráfica e, estudos nacionais e internacionais, revelam que os professores dão grande relevância às representações, por exemplo, na construção dos conceitos.

Por exemplo, num estudo nacional desenvolvido por Gomes (2003), numa das perguntas que faziam parte de um questionário sobre conceitos geométricos básicos e elementares que aplicou a uma amostra de (futuros) professores do 1.º ciclo do Ensino Básico, esta investigadora constatou que a representação, neste caso de um trapézio isósceles, teve um papel fundamental, na medida em que “(...) muitos dos indivíduos se basearam quase exclusivamente nela para produzirem a definição, relegando para um plano secundário as propriedades dadas” (p.230).

Por outro lado, a questão 18b), na parte de Geometria e Medida, destacou-se pelo menor número de respostas corretas pelos docentes intervenientes.

Repare-se na tabela em baixo, que esta pergunta foi considerada “um pouco difícil” tanto nos EUA como neste estudo.

Além das características apresentadas na tabela em baixo, nesta pergunta, um professor para responder corretamente tinha de considerar a afirmação “um retângulo é um quadrado” como “às vezes verdadeira”.

Tabela 35 - Caracterização das questões 18b.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 18b	Conceitos de quadrado e retângulo.	Avaliar se a afirmação geométrica é ou não sempre verdadeira.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK).</i>	d=0,125 D=0,31

Como se pode constatar na tabela em baixo apenas 31% (19) dos professores responderam acertadamente.

Tabela 36 - Respostas dos professores à questão 18b.

Caracterização das respostas	Frequência	Porcentagem
Correta	19	31,1
Incorreta	35	57,3
Não responde	7	11,5
Total	61	100,0

Ressalte-se que no conjunto das respostas erradas (57,3%), grande percentagem (55,7%) de professores selecionaram a afirmação “um retângulo é um quadrado” como sendo *nunca verdadeira*.

Refira-se que, num estudo, sobre a formação inicial de professores do Ensino Básico no domínio da Geometria, de Couto (2015), alunos do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica mostraram lacunas em conceitos geométricos elementares, como as propriedades de quadriláteros, de forma semelhante com o presente trabalho.

Refletindo-se nestes números, patentes na tabela 36, parece existir razões para a existência de alguma preocupação, na medida que uma das aprendizagens essenciais do 1.º ano se refere a “descrever figuras planas, identificando as suas propriedades, e representá-las a partir de atributos especificados” (Aprendizagens Essenciais, 2018, p.9). Em particular, relativamente ao retângulo, constata-se que no Caderno de Apoio ao 1.º ciclo (Bivar et al., 2013, p.12) está descrito explicitamente que: “no caso em que os lados consecutivos de um retângulo são geometricamente iguais, dizemos que se trata de um quadrado”.

5.1.4. Desempenho dos professores por domínios do MKT

As questões de escolha múltipla que compõem o questionário em estudo podem ser categorizadas de acordo com os subdomínios, definidos por Ball, Thames e Phelps (2008), do conhecimento do MKT que avaliam. Fez parte deste trabalho esta caracterização das questões de acordo com o tipo de conhecimento do professor que avaliam, na medida que o projeto LMT, na maior parte das questões apenas as enquadra no Conhecimento do Assunto (CK).

Na tabela em baixo, apresenta-se o número de questões por domínio do MKT e a média das classificações (em percentagem) obtida pelos intervenientes deste estudo.

Tabela 37 - Média das classificações dos professores intervenientes na investigação nas questões organizadas por domínios do MKT.

Questões por domínios do MKT	Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)	Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)	Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)
Número de questões	16	29	7
Média das pontuações dos professores	66,36%	52,63%	45,64%

Como se verifica na tabela em cima, no geral, os professores portugueses participantes neste estudo tiveram prestações mais elevadas nas questões que exigiam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), isto é, em perguntas em que o professor tinha de ter presente os conceitos matemáticos e as técnicas ou procedimentos que ensinam aos seus alunos.

Nas 29 perguntas que envolviam, por exemplo, avaliar explicações matemáticas por parte dos alunos e identificar a sua validade ou selecionar diferentes problemas para trabalhar o significado de um mesmo conceito, isto é, das questões que envolviam o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), os professores apresentaram uma média mais baixa (52,63%), relativamente às perguntas que avaliam Conhecimento Comum do Conteúdo.

No entanto, destaque-se da tabela que foram as perguntas que envolviam Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC) que os professores portugueses apresentaram média mais baixa.

Como no subcapítulo anterior (5.1.2.) se analisou o desempenho dos docentes nas questões em estudo, de acordo com o seu domínio matemático e, neste subcapítulo, se está a avaliar a sua prestação, tendo em conta o tipo de conhecimento matemático que estas perguntas exigem, pareceu importante cruzar estas duas variáveis e, por isso, apresentar-se-á esta análise de seguida.

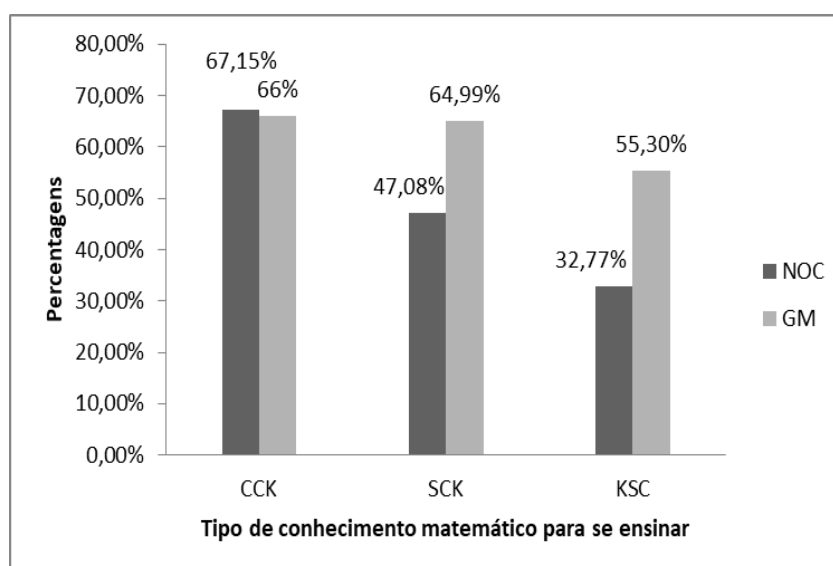


Figura 31 - Média, em percentagem, das classificações dos professores, de acordo com o tipo de conhecimento matemático presente nas questões de "Números e Operações" e de "Geometria e Medida".

Observando-se o gráfico de barras em cima, que relaciona as variáveis “Tipo de Conhecimento Matemático” e o “Domínio de Matemático”, verifica-se no gráfico de barras agrupadas em cima que, no caso das questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) a média das classificações dos professores nas questões de Números e Operações é muito semelhante à média nas perguntas de Geometria e Medida.

Contudo, observa-se que nas questões que exigem conhecimento especializado do conteúdo (SCK) ou conhecimento do conteúdo e dos alunos (KSC), nas perguntas de Números e Operações a média das classificações dos docentes foi bastante inferior à média das perguntas que continham conteúdos de Geometria e Medida. Estes resultados já eram esperados, na medida que no subcapítulo anterior se verificou que os professores portugueses tiveram um pior desempenho em questões que envolviam Números e Operações do que as que avaliam o segundo domínio matemático em estudo.

Questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)

Os docentes participantes nesta investigação obtiveram, em média, como já foi referido, classificações (em percentagem) mais elevadas – 66,36% – em questões que (apenas) exigiam

“um simples cálculo ou responder corretamente a um dado problema” (Ball, Thames e Phelps, 2008, p. 399), questões essas que abordam um Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), tal como denominou o grupo de trabalho da Universidade de Michigan.

Observe-se a tabela em baixo, que se refere às percentagens de respostas corretas e incorretas em questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK). Note-se que as perguntas 1 à 15 (inclusive) dizem respeito a Números e Operações, enquanto que as restantes continham conceitos de Geometria e Medida.

Tabela 38 - Percentagem de respostas corretas e incorretas em questões que envolviam CCK.

N.º questão	Percentagem respostas corretas	Percentagem respostas erradas
1 a	65,2%	34,8%
1b	77%	23%
1c	77%	23%
1d	64%	36%
14	75,4%	24,6%
15	44,3%	55,7%
18 a	77%	23%
18 b	31,1%	68,9%
18 c	83,6%	16,4%
18 d	57,4%	42,6%
18 e	55,7%	44,3%
19 a	52,5%	47,5%
19 b	83,6%	16,4%
19 c	78,7%	21,3%
19 d	77%	23%
23	62,3%	37,7%

Repara-se que os docentes portugueses obtiveram melhores classificações nas questões 18 c e 19b, enquanto que foi na pergunta 18b que apresentaram, em média, resultados mais baixos. Refira-se que estas três perguntas avaliavam conceitos de Geometria e Medida.

De seguida, vai-se analisar, com mais detalhe, as questões 18 c e 19b. A questão 18b não será estudada aqui, na medida em que esse estudo já foi feito no subcapítulo anterior (6.1.2.) por se ter tratado da pergunta de Geometria e Medida que os professores apresentaram melhor desempenho.

Apresenta-se em baixo a caracterização da questão 18c), onde consta que nos estudos estatísticos do LMT esta pergunta foi considerada “um pouco fácil” e, no presente trabalho, denominou-se de “fácil”, de acordo com o *nível de dificuldade (D)* apresentado.

Nesta pergunta, um professor responderia corretamente se seleccionasse a opção “Nunca verdadeira” como a classificação da afirmação “um cubo tem 8 arestas”.

Tabela 39 - Caracterização da questão 18c).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 18c	Noção do cubo e suas características.	Avaliar se a	<i>Conhecimento</i>	d=-0,630
		afirmação	<i>Comum do</i>	D=0,84
		geométrica é ou não sempre verdadeira.	<i>Conteúdo (CCK).</i>	

Na questão 18c, aproximadamente, 84% (51) dos docentes portugueses responderam corretamente à pergunta, isto é, classificaram corretamente como “Nunca verdadeira” a afirmação “um cubo tem 8 arestas”. Três (5%) professores caracterizaram, de forma errada, a afirmação “um cubo tem 8 arestas” de “Às vezes verdadeira” e 7 (11%) deixaram esta pergunta por responder, como se observa na tabela 40.

Tabela 40 - Respostas à questão 18c).

Caracterização das respostas	Frequência	Porcentagem
Correta	51	84
Incorreta	3	5
Não responde	7	11
Total	61	100,0

Apesar de a maioria (51) dos professores (84%) terem respondido corretamente à questão 18c) considera-se muito grave que três (5%) professores tenham considerado esta afirmação “às vezes verdadeira” e que sete (11%) professores não tenham respondido. Questiona-se como é possível os professores trabalharem com os seus alunos o conceito do cubo e de outros sólidos geométricos se não detêm as suas propriedades.

A questão 19b) apresenta as características resumidas na tabela em baixo.

Tabela 41 - Caracterização da questão 19b)

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 19b	Definição de polígono.	Avaliar se as afirmações são possíveis ou impossíveis, tendo em conta as características das figuras planas em questão.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK).</i>	d=-1,713 D=0,84

Esta pergunta, que considerada “um pouco fácil” em estudos com professores americanos e de “fácil”, nesta investigação com professores portugueses, pedia que os professores avaliassem a afirmação “um polígono só com dois lados” como uma figura “possível” ou “impossível”.

Como se constata na tabela em baixo, grande parte dos 61 professores, 51 (84%), responderam corretamente, que a afirmação é impossível, dois (3%) de forma incorreta, respondendo “possível” e oito (13%) deixaram esta questão em branco.

Tabela 42 - Respostas à questão 19b).

Caracterização das respostas	Frequência	Porcentagem
Correta	51	84
Incorreta	2	3
Não responde	8	13
Total	61	100,0

Apesar de a maioria dos professores ter identificado que é impossível um polígono ter dois lados, é preocupante que dois docentes tenham considerado a afirmação possível e oito não tenham respondido.

Na mesma linha de ideias, num estudo de Gomes (2003), alguns participantes revelaram ter imagens incompletas, senão mesmo erradas, de alguns conceitos geométricos elementares, como por exemplo de polígonos. Alguns intervenientes da investigação de Gomes (2003) classificaram como polígonos, figuras formadas por linhas curvas, demonstrando, à semelhança destes dois docentes participantes no presente trabalho, não deterem a imagem de polígono, o que é preocupante.

A definição de polígono é um conceito básico que, segundo o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (2013), deve ser trabalhado no 2.º ano de escolaridade. Como se pode esperar que os professores trabalhem corretamente este conceito com os seus alunos, se eles próprios não têm uma noção clara desse conceito?

Questões que envolviam Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)

Como se referiu no início deste subcapítulo, a média das classificações dos professores em questões que continham um tipo de conhecimento matemático não só meramente técnico, um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) foi de 52,63% e caracterizou-se como inferior à média das pontuações que exigiam o CCK. Ressalte-se estes valores com alguma preocupação, na medida em que Ball e Thames (2008) referem que este tipo de conhecimento, o Conhecimento Especializado do Conteúdo, se caracteriza como aquele que é unicamente necessário para se ensinar Matemática.

Em baixo, apresentam-se a percentagem de respostas corretas e incorretas nas 29 questões das 52 que exigiam que o professor tivesse um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) para que fosse capaz de lhes responder acertadamente. Refira-se que as perguntas da 2 à 16 c diziam respeito ao domínio da Matemática Números e Operações e as restantes nove estavam relacionadas com conceitos geométricos.

Tabela 43 - Percentagem de respostas corretas e incorretas nas questões que envolviam Conhecimento Especializado do Conteúdo.

N.º questão	Percentagem de respostas corretas	Percentagem de respostas erradas
2	36,10%	63,90%
3	31,10%	68,90%
4	18%	82%
5	57,40%	42,60%
6	47,50%	52,50%
7	37,70%	62,30%
9	41%	59%
10	63,90%	36,10%
11	23%	77%
12 a	55,70%	44,30%
12 b	52,50%	47,50%
12 c	70,50%	29,50%
12 d	30%	70%
13 a	68,90%	31,10%
13 b	73,80%	26,20%
13 c	55,70%	44,30%
13 d	37,70%	62,30%
16 a	37,70%	62,30%
16 b	57,40%	42,60%
16 c	45,90%	54,10%
17	55,40%	44,60%
20	57,40%	42,60%

21 a	83,60%	16,40%
21 b	63,90%	36,10%
21 c	55,70%	44,30%
21 d	60,70%	39,30%
21 e	86,90%	13,10%
21 f	62,30%	37,70%
22	59%	41%

Como se constata na tabela em cima, os docentes participantes neste estudo nas perguntas que envolviam este tipo de conhecimento matemático do professor apresentaram maior número de respostas corretas na questão 21e) e menor número na 4. Repare-se que a pergunta 21e) se trata de uma questão de Geometria e Medida e a 4 de Números e Operações.

De seguida, irá analisar-se a pergunta 4, de forma mais detalhada. A questão 21e já foi estudada no subcapítulo 5.1.2., pois tratou-se da pergunta de Geometria e Medida que os docentes apresentaram melhor desempenho.

A questão de escolha múltipla 4, como se verifica na tabela em baixo, pedia que se seleccionasse a afirmação que fornecesse a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido porque é que com a simplificação de frações se obtém frações equivalentes. Em estudos realizados em 2008 nos EUA, esta questão foi considerada “um pouco difícil”, pois apresentou um valor de grau de dificuldade de 0,617 e, nesta investigação, apresentou um nível de dificuldade de 0,18, sendo denominada de “difícil”.

Tabela 44 - Caracterização da questão 4.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 4	Simplificação de frações. Frações equivalentes.	Selecionar de quatro afirmações a que melhor evidenciava que um aluno tinha compreendido que através da simplificação de	<i>Conhecimento Especializado do Conteúdo (CCK).</i>	d=0,617 D=0,18

frações se obtém
frações
equivalentes.

Apenas 18% (11) dos 61 professores identificou corretamente a afirmação “esta regra resulta porque na realidade só se está a dividir a fração por 1, logo a nova fração é a mesma quantidade”. 78,7% (48) não selecionaram a melhor explicação e 3,3% (2) não responderam.

Tabela 45 - Respostas à questão 4.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	48	78,7
Correta	11	18
Não responde	2	3,3
Total	61	100,0

Refletindo-se sobre os dados recolhidos, os valores encontrados suscitam alguma preocupação, na medida que a abordagem das frações equivalentes, segundo o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico em Portugal (2013), deve ser realizada no 3.º ano de escolaridade, logo os professores deveriam ser capazes de identificar de entre várias explicações dos alunos a que melhor evidenciava que o aluno tinha percebido porque é que com a simplificação de frações se obtém frações equivalentes.

De forma semelhante, num estudo de Pinto e Ribeiro (2013) sobre o conhecimento de números racionais, 43% dos futuros professores de matemática dos primeiros anos envolvidos não foram capazes de identificar duas frações não equivalentes de quatro frações, em que duas eram equivalentes, como se observa na figura em baixo. Segundo Pinto e Ribeiro (2013), as dificuldades em resolver corretamente esta tarefa revelou, por parte destes (futuros) docentes, “(...) mais do que o desconhecimento da regra de equivalência de frações, um desconhecimento da fração como quociente (...)” (p. 14).

Figura 32 - Tarefa sobre identificação de frações não equivalentes (Pinto & Ribeiro, 2013, p. 14)

Questões que envolviam Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)

Nas sete questões que exigiam ao professor possuir um conhecimento matemático do conteúdo e dos alunos (KSC), como foi visto no início deste subcapítulo, apenas, aproximadamente, 46% dos intervenientes neste trabalho responderam corretamente. Este tipo de conhecimento permite que os professores de matemática sejam capazes de identificar evidências de que os seus alunos perceberam determinado procedimento e/ou conceito matemático, ou, por outro lado, fornece-lhes a destreza de compreender o que os conduz a determinado erro matemático.

Observe-se na tabela em baixo a percentagem de respostas corretas e incorretas nas questões que exigiam Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC). Note-se que as alíneas relativas à pergunta 8 avaliavam conceitos de Números e Operações e as restantes quatro questões diziam respeito a Geometria e Medida.

Tabela 46 - Percentagem respostas corretas e incorretas nas questões que envolvem Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC).

N.º questão	Percentagem respostas corretas	Percentagem respostas erradas
8 a	32,80%	67,20%
8 b	55,70%	44,30%
8 c	9,80%	90,20%
24 a	42,60%	57,40%
24 b	72,10%	27,90%
24 c	50,80%	49,20%
24 d	55,70%	44,30%

Constata-se que, das questões que exigiam este tipo de conhecimento, a 24 b se caracterizou pela maior percentagem de respostas corretas e a 8 c pelo menor número. A questão 8 c já foi analisada no subcapítulo anterior por também ser, de entre as perguntas que abordam conceitos de Números e Operações, a que os professores obtiveram menos número de respostas corretas. Desta forma, irá estudar-se, de seguida, a pergunta 24 b.

A questão 24 b, como já foi explanado no subcapítulo 4.2, envolvia o conceito de área de um quadrado, construído por aluno num geoplano. Um professor para responder corretamente a esta pergunta teria de analisar uma estratégia sugerida por aluno para o cálculo

da área que consistia em contar o número de pontos dentro do quadrado e classificá-la como matematicamente inaceitável.

Esta questão, como está patente na tabela em baixo, foi considerada “um pouco fácil”, quer em estudos realizados nos EUA pelo LMT, em 2004, quer na presente investigação.

Tabela 47 - Caracterização da questão 24 b.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 24 b	Conceito de área.	Analisar estratégias propostas por alunos e verificar quais são as matematicamente aceitáveis.	<i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)</i>	d=-0,891 D=0,72

Dos 61 docentes intervenientes nesta investigação, a maioria, 44 (72,1%), respondeu corretamente, que a estratégia proposta por aluno que consistia em contar o número de pontos do Geoplano dentro do quadrado corresponderia à área desta figura geométrica, estava errada. Em relação aos 17 (27,9%) professores que responderam erradamente, 13 (21,3%) deixaram a questão por responder.

Tabela 48 - Desempenho dos professores intervenientes na investigação na questão 24 b.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Correta	44	72,1
Incorreta	4	6,6
Não responde	13	21,3
Total	61	100,0

Apesar desta pergunta, de entre as que exigiam um Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC), ter sido a que um maior número de professores acertaram, este número parece ser muito baixo para uma questão que avaliava conteúdos do 4.º ano de escolaridade.

Reflita-se que, num estudo de Couto (2015), se constatou que o uso de fórmulas algébricas, a sua mecanização e memorização sobrepõem-se à aquisição de conceitos geométricos básicos, como por exemplo, conduziram à confusão entre a área e o perímetro de um círculo.

Pode referir-se quanto ao presente trabalho, que o conceito de área do quadrado está muitas vezes ofuscado pela fórmula do cálculo da área desta figura geométrica, podendo ser uma justificação para os 4 (6,6%) professores que responderam erradamente e os 13 (21,3%) que deixaram a resposta em branco.

5.1.5. Desempenho dos professores de acordo com o nível de dificuldade das questões em estudo

Neste subcapítulo irá apresentar-se uma análise dos dados relativos ao desempenho dos 61 professores participantes neste estudo, tendo-se em conta o grau de dificuldade das questões de escolha múltipla que constituem este instrumento de mediação do MKT.

O parâmetro “grau de dificuldade” (D) destas questões de escolha múltipla, como já se explorou no Capítulo 3, foi obtido através da razão do número de acertos, em cada questão, pela dimensão amostra de docentes participantes na presente investigação. Quando considerado pertinente, também se analisará o grau de dificuldade (d) apresentado por cada questão, em estudos estatísticos realizados aos testes de medição do conhecimento matemático de professores dos EUA.

Recorde-se de 6.1. que, quanto ao nível de dificuldade (d) dos EUA, as questões foram consideradas *fáceis*, se o seu grau de dificuldade (d) é inferior a -2, *um pouco fáceis*, se este parâmetro estatístico estiver entre -2 e zero, *um pouco difíceis* se estiver entre 0 e 2 e, por último, questões que apresentem um grau de dificuldade maior ou igual a dois serão denominadas de *difíceis* (Anexo 4).

Por outro lado, no que diz respeito ao nível de dificuldade (D) verificado nesta investigação, as questões serão denominadas de *fáceis*, se o seu grau de dificuldade (D)

apresentado no presente estudo for superior ou igual a 0,75 e inferior a 1, *um pouco fáceis*, se este parâmetro estatístico estiver entre 0,50 (inclusive) e 0,75, *um pouco difíceis* se estiver entre 0,25 (inclusive) e 0,50 e, por último, questões que apresentem um grau de dificuldade entre 0 e 0,25 denominadas de *difíceis* (Anexo 4).

Na tabela em baixo, apresenta-se o número de questões de escolha múltipla, organizado segundo o seu grau de dificuldade obtido neste estudo com professores portugueses e nas investigações realizadas pelo LMT com docentes americanos.

Tabela 4229 – Número de questões, categorizadas segundo o grau de dificuldade *d* e *D* observado.

