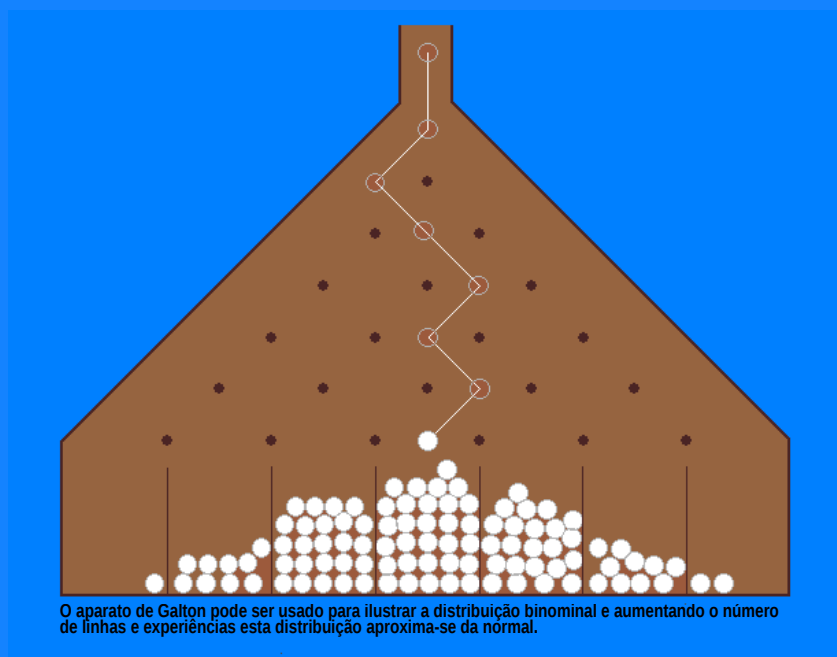


ACTAS DO II ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA



Organizadores

*José António Fernandes
Floriano Viseu
Maria Helena Martinho
Paulo Ferreira Correia*

**Centro de Investigação em Educação (CIEd)
Instituto de Educação e Psicologia
Universidade do Minho**

2009

FICHA TÉCNICA

Título

ACTAS DO II ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA

Organizadores

José António Fernandes
Florianio Viseu
Maria Helena Martinho
Paulo Ferreira Correia

Depósito Legal

287978/09

ISBN

978-972-8746-67-4

Centro de Investigação em Educação (CIEd)
Instituto de Educação e Psicologia
Universidade do Minho
4710-057 Braga

300 Exemplares

Janeiro de 2009

Apoios

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Centro de Investigação em Educação (CIEd)

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	4
ESTATÍSTICA	
CONFERÊNCIAS	
Retos para la Formación Estadística de los Profesores	7
<i>Carmen Batanero, Universidad de Granada</i>	
Reflexões em Torno do Ensino e da Aprendizagem da Estatística: O exemplo dos gráficos	22
<i>Carolina Carvalho, Universidade de Lisboa</i>	
COMUNICAÇÕES	
Comparación de Distribuciones: ¿Una actividad sencilla para los futuros profesores?	37
<i>Blanca Ruiz, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores</i> <i>Pedro Arteaga & Carmen Batanero, Universidad de Granada</i>	
Ensino e Avaliação das Aprendizagens em Estatística	52
<i>José António Fernandes & Maria Palmira Alves, Universidade do Minho</i> <i>Eusébio André Machado, Escola Secundária de Tomaz Pelayo</i> <i>Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos</i> <i>Marília André do Rosário, Escola Secundária de Tomaz Pelayo</i>	
Os Projectos e o Processo de Ensino-Aprendizagem da Estatística	72
<i>Rui Pimenta, Instituto Politécnico do Porto</i>	
Literacia Estatística na Escola, Cidadania na Vida	91
<i>Maria Manuel da Silva Nascimento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro</i>	
PROBABILIDADES	
CONFERÊNCIA	
Sesgos en Probabilidad Condicional e Implicaciones para la Enseñanza	100
<i>Carmen Díaz, Universidad de Huelva</i>	
COMUNICAÇÃO	
Probabilidades e Problemas de Contagem: Arranjos ou combinações?	117
<i>Fernando Coelho, Instituto Politécnico de Coimbra</i> <i>José António Fernandes, Universidade do Minho</i>	
COMBINATÓRIA	
COMUNICAÇÕES	
Ensino e Aprendizagem das Operações Combinatórias no 12º Ano de Escolaridade	129
<i>Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos</i> <i>José António Fernandes, Universidade do Minho</i> <i>Fernando Almeida, Escola Secundária/3 de Oliveira do Douro</i>	
Palpites Efectuados por Alunos do 9º Ano de Escolaridade em Combinatória	153
<i>Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos</i>	
O Trabalho Colaborativo de Duas Professoras de Matemática no Ensino dos Arranjos Completos ..	176
<i>Bárbara do Alvar de Carvalho, Escola Secundária/3 Camilo Castelo Branco</i>	

INTRODUÇÃO

A investigação em Educação Estatística (incluindo os temas de Probabilidades, Estatística e Combinatória), apesar de se ter iniciado mais tarde do que a investigação educacional em outros ramos da matemática (e.g., números, álgebra e geometria), actualmente tem-se desenvolvido consideravelmente, em consequência da integração das suas temáticas nos planos curriculares do ensino não superior, da criação de comunidades profissionais e científicas especialmente interessadas no ensino da Estatística, de que é exemplo paradigmático a International Association for Statistical Education (IASE), integrada no International Statistical Institute (ISI), e de muitas conferências, entre as quais se destaca a International Conference on Teaching Statistics (ICOTS), encontros e publicações no seu âmbito.

O crescente desenvolvimento da Estatística e da sua presença na sociedade e na vida das pessoas faz prever que também o interesse pela investigação em Educação Estatística aumentará certamente no futuro imediato. A este respeito, por vezes, o século XX é referido como tendo sido o século da Estatística e que o século XXI será o século da Educação Estatística.

A importância da Estatística pode ser vista na sua presença nas várias facetas da vida das pessoas (na vida cívica, na vida do dia-a-dia e no emprego), nas empresas e organizações sociais e no papel relevante que lhe é atribuído ao nível do Estado. Os cidadãos são continuamente confrontados com informação estatística disponibilizada através dos mais variados meios, em que se salientam os meios de comunicação social (jornais, revistas, televisão, Internet, etc.). Nas empresas a Estatística está presente ao nível da produção, do marketing e da gestão e as políticas e decisões importantes do estado não dispensam o recurso à Estatística. Ora, podendo a interpretação desta informação privilegiar interesses de pessoas e/ou grupos em detrimento de outras pessoas e/ou grupos, o que não raramente acontece, reveste-se da maior importância que as pessoas desenvolvam competências de reflexão e análise crítica dessa informação.

A nível escolar, no passado recente, a importância da Estatística não tem deixado de aumentar, fazendo parte do currículo da generalidade dos cursos do ensino superior, desde os cursos científicos ou tecnológicos aos cursos da área das ciências sociais e humanísticas, e dos cursos do ensino secundário e do ensino básico nas suas variadas modalidades, quer dos cursos orientados para a continuação de estudos, quer dos cursos orientados para a formação profissional. No caso do ensino básico, no programa recentemente aprovado (Ministério da Educação, 2007) verifica-se um aprofundamento da Estatística. Neste caso, o estudo do tema “Organização e tratamento de dados” decorre ao longo de qualquer dos ciclos (1.º ciclo, 2.º ciclo e 3.º ciclo) e inclui as temáticas da variação ou variabilidade estatística e da análise intuitiva da relação estatística, as quais antes apenas eram abordadas pela primeira vez no ensino secundário.

Tal como aconteceu com o I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, realizado em 2004 na Universidade do Minho, também com o II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola se procura tornar visível e contribuir para a promoção do ensino da Estatística na escola (não superior), especificamente procurando atingir os seguintes objectivos:

- Tornar visível a actualidade e importância do ensino da Estatística e Probabilidades na Escola;
- Divulgar resultados de estudos realizados no âmbito da Educação em Estatística, em Probabilidades e em Combinatória;
- Aprofundar a compreensão do ensino e da aprendizagem de Estatística, Probabilidades e Combinatória;
- Contribuir para o desenvolvimento profissional de professores.

Seguidamente iremos referir-nos à estrutura das Actas e às temáticas dos textos das comunicações apresentadas no Encontro. Tendo o Encontro incidido sobre os temas de Estatística, Probabilidades e Combinatória, os diferentes textos das Actas encontram-se também organizados segundo estes temas.

No tema de Estatística incluem-se seis textos, os dois primeiros relativos a duas conferências e os quatro restantes relativos a comunicações. O primeiro, intitulado *Retos para la Formación Estadística de los Profesores*, da autoria de Carmen Batanero, trata de um estudo teórico sobre a problemática da formação dos professores para ensinar Estatística. Assumindo que a formação dos professores que ensinam a Estatística, que em muitos países (como acontece em Portugal) está a cargo de professores de Matemática dos ensinos básico e secundário, apresenta lacunas mais ou menos profundas, a autora revê um conjunto de orientações actuais para o ensino da Estatística.

No segundo texto, intitulado *Reflexões em Torno do Ensino e da Aprendizagem da Estatística: O Exemplo dos Gráficos*, da autoria de Carolina Carvalho, faz-se uma revisão de literatura sobre gráficos e Estatística, centrada nos processos de construção do conhecimento acerca de gráficos, em dificuldades reveladas pelos alunos em explorar esta forma de representação da informação e, por fim, retiram-se implicações para a sala de aula.

No texto *Comparación de Distribuciones: ¿Una Actividad Sencilla para los Futuros Profesores?*, da autoria de Blanca Ruiz, Pedro Arteaga e Carmen Batanero, analisam-se as produções de 101 futuros professores do 1.º ciclo do ensino primário num projecto de análise de dados. Especificamente, estudaram-se os gráficos construídos, as estatísticas calculadas e as respectivas interpretações na elaboração das conclusões.

No texto *Os Projectos e o Processo de Ensino-Aprendizagem da Estatística*, da autoria de Rui Pimenta, discute-se a contribuição da metodologia de projectos para o desenvolvimento da literacia e raciocínio estatísticos, apresentam-se as conclusões gerais de um estudo de avaliação de projectos e divulga-se um portal de apoio ao desenvolvimento de projectos.

Em *Literacia Estatística na Escola, Cidadania na Vida*, da autoria de Maria Manuel da Silva Nascimento, enquadrado na problemática da literacia estatística, são mencionados vários recursos e incentivada a sua utilização, com particular destaque daqueles que existem na página do International Statistical Literacy Project (ISLP).

Finalmente, no texto *Ensino e Avaliação das Aprendizagens em Estatística*, da autoria de José António Fernandes, Maria Palmira Alves, Eusébio André Machado, Paulo Ferreira Correia e Marília André do Rosário, relata-se um estudo de quatro casos (dois professores do ensino básico e dois do ensino secundário) com a finalidade de identificar diferenças entre as práticas de ensino e de avaliação em Matemática e em Estatística.

No tema de Probabilidades incluem-se dois textos, o primeiro relativo a uma conferência e o segundo relativo a uma comunicação. No primeiro texto, intitulado *Sesgos en Probabilidad Condicional e Implicaciones para la Enseñanza*, da autoria de Carmen Díaz, faz-se uma revisão das principais investigações realizadas em Psicologia e Educação sobre o raciocínio e compreensão de probabilidade condicionada, extraindo-se algumas implicações para o ensino.

No texto *Probabilidades e Problemas de Contagem: Arranjos ou Combinações?*, da autoria de Fernando Coelho e José António Fernandes, discute-se o uso do princípio fundamental de contagem e da regra multiplicativa de probabilidades no ensino da probabilidade condicionada, enquanto alternativa ao uso excessivo das fórmulas dos arranjos e das combinações.

Por último, no tema de Combinatória incluem-se três textos, relativos a comunicações. No texto *Ensino e Aprendizagem das Operações Combinatórias no 12.º Ano de Escolaridade*, da autoria de Paulo Ferreira Correia, José António Fernandes e Fernando Almeida, relata-se uma experiência de ensino das operações combinatórias, no 12.º ano, centrada nas ideias prévias dos alunos, na aprendizagem por descoberta e no trabalho de grupo e avaliada através de um questionário para recolha das opiniões dos alunos sobre a intervenção de ensino e de um teste para avaliar as suas aquisições cognitivas em Combinatória.

Em *Palpites Efectuados por Alunos do 9.º Ano de Escolaridade em Combinatória*, da autoria de Paulo Ferreira Correia, apresentam-se os principais resultados de um estudo de investigação sobre

palpites efectuados por alunos do 9.º ano em Combinatória. Neste estudo era pedido aos alunos que, antes de resolverem analiticamente os problemas de contagem, estabelecessem um palpite do número total de possibilidades. É exactamente sobre estes palpites, designadamente os mecanismos cognitivos subjacentes ao estabelecimento desses palpites, a sua comparação com a média dos valores calculados e com os valores correctos e as implicações da formulação de palpites para a aprendizagem dos alunos que trata o presente texto.

Por último, no texto *O Trabalho Colaborativo de Duas Professoras de Matemática no Ensino dos Arranjos Completos*, da autoria de Bárbara do Alvar de Carvalho, evidencia-se o impacto do trabalho colaborativo de duas professoras de Matemática sobre o ensino da operação de arranjos completos a alunos do 12.º ano de escolaridade.

Referência

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Braga, Janeiro de 2009
Os Organizadores

RETOS PARA LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE LOS PROFESORES

Carmen Batanero

Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

batanero@ugr.es

Abstract. Although statistics is today part of the mathematics curricula for primary and secondary school classes in many countries, the specific training to teach statistics is far from being an universal component of pre-service or professional development courses for these teachers. In this presentation we analyze the state of research around this problematic.

1. Situación de la Estadística en la Enseñanza Obligatoria

La estadística es hoy parte del currículo de matemáticas en la educación primaria y secundaria en muchos países, debido a su utilidad en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas, la necesidad del conocimiento estocástico básico en muchas profesiones y su importancia en el desarrollo de un razonamiento crítico (Batanero, 2001; Franklin y cols., 2005).

Aunque la enseñanza de la estadística ha estado presente en la escuela en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a introducirla desde los primeros años y a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, en forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (e.g., NCTM, 2000; MEC, 2006a, 2006b).

Observamos también un incremento de los contenidos de estadística que se recomiendan en la escuela primaria. Por ejemplo en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006a) en España se incluyen los siguientes contenidos dentro del Bloque *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* del área de Matemáticas:

Primer Ciclo

- Gráficos estadísticos: Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.
- Azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.

Segundo Ciclo

- Gráficos y tablas: Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
- Azar y probabilidad: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.

Tercer Ciclo

- Gráficos y parámetros estadísticos: Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que

se presentan a través de gráficos estadísticos. La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares.

- Azar y probabilidad: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2006b) incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, *Estadística y probabilidad*.

Primer Curso

- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas. Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.

Segundo Curso

- Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas. Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
- Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas. Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Tercer Curso

- Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales.
- Atributos y variables discretas y continuas. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.
- Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas. Experiencias aleatorias.
- Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

Cuarto Curso: Opción A

- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumnado. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
- Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.

Cuarto Curso: Opción B

- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
- Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
- Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.

Notamos en las anteriores directrices sobre enseñanza de la estadística que, además adelantar la enseñanza de los temas estadísticos, hay también un cambio en el enfoque, recomendándose el desarrollo del razonamiento estadístico y la presentación de la estadística como un instrumento para resolver problemas y no sólo como un conjunto de técnicas.

La tendencia hacia una enseñanza de la estadística orientada a los datos se muestra igualmente en las directrices curriculares de otros países, que indican que los estudiantes han de diseñar investigaciones, formular preguntas de investigación, recoger datos usando observaciones, encuestas o experimentos, describir y comparar conjuntos de datos, usar y comprender los gráficos y resúmenes estadísticos, proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos (e.g., NCTM, 2000; SEP, 2006).

Estos documentos se concentran en el desarrollo del razonamiento estadístico, que va más allá del conocimiento matemático y de la comprensión de los conceptos y procedimientos. La modelización, la valoración de la bondad del ajuste de los modelos a la realidad, la formulación de cuestiones, la interpretación y síntesis de los resultados, la elaboración de informes son también componentes esenciales de las capacidades que queremos desarrollar en nuestros alumnos (Scheaffer, 2006).

Asimismo se quiere proporcionar una cultura estadística, “que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante” (Gal, 2002, p. 2-3).

Aunque algunas de estas recomendaciones curriculares ya tienen más de una década (e.g., NCTM, 2000), hasta la fecha apenas se siguen. La enseñanza de la estadística se reduce con frecuencia a unas pocas sesiones de clase y a veces el trabajo en la clase se reduce a realizar cálculos o demostrar propiedades con poca oportunidad de diseñar experimentos, analizar datos o conectar la estadística con el proceso general de indagación.

Como consecuencia, los estudiantes finalizan la escuela secundaria con escasa comprensión de los principios básicos que subyacen en el análisis de datos, lo que explica muchos de los problemas que encuentran en el uso posterior de la estadística en su vida cotidiana o profesional, o en los cursos de estadística en la universidad (Meletiou, 2003).

2. Retos en la Formación de los Profesores para Enseñar Estadística

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). En consecuencia, el cambio de la enseñanza de la estadística en las escuelas e institutos dependerá del grado en que se pueda convencer a los profesores de que la estadística es uno de los temas más interesantes y útiles para sus estudiantes y que todos ellos tienen capacidad para adquirir algunos conceptos elementales.

El esfuerzo de investigación sobre la educación del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional en la década pasada (Brown y Borko, 1992; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007) no se ha reflejado en la educación estadística, aunque en España encontramos algunas investigaciones centradas en la probabilidad (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 1998 y trabajos posteriores de los autores). El olvido del caso específico de la estadística es evidente en conferencias (como el ICMI Study 15), revistas (como Journal of Mathematics Teacher Education), estados de la cuestión y libros, que apenas tratan el caso particular de la estadística (Shaughnessy, 2006).

Este olvido ha sido reconocido por la International Comisión on Mathematical Instruction (ICMI) y la International Association for Statistical Education (IASE) que han promovido un Estudio Conjunto específicamente orientado a promover la investigación a nivel internacional sobre la educación y desarrollo profesional de profesor para enseñar estadística (http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/). En lo que sigue hacemos una reseña de la investigación presentada en esta conferencia.

2.1. Actitudes y Creencias de los Profesores

Un primer punto de atención son las actitudes, concepciones y creencias de los profesores hacia la estadística, pues de acuerdo a Chapman (1999), constituyen un factor clave en cualquier movimiento para cambiar la enseñanza de las matemáticas y al mismo tiempo inciden en los conocimientos y las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas.

Diversos estudios han analizado las actitudes hacia la estadística. En general se consideran un constructo mental, no directamente observable sino que ha de ser inferido a partir de la valoración en una escala de actitudes o de la observación del comportamiento de los sujetos. Gal, Ginsburg y Garfield (1997) las definen como *“una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio”* (p. 40).

Hay varias escalas de medición de actitudes disponibles, cuyas características psicométricas son descritas con detalle por Carmona (2004), quien realiza un extenso informe sobre los estudios de actitudes hacia la estadística que son numerosos y se han centrado preferentemente en estudiantes universitarios. Sin embargo son pocos los estudios centrados en las actitudes de los profesores.

Onwuegbuzie (1998) utiliza un modelo multivariado para estudiar la ansiedad y actitudes de los profesores, encontrando correlaciones significativas entre el número de asignaturas de Estadística cursadas con anterioridad y las puntuaciones en el cuestionario de actitudes. Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty, (2003) aplicaron conjuntamente un cuestionario de actitudes y otro sobre ansiedad mostrando una correlación negativa entre los instrumentos. Finalmente, Nasser y sus colaboradores han realizado varios estudios en los que también analizan la relación entre las actitudes o la ansiedad y el rendimiento de futuros profesores (Wisnaker, Nasser y Scott, 1999, Nasser, 2004).

El trabajo de Huedo y cols. (2003) presenta resultados de una investigación con profesores en formación y analiza los conocimientos y actitudes hacia la Estadística y hacia las Matemáticas contrastando los resultados con estudios previos. Estrada en varios trabajos (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004a 2004b; Estrada, 2007; Estrada y Batanero, 2008) ha analizado con mayor detalle en España las actitudes hacia la estadística de profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. Igualmente ha relacionado estas actitudes con variables como años de docencia, especialidad (en caso de futuros profesores) y conocimientos estadísticos. Uno de sus resultados más importantes es mostrar que las actitudes mejoran en general con los conocimientos y la práctica profesional.

Estos estudios indican que los profesores reconocen la importancia práctica de la estadística, están dispuestos a aprender más y dedicar más tiempo a su enseñanza, pero se sienten poco preparados para ayudar a los estudiantes en sus dificultades con el tema. Es decir, sería necesario desarrollar los componentes cognitivo y dificultad de las actitudes hacia la estadística frente a los componentes afectivo de valor de la materia.

Los profesores tienen también creencias referentes a los contenidos y fines de la enseñanza, que pueden incidir fuertemente en la forma que enseñan estadística. Sus actividades en el aula vienen determinadas en parte por su visión de los objetivos educativos que pretenden en el aprendizaje del contenido matemático de los estudiantes. Por ejemplo, en un estudio cualitativo con profesores alemanes, Eichler (2008) muestra como el currículo efectivamente implementado en la clase para alumnos del mismo nivel educativo varía considerablemente dependiendo de estas creencias, sobre todo de la visión estática o dinámica de la estadística y la preferencia por la formalización frente a las aplicaciones.

2.2. Conocimientos Estadísticos

Varios investigadores indican que también se requiere una mejor preparación estadística de estos profesores. A pesar de que muchos futuros profesores de secundaria son licenciados en matemáticas, generalmente no recibieron una formación específica en estadística aplicada o uso del software estadístico. La situación es aún más crítica para los profesores de educación primaria, ya que pocos tuvieron una formación inicial suficiente (Franklin y Mewborn, 2006).

Algunas de las actividades que realiza el profesor, tales como “indagar lo que los estudiantes conocen, elegir y manejar representaciones de las ideas matemáticas, seleccionar y modificar los libros de texto, decidir entre modos posibles de acción (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001) dependen de su razonamiento y pensamiento matemático. Como consecuencia, las creencias, el conocimiento del contenido didáctico y las decisiones instruccionales dependen del conocimiento que el profesor tiene sobre el contenido estadístico. Esto es un motivo de preocupación, puesto que la investigación en educación estadística está mostrando que muchos futuros profesores mantienen inconscientemente una variedad de dificultades y errores sobre la estadística que podrían transmitir a sus estudiantes.

Los estudios de evaluación del conocimiento matemático de los profesores dividen este conocimiento en varios componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2005)

Centrándonos en el conocimiento común del contenido estadístico, los estudios de evaluación suelen usar cuestionarios o entrevistas y tareas similares a las empleadas en investigaciones con estudiantes. Su interés es determinar si el nivel de conocimiento de los futuros profesores es suficiente para resolver las tareas que tendrán que proponer a sus futuros alumnos.

Estrada y Batanero (2008) encontraron en su estudio una proporción preocupante de futuros profesores que no dominan los conceptos elementales que han de enseñar a sus futuros alumnos. Un 45% de la muestra no tuvo en cuenta el efecto de los valores atípicos sobre la media, 28% mostraron una interpretación deficiente de la probabilidad frecuencial, 45% confundieron correlación y causalidad, 24% no invierten adecuadamente el algoritmo de la media, 30% fueron insensibles al sesgo en el muestreo, 15% pensaron que no es posible dar una estimación cuando hay fluctuación aleatoria y otro 30% tenía confusiones varias respecto al muestreo.

Respecto a los gráficos, Espinel, Bruno y Plasencia (2008) muestran que los futuros profesores en su muestra ni siquiera alcanzan el mismo nivel que los estudiantes universitarios en una investigación previa realizada en Norteamérica. Aunque los estudiantes parecen comprender los elementos básicos de la estadística descriptiva, no tienen recursos para interpretar los gráficos, hacen errores respecto a la simetría, valores atípicos y frecuencias acumuladas. Tienen dificultades con la media y mediana y piensan sobre todo en términos de variables cualitativas, confundiendo en consecuencia los histogramas y gráficos de barras. Fallan al interpretar la distribución de datos, centrándose tan sólo en aspectos específicos como la media o un valor aislado.

La importancia del concepto de variación en estadística ha sido resaltada por Wild y Pfannkuch (1999) como el núcleo de su modelo sobre razonamiento estadístico. A pesar de ello, la investigación de Silva y Coutinho (2008) muestra que el razonamiento predominante de los profesores brasileños sobre la variación es verbal, lo que les impide enseñar a sus estudiantes el significado de medidas tales como la

desviación típica, limitándose a la enseñanza de algoritmos. Les resulta difícil integrar el razonamiento sobre la media, desviación respecto a la media, intervalo de k desviaciones típicas desde la media y estimación de la frecuencia en el intervalo.

Respecto a la idea de distribución, otra idea central del razonamiento estadístico, Canada (2008) analizó el razonamiento de estudiantes de secundaria y futuros profesores cuando comparan conjuntos de datos con la misma media y diferente dispersión. Aunque el grupo de futuros profesores tuvo mejor rendimiento que el de los estudiantes, todavía un 35% de ellos pensaba que dos conjuntos de datos con la misma media eran iguales aunque la dispersión fuese muy diferente.

Respecto al conocimiento de la estadística para la enseñanza, algunas investigaciones examinan a profesores en ejercicio, observándolos a lo largo de un periodo de enseñanza y complementando esta observación con entrevistas u otros medios. Este conocimiento también parece insuficiente.

Por ejemplo, los profesores participantes en el estudio de Jacobbe (2008) no poseían suficiente conocimiento de la mediana para enseñar estadística en los niveles requeridos en los nuevos currículos americanos. En el trabajo de Stohl (2005), los profesores observados fallaron al implementar el enfoque experimental en la enseñanza de la probabilidad, porque sólo proponían a los estudiantes tareas con muestras pequeñas. Por este motivo los estudiantes no pudieron apreciar la convergencia o el efecto del tamaño de la muestra sobre la misma, es decir no llegaron al punto central del enfoque frecuencial de la probabilidad. En otras sesiones, al trabajar con proyectos estadísticos en la clase los profesores perdieron oportunidades para implicar a los estudiantes en la investigación y para profundizar en sus razonamientos. Especialmente se perdieron estas oportunidades en las fases de análisis e interpretación en el modelo de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999).

2.3. Conocimiento Profesional para Enseñar Estadística

Estos profesores también necesitan formación en el conocimiento profesional relacionado con la educación estadística, a la que no pueden transferirse algunos principios generales válidos para otras ramas de las matemáticas (Batanero, Godino y Roa, 2004, Mickelson y Heaton, 2004).

Estos conocimientos se adquirirán preferentemente durante el ejercicio de la docencia. Llinares (2000) indica que la práctica profesional del profesor es el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. No se reduce a lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, en la que se incluyen tareas como tutorías, reuniones de seminario-departamento o asistencia a actividades de formación. Hay sin embargo poca oportunidad para un desarrollo profesional de los profesores en estadística, puesto que de hecho la enseñanza se omite o reduce o bien se reduce a puro cálculo (Watson, 2001; Mendonça, Coutinho y Almouloud, 2006).

Las escasas investigaciones relacionadas con el conocimiento profesional de los profesores para enseñar estadística sugieren que este conocimiento es escaso, lo cual no es una sorpresa pues, como hemos visto, este conocimiento dependerá de su conocimiento estadístico que en gran medida es también deficiente. La investigación de González y Pinto (2008) muestra que los estudiantes para profesor tienen pocos conocimientos didácticos en relación a los gráficos estadísticos. Por ejemplo, no son capaces de diferenciar los diferentes niveles cognitivos asociados a la lectura de gráficos definidos en investigaciones como la de Friel, Curcio Bright (2001) ni comprenden los diferentes componentes y procesos ligados a esta interpretación. Cuando se les pide para clasificar los gráficos de los libros de texto, se centran sólo en los aspectos procedimentales, mostrando falta de conocimiento sobre el aprendizaje de los gráficos o las dificultades de los estudiantes en el tema.

Por otro lado, los libros de texto y materiales curriculares preparados son insuficientes, en algunos casos, como soporte para el profesor al presentar una visión muy parcial de los conceptos (por ejemplo, solo la aproximación clásica a la probabilidad o la inferencia); en otros casos las aplicaciones se limitan a juegos de azar o no se basan en datos tomados de aplicaciones reales; en otros las definiciones de los conceptos son incorrectas o incompletas (Cardeñoso, Azcárate y Serradó, 2005).

Es también patente la dificultad de algunos profesores al trabajar con proyectos y problemas abiertos en matemática (Jaworski, 1994, Ponte (2001)). En el caso de la estadística, un tema fundamental es que los proyectos se usen para enseñar razonamiento estadístico y no cálculos rutinarios. Por ello es importante ver si los profesores son capaces de a) reconocer qué conceptos pueden ser estudiados a partir de un proyecto o un conjunto de datos dado y b) implementar una enseñanza efectiva en una clase utilizando proyectos estadísticos.

En la investigación de Chick y Pierce (2008), sin embargo, fue evidente que no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al planificar sus lecciones, pues fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada. Por el contrario se limitaron a pedir cálculos o realizar nuevos gráficos con pocas actividades de interpretación.

Tratando de avanzar en el análisis del conocimiento profesional para enseñar estadística (PKTS), Watson, Donne y Callingham (2008) analizan a 42 profesores que participan en un curso de desarrollo profesional en estadística y tratan de evaluar y definir niveles en este conocimiento. Parten de un cuestionario que incluye tareas pensadas para estudiantes con respuestas de los mismos. Preguntan a los profesores sobre el conocimiento estadístico necesario para hallar la solución correcta, los razonamientos incorrectos y causas para los mismos y posibles métodos para ayudar a los estudiantes a superarlos. Utilizando el método de análisis de Rasch definen y describen tres niveles de conocimiento profesional del profesor y crean una escala para evaluarlo en relación a los contenidos estadísticos elementales. Un problema de esta investigación es que los ítems son muy limitados en cuanto al contenido estadístico, además de que se requiere mayor tamaño de muestra para dar estabilidad a la escala.

Modelos sobre el conocimiento profesional

Si queremos impulsar el desarrollo del conocimiento profesional del profesor, se requiere un modelo de los componentes de dicho conocimiento. Ya hemos hecho referencia al modelo Ball, Thames y Phelps (2005) que incluye cuatro componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes. Burguess (2008) cruza estos cuatro componentes con las categorías que definen los modos esenciales de razonamiento estadístico y construye un modelo bidimensional para analizar el conocimiento profesional del profesor para enseñar estadística.

Lee y Hollebrands (2008) presentan un modelo del conocimiento profesional para enseñar estadística con apoyo de la tecnología con cuatro componentes: a) Concepciones de qué significa enseñar un tema particular integrando la tecnología en el proceso de aprendizaje; b) Conocimiento de las estrategias de enseñanza y las representaciones para enseñar temas particulares con la tecnología; c) Conocimiento sobre la comprensión, razonamiento y aprendizaje de los estudiantes con la tecnología y d) Conocimiento del currículo y materiales curriculares que integran la tecnología en el aprendizaje y ponen el énfasis en el razonamiento estadístico.

Garfield y Ben-Zvi (2008) describen el conocimiento profesional mediante seis componentes que se ha de desarrollar en la formación de profesores: ideas estadísticas fundamentales; uso de datos reales; uso de actividades para el aula; integración de las herramientas tecnológicas; implementación del discurso en el aula y uso de métodos alternativos de evaluación.

En nuestro caso (Godino y cols., 2008) proponemos un modelo general para el conocimiento profesional del profesor de matemáticas con seis componentes:

- Epistémico: Incluye el conocimiento matemático y reflexión epistemológica sobre el significado de los objetos particulares que se pretende enseñar, y el análisis de sus transformaciones para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- Cognitivo: Dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas
- Mediacional. Medios didácticos: Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos. Afectivo: actitudes,

- creencias y sentimientos de los estudiantes, sus intereses y motivaciones.
- Interaccional: Organización del discurso en la clase, interacciones entre estudiantes y de ellos con el profesor, incluyendo la evaluación.
- Ecológico: Relación del tema con otros en la materia o en otras disciplinas, así como condicionantes internos y externos en la enseñanza.

2.4. Evaluación de Experiencias en la Formación de Profesores de Estadística

La literatura sobre formación de profesores indica la complejidad de las competencias necesarias para enseñar y la divergencia entre formación teórica y práctica para la docencia (Brown y Borko, 1992). Por ello, la formación de futuros profesores requiere de entornos y contextos en que trabajen sobre problemas significativos relacionados con su desarrollo profesional y la reflexión sobre dichas actividades, que a la vez se utiliza, registrada de diversas formas en la investigación (Llinares y Krainer, 2006).

Para el caso de la estadística, algunas actividades sugeridas en este sentido son las siguientes:

- *El trabajo colaborativo* entre los profesores es esencial para mejorar su formación profesional. A través del intercambio de ideas y materiales entre los profesores que tienen problemas y necesidades comunes emergen nuevas ideas para la introducción de actividades, prácticas o el desarrollo de competencias (Carvalho, 2008). El profesor de estadística ha de manejar dos tipos de incertidumbre en su trabajo diario: el primero de ellos se relaciona con el conocimiento estocástico. La incertidumbre aparece también en el trabajo de la clase debido a las interacciones inesperadas entre estudiantes y profesor (Groth, 2008). La discusión entre profesores, incluso a distancia por medio de la tecnología puede ayudar a manejar estos dos niveles de incertidumbre.
- *Planificación de una lección para enseñar a los alumnos algún aspecto de la estadística* pues en esta planificación pone en juego su conocimiento estadístico y su conocimiento profesional (Chick y Pierce, 2008). También permite el análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- *Trabajo con proyectos*. Puesto que los currículos y metodología nueva indican que se debe implicar a los estudiantes con los proyectos estadísticos es importante que los profesores trabajen en la clase con el mismo enfoque. Tanto en este caso como el anterior si queremos que el profesor desarrolle la comprensión de sus alumnos deberían tener las mismas experiencias que ellos. Una forma de lograrlos es hacerles jugar sucesivamente el papel de alumno y profesor, es decir, “tener la práctica de aprendiz”. Sobre todo cuando hay poco tiempo de enseñanza, se debiera implementar un ciclo formativo en que los profesores primero trabajan con un proyecto estadístico o una unidad didáctica y luego lo analizan desde el punto de vista didáctico como un medio de enriquecer simultáneamente el conocimiento estadístico y profesional del profesor (Godino y cols., 2008).
- *Análisis de tareas o ítems de evaluación y respuestas de alumnos a las mismas*. Se trata de analizar el contenido estadístico y los conocimientos requeridos para resolver alguna tarea de evaluación o usada en alguna investigación sobre razonamiento estadístico. Este tipo de análisis permitió también revelar posibles dificultades de los profesores con los conceptos estadísticos en la experiencia de Godino y cols. (2008).
- *Resolución de situaciones problemáticas paradójicas y reflexión sobre su contenido*. En el caso de formación de profesores de secundaria que tengan sólidos conocimientos matemáticos, se trata de hacer experimentar a los futuros profesores la dificultad que encuentra un alumno al resolver las tareas o problemas que se les plantea. Puesto que futuro profesor en este caso tiene unos conocimientos muy sólidos de estadística, hemos de buscar algunos ejemplos de problemas, que, aparentemente sencillo, puedan, sin embargo tener soluciones contraintuitivas o sorprendentes (Batanero, Godino y Roa, 2004).

En nuestras experiencias se tendrían en cuenta los diversos puntos de vista sobre la probabilidad e inferencia (Batanero, Henry y Parzysz, 2005) conjuntando la formación estadística y la formación en el contenido didáctico (Ball y Bass, 2000).

2.5. Nuevas Tecnologías y Formación de Profesores

La influencia de la tecnología en la estadística y su enseñanza ha sido reconocida por la International Association for Statistical Education (IASE) en los Congresos Internacionales sobre la Enseñanza de la Estadística, donde se discutió sobre el software disponible para la enseñanza, los cambios implicados en el contenido y metodología, y el efecto en el aprendizaje y las actitudes de los alumnos. Como se destaca en estas conferencias, la tecnología ha reducido el tiempo de cálculo, permitiendo trabajar en clase con aplicaciones reales, en línea con el uso de proyectos y las tendencias curriculares descritas anteriormente.

Las posibilidades de simulación y creación de micromundos estocásticos virtuales permiten explorar los conceptos de probabilidad e inferencia y sustituir las demostraciones formales por razonamientos más intuitivos; se añaden también las funciones de tutor y ayuda al autoestudio, evaluación y ejercitación (Biehler, 1997, 2003; Ben-Zvi, 2000). Podemos añadir las sugerencias y experiencias didácticas basadas en el uso de recursos disponibles en Internet, incluyendo las relacionadas con la formación de profesores en estadística (Godino y cols. 2003, 2006a y b; Sánchez e Izunza, 2006) y la interacción a distancia entre alumnos o alumnos y profesor.

Un punto esencial para introducir la tecnología en la clase de estadística será la adecuada preparación de los profesores, tanto desde el punto de vista técnico como didáctico. La tecnología puede utilizarse tanto como amplificadores o como reorganizadores conceptuales para desarrollar la comprensión de ideas estadísticas en los profesores (Lee y Hollebrand, 2008). Ello es necesario pues algunos futuros profesores tienen dificultades en la utilización adecuada del software para fomentar la comprensión de los alumnos y consideraban que la simulación es sólo útil después de estudiar la probabilidad de manera teórica. En otros casos, al trabajar con la tecnología pasan por alto las ideas previas correctas de los estudiantes, centrándose sólo en sus errores (Stohl, 2005).

Desde el punto de vista técnico necesitamos familiarizar a los profesores con el uso de la tecnología, el trabajo con proyecto y la implementación de simulaciones. Desde el punto de vista didáctico necesitamos formar al profesor en los diferentes niveles del conocimiento profesional en relación con el uso de la tecnología para enseñar estadística. Esta preparación entronca además con la investigación centrada en formación de profesores y resolución de problemas (Llinares y Krainer, 2006; Ponte, 2001; Ponte y Chapman, 2006).

3. Conclusiones

Una primera conclusión que podemos extraer del análisis de estas investigaciones es que la preparación de los profesores es un tema importante para la investigación y para los formadores de profesores. La evaluación del conocimiento del profesor sigue siendo relevante, debido a las demandas de que los estudiantes sean enseñados por profesores bien cualificados, la necesidad de evidenciar los resultados de los programas de formación de profesores y el debate sobre el contenido matemático para la enseñanza que debe poseer el profesor (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007).

La necesidad de formación es reconocida por los mismos profesores que muestran interés por los cambios curriculares pero se sienten inseguros en áreas tales como el diseño de experimentos, métodos de muestreo, aleatorización, riesgo, variación, análisis exploratorio de datos e inferencia estadística (Arnold, 2008). Este abanico cubre prácticamente todo el contenido curricular e incluye no sólo los conceptos avanzados, sino también los más simples.

Un curso de didáctica de la estadística debería servir para proporcionar a los profesores este conocimiento, mejorar sus actitudes, aumentar su sensibilidad hacia la dificultad que otras personas pueden tener en esta materia y capacitarlos para la enseñanza. Somos conscientes de que la variedad de

conocimientos requeridos para estos cursos plantea el problema de elaborar materiales específicos, continuando el trabajo que iniciamos en Batanero (2001).

También reconocemos que la estadística es una ciencia en continuo cambio y expansión y que es necesario estar abiertos a las nuevas corrientes, tales como la inferencia bayesiana, los métodos de simulación, estadística espacial o procesos estocásticos. Estas nuevas tendencias necesitan ser difundidas y serán pronto objeto generalizado de enseñanza. Creemos que es necesaria aún mucha investigación y reflexión didáctica para poder seguir construyendo la Educación Estadística y concretándola en cursos destinados a futuros profesores. Esperamos que este trabajo logre interesar a otros investigadores por esta problemática.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- Feder).

Referencias

- Arnold, P. (2008). Developing new statistical content knowledge with secondary school mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Azcárate P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Azcárate, P., Serradó, A. y Cardeñoso, C. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in Compulsory education En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Ball, D. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: JAI/Ablex.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching*. Online: www-personal.umich.edu/~dball/.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Didáctica de las Matemáticas.
- Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. & Rossman, A. (2008). (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.
- Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: <http://www.amstat.org/publications/jse/>.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

- Ben-Zvi, D. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematics Thinking and Learning*, 2(1&2), 127-155.
- Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 167-190.
- Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory courses. En L. Weldon y J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet*. Berlin: IASE.
- Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York: NCTM.
- Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008).
- Canada, D. L. (2008). Conceptions of distribution held by middle school students and preservice teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Cardenoso, J. M. (1998). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de las concepciones sobre aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.
- Cardenoso, J. M., Azcárate, P. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal* 4(2), 59-81. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/>.
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/>.
- Carvalho, C. (2008). Collaborative work in statistics classes: why do it? En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Chapman, O. (1999). Researching mathematics teacher thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 385-392). Haifa: The Technicon – Israel Institute of Technology.
- Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Eichler, A. (2008). Germany teachers' classroom practice and students' learning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camaño, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 121-140). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

- Estrada, A. y Batanero, C. (2008). *Explaining teachers' attitudes towards statistics*. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004a). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 263-274.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004b). Un estudio de evaluación de conocimientos estadísticos en profesores en formación e implicaciones didácticas. *Educación Matemática*, 16, 89-112.
- Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.) (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education. GAISE report*. On line: <http://www.amstat.org/education/gaise/>.
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
- Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing. Comprehension and Instructional Implications. *Journal of Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2(2).
- Gal, I., Ginsburg, L. y Garfield, J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg: IOS Press.
- Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008) Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Godino, J., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Godino, J. D., Roa, R., Recio, A. M., Ruiz, F. y Pareja, J. L (2006). Analysing teaching and learning process for the law of large numbers: implications of using software in teachers' education. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Revista Números*, 64.

- Godino, J. D. Ruiz, F., Roa, R., Pareja, J. L. y Recio, A. M. (2003). Analysis of two internet interactive applets for teaching statistics in schools. Trabajo presentado en la *IASSE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet*. Berlin, Germany, 11-12 August, 2003.
- González, M. T. y Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Groth, R. E. (2008). Navigating layers of uncertainty in teaching statistics through case discussion. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Huedo, T., López, J.A., Martínez, R. y Nortes, A. (2003). Contenidos y actitudes en estadística: Un estudio en maestros en formación. *Actas de la 27 Conferencia Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Lleida: SEIO. CD ROM.
- Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008).
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer.
- Lee, H. S. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASSE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verão – 1999*. (pp. 109-132). Sociedade de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Llinares S. y Krainer K. (2006) Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429 – 459). Rotherdam: Sense Publishers.
- MEC (2006a). Real Decrero 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- MEC (2006b). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Meletiou, M. (2003). On the formalist view of mathematics: impact on statistics instruction and learning. En A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of Third European Conference in Mathematics Education*. Bellaria, Italy: ERME.
- Mendonça, T., Coutinho, C. y Almouloud, S. (2006). Mathematics education and statistics education: meeting points and perspectives. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). On line: www.amstat.org/publications/jse/.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
<http://standards.nctm.org/>.
- Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers' attitudes toward statistics. *Psychological Reports*, 83, 1008-1010.
- Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.
- Sánchez, E. e Izunza, S. (2006). Meanings' construction about sampling distributions in a dynamic statistics environment. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T., y del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.
- Scheaffer, R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.
- SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria* (Curricular guidelines for secondary education) Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.
- Silva, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77-95). Reston, VA: NCTM.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.
- Watson, J. M., Donne, J. y Callingham, R. A. (2008). Establishing PCK for teaching statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program. Comunicación presentada al *AERA Annual Meeting*, San Diego.
- Weldon, L. y Engel, J. (Eds.), (2003). *Statistics and the Internet*. Voorburg: International Statistical Institute. CD ROM.

- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 221-248.
- Wisenbaker, J., Nasser, F., y Scott, J.S. (1999). A cross-cultural comparison of path models relating attitudes about and achievement in Introductory Statistics Courses. Comunicación presentada en el 52nd ISI – International Statistical Institute - Session, Helsinki.

REFLEXÕES EM TORNO DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA

O Exemplo dos Gráficos

Carolina Carvalho

Universidade de Lisboa

Departamento de Educação da Faculdade de Ciências

Centro de Investigação em Educação

cfcarvalho@fc.ul.pt

Resumo: As sociedades modernas precisam de consumir e apresentar dados. E uma das formas mais frequente de o fazer é recorrer a gráficos. Um jornal diário, um folheto publicitário, um artigo científico recorrem a diferentes tipos de gráficos, consequentemente, todos os cidadãos para tomarem diferentes tipos de decisões precisam de saber lidar com diferentes tipos de gráficos. Na escola desenvolvem-se competências para saber lidar com gráficos, e não é só nas aulas de matemática. Neste trabalho procura-se rever a literatura sobre gráficos e estatística. Começa-se por descrever como o conhecimento sobre gráficos é construído. Depois apresentam-se algumas das dificuldades que os alunos têm com esta forma de representação e, por fim, retiram-se implicações para a sala de aula.

1. Introdução

No século XVII, Descartes foi um dos primeiros matemáticos a compreender a importância dos gráficos como uma “ajuda preciosa na solução de problemas aritméticos e algébricos, na solução de fórmulas matemáticas e na representação de relações” (Arkin & Colton, 1940, p. 4, citado por Curcio, 1989, p. 1). Desde então, as representações gráficas tiveram uma forte presença em contextos diversos do quotidiano de todos nós.

Para a maioria dos leigos, os gráficos clarificam, organizam e reduzem a informação quantitativa, sendo por isso bastante utilizados nos meios de comunicação social e em muitas outras situações onde a opinião pública é essencial para a tomada de decisões dos políticos ou dos publicitários. Gráficos, tabelas e diagramas são frequentemente usados para apresentar dados, surgindo em numerosas situações quotidianas dos alunos, quer elas sejam escolares ou não. Por isso, “as crianças precisam de aprender a ler, interpretar e saber como se constroem para se tornarem consumidores críticos e reflexivos” (Sheffield & Cruikshank, 1996, p. 271). Mas para as crianças se tornarem cidadãos informados, reflexivos e críticos na análise de gráficos precisam de os trabalhar na sala de aula de uma forma progressivamente mais complexa e a partir de actividades promotoras de pensamento crítico.

As formas gráficas mais comuns nas salas de aula e em particular nas de matemática durante a unidade curricular de Estatística são os pictogramas, os gráficos de barras e os gráficos circulares. Estes são ainda os mais frequentes nos contextos escolares dos anos de escolaridade do ensino básico tanto na disciplina de Matemática como em outras disciplinas, como por exemplo nas Ciências ou na Geografia. No entanto, começa a assistir-se a algum movimento para a introdução de outras formas de representação gráfica, como os diagramas de frequências separadas, extremos e quartis, caule e folhas e de dispersão nos currículos escolares da maioria dos países (Batanero, 1999b; Curcio, 1987, 1989; Martins et al. 1997; National Council of Teachers of Mathematics, 1991), fruto da análise exploratória de dados e da utilização de software educativo na sala de aula.

Contudo, as formas mais tradicionais de gráficos são aquelas que continuam a predominar na maioria das salas de aulas de muitos alunos portugueses do ensino básico e são sobre essas que nos iremos deter, até porque são as mais habituais para os alunos portugueses que frequentam as aulas de Estatística no ensino básico e as mais facilmente encontradas nos livros de texto usados durante esses anos escolares.

2. Aprender a Lidar com Gráficos

Quando chega à escola pela primeira vez uma criança já se confrontou com diferentes tipos de gráficos. Pelo facto de viver num ambiente social onde os gráficos estão presentes no seu dia-a-dia aprende coisas sobre gráficos. Muitas crianças quando folheiam ao acaso uma revista ou um jornal vêem gráficos, quando ouvem uma notícia nalgum telejornal podem ter reparado num gráfico. De facto, hoje o contexto social das crianças tem jornais, revistas, televisão e Internet onde muita informação está na forma de tabelas, figuras e gráficos sobre o tempo, a economia, a saúde, o desporto. As crianças aprendem coisas sobre gráficos através de experiências diversas em contextos sociais onde interagem, negociam significados e colaboram. Mas poucas serão as que sem um contexto escolar de aprendizagem saibam o que é um gráfico, o seu significado matemático e a sua importância para as sociedades modernas.

Nos finais dos anos 80, Curcio afirma que “os gráficos providenciam um meio para comunicar e classificar dados. Permitem a sua comparação e facilitam demonstrações matemáticas que dificilmente seriam compreendidas se só se recorresse à sua forma numérica” (1989, p. 1).

No ensino básico, durante a unidade de Estatística, a maioria dos alunos confronta-se com pictogramas, gráficos de barras e gráficos circulares. Os pictogramas surgem como uma forma de representar variáveis contínuas e onde cada figura deve traduzir a mesma frequência absoluta ou percentagem num eixo legendado. Estes gráficos, apesar de não serem uma forma fiel de representação se pensarmos na dificuldade em manter a relação entre o tamanho da figura e a frequência absoluta (Grupo Azarquiel, 1993) e nas suas consequências para o leitor mais desatento, são extremamente motivantes e acessíveis para os alunos mais novos, pois permitem-lhes construir objectos reais ou arranjar símbolos para os substituir. Assim, mesmo sem uma legenda, são facilmente compreendidos pelas crianças mais pequenas, porque o ideograma escolhido e o item que ele representa estão na correspondência de um para um (Curcio, 1989).

Os gráficos de barras são uma outra forma de gráfico habitual. Neste tipo de gráfico, as barras podem assumir a forma horizontal ou vertical sendo, no entanto, as últimas as mais comuns nos livros de texto nos anos de escolaridade básica. Estes gráficos permitem que o leitor compare quantidades discretas expressas por barras rectangulares uniformes quanto à sua largura, mas com a altura proporcional à quantidade representada. Para construir este tipo de gráfico é frequente recorrer a um sistema perpendicular de eixos que se interceptam num ponto, a origem. Os eixos devem ser sempre legendados. Por vezes, pode usar-se este tipo de gráfico com barras múltiplas quando se pretende comparar mais do que um grupo de dados.

Os gráficos circulares ou de sectores são um outro exemplo de gráfico utilizado nas aulas de Estatística. Esta representação, usada essencialmente para dados qualitativos, é constituída por um círculo, em que o número dos diferentes sectores circulares varia de acordo com as modalidades consideradas na tabela de frequências da amostra em estudo. Os ângulos dos sectores são proporcionais às frequências das modalidades (Martins et al., 1997). Recorre-se aos gráficos circulares quando se pretende comparar dados entre o todo e as partes.

Ser capaz de ler os dados presentes num gráfico é uma capacidade importante, mas o sujeito só tira o máximo de potencial de um gráfico quando consegue interpretar os dados e generalizar a informação nele presente (Curcio, 1989). Numa sociedade cada vez mais dependente de gráficos para comunicar os mais variados tipos de informação, compreende-se que seja necessário que os alunos desenvolvam competências que os ajudem a compreendê-la. Os resultados da *Third National Assessment of Educational Progress* indicaram que as crianças americanas, dos 9 aos 13 anos, revelam dificuldades em interpretar gráficos e retirar conclusões (Curcio, 1987). Num estudo mais recente, o PISA 2003, verifica-se que nos itens que envolvem questões relacionadas com a leitura de gráficos e escalas os alunos, incluindo os alunos portugueses, apresentam dificuldades em responder correctamente. Apesar

das limitações deste tipo de avaliações, seria uma atitude pouco prudente também não procurar compreender o que poderá explicar os resultados obtidos pelos alunos.

Nesse sentido, Curcio (1987) apresentou algumas explicações para os resultados citados. Na sua opinião, o conhecimento de um sujeito acerca de um determinado tipo de gráfico depende de ter sido exposto a uma experiência anterior significativa com uma destas formas de representação. Esta experiência anterior contribui para o sujeito identificar informações relevantes e necessárias para a compreensão do gráfico, por exemplo: o tipo de gráfico; a relação matemática entre os números e as ideias que traduzem; as operações matemáticas que encerra e possibilita. Na opinião deste autor, estes três factores surgem como dos mais consequentes para a compreensão dos sujeitos acerca dos gráficos.

Tentar analisar qual a influência da experiência anterior na capacidade de compreender as relações matemáticas expressas em diferentes tipos de gráficos foi o que motivou o autor a realizar uma investigação junto de 389 alunos, do estado de Nova Iorque, que frequentavam o 4.º e o 7.º ano do ensino elementar. O instrumento passado aos alunos foi uma prova de resposta múltipla composta por doze gráficos de quatro tipos diferentes: barras, circulares, pictogramas e de linhas. A escolha dos dois anos de escolaridade resultou do facto de, no 4.º ano, o trabalho elementar com gráficos estar concluído e os alunos já terem um domínio da leitura e das operações aritméticas básicas. Estes dois últimos aspectos são apontados por Curcio (1987) como fundamentais para que os alunos consigam ler os gráficos. A preferência pelo 7.º ano de escolaridade manifesta a expectativa do autor de que, por esta altura, os alunos já têm um domínio na leitura dos gráficos e que, se houver diferenças entre rapazes e raparigas, é por volta desta idade que elas começam a surgir.

Os resultados do estudo apontam para a inexistência de diferenças entre rapazes e raparigas quanto à compreensão dos vários tipos de gráficos. Esta constatação vem ao encontro de anteriores investigações (Peterson & Schramm, 1954; Strickland, 1938, 1972, citados em Curcio, 1987), podendo-se atribuir à ausência de estereótipos marcadamente sexuais na construção dos itens do instrumento.

Tal como era de esperar, o conhecimento anterior dos sujeitos, quanto ao tipo de gráfico, à relação matemática entre os números e as ideias que traduzem e às operações matemáticas que encerram e possibilitam, origina diferenças entre os sujeitos em função do ano de escolaridade e da idade. Os alunos do 7.º ano revelaram mais conhecimentos acerca dos diferentes tipos de gráficos e, consequentemente, obtiveram melhores desempenhos. Para o autor, estes resultados podem também sugerir a necessidade que as crianças mais novas têm de conhecimentos relacionados com os aspectos concretos, visuais e explícitos dos gráficos, em detrimento de conhecimentos com conteúdos mais matemáticos. A forma de trabalhar os gráficos com as crianças mais novas, na sala de aula, deve basear-se num envolvimento activo das crianças na recolha de dados das suas experiências de vida e, posteriormente, encorajá-las a verbalizar as relações e os padrões observados, por exemplo, é mais largo que, é duas vezes, continua a aumentar. Esta parece ser uma das formas com mais potencialidades para melhorar o conhecimento dos alunos acerca das relações matemáticas presentes nos gráficos (Curcio, 1987).

Em Portugal, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem a mesma ideia: mais do que insistir na construção, o professor deve procurar ir além da informação imediata resultante de uma simples leitura dos dados. Para estes autores, “os gráficos não devem surgir como um fim em si mesmo, mas como um meio de comunicar um pensamento ou para investigar dados através de diferentes representações” (p. 99).

Ainley (1994, 2000) partilha a mesma opinião e acrescenta que o facto das crianças entre os 8 e os 10 anos estarem envolvidas em projectos com uma duração de algumas semanas e onde os gráficos aparecem num contexto real leva-as a revelarem ideias intuitivas, por exemplo acerca do conceito de escala, com grandes potencialidades para a compreensão futura de aspectos mais complexos.

Os dois trabalhos citados (Ainley, 1994; Curcio, 1987) ilustram uma das perspectivas de investigação que se tem dedicado ao estudo dos gráficos. De acordo com Roth (in press), assistimos a

dois focos de interesse nas investigações acerca deste tema. Um, aborda-o seguindo o caminho das dificuldades dos alunos ao lerem ou interpretarem gráficos e onde os seus conhecimentos prévios surgem como uma das causas principais para as suas dificuldades (Bright & Friel, 1998a; Bright & Friel, 1998b; Curcio, 1987; Curcio, 1989; Mevarech & Kramarsky, 1997; Pereira-Mendoza 1995; Pereira-Mendoza & Mellor, 1990). O outro tem sugerido uma abordagem sócio-cultural para analisar os desempenhos dos sujeitos (Gerber, Boulton-Lewis & Bruce, 1995; Nemirovsky, Tierney & Wright, 1998; Roth, in press; Roth & McGinn, 1997).

Curcio (1989) refere que existem níveis diferentes para a compreensão dos gráficos, independentemente do seu tipo: ler os dados, ler entre os dados e ler além dos dados. Ao considerar que existe uma evolução para a compreensão dos sujeitos acerca das diferentes formas de representação, este autor, mais do que acentuar dicotomias entre a construção e a interpretação, concebe-a num contínuo. Mais do que valorizar uma, por oposição a outra, considera-as como um processo natural de construção e deixa, assim, um espaço essencial para o trabalho a desenvolver com os alunos na sala de aula.