	Fáceis	Um pouco fáceis	Um pouco difíceis	Difíceis
Número de questões, tendo em conta a dificuldade (d) obtida nos EUA	1	31	18	2
Número de questões, tendo em conta a dificuldade (D) obtido neste estudo	10	26	13	3

Observando-se a tabela em cima, apesar de o número de questões consideradas *fáceis* ter sido bastante superior neste estudo (10) do que nas investigações realizadas nos EUA (1), no geral, verifica-se uma concordância entre o grau de dificuldade obtido neste trabalho e pelo LMT, como já se tinha verificado em 5.1. quando se constatou, através do IBM SPSS versão 25, uma correlação negativa forte entre estas duas variáveis estatísticas, referentes ao nível de dificuldade das questões.

Constata-se na tabela em baixo o número de questões e a média das classificações dos professores intervenientes nesta investigação segundo os parâmetros: grau de dificuldade (D) e domínio da Matemática. Nesta tabela, destaca-se que o número de questões consideradas “fáceis” de conteúdos matemáticos de “Geometria e Medida” (7) é bastante superior ao número de questões fáceis de Números e Operações, como já se tinha observado em 5.1.3. Por outro lado, constata-se que as três perguntas difíceis estão na parte de “Números e Operações” do questionário.

Tabela 3350 - Média dos professores portugueses nas questões de escolha múltipla, por grau de dificuldade (D) e por área da Matemática.

Domínio da Matemática		Grau de dificuldade (D)				Total
		Difícil	Um pouco difícil	Um pouco fácil	Fácil	
		$0 \leq D < 0,25$	$0,25 \leq D < 0,50$	$0,50 \leq D < 0,75$	$0,75 \leq D \leq 1,00$	
NO	Número de questões	3	11	12	3	29
	Média das classificações dos professores portugueses	14%	39%	61%	76%	–
GM	Número de questões	0	2	14	7	23
	Média das classificações dos professores portugueses	–	40%	59%	82%	–

Questões fáceis

Das 52 perguntas que compõem o questionário, 26 foram consideradas “um pouco fáceis” e 10 “fáceis”, tendo em conta o grau de dificuldade (D) obtido no presente estudo. Em baixo, apresentam-se as fáceis e um pouco fáceis, divididas pelos dois domínios matemáticos estudados no presente trabalho. Como já se tinha referido anteriormente, o número de questões

que foram consideradas fáceis de Geometria e Medida é bastante superior ao de Números e Operações.

Na tabela em baixo, assinalou-se a cinzento as questões consideradas *fáceis*, isto é, que o grau de dificuldade (D) está entre 0,75 e 1, as restantes são as *um pouco fáceis*, com D entre 0,50 (inclusive) e 0,75.

Tabela 51 – Grau de dificuldade (D) revelado pelas questões fáceis do questionário.

Número da questão de Números e Operações	Grau de dificuldade (D)	Número da questão de Geometria e Medida	Grau de Dificuldade (D)
1 ^a	0,65	17	0,55
1b	0,77	18 a	0,77
1c	0,77	18c	0,84
1d	0,64	18d	0,57
5	0,57	18e	0,56
8b	0,56	19 ^a	0,53
10	0,64	19b	0,84
12 ^a	0,56	19c	0,79
12b	0,53	19d	0,77
12c	0,71	20	0,57
13 a	0,69	21 a	0,84
13b	0,74	21b	0,64
13c	0,56	21c	0,56
14	0,75	21d	0,61
16b	0,57	21e	0,87
		21f	0,62
		22	0,59
		23	0,62
		24b	0,72

	24c 0,51
	24d 0,56

Da tabela em cima, destaca-se a questão 21 e) pelo maior grau de dificuldade (D) apresentado, de entre as 52 perguntas que compõem o questionário. Assim, pode-se afirmar que esta questão foi a considerada mais fácil.

Refira-se que nos estudos estatísticos realizados nos EUA esta questão também foi considerada “a mais fácil” e apresentou um nível de dificuldade inferior a -2, mais precisamente o valor de -2,262.

É interessante observar-se que a questão que apresentou menor grau de dificuldade (d) em investigações com docentes nos EUA, isto é, a mais fácil, foi a que teve maior percentagem de respostas corretas pelos professores portugueses.

Esta questão já foi analisada no subcapítulo 5.1.2., uma vez que se caracterizou pela que teve maior percentagem de respostas corretas no conjunto das 52 perguntas que compõem o questionário. Também foi destacada no subcapítulo 5.1.3. por ter sido a questão que envolve Conhecimento Especializado do Conteúdo que os professores tiveram melhor desempenho.

Note-se que, além da pergunta 21e, 9 questões, assinaladas a cinzento na tabela em cima – 1b, 1c, 14, 18a, 18c, 19b, 19c, 19d, 21a – também foram descritas como “fáceis”, no presente trabalho, pois apresentaram valores de grau de dificuldade (D) entre 0,50 e 1,.

Relativamente a estas perguntas, diga-se que, todas, exceto uma, nos EUA, foi descrita como “um pouco fácil”, tendo apresentado uma dificuldade (d) entre -2 e 0.

Destaque-se a pergunta 1b, de entre estas 9 questões, por ter sido considerada neste trabalho de “fácil” e nas investigações com professores americanos se ter comportado como “um pouco difícil”.

A pergunta 1b apresentou, neste trabalho, um nível de dificuldade de 0,77, sendo “fácil” e, por outro lado, nos EUA, o grau de dificuldade (d) obtido foi de 1,185, tendo sido, por isso, caracterizada como “um pouco difícil”.

Esta questão de escolha múltipla já foi analisada no subcapítulo 5.1.2. por se caracterizar como uma das questões do domínio “Números e Operações” que os docentes participantes neste estudo obtiveram maior número de respostas corretas.

Relembre-se que esta pergunta abordava uma regra ou procedimento prático relativo à multiplicação de um número por 10. Como já se tem vindo a observar no presente trabalho, os professores portugueses tiveram boas prestações em questões que envolviam o conhecimento de técnicas ou regras matemáticas. Pode-se é perguntar: porque razão, nas investigações realizadas pelo LMT, em 2008, com docentes americanos esta questão terá sido descrita como “um pouco difícil”?

Além disso, das dez questões consideradas “fáceis” ($0,75 \leq D \leq 1$), aluda-se as três questões: 18c), 19b), 21a), a seguir da 21e, que foram consideradas mais fáceis neste teste.

Apesar de nesta investigação com professores portugueses terem sido denominadas de “fáceis”, as três com $D=0,84$, nos estudos realizados pelo LMT com docentes americanos foram consideradas (apenas) “um pouco fáceis” ($-2 < d < 0$).

As perguntas 18 c) e 19 b) já foram analisadas em 5.1.3 por avaliarem “Conhecimento Comum do Conteúdo” (CCK) e pelos professores portugueses terem tido um bom desempenho, por isso, será estudada, de seguida, a questão 21 a).

A questão 21a) tem a caracterização apresentada em baixo. Repara-se que nesta questão um professor responderia corretamente se, após analisar as definições de prisma, tetraedro e pirâmide, identificasse que a representação apresentada se tratava de um prisma. Note-se também que em estudos realizados nos EUA esta pergunta denominou-se de “um pouco fácil”, com grau de dificuldade (d) $-1,876$ e, nesta investigação, de “fácil”, como já se afirmou.

Tabela 524 - Caracterização da questão 21a).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 21 a	Conceitos de sólido geométrico, prisma, pirâmide e tetraedro.	Analisar as definições de prisma, pirâmide e tetraedro e identificar que a representação do sólido geométrico apresentado	<i>Conhecimento Especializado (SCK)</i>	$d=-1,876$ $D=0,84$

correspondia a um
prisma.

Observando-se a tabela em baixo, verifica-se que 84% (51) dos professores identificaram corretamente que a representação do sólido geométrico presente nesta questão se tratava de um prisma. Contudo, ainda houve 5% (3) de docentes a responder que o sólido apresentado não se tratava de um prisma e 11% (7) a não responder à questão.

Tabela 53 - Respostas à questão 21a).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Correta	51	84
Incorreta	3	5
Não responde	7	11
Total	61	100,0

Apesar de a percentagem de respostas erradas e de respostas em branco ser reduzida ainda assim se questiona como um professor dos primeiros anos possa não ser capaz de identificar a representação de um prisma, tendo a definição deste sólido geométrico no enunciado da questão!

Na mesma linha de ideias, num estudo de Gomes (2003) constatou-se que (futuros) professores do 1.º ciclo “escolhem como exemplos, figuras que não obedecem à definição (...)” (p. 282) de conceitos geométricos básicos e elementares, ou seja, de forma semelhante ao que se observou nos resultados do presente estudo, nesta investigação de Gomes (2003), os (futuros) professores, dada a definição de uma figura geométrica, selecionaram, na sua maioria, erradamente a respetiva representação.

Repare-se também que, de entre as 26 questões, a branco na tabela em cima, que descreveram valores de dificuldade (D) entre 0,50 e 0,75 – “um pouco fáceis” – 19 também foram consideradas “um pouco fáceis” nos EUA com $-2 \leq d < 0$. No entanto, 7 destas 26 perguntas, a 1d, 12b, 18d, 18e, 20, 22 e 24c, revelaram valores de dificuldade (d) nos EUA entre 0 e 2, tendo sido denominadas de “um pouco difíceis”. Parece relevante, por isso, explorá-las.

A questão 1d, como já se referiu classificou-se de *um pouco difícil*, em estudos estatísticos nos EUA, em 2008, com um grau de dificuldade (d) de 0,701. Além disso, como está patente na tabela em baixo, abordava o conceito da divisão, exigindo, assim, por parte dos professores, um *Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)*.

Tabela 54 - Caracterização da questão 1d).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 1d	Divisão.	Avaliar se o procedimento prático é verdade para todos os números ou não.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK).</i>	d=-1,876 D=0,64

Como se constata na tabela em baixo, 64% (39) dos professores responderam corretamente à pergunta 1d), isto é, consideraram que nem sempre é verdade que ao se realizar a divisão o quociente seja sempre menor do que o dividendo, por exemplo, em situações que o divisor é um número decimal, entre 0 e 1, esta afirmação já é falsa. Observa-se também que 33% (20) docentes responderam de forma errada e 3% (2) deixaram a resposta em branco.

Tabela 55 - Respostas à questão 1d).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	20	32,8
Correta	39	63,9
Não responde	2	3,3
Total	61	100,0

Mais uma vez está patente no presente trabalho, que esta amostra de docentes portugueses demonstra ter facilidade em questões que abordam regras práticas de fácil memorização, que ensinam aos seus alunos. Podemos destacar, novamente, um Conhecimento Matemático Processual (Hiebert & Lefevre, 1986) por parte destes docentes.

Os professores portugueses participantes nesta investigação na pergunta 12b revelaram um grau de dificuldade de 0,53 e os docentes americanos um grau de dificuldade de 1,620, sendo assim, caracterizada como *um pouco difícil*, nos EUA.

Esta questão apresentava um problema sobre divisão de números racionais com uma interpretação diferente do problema enunciado no início da pergunta 12, requerendo assim um *Conhecimento Especializado do Conteúdo* para lhe dar resposta.

Tabela 56 - Caracterização da questão 12b).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 12b	Divisão de números inteiros.	Avaliar se problema apresentado exige a mesma interpretação da divisão, do que o problema apresentado no enunciado da questão 12.	<i>Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).</i>	d=1,620 D=0,53

Como se constata na tabela em baixo, 52,5% (32) dos professores responderam corretamente à pergunta 12b), isto é, consideraram que o problema apresentado tinha uma interpretação diferente da divisão, relativamente ao problema descrito no enunciado da questão 12. Repare-se também que 24,5% (15) docentes caracterizaram ambos os problemas com a mesma interpretação da divisão e 23% (14) deixaram a resposta em branco.

Esta pergunta apresentou um valor de grau de dificuldade (d) nos EUA de 1,620, sendo “um pouco difícil” e em Portugal, com esta amostra de docentes, foi denominada de “um pouco fácil”. Apesar disso, repare-se que o grau de dificuldade (D) obtido neste estudo é de 0,53, isto é, muito próximo de 0,50, o limite entre as perguntas “um pouco fáceis” e “um pouco difíceis”.

Por isso, parece poder dizer-se que os valores para esta questão quanto aos graus de dificuldade não foram muito díspares com docentes portugueses e americanos.

Tabela 57 - Respostas à questão 12b).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	15	24,5
Correta	32	52,5
Não responde	14	23
Total	61	100,0

Na questão 18b um professor para responder corretamente tinha de considerar a afirmação apresentada sobre relação entre a área do círculo e o valor do raio ao quadrado como “sempre verdadeira”, exigindo-se, assim, um *Conteúdo Comum do Conteúdo* (CCK).

Quanto ao parâmetro relativo ao grau de dificuldade, nos EUA, foi de 0,125, sendo, por isso, denominadas de *um pouco difícil*.

Tabela 58 - Caracterização da questão 18d).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 18d	Fórmula da área do círculo.	Analisar uma afirmação referente a um caso especial de Geometria e verificar se é sempre, às vezes ou nunca verdadeira.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK).</i>	d=0,125 D=0,57

Em baixo, observa-se que 57,4% (35) professores portugueses responderam corretamente a esta questão. Dos 24,6% (15) docentes que erraram a resposta a esta questão 1,6% (1) escolheu a opção “às vezes verdadeira” e 9,8% (6) responderam que a afirmação

relativa à relação entre a área do círculo e o raio ao quadrado era “nunca verdadeira” e 1,2% (8) assinalaram a opção “não tenho a certeza”.

Tabela 59 - Respostas à questão 18d).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	15	24,6
Correta	35	57,4
Não responde	11	18
Total	61	100,0

A pergunta 18e também dizia respeito a uma afirmação sobre um caso especial da Geometria, mais especificamente sobre as propriedades de um paralelogramo, relativas à posição das diagonais. Para responderem de forma correta a esta questão, os professores tinham de considerar a afirmação como “às vezes verdadeira”, exigindo-se, assim, um *Conteúdo Comum do Conteúdo* (CCK).

Quanto ao parâmetro relativo ao grau de dificuldade, nos EUA, foi de 0,177, sendo, por isso, considerada *um pouco difícil*.

Tabela 60 - Caracterização da questão 18e).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 18e	Propriedades do paralelogramo.	Analisar uma afirmação referente a um caso especial de Geometria e verificar se é sempre, às vezes ou nunca verdadeira.	<i>Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK).</i>	d=0,177 D=0,56

Como se observa na tabela em baixo, 34 (55,7%) dos docentes participantes nesta investigação selecionaram corretamente a afirmação “às vezes verdadeira”. Dos 17 (27,9%) que responderam de forma incorreta, 6 (9,8%) consideraram a afirmação “sempre verdadeira”, 9

(14,8%) “nunca verdadeira” e 2 (3,3%) “não tenho a certeza”. Dos 61 docentes, 10 (16,4%) deixaram a resposta em branco.

Tabela 61 - Respostas à questão 18e).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	17	27,9
Correta	34	55,7
Não responde	10	16,4
Total	61	100,0

Diga-se que se questiona se os 6 professores que selecionaram a opção “sempre verdadeira” realmente consideram que no caso dos paralelogramos as diagonais se cruzam sempre perpendicularmente. Parece que não consideraram os paralelogramos obtusângulos, em que as suas diagonais (apenas) se cruzam nos pontos médios e não pensaram que os retângulos também são paralelogramos e que as suas diagonais (apenas) são congruentes, como se verifica nas representações destas figuras geométricas em baixo.

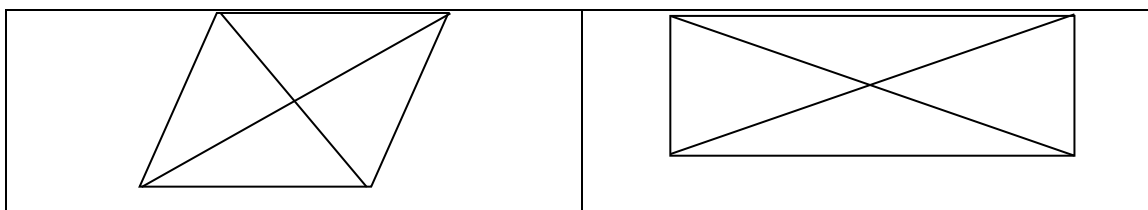


Figura 33 - Representação de um paralelogramo obtusângulo e de um retângulo e das respetivas diagonais.

Por outro lado, relativamente aos 9 docentes que selecionaram que a afirmação é “sempre verdadeira”, questiona-se se não consideram o losango e o quadrado como paralelogramos ou se não sabem as propriedades das diagonais destas figuras geométricas, como se apresenta nas representações gráficas destas figuras em baixo.

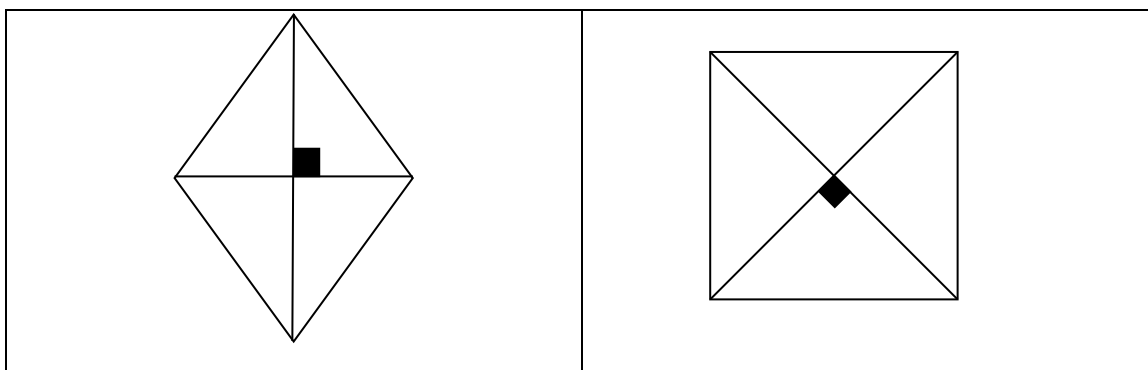


Figura 34 - Representação de um losango e de um quadrado e das suas diagonais.

Na mesma linha de ideias, num estudo realizado por Gomes (2003), nas respostas a uma pergunta relativa à definição de paralelogramo, a maioria dos (futuros) professores envolvidos selecionou como definição mais adequada “um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos, ângulos opostos iguais e diagonais não perpendiculares que se bisseitam” (p.219). Desta forma, a investigadora colocou algumas questões, uma entre as quais a seguinte: “(...) que figuras são consideradas como paralelogramos? Será que consideram um retângulo como paralelogramo? E o quadrado?” (Gomes, 2003, p. 220).

A questão 20 apresenta um problema matemático que envolve o conceito de paralelepípedo, das suas dimensões e a noção de volume. Nesta pergunta exige-se que um professor analisasse várias afirmações apresentadas por alunos e identificasse a verdadeira, envolvendo assim, um *Conhecimento Especializado*.

Esta questão, num estudo realizado pelo grupo de investigação de Michigan, em 2004, apresentou o valor de 1,228, tendo, por isso, sido considerada *um pouco difícil*.

Tabela 62 - Caracterização da questão 20.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 20	Noção de paralelepípedo. Conceito de volume.	Analisar afirmações matemáticas de alunos sobre um problema e selecionar a verdadeira.	<i>Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).</i>	d=1,228 D=0,57

Observando-se a tabela em baixo, 35 (57,4%) dos 61 professores portugueses responderam corretamente, 21 (34,4%) de forma errada e 5 (8,2%) docentes não responderam.

Tabela 63 - Respostas à questão 20.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	21	34,4
Correta	35	57,4
Não responde	5	8,2
Total	61	100,0

A pergunta 22 apresenta uma representação de dois triângulos inscritos num retângulo e exigia um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*, para se avaliar qual dos argumentos apresentados pelos alunos sobre a representação estava correto.

Como já foi referido, o grupo de Michigan obteve um valor de 0,001 para o parâmetro d , em 2004, denominando de questão *um pouco difícil*, e, na presente investigação o D foi de 0,57, considerando-na *um pouco fácil*.

Destaque-se, desde já, que apesar da denominação desta questão, quanto ao seu nível de dificuldade, ter sido diferente com professores americanos e portugueses, o grau de dificuldade nos EUA foi de 0,001, muito próximo de 0, que já seria uma pergunta “um pouco fácil”. Por outro lado, o nível de dificuldade obtido no presente estudo para esta pergunta 20 foi de 0,59 que se considera ser um valor próximo de 0,50 que já denominaria a questão de “um pouco difícil”. Assim, diga-se que a diferença de valores de dificuldade com professores americanos e portugueses não foi muito dispar.

Tabela 64 - Caracterização da questão 22.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 22	Áreas de triângulos inscritos num retângulo	Avaliar qual dos argumentos apresentados pelos alunos sobre as áreas dos triângulos estava correta.	<i>Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).</i>	$d=0,001$ $D=0,59$

Da análise das respostas a esta pergunta, constatou-se que 20 (32,8%) professores selecionaram um dos 5 argumentos errados apresentados e 5 (8,2%) deixaram a questão por responder.

Repare-se que 36 (59%) dos 61 professores portugueses selecionaram o argumento correto, que afirmava que os dois triângulos como tinham a mesma base e a mesma altura, teriam a mesma área. Esta maioria de respostas corretas por parte desta amostra de docentes nacionais era esperada, na medida em que ao longo deste trabalho se foi patenteando que têm facilidade a dar respostas corretas a questões que envolvem regras, procedimentos e/ou fórmulas aritméticas, isto é, que exigem um Conhecimento Processual (Hiebert & Lefevre, 1986).

Tabela 65 - Respostas à questão 22.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	20	32,8
Correta	36	59
Não responde	5	8,2
Total	61	100,0

Por último, de entre as questões “um pouco fáceis” deste estudo, que foram consideradas “um pouco difíceis”, nos EUA, analise-se a pergunta 24c.

A pergunta 24c apresenta uma afirmação de um aluno sobre como calcular a área de um quadrado, construído num Geoplano, que tinha de ser considerada matematicamente aceitável para que o professor tivesse a resposta correta. Esta questão envolvia *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos* (KSC).

No que diz respeito ao grau de dificuldade, neste estudo, esta questão apresentou $D=0,51$ e na investigação de 2004 do LMT, $d=0,004$, tendo sido, por isso, denominada de *um pouco difícil*, nos EUA.

Apesar das denominações diferentes nas duas investigações, repare-se que, de forma semelhante à pergunta 22, o valor de dificuldade (D) obtido no presente estudo é muito próximo do intervalo de 0,25 a 0,50 onde constam as questões “um pouco difíceis” e, por outro lado, o valor de d de 0,004 é muito próximo do intervalo entre -2 e 0, onde nas investigações dos EUA se caracterizam as perguntas como “um pouco fáceis”. Assim, os valores de dificuldade com professores portugueses e americanos não foram assim tão diferentes.