No primeiro nível de compreensão, ler os dados, o sujeito limita-se a ler literalmente o gráfico, ou seja, a retirar os factos explícitos, como ler directamente a informação que encontra na legenda ou nos eixos. Nesta altura, não é feita qualquer interpretação, limitando-se o sujeito a responder a questões imediatas. Na sala de aula, as tarefas que se limitam a este tipo de actividade apresentam um baixo nível cognitivo. No nível seguinte, ler entre os dados, começa a desenhar-se alguma interpretação do sujeito quanto aos dados e à forma como são integrados no gráfico mas, para isso, tem de ser capaz de comparar quantidades ao mesmo tempo que recorre a outros conceitos e capacidades, que lhe permitem identificar as relações matemáticas presentes no gráfico. Ao conseguir fazer isto, o sujeito começa a ser capaz de fazer inferências simples. No último nível, ler além dos dados, o sujeito infere ou prediz um determinado resultado ou acontecimento em função de vários conhecimentos e não só baseado em alguma informação presente no gráfico. Nesta altura, o sujeito consegue responder a perguntas implícitas com base em extrapolações, previsões ou inferências com base numa interpretação. É este o nível desejável a atingir pelos alunos uma vez que o envolvimento em actividades progressivamente mais complexas pode reforçar a sua autonomia e auto-estima, além de contribuir para o desenvolvimento de cidadãos informados, reflexivos e, mais tarde, de consumidores esclarecidos.

Pensar que a evolução na compreensão de um qualquer gráfico acontece num contínuo entre uma primeira fase onde o sujeito lê o que está presente, ou seja, fica num nível concreto e limitado pelo que está visualmente presente num gráfico, até uma forma mais evoluída onde retira informações abstractas com base numa análise da informação e dos seus conhecimentos anteriores, mostra-nos como “nunca é cedo demais para envolver as crianças na recolha de dados e na construção dos seus próprios gráficos” (Curcio, 1989, p. 6). Mas, para isso, o professor tem de estar atento aos interesses reais das crianças e ao facto de que, ao mesmo tempo que coloca questões simples aos alunos, deve encorajá-los com outras que não se limitem a uma simples leitura da informação presente num gráfico. Até que o aluno dê uma resposta, o professor não pode determinar qual o seu nível de compreensão. Depois, vygotkianamente falando, pode promover a sua progressão no sentido dos aspectos mais abstractos, como acontece com a inferência. Podemos, então, afirmar que, de um modo geral, as tarefas com gráficos desafiam os sujeitos a integrar, aplicar e a transformar aquilo que sabem (Curcio, 1987).

Desde os anos 70, com os trabalhos pioneiros de Tukey (1977), que a análise exploratória de dados tem influenciado a forma como se deve ensinar Estatística. Os gráficos, bem como outros materiais com suporte representativo, parecem ser uma excelente ajuda para investigar acerca da informação e para começar a introduzir alguns conceitos estatísticos (Hawkins, Jolliffe & Glickman, 1991). Além disso, com as potencialidades gráficas trazidas pelas novas tecnologias, os alunos e os professores passam a ter uma ferramenta de investigação poderosa que lhes permite fazer simulações facilmente, para estudar padrões gerais ou variabilidades individuais.

Contudo, como referem Padilla, Mckenzie e Shaw Jr. (1986), a prática comum nos anos de escolaridade básica ainda continua a ser dedicar mais tempo a trabalhar a construção dos gráficos, por oposição à interpretação. Isto acontece tanto nas aulas de Matemática como nas disciplinas de Ciências, onde frequentemente se recorre aos gráficos enquanto forma de simplificar uma quantidade de dados ou para demonstrar uma determinada relação entre variáveis.

O segundo foco de interesse dos educadores matemáticos acerca da compreensão dos gráficos decorre de uma orientação diferente, onde se considera que compreender os gráficos é “uma actividade fortemente sócio-cultural” (Gerber, Boulton-Lewis & Bruce, 1995, p. 78). Pelo facto de se terem observado investigadores experientes com dificuldades em ir além dos aspectos coloquiais presentes num gráfico e que, atendendo à sua formação altamente especializada, não podem dever-se a uma falta de conhecimentos ou a incapacidades generalizadas, foi necessário pensar em explicações alternativas para os desempenhos destes sujeitos (Roth, in press). Simultaneamente, esta nova abertura possibilitou interpretar os resultados das crianças em idade escolar de uma outra forma.

Assim, os dois conceitos desta teoria que nos podem ajudar a compreender o comportamento de um sujeito face a um gráfico são: o de comunidade de prática e o de transparência. O conceito de comunidade de prática (Lave & Wenger, 1991), aplicado ao domínio dos gráficos, procura traduzir a ideia de que, pelo facto dos sujeitos viverem num mundo social, onde a informação gráfica está presente, vão-se aproximando dela naturalmente, observando e experimentando. O significado surge à medida que o sujeito se vai apropriando de uma determinada prática, sem motivações externas para além do próprio desempenho, controlando desta forma o seu próprio progresso. Como afirmam Boaler, William e Zevenbergen (2000) “é só através de um processo social de partilha de experiências que os sujeitos ganham um sentido e um significado” (p. 193). É por isso que Nemirovsky, Tierney e Wright (1998) consideram que compreender o significado de um gráfico depende do enriquecimento de um vasto campo de experiências nos mais variados domínios, visual, quinestésico e narrativo, bem como da adopção de um conjunto de convenções matemáticas. Simultaneamente, não existem dois processos de construção idênticos e dois sujeitos não trazem para a resolução de uma situação os mesmos recursos.

O segundo conceito adaptado da teoria sócio-cultural é a metáfora de transparência, ou ver através de. O exemplo trazido por Nemirovsky, Tierney e Wright (1998) é o de um aluno que, ao traçar uma linha numa folha para construir um gráfico, diz: “isto é uma linha recta” (p. 167). A ideia que o aluno espera partilhar ao fazer esta afirmação é de que o traço pode não estar a ser visto por alguém como uma linha recta e, por outro lado, esse traço vai ser o objecto da atenção do sujeito e os gestos que venha a executar relacionam-se com ele.

Para estes autores, a novidade destes dois conceitos na ajuda da compreensão que os sujeitos vão desenvolvendo acerca dos gráficos é que a sua aprendizagem faz parte de um vasto campo de outras aprendizagens onde agir, falar e fazer gestos são essenciais para os alunos inventarem os seus próprios sistemas de representação. Estes sistemas de representação são importantes não porque se espera que venham a dar origem a ideias matematicamente correctas, de uma forma espontânea e automática, mas porque estas actividades “podem gerar o contexto significativo que lhes é necessário” (Nemirovsky, Tierney & Wright, 1998, p. 168).

De acordo com esta perspectiva, para os sujeitos se tornarem competentes em relação aos gráficos precisam de participar activamente no desenvolvimento e na manutenção dessa prática. Se aceitamos que “a competência linguística de um aluno beneficia com a sua participação em práticas linguísticas, então temos de fazer associações semelhantes de práticas matemáticas e científicas” (Roth & McGinn, 1997, p. 101). Mais do que uma capacidade abstracta partilhada por alguns sujeitos iluminados, passa a ser uma actividade social partilhada, tal como muitas outras. Quando, na sala de aula, os gráficos são produzidos por um esforço colectivo, facilitam a comunicação entre os alunos e a partilha de significados. Ao tornarem-se ferramentas quotidianas dos sujeitos, os gráficos tornam-se objectos reais e deixam de ser experiências distantes, abstractas e sem sentido. Como refere Roth e McGinn (1997), “nas salas de aula, tal como nos laboratórios dos cientistas, os gráficos podem ser

ferramentas para construir factos e mediadores, numa relação reflexiva, das interacções durante as quais os factos são produzidos” (p. 100).

Estes autores, ao finalizarem o artigo, deixam uma pergunta em aberto sobre a valorização social de uma determinada prática na sala de aula: Como é que uma comunidade escolar apoia e aceita o espalhar de uma *nova* prática no seu seio? Sem dúvida que esta “será uma questão a que investigação não pode fugir” (Roth & McGinn, 1997, p. 104) e para a qual ainda não encontrou uma resposta definitiva, mas que começa a ter algumas sugestões.

Schliemann (1995) considera necessário converter as actividades que se realizam na sala de aula em situações socialmente valorizadas, pois só assim se consegue que os conceitos matemáticos sejam de facto ferramentas. “As ferramentas têm de ser compreendidas nos contextos onde são úteis. Compreendemos uma ferramenta essencialmente por aquilo que nos permite fazer com ela” (Disessa et al., 1991, p. 158). A escola, ao fornecer o acesso a uma variedade de situações e ferramentas — podendo ser aqui incluídas as representações gráficas — possibilita ao sujeito estabelecer uma série de relações entre elas, o que de outra maneira dificilmente conseguiria. É na escola que o sujeito compreende que os conceitos matemáticos fazem parte, nos termos de Vergnaud (1990), de um campo conceptual.

3. Alguns erros e dificuldades dos alunos na apropriação dos gráficos

Nas sociedades modernas importa, cada vez mais, aos cidadãos, fazer previsões e tomar decisões com base numa quantidade vasta de dados. Consequentemente, a forma como estes se organizam e apresentam no sentido de facilitar as suas escolhas originam a necessidade de os sujeitos terem de desenvolver “uma capacidade extremamente importante: o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 99). A eleição de uma ou outra forma de representação confere aos gráficos, e de um modo geral às representações gráficas, um poder imenso pois facilmente induz em erro um leitor mais desprevenido e, é por isso que importa, simultaneamente, desenvolver competências que ajudem os sujeitos a compreender e a interpretar a informação representada graficamente, mas também a estarem atentos a eventuais enganos que os mesmos possam conter, ou seja, a desenvolverem capacidades de observação e de espírito crítico.

Apesar do interesse dos investigadores em educação Matemática pelo tema dos gráficos, Pereira-Mendoza e Mellor (1990) consideram serem ainda necessários estudos que “ajudem a determinar os factores que contribuem para as dificuldades dos alunos em relação aos gráficos” (p. 151). Numa revisão da literatura acerca deste tema, concluem que a capacidade dos alunos em lidar com gráficos aumenta à medida que progridem na sua escolaridade e que, apesar de não manifestarem grandes dificuldades na sua leitura, o mesmo não acontece quando têm de responder a questões relacionadas com a interpretação, a construção ou fazer previsões baseadas na informação presente nos gráficos.

Em Portugal, Ponte (1984) chega a resultados semelhantes. Na sua opinião, um aluno pode responder a questões acerca de um gráfico baseando-se apenas numa simples leitura sem que contudo seja capaz de o interpretar ou inferir um determinado resultado com base na informação nele presente. Um outro aspecto citado por este autor, como gerador de dificuldades dos alunos, refere-se às suas experiências prévias, principalmente quando se trata de gráficos com características mais abstractas. A relação matemática descrita nos gráficos, que traduzem uma dependência entre as variáveis independentes e dependentes é, frequentemente, mal compreendida pelos alunos e, para muitos, estes são interpretados pictoricamente.

Contudo, algumas investigações começam a encontrar outros resultados, quando os alunos são expostos a metodologias de trabalho diferentes. Por exemplo, Ainley (1994) relata uma experiência que envolveu alunos durante algumas semanas, num contexto onde os gráficos surgiam naturalmente, à medida que o próprio trabalho evoluía. No final, quando era pedido aos alunos, com idades entre os 8 e

os 10 anos, para os interpretarem, verificou que eles não revelaram as dificuldades encontradas por outros autores (Padilla, McKenzie & Shaw, 1986). No estudo de Ainley (1994) os alunos foram capazes de interpolar e extrapolar informações com base nos gráficos construídos e não apresentaram dificuldades em utilizar as escalas dos eixos convenientemente.

Num trabalho mais recente, Ponte (1991) considera que o computador possibilita libertar os gráficos do peso da sua construção, ficando por isso em aberto o espaço para a sua interpretação. As potencialidades trazidas por esta ferramenta, ao dispor do conhecimento, geram um novo espaço de diálogo entre os alunos, entre os alunos e o professor e entre os alunos e o próprio saber matemático. Como refere o autor, o papel do professor deixa de ser como *se constrói um gráfico* para passar a ser *o que nos diz o gráfico* e o papel do aluno passa a ser o de explicar o que está a acontecer para além da mera leitura dos dados.

Li e Shen (1992), com base nos resultados de um concurso anual realizado em Hong-Kong, desde 1986, e no qual alunos não universitários têm de desenvolver um projecto de Estatística, analisaram as realizações dos diferentes alunos. Neste trabalho não são apresentados elementos que nos ajudem a identificar qual a idade precisa dos alunos ou os seus anos de escolaridade. Alguma informação acerca do papel do professor no decurso dos projectos ou de como os projectos eram escolhidos pelos alunos e como estes os trabalhavam, por exemplo, em grupo, durante uma aula de Matemática também não é revelada pelos autores. No estudo são analisados somente alguns problemas trabalhados pelos alunos e o tipo de desempenhos que manifestaram nos mesmos. Os problemas analisados pelos autores apresentam todos algum tipo de gráfico.

Os resultados encontrados pelos autores apontam para indicadores acerca de como os alunos compreendem os gráficos, quando têm de os utilizar em situações reais para apresentar determinados dados. Uma primeira constatação feita foi de que, nos anos 80, quando das primeiras competições, os alunos apresentavam nos seus projectos os gráficos feitos maioritariamente à mão. Presentemente, na maioria dos projectos, os alunos recorrem ao computador e a um *software* que lhes permite construir gráficos cada vez mais sofisticados. Mas, “há uma tendência para os alunos confiarem demasiado nos computadores e pensarem menos noutras formas alternativas de apresentação” (Li & Shen, 1992, p. 3). Para estes autores, esta confiança pode ser o resultado dos alunos terem um pobre domínio do *software* ou de partilharem a crença de que os computadores nunca se enganam.

A análise realizada por estes autores possibilitou-lhes ainda verificar outros pontos fracos nos projectos analisados, nomeadamente, no que se refere à construção dos gráficos de barras: “1) omissão de escalas num ou em ambos os eixos, 2) esquecimento do zero, sem o indicar no eixo vertical, 3) insuficientes divisões nas escalas, 4) não legendar os eixos” (Li & Shen, 1992, p. 4). Neste tipo de gráficos, as questões que parecem trazer maiores insucessos aos alunos prendem-se com as escalas. De acordo com os autores, os problemas manifestos pelos alunos podem traduzir algumas dificuldades conceptuais, como por exemplo que a área das barras tem de ser proporcional às frequências. Este tipo de dificuldades encontra-se muitas vezes mascarado por preocupações artísticas presentes nas realizações dos alunos, onde o aspecto visual é muito valorizado (Li & Shen, 1992).

Em França, Girard (1996) chama a atenção para as hesitações que os alunos do ensino não superior manifestam quando constroem um gráfico de barras e têm de decidir em qual dos eixos têm de colocar as frequências e, ainda, qual o valor relativo de cada uma na totalidade dos dados.

Em Portugal, Porfírio e Gordo (in press) observaram que os alunos apresentam dificuldades em resumir a informação apresentada por meio de gráficos ou tabelas, limitando-se mesmo, na maioria dos casos, a enumerar os dados presentes nestas duas formas de representação. Numa outra investigação realizada junto de 49 alunos portugueses, do 7º ano, Carvalho (1996) verificou que são nas tarefas com gráficos de barras, comparativamente a tarefas com tabelas, aquelas onde os alunos cometem mais erros quando lhes é pedido para calcularem as três medidas de tendência central, apesar de também serem aquelas onde os alunos manifestam um maior grau de adesão. Como afirma a autora: “a presença de gráficos na tarefa torna-a mais familiar e só aparentemente mais fácil, pois o aluno tem que

compreender o seu significado matemático” (p. 171), que não se limita aos seus aspectos visuais e concretos de comparação.

As dificuldades sentidas pelos alunos quanto a uma outra forma de representação gráfica, os pictogramas, são-nos trazidas por Curcio (1989). Para o autor, quando uma legenda é imposta, deixa de existir uma relação de um para um entre o ideograma e o item que ele simboliza. Assim, a razão entre cada ideograma e a frequência absoluta que ele representa, passa a ter de ser levada em conta para o interpretar. Este facto pode causar dificuldades aos alunos, uma vez que os ideogramas são muitas vezes fracções (Curcio, 1989). Mas, por vezes no contexto do problema, um simples pictograma pode ter envolvidas outras competências matemáticas, como a noção de área, a compreensão do que significa ampliar ou reduzir proporcionalmente uma figura. Um simples pictograma revela-se, assim, numa situação complexa para o aluno pois arrasta consigo todo um campo conceptual vasto.

De entre os gráficos estudados pelos alunos durante as aulas de Estatística, os gráficos circulares revelam-se como sendo dos mais complicados. Curcio (1989) chama a atenção que este tipo de gráfico só deve ser introduzido após terem sido dadas as fracções. Como refere, “o sucesso na construção deste tipo de representações depende da compreensão que a criança tem do raciocínio proporcional e da sua capacidade para utilizar um compasso e especialmente o transferidor” (p. 4). Estes dois factos, e apesar da sua popularidade junto dos *media*, fazem com que os gráficos circulares sejam, entre os gráficos tradicionais, os mais difíceis de os alunos compreenderem e construírem (Curcio, 1989). Em relação a este tipo de gráficos, segundo este autor, assiste-se a uma situação paradoxal: por um lado, verifica-se alguma pressão da comunidade dos educadores matemáticos e estatísticos para que a sua aprendizagem deixe de ser tão enfatizada nas salas de aula; mas, por outro lado, a sua proliferação junto da comunicação social faz com que devam permanecer no currículo.

A noção de ângulo e a sua medição são igualmente apontados por Girard (1996) como sendo duas noções que os alunos no ensino básico podem ainda não ter adquirido completamente, e este facto dificulta a sua compreensão dos gráficos circulares. A passagem de frequências a ângulos e de ângulos a percentagens e a relação entre estas e a totalidade da amostra é igualmente sentida como problemática para o autor.

Li e Shen (1992), no estudo já referido, verificaram ser frequente os alunos construírem os sectores de um gráfico circular sem atender à proporção entre a sua área e a percentagem que ela representa, aparecendo ainda alguns sectores com duas percentagens diferentes. No mesmo estudo, estes dois autores constataram que, na maioria dos projectos, os alunos se limitavam a apresentar graficamente a informação, as explicações acerca da mesma era escassa ou não estava presente. Como referem, “os alunos pareciam não se lembrar que uma simples estatística, como as medidas de tendência central, é uma forma eficaz para revelar factos e inferir informações que estão além dos dados mais imediatos” (p. 5). Nos seus projectos, as interpretações e análises que faziam sobre os mesmos eram, na maioria dos casos, uma simples descrição e eram poucos, de acordo com os autores, os que conseguiam ir além do sugerido pelas representações gráficas. Para os autores, podem ser apontadas algumas explicações para este facto, como o fraco domínio linguístico dos sujeitos mas, principalmente, as explicações devem ser procuradas na compreensão que os alunos têm dos conceitos estatísticos e, quando estão presentes representações gráficas, na sua leitura, construção e interpretação.

Um tipo diferente de estudo foi realizado por Reading e Pegg (1996), onde os autores estavam interessados em compreender como alunos entre os 7 e os 12 anos resumiam um conjunto de dados para a forma de uma tabela ou de um gráfico. No final da sua investigação, os autores verificaram que os alunos iam evoluindo à medida que progrediam na sua escolaridade no que se refere a conseguir resumir os dados presentes numa tabela com base numa medida de tendência central, mas o mesmo não se verificou quando os dados eram apresentados na forma de gráfico. Para os autores, esta dificuldade está mais associada a uma dificuldade em compreender o gráfico do que em compreender os parâmetros estatísticos.

Inclusivamente, quando os autores pediram aos alunos para justificarem as suas respostas acerca das razões tidas para escolherem o parâmetro que resumia melhor aqueles dados, estes mostraram ter mais dificuldades na presença de gráficos.

Ao reflectirmos acerca das dificuldades encontradas pelos alunos quando se confrontam com uma representação gráfica verificamos que tal como afirma Girard (1996),

existe uma hipótese implícita de que os gráficos, circulares ou de barras, não levistem outros problemas além dos da proporcionalidade e que por isso o momento [de trabalhar os gráficos estatísticos nas aulas de Matemática] é mais uma oportunidade para a trabalhar nas percentagens, nas escalas e na regra de três simples. (p. 6)

Contudo, na opinião do autor, se bem que este momento seja uma boa oportunidade para trabalhar a proporcionalidade, também o deve ser para trabalhar conteúdos de Estatística, como a definição das variáveis ou a recolha de dados, não esquecendo os conteúdos relacionados com os próprios gráficos, como a vantagem de escolher um ou outro tipo, a opção por uma tabela ou um gráfico, a percepção da realidade permitida em cada um dos tipos de gráfico (Girard, 1996).

Em Portugal, Carvalho (2001, 2004) verificou que alunos do 7.º ano de escolaridade durante a realização de tarefas estatísticas onde não era indicado explicitamente a utilização de gráficos privilegiavam esta forma de apresentação de resultados por estes serem visualmente mais imediatos, como a autora ilustra com o seguinte exemplo. A concepção partilhada por estes dois alunos, que trabalhavam a pares, é reveladora de um conhecimento social associado aos gráficos. Esta forma de representação gráfica facilita a leitura e comunicação de dados, o que permite evidenciar a ideia de alguns autores acerca da transparência dos gráficos (Ainley, 1995, 2000).

(...)

32. T.: *Agora já temos o que as pessoas nos disseram, fazemos como, um gráfico, uma tabela...*

33. J.: *Fica melhor no gráfico, fica mais visual.*

34. T.: *Tens razão vê-se bem.*

35. J.: *Queres fazer ou faço eu? (...)*

No entanto, esta facilidade é meramente aparente como podemos ver num outro exemplo apresentado pela mesma autora (ver figura 1).

1. A seguinte notícia apareceu numa revista de automóveis.

“Ao longo do ano de 1991 venderam-se em Portugal 192556 automóveis enquanto que no ano de 1990 venderam-se 213287. As cinco marcas mais vendidas foram: Citroen 15899 (15400); Fiat 26572 (29496); Opel 22659 (28518); Peugeot 14319 (14863); Renault 40909 (47648). Entre parêntesis encontram-se os valores correspondentes a 1990.”

1.1 Escolhe outra maneira de apresentares estes resultados de modo a facilitar a leitura da notícia anterior.

*Em 1991 venderam-se em Portugal 192556 carros e
em 1990 venderam-se 213287 automóveis as marcas
mais vendidas foram fiat, opel, Peugeot, Renault e Citroen*

Figura 1. Texto escrito por um aluno para comparar as duas distribuições.

Esta tarefa permitiu aos alunos apresentarem diferentes tipos de estratégias de resolução, mas em qualquer uma delas constatamos que a utilização de gráficos pelos alunos, mesmo quando ficamos pela mera construção, já traz dificuldades como acontece quando a ordem de grandeza dos números que os

alunos têm de utilizar foge ao que normalmente utilizam na sala de aula. Os alunos que recorreram aos gráficos como uma forma possível de tornar a leitura da informação mais simples confrontaram-se com a grandeza dos números e com o facto de terem duas distribuições: uma situação pouco usual na sala de aula de matemática durante a unidade de Estatística. Este facto fez com que as dificuldades sentidas habitualmente com as escalas, se manifestem, nomeadamente, para encontrar um intervalo que permitisse abranger todos os dados da distribuição. Os alunos que não o conseguiam descobrir, tendiam a abandonar esta resolução, optando, na maioria das vezes, por reescrever um texto, como acontece no exemplo apresentado anteriormente, ou por construir dois gráficos como acontece no exemplo que se segue (ver figura 2).

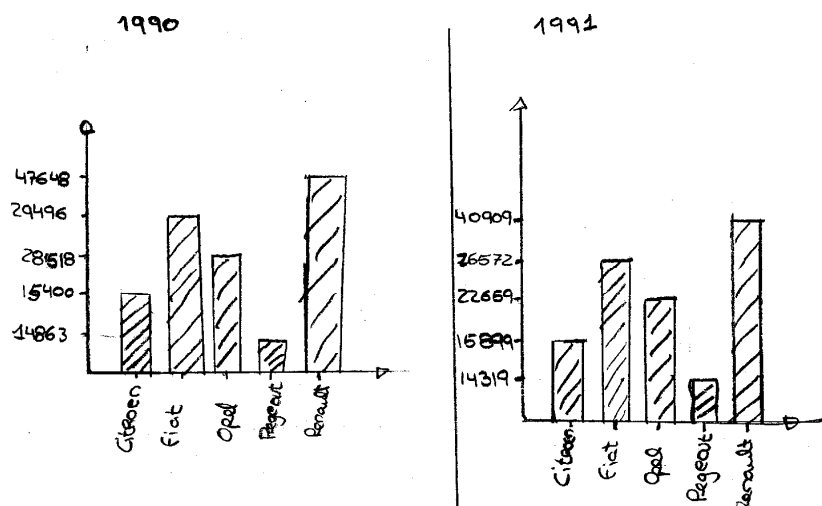


Figura 2. Gráficos construídos por um aluno para comparar as duas distribuições.

Neste exemplo constatamos que a existência, na mesma pergunta, de dois conjuntos de dados (referentes aos dois anos de vendas de automóveis) fez com que os alunos tendessem a preferir construir dois gráficos, provavelmente, porque a conjugação dos dados referentes aos dois anos de vendas de automóveis no mesmo gráfico, se afigurava mais complexa. Uma forma encontrada pelos alunos num outro exemplo pode ser considerada uma situação intermédia. Neste próximo exemplo, os alunos procuraram encontrar uma solução para a grandeza dos dados e para o facto de terem duas distribuições diferentes (ver figura 3).

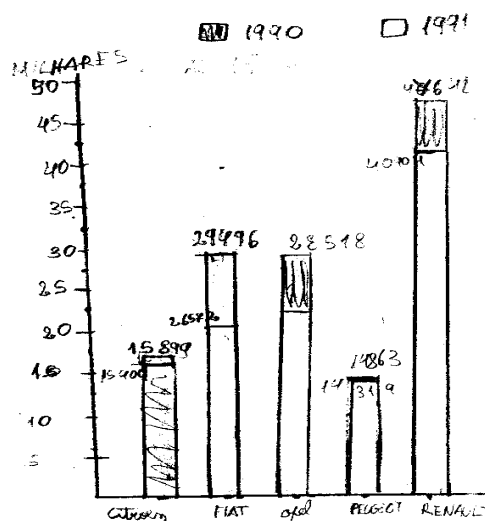


Figura 3. Gráfico construído por um aluno para comparar as duas distribuições.

Numa outra tarefa (Carvalho, 2001), os alunos em pares tinham resolver a seguinte tarefa (ver figura 4).

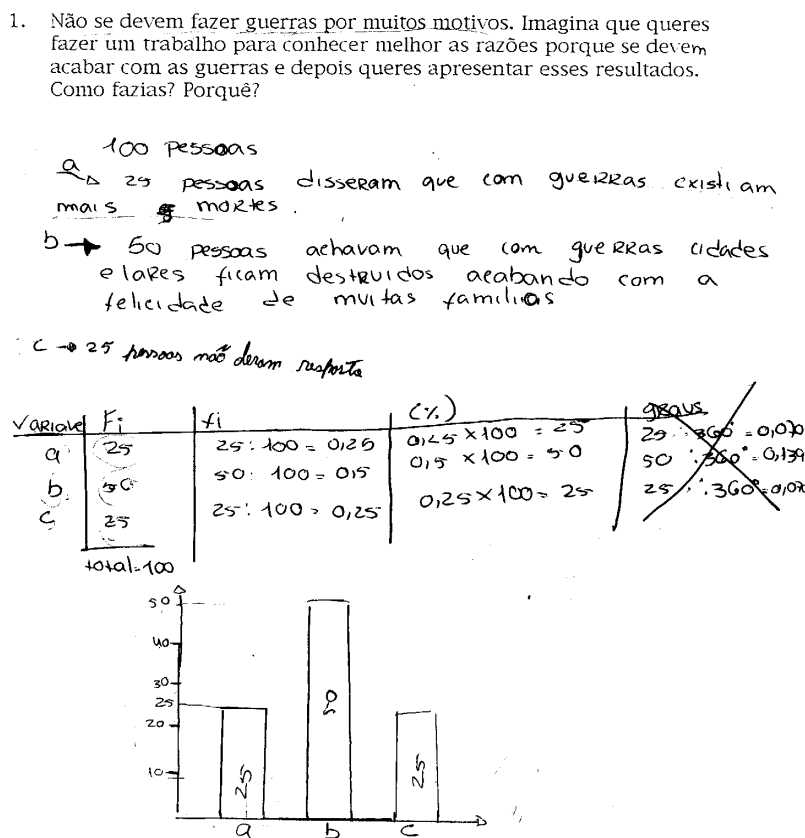


Figura 4. Tabela e gráfico construídos por um par de alunos para representar uma distribuição.

Quando analisamos a interacção que acompanha a resolução dos alunos deparamo-nos com a dificuldade que para muitos representam os gráficos circulares.

(...)

62. T.: Os graus é dividir os F_i pelos 360 graus.

63. J.: É melhor fazer o gráfico de barras, o circular é pior. Temos que fazer com o “coiso” [Transferidor].

64. T.: Sim tens razão, é mais difícil que o de barras. (...)

Os alunos que optaram por esta resolução escolheram uma amostra composta por 100 elementos, o que lhe permitiria calcular imediatamente as percentagens, pois estas são iguais às frequências absolutas. No entanto, optam por construir uma tabela onde indicam todos os cálculos que tem de realizar para encontrar quer as frequências relativas quer as percentagens, assim como a medida dos ângulos, que abandonam quando decidem optar pelo gráfico de barras. Esta situação sugere-nos uma preocupação dos alunos em mostrar que dominam os conhecimentos estatísticos apropriados nas aulas, fruto do contrato didático habitual, mas também revela que a manipulação do transferidor associada à construção dos gráficos circulares não é pacífica para alguns alunos do 7.º ano. A preferência por desenhar gráficos de barras alerta-nos para a dificuldade que os alunos sentem em relação à medição dos ângulos nos gráficos circulares (Curcio, 1987). Caso bem claro no último exemplo que iremos analisar de um aluno que realiza uma outra tarefa individualmente (Carvalho, 2001).

Neste caso, o aluno não apresenta dificuldades na aplicação da regra de três simples, uma vez que efectuou correctamente os cálculos necessários para encontrar os valores dos ângulos. Porém, a utilização do transferidor não parece ser uma tarefa simples para este aluno, principalmente, quando tem de traçar os restantes ângulos, como constatamos quando observamos que o único ângulo que está correctamente assinalado é o primeiro a ser traçado no círculo. Neste exemplo, verificamos que, para o aluno, a necessidade de elaborar uma legenda não é fundamental, ou seja, é mais importante embelezar o gráfico do que comunicar uma informação que, supostamente, deveria transmitir com o gráfico que elabora. Assistimos, ainda, que tal como acontecia com os exemplos anteriores, a dificuldade dos alunos não parece residir nos aspectos relacionados com os cálculos (ver figura 4).

2. O Paulo elaborou um inquérito sobre "O que mais gosto de ver na televisão" aos rapazes do 7º ano da sua escola e obteve 125 respostas distribuídas da seguinte maneira:

Desporto	60
Filmes	35
Programas juvenis	15
Telediscos	15

- 2.1 Faz um gráfico circular que represente os resultados obtidos pelo Paulo.

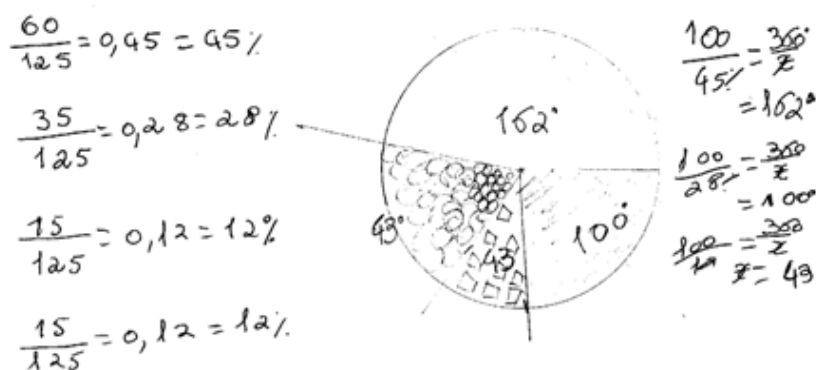


Figura 4. Gráfico circular construído por um aluno.

Nas sociedades actuais, as representações gráficas tornaram-se de tal forma naturais que, como afirma Vergnaud (1987), "não nos é fácil imaginar as dificuldades sentidas pelas crianças quando na presença de uma situação com um sistema simbólico tão presente" (p. 836). Como vimos, quando um sujeito está face a uma tarefa que deve resolver e na qual está uma representação gráfica e tem de mobilizar vários conceitos e competências de natureza diferente, é, pois, natural que cometa erros e tenha dificuldades. Como afirmam Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999): "quando se pensa em termos de aprendizagem, cometer erros ou dizer as coisas de modo imperfeito não é um mal a evitar, é algo inerente ao próprio processo de aprendizagem" (p. 27). Talvez por isso deva ser valorizado, não no sentido de um elo perdido na vasta cadeia do processo de apreensão de um significado, mas como um elo, que por um qualquer motivo, que convém saber, sofreu uma mutação.

4. Desafios ao professor... para terminar

Concordamos com Monteiro e Ainley (2003) quando afirmam que o professor desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de competências relacionadas com gráficos já que estas não surgem espontaneamente. Os alunos confrontam-se com gráficos no seu dia-a-dia, mas isso não significa que sejam cidadãos esclarecidos quando têm de tomar decisões baseadas em gráficos ou que interpretem um acontecimento social ou físico de forma crítica. Ao professor cabe a tarefa de ajudar os alunos a questionar o próprio gráfico, a orientarem a sua atenção para certos aspectos e a

desencorajarem outros, isto é, a negociarem um significado do próprio gráfico e o que representa conceptualmente.

Construir um gráfico, interpretar a informação que contém ou inferir relações para além do que é imediato constatar por uma simples leitura é um processo que exige tempo, envolvimento em diferentes tipos de actividades onde os gráficos estejam presentes, e por isso os gráficos construídos e analisados com os alunos têm de ter um significado claro para eles. Por outras palavras, ao professor cabe um papel fundamental de preparação de actividades onde os aspectos relevantes, quer de um ponto de vista conceptual onde se estudam as relações matemáticas quer de um ponto de vista estatístico onde se retiram análises dos dados presentes, sejam discutidos de uma forma crítica. Nesta análise não deve ser descuidada a forma como os dados são recolhidos, tratados, apresentados ou mesmo a possibilidade de ser necessário, ou não, gerar mais dados ou outras informações úteis à situação que se está a estudar.

Contudo, na maioria das situações de sala aula do ensino básico quando se trabalha com gráficos fica-se limitado ao desenvolvimento de competências relacionadas com a marcação de eixos, de pontos ou de escalas. Enfatiza-se a construção mecânica, muitas vezes mesmo quando se trabalha com software educativo nas aulas de Estatística, onde a leitura e descrição de dados está bastante presente mas onde a extrapolação de dados fica, frequentemente, esquecida. Neste último caso, esta necessidade acontece sempre que se estão a estudar situações com dados reais que obrigam os alunos a olhar criticamente um gráfico e os dados envolvidos.

A escolha de actividades pelo professor e o modo como os alunos se envolvem na sua resolução é determinante para a qualidade dos seus desempenhos e para as atitudes que lhes estão associadas. A atribuição de significado é essencial para a resolução de uma tarefa matemática ou estatística e para que haja apropriação de conhecimento. Para que essa atribuição de significado aconteça, os alunos necessitam de descontextualizar e recontextualizar o saber para que este passe de exterior e social para interior e pessoal. Desta forma, cria-se a oportunidade do aluno atingir níveis de significado dos conceitos, gradualmente mais ricos, promovendo-se o seu sucesso escolar e melhorando-se a sua literacia estatística. Por isso, no que se refere à Estatística, as actividades a desenvolver com os alunos deveriam privilegiar a planificação e a realização de investigações estatísticas e não apenas exercícios de aplicação de algoritmos ou de procedimentos. O recurso às novas tecnologias permite libertar os alunos de tarefas rotineiras deixando-lhes mais tempo para explorar, visualizar e interagir.

As actividades propostas e negociadas com os alunos devem acontecer preferencialmente num contexto de trabalho colaborativo, onde os alunos têm de produzir uma resposta, de apresentar os passos dados e explicar a origem dos mesmos e ainda como lhe permitiram chegar a essa resolução. Só assim os alunos chegam a níveis de conceptualização cada vez mais elaborados, atingindo-se desta forma os objectos científicos que integram o corpo de conhecimentos que pretendemos que os alunos apreendam.

Na sociedade actual onde a informação presente nos gráficos é muitas vezes utilizada para distorcer ou valorizar um determinado argumento é necessário promover nos alunos capacidades geradoras de análises críticas dos gráficos que constroem ou analisam, dos dados presentes ou dos que são necessários. Porém para isso acontecer, os gráficos que surgem em contexto real podem ser os mais enriquecedores para os alunos já que vão além de uma análise imediata ou de um contexto escolar.

A utilização de gráficos publicados nos meios de comunicação social, ou com uma outra origem, são uma fonte rica e motivadora para os alunos e professores, mas a utilização de materiais do dia-a-dia na sala de aula representa um desafio para o professor. Como lembram Monteiro e Ainley (2003), essa utilização obriga a uma recontextualização para um contexto diferente do previsto inicialmente, ou seja, o professor tem de adaptar esse material para a situação de aprendizagem que quer implementar com os seus alunos na sala de aula. O professor tem assim um papel fundamental tanto na planificação das actividades como na sua condução ao envolver os alunos no trabalho que se está a realizar e em manter o seu interesse pelas questões esclarecedoras e estimulantes que realiza durante todo o desenvolvimento da actividade.

Referências Bibliográficas

- Ainley, J. (1995). Re-viewing graphing: Traditional and intuitive approaches. *For the Learning of Mathematics*, 15(2), 10-16.
- Ainley, J. (2000). Exploring the transparency of graphs and graphing. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *PME 24 Proceedings* (vol. 2, pp. 2-9). Hiroshima: Hiroshima University.
- Batanero, C. (1999b). *Mini curso sobre análise exploratória de dados nos cursos de segundo grau*. Apresentado na Conferência Internacional Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística Desafios para o século XXI. Florianópolis, Brasil, Setembro de 1999.
- Bright, G. & Friel, S. (1998a). *Interpretation of data in a bar graph by students in grades 6 and 8*. Comunicação apresentada no Annual Meeting of American Educational Research Association. São Diego, Estados Unidos da América, Abril de 1998.
- Bright, G. W. & Friel, S. N. (1998b). Students' (grades 6-8) understanding of graphs. In L. Pereira-Mendoza et al. (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching of Statistics*, (vol. 2, pp. 655-661). Vooburg: International Statistical Institute.
- Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7.º ano. *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Almada: Associação de Professores de Matemática.
- Carvalho, C. (2001). *Interacções entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM
- Carvalho, C. (2004). Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. Ribeiro (Eds); *Ensino Aprendizagem de Probabilidades e Estatística*. Braga: Centro de Investigação em Educação.
- Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematical Education*, 1(5), 382-393.
- Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities*. Reston: NCTM.
- Disessa, A. et al. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, 117-160.
- Gerber, R., Boulton-Lewis, G. & Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representations of quantitative data. *Learning and Instruction*, 5, 77-100.
- Girard, J. C. (1996). Pourquoi faire des statistiques? In Commission InterIREM (Eds.), *Aides pour l'Enseignement de la Statistique au Collège* (pp. 1-21). Paris: IREM
- Grupo Azarquel (1993). *Estatística no 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.
- Li, K. Y. & Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14(1), 2-8.
- Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Lisboa: Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.
- Mevarech, Z. & Kramarsky, R. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 229-263.
- Monteiro, C. & Ainley, J. (2004). Developing critical sense in graphing. In: M. A. Mariotti (Eds), *Proceedings of the 3th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria (Itália), Cd-Rom.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- Nemirovsky, R.; Tierney, C. & Wright, T. (1998). Body notion and graphing. *Cognition and Instruction*, 16(2), 119-172.

- Padilla, J., Mckenzie, L. & Shaw, E. (1986). An examination of the line graphing ability of students in grades seven through twelve. *School Science and Mathematics*, 86(1), 20-25.
- Pereira-Mendoza, L. (1995). Graphing in the primary school: Algorithm versus comprehension. *Teaching Statistics*, 17(1), 2-6.
- Pereira-Mendoza, L. & Mellor, J. (1990). *Student's concepts of bar graphs: Some preliminary findings*. Comunicação apresentada na ICOTS 3, Dunedin, Nova Zelândia, Agosto de 1990.
- Ponte, J. P. (1984). *Function reasoning and the interpretation of cartesian graphs*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. (1991). Ciências da Educação, mudança educacional, formação de professores e novas tecnologias. In A. Nóvoa et al. (Eds.), *Ciências da Educação e Mudança*. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Porfírio, J. & Gordo, F. (in press). Estatística. In J. M. Matos (Ed.), *Relatório do Projecto AMEC*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Schliemann, A. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics: A vygotskian approach. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 45-60). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Reading, C. & Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 187-194). Valencia: Universitat de Valencia.
- Roth, W.-M. (in press). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal of Research in Mathematical Education*.
- Roth, W.-M. & McGinn, M. K. (1997). Graphing: Cognitive Ability or Practice? *Science Education*, 81(1), 91-106.
- Sheffield, L. J. & Cruikshank, D. E. (1996). *Teaching and learning elementary and middle school mathematics* (pp. 261-283). Englewood Cliffs N. J.: Prentice-Hall.
- Vergnaud, G. (1987). Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. In J. Piaget, P. Mounoud & J. P. Bronckart (Eds.), *Encyclopédie de la Pléiade de Psychologie* (pp. 821-844). Paris: Editions Gallimard.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES

¿Una Actividad Sencilla para los Futuros Profesores?

Blanca Ruiz

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores, México

Pedro Arteaga y Carmen Batanero

Universidad de Granada, España

batanero@ugr.es

Resumen. En este trabajo analizamos los informes realizados por una muestra de 101 futuros profesores de educación primaria en un proyecto de análisis de datos. Estudiamos los gráficos producidos, estadísticos calculados y su interpretación en la obtención de conclusiones sobre el proyecto. Concluimos que el concepto de distribución no es comprendido en profundidad por una parte importante de los futuros profesores.

1. Introducción

La enseñanza de la estadística debe desarrollar la capacidad de leer, analizar, y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007), pero este es un objeto matemático complejo que involucra las ideas de dato, variable estadística, valor, frecuencias, promedio, dispersión y forma. Todos estos conceptos se incluyen en el nuevo Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España (MEC, 2006) donde la estadística se estudia desde el primer ciclo (niños de 6 y 7 años). Será importante, por tanto, asegurar la comprensión adecuada de la idea de distribución y conceptos relacionados por los profesores que tienen que enseñar este tema.

En este trabajo evaluamos la comprensión de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria españoles sobre algunos objetos matemáticos básicos que subyacen en la idea de distribución, en particular sobre los gráficos estadísticos, medidas de posición central y dispersión. La evaluación se realiza a partir de sus producciones escritas en un proyecto abierto de análisis de datos en el que deben comparar pares de distribuciones. Se elige esta opción para la evaluación debido a que el trabajo con proyectos es recomendado en los Decretos curriculares españoles para trabajar en estadística con los alumnos de Educación Primaria.

2. Comprensión de la idea de distribución

Uno de los tipos de análisis estadísticos más frecuentes es la comparación de dos distribuciones (bien de la misma variable estadística en dos conjuntos de datos o de dos variables estadísticas en el mismo conjunto de datos). Por ello, algunos autores han tratado de ver cómo los estudiantes razonan al realizar esta tarea.

Un ejemplo lo tenemos en los resultados obtenidos por Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997) al tratar de analizar las barreras críticas en el aprendizaje de la estadística. A pesar de que la comparación de distribuciones, formalmente, se lleva a cabo a partir de las medidas de posición central y dispersión de las variables, Konold y sus colaboradores sugieren que algunos estudiantes ni siquiera usan intuitivamente la media para comparar dos conjuntos de datos. En lugar de ello se centran en las frecuencias absolutas y no en las relativas, al comparar dos conjuntos de datos, incluso cuando las muestras eran de tamaño muy diferentes. Una explicación es que algunos estudiantes no ven el dato como un valor de una variable, sino consideran sólo datos aislados. Como consecuencia no ven los resúmenes estadísticos (como media o rango) como propiedades de la distribución (Bakker y Gravemeijer, 2004).

Shaughnessy y Ciancetta (2002) estudian el razonamiento de los estudiantes al comparar distribuciones de datos. En algunos casos, sólo consideran las medidas de posición central, y son incapaces de pasar de ellas a la distribución. Al pedir a los estudiantes que escriban una distribución con un valor dado de la media o mediana, los estudiantes se limitan a repetir valores muy similares o equidistantes de la medida de posición central.

Otro requisito para comprender la distribución es la idea de variabilidad, que está siempre presente en los datos y tiene múltiples significados en estadística (Reading y Shaughnessy, 2004), entre otros los siguientes: variabilidad de resultados posibles en un experimento aleatorio; variabilidad en los datos recogidos; variabilidad en una variable aleatoria; variabilidad en las muestras o la distribución muestral. Es por ello importante que los estudiantes perciban la variabilidad y manejen modelos que permitan controlarla y predecirla.

Batanero, Estepa y Godino (1997) estudian la forma en que los estudiantes comparan dos distribuciones. Como estrategias correctas encuentran el comparar las medias o el reducir el conjunto de datos a una sola variable, restando los valores correspondientes, en el caso de muestras relacionadas y comparar luego la media con cero. También encuentran estrategias incorrectas como comparar valores aislados en las dos distribuciones.

En una serie de trabajos, Watson y colaboradores clasifican las estrategias de los estudiantes al comparar distribuciones (Watson y Moritz, 1999; Watson, 2001) de acuerdo al modelo jerárquico SOLO, definiendo niveles de comprensión. En el primer nivel de la jerarquía descrita por la autora, los estudiantes son capaces de comparar conjuntos de igual tamaño, mientras que en el segundo se comparan conjuntos de datos de diferente tamaño. Las estrategias de los estudiantes incluyen razonamiento proporcional y comparación de las gráficas y de las medidas de posición central de los dos grupos.

Shaughnessy (2007) indica que muchos de los errores descritos en las investigaciones sobre comprensión de gráficos enmascaran otros relacionados con la comprensión de la distribución. Estas investigaciones se han centrado preferentemente en dos puntos:

- Describir errores en la construcción de gráficos por parte de los estudiantes. Algunos de estos errores son: confusión de los ejes en el gráfico, representación incorrecta de los intervalos en un histograma de frecuencias, representar variables no relacionadas en una misma gráfica o usar un gráfico no adecuado para los datos representados.
- Definir niveles jerárquicos en la lectura e interpretación de gráficos. Por ejemplo Friel, Curcio y Bright (2001) diferencian entre “leer entre los datos” (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), “leer dentro de los datos” (interpretación e integración de los datos en el gráfico), “leer más allá de los datos” (predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico) y “leer detrás de los datos” (valorar críticamente el método de recogida de datos su validez y fiabilidad).

En lo que sigue tratamos de complementar las anteriores investigaciones centrándonos en futuros profesores, un colectivo cuya comprensión de la distribución no ha sido analizada en profundidad. Evaluamos esta comprensión a partir de un proyecto abierto, tarea que no ha sido usada en las investigaciones anteriores. Más en concreto, la comprensión de la distribución se evalúa a partir de los gráficos que elaboran sobre la misma, los estadísticos (medidas de posición central y dispersión) que calculan y la interpretación de estos elementos en relación a la pregunta planteada.

3. El Estudio

La actividad de la cual se tomaron los datos era una de las prácticas de un curso de Didáctica de la Matemática para futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada y se dedicaron a ella dos sesiones de clase, de dos horas de duración cada una. En la primera sesión se

propuso a los futuros profesores la realización de un proyecto en el que ellos mismos tomaron los datos necesarios.

El proyecto se llama “Comprueba tus intuiciones sobre el azar” y forma parte de una unidad didáctica diseñada para introducir los temas sobre “tratamiento de la información, azar y probabilidad” en la formación de maestros (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008). Fines complementarios de la actividad fueron: a) mostrar la utilidad de la estadística para probar conjeturas; b) comprobar que las intuiciones sobre el azar a veces son engañosas. La secuencia de actividades es como sigue:

1. *Presentación del proyecto, instrucciones iniciales y discusión colectiva.* Se comenzó la sesión con una discusión sobre las intuiciones y se propuso a los futuros profesores llevar a cabo un experimento para decidir si la clase en conjunto tenía o no buenas intuiciones sobre el azar. El experimento consiste en inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada (sin lanzarla realmente) y comparar con 20 lanzamientos reales de la moneda.
2. *Experimentos individuales y recogida de datos.* Los futuros profesores realizaron individualmente el experimento inventando una secuencia de 20 lanzamientos (secuencia simulada) y anotaron los resultados en una hoja de registro, escribiendo C para cara y + para cruz. A continuación lanzaron realmente la moneda anotando los resultados en la segunda parte de la hoja (secuencia real).
3. *Discusión y actividades de la clase.* Finalizado el experimento, se comenzó la discusión sobre cómo comparar los resultados de la clase en las secuencias reales y simuladas. Entre otras variables, algunos estudiantes sugirieron comparar el número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las dos secuencias.
4. Al acabar la clase el profesor proporcionó a los estudiantes una hoja de datos que contenía para cada alumno los valores de estas variables (101 estudiantes y 3 pares de variables; número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las secuencias real y simulada). Pidió que analizaran los datos individualmente, y produjeran un informe escrito en que justificasen si la clase en su conjunto tenía o no buenas intuiciones sobre el azar, en base al análisis de los datos. Los estudiantes tuvieron libertad para elegir los gráficos o resúmenes estadísticos que considerasen convenientes o bien usar ordenadores.

A la semana siguiente se recogieron y analizaron las producciones de los estudiantes, centrándonos en los gráficos contruidos, los resúmenes estadísticos calculados, la interpretación y conclusiones sobre la pregunta planteada.

4. Representación Gráfica de la Distribución

En primer lugar se analizaron los gráficos realizados por los estudiantes para representar la distribución de las diferentes variables estadísticas que intervienen en el proyecto.

Cuando los alumnos construyen un gráfico para todas o parte de las distribuciones contenidas en el fichero de datos, realizan una serie de acciones y emplean varios conceptos y propiedades que varían en los diferentes gráficos. En consecuencia, los gráficos producidos no son representaciones equivalentes de un concepto subyacente (la distribución de datos obtenida) sino configuraciones diferenciadas de objetos relacionados e interactuando con dicha distribución (Godino, Batanero y Font, 2007). En lo que sigue describimos los niveles de complejidad de los gráficos. De la muestra de los 101 estudiantes, 88 produjeron algún tipo de gráfico. Sólo tenemos en cuenta estos estudiantes en las tablas de frecuencia que se presentan en esta sección.

C1. Alumnos que producen una gráfica donde sólo representa los resultados de su experimento individual. Algunos alumnos producen una gráfica para representar los datos obtenidos en su experimento particular, sin considerar los datos de sus compañeros, al no haber comprendido el sentido del experimento. Estos estudiantes tratan de resolver la pregunta para su caso particular (si él mismo tiene una buena intuición), no habiendo comprendido el propósito del proyecto o no siendo capaces de realizar un análisis global de los datos. Generalmente manifiestan una intuición errónea sobre la

aleatoriedad, suponiendo que una buena intuición implicaría que su secuencia simulada fuese idéntica en alguna característica a su secuencia real. En general tratan de ver si sus resultados particulares en las dos secuencias han estado igualados. Aunque la impredecibilidad es una diferencia esencial entre experimentos aleatorios y deterministas, estos estudiantes tratan de predecir el resultado o al menos predecir una parte de los resultados de la secuencia aleatoria. Este fenómeno, denominado *ilusión de control* fue observado originalmente de Langer (1975) en diferentes tipos de juegos de azar, por ejemplo la lotería, donde observó en los sujetos una creencia ilusoria sobre su capacidad para influir en el resultado.

C2. Alumnos que representan los datos de toda la clase, sin llegar a la distribución de frecuencias. Son los estudiantes que no llegan a agrupar los valores similares del número de caras, rachas o la longitud de la racha mayor obtenidos en las secuencias reales o simuladas del total de alumnos en la clase, para formar la distribución de frecuencias. En lugar de ello, representan el valor (o valores) obtenidos para cada alumno dentro del gráfico en el orden en que los datos fueron obtenidos, que es un orden arbitrario. Aunque emplean las variables estadísticas, estos estudiantes no calculan las frecuencias asociadas a cada valor. Por tanto no emplean la idea de distribución de frecuencias de la variable.

C3. Producen gráficos separados para las distribuciones de las distintas variables. Son alumnos que forman tablas de frecuencias para las variables y a partir de ellas producen los distintos gráficos o representan directamente un gráfico de cada uno de los valores diferentes de la variable con sus frecuencias (para las 6 variables). En este nivel el alumno pasa del conjunto de datos a la variable estadística y su distribución de frecuencias. El usar para cada par de variables dos gráficos dificulta a veces la comparación, sobre todo en caso de no usar la misma escala de representación en los dos gráficos.

C4. Produce para cada par de variables un gráfico conjunto de las dos distribuciones. El alumno ha llegado a formar las distribuciones de las variables y las distribuciones de cada par de variables (por ejemplo para el número de caras en las secuencias real y simulada) las representa conjuntamente en el mismo gráfico, lo cual facilitará la comparación de las distribuciones. Cada gráfico de este nivel tiene también mayor complejidad al representar conjuntamente las distribuciones de dos variables estadísticas.

En la Tabla 1 presentamos la distribución de alumnos en función del nivel de gráfico. Del total de 101 alumnos, 88 (87,1%) producen algún tipo de gráfico para analizar sus datos, incluso cuando las instrucciones de la tarea no los requerían. Este alto porcentaje indica la necesidad sentida de los estudiantes de producir un gráfico y llegar, mediante un proceso de transnumeración a un conocimiento no disponible en los datos brutos.

Tabla 1 – Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica

Nivel de complejidad	Frecuencia (%)
C1. Representa sólo sus datos	2
C2. Representa resultados individuales	15
C3. Gráficos separados para cada muestra	46
C4. Gráficos conjuntos	25
Total	88

La mayoría de los que elaboran gráficos (52,2%), los producen separados para cada variable (nivel 3), el 28,4% de los estudiantes trabajan al nivel 4 y producen un solo gráfico para cada par de variable de las 6 variables en estudio. Son pocos los estudiantes que analizan sólo sus propios datos (nivel 1) y sólo 17% estudian los valores obtenidos por cada estudiante caso a caso sin llegar a formar la distribución. En consecuencia, el concepto de distribución, al menos a nivel intuitivo, parece ser adquirido y utilizado por los estudiantes para resolver la tarea propuesta.

Errores en los gráficos

Los alumnos tienen dificultades en la construcción de los gráficos. En el ejemplo que reproducimos en la Figura 1, ejemplo perteneciente al nivel de complejidad C3, podemos observar, por un lado, que las barras del diagrama no están centradas en los valores del eje X (longitud de la racha mayor). Por otro lado, las escala del eje Y no es homogénea; finalmente faltan en el gráfico el título y no se indica la variable representada en el eje X.

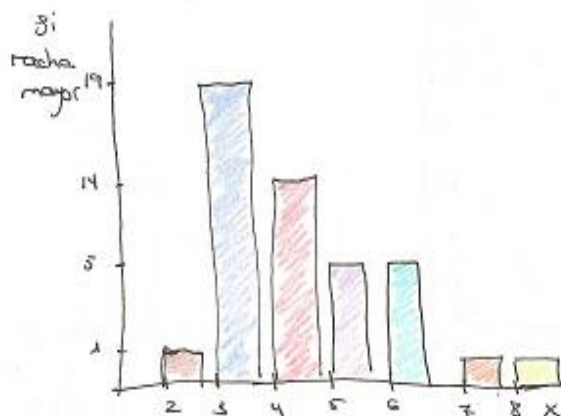


Figura 1 – Ejemplo de gráfico con errores en escalas

Algunos estudiantes representan variables no relacionadas sobre una misma gráfica; lo que indica que no comprenden el propósito de una gráfica conjunta ni discriminan las situaciones en que dos variables estadísticas son o no comparables. Un ejemplo lo tenemos en la Figura 2 en que el estudiante representa conjuntamente el número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en tres polígonos de frecuencias representados sobre la misma gráfica. Por otro lado, los polígonos están incompletos al no unir los extremos con el eje de ordenadas. Unos pocos estudiantes intercambian los ejes en las gráficas, representando las frecuencias en el eje X y los valores de la variable en el eje Y, confundiendo la variable dependiente e independiente en la distribución de frecuencias de la variable estadística mostrando un error similar al descrito por Ruiz (2006) en un estudio sobre comprensión de la variable aleatoria.