Tabela 66 - Caracterização da questão 24c.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 24c	Área de um quadrado.	Avaliar o procedimento proposto por um aluno para calcular a área de um quadrado, num Geoplano, como matematicamente válido.	<i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC).</i>	d=0,004 D=0,51

Constate-se na tabela em baixo que 31 (50,8%) dos 61 professores portugueses responderam corretamente, 15 (24,6%) de forma errada e 15 (24,6%) docentes não responderam.

Tabela 67 - Respostas à questão 24c.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	15	24,6
Correta	31	50,8
Não responde	15	24,6
Total	61	100,0

Questões difíceis

Neste questionário formado por 52 questões, construídas pelo grupo de Michigan e adaptadas à realidade portuguesa, 13 foram consideradas “um pouco difíceis”, quando aplicadas a professores portugueses, e 3 difíceis.

As três questões consideradas difíceis (as perguntas 4, 8c e 11) avaliavam conceitos de Números e Operações e estão assinaladas a cinzento na tabela em baixo e as restantes a branco são as “um pouco difíceis”.

Das 13 perguntas “um pouco difíceis”, como se observa na tabela em baixo, da 2 à 16c) (inclusive) continham conteúdos de Números e Operações e as restantes 2 perguntas diziam respeito a Geometria e Medida.

Tabela 68 – Grau de dificuldade (D) das questões difíceis ou um pouco difíceis do questionário.

Número da questão de Números e Operações	Grau de dificuldade (D)	Número da questão de Geometria e Medida	Grau de Dificuldade (D)
2	0,36	18b	0,31
3	0,31	24a	0,43
4	0,18		
6	0,48		
7	0,38		
8 a	0,33		
8c	0,01		
9	0,41		
11	0,23		
12d	0,3		
13d	0,38		
15	0,44		
16 a	0,38		
16c	0,46		

Das três questões consideradas difíceis ($0 \leq D \leq 0,25$) no presente estudo com docentes portugueses, uma delas, a 11, também foi denominada de difícil, quando resolvida por professores americanos, uma vez que, segundo os estudos realizados pelo grupo de investigadores da Universidade de Michigan, apresentou um grau de dificuldade (d) superior a 2, mais precisamente 2,343.

Note-se que nas investigações realizadas nos EUA pelo LMT, de entre as questões que compõem o questionário, esta questão foi a que teve maior grau de dificuldade (d), podendo

dizer-se por isso, que foi considerada “a mais difícil”. Assim, mais uma vez, denota-se uma relação entre o nível de dificuldade das questões, quando aplicadas a docentes dos EUA, e quando foram respondidas pelos docentes portugueses envolvidos nesta investigação.

Na questão 11, como se apresenta na tabela em baixo, os professores tinham de analisar um procedimento de divisão de números fracionários proposto por aluno, e avaliar a sua validade. Esta pergunta apresentou o nível de dificuldade ($d=2,343$), na investigação com professores americanos e $D=0,23$ no presente estudo.

Tabela 69 - Caracterização da questão 11.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 11	Divisão de números racionais na forma de fração.	Avaliar método apresentado por um aluno.	<i>Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).</i>	$d=2,343$ $D=0,23$

Na mesma linha de ideias, como se verifica na tabela em baixo, neste trabalho, somente 23% (14) dos professores responderam corretamente, 67% (41) responderam de forma incorreta e 10% (6) deixaram esta pergunta em branco.

Tabela 70 - Respostas à questão 11.

Caracterização das respostas	Frequência	Porcentagem
Incorreta	41	67,2
Correta	14	23
Não responde	6	9,8
Total	61	100,0

Estes resultados suscitam alguma preocupação, na medida que o trabalho de um professor de matemática exige, regularmente, a avaliação de diferentes métodos, procedimentos e raciocínios por parte dos alunos.

Num estudo realizado por Miguel Ribeiro (2009), com um grupo de trabalho colaborativo, no âmbito de um Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM), este investigador verificou que os professores portugueses envolvidos como não dominavam de forma tão intuita as operações com números fracionários, como por exemplo, as que envolviam números naturais, trabalhavam-nas com os seus alunos através da memorização de regras e procedimentos técnicos, sem compreensão dos fundamentos destes algoritmos matemáticos.

Assim, parece compreender-se, tal como se verificou nas respostas a esta questão 11, que os professores portugueses tenham dificuldade em avaliar procedimentos de resolução de operações com números fracionários que não sejam os ditos standards que os docentes “treinam” com os seus alunos.

Destaque-se que, apesar de no geral, o nível de dificuldade encontrado nos EUA e no presente estudo com docentes portugueses ter caracterizado as questões de forma semelhante quanto ao seu grau de dificuldade, em algumas perguntas constataram-se (algumas) diferenças, que parece ser importante analisar.

As questões 4 e 8c que apresentaram níveis de dificuldade (D) inferiores a 0,25, sendo, por isso, denominadas de fáceis no presente estudo, quando, em 2008, foram aplicadas a professores americanos o seu grau de dificuldade (d) esteve entre 0 e 2, tendo sido por isso consideradas de (apenas) “um pouco difíceis”.

Por outro lado, a pergunta 2 que, como se observa na tabela 71, se denominou de “um pouco difícil”, com $D=0,36$, nos EUA, o grau de dificuldade (d) obtido para esta questão foi superior a 2 (2,043), tendo sido, por isso, considerada “difícil”.

Nas perguntas 6, 8a), 12 d) e 24a) como constataram valores de dificuldade (D), neste estudo, entre 0,25 e 0,50, mais especificamente: 0,48; 0,33; 0,30; 0,43, respetivamente, denominaram-se de “um pouco difíceis”. Enquanto que nas investigações com professores americanos, o LMT observou graus de dificuldade (d) para estas questões entre -2 e 0: -1,157; -0,808; -1,150; -0,424, respetivamente, considerando, por isso, estas questões como “um pouco fáceis”.

De seguida, irão explorar-se estas questões pelas diferenças verificadas nos valores de grau de dificuldade no presente trabalho e nos estudos do grupo de Michigan.

Refira-se, por outro lado, que, como está patente na tabela 68, as questões 4 e 8c, tal como a 11, também foram consideradas difíceis pelos professores portugueses intervenientes neste trabalho. A pergunta 4 apresentou um grau de dificuldade (D) de 0,18 e a 8c de 0,01.

Estas duas perguntas, nos EUA, em 2008, apresentaram um nível de dificuldade (d) de 0,617 e 1,542, respetivamente, tendo sido, por isso, consideradas de (apenas) “um pouco difíceis”.

A questão 8c já foi analisada no subcapítulo 5.1.2 por se ter caracterizado como a pergunta de Números e Operações em que os 61 docentes portugueses apresentaram pior prestação.

Por sua vez, a questão de escolha múltipla 4 já foi explorada em 5.1.3. pelo menor número de respostas corretas, por parte dos professores participantes neste estudo, em questões que envolviam um Conhecimento Especializado do Conteúdo. Deste modo, estas duas perguntas não serão exploradas neste subcapítulo, pois já foram anteriormente.

De entre as questões “um pouco difíceis”, explore-se a questão de escolha múltipla 2.

Esta pergunta, na presente investigação, apresentou um valor de grau de dificuldade (D) de 0,36, sendo por isso, denominada de “um pouco difícil”, enquanto que nos EUA apresentou um nível de dificuldade (d) superior a 2, como se observa na tabela em baixo, tendo sido denominada de “difícil”. Note-se que apenas esta questão e a 11, já caracterizada anteriormente, foram consideradas difíceis nos estudos americanos.

Nesta pergunta, os professores tinham de escolher de entre as cinco afirmações fornecidas (a), b), c), d) e e)) a melhor forma de explicar o significado da divisão por zero se considerar indeterminada – “dividir por zero é indeterminado porque não existe um único número que quando multiplicado pelo divisor zero dê o número original”. Além disso, esta questão apresenta as características apresentadas na tabela em baixo.

Tabela 71 - Caracterização da questão 2.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 2	Divisão por zero.	Avaliar várias afirmações e escolher a que explica da melhor forma a divisão de um número por zero.	<i>Conhecimento Especializado do Conteúdo (CCK).</i>	d=2,043 D=0,36

No presente trabalho, apesar de todos os professores terem respondido à pergunta 2, como se observa na tabela em baixo, apenas 36% (22) dos professores portugueses selecionaram afirmação correta, isto é, consideraram que dividir um número por zero como indeterminado pelo facto de não existir um único número que multiplicado pelo divisor zero resulte no número original. Os restantes 64% (39) responderam erradamente.

Tabela 72 - Resposta à questão 2.

Caracterização das questões	Frequência	Percentagem
Incorreta	39	63,9
Correta	22	36,1
Não responde	0	0
Total	61	100,0

Apesar do conceito formal da divisão por zero ser trabalhado, em Portugal, apenas no 11.º ano de escolaridade, um professor tem de ser capaz de trabalhar os conceitos matemáticos de acordo com o nível de aprendizagem dos seus alunos. Neste caso, o professor teria de demonstrar aos alunos através da operação inversa da divisão, a multiplicação, que não existe nenhum número que quando multiplicado por zero dê o número original.

Deste modo, os resultados obtidos pelos professores nesta questão suscitaram a seguinte questão: – Terão os professores dificuldades em adaptar o modo como trabalham os conceitos matemáticos, de acordo com o nível de aprendizagem dos seus alunos?

Como se observa na tabela 68 e como já se referiu anteriormente, as perguntas 6, 8a, 12d e 24a apresentaram valores de dificuldade (D) entre 0,25 e 0,50, sendo “um pouco difíceis”. Por outro lado, nos EUA, o LMT considerou-as “um pouco fáceis”, por terem mostrado graus de dificuldade (d) entre -2 e 0.

A questão 6 envolvia a avaliação da validade matemática de uma abordagem não standard do algoritmo da divisão de números inteiros realizada por um aluno e exigia, por isso, um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*. É uma pergunta denominada de “um pouco difícil”, neste estudo, com grau de dificuldade (D) 0,48, no entanto foi considerada *um pouco fácil*, num estudo americano realizado em 2008, com valor do parâmetro grau de dificuldade (D) de -1,157, como se observa na tabela em baixo, esta questão.

Tabela 73 - Caracterização da questão 6.

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 6	Algoritmo da divisão de números inteiros.	Analisar a resolução de um algoritmo da divisão não standard resolvido por aluno e verificar se matematicamente válido.	<i>Conhecimento Especializado (SCK)</i>	d=-1,157 D=0,48

Como se observa na tabela em baixo, 47,5 % (29) dos 61 professores portugueses analisaram corretamente a resolução do algoritmo da divisão inteira proposta por um aluno e verificaram que se tratava de abordagem válida, mas que poderia ser ineficaz com dividendos grandes. 26 (42,7%) docentes responderam de forma errada e 6 (9,8%) deixaram a resposta em branco.

Tabela 74 - Respostas à questão 6.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Correta	29	47,5
Incorreta	26	42,7
Não responde	6	9,8
Total	61	100,0

Tratando-se da avaliação da validade matemática de uma abordagem não standard do algoritmo da divisão proposto um aluno e tendo sido esta pergunta considerada como “um pouco fácil” em estudos com professores americanos parece ser preocupante que a percentagem de respostas corretas à questão 6 por estes docentes portugueses dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico tenha sido inferior a 50%.

Na questão 8a), como está patente na tabela em baixo, os professores tinham de analisar um algoritmo da subtração com números da ordem das centenas e a explicação de um aluno deste procedimento e verificar que esta não evidenciava que este aluno o tinha percebido. Deste modo, esta pergunta exigia um *Conhecimento dos Conteúdos e dos Alunos (KSC)*.

Como se referiu anteriormente esta pergunta caracterizou-se, nos EUA, como “um pouco fácil” ($d = -0,808$) e, no presente estudo, “um pouco difícil”, com $D = 0,33$.

Tabela 75 - Caracterização da questão 8a).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 8a)	Algoritmo da subtração com ordem das centenas.	Avaliar a explicação de um aluno da resolução de um algoritmo da subtração e aceitar ou não como evidências de que o aluno percebeu como o procedimento funciona.	<i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)</i>	d=-0,808 D=0,33

Repare-se na tabela em baixo e observe-se que apenas 20 (32,8%) professores portugueses envolvidos verificaram pela resposta do aluno que este não tinha compreendido o um algoritmo da subtração com números da ordem das centenas. 24 (39,4%) respondeu erradamente e destaque-se que 17 (27,8%) docentes não responderam à pergunta.

Tabela 76 - Respostas à questão 8 a).

Caracterização das questões	Frequência	Percentagem
Incorreta	24	39,4
Correta	20	32,8
Não responde	17	27,8
Total	61	100,0

A questão 12 d) requeria a análise de dois problemas de divisão de números racionais e já se explanou no subcapítulo 4.2. que esta pergunta envolvia um *Conhecimento Especializado do Conteúdo*.

Esta pergunta considerada “um pouco difícil” pelos docentes portugueses na presente investigação, como foi visto anteriormente, revelou-se “um pouco fácil”, quando foi aplicada a professores dos EUA em 2008, tendo apresentado um valor de grau de dificuldade $-1,150$.

Tabela 77 - Caracterização da questão 12 d).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 12 d)	Divisão de números racionais.	Analisar dois problemas de divisão de números racionais e verificar se usam a mesma interpretação da divisão.	<i>Conhecimento Especializado (SCK)</i>	$d=-1,150$ $D=0,3$

Verifica-se na tabela em baixo, que apenas 30% dos 61 professores portugueses verificaram que os dois problemas apresentavam uma interpretação diferente da divisão, isto é, responderam de forma correta à questão 12d). Repare-se que 26 (42%) dos docentes responderam erradamente, considerando que ambos os problemas apresentavam a mesma interpretação da divisão e verifique-se ainda que alguns professores, 17 (28%), deixaram a pergunta por responder.

Tabela 78 - Respostas à questão 12 d).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Correta	18	30
Incorreta	26	42
Não responde	17	28
Total	61	100,0

Por último, a pergunta 24a), de parâmetro de dificuldade (D) 0,43, em estudos efetuados pelo grupo de Michigan, em 2004, apresentou o valor de dificuldade (d) de $-0,424$, sendo por isso denominada de *um pouco fácil*.

Observe-se em baixo a caracterização desta pergunta:

Tabela 79 - Caracterização da pergunta 24 a).

Parâmetros/ Número da questão	Conteúdo da Matemática	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento	Grau de dificuldade nos EUA (d) e neste estudo (D)
Questão 24a)	Noção de área.	Análise de uma estratégia proposta por um aluno para calcular a área de um quadrado construído num geoplano.	<i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC)</i>	$d=-0,424$ $D=0,43$

Analisando-se a tabela em baixo, realmente verifica-se que na pergunta 24a) 21% (34,4) dos docentes responderam incorretamente considerando que a afirmação do aluno não era matematicamente aceitável e 23% (14) não responderam. Apenas 42,6% (26) verificaram que a afirmação do aluno de que o uso do Teorema de Pitágoras para encontrar a medida de um dos lados, e de seguida elevar esse número ao quadrado, permitiria descobrir o valor da área de um quadrado construído num Geoplano.

Apesar desta questão conter conceitos trabalhados no 3.º ciclo do Ensino Básico e de os professores intervenientes nesta investigação trabalharem com alunos dos 1.º e 2.º ciclos, considera-se preocupante que estes docentes tenham demonstrado dificuldades a responder corretamente, na medida em que se considera que os professores têm de saber além do que ensinam. E, além disso, destaque-se também que nos EUA esta pergunta foi considerada “um pouco fácil”.

Tabela 80 - Respostas à questão 24a).

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Correta	26	42,6
Incorreta	21	34,4,
Não responde	14	23
Total	61	100,0

5.2. Prestação dos professores entrevistados em questões do questionário

Neste subcapítulo, irá apresentar-se, primeiramente, a caracterização dos professores entrevistados.

Apesar das entrevistas terem explanado as 52 questões que compõem o questionário, selecionaram-se criteriosamente 6 questões para análise neste subcapítulo.

Assim, neste subcapítulo, irão também explorar-se as questões selecionadas para as entrevistas e os critérios de seleção. Além disso, irá explicar-se a prestação dos dois professores entrevistados nestas questões.

5.2.1. Caracterização dos entrevistados

Após a aplicação do questionário a 61 professores dos 1.º e/ ou 2.º ciclos do Ensino Básico, na região Norte de Portugal, realizaram-se entrevistas.

A entrevista pós-teste tinha como objetivo validar as respostas dos professores no questionário de medição do MKT, isto é, verificar se existe consistência entre as respostas dos professores no questionário e na entrevista e (possivelmente) acrescentar mais alguma informação acerca do conhecimento matemático destes docentes, além da que foi previamente recolhida no questionário.

As entrevistas foram realizadas a dois dos 61 professores que resolveram o questionário, caracterizados na Tabela 81 em baixo.

A seleção dos professores teve por base os seguintes parâmetros:

- . o resultado obtido por estes professores aquando da realização do questionário de medição do MKT;
- . tempo de serviço docente;
- . o nível de ensino que leciona;
- . o tipo de escola onde exerce funções de docência (pública ou privada).

Tabela 81 - Dados dos professores entrevistados.

Nome	Classificação obtida no teste	Tempo de serviço docente	Nível de ensino que leciona	Tipo de escola
Maria	50%	22 anos	2.ºciclo	Pública
Pedro	92%	6 anos	1.ºciclo	Privada

5.2.2. As questões analisadas nas entrevistas e a prestação dos professores entrevistados

As entrevistas realizaram-se após a recolha dos 61 questionários respondidos pelos professores participantes neste estudo. Desta forma, aquando da realização da entrevista, os docentes entrevistados já tinham respondido às questões de escolha múltipla que compõem o questionário.

Os professores entrevistados não tiveram acesso às suas classificações antes da entrevista. Além disso, cada professor, na entrevista, lia, em voz alta, cada questão e resolvia, explicava o seu raciocínio, oralmente, podendo, se considerassem necessário, utilizar papel e caneta para demonstrar alguma estratégia de resolução de alguma pergunta.

Os professores que deram a entrevista tinham conhecimento que o processo era voluntário e que se não pretendessem responder a alguma questão realizada durante a entrevista, diziam ao entrevistador para passar e o entrevistador daria continuidade à entrevista. A entrevista caracterizou-se como uma *entrevista semi-estruturada* e anexa-se o guião da entrevista (Anexo 5).

As entrevistas tiveram gravação de áudio e foram transcritas integralmente.

Apesar de, durante as entrevistas, os professores terem respondido a todas as perguntas e por estas terem sido transcritas na íntegra, nem todas as respostas dos docentes dos professores estarão patentes, no presente trabalho.

A seleção destas questões teve em conta, por uma lado, o domínio matemático que contêm – Números e Operações ou Geometria e Medida, o nível de dificuldade que apresentam, o tipo de conhecimento do professor que avaliam, mas, essencialmente, o grau de informação que podem fornecer sobre o raciocínio dos professores entrevistados. Isto é, procurou-se explicar nesta parte do trabalho as questões que demonstrassem com mais rigor e precisão o tipo de conhecimento dos professores entrevistados, como pensam, de que forma abordam os diferentes conteúdos matemáticos com os seus alunos, que recursos e materiais consideram importantes para a prática docente, quais os seus raciocínios e estratégias para darem resposta às diferentes perguntas e quais as suas fragilidades.

Por exemplo, a questão com maior percentagem de respostas corretas neste estudo questionava se a imagem do sólido geométrico apresentado representava ou não uma pirâmide. Esta pergunta não foi uma das selecionadas nesta parte do trabalho, uma vez que não fornecia informação interessante para análise.

Na tabela em baixo, indica-se as questões selecionadas, de acordo com o domínio matemático, os conteúdos matemáticos que avaliam, o grau de dificuldade que apresentaram aquando respondidas pelos professores dos EUA e a percentagem de respostas corretas dos professores portugueses participantes nesta investigação.

Tabela 82 - Questões selecionadas das entrevistas.

Domínio	Número da questão	Conteúdo matemático	Conteúdo da tarefa	Tipo de conhecimento do professor	Grau de dificuldade e (EUA)	% respostas corretas (Portugal)
NO	Questão 4	Simplificação de frações.	Analisar explicações de alunos.	Conhecimento especializado do Conteúdo (SCK)	0,617	18%
	Questão 7	Propriedade distributiva da multiplicação.	Selecionar o melhor exemplo.	Conhecimento especializado do Conteúdo	1,462	38%

GM	(SCK)					
	Questão 15	Algoritmo da multiplicação com números decimais.	Identificar a melhor explicação.	Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)	0,708	44%
	Questão 17	Definições de trapézio e de retângulo.	Identificar a afirmação verdadeira.	Conhecimento especializado do Conteúdo (SCK)	-0,363	56%
	Questão 20	Relação entre os conceitos: comprimento, largura, área e volume.	Analisar afirmações de alunos.	Conhecimento especializado do Conteúdo (SCK)	1,228	57%
	Questão 22	Comparação de áreas de triângulos.	Examinar os argumentos dos alunos.	Conhecimento especializado do Conteúdo (SCK)	0,001	59%

Estas questões já foram descritas no subcapítulo 4.2. No entanto, irá resumir-se a informação destas perguntas, seguida do desempenho dos professores entrevistados, em cada questão.

Questões de Números e Operações

As questões seleccionadas das entrevistas para serem aqui analisadas foram a 4, 7 e 15, que serão explanadas de seguida.

Questão 4

A primeira questão, a n.º 4, a ser analisada avalia conteúdos de Números e Operações, mais especificamente a simplificação de frações. Nesta questão, os professores tinham de seleccionar a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido porque é que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente.

Um professor responderia corretamente se identificasse que a simplificação das frações se resume à divisão das frações por um e que, por essa razão, a nova fração representa a mesma quantidade de que a primeira.

Questão 7

Na segunda questão do domínio Números e Operações considerada nesta parte do trabalho – questão 7, pedia-se para se seleccionar de quatro expressões numéricas a que seria o melhor exemplo para os alunos percebessem a vantagem da propriedade distributiva da multiplicação na simplificação do cálculo.

Um professor teria esta resposta correta, se verificasse que apenas uma das quatro expressões numéricas apresentadas, seria um exemplo de que, em algumas situações, o uso da propriedade distributiva é bastante vantajoso em termos de simplificação de cálculo, tal como se apresenta de seguida, num exemplo semelhante ao que consta no questionário.

Muitas vezes, utilizar-se a propriedade distributiva da multiplicação torna os cálculos mais fáceis e mais rápidos, relativamente ao uso das regras de resolução de expressões numéricas, em que a resolução do que está dentro de parêntesis é prioritária.

Refira-se que é muito importante não só que os alunos saibam usar a propriedade distributiva, mas também que percebam em que situações é que a sua utilização traz vantagens, em termos de cálculo.

Como se apresenta, em baixo, na primeira resolução utilizou-se a propriedade distributiva, o que facilita os cálculos, pois o 3 e 5 são divisores do 15. Enquanto na segunda expressão numérica, não se utilizou a propriedade distributiva da multiplicação, o que resulta na prioridade do cálculo da adição de frações com diferentes denominadores, tornando-se a

reolução da expressão numérica mais penosa em termos do número de cálculos a serem efetuados.