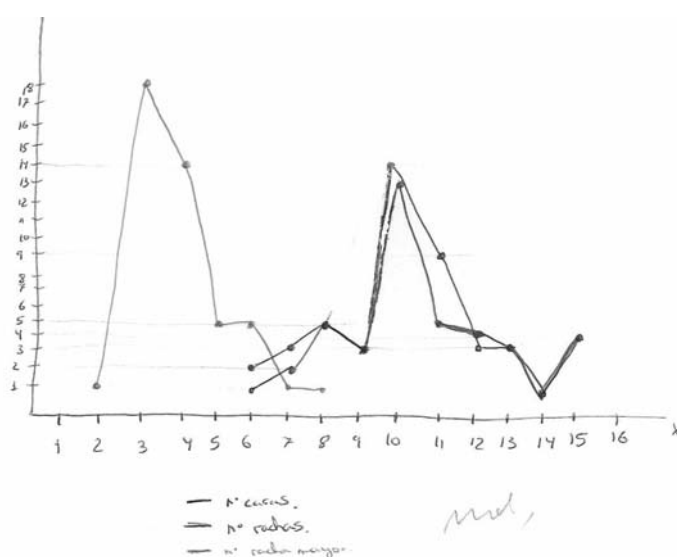


Figura 2 – Ejemplo de gráficos con variables no comparables

En la tabla 2 presentamos a los estudiantes clasificados según el nivel más alto al que llegan al construir el gráfico y según la corrección de los gráficos presentados. Vemos que la cuarta parte de los que produce gráficos, hacen errores de importancia (gráficos incorrectos) como representar variables no comparables, representar los productos de valores por frecuencia, o intercambiar frecuencias y valores de las variables en los ejes.

Otra cuarta parte tiene errores de menor importancia (gráfico parcialmente correcto): errores en las escalas, etiquetas o ejes, no usan la misma escala en los dos gráficos o bien no usan el mismo gráfico en las dos muestras dificultándose la comparación, no centran el intervalo en los histogramas, no hay coincidencia de los valores representados con la escala utilizada o no incluyen etiquetas. Por ejemplo, en la figura 3 mostramos un gráfico conjunto de las distribuciones del número de caras en las secuencias real y simulada, que es casi correcto, pero usa diferente gráfico (histograma y polígono de frecuencia) para el número de caras en las dos secuencias. Por otro lado, el polígono de frecuencias está incompleto al no unir los extremos al eje de ordenadas, error señalado en la investigación de Espinel (2007) con futuros profesores. Consideramos estos gráficos parcialmente correctos.

Tabla 2 – Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad y corrección de los gráficos

Nivel de complejidad semiótica	Corrección del Gráfico			Total en el nivel
	Correcto	Parcialmente Correcto	Incorrecto	
C1. Representa sólo sus datos	1		1	2
C2. Representa resultados individuales	10	1	4	15
C3. Gráficos separados para cada muestra	15	17	14	46
C4. Gráficos conjuntos	14	6	5	25
Total	40	24	24	88

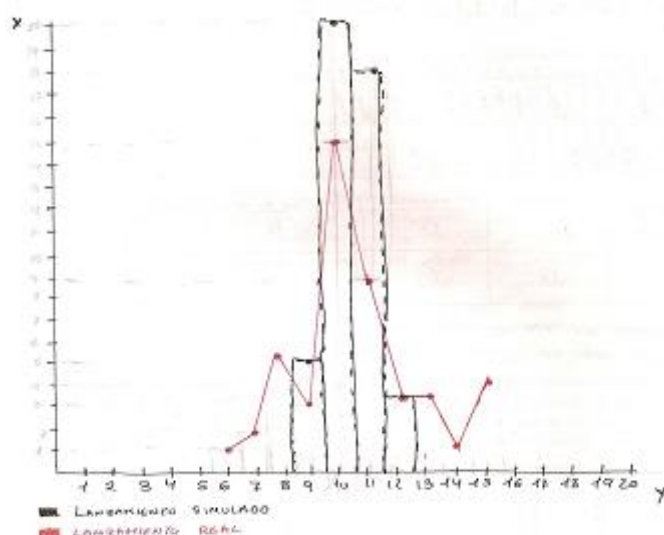


Figura 3 – Gráfico parcialmente correcto

Interpretación de los gráficos

En la Tabla 3 clasificamos los estudiantes, según nivel del gráfico e interpretación que hacen del mismo, donde una cuarta parte se limita a producir el gráfico sin llegar a interpretarlo o bien da una interpretación errónea. Aunque leen elementos aislados del gráfico (dominan la extracción de datos), no llegan al nivel de extracción de tendencias o análisis de la estructura (Bertin, 1967) en su lectura de gráficos.

Tabla 3. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica e interpretación de los gráficos

Categorías de gráfico construido	Interpretación del gráfico			Total en el nivel
	Correcto	Parcialmente Correcto	Incorrecto o no interpreta	
C1. Representa sólo sus datos	1	1		2
C2. Representa resultados individuales	4	10	1	15
C3. Gráficos separados para cada muestra	15	15	16	46
C4. Gráficos conjuntos	9	11	5	25
Total	29	37	22	88

Estos errores o falta de interpretación se producen, sobre todo, en los gráficos de nivel 3 y 4 pues la menor complejidad semiótica de los gráficos de nivel 1 y 2 hace que estos sean más sencillos de interpretar para los estudiantes.

En el siguiente ejemplo de interpretación incorrecta (en un gráfico de nivel 3), el estudiante muestra un lenguaje poco preciso al hablar de “frecuencia absoluta que más se repite” para referirse a la máxima frecuencia absoluta. Vemos también que el estudiante está comparando tres variables al mismo tiempo, aunque había representado cada una de las variables por separado en un diagrama de barras. Es decir, aparece un conflicto en la idea de moda, pues ella está buscando la moda (valor de más frecuencia) en el conjunto de las tres variables y no en cada variable por separado:

En el caso de las gráficas he optado por realizar un diagrama de barras en el cual se puede observar que una secuencia simulada la frecuencia absoluta que más se repite se encuentra en la tabla de racha mayor, siendo el valor 3 y la frecuencia 26. (Alumno SL)

En otros casos la interpretación errónea se debe a errores conceptuales, como en el siguiente caso donde aparece un error respecto a la dependencia funcional lineal:

Todos los gráficos presentan una dependencia funcional lineal de $-$ a $+$ o viceversa, según las circunstancias. (Alumno PF)

Un 42% de los estudiantes hacen una interpretación parcialmente correcta de los gráficos, analizando tan sólo la tendencia sin tener en cuenta la variabilidad o bien al contrario, comparando sólo los rangos de variación, sin tener en cuenta las tendencias. La mayor proporción relativa de los que hacen esta interpretación parcial se encuentra entre los estudiantes que producen un gráfico de nivel 2 que, como hemos indicado, no llegan a trabajar con la distribución de la variable estadística.

En el siguiente ejemplo la interpretación es parcialmente correcta. La alumna había hecho un gráfico de nivel C2, representando los datos alumno a alumno sin formar la distribución. Como usa un gráfico de líneas, este permite ver la mayor variabilidad en una de las dos series, porque en este caso las

oscilaciones del gráfico son más amplias. Lo consideramos parcialmente correcto porque no compara la posición central.

En cuanto al número de caras reales que ha obtenido el grupo es mucho más variable son más homogéneos que en la simulación. Para poder realizar esta afirmación hemos usado el rango. (Alumno JI)

El alumno AG por el contrario usa un vocabulario más impreciso; sin embargo se ven puntos de interpretación correcta del gráfico (en el diagrama de líneas al ascender la línea aumenta la frecuencia; detección de la moda).

El sistema de representación de datos utilizado es el diagrama de líneas ya que se pueden ver las diferencias entre la secuencia simulada y la real; si la línea asciende, la frecuencia aumenta. El punto más alto del diagrama corresponde al valor de la variable que tiene mayor frecuencia, como ocurre [pone un ejemplo]. (Alumno AG)

La mayor proporción absoluta de los que hacen esta interpretación parcial se encuentra entre los estudiantes que producen un gráfico de nivel C3 igualando en este nivel al número de interpretaciones correctas. Hay también una alta proporción de interpretaciones parcialmente correctas dentro de los que llegan a producir gráficos de nivel de complejidad C4; en algunos casos los gráficos son producidos con la ayuda de Excel, por lo que el alumno aunque llega al mayor nivel a la hora de representar los datos, no comprende bien el gráfico producido y no llega a interpretarlo en forma completa.

Una tercera parte de los estudiantes hace una interpretación completa del gráfico, detectando las tendencias y variabilidad de los datos, aumentando la proporción de los que lo hacen en los dos niveles superiores del gráfico construido:

Para comentar las diferencias el gráfico aporta más posibilidades, pues visualmente podemos percibir las diferencias. Las tablas necesitan de una interpretación de los datos. Centrándome en el gráfico observamos que los valores de la frecuencia simulada se concentran en torno a unos mismos intervalos 10 y 11, mientras que en la frecuencia real, los valores están más disgregados, aunque también vemos que se concentran en un núcleo 8-15, fluctuando al alza y a la baja. De esta forma en la frecuencia real comprobamos que 10 es la secuencia con mayor número de veces saliendo cara, tanto en la simulada (20) como en la real (14).... la horquilla de la secuencia real es mucho más amplia que la de la simulada. (Alumno FL)

Encontramos también interpretaciones correctas de los gráficos en estudiantes que sólo han trabajado a nivel 1 o 2. Por ejemplo, un alumno totaliza el número de caras y número de cruces en la muestra completa de alumnos y lo representa en un sector circular, realizando el siguiente comentario:

Si observamos en el sector circular, nos daremos cuenta que los alumnos han puesto al azar más caras que cruces y que en la secuencia real dan unos resultados casi iguales en el porcentaje de caras y cruces. (Alumno CG)

La interpretación de este gráfico por parte del alumno es correcta, pues en el gráfico de sectores construido hay mayor frecuencia de caras y los porcentajes están muy igualados al tratarse de una muestra bastante grande. Sin embargo, aunque la interpretación del gráfico en si es correcta, el alumno no ha entendido la finalidad del experimento, ni está considerando la variable aleatoria binomial “número de caras en 20 lanzamientos” o la correspondiente variable estadística. No diferencia los ensayos de cada estudiante y simplemente considera una única secuencia formada al yuxtaponer las secuencias individuales de todos los estudiantes de la clase.

Sin tener en cuenta el nivel C1, en el que sólo se encuentran dos alumnos, y uno de ellos interpretó bien su gráfico, con lo que el porcentaje de interpretaciones correctas fue del 50%, el nivel en el cual se dio mayor número de interpretaciones correctas fue el nivel C4. Una vez que un alumno es capaz

de construir correctamente un gráfico de este nivel de complejidad, este tipo de gráficos facilita la comparación de tendencias y variabilidad en cada pareja de distribuciones. Dicho de otro modo, el mayor nivel alcanzado en la construcción de gráficos parece implicar mayor nivel en la lectura e interpretación de los mismos.

5. Momentos de la Distribución

Heitele (1975) señala tres conceptos fundamentales en relación a la variable aleatoria: su distribución, esperanza y variabilidad. Por tanto, estos tres componentes serán también fundamentales en la variable estadística, cuya generalización da lugar a la idea de variable aleatoria. Una vez analizados los gráficos producidos por los estudiantes, pasamos a analizar el uso que hacen de las medidas de posición central y dispersión.

Medidas de posición central

De un total de 101 estudiantes, 91 calculan algún promedio, lo que indica una primera aproximación a la idea de distribución en los estudiantes, pues pasan del dato aislado a un resumen estadístico del conjunto de datos. En la tabla 4 vemos que el estadístico calculado con preferencia es la media (90) o moda (80); la mediana es calculada por 72 estudiantes. En general el cálculo de los medidas de posición central es correcto, lo que indica un buen dominio de los algoritmos de cálculo, aunque aparecen algunos errores: no ordenar los datos en la mediana (17), falta de ponderación o error de cálculo en media (11) y no tener en cuenta el caso de bimodalidad para la moda (3). Estos errores coinciden con los ya señalados en estudiantes de secundaria en investigaciones previas como la de Cobo (2003).

Tabla 4 – Estadísticos calculados por los estudiantes (n=101)

	Correcto	Incorrecto	Total
Media	79	11	90
Mediana	55	17	72
Moda	77	3	80
Rango	54	6	60
Otra medida dispersión	41	—	41

Por otro lado, hemos encontrado algunas concepciones erróneas sobre las medidas de posición central, explicitadas en la solución del proyecto por los estudiantes. Por ejemplo, el siguiente estudiante, confunde la variable en observación (número de caras en las diferentes secuencias producidas por cada estudiante, en la que el máximo fue 12) con los sucesos del experimento (cara y cruz), al calcular la moda da la siguiente respuesta:

Moda = Son las caras porque su número máximo es 12, mientras que el número máximo de cruces es de 11. (Alumno CE)

En otros casos no se tiene en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana, considerando tan sólo los diferentes valores obtenidos de la variable y tomando su punto medio, lo que sería equivalente a considerar como mediana el centro del rango, error encontrado en Mayén (2006) en su estudio sobre comprensión de los medidas de posición central:

La mediana: ordenar de mayor a menor 2-15. (Alumno CF)

Dispersión

El uso de medidas de dispersión es menor en los estudiantes, resultado que sugiere que no sienten la necesidad de estas medidas para comparar distribuciones. La mayoría de los que lo usan calculan el rango (60), 54 de ellos correctamente. Algunos estudiantes toman incorrectamente los mismos valores del máximo mínimo y rango en la secuencia real y simulada. Unos pocos calculan además la desviación típica (25), varianza (15) y coeficiente de variación (1). Es evidente que las medidas de dispersión son menos intuitivas para los futuros profesores, por el menor uso que se hace de las mismas, como también se confirma en la investigación de Borim y Coutinho (2008). Estas autoras indican que el significado de la varianza y la desviación típica es muy difícil de comprender por los estudiantes para profesor. En nuestra muestra fueron muy pocos los que usaron estas medidas y menos aún los que las interpretaron correctamente.

Por otro lado, se ha analizado el uso de los estadísticos por parte de los estudiantes, para comparar las distribuciones una vez los han calculado (Tabla 5), encontrado que, aunque se calculen, no siempre se emplean los estadísticos, limitándose en muchos casos a presentarlos sin ningún comentario respecto a su significado o las diferencias entre las dos secuencias.

Tabla 5 – Uso de los estadísticos en la comparación (n=101)

Tipo de comparación	Frecuencia
Comparan media	36
Comparan moda	18
Comparan mediana	12
Comparan dispersión	30
Comparan valores aislados	10
Comparan solo sus datos	11
Indican lo que esperan	12
No comparan	23

Respecto a las medidas de posición central 36 comparan las medias (32 correctamente), 18 las modas (12 correctamente) y doce las medianas (dos incorrectamente). Algunos estudiantes presentan los estadísticos pero no comparan (23), indican lo que esperan sin comparar (12), siguiendo sus creencias previas, por ejemplo, el siguiente caso, en que el alumno, aunque calculó media, mediana y moda, no las usa en la comparación:

En un principio es factible que el n° de caras y de cruces a priori debería ser el mismo, pero debido a que esto es un proceso aleatorio, las secuencias de caras y cruces en realidad es imprevisible. (Alumno ES)

Otros alumnos comparan sólo sus propios datos (11), al no haber comprendido el propósito de la práctica, tratando de evaluar únicamente sus propias intuiciones. Por ello se limitan a comparar el valor de las diferentes variables en las dos secuencias, sin hacer referencia a los estadísticos; generalmente manifiestan que una buena intuición supone poder acertar el experimento, es decir, tienen una cierta ilusión de control:

Secuencia simulada: Longitud de la racha más larga=5, número de rachas: 0; número de caras=10. Secuencia real: Longitud de la racha más larga=3; número de rachas: 15; número de caras 11; he acertado 13 veces. (Alumno EL)

Diez alumnos comparan valores aislados de la variable o porcentajes de valores aislados (10 estudiantes); cuatro de ellos comparan únicamente los máximos y mínimos en cada distribución. Esta

estrategia de comparación de valores aislados al estudiar la diferencia de dos distribuciones ya apareció en la investigación de Estepa y Batanero (1995), quienes la explican por la existencia de una concepción local de la asociación estadística, consistente en juzgar la asociación entre dos variables considerando tan sólo una parte de los datos y no el conjunto completo.

El máximo que he encontrado en las dos secuencias es 15 en el número total de caras, 16 el número más alto en rachas y 8 el máximo en la racha real. (Alumno CG)

Sólo 30 utilizan las medidas de dispersión (27 de ellos el rango y seis la desviación típica o la varianza). Un ejemplo se reproduce a continuación, en que el alumno es capaz de apreciar la diferencia de dispersión en el número de caras y su semejanza en el número de rachas:

En primer lugar compararé los datos del número de caras en ambas secuencias, donde destacaré las diferencias que se aprecian principalmente entre el rango, la varianza y, consecuentemente la desviación típica, de hasta seis veces más de diferencia la secuencia simulada con respecto a la real" (quiere decir lo contrario, pues la dispersión es mayor en la secuencia real). En segundo lugar destacaré los datos del número de rachas de las secuencias simuladas y la secuencia real. He de decir que son sorprendentes las similitudes del rango e incluso la varianza y la desviación típica que tan sólo llegan a diferenciarse en décimas. (Alumno LC)

En el caso siguiente se confunde frecuencia y valor de la variable, error encontrado por Cobo (2003) en el cálculo de la media. Como vemos en el ejemplo, el alumno se refiere a la frecuencia, pues al ser sólo 20 los lanzamientos, la longitud de la racha no puede ser igual a 25.

En la secuencia simulada la racha mayor y en la que más ha coincidido la clase es 25. (Alumno TF)

6. Conclusiones sobre el Problema Planteado

Para resolver el problema planteado en el proyecto, además de trabajar con las distribuciones, los estudiantes han de interpretar los resultados del trabajo matemático realizado con ellas en el contexto del problema (traducir estos resultados a lo que indican respecto de las intuiciones de los estudiantes). Es precisamente este último paso (puesta en relación del resultado con la pregunta planteada) el que ha causado más dificultad, por la falta de familiaridad de los futuros profesores con proyectos estadísticos y actividades de modelización.

En la Tabla 6 presentamos las conclusiones obtenidas en relación con las intuiciones de la clase respecto a los fenómenos aleatorios en relación al número de caras en los 20 lanzamientos. Observamos que la obtención de la conclusión es la tarea más difícil para todos los estudiantes, siendo sólo una tercera parte los que obtienen una conclusión, al menos parcial.

Tabla 6 – Clasificación de estudiantes, según conclusión obtenida sobre el número de caras

Conclusión	Frecuencia
Correcta	4
Parcialmente correcta	24
Incorrecta o no concluye	73

Solo cuatro estudiantes completan las conclusiones de que por un lado, el grupo tiene buena intuición respecto al promedio de número de caras y por otro las intuiciones sobre la variabilidad de los

fenómenos aleatorios es pobre en los estudiantes. A continuación reproducimos la respuesta de uno de los estudiantes que obtiene una conclusión completa.

En cuanto al número de caras las intuiciones del aula fueron aproximadas a la realidad, pero no del todo, ya que la desviación típica nos indica que los datos se distancian". Anteriormente la alumna dice: "La media entre la simulada y la real se asemeja,... la mediana y la moda dan los mismos datos. (Alumna CG)

Veinticuatro estudiantes llegan a una conclusión parcial, debido bien a que sólo comparan las medidas de posición central sin tener en cuenta la dispersión, o al contrario.

La intuición de mis compañeros observando la tabla del n° de caras es buena, ya que los valores más repetidos en la secuencia simulada coinciden con los valores de la secuencia real: 10 y 11 son las más repetidas. La media de las dos secuencias es 10, por lo tanto creo que la intuición es buena. (Alumno TG)

Hemos considerado conclusión parcial cuando aparece imprecisión de lenguaje, como en el siguiente ejemplo, donde el alumno visualiza tanto la diferencia de dispersión como los valores centrales similares, pero no llega a concluir claramente sobre la intuición de los estudiantes.

Respecto a las gráficas construidas sobre el número de caras he de comentar que se parece observar algunos cambios en la secuencia simulada donde encontramos cuatro posibilidades y en la real hay diez posibilidades. Con esto podríamos decir que los alumnos no han sido intuitivos, pero no creo que esto sea así, ya que si nos detenemos atentamente en las gráficas podemos ver que los valores de 9, 10, 11 y 12 en ambas han sido dados por un mayor número de alumnos que en los demás casos. (Alumno HC)

El siguiente alumno reconoce la diferencia de dispersión en las distribuciones, pero interpreta el problema como de búsqueda de diferencia de intuiciones entre los estudiantes. Es decir, concluye que las intuiciones son similares en distintos estudiantes, pero no llega a relacionar estas intuiciones con las características del fenómeno aleatorio. Tampoco hace observaciones sobre las medidas de posición central.

Realmente las intuiciones de los alumnos han sido más o menos muy parecidas. No hay muchas irregularidades. Pero cuando las comparamos con sus secuencias reales, se puede ver a simple vista en el gráfico que existen grandes irregularidades. En la secuencia real el número máximo de caras es 16 y el mínimo 7, sin embargo en la simulada el máximo es 13 y el mínimo 8; su recorrido es más pequeño que el real. (Alumno MM)

El resto no llega a una conclusión o bien hace una conclusión incorrecta. Los estudiantes no siempre conectan los resultados del trabajo matemático con la situación problemática, es decir, no ven las implicaciones de lo obtenido en el análisis estadístico sobre las intuiciones de los estudiantes.

Comparando los datos me he dado cuenta que son muchos los resultados entre los compañeros los que coinciden, pero aún así, sigo pensando que es mera casualidad, porque en la simulada hemos puesto lo que hemos querido. (Alumno EL)

Otros estudiantes, aún cuando conectan el trabajo con el modelo matemático (distribución) con el problema real, fallan en la obtención de conclusiones debido a que no han comprendido la pregunta planteada y suponen que una buena intuición ha de corresponder a obtener los mismos resultados en las secuencias real y aleatoria. En la siguiente respuesta, el estudiante muestra una concepción correcta del azar (no se puede prever) y otra incorrecta al tratar de evaluar el número de coincidencias o la diferencia de valores obtenidos en cada estudiante en los experimentos, en lugar de comparar directamente las distribuciones de las variables. Es decir, este estudiante compara caso a caso no utilizando la distribución al hacer la comparación.

Partiendo del estudio de los gráficos, se podría decir que en valores absolutos, la previsión del grupo no ha sido demasiado desafortunada. Un juego de azar es imposible de prever con total exactitud, pero las aproximaciones sumadas a los aciertos son mayores a las previsiones muy alejadas del resultado real. (Alumno LG)

Falta en otros la capacidad de análisis para detectar las diferencias, lo que les lleva a concluir que los resultados en las dos secuencias son similares; en el siguiente ejemplo, además de darse este caso, no se llega a relacionar el resultado con la intuición de los estudiantes.

Como conclusión, podemos ver que los resultados son prácticamente los mismos tanto en la real como en la simulada, de lo que podemos deducir que lo real y lo simulado es muy parecido ya que lo que te inventes puede ser prácticamente igual a lo real. (Alumno AC)

7. Conclusiones

Al comparar las distribuciones la mayoría de los estudiantes elabora un gráfico y un porcentaje importante de estudiantes de la muestra ha calculado algún estadístico, principalmente estadísticos de posición central (media, mediana y moda) y en menor medida de dispersión.

En los gráficos contruidos, la mayoría llega a formar la distribución, aunque aproximadamente la mitad de los gráficos tienen algún error. Respecto a la interpretación de gráficos, nuestros resultados indican que es una habilidad altamente compleja, y confirma las dificultades descritas por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, a pesar de que han de transmitir el lenguaje gráfico a sus alumnos y utilizarlo como herramienta en su vida profesional. También amplía el trabajo de las autoras proporcionando datos sobre la capacidad de construcción de gráficos de los futuros profesores en una tarea abierta y mostrando que la mayoría de los participantes no consigue elaborar un gráfico de complejidad suficiente para permitir resolver el problema.

El cálculo de estadísticos es en general correcto, con pocas excepciones, aunque también aparecen algunos de los errores descritos en la investigación de Cobo (2003) y Mayén (2006), pero con mucha menor frecuencia que en aquellos estudios. Aunque el cálculo de las medidas de posición central fue sencillo, la mayoría de los estudiantes se limita a calcularlos, pero no los interpreta ni los usa para la comparación, aunque en caso de compararlos, la comparación es correcta. Menos aún usan la idea de dispersión, aunque el cálculo del rango lo hacen correctamente, pareciendo que aunque se comprende el procedimiento de cálculo, los alumnos no llegan a captar el significado de la dispersión ni su utilidad en la comparación de dos distribuciones.

En resumen, el concepto de distribución, esencia del razonamiento estadístico según Wild y Pfannkuch (1999) no llega a ser utilizado por una parte de los futuros profesores y el razonamiento sobre la variabilidad, que es otro de los componentes esenciales del razonamiento estadístico, es difícil para la mayoría. En consecuencia, sería necesario atender a estos problemas en la formación de los profesores de educación primaria, pues una mejora de la educación de los niños pasa por la formación del profesor.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC - Feder), beca FPU AP2007-03222.

Referencias

- Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp 147-168). Dordrecht: Kluwer.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of Students' Understanding of Statistical Association in a Computer-Based Teaching Environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.),

- Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 183-198). University of Minnesota: IASE.
- Bertin (1967). *Semiotique graphique*. Paris: Gauthier-Villars.
- Borim, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. CD-ROM.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas*, VII, 57-85.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 99-119.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education* 32(2), 124-158.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008). *Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, México: ICMI e IASE. CD ROM.
- Heitele, D. (1975). Un enfoque epistemológico sobre las ideas estocásticas fundamentales. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. y Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. In J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Langer, E.J. (1975). The illusion of control. *Journal of Personality and Social Psychology*, 32, 311-328.
- Mayen, S. (2006). *Comprensión de medidas de posición central en estudiantes mexicanos de Bachillerato*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*.
- Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría. CICATA. México.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM.
- Shaughnessy, J. M., y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. In B. Phillips (Ed.), *CD of the Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing a statistically literate society, Cape Town, South Africa*. Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

- Watson, J. M. (2001). Longitudinal development of inferential reasoning by school students. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 337-372.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 145-168.

ENSINO E AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS EM ESTATÍSTICA

José António Fernandes & Maria Palmira Alves, Universidade do Minho

jfernandes@iep.uminho.pt & palves@iep.uminho.pt

Eusébio André Machado, Escola Secundária de Tomaz Pelayo

eacm.estp@gmail.com

Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos

ferreiracorreiapaulo@gmail.com

Marília André do Rosário, Escola Secundária de Tomaz Pelayo

madr.estp@gmail.com

Resumo. O presente estudo tem por principal propósito identificar diferenças entre as práticas de ensino e de avaliação em Matemática e Estatística.

Trata-se de um estudo exploratório, em que se adopta uma metodologia de estudo de caso. Participaram no estudo quatro professoras, duas com mais experiência de ensino no 3.º ciclo do ensino básico e duas com mais experiência de ensino no ensino secundário, tendo-se recorrido ao método de entrevista para a recolha de dados.

Em termos de resultados, as maiores diferenças entre as práticas de ensino em Matemática e Estatística centram-se num ensino mais baseado em situações contextualizadas e de carácter realista, exploradas em grupo e recorrendo a tecnologia. Consequentemente, a realização de trabalhos de grupo acarreta mudanças ao nível da avaliação, valorizando-se mais estes trabalhos do que os testes escritos na avaliação sumativa e sem grandes preocupações pela avaliação formativa visto tratar-se de um tema fácil.

Palavras-chave: Práticas de ensino e avaliação em Matemática; Práticas de ensino e avaliação em Estatística; Professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário; Estudo exploratório.

1. Introdução

O reconhecimento da Estatística como tema curricular, no ensino básico e secundário, tem vindo a aumentar significativamente. Começando por ter sido introduzida no ensino superior, com a finalidade de formar profissionais de Estatística, rapidamente foi incluída, também, na generalidade dos cursos superiores das áreas científicas. Já na década de 60, com a reforma do ensino, foi integrada nos programas do ensino secundário e, no início da década dos anos 90, nos programas do ensino básico (Ministério da Educação, 1991).

Actualmente, o tema de Estatística faz parte dos programas de Matemática do 2.º e do 3.º ciclos do ensino básico (Ministério da Educação, 1991a, 1991b) e do ensino secundário (Ministério da Educação, 2001, 2002a, 2002b). Com a reformulação do programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007), passou a ser abordada no tema Organização e Tratamento de Dados em todos os ciclos do ensino básico, incluindo também o 1.º ciclo.

O alargamento do estudo da Estatística, à generalidade dos alunos, tem questionado o ensino tradicional deste tema e recomendado alterações ao nível do conteúdo e da pedagogia, incluindo a problemática da avaliação das aprendizagens.

Para além de ser considerado, por muitos professores, um tema fácil para os alunos aprenderem (Fernandes, Sousa & Ribeiro, 2004), a Estatística tem sido vista como constituindo uma excelente oportunidade para desenvolver um ensino diferente daquele que é implementado em outros temas da disciplina de Matemática, nomeadamente pela possibilidade de promover o trabalho em equipa, a autonomia, o sentido crítico e o exercício de uma cidadania esclarecida, quer no plano pessoal, quer no plano profissional. Perspectivando-se tais finalidades para o ensino da Estatística, é plausível que, em

algum grau, o seu ensino e a sua avaliação sejam diferentes do que acontece com outros conteúdos da Matemática.

Por outro lado, a problemática da avaliação em Estatística tem sido pouco investigada a nível internacional (e.g., Garfield, 1994; Konold, 1995) e, menos ainda, a nível nacional.

2. Enquadramento Teórico

2.1. Currículo, aprendizagem e avaliação

Integrada em todas as questões que envolvem o currículo, a avaliação da aprendizagem não está alheia à sua concretização, actuando como forma de investigar a prática curricular, ligada ao tipo de tarefas em que se expressa o currículo e a acção pedagógica dos professores. Pode afirmar-se que a avaliação não é uma acção esporádica ou circunstancial dos professores e da instituição escolar, antes uma prática muito difundida no sistema escolar. Nas práticas curriculares, a avaliação da matemática tem-se centrado, tradicionalmente, nos conhecimentos específicos e no elenco dos erros cometidos pelos alunos. É, assim, uma avaliação sumativa e informativa, que não só selecciona os alunos, mas compara-os entre si e indexa-os a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Todavia, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do “certo ou errado”.

Para que a avaliação em Matemática extrapole o lugar comum da classificação por notas e surja como estratégia para a orientação das práticas curriculares, terá de considerar os principais elementos envolvidos no processo de ensino/aprendizagem – o aluno, o professor e o conhecimento –, possibilitando tanto ao professor quanto ao aluno informações correctas sobre o modo como este se relaciona com o saber matemático. O aluno tornar-se-á o sujeito no processo de avaliação e não o objecto a ser avaliado. Embora este procedimento seja visto por alguns professores como algo muito complicado, pode ser introduzido nas práticas quotidianas de desenvolvimento curricular, sem grandes alterações nos modos de fazer do professor, concretizando-se ao desafiar o aluno a reflectir sobre o que estudou, sobre a sua experiência de vida, assim como a formular e a reformular os seus conceitos (Zabala, 1998).

Outra das muitas possibilidades de tornar o aluno sujeito da sua avaliação, será a mudança de estatuto dos erros dos alunos. Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, ao assumir um estatuto profundamente construtivo (Guignard, 1988), objecto de um trabalho específico do professor com o aluno e que não servirá para produzir no aluno um sentimento de fracasso, mas para lhe possibilitar um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar as suas dificuldades e uma atitude positiva para o seu futuro pessoal.

Buriasco (2004) sustenta que, mesmo no contexto de uma avaliação de pendor sumativo, na qual é solicitada ao aluno predominantemente a resolução de exercícios, é possível, ao professor, ir além da resposta final, valorizando outros elementos que contribuirão para que o currículo da matemática seja mais significativo. Compete, neste contexto, analisar o modo como o aluno interpretou a sua resolução para dar a resposta; as escolhas que fez para cumprir a tarefa; os conhecimentos matemáticos que utilizou; se utilizou ou não os conteúdos matemáticos apresentados nas aulas e a sua capacidade de comunicar matematicamente, oralmente ou por escrito.

Deve ser uma actividade cooperativa entre professores e alunos e estes devem ser avaliados pelas suas capacidades, ganhos, potencialidades e ajustamento pessoal e social. É, assim, que a visão emergente da avaliação consiste “num processo dinâmico que continuamente produz informação sobre o progresso do aluno em relação à consecução das metas de aprendizagem” (Garfield, 1994, p. 1), sendo vista como uma parte integrante do ensino e da aprendizagem, e não apenas como o culminar do processo de instrução. Esta sobrevalorização da modalidade de avaliação formativa, relativamente a outras modalidades de avaliação, também está presente em todos os programas escolares portugueses, incluindo os de Matemática (Fernandes, Alves & Machado, 2008). A avaliação é, então, considerada por todos como fundamental no processo de ensino-aprendizagem, ao permitir-nos julgar ou medir se o aluno absorveu, de forma satisfatória, o conteúdo ensinado.

Em 1967, com a publicação de “*The Methodology of Evaluation*”, Michel Scriven, revolucionou a teoria da avaliação, introduzindo mudanças paradigmáticas, ao sustentar a possibilidade de colocar o processo avaliativo ao serviço da aprendizagem do aluno. Ponte e Serrazina (2000) e Batanero (2001) afirmam que a avaliação deve ser vista como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem. Ensino e avaliação devem ser encarados como componentes de um mesmo sistema e não como sistemas independentes. Carvalho e César (2002, p. 88) referem que:

as implicações educacionais da psicologia cognitiva consistem na geração de um clima de sala de aula avesso às motivações extrínsecas e à competitividade; sugere-se que seja estimulado um ambiente que favoreça a motivação para aprender considerando o benefício do desenvolvimento das estratégias cognitivas e metacognitivas com implicações positivas na aprendizagem; além disso, o professor é estimulado a desenvolver na sala de aula a aprendizagem cooperativa.

Nessa perspectiva, as actividades avaliativas devem estar “ao serviço das aprendizagens e realçar as possibilidades do sucesso e não do fracasso” (Marcel, 2003, p. 139), sendo necessário pensar em novas maneiras de ensinar, aprender e avaliar. Neste sentido, Hadji (1994) afirma que o processo da avaliação visa, entre outras coisas, o estabelecimento do diálogo não só entre professor e aluno, mas também entre alunos. A avaliação pode, assim, alimentar, constantemente, o diálogo entre professor e aluno, permitindo-lhes, numa relação dialéctica, informações sobre formas de fazer e aprendizagens cada vez mais significativas para ambos. O professor precisa de apoiar o aluno com informações que possam esclarecê-lo, encorajá-lo e orientá-lo quanto a possíveis sucessos e insucessos, permitindo-lhe situar-se melhor no seu percurso escolar. Paralelamente a essas discussões, pode afirmar-se que as questões que envolvem a avaliação têm vindo a percorrer um amplo percurso, visto que o processo avaliativo participa de um dos eixos fundamentais para “olhar” o processo do ensino e da aprendizagem.

Considerado o processo de construção contínuo e progressivo do conhecimento, as bases que fundamentam a concepção de avaliação da década de 90 estabelecem uma nova relação entre professor, aluno e conhecimento, em que o aluno não é apenas o receptor e acumulador de informações mas, sobretudo, o construtor do seu conhecimento. Em síntese, a avaliação escolar deve ser considerada um instrumento de estímulo, de promoção da aprendizagem e colocada ao serviço do progresso da escolarização do aluno. Certamente, a avaliação, ao adquirir mais sentido, abrangerá conteúdos e actividades atractivas e essenciais, o que acontecerá com um currículo e metodologias interessantes para os alunos e com o trabalho de profissionais capazes de exercer, com autonomia intelectual, a condução de um processo de ensino que vá além da simples transmissão de alguns conhecimentos. É preciso reconhecer, contudo, que o professor deve seleccionar, de entre as informações obtidas, apenas o que realmente é importante, de modo a que essa actividade não o impeça de executar outras tarefas didácticas.

Convirá realçar que os processos avaliativos não estão dissociados da subjectividade pessoal, uma vez que cada professor desenvolve formas de avaliação de acordo com as suas concepções de ensino-aprendizagem-avaliação e com os seus referenciais teórico-metodológicos. Mais do que em qualquer outra escolha que o professor faz, referente ao processo de ensino/aprendizagem, é na forma como concebe a avaliação que se manifestam, mais claramente, as posições sociais e políticas que assume, seja mais consciente ou inconscientemente.

As reflexões sobre avaliação e currículo enfatizam quanto o currículo é um elemento vivo na escola, na medida em que a sua efectivação só ocorre com o compromisso de todos os profissionais da educação. Conceptualizando o currículo num sentido mais abrangente, como expressão da função socializadora da escola, englobando tudo o que nela acontece, o processo avaliativo deverá ir acompanhando todo esse movimento educacional, pois é através da avaliação que o currículo é construído e reconstruído por todos os que nele intervêm. A constante mudança social implica a necessidade de avaliação e reavaliação do currículo.

A avaliação da aprendizagem, que é o currículo em acção, vai remeter para a avaliação do próprio currículo e, através dele, conseguir-se-ão subsídios para repensar e reelaborar a renovação curricular, cujo posicionamento deve ser planificado, de modo a considerar todas as dimensões lógicas e racionais relevantes. A renovação curricular torna-se inevitável em todo processo de desenvolvimento do currículo e é necessária para se considerar um organismo vivo e dinâmico, pois o conhecimento continua a desenvolver-se, a sociedade evolui, as pessoas modificam-se e o currículo precisa de acompanhar todas estas mudanças. Acreditamos que, numa situação de mudança, qualquer nova teoria que não disponha de subsídios para a suportar, terá poucas hipóteses de se afirmar. Neste sentido, a avaliação assume uma função primordial pois, como sustenta Coll (2000), sem a existência da avaliação, qualquer novidade curricular se torna inexpressiva, e, com certeza também, impossível.

2.2. Avaliação em Estatística

2.2.1. Antecedentes da Avaliação em Estatística

Se se aderir ao princípio de que a avaliação deve ser estabelecida de acordo com o currículo e o ensino (NCTM, 1999) e que qualquer tarefa de avaliação pressupõe uma perspectiva ou teoria de aprendizagem do aluno em que é baseada (Petocz & Reid, 2007), então dever-se-ão considerar, em primeiro lugar, as metas estabelecidas para o ensino e a aprendizagem de um tema ou ano escolar. Garfield (1994) considera que, nos cursos introdutórios de Estatística, os alunos devem desenvolver uma compreensão de conceitos importantes, tais como média, variabilidade, correlação, variabilidade amostral, utilidade da distribuição normal como modelo e a influência do modo de selecção da amostra na avaliação das inferências baseadas nessa amostra. Em termos de processos, a autora destaca que os alunos devem ser capazes de recolher, analisar e interpretar dados, usar o pensamento e o raciocínio estatístico e comunicar efectivamente usando a linguagem estatística.

Gal e Garfield (1997), tendo em mente os alunos de qualquer nível de escolaridade, estabelecem como meta geral que eles, depois de concluírem o estudo da Estatística, devem tornar-se cidadãos capazes de:

- compreender e lidar com a incerteza, variabilidade e informação estatística no mundo à sua volta e participar efectivamente na sociedade de informação emergente;
- contribuir para ou tomar parte na produção, interpretação e comunicação de dados de problemas que encontram na vida profissional. (Gal & Garfield, 1997, p. 3)

Como parte desta meta geral, que será atingida ao fim de vários anos ou níveis de escolaridade ou depois da frequência de vários cursos de Estatística, estes autores estabelecem oito sub-metas básicas inter-relacionas.

1. *Compreender o propósito e a lógica das investigações estatísticas*, incluindo as ideias de existência de variação, a necessidade de descrever populações através da recolha de dados, a necessidade de reduzir dados brutos a partir de tendências notadas e das principais características usando resumos e representações dos dados, a necessidade de estudar amostras em vez de populações e de inferir de amostras para populações, a lógica subjacente ao processo amostral, a noção de erro de medida e de inferência e a necessidade de encontrar formas de estimar e controlar os erros, a necessidade de identificar processos causais ou factores e a lógica subjacente aos métodos (como experiências) para determinar processos causais.
2. *Compreender o processo das investigações estatísticas*, incluindo as fases de formulação de questões, planificação do estudo (e.g., desenho do estudo, amostragem e escolha dos instrumentos de medida), recolha e organização de dados, representação, exploração e análise de dados, interpretação dos resultados à luz das questões de investigação e discussão das conclusões, implicações dos resultados e identificação de questões para futuro estudo.
3. *Dominar os skills procedimentais*, incluindo ser capaz de organizar dados, calcular índices (e.g., média, moda, mediana, desvio padrão, intervalo de confiança) ou construir e representar tabelas e gráficos, recorrendo a papel e lápis ou a tecnologia.

4. *Compreender as relações matemáticas*, incluindo o desenvolvimento de uma compreensão intuitiva e/ou formal das principais ideias matemáticas que constituem a base das representações, procedimentos e conceitos estatísticos.
5. *Compreender a probabilidade e o acaso*, incluindo conceitos e palavras relacionadas com o acaso, a incerteza e a probabilidade que aparecem nas nossas vidas do dia-a-dia, processos probabilísticos em ordem a melhor compreender acontecimentos do mundo à nossa volta, probabilidade como medida de incerteza, desenvolver um modelo e usá-lo para simular acontecimentos e a exploração de intuições.
6. *Desenvolver skills interpretativos e a literacia estatística*, incluindo ser capaz de interpretar resultados e estar consciente de possíveis enviesamentos ou limitações nas generalizações feitas dos dados. Sendo mais provável que a maioria dos alunos seja consumidor de informação e não tanto produtor de informação, será necessário atribuir sentido a resultados de estudos e sondagens relatadas nos média ou no local de trabalho. Para tal, os alunos necessitam de aprender o que está envolvido na interpretação de resultados de uma investigação estatística e colocar questões críticas e reflexivas sobre os argumentos que se referem a estatísticas ou a dados reportados nos média ou em relatórios de projectos dos seus pares de sala de aula.
7. *Desenvolver a capacidade para comunicar estatisticamente*, o que requer fortes skills de escrita e leitura para os alunos comunicarem efectivamente acerca de investigações estatísticas e fenómenos ou processos probabilísticos. Os alunos devem ser capazes de usar apropriadamente terminologia estatística e probabilística, transmitir resultados de modo convincente e ser capaz de construir argumentos adequados baseados em dados ou observações.
8. *Desenvolver disposições estatísticas úteis*, incluindo uma apreciação do acaso e da aleatoriedade no mundo e dos métodos estatísticos e experiências planeadas como instrumentos científicos úteis e como meios poderosos para tomar decisões pessoais, sociais e relacionadas com o negócio em contexto de incerteza.

Das oito sub-metas, as seis primeiras referem-se, principalmente, a “fazer” Estatística, enquanto as três últimas sub-metas se relacionam com *skills* de dar sentido e de comunicação, bem como de reflexão e questionamento. Estes dois conjuntos de sub-metas orientam os educadores em diferentes direcções, tendo cada conjunto diferentes implicações instrutivas, e frequentemente os professores e livros de texto enfatizam mais os aspectos do primeiro *cluster* do que os do segundo.

As oito sub-metas também enfatizam uma alteração das perspectivas tradicionais do ensino da Estatística como tópico matemático (com ênfase nos cálculos, fórmulas e procedimentos) para perspectivas actuais que distinguem Matemática e Estatística como disciplinas separadas. Moore (1992) argumenta que a estatística é uma ciência matemática, mas não é um ramo da matemática, tendo emergido como disciplina de direito próprio, com modos característicos de pensamento que são mais importantes do que os métodos específicos ou a teoria matemática. Algumas das diferenças chave entre as duas disciplinas são:

1. Em Estatística, o contexto motiva os procedimentos e é fonte de significado e a base para a interpretação;
2. A indeterminação, desordenação ou limitação de contexto da Estatística é marcadamente diferente da natureza mais precisa e finita que caracteriza a aprendizagem tradicional de outros domínios matemáticos;
3. A necessidade de aplicação de cálculos precisos ou a execução de procedimentos está rapidamente a ser substituída pela necessidade do uso selectivo, ponderado e preciso de instrumentos tecnológicos e de software cada vez mais sofisticado;
4. A natureza fundamental de muitos (mas não todos) problemas estatísticos é não terem uma solução matemática única. Antes, problemas estatísticos realistas usualmente começam com uma questão e culminam com a apresentação de uma opinião que pode ter diferentes graus de razoabilidade;

5. A principal meta da educação estatística é capacitar os alunos para apresentarem descrições, julgamentos, inferências e opiniões pensadas acerca de dados ou argumentar sobre as interpretações de dados, usando várias ferramentas matemáticas apenas na medida em que forem necessárias.

2.2.2. Formas de avaliação em Estatística

Segundo Jolliffe (2007), trinta ou quarenta anos atrás, as questões de avaliação em Estatística incluíam-se em uma de duas categorias: um tipo envolvia a substituição de números em fórmulas e o uso de dados artificialmente simples de modo a permitir a realização dos cálculos “à mão”; outro tipo envolvia a derivação e a manipulação algébrica. Especialmente no ensino superior, o ensino tendia a assumir um formato tradicional com pouca interacção entre o professor e os alunos, sendo as questões de avaliação semelhantes às questões propostas para trabalho de casa. Essas questões, quando teóricas, podiam ser descritas como exercícios de álgebra e, quando mais aplicadas, consistiam em cálculos de quantidades especificadas.

As maiores alterações no ensino da Estatística, que por sua vez afectam o modo como é avaliada, são resultado da chamada revolução tecnológica. Pedir aos alunos para resolverem problemas reais com dados reais e relatar os resultados é agora factível de uma maneira que o não era no passado. Os educadores acreditam que o uso de dados reais em tópicos de interesse dos alunos, o que não acontece apenas em Estatística, contribui para a motivação dos alunos em aprenderem Estatística e para gostarem de o fazer.

Os alunos que não têm as disciplinas de Estatística e de Matemática como disciplinas fundamentais dos seus cursos podem ressentir-se em cursos de Estatística, e alguns deles poderão mesmo rejeitar tudo o que seja numérico. Neste caso, é necessário ganhar a sua confiança e introduzir lentamente os aspectos mais técnicos. Em termos de avaliação, para estes alunos, as tarefas que envolvem escrever sobre Estatística são ideais, especialmente no início do curso. Por outro lado, estas tarefas são igualmente importantes para alguns alunos mais orientados matematicamente e que são muito limitados em termos de escrita. Para tal, pode pedir-se aos alunos para seleccionarem um exemplo de estudo realizado e apresentarem uma descrição nas suas próprias palavras.

É importante que os professores não confiem completamente naquilo que vêm fazendo, devendo manter uma mente aberta e avaliar o sucesso de abordagens alternativas no ensino da Estatística. Estas questões não standards devem ser introduzidas num curso, gradualmente, de modo a permitir que os alunos se habituem a novas formas de pensar em Estatística. Esta importância aumenta, ainda, quando questões deste tipo são incluídas na avaliação dos alunos, não devendo ser consideradas pela primeira vez na avaliação. Neste caso, é útil fornecer as fórmulas e a possibilidade de consulta de manuais, como forma de reduzir a dependência da memória, ao mesmo tempo que se imita o mundo do trabalho.

Existem várias formas de reunir informação e é frequentemente recomendado que sejam usados múltiplos métodos para permitir uma melhor representação da aprendizagem do aluno. A este respeito, Hawkins, Jolliffe e Glickman (1992) referem várias formas de avaliação em Estatística.

Formas tradicionais de avaliação escrita

Neste caso, o tipo de questões utilizadas, ainda que de natureza repetitiva, ajudam os alunos na aprendizagem através da prática e testam pouco mais do que a capacidade para substituir valores em fórmulas e o cálculo da resposta correcta. Muitas destas questões apenas testam a memória, como é o caso das questões que interrogam os alunos sobre definições, deduções e problemas rotineiros, enquanto outras, construídas para serem resolvidas com a ajuda da calculadora e do computador, pouco mais avaliam do que as funções estatísticas desses instrumentos.

Dado que nos exames, frequentemente, este tipo de questões são muito usadas, os professores tendem, também, a utilizá-las na avaliação dos seus alunos como forma de os melhor preparar para tais exames.

Embora este tipo de questões não seja adequado para avaliar a dimensão interpretativa da Estatística, ultimamente tem-se procurado torná-las mais significativas providenciando um contexto.

Escolha múltipla versus questões abertas

Neste tipo de questão, que actualmente é mais usada na avaliação em Matemática, também por influência do seu uso nos Exames Nacionais, a resposta correcta está disponível em oposição à necessidade de ser recordada, como é o caso nas formas de avaliação escrita.

Diferentemente das questões de escolha múltipla, em geral, as questões abertas são mais promissoras para avaliar a Estatística 'real', especialmente em situações de sala de aula. Comparativamente, este tipo de questões requerem, geralmente, mais tempo de resposta e o processo de atribuição de pontuações é mais subjectivo, pois reflecte o ponto de vista do avaliador, não sendo fácil prever exactamente o que o respondente está a tentar responder e é necessário considerar se a análise feita é apropriada e correctamente efectuada.

Segundo Gal e Garfield (1997), em Estatística, uma avaliação adequada dos resultados dos alunos não é possível com o recurso apenas a questões de escolha múltipla ou de resposta curta. Estas questões não incluem, frequentemente, o contexto e centram-se na precisão de cálculos estatísticos, na aplicação correcta de fórmulas ou na construção correcta de gráficos, avaliando apenas uma ou duas das sub-metas anteriormente referidas. Questões e tarefas que culminam em simples respostas "correcto ou errado" não reflectem a natureza de muitos problemas estatísticos. Estas tarefas fornecem apenas informação limitada sobre os processos de raciocínio dos alunos, sobre a sua capacidade para construir e interpretar argumentos estatísticos, sobre a lógica subjacente a certos procedimentos ou sobre a sua capacidade para usarem de forma clara e adequada terminologia estatística e matemática quando discutem o seu trabalho ou raciocínio.

São, assim, necessários diferentes métodos de avaliação que forneçam informação sobre a qualidade do pensamento dos alunos, a comunicação e os processos de raciocínio (NCTM, 1999). São necessários métodos para avaliar *skills* específicos, mas que revelem também a compreensão dos alunos acerca de "grandes ideias" em Estatística e a sua capacidade para seleccionar e aplicar apropriadamente instrumentos estatísticos quando procuram dar sentido a dados realistas. Por exemplo, a capacidade para calcular correctamente a média de um conjunto de dados manualmente, ou com a ajuda de uma ferramenta de cálculo, diz-nos pouco sobre a compreensão da sua razoabilidade para resumir informação.

Os métodos de avaliação necessitam de aferir o grau de integração entre *skills*, conhecimentos e disposições dos alunos e a sua capacidade para explorar, de forma significativa, questões realistas, problemas ou situações, resultados ou mensagens estatísticas, tanto como geradores como interpretadores de dados.

Questões de ensaio

Apesar de tradicionalmente estas questões não serem muito usadas na avaliação em Matemática, elas podem ser muito úteis na avaliação em Estatística, como é o exemplo de ensaios práticos que requerem dos alunos a avaliação de um desenho de investigação proposto ou um comentário escrito sobre uma dada análise de dados.

As questões de ensaio dependem menos da recordação de pequenos detalhes do que as questões que envolvem técnicas e testam a capacidade dos alunos para organizarem material de um amplo espectro, podendo testar a criatividade e a compreensão.

Neste tipo de questões, o facto de o aluno poder responder correctamente, mesmo não tendo realizado qualquer trabalho prático, deve traduzir-se na atribuição das pontuações previstas. Contudo, esta abordagem não deve substituir a avaliação dos alunos em trabalhos práticos e de projecto, que perspectivam a Estatística como uma disciplina aplicada.

Podem ser realizados ensaios sobre a natureza da Estatística, a sua história e os seus desenvolvimentos recentes, assim como as suas bases filosóficas para explorar a consciência dos alunos sobre a importância da Estatística e as suas relações com outras disciplinas que estudam.

Avaliar trabalho prático e projectos

Tal como acontece no mundo do trabalho, é exigido a estatísticos e a outros profissionais com responsabilidades em Estatística que trabalhem numa equipa de pessoas. Neste contexto, a realização de trabalhos de projecto pode ser vista como uma preparação para o trabalho prático.

Petocz e Reid (2007), com base em vários estudos, referem que o trabalho e a avaliação em grupo permitem aos professores desenvolverem tarefas mais compreensivas; capacita os alunos a adquirirem um *insight* sobre as dinâmicas e os processos de grupo; possibilita aos alunos o desenvolvimento de *skills* interpessoais; permite expor os alunos aos pontos de vista de outros membros do grupo; encoraja os alunos a prepararem-se para o ponto de 'vista real'; e promove a reflexão e a discussão como parte essencial do processo de se tornarem práticos competentes e reflexivos.

No Reino Unido, The National Curriculum for Mathematics sugere que deve ser atribuída uma ponderação de 15% à avaliação de aplicações práticas de Matemática. Neste sentido, a Estatística fazendo parte da disciplina de Matemática e sendo essencialmente um tema orientado por uma lógica de aplicação, o trabalho prático deve ser um elemento integral do seu ensino e da sua avaliação.

Naturalmente, tal como as questões de ensaio, o trabalho prático é difícil de pontuar, pois pode haver mais do que uma resposta correcta ou até nem existir nenhuma resposta correcta. Tratando-se de um trabalho de projecto, podemos considerar três componentes principais na avaliação: 1) a abordagem geral e a atitude em relação ao projecto; 2) a execução do projecto; e 3) o relatório. A avaliação do projecto deve, também, assumir um carácter contínuo, podendo o professor avaliar o processo da sua realização através da observação dos alunos.

Considerando que o trabalho prático e os projectos são frequentemente realizados em grupo, importa considerar um equilíbrio entre a avaliação individual e do grupo. Assim, *skills* de comunicação, motivação, atitude e contribuição do grupo para a tomada de decisões podem tornar-se critérios para a avaliação do aluno. No caso da avaliação do aluno como elemento do grupo, podemos recorrer a informação de auto-avaliação obtida através do preenchimento de um questionário.

Avaliação oral

Apesar de recente, a avaliação oral tem aumentado de importância no campo da Estatística, em parte, como resultado da maior ênfase em trabalho prático e projectos e menor ênfase nos exames, em resposta a uma crescente preocupação para com aqueles alunos de *skills* limitados de linguagem escrita e, finalmente, em resultado das orientações curriculares oficiais. Contudo, quase sempre, é necessário despendar muito tempo na avaliação oral, a standardização pode ser difícil de obter, sobretudo se os professores não estiverem familiarizados com o método, e é provável que os alunos muito introvertidos e com dificuldades de discurso sejam avaliados abaixo da sua real performance através da oralidade.

Para além das questões orais, tendo em vista verificar em que medida o aluno está a aprender o que se pretende, em termos mais estruturados, podemos considerar a realização de entrevistas de diagnóstico, à semelhança do procedimento usado por Piaget nos seus estudos, e o recurso a registos das respostas dos alunos a perguntas previamente preparadas e lidas pelo professor.

Para Burrill (2007), proporcionar feedback e orientar conversações entre os alunos para promover a sua aprendizagem, que não se limitem a fornecer respostas correctas e a verificar procedimentos, são formas de desenvolver a avaliação formativa.

Para esta autora, no âmbito da Estatística, são úteis dois critérios de classificação para a esquematização das perguntas e do feedback:

1. *Tipo de conhecimento*: declarativo (definir, dar um exemplo), procedimental (executar procedimentos), esquemático (explicar, justificar, prever, colocar hipóteses) e estratégico (seleccionar conhecimento para usar, formular estratégias, levantar questões, definir problemas);
2. *Natureza do que é para ser aprendido*: 1) definições; 2) forma de representação dos conceitos e a linguagem usada para os representar; 3) regras, teoremas e propriedades; 4) conexões ou aplicações.