Exemplo em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação é vantajosa

Primeira resolução, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$15 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) = 15 \times \frac{2}{3} + 15 \times \frac{3}{5} = 10 + 9 = 19$$

Segunda resolução, não se utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$15 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) = 15 \times \left(\frac{10}{15} + \frac{9}{15} \right) = 15 \times \left(\frac{10+9}{15} \right) = 15 \times \frac{19}{15} = 19$$

Figura 35 - Exemplo com vantagens no uso da propriedade distributiva da multiplicação.

No entanto, há situações em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação pode dificultar o cálculo, como no exemplo que se apresenta em baixo.

Exemplo em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação não é vantajosa

Primeira resolução, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$\frac{1}{4} \times (3 + 9) = \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 9 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Segunda resolução, não se utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$\frac{1}{4} \times (3 + 9) = \frac{1}{4} \times 12 = \frac{12}{4} = 3$$

Figura 36 – Exemplo em que o uso da propriedade distributiva não é vantajosa.

Nesta linha de ideias, é importante que os professores mostrem, por um lado, aos seus alunos, expressões numéricas em que o uso da propriedade distributiva traz vantagens em termos de simplificação de cálculo e, portanto, também em termos de tempo de resolução. Mas também é importante que os alunos resolvam expressões numéricas que lhes permita perceber que o uso da propriedade distributiva pode também, por outro lado, complicar o cálculo.

Assim, deve-se pretender, por um lado, que os alunos saibam aplicar o procedimento da propriedade distributiva da multiplicação e, por outro lado, que sejam capazes de identificar em que situações é que o uso desta propriedade distributiva da multiplicação traz vantagens ou não, em termos de cálculo.

Questão 15

A terceira questão, n.º 15, que contém conteúdos matemáticos do domínio Matemático Números e Operações a ser analisada, tem presente um algoritmo da multiplicação de dois números decimais e aborda a regra usada para se determinar o local onde se coloca a vírgula no resultado da multiplicação, o produto.

Nesta pergunta, exige-se que se identifique a melhor explicação para esta regra de se contar o número de algarismos à direita da vírgula de cada um dos fatores, somá-los, e de seguida, colocar a vírgula, contando-se este número da direita até ao local da vírgula.

Um docente teria esta resposta correta, se seleccionasse que a melhor explicação para que esta regra funcione diz respeito a que sendo um número decimal um número inteiro dividido por potências de 10 e o número de casas decimais o número de vezes que se dividiu o número 10, somar o número de casas decimais dos dois fatores corresponde ao número de vezes que se divide o total por 10.

Verifique-se na multiplicação em baixo a veracidade desta regra.

$$7,34 \times 5,8 = (10^{-2} \times 734) \times (10^{-1} \times 58) = (10^{-2} \times 10^{-1}) \times (734 \times 58) = 10^{-3} \times 42572 = 42,572$$

Nestas três questões que avaliam conteúdos matemáticos relativos a números e a operações os professores entrevistados tiveram diferentes prestações, como se verifica na tabela de seguida.

Tabela 83 - Avaliação das respostas dos professores entrevistados a questões de Números e Operações.

Questões de NO	Simplificação de frações	Representação do produto de frações numa reta numérica	Algoritmo da multiplicação com números decimais.
Maria	Incorreta	Incorreta	Incorreta
Pedro	Não respondeu	Correta	Correta

Questões de Geometria e Medida

As questões de “Geometria e Medida” selecionadas foram as seguintes: 17, 20 e 22, que serão exploradas de seguida.

Questão 17

A primeira questão em análise neste capítulo, a n.º 17, que avalia conteúdos matemáticos de Geometria, aborda duas definições de trapézio presentes no manual de um professor e num livro de métodos matemáticos.

Esta pergunta exigia a análise e a compreensão das duas definições, pois a escolha da definição condicionava a classificação dos quadriláteros.

A primeira definição refere que *um trapézio é um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos*. Na definição presente no outro manual, *um trapézio é definido como um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos*. Um professor teria esta resposta correta se seleccionasse a afirmação que referia que um retângulo é um trapézio de acordo com a primeira definição, mas que não o é de com a segunda.

Questão 20

A segunda pergunta – questão n.º 20 – de Geometria e Medida patente neste subcapítulo do trabalho apresentava um problema sobre a duplicação de duas medidas de uma

piscina retangular. Nesta questão, os professores tinham de analisar as afirmações de alunos e seleccionar a verdadeira.

Um docente responderia de forma correta a esta questão, se seleccionasse a afirmação que referia que ao duplicar-se a largura e comprimento de uma piscina rectangular e ao manter-se a sua profundidade, seria necessário o dobro da tinta para se pintar as quatro paredes da piscina.

Questão 22

A questão 22 apresentava um problema sobre a área de dois triângulos inscritos num rectângulo. Os professores tinham de analisar argumentos de vários alunos e seleccionar o que estava correto e em conformidade com o problema.

A resposta a esta pergunta seria considerada correta se o professor seleccionasse o seguinte argumento: a base e a altura dos triângulos são as mesmas, por isso têm a mesma área.

A professora Maria e o professor Pedro, os dois professores entrevistados, também nestas questões apresentaram diferentes desempenhos, como se observa na Tabela 84.

Tabela 84 - Avaliação das respostas dos professores entrevistados a questões de Geometria e Medida.

Questões de GM	Definições de trapézio e de retângulo.	Relação entre os conceitos: comprimento, largura, área e volume.	Comparação de áreas de triângulos.
Maria	Incorreta	Incorreta	Correta
Pedro	Correta	Correta	Correta

5.3. Associação entre a prestação dos professores nas perguntas do questionário e o seu raciocínio apresentado nas entrevistas: análise caso a caso

Neste subcapítulo, irá abordar-se a relação entre a prestação dos professores no teste de medição do MKT adaptado ao contexto português e o raciocínio utilizado para responder às questões de escolha múltipla presente neste teste.

As entrevistas fornecem uma informação mais detalhada sobre o conhecimento dos professores e revelam o grau de consistência do instrumento de medição do MKT.

Por um lado, percebe-se se os professores entenderam com facilidade as questões apresentadas e as suas opções de resposta. Por outro lado, analisa-se como pensaram e o que pensaram para dar resposta às questões; que raciocínios utilizaram e que estratégias de resolução privilegiaram.

Espera-se que professores com resultados elevados no teste apresentem raciocínios organizados e corretos na resolução das questões de avaliação do MKT. Por outro lado, supõe-se que docentes que obtiveram resultados inferiores tenham utilizado estratégias de resolução para dar resposta às questões de escolha múltipla menos capazes ou mesmo incorretas.

Como se apresenta no esquema em baixo, antes de se realizarem as entrevistas, irá verificar-se se as respostas são corretas ou incorretas. Ao longo da entrevista, será possível verificar se os professores justificam ou não as respostas que deram no questionário e se os raciocínios que tiveram estão corretos. Se um professor responder de forma correta no questionário e justificar o seu raciocínio com rigor e precisão na entrevista, pode concluir-se que a resposta dada na entrevista é consistente com a que deu aquando da resolução do teste. Também se verifica consistência entre a entrevista e o questionário, se um professor responder erradamente no teste e justificar a sua resposta com um raciocínio incorreto na entrevista.

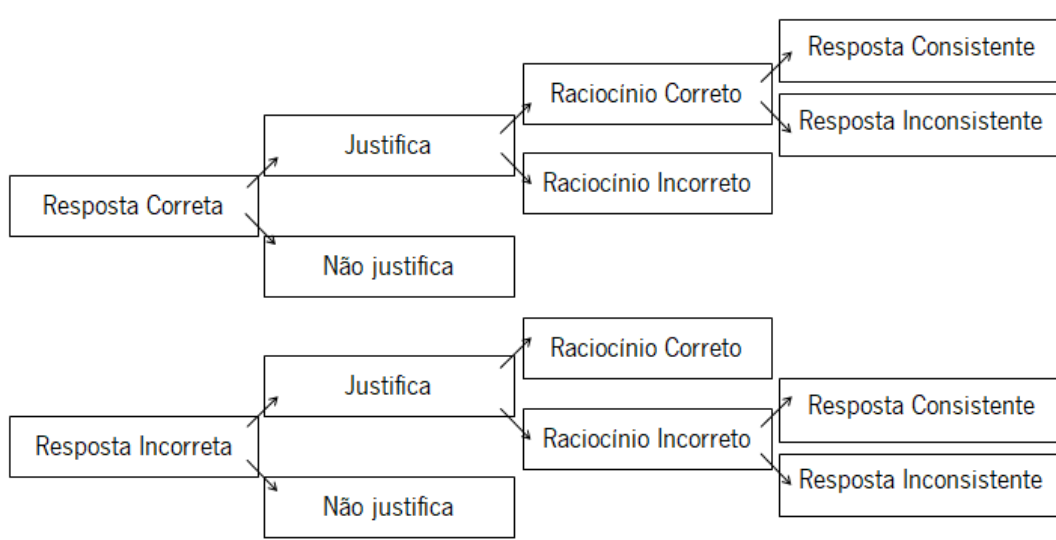


Figura 37 - Esquema de organização da análise das entrevistas.

Estas entrevistas cognitivas foram desenhadas para determinar até que ponto o raciocínio que os professores usaram na resposta às questões presentes no questionário é coerente e consistente com as explicações que fornecem nas entrevistas.

Refira-se que é crucial perceber se as respostas dos professores, quer ao questionário, quer na entrevista, reflete o seu conhecimento matemático para ensinar.

Entrevista 1 – Maria

A Maria é uma professora de 2.º ciclo profissionalizada e com Mestrado. Caracteriza-se como uma professora experiente, com 22 anos de tempo de serviço de docente. Exerce funções de docência numa escola pública, pertencente ao Distrito de Braga de Portugal, há 12 anos. No ano letivo de 2017/2018 lecionou o 5.º ano de escolaridade.

Esta professora, apesar de afirmar não conhecer a matemática que precisa para ensinar e de não se considerar uma professora de matemática “mestre”, referiu ter um conhecimento profundo sobre o domínio da matemática números e operações e, em geral, sobre *todas* as áreas da matemática.

Na resolução do questionário, a Maria obteve uma classificação de 50%, resultado este que se caracteriza abaixo da média dos resultados dos professores participantes nesta investigação (57%). Esta professora respondeu de forma errada a 25 questões (48%) e não deu resposta a uma questão (2%), que pedia para identificar se a imagem de um sólido geométrico, presente na pergunta, correspondia ou não a um tetraedro.

Na parte do teste de medição do MKT que continha conteúdos referentes ao domínio da Matemática Números e Operações, a professora respondeu de forma errada à maior parte das questões – 62%. Nas restantes 11 questões, desta parte do questionário, a professora Maria respondeu correctamente, não tendo deixado nenhuma questão por responder.

Nas questões de Geometria e Medida, a professora respondeu corretamente a 15 questões (65%), errou 7 (30%) e não respondeu a uma pergunta (4%).

A entrevista da professora Maria realizou-se no final de reunião de avaliação, na escola onde leciona, na sala de reuniões.

Vai-se assim, explorar, de seguida, as respostas desta docente às questões seleccionadas e os raciocínios expostos na entrevista.

Questão 4

Na questão que abordava a simplificação de frações, a professora Maria respondeu de forma errada. Considerou que a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido o processo de simplificações de fracções se referia a: “esta regra resulta porque se divide o número de cima e o de baixo pelo mesmo número, logo a nova fração tem que representar a mesma quantidade”.

Na entrevista, Maria manteve a sua resposta e justificou o seu raciocínio, o que revela que a sua resposta ao questionário é consistente com o seu pensamento. A sua justificação foi a seguinte:

Maria: Eu consigo demonstrar isto aos miúdos através de objetos.

Nós temos um jogo, um jogo das frações e eles conseguem perceber que quando dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número, ...o número é o mesmo, mantém... e depois faz-se através da divisão: se eu tenho $12/4$ e $6/2$, divido o 12 pelo 4 e 6 pelo 2 e o número é o mesmo...

Mas tem de ser concretizado, porque se não... eles não percebem.

Nesta fase tem de haver concretização de tudo!... e as frações não são fáceis de entender... eles não conseguem perceber.

Desta afirmação verifica-se que a Maria tem um conhecimento processual e não concetual (Hiebert & Lefevre, 1986) da simplificação de frações.

O conhecimento concetual caracteriza-se como o “conhecimento rico em relações “ (Hiebert & Lefevre, 1986, p.3). O conhecimento processual, de acordo com Hiebert e Lefevre (1986), é constituído por duas partes distintas: uma refere-se à linguagem formal ou sistema de representação simbólica da Matemática; a outra a algoritmos e a regras necessárias à realização de tarefas matemáticas.

Segundo Silver (1986), o conhecimento processual pode ser bastante limitado se não estiver ligado a uma base de conhecimento concetual.

Perante as observações da professora Maria parece que o seu conhecimento concetual é muito escasso, o que sugere preocupação.

Nesta questão e ao longo de toda a entrevista, a Maria mostrou alguma dificuldade em separar o que considera ser (mais) correto matematicamente e aquilo que lhe parece que os seus alunos são capazes de perceber. Nota-se que, como se apresenta de seguida, mesmo quando, durante a entrevista, se remete para afirmações mais rigorosas em termos matemáticos, Maria nega, justificando que os alunos não são capazes de entender.

Esta negação suscita alguma preocupação e conduz a questionar-se se não é crucial que, desde os primeiros anos, os alunos tenham oportunidade de perceber o que está por detrás dos conceitos matemáticos que aprendem.

Investigador – Mas não considera importante que os alunos compreendam que na realidade só se está a dividir a fração por 1?... logo as frações são equivalentes, representam a mesma quantidade?

Maria – Não, porque eles não percebem! É completamente abstrato.

Eu aqui tenho de lhes provar que aqui vai dar o mesmo número.

E mesmo assim, se eu pedir para fazer com outro exemplo, eles provavelmente não percebem... dizer-lhes que isto é dividir por 1? Eles não conseguem perceber.

Deste excerto, verifica-se que a professora Maria tem uma noção errada de *prova matemática*! Esta docente define “provar [matematicamente]” como demonstrar através de exemplos, o que é preocupante.

De seguida, vai-se explicar o conceito de prova matemática e irá verificar-se também que os conceitos de *provar* e *exemplificar*, caracterizados como sinónimos por esta docente, são conceitos com significados completamente diferentes, no ensino da Matemática.

Desde os primeiros anos de escolaridade que as recomendações curriculares e diversos autores defendem sobre o trabalho que deve ser feito pelos docentes sobre prova matemática com os seus alunos.

Segundo Mariotti (2006, p. 199):

A Prova tem claramente o objetivo de validação – confirmando a verdade de uma asserção, verificando a correção lógica dos argumentos matemáticos – no entanto, ao mesmo tempo, a prova precisa de contribuir mais amplamente para a construção do conhecimento.

De acordo com vários autores, ao contrário do que acontece com os matemáticos em que a produção da prova é o objetivo principal, no ensino da Matemática, tendo em conta o contexto didático, desenvolver o raciocínio matemático dos alunos deve ser o objetivo principal (Viseu et al., 2017; Boavida, 2005; Boavida et al., 2008; Yackel & Hanna, 2003).

Segundo os Princípios e normas para a matemática escolar:

“Atualmente, diferentemente do que se verificava há dez anos atrás, parece haver um consenso geral sobre o facto que o desenvolvimento de um senso de prova constitui um objetivo importante da educação matemática, de modo que parece haver uma tendência geral de inclusão do tema da prova no currículo. Tome-se, por exemplo, a seguinte citação. Raciocínio e prova não são atividades especiais, reservadas para períodos especiais ou tópicos especiais do currículo, mas devem ser uma parte natural e contínua das discussões em sala de aula, independentemente do tópico em estudo.” (NCTM, 2000, p. 342)

Hanna (2014) observa que as recomendações curriculares existentes para a prova matemática em sala de aula são sobretudo baseadas no facto de ela contribuir para a compreensão concetual.

Assume-se, assim, que a Educação Matemática deve habilitar todos os alunos a reconhecer o raciocínio e prova como aspetos centrais da Matemática, investigar e formular conjecturas matemáticas, desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova (NCTM, 2007).

Deste modo, a noção errada de prova por parte da professora Maria parece conduzir a que esta não faça este trabalho com os seus alunos o que parece ser preocupante, dadas as recomendações curriculares e a importância atribuída à prova matemática por diversos autores.

Questão 7

Na segunda questão do domínio Números e Operações considerada nesta parte do trabalho, sobre as vantagens da utilização da propriedade distributiva da multiplicação, a professora Maria respondeu erradamente.

Na entrevista, manteve a opção de resposta que escolheu no teste de medição do MKT e justificou-a.

Como se observa no extrato da entrevista em baixo, Maria focou-se na regra de resolução de expressões numéricas com a propriedade distributiva da multiplicação, e não no que era realmente pedido nesta questão: seleção de um exemplo que demonstrasse que o uso da propriedade distributiva pode tornar as expressões numéricas mais fáceis de resolver.

Maria – Quando nós damos a propriedade distributiva... nós damos a propriedade distributiva e depois fazemos o inverso.

Eu aqui aprendi uma vez com um professor, já foi na faculdade... a “propriedade do baile”... é assim que eu ensino aos alunos. É uma analogia. Eu uso e retiro a analogia. Mas para eles perceberem que é a distribuição do 7 pelos dois algarismos que estão dentro dos parêntesis.

Portanto este é o cavalheiro que dança com a primeira senhora e depois vai dançar com a segunda senhora.

...e eles conseguem perceber, mecanizam e conseguem utilizar a propriedade distributiva.

Depois faço precisamente o contrário, que é... se nós formos pelas regras das operações, das expressões numéricas, o que é que se faz em primeiro lugar? O que está dentro de parêntesis. ...e eles conseguem perceber...

...isto tem de estar no quadro, exatamente à mesma hora e no mesmo local que é para eles perceberem que o resultado vai ser sempre o mesmo, quer faça distribuindo, quer use as expressões numéricas.

Este para mim era o melhor exemplo. E ainda uso.

Reflita-se com alguma preocupação este foco na memorização de regras para resolução de expressões numéricas. A memorização de regras de cálculo tem a sua importância como uma forma de os alunos terem um cálculo rápido e eficaz. No entanto, note-se que, como refere

o documento Aprendizagens Essenciais (2018), a ação do professor dos 1.º e 2.º ciclos, na temática Números e Operações, deve ser orientada para que os alunos prossigam a “compreensão dos números e das operações, bem como da fluência do cálculo mental e escrito” (p. 4).

Mais uma vez se denota que a Maria incentiva a uma aprendizagem de “cor”, ao invés de uma aprendizagem significativa. Os procedimentos e factos aprendidos de “cor” são armazenados na memória de forma isolada, sem qualquer ligação a outros conceitos.

Questão 15

Na terceira pergunta de Números e Operações, que abordava a regra do número de casas decimais do produto, numa multiplicação de dois números decimais, a professora Maria respondeu incorretamente. Na entrevista, manteve e justificou a sua opção de resposta que foi a seguinte: “esta regra resulta porque a multiplicação é adicionar sucessivamente, por isso, quando se multiplicam dois números decimais temos de adicionar o número de casas decimais”.

Maria – A multiplicação é somar sucessivamente.

Os alunos conseguem ver isso... $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$.

Por isso, quando dou a regra do número de casas decimais na multiplicação... relembro-lhes o que é a multiplicação... porque muitos já não se recordam... e digo então que quando queremos ver quantas casas decimais vai ter o resultado... vemos o número de casas de cada um dos números da multiplicação e somamos.

Deste excerto da Maria, mais uma vez, se observa que esta professora detém um conhecimento processual, ao invés de um conhecimento concetual (Hiebert & Lefevre, 1986), focando o seu trabalho com os alunos na memorização de regras.

Ribeiro (2009), na sua investigação, constatou que dificuldades apresentadas por alunos do 4.º ano de escolaridade em perceberem porque razão se multiplicar dois números da ordem das décimas se obtém um produto da ordem das centésimas poderia ser justificada por os próprios professores intervenientes terem demonstrado não conhecerem os fundamentos da regra do número de casas decimais do produto, na multiplicação de dois números decimais, à

semelhança do que se observou no presente trabalho na resposta da professora Maria à questão 15.

Nas questões de Geometria e Medida, a professora Maria mostrou-se sempre muito reticente, como se observa no que referiu quando a entrevista incidiu nesta parte do questionário de avaliação do MKT.

Maria – Geometria... ui!... o problema da matemática no 2.º ciclo! É horrível para o professor e é horrível para o aluno.
Eu estou a ensinar a parte da Geometria e estou com a certeza absoluta que os alunos não estão a perceber.
...eles não têm capacidade para a Geometria que lhes é exigida nos 5.º e 6.º anos.

Questão 17

A primeira questão de Geometria e Medida, analisada nesta parte do trabalho, abordava duas definições de trapézio. A professora Maria selecionou uma opção errada na resposta a esta pergunta e justificou o seu raciocínio na entrevista, mostrando consistência entre a sua resposta no questionário e na entrevista.

A professora Maria referiu que um *retângulo* é um trapézio de acordo com as duas definições apresentadas. Descreve um retângulo como um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos e, de acordo com a segunda definição, menciona que um retângulo é um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos.

Este desconhecimento revelado pela docente acerca das definições destas figuras geométricas já se verificou noutros estudos realizados por outros investigadores. Gomes (2003) concluiu que um número significativo de professores participantes na sua investigação desconhecia a definição de conceitos geométricos (ditos) básicos e elementares e ainda, por exemplo, alguns docentes intervenientes no seu estudo não tinham qualquer imagem mental associada a conceitos como *paralelogramo* ou *trapézio*. Couto (2015), por sua vez, constatou mesmo que as alunas da Licenciatura em Educação Básica, futuras professoras, intervenientes

na sua investigação, desconheciam o significado de “definição matemática”, o que as prejudicou na resolução de uma tarefa que envolvia “definição de quadrado”.

Como se patenteia no excerto da entrevista em baixo, Maria, mais uma vez, foca-se naquilo que considera que os alunos compreendem e dá a sua resposta e explica o seu raciocínio tendo apenas isso em conta.

Maria – Os alunos não percebem as definições de Geometria.

Para eles, “pelo menos” e “exatamente” é a mesma coisa.

Investigadora – Mas não considera importante que desde os primeiros anos os alunos compreendam o significado das palavras e o que, em termos matemáticos, essas palavras conduzem?

Maria – Sim... mas as definições são demasiado abstratas... eles não percebem.

Não têm maturidade para perceber a diferença.

Em Geometria, é crucial trabalhar com alunos as palavras e as definições e o seu significado, para que “os alunos prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas” (ME, 2018, p. 4).

Mariotti e Fischbein (1997) consideram que definir é uma componente básica do conhecimento geométrico e aprender a definir é um problema básico da educação matemática.

Nesta linha de ideias, tendo em conta a resposta da professora Maria questiona-se se não devem ser os professores a trabalhar as definições, neste caso geométricas, com os seus alunos?

Além disso, como refere Poincaré (1927): uma boa definição terá de ser simultaneamente matematicamente correta e didaticamente adequada. Uma das definições assinaladas e justificadas por esta docente – “um retângulo como um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos” está errada, ao nível matemático.

Como poderá trabalhar a professora Maria a definição de “retângulo” com os seus alunos se não tem conhecimento desta definição nem a compreende matematicamente?.

Questão 20

A segunda pergunta de Geometria e Medida em análise refere-se a um problema que envolve os conceitos de comprimento, largura, profundidade, área e volume.

A professora respondeu erradamente a esta questão no teste de medição do MKT e manteve a sua resposta na entrevista, justificando-a, como se pode ver no extrato em baixo:

Maria – Então... se tenho uma piscina rectangular e se duplico o comprimento e a largura, e mantenho a profundidade, preciso do dobro da água para encher a piscina. Sim.

Questão 22

Na última questão analisada, exigia-se a análise de argumentos de alunos e a identificação do correto, sobre áreas de dois triângulos inscritos num retângulo. A professora Maria respondeu corretamente e justificou o seu raciocínio na entrevista.

Maria – Esta questão para mim foi mais fácil... e penso que para os alunos também seria, pois iriam focar-se na fórmula da área do triângulo base vezes altura sobre dois.
Como os dois triângulos têm a mesma base e a mesma altura, substituindo na fórmula têm a mesma área.

Em suma, como se verifica na tabela em baixo, a professora Maria respondeu de forma errada a cinco das seis questões analisadas da sua entrevista. No entanto, ressalve-se que Maria justificou as suas opções de resposta no questionário, durante a entrevista. Por essa razão, as respostas realizadas no questionário revelam consistência com o seu raciocínio.

Tabela 85 - Dados da entrevista da Maria.

	Descrição da questão	Correta/ Incorrecta	Justifica (Sim/ Não)	Consistente (Sim/ Não)
Questões de Números e Operações	Simplificação de frações	Incorreta	Sim	Sim
	Propriedade distributiva	Incorreta	Sim	Sim
	Algoritmo da multiplicação com decimais	Incorreta	Sim	Sim
Questões de Geometria e Medida	Definições de trapézio e de retângulo.	Incorreta	Sim	Sim
	Relação entre os conceitos: comprimento, largura, área e volume.	Incorreta	Sim	Sim
	Comparação de áreas de triângulos.	Correta	Sim	Sim

No geral, verificou-se que a professora Maria tem um conhecimento processual dos conceitos matemáticos presentes nestas questões (Hiebert & Lefevre, 1986), ao invés de um conhecimento concetual. O trabalho da docente com os alunos resume-se essencialmente no trabalho de regras e técnicas matemáticas que exigem (apenas) memorização.

A professora Maria demonstrou confundir o conceito de prova matemática com a demonstração através de exemplos e revelou, também, dificuldades no trabalho das definições geométricas com os seus alunos.

Revelou fragilidades em separar o conhecimento que um professor deve ter daquele que espera dos seus alunos.

Por um lado, parece que, dos tipos de conhecimentos do MKT considerados por Ball, Thames e Phelps (2008), a docente se foca no “Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos” (KSC), na medida em que na justificação dos seus raciocínios, refere (sempre) o que os alunos vão pensar na resposta às questões deste estudo. No entanto, ressalve-se que este tipo de conhecimento, por parte da professora Maria, também parece ser escasso, uma vez que antecipa sempre erros por parte do aluno. Parece que se refugia nos erros dos alunos para esconder as suas fragilidades.

Entrevista 2 – Pedro

O professor entrevistado tem uma Licenciatura pré-bolonha, descrevendo-se, assim, como professor profissionalizado. É um docente do 1.º ciclo, com 6 anos de tempo de serviço docente. Nestes 6 anos lecionou sempre na mesma instituição, num colégio privado, no distrito do Porto.

O Professor Pedro caracteriza-se como um dos dois professores que obteve a melhor classificação dos 61 docentes intervenientes neste estudo – 92%. Este professor apenas errou três questões e deixou em branco uma pergunta. Estas quatro questões são referentes ao domínio da Matemática Números e Operações. Deste modo, o professor Pedro, na segunda parte do questionário que continha conceitos de Geometria e Medida, respondeu a todas as questões correctamente.

O professor Pedro, em geral, considera conhecer a matemática que precisa para ensinar e julga-se um professor de matemática “mestre”.

A entrevista ao Professor Pedro foi realizada no fim das suas aulas, na biblioteca do colégio.

De seguida, vai explorar-se as respostas deste docente às questões seleccionadas para esta parte do presente trabalho e o seu raciocínio demonstrado ao longo da entrevista.

Questão 4

O professor Pedro não respondeu à questão que abordava a simplificação de frações, tendo referido na entrevista que se tivesse dedicado mais tempo a esta questão teria respondido.

Quando se realizou a entrevista, respondeu a esta pergunta de forma correta e justificou o seu raciocínio.

Pedro – A hipótese A – “esta regra resulta porque se divide o número de cima e o de baixo pelo mesmo número, logo a nova fração tem de representar a mesma quantidade”, a C – “esta regra resulta porque se está a tornar o numerador e denominador mais pequenos através da mesma

quantidade” e D – “esta regra resulta porque, por exemplo, $\frac{3}{4}$ é a mesma quantidade do que $\frac{12}{16}$, só que com números mais pequenos” – não vou

dizer que estão erradas... não me parece que estejam erradas não são é a melhor resposta.

Quando li a hipótese B não identifiquei logo... mas neste momento, seria a minha resposta... porque no fundo quando estamos a dividir ou a multiplicar o numerador e o denominador, estamos a multiplicar ou a dividir por 1, porque é o mesmo número sobre o mesmo número.

De qualquer forma, esta explicação,.. ou melhor esta explicação é a única explicação que, apesar do nível de abstração,... é uma coisa que faz sentido e que dá uma lógica que as crianças podem perceber é de facto esta opção B, porque também já aprenderam a multiplicação e a divisão por 1.

Apesar do Professor Pedro não ter respondido a esta questão no questionário de medição do MKT, neste excerto, o docente demonstra ter um “Conhecimento Especializado do Conteúdo” (SCK), uma vez que de entre as respostas dos alunos é capaz de seleccionar a que fornece a melhor evidência de que o aluno compreende que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente.

Questão 7

Pedro respondeu corretamente à pergunta que abordava a propriedade distributiva no teste de medição do MKT. Na entrevista, explicou o raciocínio que utilizou, justificando a sua resposta de forma consistente com a opção de resposta que escolheu no questionário.

Pedro – Escolhi a hipótese D – $12 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right)$ – pois é única expressão

numérica que se verifica que em algumas situações a propriedade distributiva da multiplicação pode facilitar o cálculo, comparativamente à resolução de uma expressão numérica “normal”, em que se dá prioridade aos parêntesis.

Em todas as outras opções A, B e C, a propriedade distributiva tornava os cálculos mais complexos. Assim, nenhuma destas três opções seria indicada escolher para mostrar aos alunos uma situação em que a propriedade distributiva ajuda no cálculo.

O docente revela, mais uma vez, deter um “Conhecimento Especializado do Conteúdo” (SCK). Neste caso, revela ser capaz de entre quatro expressões numéricas selecionar a que seria o melhor exemplo para ajudar a sua turma a perceber que a propriedade distributiva da multiplicação, em algumas situações, faz com que as expressões numéricas sejam mais fáceis de resolver.

Questão 15

Relativamente à questão que abordava a regra para se determinar o local onde se coloca a vírgula num algoritmo da multiplicação com números decimais, o professor Pedro, no questionário, selecionou a opção correta, e justificou a sua opção de resposta na entrevista.

Pedro – Selecionei a hipótese B – I – pois a hipóteses A e D estão erradas... a hipótese E está errada, a C está errada...

A B está certa, pois, por exemplo 0,1 é igual $\frac{1}{10}$; 0,01 é igual a $\frac{1}{100}$, que é igual a $\frac{1}{10^2}$, e assim sucessivamente... então, 0,1 tem uma casa

decimal e o expoente do 10 é 1; 0,01 tem duas casas decimais e o expoente do é o 2; e assim sucessivamente.

Assim, se estamos a multiplicar números decimais, isto é, números inteiros divididos por potências de base 10, basta multiplicar os números inteiros e depois somar o número de casas decimais de cada número, que é o mesmo que somar os expoentes das potências de base 10.

Relativamente à regra apresentada nesta questão para se determinar o local onde se coloca a vírgula num algoritmo da multiplicação com números decimais, este docente demonstra, por um lado, ter um “Conhecimento Comum do Conteúdo” (CCK), pois sabe resolver este algoritmo, por outro lado, revela ter um “Conhecimento Especializado do Conteúdo” (SCK), uma vez que demonstra conhecer os fundamentos que estão por detrás das regras e procedimentos do algoritmo de multiplicação com números decimais, de modo a ser capaz de ensinar aos seus alunos esta operação matemática com compreensão, e não meramente através da memorização de técnicas.

Ao contrário do que se verificou num estudo de Ribeiro (2009), em que os professores envolvidos revelaram nem ter conhecimento comum do conteúdo do algoritmo com números decimais, nem possuírem um conhecimento especializado para o ensino deste algoritmo que

lhes permitisse trabalhar com os seus diferentes formas de efetuar e representar esta operação e, ainda, revelaram “desconhecer modelos da multiplicação bem como procedimentos “escondidos” no algoritmo que transmitem aos seus alunos”(Ribeiro, 2009, p. 11).

Ressalve-se que é muito importante os professores terem, por um lado, o CCK deste conteúdo, uma vez que os professores precisam de conhecer os conteúdos que ensinam; senão, questiona-se: de que forma serão capazes de os ensinar aos seus alunos?. Por outro lado, é extremamente importante os docentes deterem um SCK, na medida que lhes seja possível ensinar aos seus alunos os fundamentos por detrás deste algoritmo e outras formas de o resolver, de modo a que seja possível que os alunos o detenham com compreensão.

Questão 17

O professor Pedro selecionou a resposta correta na questão 17, que abordava duas definições de trapézio, e justificou o seu raciocínio na entrevista, o que demonstrou consistência entre o questionário e a entrevista.

Pedro – Um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos, logo se tem quatro ângulos retos tem lados paralelos, dois a dois. E por isso, a definição 1 é falsa, pois diz “um par de lados paralelos”. A definição 2 é verdadeira, pois ao dizer “pelo menos” permite que se considere dois pares de lados paralelos.

Automaticamente digo que a A é certo; a B é falsa; a C é falsa e a E é falsa. Ficando apenas por considerar a hipótese D “todos os trapézios são quadriláteros pela definição 2”. A definição de quadrilátero é uma figura com quatro lados. Ora bastar-me-ia arranjar um quadrilátero sem lados paralelos. Logo, a D também é falsa.

Neste excerto, o professor Pedro demonstra ter um “Conhecimento Especializado do Conteúdo” (SCK), na medida em que analisa duas definições de trapézio presentes em dois manuais diferentes e identifica a verdadeira.

Além disso, ressalve-se que, neste excerto, o docente justifica o seu raciocínio, revelando ter um conjunto de conhecimentos e que estão interligados entre si. O professor Pedro demonstra, assim, ter um conhecimento concetual (Hiebert e Lefevre, 1986).

Questão 20

O professor Pedro respondeu corretamente à questão 20 que se tratava de um problema que abordava a relação entre as medidas de comprimento, largura, profundidade, área e volume. Também nesta questão o professor justificou o seu raciocínio e mostrou consistência entre a sua resposta no questionário e na entrevista.

Nesta questão, que envolvia conceitos matemáticos de Geometria, o professor Pedro fez referência ao trabalho deste domínio da Matemática através de representações, fazendo um esboço do seu raciocínio como se apresenta na imagem em baixo.

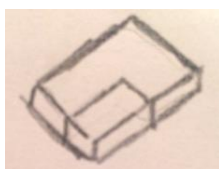


Figura 38 - Representação geométrica do Professor Pedro em resposta à questão 20.

No ensino da Geometria e da Matemática em geral, as representações são importantes, uma vez que, segundo NCTM (1991), “representar é uma forma importante de comunicar ideias matemáticas (...). Representar envolve traduzir um problema ou uma ideia numa nova forma (...)” (p. 34).

Parzysz (1991) refere que as representações gráficas, em Geometria, têm as seguintes funções principais: ilustram definições ou teoremas; agrupam um complexo conjunto de informação; ajudam a elaborar conjecturas e ajudam a demonstrar.

Nesta linha de ideias, o professor Pedro refere o uso das representações gráficas para dar resposta à questão 20, no excerto em baixo.

Pedro – Devemos trabalhar a geometria com ferramentas que nos protejam, auxiliem a cabeça, o auxílio do desenho,... e é isso que o professor deve dominar.

Eu não acho razoável que um professor tenha de resolver isto em total abstração.

A matemática tem uma componente lúdica e até de uma certa finta que nos leva a dar respostas erradas por sermos induzidos em erro... ora, para mim faz todo o sentido que os professores recorram a auxílio e o desenho é um deles. Acho que é muito importante de ser ensinado às crianças.

Este exemplo é um exemplo que através de um desenho não há nenhuma margem para um professor errar. No entanto, acho que é muito provável que

uma pessoa erre...porque estamos a falar de uma proporção que pode ser exatamente o dobro ou o quádruplo!

Se estivermos a falar de medidas de volumetria, a proporção é o quádruplo; se estivermos a falar de medidas de área, a proporção deve ser o dobro.

Questão 22

Como se verifica no excerto em baixo, o Professor Pedro respondeu corretamente à questão 22, que abordava a comparação de áreas de dois triângulos inscritos num retângulo. Nesta pergunta era pedido para identificar a afirmação correta acerca das áreas dos triângulos, de entre várias fornecidas por alunos.

Pedro – Esta questão era fácil... se os dois triângulos estão inscritos no retângulo... a segunda afirmação é verdadeira, pois é verdade que os triângulos tenham a mesma base e a mesma altura, logo, pensando-se na fórmula da área do retângulo, têm a mesma área.

Em suma, a entrevista do Professor Pedro revelou que o seu desempenho no questionário de avaliação do MKT corresponde ao seu conhecimento matemático para ensinar.

Apenas na questão que envolvia a simplificação de frações, se observou alguma inconsistência entre a entrevista e o questionário, na medida que, na entrevista, Pedro deu uma resposta correta a esta questão e no questionário deixou esta questão em branco.

Tabela 86 - Dados da entrevista do Pedro.

	Descrição da questão	Correta/ Incorrecta	Justifica (Sim/ Não)	Consistente (Sim/ Não)
Questões de Números e Operações	Simplificação de frações	Não responde	Sim	Não
	Propriedade distributiva	Correta	Sim	Sim
	Algoritmo da multiplicação com decimais	Correta	Sim	Sim

Questões de Geometria e Medida	Definições de trapézio e de retângulo.	Correta	Sim	Sim
	Relação entre os conceitos: comprimento, largura, área e volume.	Correta	Sim	Sim
	Comparação de áreas de triângulos.	Correta	Sim	Sim

Concluindo, analisando-se a entrevista do professor Pedro, verifica-se que este docente possui um conhecimento concetual (Hiebert & Lefevre, 1986, p. 3), pois justifica sempre os seus raciocínios e demonstra ser capaz de interrelacionar diferentes conceitos matemáticos.

Nas suas exposições demonstra ter um Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), mais especificamente um Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), na medida que revela ter noção dos tópicos a serem trabalhados em cada tema da Matemática e alude o ensino de diferentes conceitos matemáticos com recursos e materiais distintos.

O professor Pedro revela também possuir um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) quando demonstra ter conhecimento acerca dos procedimentos da resolução de algoritmos e utiliza representações gráficas para apresentar o seu raciocínio e explicita a sua importância no ensino da Matemática, mais especificamente da Geometria.

Capítulo 6 – Conclusões e Implicações

*Será esta viagem feita pelo vento
Será feita por nós, amor e pensamento
O sonho é sempre sonho se nos enganamos
Mas cabe perguntar: **Como é que aqui chegamos?***
José Mário Branco (1985)

Com este trabalho pretendia-se responder às seguintes questões de investigação:

- (1) Em que medida e de que modo se podem adaptar as medidas construídas nos EUA, de forma a poderem ser usadas para medirem o conhecimento matemático para se ensinar em Portugal?;
- (2) Qual o conhecimento matemático para se ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal?.

Para se responder à primeira questão, realizou-se, de forma fundamentada, crítica e rigorosa, um processo de seleção, tradução e adaptação de questões de escolha múltipla construídas nos EUA, pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan, para medir o “Conhecimento Matemático para Ensinar” (MKT) de professores dos 1.º e 2.º ciclos, em Portugal, que será devidamente sumariado neste capítulo.

Na resposta à segunda pergunta de investigação, que dizia respeito à caracterização do MKT de professores portugueses dos primeiros anos, teve-se em conta algumas características das questões que compunham o questionário:

- . domínio da Matemática (Números e Operações ou Geometria e Medida) que avaliam;
- . tipo de conhecimento matemático (MKT) que exigem (CCK, SCK ou KSC);
- . grau de dificuldade que apresentaram ($0 \leq D < 0,25$ – “difíceis”, $0,25 \leq D < 0,50$ – “um pouco difíceis”, $0,50 \leq D < 0,75$ – “um pouco fáceis” ou $0,75 \leq D \leq 1$ – “fáceis”).

Além disso, a descrição e análise do conhecimento matemático de professores dos primeiros anos, em Portugal, também se caracterizou pelo estudo de correlações entre a prestação/ desempenho destes intervenientes com as seguintes variáveis estatísticas:

- . Tempo de serviço docente;
- . Ciclo do Ensino Básico que ensinam;
- . Formação académica dos professores;
- . A perceção que têm acerca do conhecimento que possuem da matemática que ensinam.

Considera-se que esta caracterização do conhecimento matemático desta amostra de professores dos 1.º e 2.º ciclos possa ser importante para se repensar a formação dos professores dos primeiros anos em Portugal e para se alargar o leque de futuras investigações nesta área do conhecimento do professor, que será também explanada numa segunda parte deste capítulo.

6.1. Conclusões

6.1.1. O processo de seleção, adaptação e validação das questões construídas nos EUA ao contexto português

- **Sobre a seleção das questões construídas pelo grupo de investigação de Michigan a constarem no questionário da presente investigação.**

O presente trabalho partiu de uma análise exaustiva das 100 questões de escolha múltipla que compõem os vários testes construídos pelo projeto LMT entre 2001 e 2008, que tinha como principais investigadores Heather C. Hill, Deborah Ball, Hyman Bass, Geoffrey Phelps e Steve Schilling.

Este estudo iniciou-se com um processo de seleção das questões, tendo-se em conta os seguintes critérios:

- . nível de ensino dos professores de matemática do presente trabalho;

- . os domínios da matemática mais predominantes no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013) e nas Aprendizagens Essenciais (2018), relativos aos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico;
- . os valores dos parâmetros “slope” e “dificuldade” das questões obtidos nos estudos dos EUA;
- . a adequação dos conteúdos matemáticos contemplados nas questões ao programa português;
- . o número de questões que formariam o questionário, tendo em conta que cada pergunta tem um tempo médio de resposta 1-2 minutos.

Deste processo investigativo, resultou um questionário formado pelas questões dos testes de “Geometria e Medida” versões A e B, elaborado pelo LMT em 2004, e de “Números e Operações” de 2008 versões A e B, na medida em que abordam os dois domínios da Matemática com maior destaque no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013) e nas Aprendizagens Essenciais de Matemática (2018) e contêm perguntas relativas ao Ensino Básico (Elementary School) – o nível de ensino em foco no presente trabalho.

Além disso, da análise dos valores dos parâmetros “slope” e “dificuldade”, obtidos nos estudos dos EUA, das questões que compunham estes dois questionários, resultou na escolha da versão B de ambos, uma vez que se verificou que as perguntas da versão B apresentavam um *grau de dificuldade (d)* (ligeiramente) inferior às da versão A.

O questionário, nesta fase do processo de seleção, ficou assim constituído por 52 questões: 29 domínio da Matemática *Números e Operações* e 23 questões de *Geometria e Medida*.

Antes de se prosseguir para a tradução e adaptação das questões ao contexto português, pareceu ser fundamental verificar se as perguntas seleccionadas continham apenas conceitos, técnicas e/ou procedimentos matemáticos presentes no Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013) e/ ou nas Aprendizagens Essenciais (2018).

Deste estudo rigoroso, pergunta a pergunta, resultou que:

– todos os conteúdos matemáticos presentes no questionário integram Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013) e/ ou nas Aprendizagens Essenciais (2018).

Viu-se ainda que,

– a maioria das 52 perguntas continham conteúdos matemáticos referentes (apenas) ao 1.º ciclo e/ou 2.º do Ensino Básico.

No entanto,

– as questões 16, 17, 18e, 19a, 19c e 24a avaliam conceitos relativos aos 7.º e/ou 8.º ano de escolaridade, isto é, que não fazem parte dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico.

Decidiu-se integrar também estas questões no teste a ser traduzido e adaptado ao contexto português, uma vez que se considera que os professores têm de ter conhecimento de conteúdos matemáticos relativos a anos posteriores aqueles que ensinam, de modo ser possível realizarem análises verticais dos diferentes domínios matemáticos.

- **Sobre a tradução e adaptação das questões construídas pelo grupo de investigação de Michigan a constarem no questionário do presente trabalho.**

O processo de tradução e adaptação das questões selecionadas para avaliar o MKT de professores portugueses dos 1.º e 2.º ciclos dividiu-se em duas fases.

– Numa primeira fase, realizou-se uma *tradução dupla do teste* (Adams 2005), feita, portanto, por dois investigadores, de forma independente que foi, posteriormente, discutida e finalizada.

Tratando-se de uma tradução de um instrumento de medição que tem por base a construção de um construto – MKT, este processo não se cingiu a uma mera tradução palavra a palavra, mas sim também a uma adaptação do teste ao contexto português.

Na documentação da tradução e adaptação das questões à realidade portuguesa agruparam-se as alterações realizadas em quatro categorias:

- (1) alterações relativas ao contexto cultural no geral;
- (2) mudanças relacionadas com o contexto cultural escolar;
- (3) alterações relacionadas com os conteúdos matemáticos;

Estas categorias também foram utilizadas por Delaney e pelos seus colegas (2008) aquando da adaptação deste instrumento ao contexto irlandês.

Relativamente à primeira categoria, realizaram-se mudanças no “Nome de pessoas” (por exemplo na questão 2 “Hosko” para “Luís”), adaptou-se, por exemplo, o tratamento dado nos EUA de “Mr.” e “Ms.” para “professor” ou “professora” seguida do nome, como se aborda em Portugal. Ainda se consideraram alterações relacionadas com termos não matemáticos ou atividades, como “relay race” foi alterado para “corta mato” por ser mais praticada nas escolas em Portugal.

Nas mudanças relacionadas com o contexto cultural escolar, agruparam-se alterações relativas a “termos escolares” e “estrutura do sistema educativo”.