Algumas tarefas são desenhadas para que os alunos dominem certos procedimentos ou *skills*, enquanto outras, mais abertas, têm o potencial de revelar as concepções dos alunos. As primeiras são

muito limitadas em termos de revelar o pensamento dos alunos e as segundas têm várias das seguintes características: permitem múltiplos pontos de acesso aos alunos com diferentes níveis de compreensão, constituem modelos que podem ser usados para desenvolver conceitos, visualizações, múltiplas estratégias de resolução, pensamento crítico, oportunidades para estabelecer conexões com outros conceitos e formalização progressiva. São precisamente as tarefas deste segundo tipo que melhor se adequam à avaliação formativa, porque, diferentemente das primeiras, dão oportunidades aos alunos para comunicarem o desenvolvimento da sua compreensão.

No processo de condução da discussão dos problemas levantados pelos alunos devem valorizar-se os seus esforços, no sentido do progresso da sua aprendizagem, organizando as intervenções e considerando os erros como oportunidades de aprendizagem.

Garfield (1994) refere dois princípios a considerar na avaliação em Estatística:

- *O princípio do conteúdo*: a avaliação deve reflectir o conteúdo estatístico que é mais importante para o aluno aprender;
- *O princípio da aprendizagem*: a avaliação deve aumentar a aprendizagem e apoiar boas práticas instrutivas (p. 2).

Estes princípios conduzem directamente ao uso de formas alternativas de avaliação que forneçam informação mais completa sobre o que os alunos têm aprendido e o que são capazes de fazer com o seu conhecimento, facultando *feedback* mais detalhado e oportuno aos alunos sobre a qualidade da sua aprendizagem. Para Garfield (1994) alguns destes métodos alternativos são: 1) *portefólio de avaliação*, constituído por uma colecção de trabalhos do aluno cuidadosamente escolhidos sob a orientação do professor e representativos do que o aluno aprendeu; 2) *avaliação autêntica*, método centrado na obtenção de informação sobre a compreensão dos alunos num contexto que reflecte situações realistas e que desafia as aprendizagens dos alunos em contextos autênticos (ver Colvin & Vos, 1997); e 3) *avaliação de performance*, partindo de tarefas, projectos ou investigações, avaliam-se os produtos obtidos para classificar o que os alunos sabem ou são capazes de fazer (ver Dickinson, Onwuegbuzie, Hines & Hall, 2007).

3. Metodologia

Em geral, sendo a Estatística vista como um tema especialmente útil na vida quotidiana e em que, frequentemente, são recomendadas diferentes metodologias de ensino e de avaliação, conjecturámos no presente estudo que esses aspectos se repercutiriam, em alguma medida, nas práticas de ensino e de avaliação implementadas no âmbito deste tema em relação aos outros temas da disciplina de Matemática.

O estudo, de natureza qualitativa e de carácter exploratório, enquadra-se numa metodologia de estudo de caso, fundamentalmente, de carácter descritivo, valorizando a perspectiva dos participantes e o aprofundamento da compreensão das suas respostas.

Para estudar as possíveis diferenças entre as práticas de ensino e de avaliação no tema de Estatística e nos outros temas de Matemática, foram seleccionados quatro professoras de Matemática, cada uma constituindo um estudo de caso: duas com experiência de ensino predominante no 3.º ciclo do ensino básico e duas com experiência de ensino predominante no ensino secundário. Especificamente, Cristina e Beatriz têm leccionado fundamentalmente no 3.º ciclo do ensino básico e Ana e Isabel têm uma maior experiência de ensino no ensino secundário.

Cada uma das professoras, participantes no estudo, foi entrevistada a partir de um guião de entrevista semi-estruturado, em que salientavam as seguintes dimensões: caracterização da professora e da escola em que actualmente lecciona, destacando a sua formação e experiência de ensino no tema de Estatística; práticas de ensino e de avaliação em Matemática e práticas de ensino e de avaliação em Estatística. Nas duas últimas dimensões, as professoras foram questionadas acerca das suas percepções sobre as semelhanças e diferenças entre o ensino e a avaliação do tema de Estatística em relação aos outros temas de Matemática.

As entrevistas foram realizadas em Novembro de 2008, registadas em suporte áudio e de seguida transcritas. Posteriormente, a análise de dados foi realizada tendo em consideração as dimensões do guião da entrevista, já referidas, e centrou-se em cada um dos casos estudados e na comparação entre os casos.

4. Apresentação de resultados

Na apresentação dos resultados do estudo organizaram-se os casos estudados segundo o nível de ensino: ensino básico e ensino secundário, favorecendo-se, deste modo, não só a comparação entre os casos mas também a comparação entre os níveis de ensino.

4.1. Ensino básico

4.1.1. Caso de Beatriz

Beatriz é licenciada em Ensino de Matemática por uma universidade pública e também possui uma especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática obtida numa universidade privada. É docente há 12 anos, dos quais apenas um no ensino secundário no início de carreira e os restantes no 3.º do ensino básico, onde leccionou todos os anos escolares. Actualmente, trabalha numa escola básica integrada, que se situa num meio rural pobre. Em geral, os alunos têm baixas expectativas de futuro e um fraco aproveitamento escolar, mais baixo a Matemática do que nas outras disciplinas e pior na avaliação externa (no ano passado “tivemos 52% de negativas a Matemática” no exame nacional). A manutenção dos professores nos últimos três anos e a partilha entre eles têm contribuído para uma pequena melhoria do aproveitamento escolar dos alunos.

Beatriz recorda-se de ter feito um trabalho de grupo sobre Estatística no 10.º ano e de ter aprofundado o tema na universidade, salientando o estudo das distribuições. Frequentou uma acção de formação contínua sobre inferência estatística dirigida à disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, disciplina que nunca leccionou. A acção de formação assumiu um carácter prático (com exploração de exemplos), tendo colaborado na realização de um trabalho de grupo em que os formandos seguiram as fases do método estatístico e usaram a folha de cálculo num estudo de opinião sobre a problemática do horário nocturno. Quase sempre tem ensinado o tema de Estatística no 7.º ano e no 8.º ano e, pontualmente, também o leccionou no ensino secundário e num Curso de Educação e Formação (CEF). Esta professora prefere outros temas matemáticos ao tema de Estatística e reconhece, neste último, a sua natureza mais prática e a sua maior adequação para os alunos realizarem trabalhos e usarem a folha de cálculo. Os alunos “gostam de Estatística e envolvem-se mais. Entre Estatística e equações do 2.º grau, não há dúvida, é da Estatística” que os alunos mais gostam.

Práticas de ensino e de avaliação em Matemática

No ensino da Matemática, Beatriz, sempre que possível, “introduz o conteúdo com uma actividade prática do dia-a-dia” e recorre a “actividades de orientação”, que consistem em guiões de orientação da actividade do aluno na utilização da folha de cálculo, do GSP e dos sensores. Nas suas aulas, os alunos trabalham muito em pares, menos em grupo e quase nunca individualmente, pois a professora não gosta muito do trabalho individual.

Em termos de tarefas de ensino, na parte prática, a professora valoriza a resolução de exercícios e tem por hábito não mandar muitos trabalhos para casa, admitindo a valorização do cálculo em Matemática: “exijo um bocadinho ao nível do cálculo”.

No início da sua carreira docente, perspectivava o seu papel como professor um “bocadinho” expositivo, mas, actualmente, assume-se mais como orientadora e dinamizadora, apesar de continuar a orientar bastante em virtude de os seus alunos sentirem muitas dificuldades. Em termos de recursos, usa o manual escolar, elabora as suas próprias fichas orientadas, recorre a tarefas do projecto “mil itens” e usa o computador, salientando a utilização dos programas GSP e folha de cálculo.

Beatriz, na avaliação sumativa dos seus alunos, estabelecida no seu Departamento, contempla uma dimensão cognitiva (com a ponderação de 80%), realizada através de testes escritos e de um

trabalho prático, e uma dimensão de atitudes e valores (com uma ponderação de 20%), incluindo “a assiduidade, o comportamento, a participação com qualidade, o empenho...”. No caso do trabalho prático, com a ponderação de 10%, tendo verificado que os alunos copiam da Internet, a professora decidiu substituí-lo por um problema que os alunos resolvem numa aula de 45 minutos. Assim, a pontuação total do teste escrito é de 70%, sendo 5% para o uso correcto da língua portuguesa.

Afirmando dificuldades na avaliação formativa, sobretudo na sua quantificação, a professora recorre ao questionamento dos alunos e ao feedback. Actualmente, deixou de propor a resolução de fichas na aula imediatamente anterior ao teste porque os alunos tendiam a ver essas fichas como o próprio teste, para passar a valorizar mais os erros e dificuldades dos alunos no teste. Neste caso, antes de entregar os testes, pede aos alunos com tais dificuldades para irem ao quadro resolver as questões em causa.

Em Estudo Acompanhado, os alunos preenchem grelhas de auto-avaliação sobre o seu empenho e envolvimento na resolução de problemas, contemplando os produtos e os processos de resolução, e nas aulas de Matemática “fazem a sua auto-avaliação geral”. Neste último caso, os alunos calculam a sua própria classificação considerando “70% da média dos testes que fizeram esse período, 10% do problema ... atribuem uma nota à participação”.

Eu faço sempre uma aula de auto-avaliação. Coloco a fórmula e eles calculam. Atribuem um nível a eles próprios e calculam. Já há vários anos que faço isto ... eu dou a sugestão, mas sou flexível, tipo uma negociação entre o aluno ... em termos do próprio trabalho de grupo, quando eu defino aqueles parâmetros.

Práticas de ensino e de avaliação em Estatística

Tendo os alunos estudado já Estatística no 2.º ciclo do ensino básico, como tabelas de frequências e gráficos, torna-se exequível pedir-lhes para fazerem o estudo de alguma questão em trabalho de grupo. Nesse trabalho, onde são executadas todas ou apenas algumas fases do método estatístico, os alunos recorrem à folha de cálculo “para calcular as medidas de tendência central” e ao PowerPoint para elaborarem a apresentação do trabalho. Durante o processo de realização do trabalho, a professora vai falando e orientando: “então vamos contar..., temos uma tabela de frequências ..., ia chamando nomes às coisas”.

Ao longo dos anos, Beatriz tem privilegiado o trabalho de grupo no estudo da Estatística, recorrendo também a revistas e jornais e valorizando a interpretação de gráficos. Os alunos gostam de fazer trabalhos e envolvem-se mais.

No ensino da Estatística utiliza computadores, aplicando a folha de cálculo e o programa *HotPotatoes*, recorre ao manual escolar para a resolução de exercícios, não faz muitas fichas de trabalho e usa revistas para a análise de gráficos nelas publicados.

Entre outros temas matemáticos e a Estatística, a principal diferença nos recursos utilizados advém do uso da folha de cálculo. Para além disso, a professora considera que o carácter prático e de pesquisa das tarefas e por se tratar de um tema fácil para os alunos faz com que eles se envolvam mais e obtenham melhores resultados.

A avaliação dos alunos em Estatística resulta sempre da realização de um trabalho de grupo e, algumas vezes, também de uma pergunta incluída no teste escrito, com peso igual aos outros conteúdos, pois, segundo a professora, o tema é leccionado no fim do ano lectivo e pode não haver tempo para tal. No entanto, “se ainda for possível eu ainda coloco uma questão no teste, mas não tenho a preocupação de realizar um teste de Estatística”. Na avaliação do trabalho, Beatriz considera a sua qualidade, o envolvimento dos alunos na sua realização e a apresentação.

A avaliação formativa desenvolve-se durante a realização do trabalho, em que a professora vai verificando e chamando a atenção, e os alunos auto e co-avaliam-se, sobretudo no momento de apresentação dos trabalhos.

Comparativamente com outros temas matemáticos, na Estatística a avaliação é mais centrada no trabalho de grupo desenvolvido pelos alunos e é mais influenciada pela auto e co-avaliação.

4.1.2. Caso de Cristina

Cristina é uma professora que obteve a sua licenciatura em Matemática (“via ensino”) numa universidade pública, tem 15 anos de serviço e leccionou todos os anos desde o 7.º ano ao 10.º ano, embora a sua experiência docente seja essencialmente no 3.º ciclo do ensino básico. No que respeita à Estatística, tem leccionado todos os anos, desde o 7.º ano até ao 9.º ano e diz que prefere relacioná-la com o estudo de outros conteúdos: “Só Estatística, não; prefiro ensinar outros temas”.

Neste momento, trabalha “numa escola básica integrada” situada num meio “misto” (“não é urbano, mas também não é estritamente rural”), onde tem a seu cargo apenas turmas do 9.º ano. Cristina considera que os alunos da sua escola são “interessados”, tendo um aproveitamento que pode ser considerado “bom”, designadamente nos exames nacionais, nos quais os resultados têm ficado sempre acima da média nacional.

A escola da Cristina possui um corpo docente estável, nem muito inovador, nem muito tradicional, mas salienta que “mesmo as pessoas mais antigas tentam adaptar-se às novas tecnologias”. A escola está também envolvida no Plano da Matemática e, segundo a opinião da professora, o trabalho realizado no âmbito da disciplina de Matemática é “bom”.

Durante o seu percurso escolar, convém dizer que Cristina apenas estudou Estatística no ensino superior, onde teve duas cadeiras semestrais: “uma de Estatística e outra de Probabilidades”. No âmbito da formação contínua, frequentou uma acção de formação, na qual a Estatística foi objecto de um “tratamento teórico” relacionado com o ensino, com o recurso às novas tecnologias, mas não houve quaisquer orientações/sugestões em relação à avaliação neste domínio.

Práticas de ensino e de avaliação em Matemática

Quando questionada sobre as suas práticas de ensino e avaliação em Matemática, Cristina ressalta a “interligação” dos conteúdos, a valorização das abordagens práticas e a motivação dos alunos. Nas aulas, assume um papel “dinamizador” face ao papel “activo e responsável” que devem ter os alunos. Nos últimos tempos, admite que tem utilizado mais o “trabalho em pares ou o trabalho individual”, o que não impede de, ocasionalmente, realizar “trabalho de grupo ou em grande grupo”. Esta professora gosta de desenvolver “tarefas contextualizadas”, aproveitando vários recursos disponíveis, desde o “manual escolar” (“quando o manual é bom”) até aos materiais fornecidos pelo Ministério da Educação. No caso das novas tecnologias, utiliza-as sempre que possível, na medida em que depende da disponibilidade dos equipamentos e das salas.

Na avaliação, Cristina refere que valoriza muito o “empenho” e a “atitude” face à disciplina, bem como “os testes escritos (normalmente, dois por período), as provas de avaliação e os trabalhos que eles produzem”. Do seu ponto de vista, a avaliação formativa tem uma função essencialmente “reguladora”, tendo o professor um papel preponderante no processo de auto e hetero-avaliação. Neste aspecto, os critérios que privilegia são, sobretudo, os de carácter atitudinal: “responsabilidade” no cumprimento das tarefas propostas, “o empenho” na realização das mesmas e a capacidade de trabalhar de um “modo autónomo”.

Práticas de ensino e de avaliação em Estatística

No ensino da Estatística, Cristina afirma que os temas tratados permitem compreender mais facilmente a aplicação da Matemática, o que, em certa medida, contraria a “abstracção” dos outros “temas”. Deste modo, a professora sublinha o recurso a estratégias indutivas com apoio na realidade e na experiência dos alunos:

Na parte da Estatística, além de utilizar o manual, quando ele é bom, procura sempre que eles vejam alguma notícia para se poder trabalhar. Por exemplo: a diferença entre um inquérito, um questionário, uma sondagem, um senso... E pesquisar alguma informação sobre isso para depois se trabalhar: “o que é a Estatística”, “para que serve”... Normalmente, é assim que procuro buscar coisas à actualidade.

No tratamento da Estatística, Cristina refere ainda que faz sempre um trabalho de grupo, privilegiando tarefas contextualizadas, embora com um ou outro problema de aplicação. Neste contexto, considera que o seu papel “é mais de mediador”, uma vez que os alunos têm um papel activo e mais aplicado à vida real. Nas aulas de Estatística, é frequente a utilização de vários recursos: o computador, o

manual escolar, jornais, revistas e calculadoras.

No que respeita à avaliação em Estatística, Cristina não admite diferenças: avalia do mesmo modo, reconhece que o papel da avaliação formativa é idêntico aos dos outros “temas” e não considera critérios específicos. Contudo, admitindo o papel mais interventivo dos alunos nesta parte dos conteúdos de Matemática, Cristina assinala que utiliza mais o “trabalho de grupo” (com o máximo de três alunos”) ou “trabalho em pares” e que nunca faz “testes só de Estatística, embora os testes possam incluir questões de Estatística”.

4.2. Ensino secundário

4.2.1. Caso de Ana

Ana tem a Licenciatura em Ensino da Matemática, obtida numa universidade pública, é docente há 20 anos no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário, onde leccionou desde o 7.º ano ao 12.º ano, embora nos últimos 17 anos tenha ensinado apenas no ensino secundário e, actualmente, ensina em três turmas do 11.º ano de Matemática A. A escola onde trabalha é uma escola secundária com 3.º ciclo, insere-se num meio urbano, mas recebe também alunos oriundos de meios rurais. Maioritariamente, os alunos e os professores são empenhados e o aproveitamento dos alunos em Matemática enquadra-se nos resultados a nível nacional.

Ana não se recorda de ter estudado Estatística no ensino básico ou secundário; na universidade recorda-se de ter tido apenas uma disciplina de Probabilidades e Estatística e não frequentou qualquer acção de formação contínua versando o tema de Estatística. Já em termos de ensino, esta professora afirma ter ensinado Estatística três ou quatro vezes no ensino básico e cerca de seis vezes no ensino secundário. Considera, ainda, o tema de Probabilidades e Combinatória um tema difícil, “em que é preciso estar sempre a estudar”, e gosta muito do tema de Estatística porque os alunos também gostam mais desse tema, sem o preferir a outros temas de Matemática.

Práticas de ensino e de avaliação em Matemática

Nas suas práticas de ensino, Ana gosta de usar tecnologia, mas também gosta de usar o quadro e o giz, dá aulas expositivas e outras em que são os alunos a descobrir a matemática, afirmando que é “a mistura das duas coisas. (...) É o que toda a gente faz (...) Digamos que 60% é para exposição e 40% para [trabalho mais autónomo]”.

Os alunos, em geral, preocupam-se mais em reproduzir o que lhes é transmitido do que em pensar por eles próprios, o que é reflexo da sociedade e também do computador. No caso do computador, a professora ressalta aspectos negativos no seu uso excessivo, notando-se em alguns alunos “uma tendência para a alienação”, vivendo num mundo virtual desligado da realidade.

Em termos de organização da sala de aula, preferencialmente os alunos trabalham individualmente, algumas vezes em pares e excepcionalmente em grupo. Em termos de tarefas de ensino, recorre a exercícios e a problemas, mas “uma grande parte é exercícios”. Nos últimos tempos, influenciada pelos novos programas da disciplina de Matemática, a professora tem vindo a promover mais a realização de trabalho de grupo e de trabalho autónomo dos alunos.

Quanto à avaliação em Matemática, a professora contempla as dimensões “saber fazer”, em que recorre a testes e a alguns trabalhos (“não faço assim muitos trabalhos”), e “saber ser”, em que recorre a uma grelha para registar “a participação, o interesse, o sentido crítico e o cumprimento de regras mínimas”. Na sua perspectiva, a grelha torna o processo de avaliação “mais transparente e objectivo”.

Ana considera que “nestes últimos anos tem havido mais rigor quanto aos critérios de avaliação”, sendo a escola a definir os critérios do “saber fazer” (com uma ponderação de 90%) e do “saber ser” (com uma ponderação de 10%). Uma vez definidos, os critérios são comunicados aos alunos, sem que eles tenham qualquer intervenção na sua formulação porque “eles ainda não têm capacidade para decidir sobre a melhor forma para avaliar estas coisas”. Na prática, a dimensão “saber ser” parece apenas alterar residualmente a avaliação da dimensão “saber fazer”.

Por exemplo, um [aluno com] 15,2. (...) Há coisas que até não se conseguem traduzir em termos numéricos. Então se eu acho que o aluno até trabalha na aula, eu posso passá-lo para 16 e a outro não. É muito difícil quantificar tudo ao pormenor.

No último dia de aulas de cada período, os seus alunos fazem a auto e co-avaliação com o fim de se consciencializarem do trabalho realizado e de conhecerem a opinião da professora. Em termos formativos, para além do questionamento dos alunos, a professora realiza nas aulas que antecedem o teste uma ficha semelhante ao próprio teste.

Práticas de ensino e de avaliação em Estatística

No ensino da Estatística, a professora começa por salientar as poucas aulas de que normalmente dispõe para leccionar esse tema. No entanto, por se tratar de “conteúdos mais fáceis, também é mais fácil o professor conseguir com as poucas aulas que tem ir cumprindo minimamente os objectivos do programa”. Também para rentabilizar mais o reduzido número de aulas, a professora “dá os dados estatísticos em bruto e já os põe numa folha de papel com tabelas construídas, mas por preencher, e nos gráficos já dá o referencial”, até porque os alunos “já deram no 3.º ciclo muita coisa de Estatística, no fundo é só tentar ampliar um pouco os conhecimentos”. Depois de ter explorado os conceitos de moda, média e mediana, os alunos desenvolvem um trabalho de grupo, no qual “vão escolher variáveis diferentes e vão, eles próprios, estudar a turma”.

Em síntese, na primeira parte os alunos vão resolvendo individualmente a ficha fornecida pela professora e na segunda parte realizam um trabalho de grupo, em que os alunos se empenham mais, que considera mais importante e em que o seu papel é mais de dinamizadora. Nas conclusões dos trabalhos que realizaram, os alunos “acrescentaram que devíamos fazer mais trabalhos daqueles, que aprendem mais a fazer aquele trabalho do que outras coisas”, o que, segundo a professora, se explica pela presença da Estatística nas suas vidas presentes e futuras.

No ensino da Estatística tem usado “o quadro, o manual, a calculadora gráfica, as fichas orientadas (não é fichas de exercícios), os computadores portáteis [pela primeira vez no ano passado], a Internet não e o quadro interactivo”.

As diferenças entre o ensino da Estatística e de outros temas de Matemática deve-se ao facto de os alunos considerarem a “Estatística mais interessante”, referindo: “Por muito que um professor se esforce, nos conteúdos que os alunos gostam pouco é difícil fazer com que os alunos gostem muito”. Por outro lado, a sua utilidade também faz com que os alunos desempenhem “um papel mais activo”.

Os alunos perguntam: – E para que é que isto serve? E às vezes é difícil para nós explicar-lhes para que lhes vai servir a Trigonometria. A Estatística eles já sabem que lhes serve para muita coisa.

À excepção do trabalho de grupo, que os alunos realizam em Estatística (incluído num total de dois ou três trabalhos efectuados durante o ano lectivo) e com maior influência, a avaliação em Estatística é semelhante à que realiza nos outros temas matemáticos, e que foi antes referida. Na avaliação dos trabalhos de grupo a professora sente dificuldades pelo facto de alguns grupos incluírem aspectos não pedidos nos seus trabalhos, na parte de apresentação do trabalho e em diferenciar o grau de envolvimento dos diferentes elementos dos grupos. Da sua experiência, apesar de dar aos alunos “no final um papelinho a perguntar: – Dos três quem trabalhou mais?”, conclui que os alunos “não são capazes de dizer que um colega não trabalhou”, acabando por atribuírem a mesma nota a todos.

Por fim, através da realização do trabalho de grupo, Ana admite que em Estatística pode avaliar “outras competências que, às vezes, nos outros temas não é tão fácil avaliar”, salientando os “trabalhos lindíssimos”, o trabalho no Excel, os “gráficos bonitos” e acrescentando que “alunos com dificuldades fizeram trabalhos extraordinários”.

Em relação à avaliação formativa, a que atribui a finalidade de que “o aluno se aperceba das suas dificuldades a tempo e as consiga superar para que depois quando tiver uma avaliação sumativa consiga dar o seu máximo”, Ana considera ser suficiente colocar questões aos alunos, não efectuando qualquer outro tipo de avaliação mais estruturado, como o faz em outros temas matemáticos. Constatando que os alunos não sentem grandes dificuldades em Estatística, a professora desvaloriza esta modalidade de avaliação, afirmando: “O aluno, normalmente, entende tudo à primeira e não tem grandes dificuldades. Por isso é que não me parece tão importante neste tipo de conteúdos a avaliação formativa. Eles próprios acham aquilo simples”.

4.2.2. Caso de Isabel

Isabel tem uma licenciatura em Matemática – Ramo Educacional, obtida numa universidade pública. Fez o estágio pedagógico no ano lectivo de 1991/1992, tendo neste momento cerca de 16 anos de serviço, sem contar com o período anterior à profissionalização, durante o qual trabalhou numa escola do ensino privado. Possui uma experiência muito diversificada, tendo leccionado todos os anos do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, bem como MACS, Cursos de Educação e Formação e o “Projecto 15/18”. Neste momento, lecciona o 9.º ano do ensino básico, os 10.º e 11.º anos do ensino secundário (incluindo o ensino profissional), ao que acresce ainda a disciplina de MACS e a área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado.

Isabel trabalha numa escola secundária com 3.º ciclo do ensino básico, criada há mais de cinquenta anos como “Escola Industrial e Comercial”. Trata-se de um estabelecimento de ensino que está situado num meio urbano, mas que tem uma população escolar “com muitas características do meio rural, com muitas dificuldades económicas, com muitos pais desempregados e com níveis de escolaridade baixos”. Não obstante, Isabel considera que os alunos apresentam, de um modo geral, um aproveitamento “razoável” em Matemática, embora com “algumas dificuldades”. Isabel salienta que o corpo docente da escola onde trabalha é “estável, dinâmico e cooperativo”, no qual considera que é possível encontrar, simultaneamente, práticas ditas “tradicionais” e uma tendência para inovar e para o recurso às “novas tecnologias”. A escola participa no Plano da Matemática, da qual foi coordenadora no ano lectivo 2006/2007.

Relativamente à formação em Estatística, ao longo do percurso escolar, Isabel refere que teve apenas uma disciplina anual de “Estatística e Probabilidades” durante a sua licenciatura. Além disso, teve também oportunidade de frequentar algumas acções de carácter pontual, não acreditadas e com uma curta duração (uma tarde ou uma manhã). No âmbito da formação contínua, acreditada e organizada pelos Centros de Formação de Associação de Escolas, assinala que não teve nenhuma acção específica e exclusivamente dedicada à Estatística, mas que “haveria algum tema onde foi abordada”. Neste caso, Isabel menciona que se tratou de uma formação “teórica, mas apresentando alguns exemplos práticos”, sem que a avaliação em Estatística tenha sido objecto de orientações específicas:

Aquilo que me sugeriram sempre, quando abordamos o tema da Estatística, foi realizar projectos, trabalhos de grupo com os alunos... Portanto, que havia outro tipo de avaliação diferente dos testes.

Práticas de ensino e de avaliação em Matemática

Isabel caracteriza as suas práticas de ensino como “uma mistura de estilos”, com umas aulas mais “expositivas”, com outras mais “participativas”, recorrendo aos recursos tecnológicos sempre que considera oportuno e em função dos objectivos definidos para cada aula. Neste sentido, o seu papel como professora também varia em função da disciplina e da turma, referindo que, em determinadas situações (turmas mais pequenas), é mais “dinizadora”, mas que, noutras circunstâncias (turmas mais numerosas, com outro tipo de dificuldades...), é mais “expositiva”: “acabo por ter uma postura diferente consoante as características da turma”. Quanto ao papel dos alunos na disciplina de Matemática, realiza um juízo de facto, segundo o qual haverá uns que serão mais “activos” e outros marcados mais pela passividade.

Esta professora declara que as tarefas de ensino que desenvolve também são variadas, dando o exemplo da disciplina de MACS, na qual considera que os trabalhos de grupo são predominantes, mas, em contrapartida, com as turmas do 9.º ano, costuma fazer mais “trabalho de pares”. Além disso, o seu principal recurso é, indubitavelmente, o “manual escolar”, pelo que só recorre a outros materiais numa lógica supletiva, isto é, quando o manual não contempla ou não trata de forma adequada um conteúdo. De um modo geral, Isabel caracteriza da seguinte forma as suas práticas de ensino:

Geralmente, para introduzir conceitos, gosto de os colocar perante uma situação-problema, em que os alunos vão tentar encontrar uma estratégia para a resolver e, dessa forma, levá-

los ao conceito que eu pretendo. Naturalmente que depois haverá uma parte mais prática, de exercícios, de treinos sempre com o objectivo de se aplicar na resolução de problemas.

No que se refere às práticas de avaliação, Isabel destaca, desde logo, o carácter determinante dos critérios definidos e aprovados pelo seu grupo disciplinar (“estão quantificados ao nível de escola”), em relação aos quais admite que nada pode mudar. Neste sentido, tal como está “estipulado”, apontou o facto de os testes serem o instrumento de avaliação com maior “peso”. Não obstante, Isabel usa várias formas de avaliação, designadamente os trabalhos de grupo. No caso da disciplina de MACS, tendo em conta a sua especificidade, admite que tem tendência para realizar mais trabalhos de grupo, composições matemáticas e grelhas de observação da aula.

Por outro lado, Isabel apresenta uma concepção da avaliação que acentua a função sumativa (“eu pessoalmente não faço grande distinção entre a avaliação formativa e a sumativa”), com uma orientação para a quantificação e para a centralidade do papel do professor. Com efeito, segundo esta professora, “aquilo que o aluno gosta e percebe é quando eu quantifico e, aí, já lhe diz alguma coisa”. Deste ponto de vista, apesar de considerar que os papéis se complementam, Isabel revela que, na sua opinião, o que prevalece é sempre a avaliação do professor, embora os alunos, na generalidade, revelem “um sentido crítico bastante justo”.

Práticas de ensino e de avaliação em Estatística

No ensino da Estatística, Isabel ressalta, desde logo, a adopção de uma metodologia indutiva, na qual o recurso ao mundo experiencial dos alunos tem um papel central, o que, de resto, vai ao encontro da representação imediata que os alunos têm da Estatística: “Quando se fala de Estatística, eles dizem logo “vamos fazer um inquérito aí pela escola?”.

Neste sentido, a professora refere que começa por colocar os alunos perante um “estudo” sobre algo que lhes seja familiar (a idade, o número de irmãos...), a partir do qual são desencadeados vários procedimentos, entre os quais a construção de gráficos com o recurso ao Excel. No entanto, Isabel nota que os alunos, apesar de toda a motivação e “agrado”, revelam dificuldades quando se trata de “tirar conclusões”.

Nas suas práticas de ensino da Estatística, Isabel aponta aspectos comuns e diferentes, comparando o modo como ensina os diferentes “temas” da Matemática. No que respeita aos aspectos comuns, Isabel destaca dois: o facto de não organizar de forma diferente o espaço das aulas de Estatística, apesar de imputar às limitações físicas da escola e, tal como em relação a outros “temas”, o facto de usar “muito o livro” (“o manual tem muitos bons recursos”) e, ocasionalmente, outros materiais de apoio, sobretudo os computadores e as calculadoras gráficas.

Por sua vez, em relação aos aspectos diferentes, Isabel aponta, por um lado, o tipo de actividades que costuma realizar, admitindo que “acaba por fazer mais tarefas em grupo”, o que implica, por outro lado, que tenha que assumir um papel diferente porque a avaliação também é diferente. Com efeito, no ensino da Estatística, há uma mudança qualitativa, quer no papel da professora, quer no papel dos alunos: a primeira assume mais a função de “mediadora”; os segundos revelam mais actividade, empenho e participação.

Na avaliação em Estatística, Isabel assume que, de um modo geral, não há diferenças a assinalar relativamente ao modo como avalia nos outros temas da disciplina de Matemática: a função da avaliação formativa é a “mesma”, não há alteração dos “critérios” (“tenho que me cingir aos critérios definidos pelo grupo”) e o papel dos intervenientes (professor e alunos) não apresenta mudanças (“é o mesmo que nos outros temas”). No entanto, Isabel não deixa de sublinhar uma “diferença” na avaliação em Estatística: o recurso ao “trabalho de grupo” e às “grelhas de observação” em detrimento dos “testes”, os quais, apesar de continuarem a ser utilizados (“faço um teste no final com questões de Estatística”), não são o único e o mais valorizado instrumento de avaliação.

Finalmente, apresenta-se no quadro 1 a síntese dos aspectos mais relevantes dos quatro casos estudados em relação às dimensões: formação e ensino de Estatística, ensino e avaliação em Matemática e o que é diferente no ensino e na avaliação em Estatística.

Quadro 1 – Síntese dos aspectos mais relevantes identificados em cada um dos quatro casos estudados

Casos	Formação e ensino de Estatística	Ensino e avaliação em Matemática	O que é diferente no ensino e na avaliação em Estatística
Beatriz	-É professora há 12 anos, 11 dos quais no 3.º ciclo. -Ensina quase sempre Estatística no 3.º ciclo. -Estudou Estatística no 10.º ano, na universidade e frequentou uma acção de formação contínua sobre o tema. -Prefere outros temas de Matemática à Estatística. -O tema de Estatística tem uma natureza mais prática e é mais adequado à realização de trabalhos.	-Os alunos trabalham mais em pares, menos em grupo e raramente individualmente. -Valoriza a resolução de exercícios e o cálculo. -Recorre ao manual escolar, a fichas orientadas, ao projecto “mil itens” e ao computador (programa GSP e folha de cálculo). -Na avaliação sumativa, atribui 80% à dimensão cognitiva (testes escritos e um problema) e 20% à dimensão de atitudes e valores (assiduidade, comportamento, participação, empenho, ...) -Na avaliação formativa recorre ao questionamento e ao feedback. -Os alunos fazem a sua auto-avaliação no final do período.	-A Estatística um tema fácil para os alunos. -Realização de um estudo em grupo, envolvendo algumas ou todas as fases do método estatístico. -Privilegia o trabalho de grupo e recorre a revistas e jornais para a interpretação de gráficos e não faz muitas fichas de trabalho. -A avaliação sumativa é mais centrada no trabalho de grupo e, quando há tempo, também inclui uma pergunta no teste escrito. -A avaliação formativa realiza-se quando a professora verifica e chama a atenção. -A auto e co-avaliação acontecem, sobretudo, aquando da apresentação dos trabalhos e influência mais a classificação dos alunos. -Na Estatística é mais fácil de enfatizar a aplicação da Matemática, apoiando-se na realidade e na experiência dos alunos. -Recorre ao manual escolar, a jornais e revistas, a calculadoras e ao computador. -Realiza sempre um trabalho de grupo, em que assume um papel mais de mediador e os alunos um papel mais activo. -Em termos de avaliação, considera mais o trabalho de grupo ou em pares e nunca faz um teste só de Estatística, embora admita incluir nos testes questões de Estatística.
Cristina	-É professora há 15 anos, tendo leccionado essencialmente no 3.º ciclo. -Ensina Estatística no 3.º ciclo. -Prefere outros temas de Matemática à Estatística. -Estudou Estatística na universidade (duas disciplinas semestrais: uma de Estatística e outra de Probabilidades) e frequentou uma acção de formação contínua sobre o tema.	-Valoriza as conexões matemáticas e as abordagens práticas. -Atribui a si um papel de dinamizador e aos alunos um papel activo. -Os alunos trabalham em pares ou individualmente e ocasionalmente em grupo ou em grande grupo. -Recorre ao manual escolar, materiais curriculares oficiais e às novas tecnologias. -Na avaliação valoriza o empenho e a atitude face à disciplina, os testes escritos (dois por período) e os trabalhos. -Atribui a si um papel preponderante no processo de avaliação formativa e de auto e hetero-avaliação.	-Os alunos consideram a Estatística mais interessante. -A Estatística é um tema fácil para os alunos. -No ensino da Estatística, primeiro os alunos resolvem individualmente uma ficha por si fornecida e depois realizam um trabalho de grupo. Para rentabilizar o reduzido número de aulas, na ficha, são fornecidos os dados brutos, as tabelas não preenchidas e os referenciais dos gráficos. -Recorre ao quadro, ao manual, a fichas orientadas, à calculadora gráfica, aos computadores e ao quadro interactivo. -Na avaliação, salienta-se o trabalho de grupo com maior peso na classificação e em que sente dificuldades em avaliar. -Na Estatística podem-se avaliar outras competências que são difíceis de avaliar em outros temas. -Desvaloriza a avaliação formativa porque os alunos não sentem dificuldades, considerando suficiente colocar questões.
Ana	-É docente há 20 anos, tendo nos últimos 17 anos leccionado no ensino secundário. -Ensina Estatística três ou quatro vezes no 3.º ciclo e cerca de seis vezes no ensino secundário. -Estudou Estatística na universidade (uma disciplina anual de Probabilidades e Estatística) e não frequentou nenhuma acção de formação contínua. -Gosta muito do tema de Estatística porque os alunos também gostam, sem o preferir a outros temas de Matemática.	-Usa o quadro e o giz e tecnologia, ressaltando aspectos negativos no uso excessivo do computador. -Nas suas aulas, umas vezes privilegia a exposição (60%) e outras vezes o trabalho autónomo dos alunos (40%). -Os alunos trabalham individualmente, algumas vezes em pares e raramente em grupo. -Entre os exercícios e problemas, privilegia os exercícios. -Na avaliação em Matemática, contempla as dimensões do saber fazer (90%), em que inclui os testes e alguns trabalhos, e do saber ser (10%), em que inclui a participação, o interesse, ... -Na avaliação formativa questiona os alunos e resolve fichas semelhantes aos testes. -Os alunos fazem a auto e co-avaliação para tomarem consciência do trabalho realizado e conhecerem a opinião da professora.	-Os alunos consideram a Estatística mais interessante. -A Estatística é um tema fácil para os alunos. -No ensino da Estatística, primeiro os alunos resolvem individualmente uma ficha por si fornecida e depois realizam um trabalho de grupo. Para rentabilizar o reduzido número de aulas, na ficha, são fornecidos os dados brutos, as tabelas não preenchidas e os referenciais dos gráficos. -Recorre ao quadro, ao manual, a fichas orientadas, à calculadora gráfica, aos computadores e ao quadro interactivo. -Na avaliação, salienta-se o trabalho de grupo com maior peso na classificação e em que sente dificuldades em avaliar. -Na Estatística podem-se avaliar outras competências que são difíceis de avaliar em outros temas. -Desvaloriza a avaliação formativa porque os alunos não sentem dificuldades, considerando suficiente colocar questões.
Isabel	-É professora há 16 anos e tem uma experiência de ensino diversificada com maior incidência no ensino secundário. -Ensina Estatística no 3.º ciclo e no ensino secundário. -Estudou Estatística na universidade (uma disciplina anual de Estatística e Probabilidades), algumas acções de formação (de curta duração) e uma acção de formação contínua.	-Nas turmas mais pequenas assume um papel de dinamizadora, enquanto nas turmas maiores assume um papel mais expositivo. -Propõe tarefas de ensino variadas, predominando o trabalho de grupo em MACS e o trabalho em pares nos restantes casos. -Recorre muito ao manual escolar e, por vezes, a tecnologia, sobretudo os computadores e as calculadoras gráficas. -Geralmente introduz os conceitos com uma situação-problema para os alunos resolverem, seguindo-se uma fase de exercitação. -A avaliação é determinada pelos critérios adoptados pelo seu grupo disciplinar. -Na avaliação recorre a testes escritos, a que atribui maior peso, e algumas vezes a trabalhos de grupo, composições matemáticas e grelhas de observação de aulas, especialmente em MACS. -Revela uma concepção de avaliação sumativa, prevalecendo sempre o	-No ensino da Estatística adopta uma metodologia indutiva, recorrendo ao mundo experiencial dos alunos e a situações que lhes sejam familiares. -Propõe mais tarefas de grupo, assumindo um papel de mediadora e os alunos revelam mais actividade, empenho e participação. -Na avaliação em Estatística valoriza mais os trabalhos de grupo e as grelhas de observação em detrimento dos testes.

5. Conclusão

Todos os quatro casos estudados têm uma experiência docente considerável, variando entre o mínimo de 12 anos e o máximo de 20 anos. Em termos de formação em Estatística, salienta-se a frequência de uma disciplina anual ou de duas disciplinas semestrais, no caso de todas as participantes, e de uma acção de formação contínua, no caso de três das participantes (Beatriz, Cristina e Isabel).

Todas as professoras ensinaram o tema de Estatística várias vezes ao longo do seu percurso profissional e não têm uma clara preferência pelo ensino deste tema, preferindo mesmo ensinar outros temas matemáticos (Beatriz e Cristina) ou não o preferindo a outros temas matemáticos (Ana). Esta opinião das professoras contrasta com a dos alunos, os quais revelam uma clara preferência pelo tema da Estatística, destacando-se, para tal, a sua natureza prática, a sua utilidade e consequente motivação para o seu estudo e o facto de se tratar de um tema fácil de aprender. Talvez esta discrepância se deva à pouca formação das professoras em Estatística, tal como ela é preconizada por Batanero (2009).

No ensino da Estatística, diferentemente dos outros temas da Matemática, salientam-se o trabalho de grupo, o tipo de tarefas e os recursos utilizados. O trabalho de grupo é utilizado por todas as participantes e, embora também seja implementado em outros temas matemáticos, na Estatística reveste um carácter mais sistemático e abrangente. Nesta metodologia de trabalho, em geral, as professoras assumem um papel mais de dinamizadoras e orientadoras e os alunos adoptam um papel mais activo e autónomo. Embora, certamente, esta forma de trabalho dos alunos lhes permita adquirir competências de natureza social (Petocz & Reid, 2007), o estudo não produziu evidência de que os trabalhos de grupo se tenham centrado na realização de investigações estatísticas, as quais são centrais para a consecução das sub-metas estabelecidas por Gal e Garfield (1997), antes referidas. A este propósito, Beatriz admite envolver no trabalho de grupo apenas algumas fases do método estatístico e, no caso de Ana, ele realiza-se após uma fase de introdução de termos e conceitos, o que revela um carácter de aplicação prática.

Em todos os casos estudados, para além dos exercícios e problemas, salienta-se o recurso a tarefas de carácter prático, contextualizadas e relacionadas com a vida real. No caso da exploração de situações realistas, enfatizar-se-ia a vertente da Estatística como ciência aplicada, reduzindo a dimensão teórica que, frequentemente, é sobrevalorizada no seu ensino (Batanero, 2009). Ora, face à metodologia adoptada no estudo, a referência feita pelas professoras pode corresponder a uma visão superficial do que é um ensino baseado na realidade, como foi constatado por Fernandes, Carvalho e Ribeiro (2007), onde, para as participantes, as tarefas contextualizadas (extraídas do manual escolar) seriam tarefas da vida real. Acrescenta-se ainda que Beatriz e Cristina, ambas professoras do ensino básico, referiram a utilização de revistas e jornais como fontes de tarefas, no caso de Beatriz com o propósito de interpretar gráficos.

Embora apontando malefícios ao uso excessivo dos computadores por parte dos alunos (caso de Ana) e um uso ocasional (no caso de Isabel), todas as professoras referiram recorrer às novas tecnologias no ensino da Estatística, as quais, para Jolliffe (2007), estão na origem das maiores alterações do seu ensino. As participantes destacam o uso da folha de cálculo e das calculadoras gráficas, tecnologias que são especialmente adequadas ao estudo da Estatística. A referência às calculadoras gráficas por ambas as professoras do ensino secundário (Ana e Isabel) pode dever-se ao facto destes instrumentos serem de uso obrigatório nesse nível de ensino.

Na avaliação em Estatística, diferentemente dos outros temas da Matemática, evidencia-se o trabalho de grupo, os testes escritos e a avaliação formativa. O facto de os alunos terem aprendido e terem sido avaliados através do trabalho de grupo revela a sintonia entre o ensino e a avaliação. Todas as professoras atribuem um maior peso ao trabalho de grupo e Ana sente dificuldades em o avaliar, sendo de opinião que ele permite a avaliação de outras competências difíceis avaliar em outros temas. Beatriz e Cristina, ambas professoras do ensino básico, admitem colocar algumas questões sobre Estatística no teste escrito, mas não fazem um teste apenas de Estatística.

Na avaliação formativa, Beatriz e Ana questionam os alunos ao longo da realização do trabalho de grupo, e Ana propõe ainda, nas aulas que antecedem os testes, uma ficha semelhante ao próprio teste. Além disso, Ana desvaloriza a avaliação formativa em Estatística uma vez que os alunos não sentem dificuldades nesse tema.

Os critérios de avaliação são estabelecidos pelos órgãos da escola e é realizada a auto-avaliação e hetero ou co-avaliação (Beatriz, Cristina e Ana). No caso de Beatriz, a avaliação dos alunos em Estatística é mais influenciada pela auto e co-avaliação, no caso de Cristina, a auto e hetero-avaliação centram-se nos aspectos atitudinais e, no caso de Ana, a auto e hetero-avaliação não influenciam a avaliação dos alunos.

Especialmente no caso de Ana, transparece a pouca importância que é atribuída frequentemente à Estatística, assumindo mesmo o trabalho de grupo um meio de leccionar o tema no pouco tempo disponível. Esta desvalorização da Estatística, relativamente aos outros temas da Matemática, passa também pelo facto de se tratar de conteúdos que estão praticamente ausentes dos exames nacionais.

Em síntese, podemos concluir que, por um lado, as professoras que participaram no estudo demonstram conhecer orientações relevantes relativas ao ensino e à avaliação em Estatística, e, por outro, revelem algumas dificuldades e limitações na implementação dessas orientações. Resultado análogo foi também obtido por Fernandes, Alves e Machado (2008) no caso das práticas de avaliação de professores de Matemática. Assim, o necessário aprofundamento da formação dos professores nesta temática deverá dar prioridade à preparação de materiais e à intervenção do professor em sala de aula. Tal formação deverá ainda repercutir-se nas perspectivas dos professores que vêem a Estatística como um tema fácil de os alunos aprenderem, pois muitas vezes tal facilidade decorre de uma abordagem mais técnica do tema (Fernandes, Sousa & Ribeiro, 2004), sem considerar os aspectos interpretativos, argumentativos e comunicativos.

Referências bibliográficas

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática: Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2009). Retos para la Formación Estadística de los Profesores. In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 7-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Burrill, G. (2007). The role of formative assessment in teaching and learning statistics. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD ROM.
- Carvalho, C. & César, M. (2002). Interações sociais, desenvolvimento cognitivo e Matemática. In *Actas do 5º Congresso da SPCE* (pp. 407-416). Porto: Colibri/SPCE.
- Coll, C. (2000). *Psicologia do ensino*. Porto Alegre: Artmed.
- Colvin, S. & Vos, E. K. (1997). Authentic Assessment Models for Statistics Education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 27-36). Amsterdam: IOS Press.
- Dickinson, W. B., Onwuegbuzie, A. J., Hines, C. & Hall, B. W. (2007). Summative Assessment strategies for statistical learning: Development, administration, and scoring of authentic and performance assessments. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD ROM.
- Fernandes, J. A., Alves, M. P. & Machado, E. A. (2008). *Perspectivas e práticas de avaliação de professores de Matemática*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

- Fernandes, J. A., Carvalho, C. & Ribeiro, S. A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7.º ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, 15(28), 27-61.
- Fernandes, J. A., Sousa, M. V. & Ribeiro, S. (2004). O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 165-193). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Gal, I. & Garfield, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.
- Garfield, J. (1994). Beyond testing and grading: using assessment to improve student learning. *Journal of Statistics Education*, 2(1) [Online].
- Guignard, N. (1988). *Si l'erreur m'était contée: essai critique des évaluations et étude de quelques rapports entre apprentissage, recherche et évaluation*. Genève: Service de la Recherche Pédagogique.
- Hadji, Ch. (1994). *Avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora.
- Hawkins, A. Jolliffe, F. & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Harlow, Essex, England: Longman Group UK.
- Jolliffe, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD-ROM.
- Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, 3(1) [Online].
- Marcel, D. M. (2003). *Avaliação no processo ensino-aprendizagem de matemática, no ensino médio: Uma abordagem formativa sócio-cognitivista*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.
- Ministério da Educação (1991a). *Programa de matemática do 2.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (1991b). *Programa de matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (2002a). *Programa de Matemática A* (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (2002b). *Programa de Matemática B* (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Moore, D.S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. In F. & S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first Century* (pp. 14-25). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Petocz, P. & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD ROM.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

OS PROJECTOS E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA

Rui Pimenta

ESTSP, Instituto Politécnico do Porto

rep@estsp.ipp.pt

Resumo. As diferenças entre o processo de ensino-aprendizagem tradicional e a metodologia de projectos centrados em problemas têm suscitado na literatura múltiplas interrogações. Até que ponto esta nova forma de trabalho colide com marcos determinados pelo sistema educativo? Que implicações tem ao nível dos papéis professor/aluno, ao nível do trabalho de grupo e da aquisição de novos saberes?

Independentemente da metodologia utilizada, é hoje em dia consensual que a capacidade estatística é na sociedade actual uma competência absolutamente necessária a um exercício pleno da cidadania. Emerge, assim, uma mudança de rumo, da transmissão mais ou menos passiva de conhecimentos para uma construção activa de uma cultura estatística de que a Escola não se poderá alhear.

Nesta comunicação pretendemos sintetizar o contributo da metodologia de projectos para o desenvolvimento da literacia e raciocínio estatísticos, apresentar as conclusões gerais de um estudo de avaliação de projectos (Pimenta, 2006) e divulgar um portal de apoio à interacção entre professores e estudantes no âmbito do desenvolvimento de projectos.

1. Introdução

A sociedade actual, em constante mutação, face a novas descobertas e novidades ao nível da ciência e tecnologia, obriga a uma reflexão sobre o papel da Escola. A nova Escola deverá preparar os estudantes para viver e actuar num mundo em constante mudança, sendo ele próprio um agente activo nessa mudança.

A Estatística desempenha um papel preponderante neste desenvolvimento uma vez que proporciona ferramentas metodológicas gerais para analisar a variabilidade, determinar relações entre variáveis, desenhar as suas próprias experiências e tomar decisões em situação de incerteza. (Batanero & Díaz, 2003).

Torna-se assim necessário que a Escola prepare o estudante para pensar e reflectir sobre a sociedade que o rodeia de forma crítica e criativa, não actuando apenas a partir de verdades adquiridas que lhe são impostas. Aprender será assim “adquirir conhecimentos, desenvolver habilidades, mudar comportamentos, descobrir o sentido das coisas e dos factos” (Martins, 2001, p. 21).

Este processo implica uma mudança de paradigma relativo ao processo de ensino-aprendizagem: da metodologia tradicional centrada no professor para uma metodologia centrada no estudante.

2. A Escola face à mudança de paradigma

A figura 1 pretende sumariar as características essenciais do modelo tradicional e do modelo de escola renovada.

Como referimos anteriormente, assistimos a uma mudança de paradigma. O centro do processo de ensino-aprendizagem passa agora a ser o estudante uma vez que as metodologias tradicionais não se mostram capazes de desenvolver adequadamente estas competências e vários autores reclamam a utilização de metodologias mais eficazes (Moore, 1992; Snee, 1993). Uma das críticas aos modelos tradicionais de ensino-aprendizagem, que várias vezes se repete, baseia-se no conteúdo e não no problema, isto é, a ênfase é colocada na aprendizagem de conceitos estatísticos e não no processo de utilização da estatística para resolver problemas. Estas metodologias revelam-se eficientes para oferecer

conteúdos de conhecimento porque o educador pode controlar a quantidade de matéria leccionada e adaptar o nível do curso às necessidades dos seus estudantes. Contudo, este desenho programático pode induzir nos estudantes a convicção errónea de que aprenderam tudo o que havia para aprender acerca da estatística, desencorajando futuras aprendizagens. Não podemos esquecer, também, que se os conhecimentos estatísticos não forem integrados com a sua área disciplinar, poderá tornar-se difícil para estes estudantes recordar e aplicar esses conceitos mais tarde.

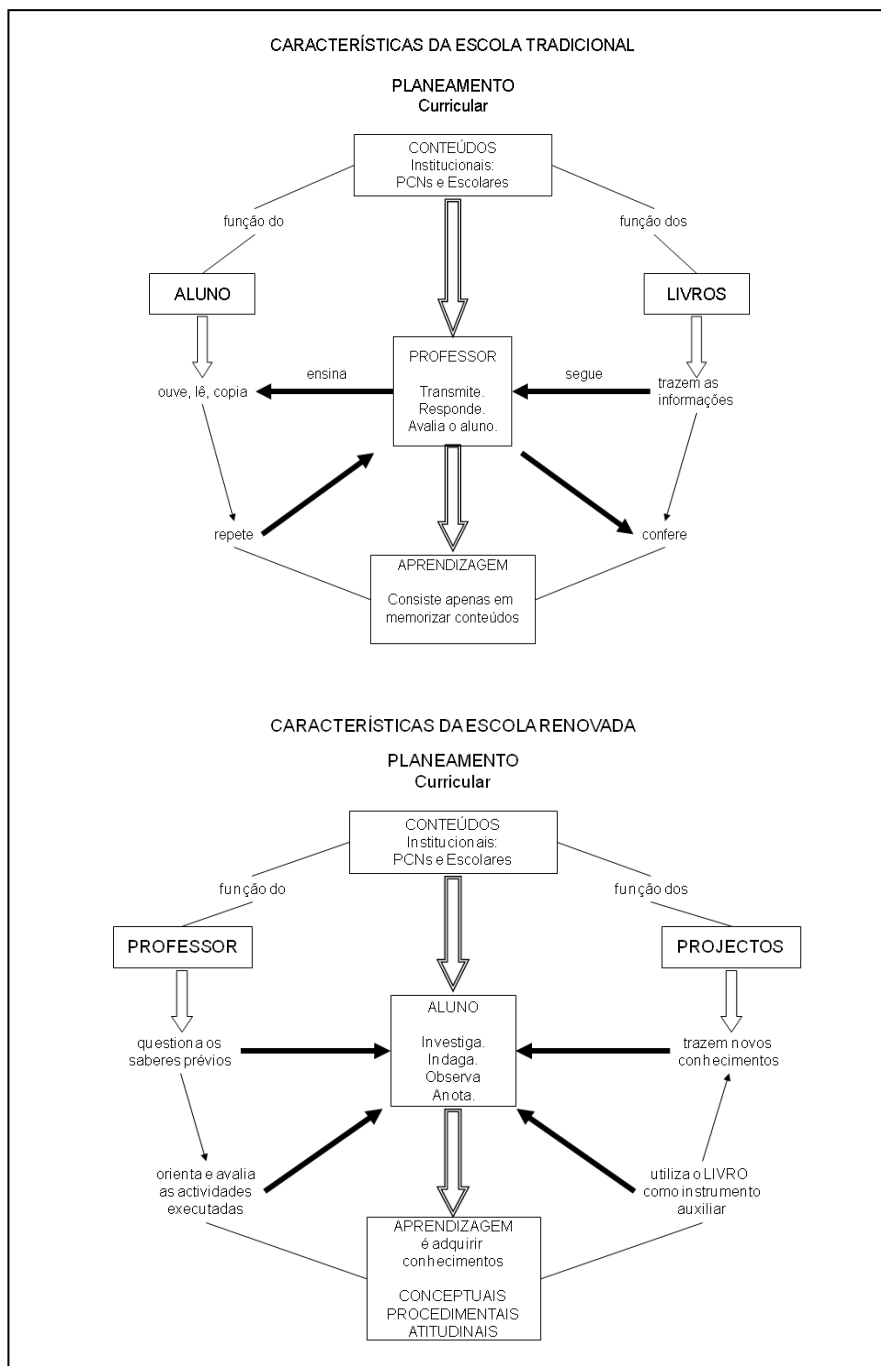


Figura 1. Escola Tradicional vs. Escola Renovada (Martins, 2001, pp. 22 e 25).

A estatística é, então, inseparável das suas aplicações e o seu objectivo final é a resolução de problemas externos à própria estatística (Anderson & Loynes, 1987). As propostas curriculares mais recentes realçam que o ensino da estatística não se deve reduzir apenas a conceitos e procedimentos mas enfatizar o processo de raciocínio estatístico e o sentido dos dados. Não nos podemos esquecer que os dados não são números mas sim números num determinado contexto. Devemos aliar a uma maior variedade e quantidade de conteúdos estatísticos uma mudança de focalização: o ensino da estatística deve centrar-se nas suas aplicações e a sua utilidade deve ser demonstrada a partir de diversas áreas (Batanero & Díaz, 2004).