Na terceira categoria, consideraram-se mudanças que diziam respeito a “unidades de medida”, “linguagem matemática escolar” e “representações matemáticas”.

– Numa segunda fase do processo de tradução e adaptação do questionário à realidade portuguesa, seis colaboradores – um Professor Doutor especialista na área de educação matemática, uma Professora e Investigadora do ensino do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico; duas professoras experientes do 1.º ciclo e duas do 2.º ciclo – resolveram o instrumento de recolha de dados e deram o seu parecer fundamentado quanto:

- . à adequação das questões à realidade portuguesa;
- . à estrutura das questões;
- . à dificuldade que os professores de 1.º e 2.º ciclos de Portugal poderiam ter para dar resposta a estas questões;
- . à capacidade do questionário, como um todo, de medir o conhecimento matemático necessário para um professor português ensinar.

No geral, os colaboradores (apenas) fizeram sugestões de alteração ao questionário de índole linguístico, que se tiveram em conta e conduziram a algumas mudanças no questionário final.

Consideraram, além disso, as questões do teste adequadas ao contexto português e capazes de medir os diferentes tipos de conhecimento matemático necessários para se ensinar matemática nos primeiros anos.

A análise crítica e rigorosa destes colaboradores e o seu parecer posteriormente dado permitiu garantir os seguintes dois aspetos, também utilizados por Cole (2011) na sua investigação no Gana, cruciais no processo de tradução e adaptação de instrumento de medição

de um construto e aplicar, posteriormente, o questionário constituído por 52 questões: 29 domínio da Matemática *Números e Operações* e 23 questões de *Geometria e Medida* a professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal:

- Acessibilidade: o significado literal das questões de escolha múltipla é perceptível pelos professores portugueses.
- Validade do instrumento: os contextos explicitados nas questões são relevantes e representam de forma autêntica situações reais de ensino em Portugal.

6.1.2. Conclusões sobre o conhecimento matemático para ensinar de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal.

Os diversos estudos de índoles qualitativas e quantitativas realizados ao longo do presente trabalho permitiram caracterizar o conhecimento matemático para ensinar de professores portugueses, através da análise do desempenho de 61 professores dos 1.º e/ ou 2.º ciclos do Ensino Básico na resolução do questionário e do raciocínio apresentado por dois destes professores, aquando da realização de entrevistas cognitivas.

No geral, refira-se que o desempenho dos professores intervenientes neste estudo, na resolução do questionário de medição do MKT validado em Portugal, foi *pouco suficiente*, na medida em que, em média, estes docentes apresentaram uma classificação de 56%.

Os dois professores com melhor pontuação obtiveram 92,31% e o docente com menor classificação apresentou um resultado de (apenas) 3,85%.

Os docentes envolvidos, em média, apresentaram um maior número de respostas corretas nas perguntas de Geometria e Medida (60,81%), do que nas questões que envolviam conceitos de Números e Operações (49,8%).

No que diz respeito ao domínio do MKT que as questões envolviam, os professores portugueses mostraram-se mais capazes de responder às perguntas que exigiam um Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), isto é, as que avaliavam se os docentes conhecem o conteúdo que ensinam aos seus alunos, tendo apresentado uma média de 66,36% nestas questões de escolha múltipla. Por outro lado, nas perguntas que exigiam Conhecimento

Especializado do Conteúdo (SCK), que segundo Ball e os seus colegas (2008) é a forma de conhecimento que é exclusivamente necessária para que os professores sejam capazes de ensinar, os professores mostraram mais dificuldades, tendo apresentado uma média de 52,64%. Os docentes intervenientes nesta investigação demonstraram os piores resultados nas questões que envolviam um Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC), tendo-se mesmo constatado uma média insuficiente de 45,64%, o que parece ser muito preocupante, na medida em que estes professores terão dificuldades em antecipar o que é mais fácil e mais difícil para os seus alunos e antever, por exemplo, os erros mais comuns, o que lhes dificultará a preparação de um trabalho docente eficiente, capaz e rigoroso.

Da análise do grau de dificuldade (D), verificou-se que 10 questões, que compõem o questionário, foram consideradas “fáceis”, 26 “um pouco fáceis”, 13 “um pouco difíceis” e (apenas) 3 difíceis.

Em suma, refira-se também que os professores portugueses envolvidos demonstraram melhores resultados em perguntas que envolviam a memorização de regras, procedimentos de cálculo e/ou a aplicação de fórmulas algébricas, revelando possuir um conhecimento matemático processual (Hiebert & Lefevre, 1986). Além disso, também se mostraram muito capazes de dar respostas corretas a questões que envolviam a identificação de uma figura ou sólido geométricos dada a sua representação gráfica.

Contudo, esta amostra de professores apresentou uma pior prestação nas questões que envolviam analisar se o raciocínio dos alunos evidenciava ou não se tinham compreendido um dado conceito ou procedimento matemático e avaliar a validade matemática de métodos não standards propostos pelos alunos.

Nesta investigação, estudou-se também possíveis correlações entre a prestação dos professores participantes com algumas variáveis estatísticas, de modo a enriquecer a informação obtida no presente trabalho.

Viu-se assim que:

- maior número de anos de serviço docente conduziu a uma maior classificação pelos professores. De facto, constatou-se, através do valor obtido no IBM SPSS versão 25 do coeficiente de correlação de Pearson, uma associação positiva e moderada entre a pontuação dos docentes participantes e o tempo de serviço docente.

– o nível de ensino básico (1.º ou 2.º ciclos) que os professores lecionam está correlacionado com a sua classificação no teste de medição do MKT. Refira-se que, se verificou, neste estudo, com o coeficiente de correlação de Spearman, a existência de uma associação positiva e moderada entre a prestação destes docentes no questionário e o nível de ensino que lecionam.

– docentes com o grau académico mais elevado (Mestrado), obtiveram, em média, prestações superiores aos professores com menos formação académica. Refira-se, no entanto, que no estudo do coeficiente de correlação de Spearman, a associação entre estas duas variáveis se caracterizou como fraca, não se tendo obtido, portanto, grande informação acerca da correlação entre a classificação dos professores e a sua formação académica.

– as classificações dos docentes está correlacionada com a perceção que têm acerca do conhecimento que detêm da matemática que ensinam. Através do estudo do coeficiente de correlação de Spearman, verificou-se uma associação negativa e moderada entre estas duas variáveis estatísticas, parecendo, por isso, poder afirma-se que à medida que as classificações obtidas pelos professores foram mais elevadas, mais afirmaram não deterem o conhecimento da matemática que precisam para ensinar.

De seguida, irão apresentar-se as conclusões deste trabalho, tendo em conta os parâmetros descritos anteriormente.

- **Sobre a associação entre o desempenho dos professores participantes no estudo e o domínio matemático das questões de escolha múltipla do instrumento de medição de MKT**

Os professores participantes nesta investigação tiveram um melhor desempenho nas questões que envolviam “Geometria e Medida” do que nas perguntas de “Números e Operações”.

Relativamente ao primeiro domínio matemático referido, os docentes obtiveram, em média, 60,81% e uma mediana de 60,7%, e nas questões que continham conteúdos matemáticos de “Números e Operações”apresentaram, em média, 49,75% e uma mediana de 52,5%.

Nas 29 perguntas de “Números e Operações”, em 14 questões, os professores intervenientes nesta investigação obtiveram resultados negativos (abaixo dos 50%). Em 23 questões de “Geometria e Medida” (apenas) em duas perguntas se observou uma percentagem de respostas corretas abaixo dos 50% e verificou-se também que em oito perguntas a percentagem de respostas corretas foi superior a 70%.

Nas questões que envolviam “Números e Operações” viu-se ainda que:

- os professores tiveram uma melhor prestação nas perguntas que diziam respeito a técnicas, procedimentos e/ ou regras matemáticas;
- os docentes tiveram o pior desempenho numa questão que exigia a análise de resolução de alunos de um algoritmo da subtração.

Em perguntas de “Geometria e Medida” constatou-se ainda que:

- os professores participantes neste estudo tiveram melhor resultado numa questão que tinham de analisar as definições de prisma, pirâmide e tetraedro e verificar que a representação do sólido geométrico apresentado se tratava de uma pirâmide;
- os docentes apresentaram mais dificuldades numa pergunta que tinham de considerar a afirmação “um retângulo é um quadrado” como “às vezes verdadeira”.

Numa das entrevistas realizadas, uma professora revelou uma certa indiferença face às definições, neste caso na área da Geometria. Desvaloriza o trabalho com rigor e precisão das definições com os alunos, o que se revela preocupante, uma vez que, como referem Mariotti e Fishbein (1997), aprender a definir é um objetivos da educação matemática.

- **Sobre o desempenho dos professores participantes no estudo por domínios do MKT**

As questões que compunham o questionário desta investigação também foram caracterizadas por um dos seguintes domínios do Conhecimento Matemático Necessário para se Ensinar (MKT), definidos pelo projeto *Learning Mathematics for Teaching* (LMT):

- . Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK);
- . Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK);

. Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC).

Na análise do desempenho dos professores nas questões, de acordo com o tipo de conhecimento do professor (MKT) que avaliam, verificou-se que:

- obtiveram prestações mais elevadas nas questões que exigiam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK);
- nas questões que envolviam o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), os professores apresentaram uma média mais baixa, relativamente às perguntas que avaliam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK);
- nas perguntas que envolviam Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC) os professores portugueses apresentaram o pior desempenho dos três domínios.

Numa exploração do desempenho dos professores intervenientes neste trabalho, segundo o domínio da Matemática e o domínio do MKT que avaliam, foi possível constatar que:

- nas questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) a média das classificações dos professores nas questões de Números e Operações é muito semelhante à média nas perguntas de Geometria e Medida.
- nas questões que exigem Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) ou Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC), nas perguntas de Números e Operações a média das classificações dos docentes foi bastante inferior à média das perguntas que continham conteúdos de Geometria e Medida.

Nas questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) observou-se que:

- os docentes tiveram melhor desempenho na questão 18 c) que envolvia as características de um cubo e na 19b) que tinham de caracterizar como “impossível” um polígono ter só dois lados;
- os professores apresentaram mais respostas incorretas quando tinham de relacionar duas definições, por exemplo na pergunta 18 b).

Em perguntas que exigiam Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) foi possível observar-se que:

- os docentes apresentaram uma pior prestação em perguntas que consistiam em analisar respostas de alunos e identificar a que melhor evidenciava que o discente tinha compreendido.

Por exemplo na pergunta 4, que avaliava “simplificação de frações” e exigia o CCK, a Professora Maria selecionou uma opção de resposta que não traduzia a melhor evidência que um aluno tinha percebido o processo de simplificação de frações e, na entrevista, mantém a sua resposta errada e justifica-a.

- os professores revelaram um melhor desempenho em questões que envolviam identificar um sólido geométrico, através da sua representação gráfica.

Nas questões que envolviam Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) foi possível observar-se que:

- os professores participantes neste estudo demonstraram uma melhor prestação numa questão que tinham de identificar se um procedimento de um aluno revelava que tinha percebido o algoritmo da subtração;
- os docentes tiveram classificações mais baixas quando lhes foi pedido para analisar uma estratégia sugerida por aluno para o cálculo da área que consistia em contar o número de pontos dentro do quadrado e classificá-la como matematicamente inaceitável.

- **Sobre o desempenho dos professores intervenientes na investigação de acordo com o nível de dificuldade das questões em estudo**

As questões que compõem o questionário foram também agrupadas de acordo com o “grau de dificuldade” (D), que revelaram na presente investigação com professores portugueses, obtido com base na Teoria Clássica dos Testes (TCT).

Classificaram-se assim as questões como:

- . *díficeis* se apresentaram um grau de dificuldade maior ou igual a 0 e menor do que 0,25.

- . *um pouco difíceis* se estiver entre 0,25 (inclusive) e 0,50;
- . *um pouco fáceis*, se este parâmetro estatístico estiver entre 0,50 (inclusive) e 0,75;
- . *fáceis*, se o seu grau de dificuldade for maior ou igual a 0,75 e menor ou igual a 1.

No geral, verificaram-se, aquando da aplicação do questionário aos 61 professores portugueses, um maior número de questões “fáceis”, do que “difíceis”. De facto, das 52 questões de escolha múltipla: 36 apresentaram grau de dificuldade (D) entre 0,50 e 1, sendo, por isso, denominadas de “fáceis” ou “um pouco fáceis” e 16, entre 0 e 0,50, tendo sido descritas por “difíceis” ou “um pouco difíceis”, no presente estudo.

Além disso, similarmente aos estudos estatísticos realizados nos EUA, pelo grupo de investigação de Michigan, neste estudo verificou-se que o maior número de questões “fáceis” avaliavam conceitos matemáticos geométricos (21 em 36) e que grande parte das questões “difíceis” continham conteúdos de “Números e Operações” (14 em 16).

Em geral, verificou-se uma concordância entre o grau de dificuldade (D) revelado pelas questões de escolha múltipla neste estudo e o grau de dificuldade (d) apresentado por estas perguntas, quando aplicadas a docentes americanos, pelo LMT. Este resultado já tinha sido salvaguardado quando, através do IBM SPSS versão 25, se estudou o grau de associação destas duas variáveis estatísticas e se patenteou uma correlação negativa forte ($r=-0,621$) e estaticamente significativa ao nível de 0,01. Note-se que o valor negativo do coeficiente de Pearson se justifica pelo parâmetro d variar de -3 a $+3$, em que $d \leq -2$ se referem as questões fáceis e $d \geq 2$ as difíceis, e, por outro lado, D ter uma variação entre 0 a 1, sendo que as questões difíceis variam entre 0 a 0,50 e as fáceis de 0,50 a 1.

Constatou-se então o seguinte:

- a questão que apresentou um maior grau de dificuldade (D) neste trabalho – a 21e – também foi a que foi considerada “mais fácil” nos EUA, de entre as 52 perguntas do questionário;
- das 9 perguntas “fáceis” do presente estudo, além da 21e, 8 delas – 1c, 14, 18a, 18c, 19b, 19c, 19d, 21a – foram descritas como “um pouco fáceis” nas investigações com professores americanos;

- das 26 questões “um pouco fáceis” deste questionário, 19 também foram consideradas “um pouco fáceis” nos EUA com $-2 \leq d < 0$;
- relativamente às três questões – 4, 8c e 11 – denominadas de “difíceis” nesta investigação, com $0 \leq D \leq 0,25$, destaque-se a pergunta 11 por também ter sido considerada “difícil”, mais especificamente a “mais difícil” de entre as 52, nos estudos estatísticos realizados pelo grupo de investigadores da Universidade de Michigan, com $d=2,343$.

No entanto, refira-se que:

- a questão dita “mais difícil” no presente trabalho, com menor valor de $D=0,01$ foi a pergunta 8c, que, nos EUA, se denominou (apenas) de “um pouco difícil”;
- a pergunta 2 que se denominou de “um pouco difícil”, com $D=0,36$, quando aplicada aos professores portugueses, nos EUA, o grau de dificuldade (d) obtido para esta questão foi superior a 2 (2,043), tendo sido, por isso, considerada “difícil”;
- as perguntas 6, 8a), 12 d) e 24a) “um pouco difíceis” foram descritas como “um pouco fáceis” nos EUA;
- das 10 questões “fáceis” deste trabalho, destaque-se a pergunta 1b por nas investigações com professores americanos se ter comportado como “um pouco difícil”, com grau de dificuldade (d) de 1,185. Esta questão abordava uma regra com números naturais, o que parece justificar a boa prestação dos docentes portugueses, uma vez que ao longo do estudo, tiveram uma boa prestação em perguntas que envolviam procedimentos técnicos;
- das 26 perguntas “um pouco fáceis”, 7 perguntas, a 1d, 12b, 18d, 18e, 20, 22 e 24c, revelaram valores de dificuldade (d) nos EUA entre 0 e 2, tendo sido denominadas de “um pouco difíceis”. Apesar de terem denominações diferentes, note-se que as questões 12b, 22 e 24c têm valores de dificuldade neste estudo e nos EUA muito próximo das fronteiras entre “um pouco fáceis” e “um pouco difíceis”.

- **Sobre a prestação dos professores entrevistados nas questões de medição do MKT e o raciocínio exposto nas entrevistas**

Em suma, as duas entrevistas realizadas revelaram que o desempenho no questionário de avaliação do MTK corresponde ao seu conhecimento matemático para ensinar.

De facto, no geral, os dois docentes quando apresentaram respostas corretas no teste de medição do MKT, na entrevista justificaram corretamente o seu raciocínio. Por outro lado, a respostas incorretas no questionário correspondeu uma justificação incorreta. Deste modo, foi possível constatar que o raciocínio que estes dois professores utilizaram na resposta às questões no questionário é coerente e consistente com as explicações que forneceram nas entrevistas cognitivas.

Além disso, da análise das duas entrevistas viu-se que a prestação baixa ou alta no questionário está relacionada com algumas características do conhecimento do professor.

Efetivamente,

– a professora Maria, que apenas obteve uma classificação de 50% no teste de medição do MKT, revelou ter um trabalho com os seus alunos muito focado na memorização de procedimentos e técnicas matemáticas, isto é, apresentou um conhecimento matemático processual (Hiebert & Lefevre, 1986).

– Por sua vez, o Professor Pedro que teve a melhor classificação de entre os docentes participantes nesta investigação (92%), demonstrou, ao longo da entrevista e com a exposição dos seus raciocínios, ser capaz de estabelecer ligações entre diferentes conceitos matemáticos, ou seja, revelou um conhecimento matemático concetual (Hiebert & Lefevre, 1986).

Ainda da análise das entrevistas, foi possível constatar-se que:

– A docente com mau desempenho no questionário desvaloriza algumas aspetos consideradas fulcrais no ensino da Matemática: o papel da prova matemática e o trabalho da definição (geométricas) com os alunos.

A prova matemática em sala de aula, segundo Hanna (2014), contribui para o desenvolvimento da compreensão concetual (Hiebert & Lefevre, 1986).

Quanto às definições, refira-se que Mariotti e Fischbein (1997) consideram que aprender a definir é um problema básico da educação matemática. Assim, a desvalorização do trabalho do rigor das definições no ensino da Geometria e da Matemática em geral parece ser potencialmente grave.

- O docente com melhor prestação no questionário valorizou o trabalho das representações gráficas no ensino da Matemática, mais especificamente na Geometria.

Ressalve-se que é importante que os professores utilizem as representações. Como concluiu Gomes (2003), no seu estudo, “(...) à semelhança do que se havia extraído de estudos internacionais, as representações desempenham um papel fundamental na construção do conceito” (p. 284). No entanto, refira-se também que o trabalho das representações com os alunos tem de ser cauteloso, na medida em que “(...) as representações trazem sempre limitações podendo levar à criação de imagens erradas do conceito” (Gomes, 2003, p. 284).

Nas entrevistas, foi possível tirar-se algumas conclusões acerca dos domínios do conhecimento matemático do professor (MKT) (Ball, Thames e Phelps, 2008) com maior destaque.

- A professora Maria revela ter fragilidades nos Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) e Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). Apesar de focar as explicações dos seus raciocínios naquilo que considera ser o que os alunos vão pensar, o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC) também se revela escasso, na medida em que antecipa sempre erros por parte dos alunos e nunca refere os procedimentos, técnicas e/ ou conceitos matemáticos que os discentes tendem a apresentar maiores destrezas.

- O professor Pedro demonstrou possuir um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) e um Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT).

De facto, ao longo da sua entrevista, evidencia saber ensinar a aprender. O professor demonstra ter conhecimentos acerca da matemática e do seu ensino, revelando ter a noção dos conceitos matemáticos a serem trabalhados em cada tema desta disciplina.

6.2. Implicações com base no trabalho realizado – abertura a novos estudos

6.2.1. Implicações para a Formação Matemática de Professores dos primeiros anos

Com os resultados do presente trabalho, é possível apresentar-se algumas propostas fundamentadas para a formação de professores dos 1.º e/ou 2.º ciclos em Portugal.

- Os professores apresentaram um melhor desempenho em questões que envolviam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), do que nas que exigem Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).

Assim, parece importante que durante a sua formação os (futuros) professores resolvam atividades que potenciem o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).

Sugere-se, por exemplo, que os (futuros) docentes tenham a oportunidade de trabalhar com tarefas que exijam:

- . identificar, de entre várias resoluções de problemas por diferentes alunos a que evidencia a resposta mais correta;
- . a alteração de questões, tornando-as mais fáceis ou mais difíceis;
- . a preparação de atividades para trabalhar um conteúdo matemático com alunos, tendo em conta o ano de escolaridade dos alunos.

- Os docentes participantes na investigação revelaram as classificações mais baixas em perguntas que envolviam Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KSC).

Assim, afigura-se como importante que os (futuros) professores, na sua formação, tenham a possibilidade de analisar tarefas matemáticas com a perspetiva de antecipar: o que vai ser mais fácil ou mais difícil para os alunos, os erros mais comuns, o que vão pensar ou confundir e onde vão ser mais capazes, permitindo-lhes pensar também em estratégias a trabalhar com os seus (futuros) alunos nas atividades que consideram que lhes vão ser mais penosas ou de difícil compreensão.

- Em Geometria, os professores participantes nestes estudo e uma das docentes entrevistadas revelaram dificuldades no trabalho com definições.

Assim, parece importante que na formação dos docentes estes analisem diferentes definições para o mesmo conceito e tenham a possibilidade de verificar a que correção quer matematicamente, quer didaticamente.

6.2.2. Implicações em termos de investigações futuras

A presente investigação incidiu, essencialmente, na tradução, adaptação e validação de um instrumento de medição do Conhecimento Matemático para se Ensinar (MKT) construído nos EUA pelo LMT e no estudo deste conhecimento de professores portugueses. Para isso, utilizou-se uma metodologia mista, em que os instrumentos de recolha de dados disseram respeito ao questionário mencionado, que foi respondido por uma amostra de 61 professores, e por duas entrevistas cognitivas.

Apesar de se estar a aproximar o fim deste trabalho, conjectura-se sempre o que ainda o podia enriquecer mais, o que podia ter sido feito ou pode ser feito de forma diferente, ou por onde se vai caminhar agora?

- Parece interessante realizar-se o mesmo estudo mas com uma amostra representativa da população portuguesa, isto é, uma investigação com carácter nacional, sendo possível caracterizar-se o Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT) dos professores dos 1.º e 2.º ciclo portugueses;
- Outro estudo que poderia ser uma complementação desta investigação seria associar-se os resultados dos professores no questionário de medição do MKT e o raciocínio matemático demonstrado nas entrevistas, com a qualidade do seu ensino, como já foi realizado noutros países;
- Sendo a aprendizagem dos alunos o foco central do processo de ensino da matemática e de qualquer disciplina, parece importante complementar esta investigação com o estudo do conhecimento dos alunos;

- Seria interessante realizar-se um estudo longitudinal, onde se analisaria a evolução do Conhecimento Matemático Necessário para se Ensinar (MKT) de um professor, ao longo de um período de tempo, com início na sua formação universitária e se prolongasse no fim da sua formação e com algum tempo de serviço.