A metodologia de projectos permite claramente integrar a estatística no contexto das suas aplicações e desenvolver as diferentes fases de uma investigação, promovendo o raciocínio estatístico. A estratégia de ensino deverá passar, nas palavras de Martins (2001, p. 11), por “*não dar a resposta pronta, ou a solução aos problemas encontrados pelos alunos, mas orientá-los a investigar, alimentando-lhes o prazer de descobrir, pela pesquisa e pelo próprio esforço, as respostas que querem*”. Os projectos permitem *aprender a fazer e a pensar*.

Por tudo isto, urge repensar a forma de ensinar estatística aos estudantes das diferentes áreas. Uma das principais dificuldades é o facto de grande parte dos livros de estatística enfatizarem a actividade matemática em detrimento da actividade estatística. Torna-se assim necessário estudar as aplicações e trabalhar com dados, para que os futuros profissionais adquiram competências que lhes permitam levar a cabo investigações nas suas áreas específicas aplicando a metodologia e o raciocínio estatísticos.

Paralelamente ao desenho de currículos, que enfatizem o instrumental estatístico mais utilizado em cada área de conhecimento, é inevitável dotar os professores de estatística de formação didáctica. Esta inclui não apenas o conhecimento estatístico mas também o *conhecimento didáctico do conteúdo*. As componentes básicas do conhecimento didáctico encontram-se descritas em Batanero (2003, p. 11):

- *A reflexão epistemológica sobre o significado dos conceitos, procedimentos (em geral objectos) que se pretendem ensinar, isto é, neste caso, a reflexão epistemológica sobre a natureza do conhecimento estocástico, seu desenvolvimento e evolução.*
- *Análise das transformações do conhecimento de modo a adaptá-las aos diferentes níveis de ensino. Esta análise permite reflectir sobre os diferentes níveis de compreensão possíveis acerca de um mesmo conhecimento e avaliar o nível e a forma particular como um determinado conceito poderia ser ensinado a uma pessoa em particular.*
- *Estudo das dificuldades, erros e obstáculos dos alunos na aprendizagem e suas estratégias de resolução de problemas, o que permitirá orientar melhor a tarefa de ensino e avaliação da aprendizagem.*
- *Análise do currículo, situações didácticas, metodologia de ensino para temas específicos e recursos didácticos específicos. Tudo isto configura parte dos recursos didácticos disponíveis para melhorar a acção didáctica.*

Nos pontos seguintes propomo-nos fazer um resumo daquilo que entendemos por literacia estatística e raciocínio estatístico.

3. A Literacia Estatística

O conceito de literacia estatística tem vindo a aparecer na literatura de forma a reconhecer o papel do conhecimento estatístico na formação elementar. Concordamos com Gal (2002, p. 2-3) quando afirma que os adultos numa sociedade industrializada se devem encontrar capacitados para:

- (a) interpretar e avaliar criticamente a informação estatística, os argumentos apoiados em dados ou os fenómenos estocásticos que os indivíduos podem encontrar em diversos contextos, incluindo os meios de comunicação, mas não se limitando a eles;

(b) discutir e comunicar as suas opiniões em relação a tais informações estatísticas quando seja relevante.

O autor propõe um modelo para a aquisição de literacia estatística baseado nas componentes da cultura estatística que apresentamos na Tabela 1.

Tabela 1 – Componentes da cultura estatística	
Componentes da cultura estatística	
Elementos de conhecimento	Elementos de disposição
Destreza a ler e escrever	
Conhecimento estatístico	Crenças e atitudes
Conhecimento matemático	Opinião crítica
Conhecimento de contexto	

A destreza na leitura e na escrita é importante porque as pessoas precisam de comunicar claramente as suas opiniões, oralmente ou por escrito, dependendo das circunstâncias. Mas, em qualquer caso, a resposta deve conter informação suficiente acerca da lógica ou evidência em que é baseada de modo a que outra pessoa possa julgar razoavelmente a informação. Para compreender a informação estatística são necessários alguns conhecimentos básicos de estatística.

Watson (1997) apresenta outro modelo de literacia estatística que contém três componentes de dificuldade progressiva: o conhecimento básico dos conceitos estatísticos e probabilísticos; a compreensão dos raciocínios e argumentos estatísticos quando se apresentam num contexto mais vasto do que em algum artigo nos meios de comunicação ou em algum estudo; e uma atitude crítica que se assume ao questionar argumentos que estejam baseados em certezas estatísticas não suficientes.

Scheaffer, Watkins e Landwehr (1998) propõem a inclusão dos seguintes tópicos no estudo da estatística:

- Percepção numérica;
- Compreensão das variáveis;
- Interpretação de tabelas e gráficos;
- Aspectos do planeamento de uma experiência ou levantamento, tais como o que constitui uma boa amostragem, ou métodos de recolha de dados e planeamento dum questionário;
- Processo de análise de dados, tais como detectar modelos a partir das frequências, ou resumir aspectos-chave com estatísticas;
- Relação entre probabilidade e estatística, tais como determinar as características das amostras aleatórias, e o conhecimento de testes de significância estatística;
- Raciocínio inferencial, tal como intervalos de confiança e testes de hipóteses.

No que concerne ao conhecimento matemático, Gal (2002) considera que é necessário algum conhecimento básico mas que, como nos nossos dias os computadores fazem os cálculos rapidamente, não é necessário aprofundar muito este tipo de conteúdos. As novas tecnologias tornam desnecessário o domínio de certos algoritmos obrigando a reequacionar o papel do cálculo no processo de ensino-aprendizagem. O cálculo deve ser um meio para se atingir um objectivo e não um fim em si mesmo. Por outro lado, exigem um apurado sentido de razoabilidade acerca dos resultados a que chegaram. É necessário que os cidadãos tenham espírito crítico e saibam, por exemplo, avaliar se as inferências são válidas, se o tipo de estudo é razoável no contexto e se a amostra é representativa. A literacia estatística pressupõe a capacidade de *“ler números”*, de extrair deles a informação que contêm, de os decifrar, pois, só assim, ser estatisticamente culto poderá implicar *saber* estatística. Mais recentemente, Gal (2005) descreve componentes similares para a literacia probabilística, indicando a necessidade de formar

os cidadãos que enfrentam com frequência situações de risco e incerteza, como por exemplo, diagnóstico médico, votações, jurados em tribunal, acidentes, etc.

Em todos as áreas, desde as ciências humanas às ciências da saúde, a estatística é utilizada na resolução de problemas de investigação. Assim, uma cultura estatística afigura-se necessária em todos os campos do conhecimento. Como refere Batanero (2003, p. 3): *“É necessário, então, a formação adequada, não só dos técnicos que produzem estas estatísticas, como dos profissionais e cidadãos que devem interpretar e tomar decisões baseadas nesta informação, assim como os que devem colaborar na obtenção dos dados requeridos”*.

Consideramos que o ensino deve promover a literacia e o raciocínio estatísticos, mas a importância da estatística não assume apenas este carácter geral, na medida em que a estatística é ela própria um instrumento de criação de ciência. Precisamos, por isso, da ajuda de investigações oriundas do campo da educação de forma a identificar os diferentes níveis de compreensão alcançáveis e úteis para os nossos alunos, assim como as práticas educativas adequadas que podem levar a estes modos de compreensão. O trabalho que temos vindo a desenvolver pretende contribuir neste sentido.

4. O Raciocínio Estatístico

Além da cultura e competências é preciso desenvolver o raciocínio estatístico, que é hoje em dia tão necessário a um cidadão capaz como a capacidade de leitura e de escrita. Este termo utiliza-se cada vez com maior frequência para referir o raciocínio específico que reconhece a variabilidade presente em múltiplos fenómenos e que utiliza métodos de análise, redução e controlo desta variabilidade, para tomar decisões ou efectuar previsões.

Wild e Pfannkuch (1999) recomendam o desenvolvimento do raciocínio estatístico e descrevem um modelo que compreende 5 componentes principais:

- *Reconhecer a necessidade dos dados.* O âmago da estatística é buscar o conhecimento da realidade. A base do método estatístico é a hipótese de que muitas situações da vida real só podem ser compreendidas a partir da análise de dados previamente recolhidos de forma adequada. A experiência pessoal ou a evidência de tipo anedótico não são fiáveis e podem conduzir a confusões nos julgamentos ou no processo de tomada de decisões. Ora, não há trabalho estatístico efectivo sem dados, os quais devem ser recolhidos com metodologias estatísticas apropriadas, o que implica um conhecimento de técnicas de amostragem e a compreensão dos conceitos de representatividade, enviesamento e a capacidade de escolher uma amostra que permita responder às perguntas de investigação. Incluímos também neste ponto o uso de instrumentos adequados de recolha de dados. Não se poderá chegar a um conhecimento efectivo da realidade sem um processo adequado de recolha de dados.
- *Transnumeração.* Os autores utilizam esta palavra para indicar a compreensão que pode surgir ao alterar a representação dos dados. Ao contemplar um sistema real desde a perspectiva de modelização, podem ocorrer três tipos de transnumeração: (1) a partir da medida que “captura” as qualidades ou características do mundo real; (2) ao passar os dados brutos para uma representação em tabela ou gráfico, que permita extrair o sentido dos mesmos; e (3) ao comunicar o significado que surge dos dados, de forma que seja compreensível a terceiros. A transnumeração é o processo de representar ou transformar os dados de forma a extrair aquilo que eles nos podem transmitir. A modelação permite capturar as características ou qualidades da realidade, conferindo sentido aos dados e permitindo compreender e comunicar melhor o seu significado.
- *Percepção da variação.* A colheita adequada dos dados e os julgamentos elaborados a partir dos mesmos requerem a compreensão da variação que existe e se transmite nos dados, bem como a incerteza originada pela variação não explicada. A estatística permite elaborar previsões,

procurar explicações e causas da variação e aprender a partir do contexto. A estatística busca o conhecimento na variabilidade e na incerteza provocada pela variação não explicada. O objectivo da estatística não é eliminar essa variabilidade pois, nesse caso, teríamos uma situação artificial que não corresponderia à realidade e que nada nos poderia ensinar. Pretendemos, sim, reduzir a variabilidade, reduzindo a variabilidade espúria ou a variabilidade sistemática que confundem a análise e interpretação estatísticas. Para Smith (1999), a variabilidade é a principal mensagem da estatística. Se não há variabilidade não existe problema científico. No entanto, a variação estatística é a variação aleatória e é a incerteza que esta variação provoca que deve ser explorada.

- *Raciocínio com modelos estatísticos.* Os modelos permitem representar a realidade. Todavia, é importante que ao relacionar o modelo com os dados o investigador não se esqueça que modelo e realidade são conceitos distintos. Qualquer instrumento estatístico, inclusive um simples gráfico, uma linha de regressão ou uma estatística sumária podem ser encarados como um modelo, uma vez que são formas de representar a realidade. O importante é diferenciar o modelo dos dados e ao mesmo tempo relacionar o modelo com os dados.
- *Integração da estatística no contexto.* O pensamento estatístico é o resultado de implicações e conjecturas originadas pelo conhecimento estatístico num determinado contexto a partir de dados que temos disponíveis. Como afirma Smith (1999), todo o pensamento, incluindo o pensamento estatístico, tem sentido inserido num contexto que deverá ser compreendido por todos os que participam na investigação. Aplicar métodos estatísticos sem considerar o contexto é completamente despropositado e, por exemplo, as conclusões a que chegamos na área das ciências da saúde poderão não ter qualquer tipo de sentido noutras áreas.

Em relação ao raciocínio estatístico, Régnier (2002, p. 5-6) desenvolve um referencial para a formação estatística, afirmando que o ensino da estatística deve capacitar o estudante para:

- Construir um modelo mediante uma aproximação estatística congruente com a problemática;
- Descrever, tratar e analisar os dados de forma pertinente no quadro do modelo construído;
- Desenvolver um raciocínio que integra a noção de risco no enunciado das conclusões;
- Interpretar os fenómenos a partir de dados estatísticos recolhidos sobre os factos e suas relações;
- Comunicar os resultados estabelecendo claramente as diferenças entre o modelo e a realidade que ele supostamente representa, entre os tratamentos realizados dentro do modelo e as interpretações reformuladas no contexto em que a problemática se coloca;
- Prosseguir de forma autónoma e pessoal uma aprendizagem estatística que permita enriquecer o conhecimento entretanto adquirido.

Para este autor, as competências deverão ser exercidas sobre uma situação complexa que compreenda tanto a informação essencial como a informação secundária e parasita. O exercício das competências requer actividades complexas integrativas das competências fundamentais, o *saber* e o *saber fazer*. A avaliação do grau em que se atingiu um objectivo de integração deve ser a mais próxima possível das situações da vida pessoal ou profissional com que o estudante será futuramente confrontado. Os objectivos de integração explicitam o *saber ser* e o *saber tornar-se* orientados para as finalidades do desenvolvimento e da autonomia.

Se compararmos as capacidades que o estudante deve adquirir com a aprendizagem da estatística, segundo Régnier (2002), com as componentes do raciocínio estatístico, propostas por Gal (2002), podemos concluir que o ensino da estatística deverá desenvolver o raciocínio estatístico. De facto, cada uma das capacidades que o estudante deve adquirir insere-se numa das componentes do raciocínio estatístico.

Exemplos de cada uma das categorias descritas nas duas secções anteriores encontram-se detalhadamente analisados em Pimenta (2006) e em Pimenta e Batanero (2005).

5. O Papel dos Projectos no Desenvolvimento da Literacia e Raciocínio Estatísticos

Batanero e Díaz (2004) apresentam-nos os principais passos a ter em consideração no desenvolvimento de um projecto. Na figura 2 apresentamos os principais passos do desenvolvimento de um projecto.

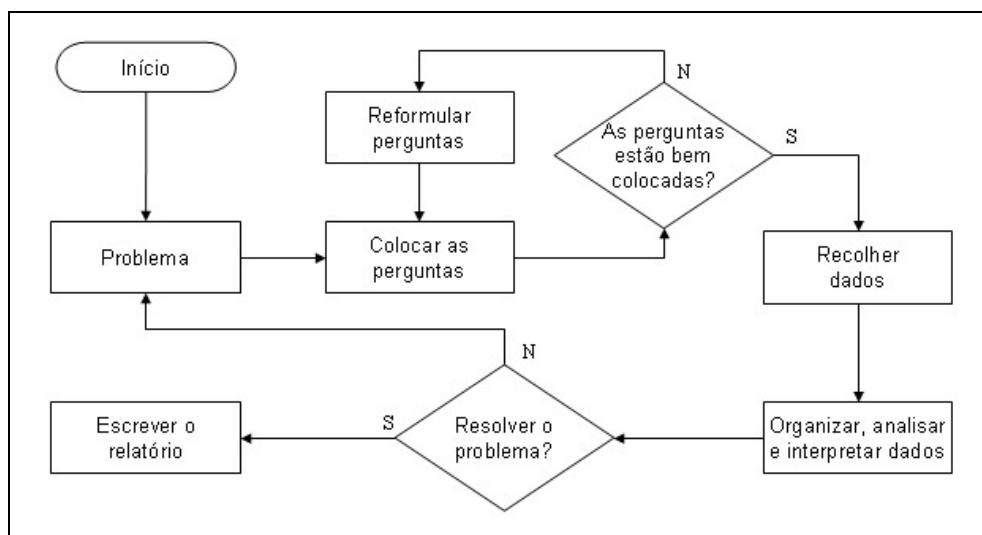


Figura 2. O desenvolvimento de um projecto (adaptado de Batanero & Díaz, 2004).

Ao realizar um projecto, o estudante começa geralmente por colocar um problema prático inerente à sua actividade profissional e a estatística surge como um meio para o resolver. Para responder à pergunta inerente ao problema, torna-se necessário recolher dados que, na maioria das vezes, são provenientes da prática clínica dos estudantes. Ao trabalhar com dados, a Estatística assume um papel fulcral pois fornece meios para resolver problemas da vida real, permitindo desenvolver no aluno a capacidade de raciocinar estatisticamente.

É muito importante que tantos os estudantes como os professores estejam conscientes das etapas e de tudo o que é necessário para a sua realização. Um trabalho de projecto envolve a planificação e desenvolvimento de um plano de trabalho que deve ser realizado num período de tempo. As ideias educacionais implícitas num projecto são profundas e englobam não só a produção de um único resultado mas também a ligação múltipla entre várias tarefas realizadas anteriormente, promovendo no estudante a capacidade de raciocinar estatisticamente.

Esta capacidade não consiste apenas na análise dos dados, mas é todo um processo que pressupõe saber passar de um problema geral às questões que são passíveis de resposta, saber que dados se necessita para responder às questões levantadas, saber planejar a experiência que permite obter os dados, analisar os dados e interpretá-los. Além disso, na medida em que o aluno deve escrever correctamente, ele tem a oportunidade de melhorar a sua escrita em estatística.

A finalidade da estatística é a resolução de problemas reais. Porém, não basta ensinar estatística pois temos de distinguir entre o conhecimento que o estudante tem de um determinado conceito ou procedimento estatístico e a capacidade de aplicar esse mesmo conhecimento. A capacidade para aplicar os conceitos estatísticos é muito mais difícil de adquirir do que o que geralmente se supõe, pois requer não só conhecimentos técnicos mas também estratégicos, ou seja, saber quando é que a técnica ou procedimento devem ser utilizados.

A realização de um projecto de investigação que envolva uma componente estatística incrementa a literacia e raciocínios estatísticos, pelo facto de obrigar o aluno a contextualizar os conhecimentos estatísticos, a desenvolver um espírito crítico face à estatística e a familiarizar-se com a escrita em estatística. Além disso, elaborar um projecto contribui também para suprir o problema, referido por Altman, Goodman e Schroter (2002), de encontrar muitos erros nos artigos publicados, possivelmente por se recorrer ao apoio de um estatístico essencialmente na fase de análise. O projecto permite desenvolver, nos futuros diplomados, a capacidade de reconhecer a necessidade de recorrer a um estatístico na elaboração dos seus trabalhos e assim diminuir, num futuro próximo, erros de aplicação de métodos estatísticos nas publicações.

Segundo Batanero e Díaz (2004, p. 2),

Em vez de introduzir os conceitos e técnicas descontextualizadas, aplicadas unicamente a problemas tipo, difíceis de encontrar na vida real, trata-se de apresentar as diferentes fases de uma investigação estatística: apresentação do problema, decisão sobre os dados a recolher, recolha e análise dos dados e obtenção de conclusões sobre o problema colocado.

Holmes (1997) apresenta um conjunto de vantagens na elaboração de projectos com componente estatística:

- O aluno percebe que a estatística é necessária à resolução de problemas reais e, por isso, interessa-se mais pelo assunto (esta vantagem torna-se mais notória quando a escolha do tema do projecto parte do aluno);
- Se os dados surgem de um problema, são dados com significado e têm de ser interpretados, ou seja, os projectos permitem contextualizar a estatística e realçar a sua relevância;
- Com os dados reais aprende-se melhor e introduzem-se ideias como precisão, como variabilidade e fiabilidade, possibilidade de medida e enviesamento;
- Mostra-se que a estatística não se reduz a conteúdos matemáticos.

Starkings (1997) afirma que o trabalho de projecto possibilita ao aluno a integração de conhecimentos adquiridos nas aulas de estatística e noutros domínios para a realização, com sucesso, de uma tarefa prática baseada em situações reais. É esta componente de integração que torna o trabalho de projecto uma parte necessária no processo de ensino-aprendizagem. No entanto, se por um lado a aprendizagem através da integração de conhecimentos vindos de diversas fontes, e muitas vezes em tempos desfasados, é mais exigente que uma aprendizagem sequencial de quantidades de informação isoladas; por outro lado, a aprendizagem de forma integrada é muitas vezes a melhor preparação para o exercício de uma profissão.

Há muito que o processo de ensino-aprendizagem deixou de ser comparado ao caminho percorrido sobre uma linha recta. Uma alegoria, mais completa, para o processo ensino-aprendizagem, pode ser conseguida através da comparação a um puzzle 3-D. Assim, o aluno poderá começar por dispor algumas peças, para depois completar uma secção ali, outra acolá ou mesmo fazer a junção de duas secções que à partida não tinham qualquer ligação. (Starkings, 1997, p.139)

Torna-se assim clara a importância do trabalho de projecto. É então necessário efectuar alguma reflexão acerca do processo de construção e execução do trabalho de projecto, devendo estas componentes preocupar tanto os alunos como os professores que deverão servir de assessores e facilitadores da tarefa. Alguns exemplos de projectos estatísticos para o ensino secundário poderão ser consultados em Batanero (2001).

6. Avaliação da aprendizagem a partir de projectos

Na verdade, não é suficiente avaliar o aluno a partir de respostas a perguntas rotineiras num único exame; em contrapartida, num projecto avalia-se:

- *A compreensão conceptual*: dar nome, verbalizar e definir conceitos; identificar e gerar exemplos válidos e não válidos; utilizar modelos, diagramas e símbolos para representar conceitos; passar de um modo de representação a outro; reconhecer os diversos significados e interpretações dos conceitos; identificar propriedades de um conceito determinado e reconhecer as condições que determinam um conceito em particular; comparar e contrastar conceitos;
- *Conhecimento procedimental*: reconhecer quando é adequado um procedimento; explicar as razões para os distintos passos de um procedimento; levar a cabo um procedimento de forma fiável e eficaz; verificar o resultado de um procedimento empiricamente ou analiticamente; reconhecer procedimentos correctos e incorrectos; reconhecer a natureza e o papel que cumprem os procedimentos dentro da estatística;
- *A resolução de problemas*: formular e resolver problemas; aplicar diversas estratégias para resolver problemas; comprovar e interpretar resultados; generalizar soluções;
- *A formulação e comunicação estatística*: expressar ideias estatísticas de forma falada, escrita ou mediante representações visuais; interpretar e julgar ideias estatísticas, apresentadas de forma escrita, oral ou visual; utilizar o vocabulário estatístico, notações e estruturas para representar ideias, descrever relações;
- *O raciocínio estatístico*: utilizar o raciocínio indutivo para reconhecer padrões e formular conjecturas; analisar situações para encontrar propriedades e estruturas comuns, aprender a tirar conclusões sob incerteza;
- *A atitude e a disposição face à estatística*: confiança no uso da estatística para resolver problemas, comunicar ideias e raciocinar; flexibilidade ao explorar ideias estatísticas e utilizar métodos alternativos para a resolução de problemas; desejo de continuar até ao final com um problema estatístico; reconhecer o papel que cumpre a estatística na nossa cultura.

Ao desenvolver todas estas capacidades o aluno aprende a aplicar correctamente as técnicas e procedimentos estatísticos. Simultaneamente, desenvolvem-se as capacidades estatísticas e de investigação.

6.1. Metodologias de Avaliação de Projectos

A avaliação de um trabalho de projecto pode ser feita de várias formas: por exemplo, um projecto pode ser somente avaliado no final da sua realização, ou pode ser avaliado progressivamente, isto é, à medida que são finalizadas as várias etapas que o compõem.

O propósito da avaliação por etapas é fornecer ao aluno um *feedback* em vários pontos do processo de realização do projecto, possibilitando-lhe um acompanhamento contínuo. Por exemplo, se o aluno for avaliado no final da primeira etapa, e não obtiver a cotação total, visto ter deixado alguma parte da análise por executar, então o professor ao fazer essa avaliação pode chamar a atenção do aluno para essa falha e o aluno poderá então continuar o seu trabalho e obter pontuação máxima na avaliação das próximas etapas.

Starkings (1997) expõe dois modelos para proceder à avaliação do trabalho de projecto, o modelo ADIE - *Analysis, Design, Implementation and Evaluation* e o modelo 4'Ps (*Project log, Project report, Pratical development and Presentation*). O modelo ADIE foi desenvolvido pelo Northern Examinations Board, em 1988, para a avaliação de projecto realizados individualmente e não contempla a etapa da apresentação; no entanto, pode ser feita uma adaptação de forma a introduzir esta componente, tendo

em conta os critérios incluídos no modelo 4 P's. O Modelo 4'Ps foi desenvolvido na Universidade *South Bank* para avaliar projectos desenvolvidos a nível colectivo, possibilitando também a avaliação do aluno pelo seu envolvimento no grupo e pelo seu esforço e contribuição para a realização do projecto. Este modelo propõe que cada aluno envolvido na realização do trabalho de projecto mantenha um *log-book* durante todo o processo. Não nos vamos alongar mais na descrição deste modelo uma vez que não é objectivo do presente trabalho debruçar-se sobre os modelos de avaliação de projectos, podendo uma descrição detalhada ser encontrada no artigo citado.

6.2. Conclusões Relativas à Avaliação de Projectos

Os estudos que levámos a cabo (Pimenta, 2006; Batanero & Pimenta, 2005), com base nas componentes da literacia e raciocínio estatísticos e nos tipos de conhecimento anteriormente descritos, indicam-nos que, num estudo do tipo descritivo, os estudantes alcançam um determinado nível de raciocínio estatístico que lhes permite reconhecer a necessidade dos dados e perceber a variação dos mesmos, efectuar procedimentos de transnumeração e integrar a estatística no contexto de uma investigação. Contudo, os estudantes não atingem um nível adequado ao trabalhar com modelos estatísticos, em particular nos estudos de tipo inferencial. Tal facto relaciona-se, possivelmente, com uma formação demasiado determinista que poderá conduzir à falta de percepção da incerteza no enunciado das conclusões. Neste momento e após a sua construção, encontramos-nos em fase de conclusão da validação de um instrumento de avaliação do raciocínio estatístico a partir de projectos.

Para finalizar, gostaria de enfatizar que a importância da avaliação, no processo ensino-aprendizagem, é há muito reconhecida. No caso particular da avaliação dos projectos, esta tem um papel crucial pois permite aos docentes fazer um diagnóstico, estabelecer o que o aluno aprendeu, possibilita a planificação daquilo que um futuro aluno necessitará de aprender. A consultoria estatística, a qual tratamos na próxima secção, é igualmente um elemento crucial pois ao incrementar a interacção proporciona um ambiente propício à aprendizagem quer do estudante, quer do professor/facilitador.

7. A Consultoria Estatística

7.1. Introdução

Godino, Batanero e Jaimez (2000, p. 10) concebem a consultoria estatística como:

Um dispositivo de estudo de problemas de análise de dados em cooperação. Neste sentido, devemos considerá-la como um sistema didáctico. O consultor necessita da contribuição do cliente, tanto como o cliente necessita da contribuição do consultor e ambos necessitam de estruturas de suporte adequadas (recursos materiais, conhecimentos, atitudes, etc.)

Os autores assinalam ainda que a circunstância que dá origem à consultoria estatística é a falta de conhecimentos estatísticos por parte do cliente. Contudo, esta carência de conhecimentos não pode assumir uma proporção que impeça a tomada de consciência da necessidade de solicitar a colaboração ao especialista em estatística.

O consultor necessita de conhecimentos suficientes das áreas de aplicação da estatística de modo a garantir a compreensão e comunicação mútuas. Nas palavras de Barnett (1988, p. 306), *“o que se espera é que seja mestre do seu próprio ofício e conhecedor de muitos outros.”*

O processo global de comunicação entre o cliente e o estatístico inicia-se na fase de planeamento, aquando da decisão sobre a forma como vão ser recolhidos os dados, e prolonga-se até à interpretação dos resultados obtidos nessa mesma análise. Neste processo podemos considerar dois tipos de aspectos: os exclusivamente estatísticos e os qualitativos inerentes ao problema. Os aspectos exclusivamente estatísticos envolvem questões como o *design* amostral e a escolha do método adequado para a análise e sua realização. No campo dos aspectos qualitativos inerentes, temos questões como a escolha da unidade de análise, das variáveis, das escalas de medida e do processo de codificação e atribuição de categorias. Isto é, entre o momento de recolha de dados e o do seu tratamento estatístico existe todo um

processo que não pode ser da exclusiva responsabilidade do estatístico, pois a interpretação dos resultados finais de investigação só tem sentido se for realizada tendo em linha de conta o contexto em que as perguntas de investigação foram formuladas (Batanero, Godino & Vallecillos, 1992).

A dificuldade de comunicação entre o investigador e o estatístico sente-se, essencialmente, nas fases iniciais e finais do processo. Para Batanero, Godino e Vallecillos (1992) esta falta de interligação entre a linguagem técnica, própria da disciplina na qual se investiga, repercute-se na qualidade final da análise efectuada. Em certas ocasiões, pode chegar a ser inadequada ou pode ser incorrectamente interpretada nos relatórios finais de investigação.

Ao prestar consultoria estatística ao aluno, na realização do seu projecto, não só o estudante beneficia porque começa a olhar a estatística não apenas como um instrumento de análise de dados mas também como um processo em que as questões são levantadas antes da recolha dos mesmos, de acordo com as questões que se pretendem responder. Ainda, o professor que se depara com o tipo de problemas que surgem na área específica dos seus estudantes pode obter ideias úteis para definir o programa da sua disciplina e as estratégias de ensino de acordo com as necessidades identificadas.

A consultoria proporciona um ambiente rico para a educação do especialista em estatística, ou seja, neste ambiente beneficiam o professor e o aluno. O professor pode utilizar material da vida real no ensino. O estatístico deve, assim, ser um tradutor e um comunicador pois tem de compreender o suficiente das outras disciplinas para compreender os seus problemas, traduzi-los estatisticamente e comunicar as respostas de forma compreensível (Barnett, 1988). Pensamos que a consultoria desenvolve a habilidade de comunicar e de se familiarizar com as disciplinas de outras áreas.

Phillips (2001) defende que não é necessário que sejam os próprios investigadores ou departamentos em que estão inseridos a resolver todos os problemas, devendo recorrer aos recursos que cada instituição disponibiliza, nomeadamente a consultoria estatística. Chadjipadelis (2001) realça que não está ainda esclarecido se será mais importante dotar os investigadores de conhecimento estatístico ou fazê-los compreender que necessitam da ajuda de um estatístico.

Fica assim demonstrada a necessidade de criar serviços de apoio e consultoria estatística nas instituições de ensino superior e centros de investigação, não só para apoiar os investigadores mas também para preparar estatísticos e investigadores.

O nosso trabalho encaminha-se, assim, para uma avaliação prévia das necessidades de consultoria dos estudantes na elaboração dos seus projectos estatísticos.

7.2. A Consultoria Estatística na Escola Superior de Tecnologia de Saúde do Porto (ESTSP)

O projecto de investigação em fisioterapia (PFT), na ESTSP, constitui uma iniciação à investigação científica que se pretende séria e de qualidade e tem como objectivo dotar os estudantes, futuros especialistas na sua área de conhecimento, de capacidades para a prática de investigação. Embora o PFT não seja obrigatoriamente um projecto estatístico, o número de projectos que envolvem actividades de recolha e análises de dados é bastante elevado e têm vindo a aumentar de ano para ano.

No ano lectivo em que iniciámos a leccionação da licenciatura em fisioterapia, 1999/2000, não existia na ESTSP um apoio formal ao desenvolvimento do projecto na sua componente estatística. No entanto, a grande parte dos estudantes (cerca de 250) recorreu de forma informal ao apoio dos dois docentes da área de estatística que leccionavam na escola. Esse apoio foi dado de forma muito precária, quer devido à falta de instalações próprias quer devido a limitações de tempo. O número de alunos aumentou de forma considerável no final do ano lectivo de 2000/2001, acentuando-se a necessidade de implementar o serviço de apoio/consultoria estatística.

No ano lectivo de 2001/2002, a Escola Superior de Tecnologia de Saúde do Porto sofreu alterações significativas devido ao aumento considerável do número de alunos e à mudança para novas instalações. Juntamente com estas mudanças, verificou-se também o aumento do número de projectos que incluíam uma componente estatística de tratamento de dados. Consequentemente, o número de

alunos que procuravam apoio de um especialista em estatística para a elaboração dos seus projectos de conclusão do grau de bacharel e do grau de licenciado também aumentou significativamente.

No 2.º semestre do ano lectivo em questão, o Departamento de Produção e Sistemas decidiu criar um gabinete de apoio/consultoria estatísticos a projectos, no qual colaboraram quatro docentes com horários de atendimento estipulados e comunicados aos estudantes, no sentido de dar apoio na informatização dos dados obtidos experimentalmente, na orientação da escolha das ferramentas estatísticas adequadas a cada projecto e, posteriormente, na interpretação dos resultados obtidos. O programa utilizado em todos os trabalhos foi o SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*).

Numa situação ideal, qualquer aluno que pretendesse apoio estatístico para desenvolver o projecto deveria, no início do ano, apresentar o anteprojecto para que fosse orientado quanto à metodologia a desenvolver no planeamento do trabalho experimental, tendo em atenção factores como a dimensão e a recolha de amostras, a formulação das hipóteses e a verificação, entre outros.

Cada docente tinha, em média, 4 horas de atendimento por semana. Este apoio tinha duas vertentes fundamentais: a primeira dizia respeito a algumas orientações em relação à utilização do programa para o tratamento dos dados e à sua informatização; a segunda dizia respeito à aplicação das ferramentas estatísticas e à interpretação dos resultados obtidos. No final da elaboração dos projectos, normalmente, os alunos recorriam ao Gabinete de Apoio e Consultoria Estatística (GACE) para uma última análise e verificação do que tinha sido redigido relativamente ao tratamento estatístico.

A partir do ano lectivo de 2002/2003, o GACE desenvolveu o seu trabalho desde o início do ano, tendo sido aumentado de quatro para seis o número de docentes colaboradores. Cada docente tinha, no mínimo, uma carga horária de atendimento de 4 horas, repartidas por dois dias da semana, em horários diferentes, de forma a abrangerem todos os dias da semana e ambos os turnos, laboral e pós-laboral. A metodologia de intervenção foi semelhante à do ano lectivo de 2001/2002. Mais uma vez se evidenciou um aumento acentuado do número de alunos a solicitar apoio do consultor estatístico durante o período lectivo do 2.º semestre, tendo o gabinete desenvolvido esforços para continuar o seu trabalho durante os meses de Setembro e Outubro.

Da experiência destes seis anos de actuação, pode-se concluir que os alunos que mais procuraram apoio estatístico para a elaboração dos projectos e monografias pertenciam aos cursos de Análise Clínicas e Saúde Pública, Fisioterapia, Farmácia, Cardiopneumologia, Saúde Ambiental e Terapêutica da Fala.

Actualmente, o GACE encontra-se a elaborar um regulamento interno que permita definir novas metodologias de intervenção, de forma a garantir a prestação de um serviço mais eficaz, quer em termos de apoios a projectos dos alunos da ESTSP quer em termos de prestação de serviços de consultoria externa. Os objectivos do GACE são os seguintes:

- A promoção de uma cultura de investigação a nível institucional;
- O incremento da capacidade estatística, desenvolvendo a nível pessoal habilidades para a investigação;
- O aconselhamento estatístico ao nível do planeamento da investigação, aquisição e análise de dados e da redacção dos relatórios finais;
- A organização de seminários, *workshops* e cursos breves relacionados com todos os passos da investigação e com os tópicos da bioestatística não cobertos pelos programas em funcionamento na ESTSP;
- Tornar-se especialista em dados qualitativos, métodos de análise e em packages estatísticos relevantes no domínio da estatística aplicada às ciências da saúde.

7.3. Portal de Apoio à Consultoria Estatística

Ao mesmo tempo que se procura clarificar a missão do GACE e estabelecer as suas regras de funcionamento, o grupo de docentes/consultores de estatística, em cooperação com o grupo de docentes de informática, com o apoio da Faculdade de Engenharia do Porto e do Instituto Superior de Engenharia

do Porto, preparam-se para implementar um portal web para o ensino e consultoria em estatística. Este portal pretende promover o desenvolvimento de uma cultura estatística em termos institucionais seguindo a filosofia sobre o ensino baseado em recursos virtuais sugerido em trabalhos sobre o tema (Ben-Zvi, 2000; Copeland-Smith, 2002; Cronjé, 2001).

O GACE procura integrar as novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na implementação de processos de consultoria estatística, de forma a melhorar todas as suas potencialidades no processo de ensino-aprendizagem. Estes processos de aprendizagem surgem de forma natural na consultoria estatística, nos quais o consultor terá de ser capaz de levar o cliente a perceber o alcance dos métodos estatísticos aplicados, os pressupostos subjacentes aos mesmos e as principais conclusões obtidas (Godino, Batanero & Gutierrez-Jaimes, 2000). Procura-se, assim, implementar um portal Web que permita desenvolver o raciocínio e a aprendizagem da estatística, e que permitirá incrementar também modos de aprendizagem cooperativa.

Pretendemos criar um ambiente de trabalho que possibilite a colaboração entre consultores, investigadores em estatística, alunos e docentes da ESTSP. Este ambiente de trabalho poderá ainda ser utilizado por outras entidades quando o gabinete iniciar a prestação de serviços ao exterior. O ambiente de trabalho será composto por duas áreas distintas, mas complementares: uma área será vocacionada para o ensino da estatística e a outra terá como objectivo o apoio estatístico a projectos. O sistema permitirá ainda recolher e tratar toda a informação gerada de modo a ser feita uma avaliação do funcionamento do próprio sistema para que possam ser implementadas medidas correctivas no seu funcionamento.

Área de Ensino de Estatística

Esta área terá como objectivo a transmissão de conhecimentos, a auto-aprendizagem e a aplicação dos conhecimentos adquiridos, bem como a definição de algumas fontes de referência no âmbito da estatística. Esta área poderá revelar interesse não só para os alunos mas também para docentes e investigadores de outras áreas que pretendam adquirir ou consolidar os seus conhecimentos estatísticos.

Relativamente à transmissão de conhecimentos, serão disponibilizados conteúdos abrangendo os mais diversos assuntos de interesse nesta área. Existirá um tópico de perguntas mais frequentemente colocadas (FAQ). Caso não encontre nessa área a resposta à sua questão, o utilizador pode submeter a sua pergunta à equipa de consultores, que lhe enviará a resposta por correio electrónico, e caso considere a pergunta de interesse geral, esta poderá ser adicionada ao conjunto de FAQs existente. O utilizador terá ao seu dispor um conjunto de tutoriais que poderá percorrer de acordo com os seus interesses, como por exemplo: “Formulação de hipóteses”, “Processo de amostragem”, “Análise de dados”. Visando treinar a aplicação dos conhecimentos adquiridos, disponibilizaremos estudos de caso, formularemos problemas, exercícios e exercícios resolvidos, permitindo assim efectuar uma auto-avaliação dos conceitos assimilados.

Um motor de pesquisa interno permitirá aceder a uma base de dados de referências externas e a diversas fontes de informação. Complementada pela possibilidade de consulta aos projectos realizados nos anos anteriores, permitirá, por um lado, alargar os conhecimentos na área da estatística e, por outro lado, aprofundar conceitos que o utilizador considere mais relevantes.

Área de Consultoria Estatística a Projectos

Esta área terá como objectivo proporcionar um ambiente de trabalho colaborativo para prestar consultoria e apoiar os projectos desenvolvidos pelos estudantes, docentes e futuramente outras entidades externas à escola.

O processo de consultoria será composto por três fases: a fase de submissão, a fase de desenvolvimento e a fase de conclusão. Na figura 1, apresentamos o fluxograma dos passos a dar para a submissão de um projecto ao GACE: o candidato fornecerá os dados de identificação necessários para que possa ser feita uma apreciação, tais como o nome, ano, curso, disciplina, o título do projecto, a calendarização e uma cópia do anteprojecto.

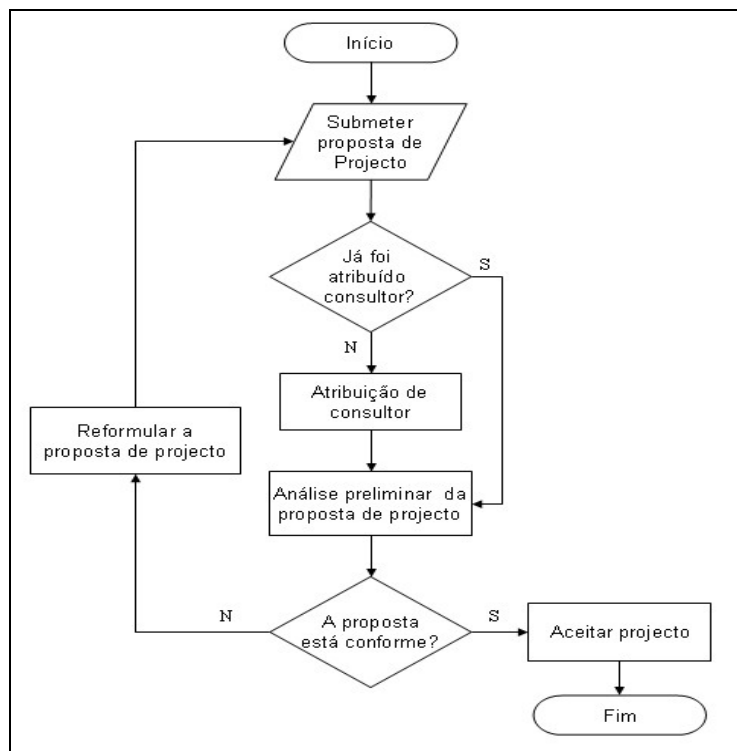


Figura 3. Submissão de um projecto ao GACE.

Torna-se importante que no primeiro contacto com o GACE o estudante/investigador explique brevemente:

- O tópico que vai investigar;
- Motivação para a escolha do tema;
- Como pretende levar a cabo a investigação.

Na fase de desenvolvimento do processo de consultoria pretendemos dar prioridade à utilização do ambiente *web* sobre o encontro presencial entre o consultor e o aluno, eliminando limitações geográficas e diminuindo o tempo de espera entre uma solicitação, ou colocação de um problema, e a consulta ou solução. Na figura 2 expomos o modo de marcação da entrevista entre o estudante e o consultor. A sessão poderá decorrer em ambiente *web* ou, em caso de necessidade, assumir a forma presencial.

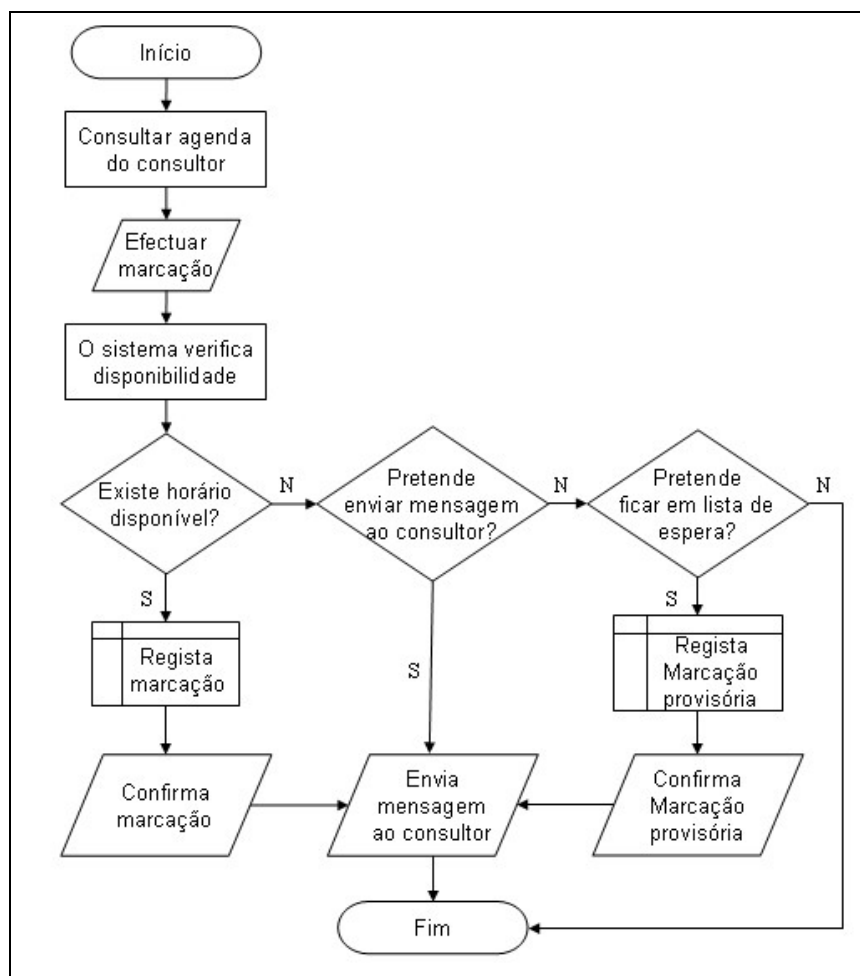


Figura 4. Marcação de entrevista com o consultor estatístico do projecto.

O estudante, mediante o acesso à agenda do consultor, pode verificar a sua disponibilidade e efectuar a marcação para uma reunião presencial ou não. O sistema, por sua vez, verificará automaticamente a disponibilidade do consultor confirmando a marcação efectuada ou colocando a solicitação em lista de espera.

Quando o aluno coloca ao consultor um determinado problema, este será analisado por ambos, assumindo o consultor o papel de *tradutor e comunicador*, tornando-se um elemento facilitador da aprendizagem (Figura 5).

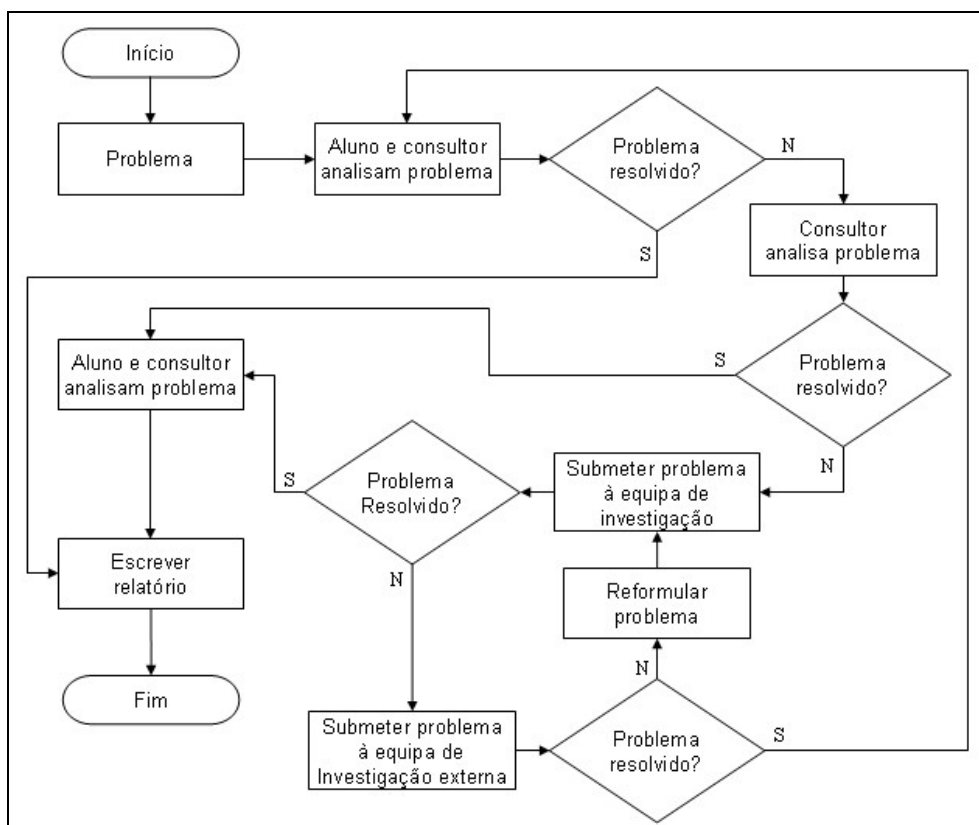


Figura 5. Análise e resolução de problemas.

A primeira tentativa será sempre a de encorajar o aluno a encontrar a solução para o seu problema. Caso isso não se verifique, o consultor tentará encontrar essa resposta para o que contará, em caso de necessidade, com o apoio da restante equipa de consultores/investigadores. Nos casos mais complexos a equipa de investigadores, através de protocolos com equipas de investigadores de outras instituições, vai tentar encontrar a solução para o problema colocado. Em casos extremos elaborará uma proposta para reformular o problema inicial.

Avaliação do Portal

Com o objectivo de podermos avaliar o funcionamento da implementação do portal, o sistema incorporará funcionalidades que lhe permitam recolher e tratar toda a informação gerada pela sua própria utilização. O tratamento e análise da informação recolhida permitirá estudar o funcionamento do sistema e, através da observação de indicadores específicos, avaliar o seu funcionamento.

A avaliação do sistema deverá ser baseada em indicadores que permitam retirar conclusões sobre o tipo de utilização a que está a ser sujeito, como por exemplo:

- Número de projectos submetidos;
- Número de projectos submetidos reformulados;
- Número de consultas presenciais e virtuais;
- Número de problemas colocados;
- Grau de complexidade dos problemas. Rácio entre o número de problemas resolvidos pelo consultor ou pelo aluno com a colaboração daquele e número total de problemas submetidos por esse aluno;
- Rácio entre o número de projectos submetidos e o número de problemas colocados.

O grupo de bioestatística e bioinformática da ESTSP pretende, deste modo, contribuir efectivamente para a melhoria dos processos de comunicação entre professores/consultores e utilizadores, incrementando uma utilização menos abusiva da estatística.

7.4. O Papel Didáctico da Consultoria Estatística

O conteúdo estatístico e a complexidade desse mesmo conteúdo na investigação têm vindo a aumentar nas últimas décadas. Um dos objectivos da aprendizagem da estatística é dotar o estudante, que se inicia na investigação científica, da capacidade de reconhecer situações em que necessita da ajuda de um estatístico profissional.

Como analisámos nas secções anteriores, existe, no entanto, uma evidência considerável de erros metodológicos nos artigos publicados que poderiam ser evitados se os estudos envolvessem a contribuição de um estatístico. Torna-se assim praticamente inconcebível que um estudo, qualquer que seja a sua dimensão, seja planeado e executado sem o aconselhamento prévio de um estatístico (Altman, Goodman & Schroter, 2002).

A consultoria estatística desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da compreensão da estatística. Como Barnett (1988, p. 303) afirma: *“resolver problemas estatísticos, comunicar as respostas aos não estatísticos, produz novos métodos relevantes e ensina os outros a fazer. A consultoria é um estímulo para a investigação estatística e uma base para ensinar estatística”*.

Jolliffe (2001) defende que, para haver consultoria, o investigador tem que comunicar o problema ao estatístico, incluindo ideias-chave da área da investigação. Em conjunto têm que fazer suposições necessárias para a análise estatística e o estatístico pode ajudar o investigador a clarificar determinadas questões. Por outro lado, o estatístico deverá comunicar ao investigador as técnicas a usar e os resultados para que todos entendam o estudo. Uma colaboração deste tipo permite que o consultor estatístico desenvolva técnicas e competências de consultoria para aplicar em diferentes tipos de problemas. Os consultores estatísticos têm a oportunidade de ensinar os seus clientes com os seus próprios dados e exemplos constituindo, assim, as competências ao nível da consultoria uma importante peça na preparação de estatísticos, tal como afirmam Godino, Batanero e Jaimez (2000).

Jersky (2002) relata a sua experiência na prestação de consultoria estatística. Ao prestar esse serviço os estudantes desenvolvem o raciocínio estatístico uma vez que prestam ajuda no planeamento das experiências e na recolha, análise e interpretação dos dados. Além disso, os estudantes podem aplicar os seus conhecimentos e constatar que a estatística é uma ferramenta útil na investigação, apercebendo-se da sua aplicabilidade em diversas áreas. Quando um aluno realiza um projecto também se apercebe da aplicabilidade da estatística na sua área e desenvolve o raciocínio estatístico.

Também Mji e Glencross (2002) escrevem sobre a experiência de consultoria estatística na universidade de Transkei, na África do Sul. Estes autores vêem na consultoria a possibilidade de melhorar a investigação em geral e o uso da estatística em particular, pois esta promove a compreensão das ideias estatísticas básicas e a aprendizagem de como usar correctamente a estatística e interpretar os resultados. É de salientar também que os investigadores são obrigados a explicar o que querem investigar e, conseqüentemente, a passar de um problema geral às perguntas concretas, aprendendo, deste modo, as noções estatísticas no contexto específico do seu problema concreto. Considerando estas vantagens, pensamos ser importante o apoio estatístico prestado pelo profissional ao aluno na realização do seu projecto.

8. Conclusão e Implicações para a Educação Estatística

A sociedade actual, baseada na tecnologia e na comunicação, obriga a uma reformulação dos conteúdos e da metodologia de ensino-aprendizagem da estatística (Batanero & Díaz, 2006) e, simultaneamente, reforça a necessidade de uma formação mais profunda, quer dos estudantes quer dos profissionais que se encontram em exercício.

Cabe à Educação Estatística proporcionar, ao estudante, o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio estatístico que é actualmente essencial ao exercício da cidadania (Pimenta, 2006). Emerge, assim, uma mudança de rumo, da transmissão mais ou menos passiva de conhecimentos para uma construção activa de uma cultura estatística (Batanero, 2001; Gal, 2002).

A tecnologia actual coloca o desafio de redesenhar o processo de ensino-aprendizagem da estatística de modo a que se atinja o objectivo de transmitir tanto o raciocínio quanto a cultura estatística. Apesar do aumento notável do uso de conceitos estatísticos em diferentes disciplinas, têm-se evidenciado que a estatística se usa incorrectamente, que não se compreendem conceitos aparentemente elementares (Batanero et al., 1994) e que a importância atribuída ao estatístico, dentro da equipa de investigação, ainda é insuficiente (Batanero, 2001).

Por outro lado, não aprendemos estatística apenas nas horas lectivas e nos centros de ensino-aprendizagem. Encontramos informação estatística não só na imprensa e nos meios de comunicação, mas também nos manuais de outras disciplinas e mesmo na própria Internet, que começa a modificar a tipologia das relações – com ou sem a participação voluntária dos professores.

Torna-se evidente que os professores/orientadores têm de aceitar a rapidez da mudança tecnológica e envolver-se nesta mudança pois só assim poderemos caminhar para a consolidação de uma verdadeira cultura estatística que funcione como um mecanismo facilitador de uma construção activa do conhecimento.

Referências Bibliográficas

- Altman, D., Goodman, S. & Schroter, S. (2002). How statistical expertise is used in medical research. *Journal of American Medical Association*, 287(21), 2817-2820.
- Anderson, C. W. & Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics*. Nova York: Wiley.
- Barnett, V. (1988). Statistical consultancy - a basis for teaching and research. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 303-307). Victoria, Canada: International Association for Statistical Education.
- Batanero, C. (2001). (Ed). *Training researchers in the use of statistics*. Granada: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Batanero, C. (2003). La educación estadística como campo de investigación y de acción práctica. *Conferência plenária no XI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*. Faro.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: Instituto de Ciencias de la Educación.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Vallecillos, A. (1992). El análisis de datos como útil y objeto de la didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, 4(1), 46-53.
- Batanero, C., Godino, J. D. , Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994), Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Batanero, C. & Pimenta, R. (2004). (Ab) usos da estatística em ciências da saúde, *Comunicação apresentada no XII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística*. Évora.
- Ben-Zvi, C. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1 e 2), 127-155.
- Chadjipadelis, T. (2001). Discussion of Training researchers in particular statistical topics. In C. Batanero (Ed), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 113-116). Granada: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Copeland-Smith, S. (2002). From online learner to online teacher. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Cidade do Cabo: International Association for Statistical Education. (CD-ROM)

- Cronjé, J. (2001). Metaphors and models in Internet-based learning. *Computers & Education*, 37(3-4), 241-256.
- Díaz, C. & Batanero, C. (2006). Methodological and Didactical Controversies around Statistical Inference. *Proceedings of 38 th Conference of the French Statistical Society*. Paris: SFDE. CDROM.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). New York: Springer.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Jaimez R. G. (2000). The statistical consultancy workshop as a pedagogical tool. In C. Batanero (2001) (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 339-353). Granada: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 153-164). Amsterdam: IOS Press.
- Jersky, B. (2002). Statistical consulting with undergraduates – a community outreach approach. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Cidade do Cabo: International Association for Statistical Education, CD-ROM.
- Jolliffe, F. (2001). *Learning from experience*. In C. Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 355-370). Granada: International Association for Statistical Education.
- Martins, J. (2001). *O trabalho com projetos de pesquisa: do ensino fundamental ao ensino médio*. Papirus Editora- São Paulo.
- Mji, A. & Glencross, M. (2002). Statistical consultancy in a South African university: using a research resource centre to empower social science researchers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Cidade do Cabo: International Association for Statistical Education, CD-ROM.
- Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. In F. Gordon & S. Gordon (Ed.), *Statistics for the Twenty First Century* (pp. 14-25). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Phillips, B. (2001). Discussion of Needs and problems in training researchers in specific areas. In C. Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 259-262). Granada: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Pimenta, R. (2006). Assessing statistical reasoning through project work. *ICOTS7 – Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahia, Brazil: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute, CD-ROM.
- Pimenta, R. & Batanero, C. (2005). Raciocínio Estatístico: Avaliação a partir de projectos em ciências da saúde. *Actas do V Congresso Ibero Americano de Educação Matemática*. Porto: Associação Ibero-Americana de Educação Matemática, CD-ROM.
- Régnier, J. C. (2002). A propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique. *Revue du Centre de Recherche en Éducation de l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne*, 22-23, 157-201.
- Scheaffer, R. L. Watkins, A. E. & Landwehr, J. M. (1998). What every high school graduate should know about statistics. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning teaching and assessment in grades K-12* (pp. 3-31). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Smith, T. M. F. (1999). Discussion of statistical thinking in empirical enquiry by C. J. Wild and M. Pfannkuch. *International Statistical Review*, 67(3), 250-251.
- Starkings, S. (1997). Assessing Student Projects. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistical education*. Amsterdam: IOS Press.
- Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 221-248.