Capítulo 7 – Referências Bibliográficas

- Adams, R. (2005). *PISA 2003 technical report*. Paris: Organization for Economic Co-operation and Development.
- Aharoni, R. (2012). *Aritmética para país*. Lisboa: Gradiva.
- Almeida, L. S. & Freire, T. (2017). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação*. Braga: Psiquilíbrios Edições.
- Andrade, D. F., Tavares, H. R. & Valle, R. C. (2000). *Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2000.
- Ball, Bass, Sleep & Thames (2006). Mathematical Knowledge for Teaching. *Eighth Annual Chicago Symposium Series on Excellence in Teaching Mathematics and Science: Research and Practice*, Chicago, IL.
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education (Unpublished doctoral dissertation)*. East Lansing: Michigan State University.
- Ball, D. L. (1989). *Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about the subject matter*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90, 449-466.
- Ball, D. L. (1999). Crossing boundaries to examine the mathematics entailed in elementary teaching. *Contemporary mathematics*, 243, 15-36.
- Ball, D. L. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge of teaching. *Paper presented at the Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. AB: Edmonton.
- Ball, D. L. (2009). Making Mathematics learnable in school: What is the work of teaching Mathematics?. *Paper presented at the Redesigning Pedagogy – 3rd International Conference*. National Institute of Education.

- Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.
- Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian mathematics education study group*. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, 14-46.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W. & Bruner, M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research*, 133-180.
- Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America: National Council of Teachers of Mathematics.
- Beswick, K., Callingham, R. & Watson, J. (2012). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15 (2), 131-157.
- Bivar, A. G., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. C. (2013). *Caderno de Apoio ao 1.º ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Blum, W. & Krauss, S. (2008). *The professional knowledge of German 266 secondary mathematics teachers: Investigations in the context of the COACTIV project*. Paper presented at the 100th anniversary of ICMI.
- Blunk, M. L. & Hill, H. C. (2007). *The mathematical quality of instruction (MQI) video coding tool: Results from validation and scale building*. Paper presented at the American Educational Association Annual Conference, Chicago, IL.
- Boavida, A. et al. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

- Boavida, A. M. (2005). *A Argumentação em Matemática: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Tese de Doutoramento em Educação, Didática da Matemática. Lisboa: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.,
- Bock, R. D., Thissen, D. & Zimowski, M. F. (1997). IRT estimation of domain scores. *Journal of Educational Measurement*, 34(3), 197-211.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D. & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 194-222.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, C. A. & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York: MacMillan.
- Brown, S. I., Cooney, T. J. & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. In R. H. (ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 639-656). New York: MacMillan.
- Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. MA: Harvard University.
- Buxton, L. (1981). *Do you panic about maths? Coping with maths anxiety*. London: Heinemann Educational.
- Canavarro, A. P. (1993). *Concepções e Práticas de Professores de Matemática: Três Estudos de Caso*. Tese de Mestrado: Universidade de Lisboa.
- Cardoso, M. T. P. (2010). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?*. Tese de doutoramento (não publicada), Instituto da Criança da Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann/NCTM.
- Caseiro, A. & Ribeiro, C. M. (2012). Conhecimento de futuros professores dos Primeiros Anos: uma experiência com racionais. In R. Cadima, I. Pereira, H. Menino, I. S., Dias & H. Pinto (Eds.). *Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 393-400). Leiria: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria.

- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. London: RoutledgeFalmer.
- Cole, Y. A. (2009). *Mathematical knowledge for teaching: Transferability and use in the Ghanaian context: A pilot study*. Paper presented at the AERA Annual Meeting.
- Cole, Y. A. (2011). *Mathematical Knowledge for Teaching: Exploring its Transferability and Measurement in Ghana*. Unpublished Doctoral Dissertation, Ann Arbor, MI: University of Michigan.
- Cole, Y. A. (2012). Assessing elemental validity: The transfer and use of mathematical knowledge for teaching measures in Ghana. *ZDM*, 44 (3), 415-426.
- Coleman, J. S., Campbell, E. Q., Hobson, C. J., McPartland, F., Mood, A. M., Weinfeld, G. D., & York, R. L. (1966). *Equality of Educational Opportunity*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.
- Couto, A. (2015). *A Formação Inicial de Professores do Ensino Básico e a Geometria: Um estudo de dois casos*. Tese de Doutoramento (não publicada), Departamento de Ciências da Educação e do Património da Universidade Portucalense.
- Creswell, J. (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. London: Sage.
- Creswell, J. W., Plano Clark, V. L., Gutmann, M. L. & Hanson, W. E. (2003). Advanced mixed methods research designs. In A. Tashakkori and C. Teddlie (Eds), *Handbook on mixed methods in the behavioral and social sciences* (pp. 209-240). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Croossley, M. & Watson, K. (2003). *Comparative and international research in education: Globalization, context and difference*. London: Routledge.
- Curado, A. (2002). *Política de Avaliação de Professores em Portugal: um estudo de implementação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching: an Ongoing Investigation of the Mathematics that Teachers (Need to) Know. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (3) 293–319
- Dehaene, S. (1999). *The Number Sense*. London: Penguin Books.
- Delaney, S. (2008). *Adapting and using U. S. measures to study Irish teachers' Mathematical Knowledge for Teaching*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Michigan.

- Delaney, S. (2012). A validation study of the use of mathematical knowledge for teaching measures in Ireland. *ZDM* 44 (3), 427-441. The final publication is available at www.springerlink.com at <http://www.springerlink.com/content/u56175kt040q4578/>.
- Delaney, S., Ball, D., Hill, H., Schilling, S. & Zopf, D. (2008). "Mathematical knowledge for teaching": adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 171-197.
- Delgado, M. J. (1993). *Os Professores de Matemática e a Resolução de Problemas: Três Estudos de Caso*. Dissertação de Mestrado.: Universidade de Lisboa.
- Dewey, J. (1902). *The child and the curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London, UK: Croom Helm.
- Elmore, R. F. (2002). *Bridging the Gap between Standards and Achievement*. Washington, DC: Albert Shanker Institute.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (195-302). New York: Macmillan.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, 15 (1), 13-33.
- European Commission (2018). *Boosting teacher quality: pathways to effective policies*. Luxembourg: Publications Office of the European Union.
- Fauskanger, J. (2012). Analysis of psychometric properties as part of an interative adaptation process of MKT items for use in other countries. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 387-399. London: Springer.
- Feiman-Nemser, S. & Floden (1986). The cultures of teaching. In M. C. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3^a edição). New York: Macmillan.
- Fernandes, D. (2008). *Avaliação do desempenho docente: desafios, problemas e oportunidades*. Cacém: Texto Editores.
- Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). USA: NCTM.
- Freudenthal, H. (1973). The case of geometry. In H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task* (pp. 401-511). Netherlands: Kluwer the language of science.

- Gaia, S., Cesário, M. & Tancredi, R.(2007). Formação profissional e pessoal: a trajetória de vida de Shulman e suas contribuições para o campo educacional. *Revista Eletrônica de Educação*, 1(1), 142-155. Consultado em Setembro 9, 2019, <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/8/8>.
- Garden, R. L. Robert A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M., Mullis, I.V.S., Foy, P. & Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Goldhaber, D. D. & Brewer, D. J. (2001). Evaluating the evidence on teacher certification: A rejoinder. *Educational Evaluation & Policy Analysis*, 23, 78– 86.
- Gomes, A. & Ralha, E. (2005). Sobre o ensino superior da matemática: a geometria e os professores de 1.º ciclo. "Novos desafios, velhas deficiências". *Boletim da SPM* 52, pp. 77-100.
- Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores de 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria*. Tese de Doutoramento (não publicada), Instituto da Criança da Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 233-244.
- Gonçalves, F., Alves, M. & Machado, E. (2009). Formulação de objetivos individuais em contexto de avaliação de desempenho docente: um contributo prático-reflexivo para a sua operacionalização. *Elo* n.º 16, 215-226.
- Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F. (1989). Toward a conceptual framework for Mixed-Method Evaluation Designs. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 11 (3), 255-274.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
- Grossman, P. L. (2005). *Profesores de sustância: el conocimiento de la matéria para la enseñanza*. Obtido de Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado. Granada-España, ano 9, n.2.: <http://www.ugr.es/local/recfpro/rev92art5.pdf>
- Grossman, P. L., Wilson, S. M. & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds (Ed.), *The knowledge base for begining teachers* (pp. 23-36). New York: Pergamon.

- Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research*. In: Denzin N. & Lincoln Y. (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Haertel, E. (2004). Interpretive arguments and validity arguments for certification testing: Can we escape the need for psychological theory. *Measurement: Interdisciplinary research and perspectives*, 2 (3), 175-178.
- Haladyna, T. M. (2004). *Developing and validating multiple-choice test items* (3 ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hambleton, R. K. (2005). *Adapting educational and psychological tests for cross-cultural assessment*. Hillsdale, NJ: Lawrence S. Erlbaum Publishers.
- Hambleton, R. K., Swaminathan, H. & Rogers, H. J. (1991). *Fundamentals of item response theory*. Newbury Park, CA: Sage Publications.
- Hanna, G. (2014). The width of a proof. *PNA*, 9 (1), 29-39, Granada.
- Hanushek, E. (1992). The Trade-off between Child Quantity and Quality. *Journal of Political Economy*, Vol. 100, 84-117.
- Harris, D. (1989). Comparison of 1-, 2- and 3-parameter IRT models. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 8, 35-41.
- Haycock, K. (2006). *Improving achievement and closing gaps, Pre-K through college*. Retrieved December 10, 2006 from <http://www2.edtrust.org/EdTrust/Product+Catalog/recent+presentations>.
- Hershkowitz, R. & Vinner, S. (1984). Children's concepts in elementary geometry - a reflection of teacher's concepts? *Proceedings of PME 8*, 63-69. Australia Darlinghurst.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. H. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics*. (pp. 1-27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hill, H. C. & Ball, D. L. (2004). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal of Research in Mathematics Education*, Vol. 35, 330-351.
- Hill, H. C. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary Journal*, 105 (1), 11-30.

- Hill, H. C. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 371-406.
- Hill, H. C. (2007). Mathematical knowledge of middle school teachers: Implications for the No Child Left Behind policy initiative. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 29, 95-114.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26 (4), 430-511.
- Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371.
- Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary Journal*, 105 (1), 11-30.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. & Ball, D. L. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 111-155). Charlotte NC: Information Age Publishing.
- Hoover, M. M. (2016). Making Progress on Mathematical Knowledge for Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13 (1), 1-34.
- Howe, R. (2000). "Book Review: Knowing and Teaching Elementary Mathematics by Liping Ma,". *Humanistic Mathematics Network Journal*, 23 (10), 40-48.
- Jencks, C., Smith, M., Acland, H., Bane, M.S., Cohen, D., Gintis, H., Heyns, B. & Michelson, S. (1972). *Inequality: A Reassessment of the Effect of Family and Schooling in America*. New York: Basic Books.
- Jiménez, M. V. (1986). *El método experimental en la investigación psicológica*. Madrid: Universidad Complutense.
- Johnson, R. B. & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come. *Educational Researcher*, 33, 14-26.
<http://dx.doi.org/10.3102/0013189X033007014>
- Kane, M. (2001). Current concerns in validity theory. *Journal of Educational Measurement*, 38, 319-342.

- Kersting, N. B. (2010). Teachers' analyses of classroom video predict student learning of mathematics: further explorations of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education*, 61, 172-181.
- Kersting, N. B. (2012). Measuring usable knowledge teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal*, 49(3), 568-589.
- Kersting, N. G. (2012). Measuring Usable Knowledge: Teachers' Analyses of Mathematics Classroom Videos Predict Teaching Quality and Student Learning. *American Educational Research Journal*, Vol. 49, No. 3, 568–589.
- Klein, R. & Tirosh, D. (1997). Teachers pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers. In H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference*, 3, 144-152,
- Krauss, S., Baumert, J. & Blum, W. (2008). Secondary Mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: Validation of the COACTIV constructs. *ZDM: the international journal on Mathematics education*, 40 (5), 873–892.
- Kunter, M., Klusmann, U., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., et al. (2007). Linking aspects of teacher competence to their instruction: Results from COACTIV project. In M. Prenzel (Ed.), *Studies on the educational quality schools: The final report on the DFG priority programme* (pp. 32-52). Münster, Germany: Waxmann.
- Kwon, M. (2009). *Validating the adapted mathematical knowledge for teaching (MKT) measures in Korea*. Paper presented at the AERA 2009 Annual Meeting.
- Lampert, M. (2004). Response to Teaching Practice/Teacher Learning Practice Group. In J. Spillane, P. Cobb, & A. Sfar, *Investigating the Practice of School Improvement: Theory, Methodology and Relevance*. Italy: Bellagio.
- Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of educational psychology*, 77(3), 247-271.
- Likert, R. (1932). A Technique for the Measurement of Attitudes. In *Archives of Psychology* (pp. 1-55).
- Ma, L. (1999). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. B. Gutiérrez, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Ed. Sense Publishers.

- Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (3), 219-248.
- Marôco, J. (2014). *Análise Estatística com o SPSS Statistics (6.ª edição)*. Pêro Pinheiro: Report Number.
- McKinsey & Company (2007). *How the world's best performing school systems come out on top*. London: McKinsey & Co.
- Mertens, D. (1998). *Research Methods in Education and Psychology*. Integrating Diversity with Quantitative & Qualitative Approaches. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Ministério da Educação (2010). *Tarefas para 6.º ano de números racionais não negativos*. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos 2010/2011. Escola Superior de Educação de Viseu, Ministério de Educação.
- Ministério da Educação (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Monk, D. H. (1994). Subject Area Preparation of Secondary Mathematics and Science Teachers and Student Achievement. *Economics of Education Review*, 13 (2), 125-145.
- Morais, J. (2009). A avaliação do desempenho dos docentes - uma ferramenta ao serviço da gestão. *Revista Elo* n.º 16, 215-226.
- Morgan, D. L. (1998). Practical strategies for combining qualitative and quantitative methods: applications to health research. *Qual. Health Res.* 3: 362–376.
- Morse, J. M. (1991). Approaches to qualitative-quantitative methodological triangulation. *Nurs. Res.* 40: 120–123.
- Morse, J. M. (2003). Principles of mixed methods and multimethod research design. In A. Tashakkori & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods insocial and behavioral research (pp. 189-208)*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Mosvold, R., Fauskanger, J., Jakobsen, A. & Melhus, K. F. (2009). Translating test items into Norwegian - without getting lost in translation? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 14 (4), 9-31.
- Mosvold, R., Jakobsen, A., Fauskanger, J. & Bjuland, R. (2012). Analysis for psychometric properties as part of na interative adaptation process of MKT items for use in other countries. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 44, 387-399.

- Motoko, A., Letendre, G. K. & Scribner, J. P. (2007). Teacher Quality, Opportunity Gap, and National Achievement in 46 Countries. *Educational Researcher*, Vol. 36, 369-387.
- Mullis, I. V., Martin, Ruddock, O'Sullivan, Arora & Erberber (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- National Council for Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.
- National Council for Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Neym B., Konstantopoulos, S. & Hedges, L. V. (2004). How Large are Teacher Effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, Vol. 26, 237-257.
- Ng, D. (2011). Using the MKT measures to reveal Indonesian teachers' mathematical knowledge: challenges and potentials. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 1–13.
- Osterlind, S. J. (1997). *Constructing test items: multiple-choice, constructed-response, performance and other formats* (2 ed.). Hingham: Kluwer Academic Publishers.
- Pacheco, J. (2009). Para uma sustentabilidade avaliativa do professor. *Revista Elo* n° 16, 43-50.
- Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational studies in Mathematics*, 575-593.
- Pasquali, L. (2003). *Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação*. Petrópolis, RJ: Vozes.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods, 3rd ed.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Peña, E. D. (2007). Lost in translation: methodological considerations in cross-cultural research. *Child Development*, 78 (4), 1255-1264.
- Pereira, M. (2010). Desempenho educativo e igualdade de oportunidades em Portugal e na Europa: o papel da escola e a influência da família. In B. d. Portugal, *Boletim Económico* (pp. 25-48). Lisboa: Security Print.
- Piaget, J. (1964). *La psychologie de l' intelligence* . Paris: A. Colin.

- Pinto, H. & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. Da *Investigação às Práticas*, 3 (1), pp. 80-98.
- Poincaré, H. (1927). *Science et Méthode*. Paris: Ernest Flammarion, Editeur.
- Ponte, J. P. (1992). Conceções dos professores de matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P. (1993). *Viver a Inovação, Viver a Escola*. Projeto DIF e APM.
- Ponte, J. P. (1994a). O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Educação e Matemática*, n.º 31, pp. 9-12 e 20.
- Ponte, J. P. (1994b). Mathematics teachers' professional knowledge. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.
- Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. *Conferência plenária apresenta no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat 98* (pp. 27-44). Guimarães: APM.
- Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In G. A. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 461-494). UK: Sense Publishers.
- Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L. C., Canavarro, A. P. & Silva, A. (1993). *Viver a inovação, viver a escola*. Lisboa: Projecto DIF e APM.
- Postman, N. & Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: Dell Publishing Co.
- Postman, N. (2002). *O fim da educação: redefinindo o valor da escola*. Rio de Janeiro: Graphia.
- Ralha, S. (2015). Crescer com arte, porquê? (Contributos da arte em geral e da música em particular na educação, para além de outros assuntos). In B. d. Gambozinos, *Bando dos Gambozinos. Tema organizador 2014/2015: Dos Clássicos*. (pp. 25-33). Porto.
- Ribeiro, C. M. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema*, 34, 1-26.
- Rowland, T. & Turner, F. (2007). Developing and Using the 'Knowledge Quartet': A Framework for the Observation of Mathematics Teaching. *The Mathematics Educator*, 10 (1), 107-123. University of Cambridge, UK

- Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 273-298). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers
- Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2004). Reflecting on prospective elementary teachers' mathematics content knowledge: the case of Laura. In M. J. Høines & A. B. Fugelstad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 4, (pp. 121-128). Bergen, Norway
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255-281.
- Saderholm, J. R. (2010). Validation of the Diagnostic Teacher Assessment of Mathematics and Science (DTAMS). *School Science and Mathematics*, 110(4), 180-192.
- Sanders, W.L. & Rivers, J.C. (1996). *Cumulative and residual effects of teachers on future student academic achievement*. Research Progress Report. Knoxville: University of Tennessee Value-Added Research and Assessment Center.
- Schilling, S. G. & Hill, H. C. (2007). Assessing measures of mathematical knowledge for teaching: A validity argument approach. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5, 118-128.
- Schmidt, W. H., Blömeke, S., Tatto, M. T., Hsieh, F.-H. et al. (2011). *Teacher education matters: A study of middle school mathematics teacher preparation in six countries*. New York: Teachers College Press.
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.
- Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. Washington, DC.: American Educational Research Association.
- Schön, D. A. (1991) Concluding comments. In D. A. Schön (Ed.), *The Reflective Turn: case studies in and on educational practice* (pp. 343-359). New York: Teachers College Press.
- Serrazina, M. L. (2014). O professor que ensina Matemática e a sua formação: uma experiência em Portugal. *Educação & Realidade*, v. 39, n. 4, 1051-1069.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22., 1-36.
- Sherin, M. G., Sherin, B. L. & Madanes, R. (2000). Exploring diverse accounts of teacher knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 357-375.
- Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching*. Educational Researcher.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.
- Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. In M. Wittrock (Eds.), *La investigación de la enseñanza* / Barcelona, Buenos Aires - México: Paidós.
- Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Professorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*. v.9, n.2, Granada, España, 1-30.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Londres: The Falmer Press.
- Silva, J. (2013). O ensino da Matemática em Singapura. *Educação e Matemática*, 33-36.
- Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: a focus on relationships. In J. H. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics*. (pp. 1-27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for research in mathematics education*, 24 (3), 233-254.
- Singh, J. (1995). Measurement issues in cross-national research. *Journal of International Business Studies*, 26, 597-619.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* 77, 20-26.
- Skemp, R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge.
- Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and development of teachers. In F. K. Lester Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-2234). United States of America: NCTM: National Council of Teachers of Mathematics.

- Stake, R. (2000). Case Studies. In Denzin, N., K. & Lincoln, Y. (Eds.). *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage.
- Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.) *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks. Sage Publications.
- Stylianides, A. J. (2011). The cultural dimension of teachers' mathematical dimension. In T. R. (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 179-191). Londres: Springer.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and community. *Educational Mathematics* 12, 151-169.
- Tashakkori, A. & Creswell, J. W. (2007). Exploring the nature of research questions in mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, 1, 207-211.
- Tashakkori, A. & Teddlie, C. (2003). The past and future of mixed methods research: From data triangulation to mixed model designs. In A. Tashakkori & C. Teddlie (Eds.), *Handbook on mixed methods in the behavioral and social sciences* (671-701). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Tatto, M. T., Schille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L. et al. (2012). *Police, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam, the Netherlands: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)
- Tatto, M. T., Schille, J., Senk, S., Ingvarson, L. & Peck, R. A. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. Michigan State University: East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education.
- Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 76 (2), 141-164.
- Teddlie, C. & Tashakkori, A. (2009). *Foundations of Mixed Methods Research. Integrating Quantitative and Qualitative Approaches in the Social and Behavioral Sciences*. United States of America: SAGE.

- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A theory of Mathematics education*. Orlando: Academic Press.
- Vinner, D. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
- Viseu, F. M., Menezes, L., Fernandes, J. A., Gomes, A. & Martins, P. M. (2017). Concepções de Professores do Ensino Básico sobre a Prova Matemática: influência da experiência profissional. *Bolema, Rio Claro*, v. 31, n. 57, 430-453.
- Wilson, S., Shulman, L. & Richert, A. (1987). "150 different ways of knowing": Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 104-123). Eastbourne, UK: Cassell.
- Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & S. D. (Ed.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-336). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yee, L. & Hoe, L. (2009). *Teaching Primary School Mathematics - A Resource Book*. McGrawHill.
- Zimowski, M. F., Muraki, E., Mislevy, R. J. & Bock, R. D. (2003). *Bilog-MG 3.0; Item analysis and test scoring with binary logistic models for multiple groups*. Mooresville: IN: Scientific Software International.

Anexos

Anexo 1 – Caracterização das questões de escolha múltipla construídas pelo LMT e estudadas no presente trabalho, por categoria do MKT.

Categoria do MKT	Questões
Common Content Knowledge (CCK)	1a, 1b, 1c, 1d, 14, 15, 18a, 18b, 18c, 18d, 18e, 19a, 19b, 19c, 19d, 23
Specialized Content Knowledge (SCK)	2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12a, 12b, 12c, 12d, 13a, 13b, 13c, 13d, 16a, 16b, 16c, 16d, 17, 20, 21a, 21b, 21c, 21d, 21e, 21f, 22
Knowledge Student Content (KSC)	8a, 8b, 8c, 24a, 24b, 24c, 24d

Anexo 2 – Conteúdos Matemáticos de “Números e Operações” e de “Geometria e Medida” avaliados nas questões do LMT selecionadas organizadas por anos de escolaridade, de acordo com o currículo português.

	1.º ano	2.º ano	3.º ano	4.º ano	5.º ano	6.º ano
Números, Conceitos e Operações						
Números Naturais						
Correspondências um a um e comparação do número de elementos de dois conjuntos;	X					
Contagens de até vinte objetos;	X					
O conjunto vazio e o número zero;	X					
Números naturais até 100;	X					
Contagens progressivas e regressivas.	X					
Numerais ordinais até centésimo;			X			
Números naturais até um milhão;			X			
Contagens progressivas e regressivas com saltos fixos;			X			
Numeração romana.			X			
Extensão das regras de construção dos numerais decimais para classes de grandeza indefinida.				X		
				X		
Diferentes significados do termo “bilhão”.						
CrITÉrios de divisibilidade por 3, 4 e 9.					X	
					3	
Determinação do máximo divisor comum de dois números naturais por inspeção dos divisores de cada um deles;					X	
Algoritmo de Euclides;					X	
Números primos entre si;					X	
Números obtidos por divisão de dois dados números pelo respetivo máximo divisor comum;					X	
Irreduzibilidade das frações de termos primos entre si;					X	
Determinação do mínimo múltiplo comum de dois números naturais por inspeção dos múltiplos de cada um deles;					X	
Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números;					X	
Problemas envolvendo o cálculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum de dois números.					X	

Números primos;						X
Crivo de Eratóstenes;						X
Teorema fundamental da aritmética e aplicações.						X
Numerais ordinais até vigésimo;		X				
Números naturais até 1000;		X				
Contagens de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10 e de 100 em 100;		X				
Números pares e número ímpares; identificação através do algarismo das unidades.		X				

Sistema de Numeração Decimal:

Ordens decimais: unidades e dezenas;	X					
Valor posicional dos algarismos;	X					
Ordem natural; os símbolos «»;	X					
Comparação e ordenação de números até 100.	X					
Ordens decimais: unidades, dezenas e centenas;		X				
Valor posicional dos algarismos;		X				
Comparação e ordenação de números até 1000.		X				
Leitura por classes e por ordens e decomposição decimal de números até um milhão;			X			
Comparação de números até um milhão; arredondamentos.			X			

Adição de números naturais:

Adições cuja soma seja inferior a 100 por cálculo mental, métodos informais e tirando partido do sistema decimal de posição;		X				
Os símbolos «+» e «=» e os termos «parcela» e «soma»;		X				
Decomposição de números até 100 em somas; problemas de um passo envolvendo situações de juntar e acrescentar.		X				

Subtração de números naturais:

Subtrações envolvendo números naturais até por métodos informais;		X				
Relação entre a subtração e a adição;		X				
Subtrações de números até utilizando contagens progressivas e regressivas de no máximo nove unidades ou tirando partido do sistema de numeração decimal de posição;		X				
O símbolo «-» e os termos «aditivo», «subtrativo» e «diferença»;		X				

Problemas de um passo envolvendo situações de retirar, comparar ou completar.		X				
Adição e Subtração de números naturais:						
Cálculo mental: somas de números de um algarismo, diferenças de números até 20, adições e subtrações de 10 e 100 a números de três algarismos; Adições cuja soma seja inferior a 1000; Subtrações de números até 1000; Problemas de um ou dois passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, comparar ou completar.		X X X				
Algoritmos da adição e da subtração envolvendo números até um milhão.			X			
Problemas de até três passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, comparar ou completar.			X			
Multiplicação de números naturais:						
Sentido aditivo e combinatório; o símbolo «x» e os termos «fator» e «produto»; Produto por 1 e por 0 ; tabuadas do 2, 3, 4, 5, 6 e 10; Os termos «dobro», «triplo», «quádruplo» e «quintuplo»; Problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.						
Tabuadas do 7, 8 e 9;			X			
Múltiplo de um número;			X			
			3			
Cálculo mental: produto por 10, 100, 1000, etc.;			X			
Produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;			X			
Algoritmo da multiplicação envolvendo números até um milhão;			X			
Critério de reconhecimento dos múltiplos de 2, 5 e 10;			X			
Problemas de até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.			X			
Divisão inteira:						
Divisão exata por métodos informais;		X				
		2.				

Relação entre a divisão exata e a multiplicação: dividendo, divisor e quociente; o símbolo «:»;		X				
Os termos «metade», «terça parte», «quarta parte» e «quinta parte»;		X				
Problemas de um passo envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento		X				
Divisão inteira por métodos informais;			X			
Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto; cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10-.			X			
			3			
Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.			X			
Problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.			X			
			5			
Algoritmo da divisão inteira;				X		
				6		
Determinação dos divisores de um número natural até 100;				X		
Problemas de vários passos envolvendo números naturais e as quatro operações.				X		

Números racionais não negativos

Frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ como medidas de comprimentos e de outras grandezas;		X				
Representação dos números naturais e das frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$ numa reta numérica.		X				
Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas;			X			
Numerais fracionários;			X			
Representação de frações na reta numérica;			X			
			10			
Frações equivalentes e noção de número racional;			X			
			4			
Ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador, ou utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas;			X			
Frações próprias.			X			

Construção de frações equivalentes por multiplicação dos termos por um mesmo fator.				X		
Simplificação de frações de termos pertencentes à tabuada do 2 e do 5 ou ambos múltiplos de 10.				X		
Simplificação de frações.					X	
					4	
Frações irredutíveis.					X	
Redução de duas frações ao mesmo denominador.					X	
Ordenação de números racionais representados por frações;					X	
Adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais não negativos representados na forma de fração;					X	1d; 11
Representação de números racionais na forma de numerais mistos; adição e subtração de números racionais representados por numerais mistos;					X	
Aproximações e arredondamentos de números racionais;					X	
Problemas de vários passos envolvendo números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos.					X	14
Números racionais negativos;					X	
Simétrico e valor absoluto de um número racional;						
Semirreta de sentido positivo associada a um número; ordenação de números racionais;						
Conjunto dos números inteiros relativos e conjunto dos números racionais.						

Adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações:

Adição e subtração na reta numérica por justaposição retilínea de segmentos de reta;				X		
Produto de um número natural por um número racional representado por uma fração unitária;				X		
Adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador;				X		
Decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria.				X		
Representação decimal de números racionais não negativos: frações decimais;				X		
Representação na forma de dízimas finitas;				X		
Redução de frações decimais ao mesmo denominador;				X		
Adição de números racionais representados por frações decimais com denominadores até mil;				X		

Algoritmos para a adição e para a subtração de números racionais representados por dízimas finitas;			X			
Decomposição decimal de um número racional representado na forma de uma dízima finita.			X			
Segmentos de reta orientados; Orientação positiva e negativa de segmentos orientados da reta numérica;						X
Adição de números racionais; Definição e propriedades;						X
Subtração e soma algébrica de números racionais;						1a; 1c; 9
Definição e propriedades;						X
Módulo da diferença de dois números como medida da distância entre os pontos que representam esses números na reta numérica.						X

Multiplicação e Divisão de números racionais não negativos:

Multiplicação e divisão de números racionais por naturais e por racionais na forma de fração unitária;				X		
Produto e quociente de um número representado por uma dízima por 10, 100, 1000, 0,1, 0,001, 0,0001;				10		
Utilização do algoritmo da divisão inteira para obter aproximações na forma de dízima de números racionais;				X		
Multiplicação de números racionais representados por dízimas finitas, utilizando o algoritmo.				1b		
				X		
				X		
				15		
Utilização do algoritmo da divisão inteira para obter aproximações na forma de dízima de quocientes de números racionais;				X		
Problemas de vários passos envolvendo números racionais, aproximações de números racionais e as quatro operações.				X		
				12a, 12b, 12c, 12d, 13a, 13b, 13c, 13d.		

	1.º ano	2.º ano	3.º ano	4.º ano	5.º ano	6.º ano
--	------------	------------	------------	------------	------------	------------

Geometria e Medida

Localização e orientação no espaço

Relações de posição e alinhamentos de objetos e pontos;	X					
Comparação de distâncias entre pares de objetos e pontos;	X					
Figuras geometricamente iguais.	X					
Direções no espaço relativamente a um observador;		X				
Voltas inteiras, meias voltas, quartos de volta, viragens à direita e à esquerda;		X				
Itinerários em grelhas quadriculadas.		X				
Segmentos de reta paralelos e perpendiculares em grelhas quadriculadas;			X			
Direções perpendiculares e quartos de volta;			X			
Direções horizontais e verticais;			X			
Coordenadas em grelhas quadriculadas.			X			
Ângulo formado por duas direções; vértice de um ângulo;				X		
Ângulos com a mesma amplitude;				X		
A meia volta e o quarto de volta associados a ângulos.				X		

Figuras Geométricas

Partes retilíneas de objetos e desenhos; partes planas de objetos;	X					
Segmentos de reta e extremos de um segmento de reta;	X					
Comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta;	X					
Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respectivos lados e vértices, circunferência, círculo;	X 17, 18a, 18b					
Sólidos: cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro e esfera.	X					
Retas e semirretas;		X				
Polígonos e linhas poligonais;		X				
Parte interna e externa de linhas planas fechadas;		19b				
Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos;						
Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango);						
Pentágonos e hexágonos;						
Sólidos geométricos – poliedros e não poliedros; pirâmides e cones; vértice, aresta e face;		X 18c, 21				
Atributos geométricos e não geométricos de um objeto;		X				
Construção de figuras com eixo de simetria.		X				

Circunferência, círculo, superfície esférica e esfera; centro, raio e diâmetro; Identificação de eixos de simetria em figuras planas. Ângulos convexos e ângulos côncavos; ângulos verticalmente opostos; ângulos nulos, rasos e giros; critério de igualdade de ângulos; ângulos adjacentes; comparação das amplitudes de ângulos; ângulos retos, agudos e obtusos. Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas; retas não paralelas que não se intersectam; retângulos como quadriláteros de ângulos retos; polígonos regulares; polígonos geometricamente iguais; planos paralelos; paralelepípedos retângulos; dimensões; prismas retos; planificações de cubos, paralelepípedos e prismas retos; pavimentações do plano. Ângulo ao centro e setor circular; Polígonos inscritos numa circunferência; Retas e segmentos de reta tangentes a uma circunferência; Polígonos circunscritos a uma circunferência; Apótema de um polígono.			X			
			X		X	
					X	
						X
						19d

Propriedades Geométricas

Ângulos, paralelismo e perpendicularidade: Ângulo igual à soma de outros dois; definição e construção com régua e compasso; Bissetriz de um ângulo; construção com régua e compasso; Ângulos complementares e suplementares; Igualdade de ângulos verticalmente opostos; Semirretas diretamente e inversamente paralelas; Ângulos correspondentes e paralelismo; Ângulos internos, externos e pares de ângulos alternos internos e alternos externos determinados por uma secante num par de retas concorrentes; relação com o paralelismo; Ângulos de lados diretamente e inversamente paralelos; pares de ângulos de lados perpendiculares.					X	
Triângulos e quadriláteros Ângulos internos, externos e adjacentes a um lado de um polígono; Ângulos de um triângulo: soma dos ângulos internos, relação de um ângulo externo com os internos não adjacentes e soma de três ângulos externos com vértices distintos; Triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos; hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo; Ângulos internos de triângulos obtusângulos e retângulos; Paralelogramos; ângulos opostos e adjacentes de um paralelogramo; CrITÉRIOS de igualdade de triângulos: critérios LLL,						

LAL e ALA; construção de triângulos dados os comprimentos de lados e/ou as amplitudes de ângulos internos; Relações entre lados e ângulos num triângulo ou em triângulos iguais; Igualdade dos lados opostos de um paralelogramo; Desigualdade triangular; Pé da perpendicular traçada de um ponto para uma reta e, num dado plano, perpendicular a uma reta num ponto; Distância de um ponto a uma reta e entre retas paralelas; altura de um triângulo e de um paralelogramo.						
Problemas Problemas envolvendo as noções de paralelismo, perpendicularidade, ângulos e triângulos.					X	
Sólidos geométricos e propriedades Prismas; prismas oblíquos e regulares; Pirâmides; Bases, faces laterais e vértices de prismas e pirâmides; Pirâmides regulares; Cilindros; bases, eixo, geratrizes e superfície lateral de um cilindro; Cones; base, vértice, eixo, geratrizes e superfície lateral de um cone; Cilindros e cones retos; Relação entre o número de arestas e de vértices de um prisma (ou pirâmide) e da respetiva base; Poliedros convexos; Relação de Euler; Planificações de sólidos; Problemas envolvendo sólidos geométricos e respetivas planificações.						X

Medida

Distâncias e comprimentos

Comparação de medidas de comprimento em dada unidade; Subunidades de comprimento: um meio, um terço, um quarto, um quinto, um décimo, um centésimo e um milésimo da unidade; Unidades do sistema métrico; Perímetro de um polígono.	X	X				
Unidades de medida de comprimento do sistema métrico; conversões.			X			

Área

Figuras equidecomponíveis e figuras equivalentes.	X					
Medidas de área em unidades não convencionais.	22	X				
Medições de áreas em unidades quadradas; Fórmula para a área do retângulo de lados de			X			

medida inteira. Unidades de área do sistema métrico; Medições de áreas em unidades do sistema métrico; conversões; Unidades de medida agrárias; conversões; Determinação, numa dada unidade do sistema métrico, de áreas de retângulos com lados de medidas exprimíveis em números inteiros, numa subunidade. Área de retângulos de lados de medida racional; Fórmulas para a área de paralelogramos e triângulos; Problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas Fórmula para o perímetro do círculo; aproximação por perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos; Fórmula para a área de polígonos regulares; Fórmula para a área e do círculo; aproximação por áreas de polígonos regulares inscritos; Problemas envolvendo o cálculo de perímetros e áreas de polígonos e círculos.				X 24	X 22	X 18d
--	--	--	--	---------	---------	----------

Volume e capacidade

Sólidos equidecomponíveis em cubos de arestas iguais; Medidas de volume em unidades não convencionais; Ordenação de capacidades de recipientes; Medidas de capacidades em unidades não convencionais; O litro como unidade de medida de capacidade; Comparação de volumes de objetos por imersão em líquido contido num recipiente. Unidades de capacidade do sistema métrico; conversões; Medições de capacidades em unidades do sistema métrico. Medições de volumes em unidades cúbicas; Fórmula para o volume do paralelepípedo retângulo de arestas de medida inteira; Unidades de volume do sistema métrico; conversões; Relação entre o decímetro cúbico e o litro. Fórmula para o volume do paralelepípedo retângulo com dimensões de medida racional; Fórmulas para o volume do prisma reto e do cilindro reto; Problemas envolvendo o cálculo de volumes de sólidos.		X	X	X		X 20
---	--	---	---	---	--	---------

Tempo

Utilização de fenómenos cíclicos naturais para contar o tempo; Dias, semanas meses e anos; Designação dos dias da semana e dos meses do	X					
--	---	--	--	--	--	--

ano.						
Instrumentos de medida do tempo; A hora; Relógios de ponteiros e a medida do tempo em horas, meias horas e quartos de hora; Calendários e horários. Minutos e segundos; leitura do tempo em relógios de ponteiros; Conversões de medidas de tempo; Adição e subtração de medidas de tempo.		X				
			X			

Massa

Comparação de massas em balanças de dois pratos; Pesagens em unidades não convencionais; O quilograma como unidade de medida de massa. Unidades de massa do sistema métrico; conversões; Pesagens em unidades do sistema métrico; Relação entre litro e quilograma.		X				
			X			

Dinheiro

Moedas e notas da área do Euro; Contagens de dinheiro envolvendo números até 100, apenas em euros ou apenas em cêntimos. Contagens de dinheiro em euros e cêntimos envolvendo números até 1000. Adição e subtração de quantias de dinheiro.	X					
		X				
			X			

Problemas

Problemas de um ou dois passos envolvendo medidas de diferentes grandezas.		X				
Problemas de até três passos envolvendo medidas de diferentes grandezas.			X			
Problemas de vários passos relacionando medidas de diferentes grandezas.				X		
Amplitude de ângulos Medidas de amplitudes de ângulos; O grau como unidade de medida de amplitude; minutos e segundos de grau; Utilização do transferidor para medir amplitudes de ângulos e para construir ângulos de uma dada medida de amplitude; Problemas envolvendo adições, subtrações e conversões de medidas de amplitude expressas em forma complexa e incompleta.					X	
Isometrias do plano Reflexão central como isometria; invariância da amplitude de ângulo; Mediatriz de um segmento de reta; construção da mediatriz utilizando régua e compasso; Reflexão axial como isometria; invariância da amplitude de ângulo; eixos de simetria; a bissetriz de um ângulo como eixo de simetria;						X 23

Rotação de sentido positivo ou negativo como isometria; invariância da amplitude de ângulo; Imagem de um segmento de reta por uma isometria; Construção de imagens de figuras planas por reflexões centrais e axiais e por rotações; Simetrias de rotação e de reflexão; Problemas envolvendo as propriedades das isometrias e utilizando raciocínio dedutivo; Problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial.						
--	--	--	--	--	--	--

Anexo 3 – Carta aos professores participantes do estudo.

Caro Professor(a),

Vimos por este meio solicitar a sua colaboração no preenchimento deste questionário que se enquadra num projeto de investigação a apresentar à Universidade do Minho para a obtenção do grau de doutor em Estudos da Criança, especialidade Matemática Elementar. A tese de doutoramento está a ser orientada pela Doutora Alexandra Gomes, Professora e Vice-Presidente do Instituto de Educação da Universidade do Minho.

A sua colaboração nesta investigação, cuja finalidade é validar um instrumento de medição do “Conhecimento Matemático para se Ensinar”, construído por investigadores da Universidade de Michigan no âmbito do projeto *Learning Mathematics for Teaching*, para o contexto português e avaliar este conhecimento, com a pretensão de contribuir para uma melhor compreensão de o quê que os professores do 1.º e do 2.º ciclos precisam de saber de matemática para ensinarem os seus alunos a aprender esta disciplina, é essencial.

O presente questionário é anónimo e confidencial, pelo que lhe solicitamos a máxima sinceridade nas respostas. Comprometemo-nos, por razões de ética e deontologia profissionais, a fazer uso dos dados recolhidos somente para fins da presente investigação educacional, não os divulgando para quaisquer outros fins.

Sabemos que o preenchimento do questionário lhe vai ocupar algum tempo, contudo solicitamos-lhe este pequeno esforço e agradecemos, desde já, a sua preciosa colaboração.

Agradecemos também total sigilo relativamente ao conteúdo e à forma de todas as questões que compõem o questionário, uma vez que também nos comprometemos com o *Learning Mathematics for Teaching* à não reprodução deste instrumento.

MUITO OBRIGADA PELA COLABORAÇÃO!

Catarina Vasconcelos Gonçalves

catarinavasconcelosgoncalves@gmail.com

917871805

Anexo 4 – Guião da entrevista semi-estruturada realizada aos professores entrevistados.

1. Dados pessoais, profissionais e de ensino

Género, idade, habilitações académicas, habilitações profissionais, anos de serviço, anos de serviço de Matemática no 1.º e 2.º ciclos, níveis de ensino que lecciona, trabalhos de investigação na área de educação matemática, participação em grupo(s) de trabalho relacionado(s) com a matemática e/ ou com o seu ensino, outras informações que lhe pareçam pertinentes na sua apresentação pessoal, profissional de docência e/ou de investigação.

2. O questionário, como um todo, parece-lhe medir o conhecimento matemático necessário para se ensinar, nos primeiros anos, a disciplina de Matemática em Portugal?
3. Considera que as questões avaliam diferentes tipos de conhecimento necessários ao ensino de Matemática?
4. Em particular, entende que alguma ou algumas das questões não caracterizam o conhecimento necessário que o professor deve ter para ensinar matemática em Portugal? Qual ou quais? Porquê?
5. As questões parecem-lhe adequadas ao contexto português? Se há alguma que lhe pareça descontextualizada, por favor, indique a questão e se lhe parecer pertinente escreva um comentário.
6. O que considera sobre a estrutura, o formato das questões, por exemplo, em comparação com outros testes aos quais já tenha respondido?
7. Nos domínios da Matemática presentes no questionário, a estrutura e a dificuldade das questões parecem-lhe adequadas ao que é exigido que um professor português saiba para ensinar matemática nos primeiros anos de aprendizagem?
8. É avaliado neste questionário algum conteúdo matemático que lhe parece descontextualizado no ensino em Portugal?
9. Caso tenha mais comentários ou reflexões sobre o questionário, por favor, explicita-os.

Anexo 5 – Os parâmetros “slope” e “grau de dificuldade”, obtidos em estudos estatísticos nos EUA e nesta investigação com professores portugueses.

Questão	Slope obtido em estudos estatísticos nos EUA	Grau de dificuldade (d) obtido em estudos estatísticos nos EUA	Grau de dificuldade (D) neste estudo com professores portugueses
1 a	1,014	-1,444	0,65
1b	0,589	1,185	0,77
1c	0,456	-0,738	0,77
1d	0,488	0,701	0,64
2	0,440	2,043	0,36
3	0,692	1,185	0,31
4	0,863	0,617	0,18
5	0,710	-0,854	0,57
6	0,630	-1,157	0,48
7	0,650	1,462	0,38
8 a	1,086	-0,808	0,33
8b	1,119	-0,957	0,56
8c	0,536	1,542	0,01
9	0,693	0,556	0,41
10	0,839	-0,360	0,64
11	0,432	2,343	0,23
12 a	0,438	-0,752	0,56
12b	0,338	1,620	0,53
12c	0,494	-0,807	0,71
12d	0,312	-1,150	0,30
13 a	0,783	-0,501	0,69
13b	0,561	-0,501	0,74
13c	0,421	-1,076	0,56
13d	0,735	-0,533	0,38
14	0,860	-0,711	0,75
15	0,465	0,708	0,44
16 a	0,524	1,497	0,38
16b	0,665	-0,098	0,57
16c	0,568	0,812	0,46

Questão	Slope obtido em estudos estatísticos nos EUA	Grau de dificuldade (d) obtido em estudos estatísticos nos EUA	Grau de dificuldade (D) neste estudo com professores portugueses
17	0,838	-0,363	0,55
18 a	0,922	-0,690	0,77
18b	0,724	0,378	0,31
18c	0,602	-0,630	0,84
18d	0,874	0,125	0,57
18e	0,738	0,177	0,56
19 a	0,781	-0,072	0,53
19b	1,076	-1,713	0,84
19c	0,816	-1,515	0,79
19d	0,659	-1,271	0,77
20	0,509	1,228	0,57
21 a	0,755	-1,876	0,84
21b	0,993	-1,041	0,64
21c	0,942	-0,757	0,56
21d	0,866	-0,674	0,61
21e	0,417	-2,262	0,87
21f	0,812	-0,736	0,62
22	1,019	0,001	0,59
23	0,508	-0,920	0,62
24a	0,534	-0,424	0,43
24b	0,717	-0,891	0,72
24c	0,736	0,004	0,51
24d	0,737	0,119	0,56