LITERACIA ESTATÍSTICA NA ESCOLA, CIDADANIA NA VIDA

Maria Manuel da Silva Nascimento

Dept. de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CM – UTAD¹

mmsn@utad.pt

Resumo. Tal como referem Branco e Martins (2002, p. 9) em relação à literacia “o seu significado é fundamentalmente o seguinte: capacidade do indivíduo para ler, escrever e falar na sua língua materna, efectuar cálculos e resolver problemas do dia-a-dia, de forma a cumprir as tarefas que lhe são exigidas tanto no emprego como na sociedade.” Assim sendo, de modo muito geral, a literacia estatística na escola será mais um elemento promotor de uma vida de cidadania interventiva. Neste trabalho pretende-se dar a conhecer, bem como incentivar o uso de vários materiais disponibilizados para o ensino da estatística na página do International Statistical Literacy Project (ISLP). Na prática lectiva, o uso de várias das informações com que somos confrontados na corrente informação do dia-a-dia – jornais revistas, anúncios, entre outros – pode revelar-se um ponto de partida estimulante para a literacia estatística na escola.

Abstract. Branco and Martins (2002) say that “the meaning of literacy is mainly the following: the ability of a person to read and write in his/ her mother language, to do computations and solve day to day problems in order to accomplish the tasks demanded by his job and society.” Thus, it follows that statistical literacy developed during the school years will be a promoter of an active citizenship in life. In this work we intent to disclose the use of several classroom materials that may be used in school for teaching statistics. The use of day to day news in the classroom – such as those collected in papers, ads, and others – may be an effective way to promote statistical literacy in schools.

1. Introdução

Tal como referem Branco e Martins (2002, p. 9), em relação à literacia,

o seu significado é fundamentalmente o seguinte: capacidade do indivíduo para ler, escrever e falar na sua língua materna, efectuar cálculos e resolver problemas do dia-a-dia, de forma a cumprir as tarefas que lhe são exigidas tanto no emprego como na sociedade.

Na análise de Watson (2006, pp. 9-12) sobre o lugar da literacia estatística, recorda que Wallman definiu (1993)

[l]iteracia estatística como a capacidade para compreender e avaliar de forma crítica os resultados estatísticos que nos aparecem no dia a dia, em conjunto com a capacidade para considerar as contribuições que o raciocínio estatístico pode ter para as decisões tomadas nos domínios público ou privado, profissional e pessoal.

Desta forma, e de acordo com um resumo mais recente de Gal (2002, também citado por Watson, 2006, p. 10),

[o]s adultos que estatisticamente letrados terão que apresentar dois requisitos (a) a capacidade para interpretar e avaliar de forma crítica a informação estatística, os argumentos relacionados com os dados ou fenómenos aleatórios que as pessoas poderão encontrar em diferentes contextos e (b) a sua capacidade para discutir e comunicar as suas opiniões sobre essas informações estatísticas, sempre que tal for relevante.

¹ Membro do Centro de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Atendendo a esta contextualização do que, hoje em dia, devem ser cidadãos estatisticamente letrados, justifica-se referir alguns dos exemplos do dia-a-dia. Dos exemplos de Steen e colaboradores (2002, pp. 83-85) apresentam-se alguns que podem contribuir para uma cidadania mais interventiva:

Compreender que determinados acontecimentos (como a propagação do cancro) poderão dever-se exclusivamente ao acaso; Analisar dados de natureza económica e demográfica para apoiar ou refutar propostas políticas; Compreender cálculos de médias ponderadas, usadas no acesso à faculdade ou na classificação de cidades, produtos, investimentos e equipas desportivas; Identificar, em inquéritos, algumas manifestações comuns de preconceitos ou tendências, tais como a existência de vocabulário pobre, respostas fechadas (pré-fornecidas) e de questões politicamente correctas; Compreender que pequenas amostras podem traduzir correctamente a opinião pública, que erros de amostragem reduzem a sua precisão e que amostragens tendenciosas podem influenciar os resultados.

Apesar da importância desta sistematização, uma ou outra vez, já todos fomos confrontados com algum exagero publicitário, mais ou menos evidente, com algum gráfico “mais invulgar” numa revista, enfim, com vários materiais que, apesar do espanto (ou talvez mesmo por isso!) poderiam ser uma fonte de discussão, um óptimo material para motivar os nossos alunos. Batanero e Godino (2001, p. 7) escreveram: “*Se queremos que o aluno valorize o papel da probabilidade e da estatística, é importante que os exemplos e as aplicações que apresentamos na aula permitam vê-lo da forma mais ampla possível*”.

Por todos estes motivos pretende-se dar a conhecer, bem como incentivar o uso dos vários materiais disponibilizados para o ensino da estatística na página do Projecto Internacional de Literacia Estatística (ISLP²) do Instituto Internacional de Estatística (ISI³). Em particular, no que se refere aos recursos que têm vindo a ser disponibilizados para treino no âmbito da 1.^a Competição Internacional de Literacia Estatística⁴.

2. Contributo do Projecto Internacional de Literacia Estatística

Na primeira página do ISLP pode ler-se:

*O objectivo do ISLP é o de contribuir para a literacia estatística em todo o mundo, entre os adultos, as crianças e durante toda a sua vida. Para o atingir fornecemos um repositório ‘on line’ de recursos internacionais e de notícias sobre a literacia estatística no mundo.*⁵

Entre as actividades de 2008, inseriu-se a primeira fase da 1.^a Competição Internacional de Literacia Estatística que tem

*como primeiro objectivo incentivar os alunos a analisar e a interpretar dados estatisticamente, assim como ajudar na avaliação crítica da informação a que eles acedem no seu dia a dia, e que, regra geral, inclui dados e gráficos estatísticos. O segundo objectivo é o de promover a utilização dos recursos de literacia estatística que já são utilizados em alguns dos países de língua oficial portuguesa, mas que ainda não são totalmente conhecidos e/ou usados nas práticas lectivas.*⁶

² ISLP é a abreviatura para o nome inglês do Projecto: *International Statistical Literacy Project*

³ ISI é a abreviatura para o nome inglês para o Instituto: *International Statistical Institute*

⁴ International Statistical Literacy Competition of the ISLP

⁵ Retirado da página no endereço: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/home>

⁶ Retirado da página no endereço: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/competition-portuguese>

Antes de prosseguir, apenas uma piada descritiva (com base nos dados da Figura 1, da *Newsletter* do ISLP Novembro - Dezembro de 2008).

Country	Number of Students Participating	Number of Students that will compete in the national competition
Canada	9	4
Colombia	12	3
Mexico	2	2
Chile	45	5
Spain	58	8
Italy	274	42
USA	170	22
Portugal	352	29
Brazil	154	19
Finland	145	21
France	22	2
Argentina	40	10
South Africa	1587	239
TOTAL	2877	409

Figura 1 – Quadro do número dos alunos que participaram na primeira fase e que poderão participar na segunda fase da competição nacional do ISLP, retirada em 09.01.14 de <http://www.stat.ucla.edu/~jsanchez/newsletter/newsletter-v1-5-2-small.pdf>

De acordo com o texto da página dessa *Newsletter*, depois de construído o gráfico da Figura 2, nada mais simples do que concluir que 7 dos 13 países concorrentes (com 0% ou 1% ou 2% de frequência relativa), não são letrados em termos estatísticos. Já para não falarmos nos países que nem sequer concorreram. Será? Não será? Só uma literacia estatística do leitor permitirá a resposta correcta a esta questão!

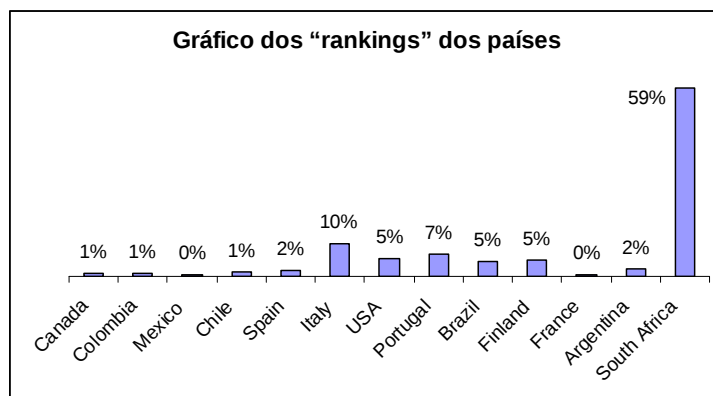


Figura 2 – Gráfico do "ranking" dos países pela percentagem de alunos que participarão na segunda fase da competição nacional do ISLP.

Para além dos objectivos da competição do ISLP, e recordando que a maior parte dos cidadão se expressa com mais facilidade na língua materna (português no nosso caso), tem que se destacar o empenho que a actual Directora do ISLP, Juana Sanchez, tem desenvolvido no sentido de procurar colaboração de colegas dos diferentes países e na edição das páginas por diferentes línguas (Figura 3).

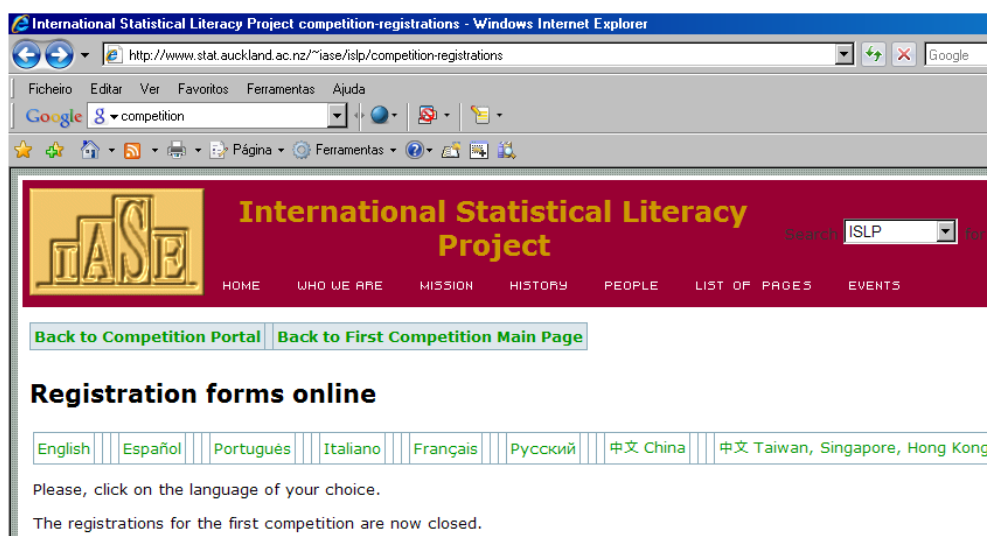


Figura 3 – Impressão parcial da página da Competição, retirado de <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/competition-first>.

3. Materiais compilados na página portuguesa da 1ª Competição.

Na página portuguesa desta 1.ª Competição Internacional de Literacia Estatística (no endereço <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/competition-portuguese>) foram sendo disponibilizados, ao longo do ano de 2008, alguns materiais para que os pudessem orientar os seus alunos no treino/prática dos conceitos que seriam objecto das questões desta primeira fase nacional da 1.ª Competição.

3.1. Perguntas de treino

Estas questões foram traduzidas de materiais compilados por Juana Sanchez. Sempre que possível, estas perguntas foram fornecidas em documentos “pdf” (“portable document format”) e em documento de texto. Assim, se os professores, os jovens ou os adultos pretenderem reutilizar estes materiais poderão fazê-lo.

3.2. Pequeno treino

Estes materiais foram compilados por Nascimento (ao longo de 2007 e de 2008).

- As contas da energia eléctrica e da água, duas tarefas adaptadas das séries didácticas propostas por Cazorla e Santana (2006).
- Questões adaptadas dos exames do primeiro ao terceiro ciclo do Ensino Básico.

3.3. Literacia Estatística nas notícias

- Materiais para treino que foram compilados por Nascimento e Martins (ao longo de 2007 e de 2008): Vir Ao Mundo num hospital'; Onde mais brilha; O comércio da poluição; Será razoável poupar assim tanto?; Cidades e Ambiente; Dê mais valor ao seu dinheiro; Inflação ou não? Essa é a questão.
- Desafios do ALEA do INE, Portugal. Os desafios do ALEA são problemas do dia-a-dia, baseados em notícias publicadas em órgão de comunicação social, e destinam-se a alunos do Ensino Básico e Secundário.

3.4. Na Internet

3.4.1. Recursos disponibilizados no portal do GAVE, Ministério da Educação, Portugal

- **Projecto 1000 Itens** no domínio temático de Estatística e Probabilidades no endereço <http://www.gave.min-edu.pt/np3/112.html>.
- **Banco de Itens**, também no domínio temático de Estatística e Probabilidades, no endereço <http://bi.gave.min-edu.pt/bi/2eb/841/>.

3.4.2. Estatística Descritiva

- No domínio temático da estatística descritiva, no endereço <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm24/index.html> encontram-se jogos, um dicionário de estatística, piadas estatísticas, além de exercícios, problemas e actividades interactivas.

3.4.3. ALEA do INE

- Este sítio foi premiado pelo ISLP em 2007 como o Melhor Projecto Cooperativo em Literacia Estatística⁷. Tal como se pode transcrever da página (no endereço <http://alea.ine.pt/html/projecto/html/projecto.html>):

O ALEA – Acção Local Estatística Aplicada – constitui-se no âmbito da Educação, da Sociedade da Informação, da Informação Estatística, da Formação para a Cidadania e da Literacia Estatística como um contributo para a elaboração e disponibilização de instrumentos de apoio ao ensino da Estatística para os alunos e professores do Ensino Básico e Secundário, tendo como principal suporte um sítio na web.

Melhorar a literacia estatística é, assim, uma condição importante para, por um lado, garantir uma melhor prestação de um serviço de utilidade pública e, por outro lado, fomentar ambientes e experiências de aprendizagem diversificados recorrendo às novas tecnologias de informação. (...)

O ALEA nasceu de um projecto conjunto da Escola Secundária Tomaz Pelayo e do Instituto Nacional de Estatística, tendo evoluído para uma realidade em que a Direcção Regional de Educação do Norte incorporou o núcleo das entidades que o dinamizam.

A supervisão científica é assegurada pela Profa. Doutora Maria Eugénia da Graça Martins, docente na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Em particular, é de destacar, os cursos de Noções de Estatística e de Noções de Probabilidades (em desenvolvimento), cujos conteúdos são da sua autoria e seguem o programa oficial de Matemática do ensino secundário.

Muitos professores, do ensino básico ao ensino superior, usam os materiais disponibilizados nesta página que vão sendo actualizados e enriquecidos ao longo do tempo. Uma vez que é impossível falar de todos os aspectos da utilização do ALEA, ficam apenas os tópicos (Figura 4) para que, um dia destes, volte ao ALEA e descubra mais qualquer coisa!

⁷ Best Cooperative Project Award in Statistical Literacy



Figura 4 – Impressão parcial da página principal do ALEA, retirado de <http://alea.ine.pt/>.

3.4.4. Página para crianças do IBGE

- Página do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Brasil, no endereço <http://www.ibge.gov.br/7a12/>, contém informações, curiosidades e jogos dirigidos para crianças dos 7 aos 12 anos.

3.4.5. Census Vivo, uma maneira diferente de ensinar estatística

- No endereço <http://www.mct.uminho.pt/censusvivo/> (Figura 4) é divulgado um Projecto Ciência Viva VI para o ensino experimental das ciências apresentado pela equipa de Bruno Sousa (Coordenador Responsável) do Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia da Universidade do Minho (UM). Tal como é apresentado numa página da UM (no endereço <http://www.cienciahoje.pt/index.php?oid=22818&op=all>):

O Census Vivo é um projecto hands-on (prático/baseado na experimentação prática) dirigido a todos os alunos do ensino pré-universitário, e está já em curso nas escolas Secundária Carlos Amarante (Braga), Secundária de Caldas das Taipas (Taipas) e nas Secundárias Francisco de Holanda e Martins Sarmento (Guimarães), num total de 9 turmas de 10º e 11º ano.

O projecto tem como tema central Como Medir o Desenvolvimento de uma Região e será composto essencialmente por quatro fases distintas: À Descoberta de Portugal; Conhecer a Comunidade em que Vivemos; O Que Fazer com os Dados; e, por último, Assumindo o Comando. Os resultados obtidos nas diversas turmas estão on-line no site do Census Vivo, www.mct.uminho.pt/censusvivo/, promovendo desta forma discussões directas entre os participantes das diversas escolas.

As actividades desenvolvidas, e a desenvolver, vão de encontro ao programa oficial de Matemática em Portugal, nomeadamente na vertente relacionada com a Estatística das disciplinas de Matemática A e B, e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, tendo

essas mesmas actividades sido planeadas de forma a serem facilmente incorporadas numa aula.

Algumas das actividades, de que são exemplo os Black Eyed Peas e a Média Valiosa, têm como principal objectivo a introdução de conceitos como População versus Amostra e Simulação da Distribuição de Amostragem da Média Amostral. Outras actividades são concebidas a partir de dados reais retirados do INE (Instituto Nacional de Estatística) sobre as regiões onde estes alunos vivem e, por isso, sobre questões familiares aos alunos.

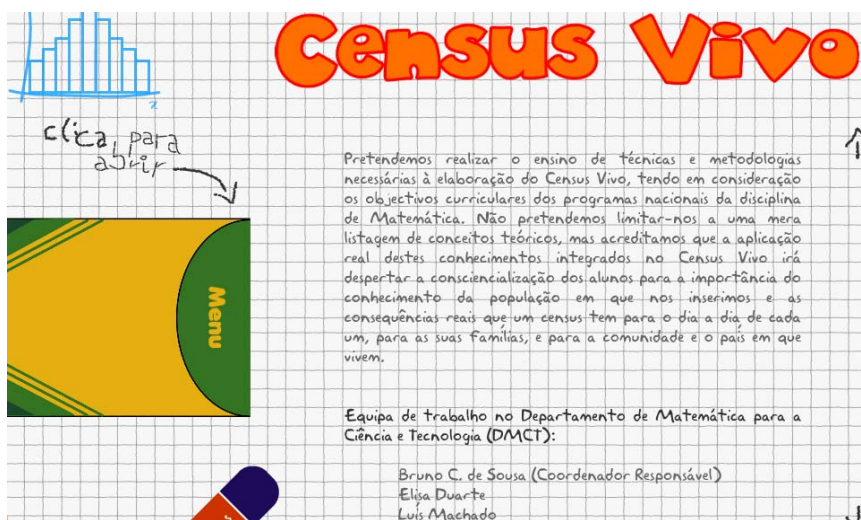


Figura 4 – Impressão parcial da página inicial do Censur Vivo, retirado de

<http://www.mct.uminho.pt/censurvivo/>

Nesta página do Censur Vivo estão disponíveis actividades, materiais, resultados, curiosidades e novidades. Além disso, neste endereço, entrando nas actividades e, por exemplo, nos conceitos gerais de Estatística, existem materiais de apoio ao professor, bem como os comentários adequados à implementação de cada actividade na prática lectiva (Figura 5). Para além de um conjunto de materiais já experimentados na prática lectiva, a mais-valia desta página são os materiais de apoio, quer para o professor, quer para o aluno.

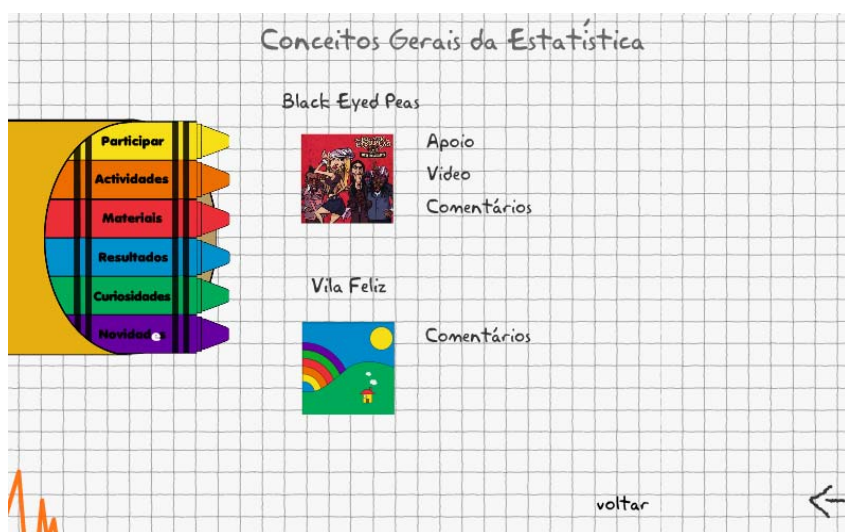


Figura 5 – Impressão parcial da página das actividades dos conceitos gerais de estatística no Censur Vivo, retirado de <http://www.mct.uminho.pt/censurvivo/>.

3.4.6. Apostilas de Lorí Viali

- No endereço <http://www.pucrs.br/famat/viali/>, localizado no Brasil, o autor apresenta “Um local de apoio ao ensino de Estatística e de Probabilidade”. As apostilas (textos de apoio) encontram-se procurando o material de apoio, depois de seleccionada uma disciplina ou, directamente, no endereço <http://www.pucrs.br/famat/viali/publicacoes/didaticas/apostilas.htm>.

3.4.7. Visitas às páginas do ISLP de Portugal

- No endereço <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/portugal>, relativo a Portugal, e no endereço <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/brasil>, relativo ao Brasil, são compilados mais recursos para os professores, jovens e adultos os alunos.

3.5. Revista Educação e Matemática

- Na revista da APM⁸, encontram-se artigos em português sobre materiais e práticas lectivas dos diferentes níveis de ensino, para além de artigos sobre a literacia estatística, além de diversos materiais na secção “Materiais para a aula de matemática”.

3.6. Livros

- “Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio”, da autoria de Cazorla e Santana (2006). Neste livro apresentam-se quatro sequências didácticas que “*proporcionam ao professor exemplos concretos de situações problemáticas familiares e interessantes (...) nos conceitos estatísticos (...) [e, a]o mesmo tempo orientam o professor do modo como as implementar*” (no Prefácio de Batanero, 2006). Recorde-se, que as tarefas do pequeno treino são adaptadas de duas das sequências aí propostas, como já foi referido.
- “Estatística no 3.º Ciclo do Ensino Básico”, da autoria do Grupo Azarquiel (traduzido por Borralho e editado pela APM, 1993). Este livro contém uma série de tarefas que podem usadas no 3.º Ciclo do Ensino Básico.
- Em “Materiais para a Aula de Matemática” são apresentados exemplos de Estatística e Probabilidades. Este livro, organizado por Precatado e Guimarães (2001), é uma compilação de textos publicados na secção do mesmo nome da revista Educação e Matemática.
- “Matemática Divertida – Tratar dados”, da autoria de King (2007), tem como público-alvo as crianças do ensino pré-escolar e do ensino básico. Tal como é anunciado na contracapa:

*Tratar dados vai ajudar-te a agrupar, classificar, a pensar de modo lógico, a desenhar gráficos e a compreender a probabilidade. Descobre como a lógica te pode ajudar a **jogar diamantes** e como **fatias de bolo** te podem ajudar a desenhar diagramas. Utiliza a tua habilidade em classificar e agrupar para jogar **sarilhos a dobrar** e **jogar à moeda** para entenderes a probabilidade.*

3.7. Materiais de Treino para a segunda fase nacional

3.7.1. Questões da primeira fase nacional

As questões da primeira fase nacional já estão disponíveis no endereço <http://www.stat.ucla.edu/~jsanchez/ISLP-GAME-exams/Exams-Portugal-Brasil/>. Como faz todo o sentido, também elas constituirão um material disponível para o treino da segunda fase nacional da 1.^a

⁸ APM, sigla para Associação de Professores de Matemática.

Competição Internacional de Literacia Estatística. Tal como nos materiais de treino, anteriormente compilados e traduzidos, também estas questões poderão ser reutilizadas, pois além de estarem disponíveis no formato “pdf” também estão disponíveis no documento de texto.

3.7.2. Outros materiais

Estão a ser ultimados e serão, brevemente, disponibilizados na página desta Competição promovida pelo ISLP.

4. A terminar ...

O lançamento desta iniciativa pelo o ISLP, a 1.ª Competição Internacional de Literacia Estatística, foi mais um contributo para enriquecer o repositório de materiais disponíveis, manipuláveis e, quem sabe, promotores de novas produções que possam ser usadas nas práticas lectivas (ou mesmo fora delas) por todos os intervenientes – professores, jovens e adultos, em português. Tal como Cazorla e Santana (2006) declaram:

Somente quando conseguirmos que nossos alunos aprendam matemática, Estatística e Ciências teremos sido bons alfabetizadores matemáticos, estatísticos e científicos e teremos contribuído para a construção das bases de uma sociedade científica e cidadã. Neste sentido, o aluno e também o professor estão em contínuo processo de aprendizagem, de alfabetização [e, ainda, de cidadania na vida].

Referências bibliográficas

- Precatado, A. & Guimarães, H. (Orgs.) (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
- Grupo Azarquel (1993). *Estatística no 3.º Ciclo do Ensino Básico*. (Traduzido por A. Borralho). Lisboa: APM.
- Batanero, C & Godino, J. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Branco, J. & Martins, M. E. G. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, 69, 9-13.
- Cazorla, I. & Santana, E. (2006). *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Baía (Brasil): Via Litterarum Editora.
- King, A. (2007). *Tratamento de Dados. Matemática Divertida*. Lisboa: Sistema J.
- Steen, L. A. (Coord.) (2002). A problemática da literacia quantitativa. *Educação e Matemática*, 69, 79-88.
- Watson, J. (2006). *Statistical Literacy at School. Growth and Goals*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SESGOS EN PROBABILIDAD CONDICIONAL E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Carmen Díaz

Dpto. Psicología Clínica, Experimental y Social, Universidad de Huelva

carmen.diaz@dpsi.uhu.es

Resumen. En este trabajo realizamos una revisión de las principales investigaciones en Psicología y Educación sobre razonamiento y comprensión de la probabilidad condicional. También mostramos algunos resultados obtenidos en nuestro propio estudio de evaluación con estudiantes de Psicología. Finalizamos con algunas implicaciones para la enseñanza de la estadística.

1. Introducción

La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

Sin embargo, la Psicología del razonamiento, así como algunas investigaciones recientes en didáctica de la probabilidad muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto. Algunos de ellos están bastante extendidos y una enseñanza formal de la probabilidad es insuficiente para superarlos. Es necesario que el sujeto se haga consciente de estas dificultades y aprenda a afrontar los problemas condicionales con unas herramientas adecuadas.

En lo que sigue analizamos las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de las ideas de probabilidad condicional e independencia, tanto en el campo de la Psicología, como en el de la Educación. Además mostramos los resultados obtenidos en un estudio con estudiantes de Psicología, donde se aplicaron diversos ítems que evalúan la presencia de estos sesgos.

La muestra utilizada en este estudio fueron 414 estudiantes de Psicología de primer curso de las universidades de Granada (cuatro grupos de estudiantes; $n = 307$), y Murcia (dos grupos; $n = 106$). Todos los participantes cursaban Primer Curso de Psicología y eran alumnos de la Asignatura de Análisis de Datos. La mayoría de los alumnos tenían una edad de 18 o 19 años. Predominaron las mujeres, situación que es habitual en las Facultades de Psicología. Los estudiantes habían estudiado el tema durante dos semanas, aproximadamente un mes antes que se pasase el cuestionario. Se realizó la toma de datos después del examen parcial que incluía el tema, para asegurarse que los alumnos lo habían estudiado. Todos ellos colaboraron voluntariamente y con interés en la investigación.

La finalidad de este trabajo es proporcionar una clasificación de las principales dificultades con las que nos enfrentamos al razonar sobre la probabilidad condicional, mostrando ejemplos de tareas que permiten evaluarlas, así como las respuestas típicas a las mismas. Creemos que esta información es valiosa para los profesores de estadística, tanto en la planificación de la enseñanza como en la evaluación del aprendizaje.

2. Comprensión Intuitiva de la Probabilidad Condicional e Independencia

La probabilidad condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente podemos decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Desde un punto de vista más formal, se define mediante la expresión (1).

$$(1) \quad P(A/B) = P(A \cap B) / P(B), \text{ siempre que } P(B) > 0.$$

Estas definiciones no siempre se comprenden. En nuestro estudio se pidió a los alumnos que dieran de una definición intuitiva de probabilidad simple y de probabilidad condicional, aportando un ejemplo de cada una. Los resultados (Tabla 1) sugieren que, aunque una parte importante de los alumnos define correctamente las probabilidades, la tercera parte no da respuesta o tiene imprecisiones en la definición.

Algunos alumnos utilizan expresiones imprecisas para definir algunas de las probabilidades, como por ejemplo: *“En la probabilidad condicional, para que se dé un suceso, se tiene que dar otro”*. Este alumno indica correctamente que en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos, pero la respuesta es imprecisa porque matemáticamente podemos definir la probabilidad condicional, independientemente de que el suceso ocurra o no. Otro ejemplo de definición imprecisa sería: *“Probabilidad simple: aquella en la que hay un sólo elemento y en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos”*. La respuesta es imprecisa, porque en la probabilidad conjunta también intervienen dos sucesos. La respuesta: *“La probabilidad simple es la probabilidad de que ocurra una variable y la condicional que ocurra sabiendo que ha ocurrido otra que la condiciona”* es imprecisa porque el alumno se refiere a variables y no a sucesos.

Tabla 1 – Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al ítem 1

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Define incorrectamente ambas probabilidades	119	28,7	28,7
Define imprecisamente una probabilidad	28	6,8	35,5
Define correctamente una probabilidad	90	21,7	57,2
Define imprecisamente ambas probabilidades	50	12,1	69,3
Define correctamente ambas probabilidades	127	30,7	100,0

Un concepto relacionado con la probabilidad condicional es el de independencia. Matemáticamente puede deducirse de la regla del producto de probabilidades, mediante la definición (2).

$$(2) \quad A \text{ y } B \text{ son independientes si y sólo si } P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Intuitivamente este concepto se relaciona con el de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro (Maury, 1986). Estas dos definiciones no tienen dificultad de comprensión, desde el punto de vista matemático, ya que no requieren cálculos complejos. Pero, desde un punto de vista psicológico y didáctico es difícil, en muchos casos, saber si dos sucesos son o no independientes, al resolver un problema o al tomar una decisión. Por ejemplo, demostrar la relación entre fumar y desarrollar un cáncer ha supuesto muchos años de investigación.

Maury (1986) analizó la comprensión intuitiva de 374 estudiantes de los últimos cursos de Bachillerato, respecto a la probabilidad condicional usando cuatro problemas en un contexto de extraer bolas de urnas; con y sin reemplazamiento. También utilizó dos tipos de vocabulario (técnico y cotidiano) al plantear el problema 1.

Problema 1. Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Cuál suceso es más probable?

- Sacar dos bolas rojas.
- Sacar primero una bola roja y luego una azul.

Maury observó que sólo la cuarta parte de los alumnos daban respuestas correctas a este problema, mientras que los mismos alumnos obtuvieron un 60% de aciertos en problemas de probabilidad simple.

En la Tabla 2 presentamos los resultados del Problema 1 pasado a los estudiantes de nuestra propia investigación. En nuestra versión del problema introducimos una alternativa más que es la equiprobabilidad de los dos sucesos. La alternativa correcta fue elegida en nuestro caso por la mayoría (75,6% de los alumnos). El error más frecuente fue confundir el muestreo con y sin reposición (alternativa b).

Tabla 2 – Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 1

Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Qué suceso es más probable?		
	Frecuencia	Porcentaje
a) Sacar dos bolas rojas.	39	9,4
b) Sacar primero una bola roja y luego una azul.	56	13,5
c) Los dos sucesos son iguales de probables	313	75,6
Blanco	6	1,4

Maury supuso que la dificultad del Problema 1 no está ligada, en sí, a la noción de independencia, sino al hecho de que los dos sucesos (azul /rojo) sean no equiprobables que introduce un distractor que aumenta la dificultad de la tarea. Esta suposición se confirmó en otro experimento (Maury, 1985; 1986) en la que plantea a 290 alumnos de entre 13 y 16 años el problema 2.

Problema 2. Una persona lanza 3 veces la misma moneda, obteniendo en este orden los resultados siguientes: cara, cruz, cruz. Lanza la moneda una cuarta vez. ¿Piensas que en el cuarto resultado es más probable la cara o la cruz?

Los resultados mejoran en este caso hasta el 70 % de éxitos, lo que para Maury indica el reconocimiento intuitivo de la independencia por parte de los alumnos. El problema es planteado en cuatro variantes, cambiando la forma de la pregunta final y la autora observa un éxito mayor cuando en la pregunta se listan todos los sucesos posibles del espacio muestral, que cuando no se listan. Nuestra versión del mismo ítem se enunció en un contexto de dados y con un número mayor de tiradas, quedando de la siguiente manera:

Problema 3. Una persona lanza un dado y anota si saca un número par o impar. Se trata de un dado no sesgado (es decir todos los números tienen la misma probabilidad). Estos son los resultados al lanzarlo 15 veces: par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par, par. Lanza el dado de nuevo ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par en esta nueva tirada?

En la Tabla 3 presentamos los resultados del problema 3, donde la mayoría de los alumnos da una respuesta correcta. Un 11,8% obtiene una estimación frecuencial de la probabilidad, es decir, calculan la probabilidad a partir de la frecuencia relativa obtenida en los ensayos que se describen en el ítem, dando como valor de la probabilidad el valor 10/15 (hay un total de 10 pares en los quince lanzamientos).

Tabla 3 – Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 3

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
No responde o asume dependencia	78	18,8	18,8
Estimación frecuencial de la probabilidad	49	11,8	30,7
Respuesta correcta	287	69,3	100,0

La dificultad del concepto de independencia no es exclusiva de estos alumnos. Por ejemplo, Sánchez (1996) pasa un cuestionario de probabilidad a 88 profesores de Matemáticas que participaban en México en un programa de actualización, proponiéndoles el problema 4.

Problema 4. Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A el evento "se extrae un trébol" y B el evento "se extrae una reina" ¿Los eventos A y B son independientes?

Sólo 44 de los profesores hicieron intentos sistemáticos por resolver el problema. De éstos, 39 llegaron a una respuesta, pero sólo 4 lo hicieron correctamente, utilizando la regla del producto. En las respuestas incorrectas encuentra dos tipos de razonamiento:

- 1. Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes: "*No son independientes porque tenemos la reina de tréboles*". Este es un error muy extendido, y ha sido descrito, entre otros autores, por Kelly y Zwiers (1986). Los autores sugieren que el error puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que "independiente" puede significar, a veces, separado. Por otro lado, tanto en la definición formal de independencia como en la de sucesos excluyentes interviene la operación de intersección. Usualmente decimos que dos sucesos son independientes cuando la aparición /no-aparición de uno de ellos no proporciona información sobre la ocurrencia del otro. En el caso de sucesos excluyentes la aparición de uno implica la no-aparición del otro, por tanto dos sucesos excluyentes son siempre dependientes.
- 2. Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias: "*Si extraemos una carta para verificar el evento A y se vuelve a colocar en la baraja para verificar el evento B entonces A y B son independientes. Si se extrae la carta para verificar A y no se regresa, entonces A y B no son independientes*".

En nuestra investigación propusimos este mismo problema, pero se incluyeron en las respuestas alternativas los errores descritos por Sánchez (1996), quedando de la siguiente forma:

Problema 5. Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con cuatro palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oros" y B el suceso "se extrae un rey". ¿Los sucesos A y B son independientes?

- a) No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.
- b) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda para ver si es oros.
- c) Si, porque $P(\text{rey de oros}) = P(\text{rey}) \times P(\text{oros})$.
- d) No, porque $P(\text{rey} / \text{oros}) \neq P(\text{rey})$.

En la Tabla 4 mostramos las respuestas de nuestros estudiantes a este problema, donde vemos que un 29% de alumnos responden correctamente. El error más frecuente entre nuestros alumnos fue confundir independencia con mutua exclusividad, algo que coincide con los resultados de Sánchez (1996).

Tabla 4 – Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 5

	Frecuencia	Porcentaje
a)	118	28,5
b)	61	14,7
c)	120	29,0
d)	82	19,8
Blanco	33	8,0

El distractor b) evalúa el error de suponer que el concepto de independencia sólo se puede aplicar a experimentos que se suceden en el tiempo, fue cometido por un 14,7% de los estudiantes.

3. Condicionamiento, Causación y Temporalidad

La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo. Por otro lado es también un concepto intuitivamente comprendido y aceptado por las personas ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos.

Desde el punto de vista probabilístico, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B , siempre que suceda A , sucederá B , por lo que $P(B/A) = 1$. La relación causal estricta es difícil de hallar en el mundo real y hablamos de relación de *causa débil* cuando al suceder A cambia la probabilidad de que ocurra B . Es decir, cuando $P(B/A)$ es diferente de $P(B)$, por lo cual una relación de causalidad implica una dependencia de tipo estadístico entre los sucesos implicados.

Sin embargo lo contrario no es cierto, ya que dos sucesos pueden ser estadísticamente dependientes, sin que uno de ellos sea causa del otro. Por ejemplo, es sabido que los países con mayor esperanza de vida tienen una menor tasa de natalidad, pero esto no implica que la tasa de natalidad sea causa de la esperanza de vida o al contrario, ya que si conseguimos aumentar la natalidad de un país esto no incide automáticamente en la esperanza de vida de sus habitantes. La existencia de una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser espúrea y no implica relación causal.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional $P(A/B)$ va a percibir dos relaciones muy diferentes entre A (suceso condicionado) y B (suceso condicionante) dependiendo del contexto. Si dentro del contexto se percibe que B es una causa de A , la persona establecerá entre A y B una *relación causal*. Si dentro del contexto se percibe A como una causa de B , la persona establecerá entre A y B una *relación diagnóstica*. Veamos el problema 6 (Pollatsek y cols., 1987).

Problema 6. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable? a) Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules. b) Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules. c) Los dos sucesos son igual de probables"

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico no son percibidos como idénticos por las personas. En la primera opción, A sería que la niña tenga los ojos azules (efecto), B que la madre tenga los ojos azules (causa). En este caso al calcular $P(A/B)$ el estudiante tendrá que realizar un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas. Por el contrario, en la segunda opción, A sería que la madre tenga los ojos azules (causa) y B que la niña tenga los ojos azules, por tanto $P(A/B)$, es una relación diagnóstica.

Numerosos estudios indican que la creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas. Por ejemplo, Tversky y Kahneman (1982a) encontraron que las personas encontraban más probable que “una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules” (relación causal) que “una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules” (relación diagnóstica). Tversky y Kahneman explican este hallazgo con la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal. El problema 7 (Falk, 1986) ilustra como algunos estudiantes tienen problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural.

Problema 7. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento.

1. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N_2 / N_1)$

2. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N_1 / N_2)$

Mientras los alumnos de Falk no tenían dificultad para resolver la primera parte del problema 7, muchos eran incapaces de dar una solución a la segunda, a la que responden que el resultado en la segunda extracción no afecta a la primera. Otros estudiantes dan como respuesta $1/2$, teniendo en cuenta sólo la composición de la urna y sin utilizar el dato del resultado posterior.

Estos resultados indican un mecanismo implícito que supone la confusión entre condicionamiento y causación. En la primera parte del problema 7, la inferencia causal es una situación natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda parte pide hacer una inferencia inversa, que requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo que puede crear dificultades psicológicas.

El resultado en la segunda extracción depende causalmente del resultado en la primera extracción. El resultado del primer experimento no depende causalmente del segundo, pero el resultado en cualquiera de las dos extracciones modifica la estimación de probabilidades del resultado en la otra. Si, por ejemplo, en la segunda extracción ha salido una bola negra, sabemos que esta bola ya no puede ser uno de los posibles resultados en la primera extracción, por tanto ha habido una reducción del espacio muestral y $P(N_1 / N_2)$ sería un tercio, igual que la $P(N_2 / N_1)$.

La creencia de que un suceso que ocurre después del que juzgamos no puede afectar a la probabilidad del primero se conoce como *falacia del eje temporal*. Es importante erradicar esta creencia, pues la probabilidad de un suceso debe ser revisada a la luz de resultados posteriores en algunas situaciones, sobre todo dentro del marco de la inferencia bayesiana, donde la actualización de las probabilidades a la luz de los resultados juega un papel tan importante.

En relación a la secuencia temporal de los sucesos que intervienen en una probabilidad condicional, Gras y Totosasina (1995) identifican tres tipos de concepciones erróneas:

- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación temporal, donde el evento condicionante B siempre precede al suceso A .

- En la *concepción causal*, los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.
- En la *concepción cardinal* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$, que es correcta en el caso de un espacio muestral finito equiprobable. Aún así, cuando se maneja un espacio muestral continuo o las probabilidades de los diferentes sucesos no son iguales, esta concepción lleva a un error. Otros estudiantes interpretan $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card(A)}{Card(B)}$, que es siempre falso.

En las tablas 5 y 6 presentamos los resultados de la aplicación del problema 7 a nuestros alumnos. La mayoría de los alumnos (68,8%) han respondido correctamente a la primera parte del problema. El error más frecuente en esta parte fue confundir la probabilidad condicional y conjunta aplicando la regla del producto $(1/2) \times (1/3) = 1/6$.

Tabla 5 — Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 7 (parte 1)

¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N_2 / N_1)$		
	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/ 2	23	5,6
b) 1/ 6	70	16,9
c) 1/ 3	285	68,8
d) 1/ 4	30	7,2
Blanco	6	1,4

En la segunda parte del problema, aproximadamente la cuarta parte da la respuesta correcta, mientras otra cuarta parte presentan la falacia del eje temporal o concepción cronologista de la probabilidad condicional, según Gras y Totohasina (1992). El sesgo de equiprobabilidad lo presenta un 36,5%. Nuestros resultados reproducen los obtenidos por Falk (1986).

Tabla 6 — Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 7 (parte 2)

¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N_1 / N_2)$		
	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/ 3	99	23,9
b) No se puede calcular	103	24,9
c) 1/ 6	38	9,2
d) 1/ 2	151	36,5
Blanco	23	5,6

Gras y Totohasina (1995) quisieron estimar la proporción de estudiantes que presentan las diferentes concepciones citadas anteriormente. Para ello hicieron las siguientes preguntas a una muestra

de 75 estudiantes de secundaria (17-18 años), después de haber recibido una enseñanza experimental sobre probabilidad condicional:

Pregunta A. Para calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$, ¿Debe ocurrir el suceso B cronológicamente antes que el suceso A ? Si__ No__ No sé__

Pregunta B. Para calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$, ¿Debemos asumir que el suceso B es la causa y el suceso A el efecto o la consecuencia de B ? Si__ No__ No sé__

El 63 % de los estudiantes dio una respuesta afirmativa a la primera pregunta y un 28 % respondió afirmativamente a la segunda. Los autores sugieren que el origen de las dos primeras concepciones erróneas es cognitivo, mientras que la concepción cardinal es inducida por la enseñanza.

4. Intercambio de Sucesos en la Probabilidad Condicional

Falk (1986) sugirió que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional $P(A/B)$ y $P(B/A)$ y denominó a este error *falacia de la condicional transpuesta*. Este error se ha observado en problemas de contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad (Eddy, 1982). La prevalencia de este error puede tener consecuencias importantes; por ejemplo la confusión entre la probabilidad de que un niño afectado con síndrome de Down dé una amniocentesis prenatal positiva, que es alta y el hecho de que, siendo la prueba positiva el niño realmente tenga síndrome de Down, que es mucho menor.

En otro contexto, Pollatsek y cols (1987) encontraron que el 69% de los sujetos de su estudio consideran correcta la opción c) en el problema 8, lo que implica que igualan una probabilidad condicional y su transpuesta.

Problema 8. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

- a) Que un taxi azul sea correctamente identificado por la noche como un taxi azul.
- b) Que un taxi identificado por la noche como azul sea realmente un taxi azul.
- c) Los dos sucesos son iguales de probables.

Una problema de este tipo se presentó a nuestros estudiantes para evaluar la presencia de este sesgo presentamos (problema 9). Alrededor de un tercio del grupo que escoge la respuesta correcta (alternativa b), siendo los resultados en nuestro caso algo mejores que en el estudio de Pollatsek y cols (1987).

Problema 9. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

- a) Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
- b) Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.
- c) Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

Tabla 7 — Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 9

	Frecuencia	Porcentaje
a)	24	5,8
b)	133	32,1
c)	245	59,2
Blanco	12	2,9

También se ha encontrado esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia por parte de estudiantes donde, según Batanero y cols. (1996), alrededor del 20% de los estudiantes del curso preuniversitario en su trabajo confunden “porcentaje de fumadores que contraen cáncer de pulmón” con “porcentaje de personas con cáncer de pulmón que fuman”.

Esta confusión se extiende al contexto de la interpretación del nivel de significación α en los contrastes de hipótesis. El nivel de significación α se define como la probabilidad condicional de obtener un resultado R en la región de rechazo cuando la hipótesis nula H_0 es cierta, es decir $\alpha = P(R/H_0)$. Cuando un contraste de hipótesis resulta significativo (lo que quiere decir que R ha ocurrido) y alguien pregunta por la probabilidad de haber cometido un error (la probabilidad de que H_0 sea cierta) a menudo se contesta con α . En esta situación se estaría confundiendo $P(R/H_0)$ con $P(H_0/R)$.

Una posible explicación dada por Falk (1986) de la prevalencia de este error es que el lenguaje ordinario, que es el que usamos en el enunciado de los problemas de probabilidad condicional no tiene la suficiente precisión. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí. También en el caso del contraste estadístico de hipótesis la definición de α como “probabilidad de cometer error tipo I” podría contribuir a su incorrecta interpretación porque en la anterior frase sólo se hace referencia a un suceso (error tipo I) y no a una probabilidad condicional.

5. Confusión de Probabilidad Condicional y Probabilidad Conjunta

Pollatsek y cols. (1987) coinciden con Falk (1986) en que muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse a dificultades de comprensión del lenguaje de los enunciados de la probabilidad condicional y que la ejecución de tareas que implican probabilidades condicionales depende de cómo se redacten los enunciados.

Un ejemplo de esto lo encontraron Einhorn y Hogarth (1986) con los enunciados que usan la conjunción “y”. Para estos autores estos enunciados pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Los autores plantearon a 24 estudiantes la pregunta: “¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?”. Esta pregunta se refiere a la probabilidad conjunta, pero 9 de los 24 estudiantes la interpretaron en forma condicional como $P(\text{comprar café} / \text{ir al supermercado})$. También en la investigación de Ojeda (1995) la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento.

Un error relacionado es la *falacia de la conjunción* (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Estos autores plantearon a estudiantes sin formación estadística el problema 10, a partir de los resultados de una encuesta de salud realizada en una muestra de hombres adultos de todas las edades y ocupaciones.

Problema 10. ¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados tienen más de 55 años y además han tenido uno o más ataques al corazón? ¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados ha tenido uno o más ataques al corazón? De los hombres entrevistados con más de 55 años, ¿qué porcentaje ha tenido uno o más ataques al corazón?

Muchos alumnos dan un mayor porcentaje a la primera pregunta que a las otras dos. Según Tversky y Kahneman el error es resultado de considerar la conjunción como más representativa de la población generadora que cada evento separado o bien del hecho que la conjunción hace que los sujetos recuerden o imaginen más ejemplos de una categoría o modelo más restringido.

Para valorar la confusión entre probabilidad condicional y conjunta, se presentó a los alumnos de nuestro estudio el problema 11. Los resultados obtenidos (Tabla 8) son bastante similares a los obtenidos en nuestros estudios previos con versiones piloto del cuestionario (Díaz y de la Fuente, 2005), así como con otras muestras de futuros profesores de educación primaria y secundaria (Estrada y Díaz, 2006).

Problema 11. En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres, obteniendo los siguientes resultados:

	menos de 55 años	más de 55 años	Total
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?
- Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
- Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

Tanto el cálculo de una probabilidad simple y conjunta resulta bastante sencillo para estos alumnos. Mayor dificultad aparece en el cálculo de probabilidades condicionales y distinción entre una probabilidad condicional y su inversa donde el porcentaje de fallos se acerca al 40%.

Tabla 8 — Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 11

	a. $P(A)$	b. $P(A \cap B)$	c. $P(A/B)$	d. $P(B/A)$
Incorrecto	23 (5,5)	138(33,3)	132 (31,3)	133 (32,1)
Correcto	378 (91,3)	261(66,0)	259 (62,6)	241 (58,2)
Blanco	13 (3,2)	15(3,7)	23 (5,5)	40 (9,5)

Los principales errores fueron la confusión de probabilidades condicionales y conjuntas, errores ya destacados por Einhorn y Hogarth (1986), Totohasina (1992) y Ojeda (1995), que se producen en un 27,1% de los estudiantes. Esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia aparece en el 20% de los estudiantes del curso preuniversitario en la investigación de Batanero y cols. (1996). También aparecen en casos aislados los siguientes errores no descritos en la literatura:

- Confusión de un suceso y su complementario, respondiendo $P(A/\text{no } B)$, cuando se pregunta $P(A/B)$.
- Confusión de probabilidades con casos posibles (frecuencias absolutas).
- Obtención de probabilidades mayores que la unidad; como responder $P(A \cap B) = 780/75$, invirtiendo en este caso la fórmula de Laplace.
- Confusión de la unión y la intersección, dando la solución $P(A \cap B) = \frac{104}{780} + \frac{350}{780} - \frac{75}{780}$.
Hacemos notar que estos alumnos (tres casos) han notado que los sucesos A y B no son mutuamente excluyentes y han aplicado la fórmula correcta de la unión de sucesos para estos casos, pero han dado a la palabra “y” del enunciado un significado de unión, que es frecuente en el lenguaje cotidiano, pero no coincide en este caso con el significado matemático.
- Suponer independencia en los datos, aunque la dependencia es patente en la tabla. Estos alumnos calculan la probabilidad de la intersección, como producto de las dos probabilidades $P(A)$ y $P(B)$, calculadas estas correctamente, dando la solución $P(A \cap B) = \frac{104}{780} \times \frac{350}{780}$.
- Dar el cociente $P(A/B)$ cuando se pide la probabilidad condicional.

Estos resultados, que amplían los encontrados en la literatura previa, sugieren la necesidad de atender a la capacidad de lectura de datos en tablas dobles.

6. Situaciones Sincrónicas y Diacrónicas

Otra variable influyente en la dificultad de las tareas de probabilidad condicional es si se percibe o no el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos. A este respecto se pueden distinguir dos tipos de situaciones relacionadas con la probabilidad condicional:

- *Situaciones sincrónicas*: son situaciones estáticas, en las que no subyace una secuencia de experimentos, sino que los experimentos aleatorios se realizan simultáneamente. Un ejemplo lo encontramos en el problema 12, descrito en Falk (1986). La mayor parte de los estudiantes dan como respuesta 1/2 porque sólo perciben un experimento y suponen que la tarjeta con las dos caras rojas no es relevante para calcular la probabilidad condicional.

Problema 12. En una urna hay tres tarjetas: una es azul por ambos lados, otra es roja por ambos lados y la última es por un lado azul y por otro roja. Seleccionamos una tarjeta al azar y la ponemos sobre la mesa tal y como la sacamos de la urna. La cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja también?

- *Situaciones diacrónicas*: son situaciones en las que hay una clara secuencia temporal, donde se realizan un experimento detrás de otro. Un ejemplo se muestra en el problema 13.

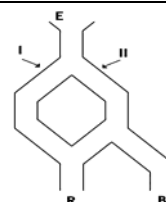
Problema 13. En una urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. Tomamos una bola blanca de la urna y sin reemplazarla tomamos una segunda bola al azar de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca?

Cuando calculamos una probabilidad condicional, es clave que cambiemos el espacio muestral al suceso condicionante. Para los estudiantes resulta difícil identificar el espacio muestral y el suceso condicionante. Las situaciones sincrónicas dificultan especialmente el cambio de espacio muestral, como

comprueba Ojeda (1995) al plantear el problema 12 a 26 alumnos de entre 14 y 16 años, el 60% de los cuáles ignoraron la información dada por la cara mostrada al resolver el problema.

La autora propone también los problemas 13 y 14 a 255 alumnos de Bachillerato, después de estudiar probabilidad condicional. Estos dos problemas tienen la misma estructura matemática, pero el problema 13 se percibe más fácilmente como una secuencia de experimentos. La proporción de respuestas correctas subió del 25% (problema 14) al 40% (problema 13), aunque los alumnos todavía siguen con dificultades y no reducen convenientemente el espacio muestral al resolver el problema.

Problema 14. Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿qué es más probable, que haya seguido el canal I, o que se haya ido por el canal II?



En la tabla 9 presentamos los resultados de una versión modificada del ítem 14 en nuestros alumnos, en donde se les pregunta por la probabilidad de que la bola, habiendo caído en R haya pasado primero por el canal I. Tan sólo un 9% de estos alumnos lo han resuelto correctamente. La mayoría han escogido la alternativa a) que indica que no tienen en cuenta todos los sucesos del espacio muestral. Han sido pocos los alumnos que han escogido la alternativa d).

Tabla 9 — Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 14

	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/2	318	76,8
b) 1/3	37	8,9
c) 2/3	41	9,9
d) No se puede calcular	7	1,7
Blanco	11	2,7

Contrastan estos resultados con lo de Ojeda (1995) quien obtiene mucho mejores resultados con este ítem que con los anteriores. La diferente forma en que se da el enunciado podría explicar la discrepancia de resultados.

7. Razonamiento Bayesiano

Otro grupo de dificultades vinculadas a la probabilidad condicional son las relacionadas con problemas bayesianos. Totohasina (1992), para indagar sobre las concepciones intuitivas sobre el razonamiento bayesiano, propone a 67 alumnos del curso preuniversitario, que habían estudiado la probabilidad, pero no la probabilidad condicional, el problema 15.

Problema 15. Una tienda almacena sus productos en cajas. Estas cajas son de dos colores: rojo (25% de las cajas) o azul (75%). Las cajas están envueltas por envoltorio de papel. Algunos de estos envoltorios tienen la marca *M* en la parte inferior. Entre los envoltorios que contienen una caja roja, el 45% tiene la marca *M*. Entre los envoltorios que contienen una caja azul, el 60% tiene la marca *M*. Tomamos una caja envuelta, si el envoltorio tiene la marca *M*, ¿cuál es la probabilidad de que la caja sea azul?

Sólo el 25% de los alumnos dieron una respuesta correcta, muchos de ellos apoyándose en representaciones usadas espontáneamente para resolver el problema, como diagrama en árbol, representación mediante tabla de doble entrada o representación rectangular. Totohasina encuentra las siguientes estrategias espontáneas entre los alumnos que llegaron a resolverlo:

- Cambio de referencial: “En el total de cajas azules o rojas $45/4 + 45 = 225/4$ tienen la marca M . En 36 cajas rojas $45/4$ llevan la marca. La probabilidad de que la caja con marca sea roja es $P(D) = (45/4)/(225/4) = 1/5$ ”.
- Cálculo de cocientes de porcentajes, lo que implica, en la práctica la fórmula de Bayes: “Porcentaje de bolas con la marca: $(45/199) \times (25/100) + (60/100) \times (75/100) = 56.25\%$. Por tanto, probabilidad de que la caja con marca sea roja é $(45/100) \times (25/100) / 56.25/100 = 20\%$ ”.

Entre las dificultades encontradas por los alumnos en la resolución del problema, describe las siguientes:

- Interpretación no probabilística del enunciado, haciendo uso sólo de las frecuencias absolutas de casos, pero no de los porcentajes.
- No restringir el espacio muestral al calcular las probabilidades, lo que implica una comprensión deficiente de la idea de condicionamiento.
- Confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional: “*tenemos un 25% de bolas rojas en el conjunto y de ellas el 45% tienen la marca M ; luego $(25/100) \times (45/100) = 11.25\%$ de las bolas rojas tienen la marca*”.

El mismo autor, después de realizar un experimento de enseñanza de la probabilidad condicional, pero en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada, propone a los alumnos el problema 16.

Problema 16. Una fábrica dispone de dos máquinas M_1 y M_2 que fabrican bolas. La máquina M_1 fabrica el 40 % de las bolas y la M_2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M_1 y el 1% de las fabricadas por M_2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar, si la bola es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M_1 ?

Totohasina argumenta que el problema 16 se aproxima más a un modelo de urnas donde se acentúa la causalidad y donde la temporalidad está ausente. El autor examina los tipos de diagramas en árbol utilizados por los alumnos. De un total de 65 alumnos, 26 construyen un árbol directo marcando el aspecto secuencial de los experimentos y 9 llegan al árbol inverso. Otros 7 alumnos usan el árbol, pero no contemplan el aspecto secuencial y no llegan a asignar correctamente las probabilidades. Sólo 9 alumnos llegan a la solución correcta de los problemas.

Este mismo ítem, pasado a nuestros alumnos sugiere una dificultad moderada de este tipo de tareas (Tabla 11). Aunque el 45% de los estudiantes resolvió correctamente el problema, un 55% llegó al menos al cálculo correcto de la probabilidad total. El porcentaje de respuestas correctas supera al obtenido por Totohasina (1992) con estudiantes del curso preuniversitario. Hay que tener en cuenta que éste autor no introdujo formalmente el teorema de Bayes en la enseñanza, y en nuestro caso sí. Esto sugiere que una instrucción específica en el tema ayuda a la mejor comprensión de estos conceptos. En nuestro caso el porcentaje de estudiantes que llegan a completar el diagrama en árbol correctamente también supera al de la investigación de Totohashina.

Tabla 10 — Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al ítem 16

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Respuesta incorrecta	57	13,8	13,8
Diagrama de árbol	50	12,1	25,8
Diagrama e identificación del problema	78	18,8	44,7
Cálculo probabilidad total	42	10,1	54,8
Respuesta correcta	187	45,2	100,0

Para tratar de explicar las dificultades de los estudiantes con estos problemas Totahasina analiza los procedimientos que los alumnos siguen para resolverlos. El autor supone que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema.

Pasar, por ejemplo, a una tabla de doble entrada, dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de algunos problemas, porque lo que queda más visible es la intersección de los dos sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. Otra dificultad es la necesidad de invertir condición y condicionado en los problemas tipo Bayes, ya que, como hemos señalado, los alumnos con frecuencia confunden el papel de estos dos sucesos en una probabilidad condicional y por tanto confunden una probabilidad condicional con su inversa. Totahasina sugiere que este obstáculo de “reversibilidad” también aparece en el aprendizaje de otras nociones matemáticas, por ejemplo al aprender el concepto de primitiva de una función, partiendo del de derivada.

Parece que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Pero puede reforzar las concepciones causalista o cronologista en los alumnos que las manifiestan.

8. Influencia de la Presentación del Problema

Pollatesk y cols. (1987) analizan los factores que pueden influir en la comprensión de los problemas de probabilidad condicional. Estos factores incluyen la forma en que están expresados los enunciados, y que el contexto esté basado o no en el conocimiento de los alumnos sobre mundo real. Estos autores en su experimento incluyeron dos tipos de problemas: problemas probabilísticos y problemas porcentuales. Encontraron que problemas en el que el factor causal se hacía presente (como los problemas sobre madre e hija), la versión porcentual es más sencilla y los alumnos dan mayor número de respuestas correctas que en la versión probabilística.

Otro estudio similar es el de Gigerenzer (1994) quien sugiere que la dificultad en la resolución de problemas referidos al teorema de Bayes desaparece cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias. Un ejemplo de tales enunciados se plantea en el problema 17.

Problema 17. Uno de cada 1000 americanos tiene una enfermedad. Una prueba ha sido diseñada para detectarla. Cada vez que la persona está enferma, el test da positivo, pero también da positivo en 50 de cada 1000 personas sanas. ¿Cuántas personas de entre aquellas a las que el test dio positivo tendrán realmente la enfermedad?

Gigerenzer sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas bayesianos cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias. Llama a este formato *frecuencias naturales* porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo un médico en su consulta). Cuando la información se ofrece en términos de frecuencia, el cálculo de la probabilidad a posteriori es más natural, porque el sujeto no tiene que aplicar toda la

complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad. En el ejemplo, la persona razona en la siguiente forma: “En 1000 americanos hay 999 sanos y uno enfermo. Al pasar el test 50 (aproximadamente) de los 999 sanos darán positivos y también el sujeto enfermo. Luego la probabilidad de que el sujeto esté enfermo si el test es positivo es $1/51$ porque solo hay un enfermo entre los 51 a los que el test dio positivo”.

Estos resultados coinciden con los de Ojeda (1995), puesto que alrededor del 45% de estudiantes de secundaria (255 alumnos en la muestra) fueron capaces de resolver el problema 18, que requiere un razonamiento bayesiano.

Problema 18. En una ciudad hay 60 hombres y 40 mujeres por cada 100 habitantes. La mitad de los hombres y una tercera parte de las mujeres fuman. Si se selecciona al azar un fumador, ¿qué es más probable, que sea hombre o mujer?

Resultados similares se han obtenido al plantear otros problemas probabilísticos en términos frecuenciales, por lo que Gigerenzer y Hoffrage, (1995) recomiendan, cuando sea posible, cambiar a frecuencias el formato de las preguntas. En el caso particular de la *falacia de la conjunción* Fiedler (1988) encontró una reducción considerable del número de respuestas incorrectas al plantear las preguntas en formato de frecuencias.

En un estudio preliminar de nuestro cuestionario (con diferentes muestras de entre 52 y 82 estudiantes) se realizaron comparaciones entre distintas versiones del mismo problema (en formato probabilístico y frecuencial) (Díaz, 2007). Las dos versiones del problema se presentan a continuación (problema 19 y 20).

Problema 19. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga una mamografía positiva es el 10.3 %. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer de 40 años se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

Problema 20. 103 de cada 1000 mujeres de 40 años tienen una mamografía positiva. 8 de cada 1000 mujeres de 40 años tienen cáncer de pecho y obtienen una mamografía positiva. En una muestra representativa de mujeres de 40 años que se realizan una mamografía y resulta positiva. ¿Cuántas de ellas esperas que realmente tengan cáncer?

Los resultados en porcentaje de respuestas correctas encontrados en cada una de las versiones se presentan en la tabla 12. En nuestro caso, no podemos decir que el formato frecuencial haya mejorado la ejecución en este problema.

Tabla 11 – Resultados de 414 alumnos de Psicología a los problemas 19 y 20

	Porcentaje (frecuencial)	Porcentaje (probabilidad)
a) 7'76% / 7'7 de cada 100	25,3	33,8
b) 8'24% / 8'24 de cada 100	36,5	37,0
c) 0'8 % / 0'8 de cada 100	38,2	29,2
Total	100,0	100,0

Mientras que en el formato probabilístico se obtuvo un 33,8% de respuestas correctas, en la versión frecuencial este porcentaje sólo llega al 25,3%. Resultados similares se obtienen con ítems que evalúan el razonamiento bayesiano. Pensamos que, una vez los estudiantes han recibido enseñanza sobre el teorema de Bayes, la proporción de soluciones correctas a problemas dados en formato probabilístico crece y no se da tanta diferencia con los éxitos en problemas dados mediante frecuencias. Por otro lado, el formato probabilístico es más sencillo de generalizar al caso de que el experimento tenga más de dos sucesos posibles o en el caso de experimentos múltiples. Por ello recomendamos que se usen diferentes formatos (frecuencias, probabilidades) en los problemas de probabilidad condicional.

9. Implicaciones para la Enseñanza de la Estadística

En los apartados anteriores hemos realizado una revisión de las investigaciones en Psicología y Educación sobre comprensión de la probabilidad condicional y razonamiento condicional, incluyendo el razonamiento sobre probabilidad conjunta, independencia y teorema de Bayes. Se han descrito diferentes errores y algunas de las razones para los mismos, así como algunas variables que facilitan la resolución de los problemas sobre estos conceptos.

Como indicamos en la introducción, la probabilidad condicional es un concepto básico en Estadística. Las distribuciones de los estadísticos en el muestreo, el nivel de significación y potencia en un contraste de hipótesis, las distribuciones marginales, las rectas de regresión, entre otros conceptos, se definen mediante una probabilidad condicional. Es, por tanto, necesario asegurarnos que el alumno adquiere un conocimiento y competencia básica en este tema, antes de avanzar en el estudio de la estadística, si no queremos que los errores y dificultades sobre la probabilidad condicional aumenten la dificultad de otros muchos temas e imposibiliten su correcta aplicación.

No obstante, la investigación revisada muestra que este no es un tema sencillo, que tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades.

Los problemas que hemos mostrado como ejemplos a lo largo del trabajo pueden usarse para diagnosticar las dificultades de los alumnos, incluso antes de la enseñanza del tema, pues el alumno puede llegar a la clase con intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad. Las soluciones erróneas pueden discutirse colectivamente y la simulación de las experiencias descritas en los problemas, con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras u ordenadores permitirá la superación gradual de estos sesgos. El uso de formato de frecuencias y de diversas representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares puede también contribuir a la mejora del aprendizaje de estos conceptos.

Referencias

- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Universidad de Granada: Tesis doctoral.
- Díaz, C., y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Einhorn, H.J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*. 99, 3-19.

- Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables. An exploratory study with future teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS 7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle linguistic factors. *Psychological Research*, 50, 123-129.
- Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.
- Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review*, 102, 684-704.
- Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics* 8, 96-100.
- Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 283-301.
- Maury, S. (1986). Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes. Tesis doctoral. Universidad de Montpellier II.
- Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*. 40, 255-269.
- Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.
- Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

PROBABILIDADES E PROBLEMAS DE CONTAGEM

Arranjos ou Combinações?

Fernando Coelho

Instituto Politécnico de Coimbra

fernando.coelho@estgoh.ipc.pt

José António Fernandes

Universidade do Minho

jfernandes@iep.uminho.pt

Resumo. O presente trabalho tem por objecto de estudo o ensino e a aprendizagem do tema *Análise Combinatória: Aplicação ao cálculo de probabilidades*, que se insere no programa da disciplina de Matemática A do 12.º ano (Ministério da Educação [ME], 2002b).

Na sua elaboração seguimos de perto os estudos de Díaz e Fuente (2004) e Estrada, Díaz e Fuente (2006). Inspirámo-nos ainda nos trabalhos de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2000), Ancker (2006) e Picado (2001).

Mais especificamente, pretende-se destacar o ensino da probabilidade condicionada através do *princípio fundamental de contagem* e da *regra multiplicativa* de probabilidades, de modo a evitar o uso excessivo de fórmulas – arranjos ou combinações –, que muitas vezes os alunos confundem (Lima et al. 2000).

Recorrendo à investigação, são descritos alguns dos principais erros e dificuldades comumente sentidas pelos estudantes no âmbito da probabilidade condicionada, designadamente: supor que o sucesso condicionante na probabilidade condicional tem de preceder temporalmente o acontecimento condicionado (Falk, 1986); crer que é mais provável a intersecção de dois acontecimentos do que a probabilidade de qualquer dos acontecimentos constituintes (Tversky & Kahneman, 1983); não discriminar adequadamente as probabilidades $P(A/B)$ e $P(B/A)$ (Falk, 1986); e ter em conta o facto de a experiência aleatória ser ou não composta por uma série de experiências sucessivas mais simples (Díaz & Fuente 2004).

Finalmente, são também analisados os programas de Matemática do ensino secundário, no que a este tema diz respeito, e é discutido um problema proposto no Exame Nacional de Matemática A, de 2005, quanto aos diferentes métodos de resolução sugeridos. Neste caso, um método mais simples, intuitivo e lógico, em que não é necessário recorrer a qualquer tipo de fórmulas, é totalmente ignorado. Este método consiste em utilizar uma das mais poderosas “regras” das probabilidades condicionadas, a regra multiplicativa, que pode ser comparada ao princípio fundamental de contagem em Combinatória.

Palavras-chave: Arranjos; Combinações; Probabilidade condicionada; Ensino e aprendizagem.

1. Introdução

Muitas vezes, o cálculo da probabilidade de um acontecimento reduz-se a um problema de contagem. Neste âmbito, a Análise Combinatória é de fundamental importância no caso em que é possível usar um *modelo equiprobabilístico* (Lima et al., 2000). Na maioria dos problemas tratados neste tema, os métodos de ensino parecem convergir para uma distinção entre dois tipos de resolução: (1) aqueles que se resolvem com combinações e (2) aqueles que se resolvem com arranjos. O aluno que chega ao ensino superior parece estar formatado para, quando confrontado novamente com este tipo de problemas, descobrir no enunciado um “botãozinho mágico” que possa accionar na sua mente a descoberta da “receita” – arranjos ou combinações – para resolver o problema, abdicando totalmente do

princípio fundamental de contagem (Lima et al., 2000), também denominado *princípio da multiplicação* (Brualdi, 2004), que diz:

Quando pretendemos realizar m escolhas múltiplas e existem p_1 possibilidades para a primeira escolha, p_2 possibilidades para a segunda escolha, etc., p_m possibilidades para a m -ésima escolha então se as escolhas forem combinadas livremente, o número total de possibilidades para o conjunto total das escolhas é $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_m$. (Picado, 2001, p. 19)

Considere-se o seguinte problema, retirado de Guimarães e Cabral (2007, p. 64):

Problema 1. Calcule a probabilidade de ganhar o primeiro prémio do totoloto com a chave $\{2, 12, 23, 32, 35, 48\}$.

Num problema tão simples parece haver apenas um método para o resolver.

Considere-se o acontecimento $A_1 \equiv$ "Ganhar o primeiro prémio"; recorrendo a um modelo equiprobabilístico, vem:

$$P(A_1) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{\#A_1}{\#\Omega} = \frac{1}{{}^{49}C_6} \quad (1.1)$$

Note-se que, neste método, o raciocínio usado para contar o número de resultados favoráveis resulta da contagem dos subconjuntos com 6 bolas que é possível formar a partir de um conjunto com 6 bolas distintas: ${}^6C_6 = 1$. O número de resultados possíveis, do espaço amostral Ω , corresponde a contar o número de subconjuntos com 6 bolas que é possível formar a partir de um conjunto com 49 bolas distintas. Esta última questão é equivalente ao seguinte:

Problema 2. De quantos modos podemos seleccionar 6 objectos em simultâneo, entre 49 objectos distintos dados?

A resposta ao Problema 2 é também evidente: ${}^{49}C_6$; e corresponde a um caso particular da definição geral de nC_k , $K \leq n$, $n, k \in \mathbb{N}_0$.

No entanto, ao resolver o Problema 1, se nos colocarmos no papel da pessoa que apostou naquela chave simples, qual das seguintes experiências aleatórias corresponde realmente àquela a que, todas as semanas, se assiste na televisão?

$E_1 \equiv$ "Extracção de 6 bolas (em simultâneo) de um conjunto com 49 bolas numeradas de 1 a 49";

$E_2 \equiv$ "Extracção sucessiva e sem reposição de 6 bolas de um conjunto com 49 bolas numeradas de 1 a 49".

Obviamente que E_2 é a experiência aleatória a que se assiste todas as semanas. Neste caso, o espaço amostral associado Ω_2 , recorrendo ao princípio fundamental de contagem, tem $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$ elementos, contra os ${}^{49}C_6$ elementos do espaço amostral Ω_1 associado a E_1 .

Então, será que a solução (1.1) apresentada para o Problema 1 está errada? Não deveríamos considerar que o número de resultados possíveis é igual a $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$? Extrair 6 bolas (em simultâneo), de um conjunto de 49, é diferente de extrair sucessivamente 6 bolas (uma de cada vez) sem reposição? Este facto altera a probabilidade determinada em (1.1)?

Considere-se agora o seguinte problema:

Problema 3. De quantos modos podemos seleccionar, sucessivamente e sem reposição, 6 objectos, entre 49 objectos distintos dados?

Neste problema terá de se ter em conta a ordem de extracção dos objectos, visto que um determinado objecto pode ser escolhido na 1.^a, 2.^a, ... ou 6.^a extracção. Neste caso, a resposta ao Problema 3 é também evidente: $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = {}^{49}A_6$; e corresponde a um caso particular da definição geral de nA_k , $k \leq n$, $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Naturalmente que a solução (1.1) apresentada para o Problema 1 está correcta pois, se nos colocarmos no papel da pessoa que apostou naquela chave simples, o valor do $\#\Omega_2$ aumenta na mesma proporção do número de casos favoráveis, que é ${}^6A_6 = 6!$. Então, pode apresentar-se como solução para o Problema 1:

$$P(A_1) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{6!}{{}^{49}A_6} \quad (1.2)$$

Como $\frac{1}{{}^{49}C_6} = \frac{6!}{{}^{49}A_6}$, o facto de se escolher as 6 bolas “sucessivamente e sem reposição” ou “em simultâneo” em nada afecta a probabilidade do acontecimento A_1 . Ou seja, para efeitos probabilísticos, as experiências E_1 e E_2 são equivalentes. No entanto há que ter em conta que, para efeitos de contagem dos elementos do espaço amostral, estamos perante duas situações distintas em que os espaços Ω_1 e Ω_2 , associados respectivamente a E_1 e E_2 , são diferentes.

Então, qual será a resposta para o seguinte problema:

Problema 4. De quantas maneiras podemos seleccionar 6 pessoas de um conjunto de 49?

A resposta “depende” para que são seleccionadas as pessoas. Se forem seleccionadas para formar um grupo de trabalho sem nenhuma hierarquia aparente, então a ordem de escolha será indiferente e a resposta é ${}^{49}C_6$; se forem seleccionadas para formar um grupo com diferenciação de cargos, então a resposta é ${}^{49}A_6$. Outra questão pertinente é como é feita a selecção: “uma a uma sem reposição” ou “seis em simultâneo”? Na Análise Combinatória, muitas vezes, é ignorado o contexto e o facto de este, por vezes, alterar completamente a solução do problema. “Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou combinações?” (Lima et al., 2000, p. 112).

No entanto, independentemente da solução do Problema 2, a probabilidade de um acontecimento não se altera quer ela seja determinada usando combinações ou arranjos. Esta típica ambiguidade da Análise Combinatória e correspondente aplicação ao cálculo de probabilidades pode ser problemática quando os alunos são confrontados com um problema estruturalmente idêntico ao Problema 1.

Outro processo para resolver o Problema 1 consiste em utilizar uma das mais poderosas “regras” das probabilidades condicionadas, a *regra multiplicativa*, que mantém uma analogia com o princípio fundamental de contagem. Pode até considerar-se que a regra multiplicativa e o princípio fundamental de contagem são equivalentes. A demonstração da regra multiplicativa pode ser vista em Ross (1998, p. 71).

Regra multiplicativa. Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ acontecimentos associados a um espaço de probabilidade tais que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$, então

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_2 \cap A_1) \dots P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \quad (1.3)$$

Recorrendo a esta regra, para resolver o Problema 1, vamos novamente colocar-nos no papel da pessoa que apostou na referida chave. Para ganhar o 1.º prémio é necessário que ocorram em simultâneo 6 acontecimentos $B_i \equiv$ “o número da i -ésima bola extraída é da chave”, para $i = 1, 2, \dots, 6$, e a probabilidade pretendida é $P\left(\bigcap_{i=1}^6 B_i\right)$. Usando um raciocínio lógico e intuitivo, facilmente chegaríamos à solução:

$$\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44},$$

sem necessidade sequer de recorrer à fórmula (1.3).

Neste contexto, com este trabalho pretende-se destacar o ensino da probabilidade condicionada através do princípio fundamental de contagem e da regra multiplicativa de probabilidades, enquanto alternativa ao uso excessivo de fórmulas – arranjos ou combinações –, que muitas vezes os alunos confundem (Lima et al. 2000).

2. Erros comuns em probabilidade condicionada

A probabilidade condicionada é fundamental nas aplicações da Estatística porque permite incorporar mudanças no nosso grau de convicção sobre sucessos aleatórios à medida que adquirimos nova informação (Díaz & Fuente, 2004). Contudo, este é um tema no qual existe uma grande e complexa inter-relação entre intuição e conhecimento formal (Estrada et al., 2006).

De acordo com Díaz e Fuente (2004), algumas investigações recentes em didáctica de Probabilidades mostram a existência de intuições incorrectas, raciocínios errados e erros de compreensão e aplicação. Segundo as autoras, algumas dessas falhas encontram-se já bastante enraizadas e um ensino formal das probabilidades é insuficiente para as superar.

Para Ancker (2006) o vocabulário estatístico especializado pode ser uma poderosa ferramenta para os especialistas. No entanto, os termos mais familiares aos alunos principiantes podem por vezes ajudá-los a entender novas ideias nas disciplinas de Estatística. Uma recomendação sugerida por esta autora consiste em os professores evitarem a frase técnica “*A dado B*”, inicialmente pouco conhecida, e, ao invés, descreverem a probabilidade condicional como “*A dentro de B*”, o que proporciona ao aluno uma interpretação no contexto da teoria dos conjuntos.

Díaz e Fuente (2004) analisam as principais investigações relacionadas com a compreensão das ideias de probabilidade condicionada e independência. Nesse estudo são identificadas e classificadas as principais dificuldades com as quais um professor se confronta no ensino deste tema, apresentando exemplos de tarefas usadas nas referidas investigações, assim como as respostas típicas dos alunos. São identificados três tipos de raciocínios errados: (1) falácia do eixo temporal; (2) falácia da condicional transposta e (3) falácia da conjunção.

A *falácia do eixo temporal* consiste em supor que o acontecimento condicionante na probabilidade condicional tem de preceder temporalmente o acontecimento condicionado. O Problema 5 (Falk, 1986) ilustra a dificuldade dos alunos quando se inverte o eixo temporal de acontecimentos que ocorrem de forma natural.

Problema 5. Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. São extraídas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da urna.

- a) Qual a probabilidade de extrair uma bola preta na segunda extracção, sabendo que foi extraída uma bola preta na primeira extracção?
- b) Qual a probabilidade de extrair uma bola preta na primeira extracção, sabendo que foi extraída uma bola preta na segunda extracção?

Os alunos de Falk não tiveram grandes dificuldades em resolver a alínea a) do Problema 5, no entanto, muitos foram incapazes de apresentar uma solução para a alínea b). Outros afirmaram que o

resultado da segunda extracção em nada afecta o resultado da primeira e deram como resposta 1/2, tendo em conta somente a composição inicial da urna e sem utilizarem a informação do resultado posterior.

A *falácia da condicional transposta* (Falk, 1986) sugere que muitos estudantes não discriminam adequadamente as probabilidades $P(A/B)$ e $P(B/A)$. Este erro observa-se frequentemente em problemas de contexto médico, onde se confunde a probabilidade de se ter uma doença quando um teste de diagnóstico deu positivo com a probabilidade de um resultado positivo no teste de diagnóstico sabendo que se tem a doença (Eddy, 1982, citado por Díaz & Fuente, 2004). Neste âmbito, Estrada et al. (2006) realizaram um estudo sobre erros de raciocínio em probabilidade condicional numa amostra de 159 alunos de Matemática, Ciências da Educação e Psicologia. Um dos erros identificados foi precisamente a falácia da condicional transposta, que ocorreu no seguinte problema:

Problema 6. Um teste de diagnóstico de cancro foi administrado a todos os residentes de uma grande cidade. Um resultado positivo no teste é indicativo de cancro e um resultado negativo é indicativo de ausência de cancro. Em qual das seguintes previsões tem mais confiança?

- a) Prever que uma pessoa tem cancro, sabendo que o resultado do teste de diagnóstico foi positivo.
- b) Prever um resultado positivo no teste de diagnóstico, sabendo que uma pessoa tem cancro.
- c) Tenho a mesma confiança em ambas as previsões.

Na Tabela 1 apresentam-se os resultados, em percentagem, obtidos por Estrada et al. (2006), onde todos os grupos apresentam um padrão similar de respostas: maior selecção da alínea c/, que corresponde à falácia da condicional transposta.

Tabela 1 – Resultados do Problema 6

	C. Educação ($n = 65$)	Matemática ($n = 37$)	Psicologia ($n = 57$)
Prever que uma pessoa tem cancro, sabendo que o resultado do teste de diagnóstico foi positivo	12,3	10,8	15,8
Prever um resultado positivo no teste de diagnóstico, sabendo que uma pessoa tem cancro	40,0	37,8	31,6
Tenho a mesma confiança em ambas as previsões.	46,2	45,9	49,1
Não respostas	1,5	5,5	3,5

A *falácia da conjunção* (Tversky & Kahneman, 1983) consiste na crença de que é mais provável a intersecção de dois acontecimentos do que a probabilidade de qualquer dos acontecimentos constituintes. Como ilustração considere-se o seguinte problema (Fernandes, 1999):

Problema 7. Qual das afirmações seguintes é mais provável?

- a) Um ser humano é de cor negra.
- b) Um ser humano é de cor negra e nasceu em África.
- c) As duas afirmações são igualmente prováveis.

Segundo Fernandes (1999),

apesar da afirmação a) ser mais provável, pois o conjunto dos seres humanos de cor negra é mais vasto do que o conjunto dos seres humanos africanos de cor negra, os sujeitos avaliaram, frequentemente, a afirmação b) como sendo mais provável (...). Para Tversky e

Kahneman (1983), uma tal violação da regra da conjunção resulta do facto de o acontecimento B ser altamente representativo do acontecimento A , isto é, o acontecimento 'ter nascido em África' é altamente representativo do acontecimento 'ser de cor negra'. (p. 87)

Outra variável importante que influencia a dificuldade das tarefas relacionadas com probabilidades condicionadas reside no facto de a experiência aleatória ser ou não composta por uma série de experiências sucessivas mais simples. A este respeito, Díaz e Fuente (2004) distinguem dois tipos de situações: sincrónicas e diacrónicas.

(1) *Situações sincrónicas* são situações estáticas nas quais não existe uma sequência de experiências, mas em que as experiências aleatórias se realizam em simultâneo. Como ilustração considere-se o seguinte problema (Falk, 1986):

Problema 8. Uma urna tem três cartões: um é azul em ambos os lados, outro é verde em ambos os lados e o terceiro é azul de um lado e verde do outro. Seleccionamos um cartão ao acaso e colocamo-lo sobre a mesa. O lado que vemos é azul. Qual a probabilidade de o outro lado ser também azul?

De acordo com o Falk, a maior parte dos estudantes deu como resposta $1/2$ porque consideraram que o cartão verde de ambos os lados estava excluído e os restantes dois seriam equiprováveis. Apesar de o cartão verde de ambos os lados estar realmente excluído, ver uma face azul é o acontecimento que deve condicionar a probabilidade do outro lado ser também azul. Ora, dois dos três resultados azul têm azul na face oculta, donde a resposta é $2/3$.

(2) *Situações diacrónicas* são situações em que há uma clara sequência temporal nas quais se realiza uma experiência seguida de outra. Como ilustração, considere-se o seguinte problema (Díaz & Fuente, 2004):

Problema 9. Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. É extraída, ao acaso, uma bola branca da urna e, sem a repor, extrai-se novamente uma segunda bola. Qual a probabilidade de que a segunda bola seja também branca?

Segundo as autoras as situações sincrónicas são particularmente difíceis na redução do espaço amostral ao acontecimento condicionante.

Gras e Totohasina (1995) identificaram, nos estudantes, três tipos de concepções erradas sobre probabilidades condicionais:

(1) A *concepção cronológica*, na qual os alunos interpretam a probabilidade condicional $P(A/B)$ como uma relação temporal, onde o acontecimento condicionante B precede sempre o acontecimento condicionado A (*falácia do eixo temporal* de Falk);

(2) A *concepção causal*, na qual os alunos interpretam a probabilidade condicional $P(A/B)$ como uma relação causal implícita, onde o acontecimento condicionante B é a causa e o acontecimento A a consequência;

(3) A *concepção cardinal*, na qual os alunos interpretam a probabilidade condicional $P(A/B)$ como a proporção $\frac{\#(A \cap B)}{\#B}$, que é correcta apenas no modelo equiprobabilístico. Outros interpretam $P(A/B)$ como a proporção $\frac{\#A}{\#B}$, o que é sempre falso.

3. Análise Combinatória e probabilidades condicionadas no 12º ano

Actualmente, em Portugal, no domínio de Probabilidades e Estatística, um aluno deve começar a desenvolver as primeiras competências no 1.º ciclo do ensino básico (ME, 2001a)¹. No entanto, apenas no 12.º ano os alunos de Matemática A têm contacto com a Análise Combinatória e sua aplicação ao

¹ O novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), homologado no dia 28 de Dezembro de 2007, ainda não entrou em vigor.

cálculo de probabilidades. O ME (2002b) propõe no subtema *Introdução ao cálculo de Probabilidades* a seguinte indicação metodológica:

É importante incentivar o estudante, sempre que possível, a resolver os problemas por vários processos, discutindo cada um deles com o professor e com os restantes colegas de modo a poder apreciar cada uma das formas de abordar o problema. O professor deve solicitar, frequentemente, que descrevam com pormenor, oralmente e por escrito, os raciocínios efectuados. (p. 2)

Contudo, nas indicações metodológicas para o subtema *Análise Combinatória* parece esquecer-se de referir o princípio fundamental de contagem (ME, 2002b), o que constitui uma omissão relevante visto que este princípio, intuitivamente acessível, fundamenta os raciocínios básicos que se fazem na resolução de problemas elementares de contagem (Picado, 2001).

Os alunos que frequentam a Matemática B, no ensino deste tema, já não abordam a *Análise Combinatória*. Para o ME (2002d) “não se justifica, nesta disciplina, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório” (p. 2). Neste caso, não é apresentada qualquer justificação para tal opção.

Já na disciplina de *Matemática Aplicada às Ciências Sociais* (MACS), o conteúdo programático sobre probabilidades difere do de Matemática A e também do de Matemática B, sendo referido o teorema da probabilidade total e a fórmula de Bayes (não contemplados em Matemática A e B) e mantém-se a não utilização de técnicas de contagem (ME, 2001b).

O facto de o ensino das probabilidades no ensino secundário envolver diferentes aspectos – de acordo com os diferentes cursos em que os alunos estão inseridos –, implica que a única forma de um professor do ensino superior programar uma unidade curricular de Probabilidades e Estatística é começar tudo de novo, devido à heterogeneidade dos conhecimentos probabilísticos dos alunos.

No âmbito da Matemática A, a resolução de problemas estruturalmente idênticos ao Problema 10², proposto pelo Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2006), parece esquecer completamente uma possível resolução muito mais intuitiva, sem recurso a qualquer fórmula de arranjos ou combinações, com base na regra multiplicativa de probabilidades, que obedece ao mesmo raciocínio lógico e intuitivo que o princípio fundamental de contagem:

Problema 10. Num saco estão três bolas pretas e nove bolas brancas, indistinguíveis ao tacto. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco. Determine:

- a) A probabilidade de as duas primeiras bolas extraídas não serem da mesma cor. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
- b) A probabilidade de as três bolas pretas serem extraídas consecutivamente (umas a seguir às outras). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Para a alínea a), o GAVE (2006, pp. 97-98) apresenta três processos de resolução:

1.º Processo:

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2$ (número de maneiras diferentes de escolher 2 bolas, de um conjunto de 12 bolas).

Número de casos favoráveis: 3×9 (número de maneiras diferentes de escolher 1 bola da cada cor).

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times 9}{{}^{12}C_2} = \frac{9}{22}$.

² Este problema fez parte do Exame Nacional de Matemática A, da 1.ª fase de 2005, e está disponível em: http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=71&fileName=pe435fase1v1_2005.pdf

2.º Processo:

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_3$ (número de maneiras diferentes de as 3 bolas pretas poderem ocupar 3 lugares, de entre os 12 possíveis; as 9 bolas brancas ocuparão, para cada uma das maneiras de colocar as pretas, os restantes lugares, de modo único).

Número de casos favoráveis: $2 \times {}^{10}C_2$.

- 2 é o número de maneiras de dispor as duas primeiras bolas: B, P ou P, B.
- ${}^{10}C_2$ é o número de maneiras diferentes de as restantes 10 bolas (2 pretas e 8 brancas) poderem ocupar os restantes 10 lugares (raciocínio idêntico ao dos casos possíveis).

Probabilidade pedida: $\frac{2 \times {}^{10}C_2}{{}^{12}C_3} = \frac{9}{22}$.

3.º Processo:

Número de casos possíveis: 12! (número de maneiras diferentes de 12 bolas distintas poderem ocupar 12 lugares).

Número de casos favoráveis: $2 \times 3 \times 9 \times 10!$

- 2 é o número de maneiras de dispor as duas primeiras bolas: B, P ou P, B.
- 3 é o número de maneiras diferentes de escolher a bola preta que vai ocupar um dos dois primeiros lugares.
- 9 é o número de maneiras diferentes de escolher a bola branca que vai ocupar um dos dois primeiros lugares.
- 10! é o número de maneiras diferentes de as restantes 10 bolas poderem ocupar os restantes 10 lugares).

Probabilidade pedida: $\frac{2 \times 3 \times 9 \times 10!}{12!} = \frac{9}{22}$.

Relativamente à alínea b), são apenas apresentados dois processos de resolução:

1.º Processo:

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_3$ (número de maneiras diferentes de as 3 bolas pretas poderem ocupar 3 lugares, de entre os 12 possíveis; as 9 bolas brancas ocuparão, para cada uma das maneiras de colocar as pretas, os restantes lugares, de modo único).

Número de casos favoráveis: 10 (número de maneiras diferentes de seleccionar as três posições consecutivas onde poderão ficar as 3 bolas pretas; para cada uma dessas, as 9 bolas brancas ocuparão os restantes lugares de modo único).

Probabilidade pedida: $\frac{10}{{}^{12}C_3} = \frac{1}{22}$.

2.º Processo:

Número de casos possíveis: 12! (número de maneiras diferentes de 12 bolas distintas poderem ocupar 12 lugares).

Número de casos favoráveis: $10 \times 3! \times 9!$

- 10 é o número de maneiras diferentes de seleccionar as três posições consecutivas onde poderão ficar as 3 bolas pretas.
- 3! é o número de maneiras diferentes de as 3 bolas pretas poderem ocupar esses 3 lugares.
- 9! é o número de maneiras diferentes de as 9 bolas brancas poderem ocupar os restantes 9 lugares.

Probabilidade pedida: $\frac{10 \times 3! \times 9!}{12!} = \frac{1}{22}$.

Em qualquer dos processos de resolução é explicitamente referido o modelo equiprobabilístico, o que pode levar um aluno principiante a desenvolver uma concepção errada de probabilidade – que esta é sempre igual à razão entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis (concepção cardinal).

Também a referência explícita ao princípio fundamental de contagem é totalmente ignorada. Na alínea *a)* são usadas combinações nos dois primeiros processos e no terceiro processo são utilizadas permutações para determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis é calculado tendo por base, de forma implícita, o princípio fundamental de contagem. O mesmo acontece nos dois processos de resolução apresentados para a alínea *b)*.

Nos processos expostos não se inclui um que permita resolver a generalidade dos problemas, usando um raciocínio lógico e indutivo. Ao invés, são apresentadas soluções elegantes nas quais é apresentado um “truque” que resolve imediatamente o problema.

Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos. (...) impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos. (Lima et al., 2000, p. 112)

Qual o professor que, ao leccionar probabilidades, nunca foi confrontado com a seguinte questão: “Professor, este problema resolve-se com arranjos ou combinações?”. Como já foi visto no capítulo introdutório deste texto, esta pergunta geralmente não tem uma resposta única. Já vimos que o Problema 1 pode ser resolvido com combinações ou com arranjos (soluções mais elegantes), mas também pode ser resolvido com recurso à regra multiplicativa (mais intuitiva e lógica).

No Problema 10, alínea *a)*, se utilizarmos uma linguagem matemática rigorosa, o que se pretende calcular é $P(A \cup B)$, onde

$$A = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{12} \text{ e } B = B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{12}, \text{ sendo:}$$

$A_1 \equiv$ “a primeira bola extraída é branca”,

$A_2 \equiv$ “a segunda bola extraída é preta” e

$A_i \equiv$ “a *i*-ésima bola extraída é branca ou preta”, para $i = 3, \dots, 12$;

$B_1 \equiv$ “a primeira bola extraída é preta”,

$B_2 \equiv$ “a segunda bola extraída é branca” e

$B_i \equiv$ “a *i*-ésima bola extraída é branca ou preta”, para $i = 3, \dots, 12$.

No entanto, o método que se pretende expor neste trabalho evita este formalismo, uma vez que ele também não é exigido pelo GAVE (2006). Pelo contrário, o método privilegia o raciocínio e a intuição, nos quais o aluno faz uso de forma implícita da regra multiplicativa (sem necessidade sequer de olhar para ela) por analogia com o princípio fundamental de contagem.

Vejamos, então, de que forma a regra multiplicativa e o uso intuitivo de probabilidades condicionadas podem dar origem a um método bastante eficaz e prático, sem recorrer a qualquer tipo de fórmulas para resolver o Problema 10.

a) O primeiro passo deste método é colocar-nos no papel da pessoa que deve fazer a acção solicitada pela experiência aleatória referida no problema. Neste caso, colocamo-nos no papel da pessoa que tem de retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco. Posteriormente, preparamo-nos para analisar as possibilidades dessa pessoa extrair as duas primeiras bolas de cores diferentes.

O segundo passo consiste em, sempre que possível, dividir o acontecimento em causa em sub-acontecimentos mais simples e incompatíveis. Neste caso, de modo a que as duas primeiras bolas extraídas sejam de cor diferente, temos duas possibilidades:

$A \equiv$ “a primeira bola extraída é branca e a segunda é preta” ou

$B \equiv$ “a primeira bola extraída é preta e a segunda é branca”.

Analisando a possibilidade de A , teria de ocorrer o seguinte:

- Sair uma bola branca na 1.^a extração: $p_1 = \frac{9}{12}$;
- Sair uma bola preta na 2.^a extração, sabendo que saiu uma branca na 1.^a: $p_2 = \frac{3}{11}$;
- Sair uma bola branca ou preta na 3.^a extração, sabendo que já foram extraídas duas bolas:
 $p_3 = \frac{10}{10}$;
- Sair uma bola branca ou preta na 4.^a extração, sabendo que já foram extraídas três bolas:
 $p_4 = \frac{9}{9}$; ...;
- Sair uma bola branca ou preta na 12.^a extração, sabendo que já foram extraídas onze bolas:
 $p_{12} = \frac{1}{1}$.

Então, pela regra multiplicativa, a probabilidade de A ocorrer é:

$$\frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} \times \dots \times \frac{1}{1}.$$

De modo análogo, a probabilidade de B ocorrer é:

$$\frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} \times \dots \times \frac{1}{1}.$$

Como A e B são incompatíveis, a probabilidade pedida é:

$$\left(\frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} \times \dots \times \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} \times \dots \times \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times 2 = \frac{9}{22}.$$

b) Neste caso, podemos supor inicialmente que as bolas pretas são retiradas nas três primeiras extrações com probabilidade igual a:

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{9} \times \dots \times \frac{1}{1}, \quad (1.4)$$

e que existem outras nove possibilidades “distintas” com probabilidade igual a (1.4). Então, a probabilidade pedida é:

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{9} \times \dots \times \frac{1}{1} \times 10 = \frac{1}{22}.$$

4. Conclusão e linhas de investigação futura

Com este trabalho não se pretende de maneira nenhuma ignorar os processos de resolução apresentados pelo GAVE (2006) (para o Problema 10). Pelo contrário, é importante que os alunos conheçam vários métodos de resolução e, em determinadas circunstâncias, saibam aplicar as fórmulas de arranjos, permutações e combinações na resolução de problemas.

Há alguns (poucos) problemas de Combinatória que, embora sejam aplicações do princípio básico, aparecem com muita frequência. Para esses problemas, vale a pena saber de cor as suas respostas. (Lima et al., 2000, p. 94)

No entanto, a questão fundamental é não esquecer que essas fórmulas resultam do princípio fundamental de contagem e que este nunca deve ser esquecido na resolução de um problema de combinatória.

Por um raciocínio análogo ao apresentado por Lima et al. (2000) – apenas para problemas de combinatória –, o método sugerido neste trabalho mostra-nos uma estratégia para calcular probabilidades

com recurso à noção intuitiva de probabilidade condicionada, que deve assentar nos seguintes pressupostos:

Postura. Devemos sempre colocar-nos no papel do indivíduo/objecto que deve fazer a acção solicitada pela experiência aleatória referida no problema. Posteriormente, analisamos as diferentes possibilidades que o indivíduo/objecto tem de realizar no acontecimento pedido;

Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir o acontecimento em causa em sub-acontecimentos mais simples e incompatíveis;

Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se um dos sub-acontecimentos for mais restrito que os demais, esse é aquele que deve ser tomado como condicionante. Na resolução do Problema 10, alínea *b)*, quando se considera, por exemplo, que as bolas pretas são retiradas na 2.^a, 3.^a e 4.^a extracções, a probabilidade calculada na primeira extracção tem já como condicionante aquele facto e a probabilidade pedida é:

$$\frac{9}{9} \times \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{8}{8} \times \dots \times \frac{1}{1}.$$

Finalmente, apresentam-se algumas recomendações sobre o ensino da Análise Combinatória e sua aplicação ao cálculo de probabilidades, também adaptados de Lima et al. (2000):

Não usar demasiadas fórmulas ou casos particulares. Quem troca o princípio básico da contagem ou a regra multiplicativa por fórmulas de arranjos, permutações e combinações tem dificuldades até em resolver o Problema 1;

Aprender e fazer com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar por que ela está errada;

Resistir à tentação de, em cada problema, apresentar a solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver a generalidade dos problemas e não um “truque” que resolva maravilhosamente um problema;

Dar preferência aos raciocínios construtivos. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de aplicação da Combinatória ao cálculo de probabilidades são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo – raciocínio do tipo contar a mais e depois descontar o que não serve –, os alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos.

Como não se efectuou realmente ensino neste trabalho, propõe-se como investigação futura realizar um estudo exploratório de caracterização do conhecimento de estudantes universitários, de modo a aprofundar o estudo da compreensão dos conceitos relacionados com a Combinatória e sua aplicação ao cálculo de probabilidades. O estudo a realizar poderia basear-se no marco teórico do *significado institucional e pessoal* dos objectos matemáticos de Godino e Batanero (1994) e nas investigações apresentadas por Díaz e Fuente (2004).

Referências bibliográficas

- Ancker, S. A. (2006). The language of conditional probability. *Journal of Statistics Education* (on line), 14(2).
- Brualdi, R. A. (2004). *Introductory combinatorics* (4th ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Díaz, C. & Fuente, I. (2004). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la Estadística. *Epsilon*, 59, 245-261.
- Estrada, A., Díaz, C. & Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. In M. Catalán, M. Moreno & M. López (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 277-284). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria: International Statistical Institute.

- Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- GAVE (2006). *Matemática: Questões de exame do 12.º ano 1997-2006* (Volume 1 – Probabilidades e Combinatória). Lisboa: Ministério da Educação.
- Gras, R. & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional e personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Guimarães, R. & Cabral, J. (2007). *Estatística* (2.ª ed.). Lisboa: McGraw-Hill.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2000). *A Matemática do ensino médio: Volume 2* (3.ª ed.). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- ME (2001a). *Curriculo nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- ME (2001b). *Programa de Matemática aplicada às ciências sociais*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2001c). *Programa de Matemática A (10.º ano)*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2001d). *Programa de Matemática B (10.º ou 11.º anos)*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2002a). *Programa de Matemática A (11.º ano)*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2002b). *Programa de Matemática A (12.º ano)*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2002c). *Programa de Matemática B (11.º ou 12.º anos)*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2002d). *Programa de Matemática B (12.º ano)*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Ross, S. (1998). *A first course in Probability* (international edition, 5th ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Picado, J. (2001). *Tópicos de Teoria Combinatória* (Apontamentos da disciplina de Teoria Combinatória do Mestrado em Matemática, edição 2003/2005 – documento policopiado). Coimbra: Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.

ENSINO E APRENDIZAGEM DAS OPERAÇÕES COMBINATÓRIAS NO 12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Paulo Ferreira Correia

Escola Secundária/3 de Barcelos

ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes

Universidade do Minho

jfernandes@iep.uminho.pt

Fernando Almeida

Escola Secundária/3 de Oliveira do Douro

almeida.fm@gmail.com

Resumo. Neste artigo apresentam-se alguns dos principais resultados de um trabalho de investigação sobre o ensino e aprendizagem das operações combinatórias dos alunos de uma turma do 12.º ano de escolaridade no ano lectivo 2008-2009. Para tal, e depois de uma intervenção de ensino, foram aplicados um questionário e um teste: o questionário destinado à recolha da opinião dos alunos sobre a intervenção de ensino e o teste, constituído por sete problemas, concebido para avaliar as aquisições cognitivas dos alunos nas operações combinatórias.

Em geral, os resultados revelam que os alunos manifestaram uma atitude positiva em relação à intervenção de ensino da Combinatória e que a intervenção de ensino se revelou eficaz no desenvolvimento das capacidades de raciocínio combinatório.

Palavras-chave: Operações combinatórias; Intervenção de ensino; Alunos do 12.º ano de escolaridade.

1. Introdução

A Combinatória tem sido um campo pouco explorado em investigação didáctica, apesar da sua importância em matemática discreta, de assumir-se como constituinte do raciocínio formal (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000) e da sua aplicação em áreas como a programação linear, teoria dos jogos, topologia, teoria de números, análise de redes, etc., as quais beneficiarão de um ensino mais efectivo da combinatória (Fischbein, no prefácio do livro de Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

O raciocínio combinatório desempenha um papel importante no êxito dos principais objectivos curriculares (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997a), já que os problemas de Combinatória facilitam o desenvolvimento de processos de enumeração, de realização de conjecturas, de generalização e o pensamento sistemático, essenciais para a aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino (English, 2005).

Glaymann e Varga (1975) destacam a importância da Combinatória no desenvolvimento de raciocínios para as Probabilidades e Heitele (1975) inclui a Combinatória entre as ideias estocásticas fundamentais.

Em Portugal, e no programa de Matemática A do 12.º ano de escolaridade, o estudo da Combinatória ocorre no tema Probabilidades e Combinatória. No entanto, para além de aparecer associado ao tema Probabilidades, e não como unidade temática autónoma, aparece ressalvado o interesse da Combinatória por si só.

As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas. (Ministério da Educação, 2002, p. 1)

Segundo Silva, Fernandes e Soares (2004), os professores consideram a Combinatória um tema difícil, o que explica o facto de o ensino se limitar, na maioria das vezes, à exposição de fórmulas e à sua aplicação na resolução de exercícios, contrariamente às recomendações actuais para o seu ensino (NCTM, 2003).

Defendendo a intensificação do ensino da Combinatória e, sobretudo, uma mudança profunda na sua abordagem didáctica, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) apresentam uma proposta de desenvolvimento do currículo de Combinatória elementar, para alunos de idades compreendidas entre os 10 e os 18 anos.

Batanero e seus colaboradores, destacando as variáveis modelo combinatório (selecção, distribuição e partição), operação combinatória envolvida no problema (permutação, arranjo e combinação), dimensão dos parâmetros e tipo de elementos a serem combinados (letras, números, pessoas, objectos), na medida em que influenciam as respostas dos alunos, consideram que elas devem ser reconhecidas na organização do ensino,

as quais devem também enfatizar o processo de modelação, o raciocínio recursivo e procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de nos concentrarmos apenas nos aspectos algorítmicos e nas definições das operações combinatórias (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997a, p. 251).

Roa, Batanero e Godino (2003) referem a importância de serem apresentadas, na sala de aula, situações que ajudem os alunos a desenvolver destrezas em Combinatória, uma vez que as estratégias de resolução (como dividir o problema inicial em subproblemas, traduzir o problema num problema equivalente, fixar variáveis) podem ser adequadamente exemplificadas, sem que seja dada uma ênfase excessiva às definições das operações combinatórias e à sua identificação como único método de resolução dos problemas.

Na opinião de Gardiner (1991), o valor educacional da parte mais simples da matemática discreta reside precisamente no facto da mesma pressionar o aluno a “*pensar*” sobre assuntos tão elementares (na medida em que recorre a um número reduzido de pré-requisitos técnicos) como a contagem sistemática. No entanto, isto pode ser facilmente enfraquecido pelo facto de muitos professores de Matemática se sentirem na obrigação de “*ajudar*” os alunos a resolver os problemas mais difíceis, reduzindo a solução a um número manobrável e previsível de etapas ou regras e, consequentemente, requerendo o “*mínimo de pensamento*” por parte do aluno.

Neste contexto, no presente estudo, relata-se uma intervenção de ensino das operações combinatórias, em alunos do 12.º ano de escolaridade, valorizando a sequencialização das operações (arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações), as ideias prévias dos alunos sobre as operações, a aprendizagem por descoberta e o trabalho de grupo.

2. Enquadramento teórico

Nesta secção abordam-se três dimensões do ensino e da aprendizagem da Combinatória: raciocínios, dificuldades e estratégias de ensino.

2.1. Raciocínios em Combinatória

Segundo Piaget e Inhelder (s/d) é apenas no estágio operacional formal que a criança de “11-12 anos assinala um marco (...) na compreensão das operações combinatórias” (p. 282). Contudo, na opinião de Fischbein (1975), a criança não adquire de forma espontânea as técnicas combinatórias, nem mesmo no período das operações formais, pois embora a capacidade de enumerar sistematicamente se presume adquirida no estágio operacional formal, há estudos que revelam que esta capacidade nem sempre é alcançada por todos os sujeitos de 12-15 anos de idade. Em consequência, Fischbein advoga a necessidade de instrução para a aquisição das operações combinatórias.

De entre as representações gráficas, Fischbein (1975) destaca o diagrama de árvore pois, uma vez entendida a sua construção, este poderá, por um lado, ser generalizado para um grande número de elementos (propriedade que o autor designa por generalização iterativa, que matematicamente corresponderia à indução matemática) e, por outro, permitirá a adaptação a novos problemas derivados do inicial (propriedade que o autor designa por generalização construtiva), sendo estas as duas características essenciais do raciocínio recursivo.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), a recursão, como método geral de resolução de um problema, consiste em começar por obter uma versão mais fácil do problema, reflectir sobre aquilo que se fez e, finalmente, exprimir todo o processo na forma de algoritmo ou expressão recorrente. Assim, nas actividades de resolução de problemas de Combinatória em que intervêm os arranjos e as permutações, a recursividade assume um papel importante uma vez que, geralmente, a construção de uma dada configuração efectua-se a partir de outra de menor dimensão. Por exemplo, para formar os arranjos com repetição de n elementos tomados k a k , podemos partir das configurações formadas na ordem $k - 1$ e acrescentar-lhes um último elemento.

Também o diagrama de árvore tem um carácter recursivo, já que uma árvore com k níveis de ramificação se constrói a partir de uma com $k - 1$ níveis.

Para DeGuire (1991) é importante que os alunos vão mais além do que enumerar e construir diagramas de árvore, retirando proveito destas estratégias para encontrarem procedimentos mais eficientes, nomeadamente: tirar todo o proveito da regra da soma, sempre que um conjunto de configurações combinatórias fica determinado pela reunião de subconjuntos mutuamente exclusivos; da regra do produto, mediante a qual se constroem produtos cartesianos de conjuntos de elementos; e da regra do quociente, para relacionar entre si, por exemplo, combinações e arranjos.

English (1998, 2005) destaca a importância do raciocínio analógico, uma vez que um dos grandes objectivos da educação matemática é que os alunos identifiquem conexões entre as ideias matemáticas e apliquem esta compreensão na construção de novas ideias e na resolução de novos problemas. Para esta autora, uma falha na aplicação de processos de raciocínio analógico é uma das maiores causas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas.

English (2005) acrescenta que a riqueza e o significado dos contextos em que os problemas combinatórios são formulados constituem recursos que permitem ao aluno procurar sozinho a solução. Por outro lado, enquanto os alunos resolvem os problemas, a compreensão dos alunos pode ser estimulada por um questionamento apropriado por parte do professor (por exemplo, pedindo-lhes que expliquem e justifiquem as respostas). É importante dar liberdade ao aluno para usar diferentes representações e abordagens, bem como encorajá-lo a descrever e a explicar os seus processos de resolução e a partilhar as suas ideias com os colegas.

2.2. Dificuldades em Combinatória

No caso particular da Combinatória, segundo Hadar e Hadass (1981), trata-se de um tema no qual os alunos têm muitas dificuldades.

Comparando os resultados obtidos por Navarro-Pelayo (1994) com os que obteve no seu estudo, Roa (2000) concluiu que os alunos que participaram na sua investigação (alunos com preparação matemática avançada), em alguns problemas, não obtiveram melhores resultados do que os alunos de 14 anos.

A identificação das dificuldades que comprometem a solução de um problema combinatório é um passo necessário em direcção a uma melhor compreensão das habilidades dos alunos na resolução de problemas e na melhoria dessas habilidades (Hadar & Hadass, 1981).

Possivelmente uma das chaves das dificuldades e do lento desenvolvimento espontâneo da capacidade de realização das operações combinatórias, por parte dos sujeitos, se deva a uma relação inadequada ou insuficiente com a recursão e a indução matemática, o mais

genuíno e criador dos raciocínios matemáticos segundo Poincaré. (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p. 63)

Segundo English (2005), muitos estudos em Combinatória revelam que os alunos têm dificuldades em identificar conexões entre os problemas e, consequentemente, dificuldades em transferir as aprendizagens efectuadas para novas situações.

As dificuldades em Combinatória podem surgir logo na confusão entre os problemas de arranjos simples e os problemas de combinações simples ou arranjos com repetição, ao não reconhecerem se a ordem é ou não relevante ou se é possível ou não repetir os elementos (Watson, 1996).

No estudo que realizaram com alunos de 14-15 anos de idade, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997a) observaram que alguns alunos, que aplicaram a definição de operação combinatória num modelo de selecção, não foram capazes de transferir essa definição para os problemas que envolviam um modelo combinatório diferente, por exemplo o conceito de arranjo com repetição nos problemas de selecção transferido para um problema de distribuição.

Investigando dificuldades típicas na resolução de problemas combinatórios, através das soluções obtidas por alunos do primeiro curso de Combinatória na resolução do problema das cartas mal endereçadas, Hadar e Hadass (1981) concluíram sobre a importância da:

- identificação dos acontecimentos a serem contados, uma vez que uma percepção incoerente dos mesmos conduz a conclusões erradas;
- escolha de uma notação apropriada, uma vez que a mesma deve representar apenas e de forma compacta toda a informação contida no enunciado do problema;
- compreensão do problema inicial como um conjunto de problemas particulares, porque geralmente o problema é um conjunto de problemas para diferentes valores dos parâmetros;
- construção de métodos sistemáticos de contagem que pressupõem o domínio do problema;
- fixação de uma ou mais variáveis de forma a obter um método de contagem coerente;
- concretização de um plano de contagem, uma vez que um bom plano não garante a solução a menos que seja realizável;
- generalização através de uma estrutura unificadora das soluções obtidas para vários casos particulares.

São vários os autores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997b; Correia, 2008; Esteves, 2001; Roa, 2000; Silva, Fernandes & Soares, 2004) que referem erros em Combinatória, dos quais se destacam: má interpretação do enunciado; erro de ordem (mais frequente nos problemas de combinações); erro de repetição; confusão do tipo de objectos; exclusão de alguns elementos na constituição das configurações; listagem não sistemática; respostas intuitivas erróneas; esquecimento da fórmula correcta; esquecimento do significado dos parâmetros da fórmula combinatória; confusão do tipo de célula (tipo de subconjunto); e erro na partição obtida.

2.3. Estratégias de ensino da Combinatória

Tal como Silva, Fernandes e Soares (2004), também Almeida e Ferreira (s/d) referem que é comum o ensino da Combinatória processar-se através da exposição e aplicação repetida de fórmulas à resolução de exercícios e problemas. Ora, as investigações têm demonstrado quão limitada é a aprendizagem dos alunos através destas metodologias tradicionais, designadamente pela adesão a variados tipos de erros, donde se torna imperativo implementar novas estratégias de ensino que aprofundem as aprendizagens dos alunos.

Da investigação realizada com estudantes universitários com formação em Combinatória, Eizenberg e Zaslavsky (2003), estudando o efeito da colaboração na resolução de problemas de Combinatória (por comparação dos resultados obtidos pelos alunos que trabalharam individualmente com os resultados obtidos pelos alunos que resolveram os problemas em pares), concluíram que a

apresentação de situações que encorajem os alunos a uma resolução colaborativa dos problemas pode ser uma maneira de ultrapassar algumas das dificuldades que os alunos encontram na resolução de problemas combinatórios. Esta colaboração poderá aumentar a confiança e o sucesso dos alunos através do “controlo de comportamentos” (p. 399) que lhes permitirá construir um conjunto de abordagens para a obtenção da solução e para a verificação de estratégias.

A verificação de um resultado, bem como da forma como foi obtido, permite aos alunos consolidar os seus conhecimentos e tornarem-se mais hábeis na resolução de problemas (Polya, 2003). Voltar à solução proporciona a oportunidade de investigar conexões dentro de um mesmo problema e entre problemas (Eizenberg & Zaslavsky, 2004). No entanto, a verificação da resposta a um problema de Combinatória é uma tarefa particularmente difícil pois não há processos que assegurem a identificação de erros e a identificação do erro não fornece necessariamente uma forma de obter a resposta correcta (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

Almeida e Ferreira (s/d) realizaram um estudo piloto com uma turma do 2.º ano do curso médio envolvendo o ensino das operações combinatórias, privilegiando os seguintes aspectos: criação de um ambiente favorável à exposição, à discussão, ao desenvolvimento de ideias e à resolução de problemas, em que o aluno é ouvido e as suas ideias são valorizadas; comunicação à comunidade escolar dos pressupostos da intervenção; tarefas interessantes e desafiadoras, inicialmente de grau de dificuldade crescente, passando depois a graus de dificuldade variável; trabalho dos alunos em grupo, de quatro ou cinco elementos; o professor como aquele que acompanha e incentiva o trabalho dos alunos nos grupos; e a administração de um teste diagnóstico antes (como forma de identificar as suas ideias prévias) e depois da intervenção.

Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se que os alunos desenvolveram significativamente o seu raciocínio combinatório e a forma de trabalhar em grupo, destacando-se:

a capacidade de enumeração de configurações e de observação de padrões e sua utilização na resolução de problemas; a aplicação, correcta e consciente, dos princípios de contagem (aditivo e multiplicativo); a capacidade de reconhecer as diferenças entre configurações ordenadas e não ordenadas e utilizá-las na elaboração de estratégias de resolução; criar estratégias de resolução de problemas independentes do uso de fórmulas; trabalhar em equipa de forma colaborativa; observar dados relevantes para a resolução de um problema; aprender com os erros e produzir pequenos textos argumentativos.

Embora alguns alunos tenham considerado o trabalho cansativo, e consequentemente algo desmotivante, a metodologia adoptada foi bem aceite pela maioria dos alunos.

2. Metodologia

No presente estudo relata-se uma intervenção de ensino e aprendizagem das operações combinatórias (arranjos com repetição, arranjos simples, permutações simples e combinações simples) avaliada a partir das percepções dos alunos sobre a implementação da intervenção e do seu desempenho nas operações combinatórias.

2.1. Participantes

O estudo decorreu no início do ano lectivo 2008/2009 e nele participaram os 23 alunos de uma turma do 12.º ano de uma escola secundária/3 do distrito de Braga. A turma é constituída por 11 raparigas e 12 rapazes, sendo a média das idades 17 anos, que constitui a idade normal de frequência do 12.º ano.

No que respeita ao aproveitamento dos alunos na disciplina de Matemática, os níveis obtidos pelos alunos variavam entre 9 e 20 valores (numa escala de 0 a 20) e as médias obtidas no final do 10.º e 11.º anos de escolaridade foram, respectivamente, 14,2 valores e 14,7 valores. A turma tem apenas um aluno com repetências no ensino secundário, uma no 10.º ano e outra no 12.º ano.

2.2. Caracterização da intervenção de ensino

Aos alunos que participaram no estudo foi aplicada uma sequência de ensino em Combinatória, realizada em 10 aulas de 90 minutos, das quais as sete primeiras incidiram sobre as operações combinatórias e as três restantes sobre o Triângulo de Pascal e o Binómio de Newton. Na tabela 1 apresenta-se apenas a distribuição das actividades utilizadas na sequência de ensino das operações combinatórias, assunto a que se reporta este texto.

Tabela 1 – Distribuição das actividades da sequência de ensino sobre as operações combinatórias

Aula	Descrição
1	Arranjos com repetição Actividade de descoberta sobre arranjos com repetição Ficha de trabalho sobre arranjos com repetição
2	Arranjos simples Actividade de descoberta sobre arranjos simples Ficha de trabalho sobre arranjos com repetição e arranjos simples
3	Permutações simples (e notação factorial) Actividade de descoberta sobre permutações simples Ficha de trabalho sobre permutações e arranjos
4	Continuação da resolução da ficha de trabalho sobre permutações e arranjos
5	Combinações simples Actividade de descoberta sobre combinações simples Ficha de trabalho sobre combinações, permutações e arranjos
6	Continuação da resolução da ficha de trabalho sobre combinações, permutações e arranjos
7	Resolução de problemas envolvendo as operações combinatórias Questionário – Recolha de dados pessoais e recolha da opinião dos alunos sobre o ensino e aprendizagem das operações combinatórias Teste – Ficha de avaliação por fases sobre as operações combinatórias

Quanto à metodologia de trabalho, optou-se pelo trabalho de grupo, tendo sido constituídos 6 grupos, cinco de quatro elementos e um de três elementos, de acordo com os seguintes critérios: 1. classificação obtida no final do 3.º período do 11.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática, para que cada um dos grupos fosse heterogéneo quanto ao desempenho em Matemática e todos os grupos fossem homogéneos quanto à média das classificações obtidas no 11.º ano; 2. empatia entre os elementos do grupo; e 3. sexo dos participantes. Da implementação destes critérios resultaram cinco grupos com dois rapazes e duas raparigas e um grupo com uma rapariga e dois rapazes.

Em cada operação combinatória, começou-se por aplicar uma actividade de descoberta, resultado da ampliação das utilizadas por Correia (2008). A ordem de exploração das operações combinatórias teve em consideração o nível de dificuldade observado em Correia (2008). Assim, da mais fácil para a mais difícil, exploraram-se, por ordem, arranjos com repetição, arranjos simples, permutações simples e combinações simples.

As actividades de descoberta consideradas foram: *Actividade 1 – Formar números*, constituída por quatro questões, consistindo na contagem dos $\bar{A}_2^3$ (questão 1a), $\bar{A}_2^5$ (questão 1b), $\bar{A}_3^5$ (questão 1c) e $\bar{A}_p^n$ (questão 1d); *Actividade 2 – Definir bandeiras com barras horizontais*, constituída por quatro questões, consistindo na contagem dos A_2^3 (questão 2a), A_2^5 (questão 2b), A_3^5 (questão 2c) e A_p^n

(questão 2d); *Actividade 3 – Dispor amigos em fila para tirar uma fotografia*, constituída por três questões, consistindo na contagem das P_3 (questão 3a), P_5 (questão 3b) e P_n (questão 3c); *Actividade 4 – Formar grupos de pessoas para participarem num concurso*, constituída por quatro questões, consistindo na contagem das C_2^3 (questão 4a), C_2^5 (questão 4b), C_3^5 (questão 4c) e C_p^n (questão 4d).

Exceptuando as questões c) de cada actividade de descoberta, onde se pretendia que os alunos descobrissem uma fórmula para contar os $\bar{A}_p^n$, os A_p^n , as P_n e as C_p^n , em todas as outras questões apresentava-se um exemplo de configuração.

O desenho das actividades de descoberta incorporava, intencionalmente, um factor de aprendizagem sugerindo a aplicação de um método particular, com o objectivo de conduzir os alunos à descoberta da lei de formação associada a cada uma das operações combinatórias. Assim, tomando como referência o desenho de Piaget e Inhelder (s/d), o questionário foi heurísticamente construído, atendendo à ordem de apresentação das operações combinatórias, ao aumento progressivo da grandeza dos parâmetros envolvidos nas operações combinatórias e à sequencialização das questões em cada operação combinatórias.

A cada actividade de descoberta seguia-se a resolução de uma ficha de trabalho com problemas sobre as operações combinatórias tratadas, incluindo ainda a definição da operação combinatória abordada na respectiva actividade de descoberta e a fórmula de contagem.

Na selecção dos problemas das fichas de trabalho atendeu-se à sua diversificação, com o intuito de evitar o domínio da técnica e favorecer a interpretação. Tinha-se por objectivo a apreensão das operações combinatórias com a valorização da diversificação de estratégias de resolução em detrimento da utilização técnica de fórmulas. Por outro lado, ao contemplar em cada ficha de trabalho problemas que envolviam as operações combinatórias tratadas nas aulas anteriores, pretendeu-se valorizar a conexão entre as operações abordadas.

Com a metodologia de trabalho de grupo procurou-se promover a resolução colaborativa dos problemas, num ambiente de aprendizagem propício ao surgimento de novas ideias, à discussão e partilha de estratégias de resolução e à explicação dos raciocínios aos colegas, ajudando-os a ultrapassar dúvidas e dificuldades.

Durante a realização das tarefas propostas, os alunos decidiam livremente sobre as estratégias a utilizar na resolução das actividades de descoberta e na resolução dos problemas das fichas de trabalho, optando-se, assim, por um trabalho centrado no aluno, em que o professor tinha o papel de questionar, acompanhar e incentivar o trabalho dos alunos nos seus grupos.

Todas as fichas de trabalho continham as soluções numéricas dos problemas, permitindo aos alunos confrontar as suas respostas com as respostas correctas e, no caso das respostas incorrectas, aprender com os erros ao identificar falhas de raciocínio.

2.3. Método de recolha de dados

A recolha dos dados usados no estudo foi efectuada através da aplicação de um questionário e de um teste. O questionário centra-se na recolha de dados pessoais e nas percepções dos alunos sobre o ensino e a aprendizagem das operações combinatórias e o teste é constituído por um conjunto de sete problemas de contagem, envolvendo as operações combinatórias estudadas.

Da análise dos questionários emergiu a necessidade de aprofundar a compreensão sobre a opinião dos alunos acerca do grau de dificuldade das operações combinatórias, comparativamente com os restantes temas de matemática. Nesse sentido foi colocada, de novo à turma, a seguinte questão: “A Combinatória é mais fácil ou mais difícil dos que os outros temas de Matemática?”, permitindo-se que os alunos falassem livremente sem que a questão fosse dirigida a algum aluno em especial.

O questionário foi aplicado fora da aula de Matemática, concretamente na primeira parte (45 minutos) de uma aula de Área de Projecto. A administração do teste processou-se em duas fases: numa

primeira fase, com a duração de 60 minutos, os alunos resolveram, individualmente, os sete problemas de contagem propostos. Depois de entregarem as resoluções, deu-se início à segunda fase, com a duração de 15 minutos, em que foram fornecidas as soluções numéricas dos sete problemas para que os alunos as pudessem confrontar com as respostas numéricas obtidas na primeira fase (registadas em rascunho) e rectificar algumas das resoluções iniciais, se assim o entendessem.

Na fase II do teste, os alunos deveriam procurar falhas de raciocínio nas resoluções efectuadas na fase I e efectuar as devidas correcções. Às novas respostas era atribuída a cotação total destinada à questão apenas no caso de o aluno apresentar uma resolução correcta que evidenciasse compreensão do que foi feito. Em qualquer outro caso mantinha-se a cotação atribuída na fase I.

2.4. Tratamento e análise de dados

Os dados do questionário foram analisados a partir das três categorias seguintes: opinião dos alunos sobre as operações Combinatórias; opinião dos alunos sobre a metodologia de ensino e aprendizagem; opinião dos alunos sobre a metodologia de trabalho de grupo; e opinião dos alunos sobre o seu envolvimento na aprendizagem.

Nos itens do questionário que envolviam escalas de tipo Likert, tendo em vista determinar os valores da média e do desvio padrão, codificámos as respostas dos alunos em: 1 – Discordo Totalmente, 2 – Discordo, 3 – Indiferente, 4 – Concordo e 5 – Concordo Totalmente.

A análise dos dados do teste incidiu sobre as estratégias de resolução dos alunos nos sete problemas contemplados, os erros identificados nas suas produções escritas e o seu desempenho nas operações combinatórias.

As estratégias de resolução dos sete problemas, na Fase I do teste, foram distribuídas pelas seis categorias seguintes: *desenhos*, *operações* de multiplicação, adição e divisão; *fórmulas*, dos arranjos (com e sem repetição), das permutações e das combinações; *desenhos e operações*, *desenhos e fórmulas* e *operações e fórmulas*.

Os erros identificados nas produções escritas dos alunos, na Fase I do teste, foram distribuídos pelas sete categorias seguintes: *ordem*, se a ordem era considerada importante quando era irrelevante e vice-versa; *repetição*, se era permitida a repetição dos elementos quando não era possível e vice-versa; *operação combinatória*, no caso de uma identificação incorrecta da operação combinatória; *parâmetros*, no caso de os parâmetros da fórmula serem incorrectamente identificados; *operandos*, se nas expressões apresentadas há falta ou excesso de operandos, reflectindo que nem todas as condições do problema foram consideradas ou foram interpretadas incorrectamente; *operação numérica*, se nas expressões apresentadas é utilizada uma operação numérica incorrecta; e *enumeração*, se há excesso ou falta de configurações.

Finalmente, a variável desempenho em Matemática assumiu, para cada aluno, o valor da média aritmética, arredondada às décimas, das classificações obtidas pelos alunos no 10.º e 11.º anos de escolaridade. Seguidamente, a partir dos valores obtidos para a média, os alunos foram distribuídos por um dos três grupos estabelecidos: $[0,10[$, desempenho fraco; $[10,14[$ desempenho satisfatório; e $[14,20]$, desempenho bom.

3. Percepções dos alunos acerca da metodologia de ensino

3.1. Opinião dos alunos sobre as operações combinatórias

Da análise da tabela 2, conclui-se que o estudo incidiu sobre um grupo de alunos que, na sua maioria, gostam de resolver problemas de Matemática (69%) e gostaram de resolver os problemas de Combinatória propostos (74%).

Tabela 2 – Distribuição das respostas dos alunos sobre a Combinatória

Afirmações	N.º de alunos			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Gosto de resolver problemas.	2	5	16	3,8	0,9
Gostei de resolver problemas de Combinatória.	2	4	17	3,8	1,0
As operações combinatórias são um tema mais difícil do que os outros temas de Matemática.	12	4	7	2,6	1,3
Os problemas propostos despertaram o meu interesse pela Combinatória.	2	5	16	3,9	0,9

DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente

De uma análise mais detalhada, concluiu-se que 61% dos alunos gostam de resolver problemas de Matemática e também gostaram de resolver os problemas de Combinatória propostos, enquanto 13% se declararam *indiferentes*. O aluno A_6 referiu não gostar de resolver problemas de Matemática, reiterando esta posição relativamente aos problemas de Combinatória. Já o aluno A_{16} , embora afirme não gostar de resolver problemas, gostou de resolver os problemas de Combinatória. Contrariamente ao aluno A_{16} , o aluno A_{22} gosta de resolver problemas, mas não gostou de resolver os problemas de Combinatória.

Questionados sobre o grau de dificuldade das operações combinatórias, comparativamente com os outros temas de Matemática, a maioria dos alunos (52%) é da opinião de que as operações combinatórias não são um tema mais difícil do que os outros temas. Contudo, há uma percentagem significativa de alunos (30%) que têm uma opinião contrária.

A_6 – Eu acho que a Combinatória é mais fácil dos que os outros temas. Só que há pessoas que se adaptam melhor do que outras (...) depende da pessoa, porque é uma matéria que não precisa de bases. É só raciocínio. É mais fácil porque é mais intuitivo.

A_1 – Mesmo que se trabalhe muito, torna-se difícil porque depende muito do momento (...) tem muitos truques que não adianta muito o treino. Ajuda, mas é sempre uma situação nova e isso é que é difícil. As outras matérias são mais fáceis do que isto (...) por causa daqueles raciocínios que se treinam e é basicamente sempre aquilo.

A_{13} – Há pessoas que têm muitas dificuldades a Matemática e essas (...) dificuldades vêm do início, do 7.º, do 8.º e do 9.º. Enquanto isto é uma matéria totalmente nova, não precisamos de nada. Só precisamos da calculadora e... de pensar.

Comparadas as opiniões dos alunos com o desempenho em Matemática (obtido pela média aritmética das classificações obtidas no 10.º e 11.º anos de escolaridade, arredondada às décimas), concluiu-se que 36% dos alunos com média a Matemática do intervalo [14,20] referem que as operações combinatórias são um tema mais difícil dos que os outros temas de Matemática. Já a percentagem de alunos do intervalo [10,14[, com a mesma opinião, decresce para 25% e o único aluno com média no intervalo [0,10[é da opinião de que as operações combinatórias não são um tema mais difícil do que os outros temas.

Para 17% dos alunos, igualmente distribuídos pelos intervalos [10,14[e [14,20] não há grande diferença entre o grau de dificuldade das operações combinatórias e o grau de dificuldade dos restantes temas de matemática.

Das respostas dos alunos, também se concluiu que os problemas propostos tiveram um efeito positivo no interesse pela Combinatória, já que 70% dos alunos assinalaram uma das opções *Concordo*

ou *Concordo Totalmente* na afirmação *Os problemas propostos despertaram o meu interesse pela Combinatória*.

A_1 – Eu sou da opinião de que a Combinatória é mais difícil. Mas eu gosto mais. Porque não é aquele raciocínio que é sempre a mesma coisa. É como um desafio.

A_{10} – A outra matéria é um bocado mecanizada. Muda uma coisa ou outra, mas não há uma grande diferença.

Concluiu-se, também, que a percentagem de alunos com classificação média inferior a 14 valores, a referirem que os problemas propostos despertaram o seu interesse pela Combinatória (75%), é ligeiramente superior à percentagem de alunos com classificação superior a 14 valores que partilham da mesma opinião (64%). De 30% dos alunos que referiram que as operações combinatórias são um tema mais difícil do que os outros temas de Matemática, 57% desses alunos referiram também que os problemas propostos despertaram o seu interesse pela Combinatória. De 52% dos alunos que referiram que as operações combinatórias não são um tema mais difícil do que os outros temas de Matemática, 67% desses alunos referiram também que os problemas propostos despertaram o seu interesse pela Combinatória.

Quanto aos alunos que assinalaram a opção *Indiferente* (17%) nesta afirmação, todos eles referiram que os problemas propostos despertaram o seu interesse pela Combinatória.

A percentagem de alunos que referem ter sentido dificuldades nas actividades de descoberta (52%), para além de inferior, é muito próxima da percentagem de alunos a referirem que tiveram dificuldades na resolução dos problemas propostos nas fichas de trabalho (57%). O aluno A_4 , que referiu também ter sentido dificuldades “na descoberta das fórmulas” das actividades de descoberta, e o aluno A_{20} , que assinalou apenas a opção *Outra situação*, referiram que as suas dificuldades incidiram em “alguns casos particulares” das actividades de descoberta e dos problemas das fichas de trabalho.

Colocada a questão Sempre que a tua resolução estava errada, as soluções apresentadas em cada ficha de trabalho ajudaram-te a detectar falhas de raciocínio?, 39% dos alunos responderam Sempre, 44% dos alunos responderam Muitas vezes e 17% dos alunos responderam Às vezes. Nenhum aluno assinalou as opções Poucas vezes e Nunca. Pode concluir-se assim que, na opinião dos alunos, as soluções numéricas dos problemas de Combinatória desempenharam um papel importante na detecção de falhas de raciocínio.

A_6 – O que é curioso é que nos exercícios de Combinatória eu ia ao problema, fazia à minha maneira e depois ia ver as soluções e via que estava errada. E depois ... obviamente que é isto! Por que motivo não pensei assim? Claro que é isto! Mas, no entanto, não foi o raciocínio que eu segui. Isso é que é estranho!

A_{13} – Um dos grandes problemas que eu tinha era, por exemplo, os alunos em grupos e que uns ficavam juntos ... Eu percebi que aquilo era assim, mas não conseguia ter a certeza mesmo se eles ficavam juntos. Os números não me pareciam traduzir o problema. Fazia-me impressão! Ok, isto fica assim. Tudo bem. Mas como é que eu tenho a certeza de que é assim. Isso para mim é que me dificultava.

A_1 – Para mim é difícil porque nunca tinha a certeza se o resultado era aquele. Nas outras matérias há sempre uma maneira de confirmar: pela calculadora gráfica, substituindo, ... por outros caminhos consigo chegar lá. Agora aqui não! (...) Às vezes temos dúvidas entre uma coisa ou outra: se a ordem interessa ou não. Quando vemos a solução vemos logo que afinal era a outra hipótese que nós tínhamos que estava bem. E depois já percebemos porquê.

3.2. Opinião dos alunos sobre a metodologia de ensino e aprendizagem

Como se pode observar na tabela 3, a maioria dos alunos (87%) referiu ter gostado da forma como as operações combinatórias foram apresentadas nas aulas. São igualmente significativas as percentagens de alunos a referirem que aprendem melhor quando pensam por si próprios (96%) e a referir uma evolução na aprendizagem das operações combinatórias à medida que desenvolviam as actividades propostas (83%).

Tabela 3 – Distribuição das respostas dos alunos sobre a metodologia de ensino e aprendizagem

Afirmações	N.º de alunos			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Globalmente gostei da forma como as operações combinatórias foram apresentadas nas aulas.	0	3	20	4,3	0,7
Aprendo melhor quando tenho de pensar por mim próprio do que quando o professor pensa por mim.	0	1	22	4,2	0,5
Descobrir por nós próprios a matemática é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-la.	1	5	17	4,0	0,9
No futuro gostaria de aprender outros temas de matemática do mesmo modo que aprendi as operações combinatórias.	1	4	18	4,0	0,8
De uma actividade para a seguinte senti que evoluía cada vez mais.	1	3	19	4,1	0,8

DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente

Concluiu-se que uma percentagem significativa de alunos (74%) é da opinião de que é mais aliciante serem eles a descobrir a matemática, enquanto 22% dos alunos são indiferentes. Por outro lado, 78% dos alunos referiram que gostariam de, no futuro, aprender outros temas da matemática do mesmo modo que aprenderam as operações combinatórias, tendo 17% assinalado a opção *Indiferente*.

Nas operações combinatórias, na perspectiva dos alunos, as suas resoluções, nas actividades propostas, envolveram muitos esquemas e desenhos na obtenção das respostas para os problemas ou para efectuarem generalizações. Os alunos referiram como estratégias mais frequentemente utilizadas: *esquemas e desenhos* (70%); *operações aritméticas* (39%); e *fórmulas* (22%).

Questionados sobre as dificuldades sentidas na resolução dos problemas propostos, os alunos referiram: 1. interpretar os problemas (52%); 2. iniciar a resolução do problema (43%); 3. definir uma estratégia de resolução (35%); 4. identificar se a ordem é ou não relevante (30%); 5. identificar se é possível ou não repetir os elementos (13%).

A_{19} – Eu quando estou a fazer exercícios com outras pessoas, leio o exercício e fico assim [parada] e dizem-me sempre: porque não fazes esquemas ou assim? Eu não faço esquemas porque estou a pensar naquilo... Por acaso eu acho que isto é fácil, mas é difícil prestar atenção a tudo aquilo [a todas as condições do problema], a interpretar aquilo ... o texto.

Na estratégia *fórmulas* quando questionados sobre a fórmula mais utilizada, 87% dos alunos referiram a fórmula $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Quanto às dificuldades sentidas na aplicação de uma fórmula, os alunos referiram a: identificação da fórmula a aplicar (65%); identificação dos parâmetros envolvidos na fórmula (43%); relevância ou não da ordem (30%); e possibilidade ou não de repetir os elementos (4%).

A_1 – Resolver as combinações é mais complicado. Descobrir que é combinações e depois pôr na máquina é mais fácil. Enquanto que nas outras não. É só multiplicar e até é pelos tracinhos, pelos desenhos, e fica logo feito. A combinação não, porque ainda tem que se dividir e quando uma pessoa percebe que é combinações é mais fácil usar logo a fórmula. Uma pessoa se usar a fórmula desdobrada, provavelmente até se esquece de dividir, porque já é mais complexa um bocadinho...

3.3. Opinião dos alunos sobre a metodologia de trabalho de grupo

Da análise da tabela 4, resulta que nenhum aluno referiu não ter gostado de aprender as operações combinatórias em trabalho de grupo e, de uma maneira geral, os alunos referem que não teriam aprendido mais se tivessem sido inseridos noutra grupo (78%).

Tabela 4 – Distribuição das respostas dos alunos sobre a metodologia de trabalho de grupo

Afirmações	N.º de alunos			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Gostei de trabalhar em grupo na resolução das tarefas propostas.	0	1	22	4,5	0,6
Em minha opinião, se tivesse ficado noutra grupo tinha aprendido mais.	18	3	2	2,0	1,2
O trabalho em grupo foi importante para aprender melhor.	1	1	21	4,3	0,8
O trabalho em grupo foi importante para surgirem ideias diferentes.	0	0	23	4,7	0,5
O trabalho em grupo foi importante para ultrapassar dúvidas e dificuldades.	0	1	22	4,2	0,5
Resolver os problemas por nós próprios, no meu grupo, aumentou o meu envolvimento nas tarefas.	1	3	19	4,0	0,8

DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente

Na opinião de 91% dos alunos, o trabalho em grupo foi importante para surgirem ideias diferentes. Para além de 17% dos alunos terem referido que houve um elemento do grupo que conduziu mais as resoluções, 74% dos alunos referiram que todos os elementos do seu grupo deram um contributo importante para a resolução dos problemas de Combinatória propostos. Apenas um aluno referiu que, perante as suas dificuldades, ouvia as explicações dos colegas sem as questionar, e 22% dos alunos referiram que, geralmente, contribuíam pouco para as resoluções porque não percebiam, mas quando um elemento do grupo lhes explicava ouviam atentamente e questionavam a resolução que lhes era apresentada. De uma maneira geral, os alunos (83%) referiram que a resolução dos problemas por eles próprios, no seu grupo, aumentou o seu envolvimento nas tarefas.

Quanto ao momento em que começaram a ter alguma facilidade em resolver problemas de Combinatória, 43% dos alunos referiram que a mesma ocorreu desde a primeira ficha de trabalho proposta (arranjos com repetição), enquanto 22% dos alunos referiram que só começaram a ter alguma facilidade na resolução dos problemas na última ficha de trabalho, que reunia problemas de todas as operações combinatórias estudadas.

Foi de 30% a percentagem de alunos a referirem que tiveram alguma facilidade na resolução dos problemas propostos desde a primeira ficha de trabalho e a referirem que deram um maior contributo para a resolução dos problemas desde o início. A maioria dos alunos referiu que começou a dar um

maior contributo para a resolução dos problemas propostos a partir da segunda ou terceira fichas de trabalho.

As dificuldades referidas pelos alunos, durante a realização das actividades propostas, foram: explicar aos colegas a resolução de um problema (57%); trabalhar por si próprios na resolução de um problema (35%); compreender a explicação dos colegas (4%). No entanto, todos os alunos são da opinião de que o trabalho em grupo foi importante para aprender melhor e para 96% dos alunos o trabalho em grupo foi importante para ultrapassar dúvidas e dificuldades.

3.4. Opinião dos alunos sobre o seu envolvimento na aprendizagem

De acordo com a tabela 5, quando questionados sobre o seu papel no grupo, todos os alunos referiram ter participado e 91% dos alunos é da opinião de que participaram activamente nas actividades desenvolvidas em grupo. Por outro lado, não era prática dos alunos abandonar a sua resolução sempre que esta era diferente da resolução dos colegas. Todos os alunos referiram que nesta situação confrontavam a sua resolução com a dos colegas do grupo.

Tabela 5 – Distribuição das respostas dos alunos sobre o seu envolvimento na aprendizagem das operações combinatórias

Afirmações	N.º de alunos			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Participei activamente nas actividades realizadas no meu grupo.	0	2	21	4,3	0,6
No meu grupo, quando tinha uma resolução diferente da dos meus colegas apagava a minha e optava pela resolução deles.	22	1	0	1,6	0,6
No meu grupo, quando tinha uma resolução diferente da dos meus colegas confrontava a minha resolução com a deles.	0	0	23	4,4	0,5
Conseguia resolver mais problemas em casa quando estava a estudar do que em grupo na sala de aula.	4	17	2	2,9	0,7
Em casa voltava a resolver os problemas que tinha feito na aula em grupo.	12	4	7	2,5	1,3
Em casa voltava a resolver os problemas que tinha feito na aula em grupo e conseguia percebê-los.	10	6	7	2,7	1,3
Preciso de praticar mais para me sentir seguro(a) nas operações combinatórias.	2	8	13	3,9	1,1

DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente

Apenas 30% dos alunos voltavam a resolver, em casa, os problemas trabalhados no grupo e conseguiam compreendê-los. No entanto, 57% dos alunos referiram precisar de praticar mais para se sentirem seguros na resolução de problemas de Combinatória.

4. Análise das resoluções dos problemas do teste por fases

4.1. Análise das estratégias utilizadas na fase I do teste

Pela tabela 6 podem observar-se as estratégias usadas pelos alunos e as percentagens de alunos que a elas recorreram na resolução das questões do teste na fase I.

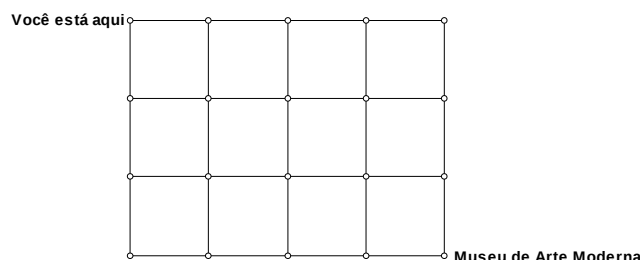
Tabela 6 – Distribuição, em percentagem, das resoluções dos alunos, na fase I do teste, segundo a estratégia utilizada (percentagem de respostas correctas)

Estratégias	Questões do teste							Total (n = 155)
	1 (n = 23)	2 (n = 23)	3 (n = 22)	4 (n = 23)	5 (n = 23)	6 (n = 18)	7 (n = 23)	
Desenhos	0	0	5 (0)	0	0	39 (86)	0	5 (75)
Operações	9 (100)	9 (100)	9 (100)	0	4 (0)	0	9 (0)	5 (63)
Fórmulas	4 (100)	39 (100)	27 (0)	0	39 (22)	33 (83)	0	20 (55)
Desenhos e Operações	61 (29)	52 (92)	45 (80)	39 (56)	0	0	82 (16)	42 (48)
Desenhos e Fórmulas	13 (0)	0	14 (67)	61 (43)	57 (62)	28 (100)	9 (0)	26 (53)
Operações e Fórmulas	13 (100)	0	0	0	0	0	0	2 (100)

Na resolução das questões na fase I do teste registou-se um forte recurso a desenhos (em 73% das resoluções), como única estratégia de resolução ou combinada com operações ou fórmulas.

A estratégia *desenhos* ocorre na resolução (incompleta correcta) de um aluno na questão 3 e na resolução de 7 alunos na questão 6. Nesta última questão, os alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos sobre o Triângulo de Pascal para obter a resposta.

Questão 6. Na parte central da ilha de Manhattan as ruas formam (aproximadamente) uma quadrícula de ruas horizontais e avenidas verticais, tal como ilustra a figura a seguir apresentada.



Supondo que nunca recua, quantos percursos diferentes podem ser efectuados para chegar ao museu? Explique o seu raciocínio. (Resposta: 35)

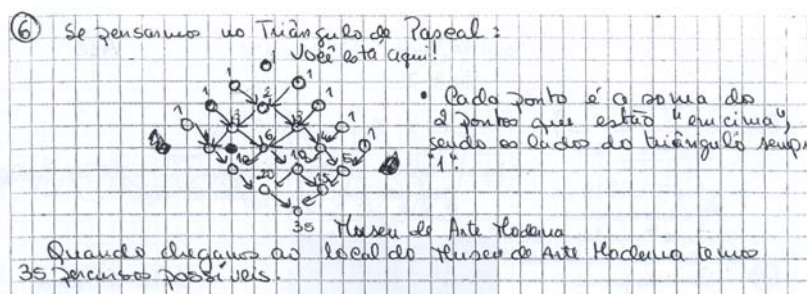


Figura 1. Resolução da questão 6 do teste, na fase I, pelo aluno A_{10} .

Da análise das resoluções dos alunos, resulta que a estratégia *desenhos* ocorre, predominantemente, associada a “traços” (em que cada traço representa um elemento ou um grupo de

elementos), ocorrendo, por vezes, também associada a esquemas (diagrama de árvore) e figuras (Triângulo de Pascal).

Nas resoluções, a enumeração sistemática e o diagrama em árvore ocorrem como estratégias de listagem das situações a serem contadas. Observa-se ainda um cuidado ao nível da organização da informação, procurando reunir toda e apenas a informação necessária para a resolução do problema.

Em 49% das resoluções os alunos recorreram a *operações aritméticas*, como única estratégia de resolução ou combinada com desenhos ou fórmulas, fazendo uso da regra do produto, da regra da soma e da regra do quociente.

Questão 7. Considere todos os números ímpares com quatro algarismos. Quantos desses números têm exactamente dois algarismos pares? Explique o seu raciocínio. (Resposta: 1625)

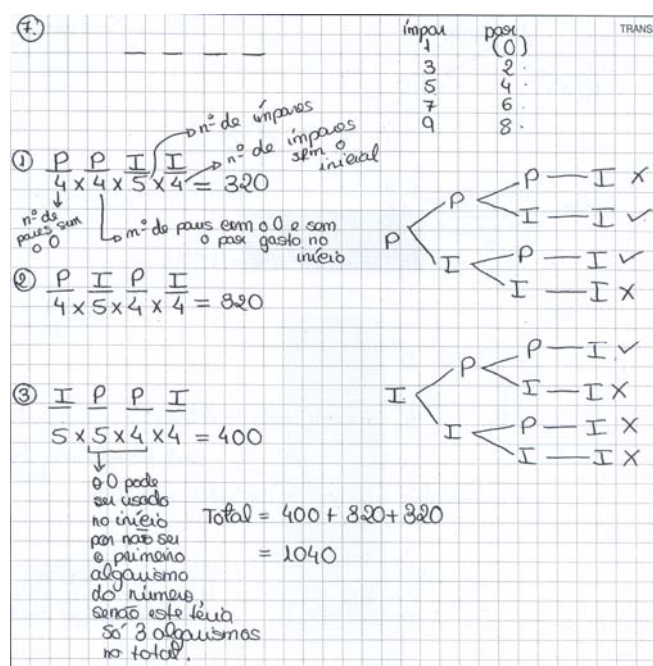


Figura 2. Resolução da questão 7 do teste, na fase I, pelo aluno A_1 .

Da tabela 7 conclui-se que, sempre que as resoluções envolveram fórmulas (48% das resoluções), predominou a fórmula das combinações simples (53% das resoluções). A fórmula dos arranjos com repetição foi a menos utilizada de entre as quatro fórmulas abordadas e ocorreu em apenas 1% das resoluções.

Tabela 7 – Distribuição, em percentagem, das resoluções dos alunos, na fase I do teste, que envolveram a estratégia fórmula

Fórmulas	Questões do teste							Total ($n = 74$)
	1 ($n = 7$)	2 ($n = 9$)	3 ($n = 9$)	4 ($n = 14$)	5 ($n = 22$)	6 ($n = 11$)	7 ($n = 2$)	
C_p^n	29	—	56	7	92	91	50	53
A_p^n	42	100	33	—	4	—	50	23
$\bar{A}_p^n$	—	—	11	—	—	—	—	1
P_n	29	—	—	93	4	9	—	23

No caso da fórmula mais usada, a das combinações, o aluno A_{16} apresentou a seguinte resolução na questão 3:

Questão 3. Sete amigas vão passar o fim-de-semana na casa da avó de uma delas. A avó só tem a sala e o escritório disponíveis para as sete amigas dormirem. De quantas formas diferentes podem ser distribuídas as sete amigas pelos dois espaços disponíveis? Explique o seu raciocínio. (Resposta: 128)

3) Amigas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Sala	Escritório	Hipóteses
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	nenhuma	1 forma
1, 2, 3, 4, 5, 6	7	1 x 7 = 7
1, 2, 3, 4, 5	6, 7	1 x 7 = 7
1, 2, 3, 4	5, 6, 7	1 x 7 = 7
1, 2, 3	4, 5, 6, 7	1 x 7 = 7
1, 2	3, 4, 5, 6, 7	1 x 7 = 7
1	2, 3, 4, 5, 6, 7	1 x 7 = 7
nenhuma	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1 x 7 = 7

$1 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 128$

Figura 3. Resolução da questão 3 do teste, na fase I, pelo aluno A_{16} .

Curiosamente, em 3 resoluções a utilização da fórmula ocorre em jeito de síntese da resolução efectuada através de outra estratégia. A título de exemplo, veja-se a resolução do aluno A_1 na questão 2.

②

5 lugares $\rightarrow$ 3 carros:
 carro da Joana $\rightarrow J$
 carro da Teresa $\rightarrow T$
 carro do Carlos $\rightarrow C$

$5 \times 4 \times 3 = 60 = 5 A_3$
 mº de maneiras de distribuir 5 lugares por 3 carros

5 $\rightarrow$ número de lugares
 A_3 $\rightarrow$ número de carros

A TRANSPORTAR

Figura 4. Resolução da questão 2 do teste, na fase I, pelo aluno A_1 .

4.2. Análise dos erros nas resoluções da fase I do teste

Analizados os erros dos alunos nos 7 problemas de operações combinatórias (num total de 155 resoluções), concluiu-se que o erro mais frequente esteve relacionado com os operandos considerados nas expressões obtidas pelos alunos (em 24% das resoluções), seguindo-se o erro de ordem (em 21% das resoluções).

Tabela 8 – Distribuição, em percentagem, dos erros dos alunos na primeira fase da ficha de avaliação

Erros	Questões do teste							Total (<i>n</i> = 155)
	1 (<i>n</i> = 23)	2 (<i>n</i> = 23)	3 (<i>n</i> = 22)	4 (<i>n</i> = 23)	5 (<i>n</i> = 23)	6 (<i>n</i> = 18)	7 (<i>n</i> = 23)	
Ordem	43	0	23	30	13	0	30	21
Repetição	0	4	27	0	0	0	13	6
Operação combinatória	0	4	36	0	4	0	0	6
Parâmetros	4	0	5	0	0	11	0	3
Operandos	4	0	5	26	52	0	74	24
Operação numérica	0	0	0	0	4	0	0	1
Enumeração	0	0	0	0	0	6	0	1

No erro associado aos *operandos* envolvidos nas expressões obtidas pelos alunos, foram consideradas as contagens: *completas incorrectas*, na medida em que eram contadas todas as configurações pedidas no enunciado mas também eram contabilizadas configurações repetidas, por exemplo a expressão $C_2^{10} \times C_2^7 \times C_1^{13}$ apresentada por 9 alunos na questão 5 (ver abaixo); *incompletas correctas*, na medida em que eram contadas apenas algumas das configurações pedidas no enunciado, por exemplo a expressão $5 \times 5 \times 5 \times 5 + 4 \times 5 \times 5 \times 5$ em vez da expressão $5 \times 5 \times 5 \times 5 + (4 \times 5 \times 5 \times 5) \times 2$, apresentada por 4 alunos na questão 7; e *incompletas incorrectas*, na medida em que eram contadas apenas algumas das configurações pedidas no enunciado e algumas configurações que não eram pedidas no enunciado, por exemplo a expressão $9 \times 10 \times 10 \times 5$ apresentada por 12 alunos na questão 7.

Questão 5. A turma do 12.º A tem 17 alunos dos quais 10 são rapazes. O professor de Matemática pretende indicar cinco para fazerem um trabalho sobre história das probabilidades. De quantas maneiras o pode fazer se o grupo dos cinco alunos tiver pelo menos dois rapazes e pelo menos duas raparigas? Explique o seu raciocínio. (Resposta: 4095)

Quanto ao erro de *ordem* (a ordem era considerada importante quando era irrelevante ou vice-versa), tanto ocorreu associado à totalidade dos elementos de uma configuração como associado apenas a parte dos elementos (por exemplo, $9 \times 3!$ em vez de $9 \times 3! \times 4$, na resolução de 7 alunos da questão 1). Nas questões 1, 3, 4 e 7 ocorrem resoluções (num total de 27) que evidenciam irrelevância da ordem quando a ordem era importante. Nas questões 3 e 5 os alunos consideraram a ordem relevante quando não o era (num total de 5 resoluções).

Na questão 3 a relevância ou não da ordem dependia da forma como os alunos abordavam o problema: a ordem perdia a relevância se a resolução do aluno fosse do tipo da resolução apresentada na figura 3 (listagem das situações a serem contadas seguida da contagem das possibilidades através das combinações simples) ou tornava-se importante caso o aluno efectuasse uma resolução do tipo da resolução apresentada na figura 5 (contagem dos arranjos com repetição).

Nas questões 3 e 7 os alunos não permitem a repetição dos elementos (em 9 resoluções) quando a repetição deveria ser considerada. Contrariamente, na questão 2 um aluno permite, incorrectamente, a repetição dos elementos.

O erro na *operação combinatória* utilizada para resolver o problema ocorreu predominantemente na questão 3 (em 36% das resoluções) e foi pouco expressivo na questão 2 (um aluno conta os $\bar{A}_5^3$ em vez de A_3^5) e na questão 5 (um aluno utiliza a fórmula dos arranjos simples em vez da fórmula das combinações simples).

O erro na identificação dos *parâmetros* da fórmula de uma operação combinatória foi um erro pouco frequente e, para além de ter ocorrido nas questões 1, 3 e 6, foi mais expressivo na questão 6. Este erro ocorreu associado à consideração de parâmetros incorrectos (por exemplo, escrever C_5^7 em vez de C_4^7 na questão 6) ou à troca entre dois parâmetros correctos (por exemplo, escrever $\bar{A}_2^7$ em vez de $\bar{A}_7^2$ na questão 3).

A utilização de uma *operação numérica* incorrecta (adição em vez de multiplicação) ocorreu apenas numa resolução da questão 5 e a *enumeração* sistemática incompleta correcta também ocorreu apenas numa resolução da questão 6, em que o aluno enumera sistematicamente apenas algumas das configurações possíveis.

4.3. Análise do desempenho dos alunos no teste

No gráfico da figura 5 estão representadas as médias das classificações dos alunos a Matemática (média das classificações obtidas no 10.º e 11.º anos de escolaridade) e das classificações obtidas na primeira e segunda fases da ficha de avaliação sobre operações combinatórias.

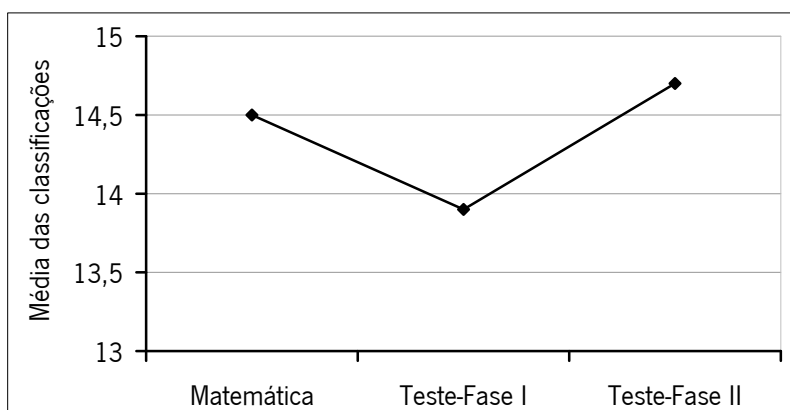


Figura 5. Classificação média da turma em Matemática (10.º e 11.º anos de escolaridade) e nas fases I e II do teste sobre operações combinatórias.

O desempenho dos alunos em Matemática no 10.º e 11.º anos de escolaridade (14,5 de média) revelou-se superior ao desempenho dos alunos nas operações combinatórias na primeira fase (13,9 de média). Em consequência, estes resultados sugerem que as operações combinatórias não constituem um tema fácil da Matemática, embora 52% dos alunos tenham afirmado que as operações combinatórias não são um tema mais difícil do que os outros temas de matemática.

A_{10} – Em situação de teste o nervosismo interfere muito com o raciocínio, que aqui é fundamental. Enquanto que, quando estudamos a mecânica conseguimos sempre ter alguns pontos, nesta [matéria] não.

A melhoria significativa dos resultados na fase II do teste (14,7 de média), o facto de os alunos terem tido apenas 15 minutos para repensarem as resoluções erradas efectuadas na fase I e terem de explicitar de forma clara o seu raciocínio, destacam a importância da solução numérica (recorde-se que

na fase II do teste foram fornecidos aos alunos os valores das soluções) na detecção de falhas de raciocínio na resolução de problemas de Combinatória, até porque é difícil encontrar estratégias de verificação, ou até impossível, como é o caso das situações com resposta de grande dimensão. Este resultado vai de encontro à opinião manifestada pelos alunos no questionário, quando afirmaram que as soluções numéricas fornecidas nas fichas os ajudaram na identificação de falhas de raciocínio.

Tabela 9 – Distribuição das resoluções dos alunos na fase II da ficha de avaliação (frequência absoluta)

Tipo de resolução	Questões do teste						
	1	2	3	4	5	6	7
Correcta e pontuada	4	0	0	5	2	1	4
Correcta não pontuada	7	0	5	4	0	0	2
Incorrecta	1	0	0	1	2	0	3
Total	12	0	5	10	4	1	9

As questões em que os alunos mais investiram na segunda fase do teste foram as questões 1, 4 e 7.

Para além da percentagem de respostas correctas na segunda fase do teste ser de 83%, só foi alterada a pontuação inicial em 39% das resoluções (correctas e pontuadas). No quadro 1 apresentam-se as resoluções da questão 5 pelo aluno A_{19} nas fases I e II do teste, evidenciando o aprofundamento da compreensão do aluno.

Quadro 1 – Resoluções da questão 5 nas fases I e II do teste pelo aluno A_{19}

Fase I	Fase II
${}^7C_2 = 21 \rightarrow 2 \text{ das } 7 \text{ raparigas}$ ${}^{10}C_2 = 45 \rightarrow 2 \text{ dos } 10 \text{ rapazes}$ ${}^{13}C_1 = 13 \rightarrow \text{da resto, mais 1}$ $21 \times 45 \times 13 = 12285$	${}^{10}C_3 \times {}^7C_2 + {}^{10}C_2 \times {}^7C_3 = 4095$ $\frac{3 \text{ dos } 10 \text{ rapazes}}{2 \text{ dos } 7 \text{ raparigas}} \times \frac{2 \text{ dos } 10 \text{ rapazes}}{3 \text{ dos } 7 \text{ raparigas}}$

No entanto, da tabela 9 também se conclui que há uma percentagem significativa de resoluções correctas mas sem que haja alteração da pontuação atribuída na primeira fase, uma vez que não justificaram o raciocínio ou a justificação não evidencia compreensão do que foi feito. É o caso da resolução da questão 1 do aluno A_8 que, da primeira para a segunda resolução, acrescentou à expressão inicial o factor “4”, sem que apresente qualquer justificação. Entendeu-se, assim, que a alteração efectuada não foi mais do que uma tentativa de cálculo para obter a solução correcta.

Questão 1. Uma criança está a brincar com doze cartas: nove cartas numeradas de 1 a 9, um rei, um valete e uma dama. De quantas maneiras pode a criança colocar em fila quatro das doze cartas, com a condição de que são sempre seleccionadas as três figuras? Explique o seu raciocínio. (Resposta: 216)

Quadro 2 – Resoluções da questão 1 pelo aluno A_8 nas fases I e II do teste

Fase I	Fase II
1. $3! \times 4 = 24$	$(3! \times 4) \times 4 = 216$

A estratégia de fornecer as respostas numéricas, na segunda fase do teste, permitiu a 13 alunos melhorarem a sua classificação final: 6 alunos que tinham obtido uma classificação pertencente ao intervalo $[10,14[$ e 7 alunos que tinham obtido uma classificação pertencente ao intervalo $[14,20]$. A classificação obtida na primeira fase do teste manteve-se inalterada na fase II para: os 2 alunos que tinham obtido uma classificação pertencente ao intervalo $[0,10[$, 5 alunos que tinham obtido uma classificação pertencente ao intervalo $[10,14[$ e 3 alunos que tinham obtido uma classificação pertencente ao intervalo $[14,20]$.

Da análise da tabela 10 resulta que as questões que se revelaram mais fáceis para os alunos, na Fase I do teste, foram as questões 1, 2 e 4, reunindo uma maior percentagem da cotação total, variando entre 80,7% e 87%.

Questão 4. Os primeiros-ministros de 7 países, incluindo Portugal, Espanha, França e Itália, sentaram-se numa mesa em fila. De quantas formas diferentes se podem sentar se o português e o espanhol querem ficar juntos, o italiano quer ficar num extremo e o francês quer ficar no outro extremo? Explique o seu raciocínio. (Resposta: 96)

Tabela 10 – Análise do desempenho dos alunos na primeira e segunda fases do teste nas 7 questões sobre operações combinatórias

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Cotação	3	3	3	3	3	3	2
<i>Fase I</i>							
Média	2,59	2,61	1,63	2,42	1,59	2,00	1,04
Desvio padrão	0,55	0,64	1,41	0,75	1,29	1,38	0,63
<i>Fase II</i>							
Média	2,67	2,61	1,63	2,64	1,80	2,13	1,17
Desvio padrão	0,57	0,64	1,41	0,67	1,30	1,32	0,69

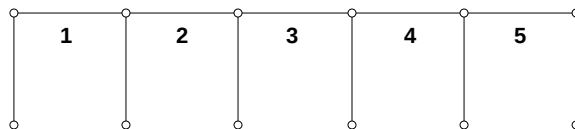
As questões que se revelaram mais difíceis foram as questões 3, 5 e 7, que reuniram uma menor percentagem da cotação total, variando entre 52% e 54,3%. Finalmente, a percentagem da cotação total obtida pelos alunos na questão 6 foi de 66,7%.

Da análise das tabelas 9 e 10 destacam-se os resultados obtidos nas questões 2 e 3, porque: na segunda fase do teste nenhum aluno resolveu novamente a questão 2; de entre as 7 questões, a média das classificações obtidas pelos alunos na questão 2 ($\bar{x} \approx 2,61$ em 3 valores) é a mais elevada; na segunda fase do teste cinco alunos (que resolveram correctamente a questão 2 na primeira fase) resolveram novamente a questão 3, tendo todos apresentado a resposta correcta que não foi pontuada;

e, na totalidade das questões, as médias das classificações obtidas pelos alunos nas questões 3 e 7 ($\bar{x} \approx 1,63$ em 3 valores e $\bar{x} \approx 1,17$ em 2 valores, respectivamente) são as mais baixas.

Nas questões 2 e 3 são apresentados problemas de distribuição de objectos diferentes por caixas diferentes que poderiam ser considerados como enunciados de selecção, em que ambos envolvem apenas uma operação combinatória uma única vez. Na questão 2 (ver abaixo), o problema de distribuição de 3 objectos diferentes (os carros) por 5 caixas diferentes (os lugares de estacionamento) podia ser interpretado como um enunciado de selecção ordenada sem repetição (A_3^5), em que cada pessoa escolhe um dos cinco lugares de estacionamento. Na questão 3 (apresentada antes), o problema de distribuição de 7 objectos diferentes (as amigas) por 2 caixas distintas (os dois compartimentos) podia ser interpretado como um enunciado de selecção, já que é equivalente a escolher sete vezes consecutivas um compartimento dos dois disponíveis ($\bar{A}_7^2$).

Questão 2. A garagem da Joana tem cinco lugares de estacionamento, como mostra a figura.



De quantas maneiras podem a Joana, o Carlos e a Teresa estacionar os seus carros nesta garagem? (Nota. Cada pessoa só tem um carro.)

Explique o seu raciocínio. (Resposta: 60)

Dado que o modelo combinatório era o mesmo nos dois problemas, as dificuldades dos alunos podem estar relacionadas com contexto do problema. Na primeira fase, as respostas incorrectas desses cinco alunos foram: 7^2 , C_2^7 , A_2^7 e a listagem de apenas algumas situações a serem consideradas na resolução da questão. Já na segunda fase, todos esses alunos deram a resposta correcta 2^7 , mas sem apresentarem qualquer justificação ou apresentando uma justificação que não evidencia compreensão do que fizeram.

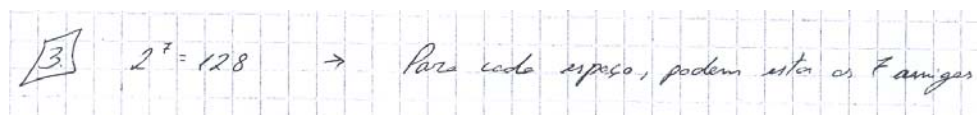


Figura 6. Resolução da questão 3 do teste, na fase II, pelo aluno A_{19} .

5. Conclusões

Os problemas de combinatória apresentados aos alunos desempenharam um papel importante na opinião muito positiva que eles desenvolveram relativamente ao tema, na medida em que a grande maioria referiu ter gostado de resolver os problemas propostos e que os mesmos despertaram o seu interesse pela Combinatória. Todavia, a percentagem de alunos a referirem que os problemas propostos despertaram o seu interesse pela combinatória é ligeiramente maior nos alunos com média inferior a 14 valores do que nos alunos com média superior ou igual a 14 valores.

A maioria dos alunos é da opinião de que as operações combinatórias não são um tema mais difícil do que os outros temas de matemática. De entre os que têm uma opinião contrária, a percentagem de alunos a referirem que o tema é mais difícil dos que os restantes temas é ligeiramente superior nos alunos com melhor desempenho em Matemática.

Quando se pronunciaram acerca da Combinatória, os alunos referem essencialmente a necessidade de raciocínio, a fraca dependência de pré-requisitos e o carácter desafiador dos problemas. Quanto às dificuldades, a maioria refere a interpretação dos problemas, seguindo-se as dificuldades sentidas em

iniciar a resolução de um problema, a definição de estratégias de resolução, a identificação da relevância ou não da ordem e a identificação da possibilidade ou não de repetir os elementos.

A grande maioria dos alunos valorizou a metodologia implementada no ensino e aprendizagem do tema, pois as suas opiniões reflectem a eficácia da sequência de ensino, das tarefas apresentadas, da metodologia de trabalho de grupo e dos grupos constituídos e do papel que lhes foi atribuído na compreensão das operações combinatórias. Na opinião da grande maioria, descobrir por eles próprios a matemática é muito aliciante e sentiam que evoluíam de uma actividade para a seguinte. Ainda na opinião dos alunos, o trabalho de grupo foi importante na aprendizagem das operações combinatórias e na motivação para a aprendizagem do tema, na medida em que permitiu: o surgimento de ideias diferentes; confrontar diferentes resoluções e estratégias; ultrapassar dúvidas e dificuldades; e aumentar o envolvimento nas tarefas propostas. A metodologia adoptada também permitiu aos alunos praticarem as suas competências ao nível da comunicação, já que referiram que a maior dificuldade que enfrentaram no trabalho de grupo foi explicar aos colegas a resolução dos problemas propostos.

Na opinião de todos os alunos, as soluções numéricas, fornecidas nas fichas de trabalho, ajudaram na detecção de falhas de raciocínio. Alguns alunos referiram a necessidade de confirmação da solução obtida para terem “a certeza se o resultado era aquele”. Embora a verificação de um resultado permita aos alunos consolidarem os seus conhecimentos e tornarem-se mais hábeis na resolução de problemas (Polya, 2003), num problema de Combinatória a verificação de uma resposta é uma tarefa particularmente difícil (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

A estratégia de fornecer as soluções numéricas, nas fichas de trabalho e na segunda fase do teste em duas fases, revelou-se eficaz na detecção de falhas de raciocínio, promovendo o questionamento das resoluções efectuadas e proporcionando aos alunos mais uma oportunidade de aprendizagem. Contudo, se a resposta numérica permitiu à maioria dos alunos melhorarem a sua classificação final na ficha de avaliação, a percentagem significativa de resoluções correctas não pontuadas, na segunda fase do teste, reforça a importância de pedir aos alunos que justifiquem o seu raciocínio, permitindo distinguir entre correcção e compreensão do que foi feito, tal como refere English (1998).

Na opinião dos alunos, na resolução das actividades propostas durante a intervenção de ensino, as estratégias de resolução dos problemas apoiaram-se essencialmente em esquemas, desenhos e operações aritméticas, sendo menos frequente o recurso a fórmulas e, quando utilizadas, a predominante foi a das combinações simples.

Na fase I do teste em duas fases, as estratégias de resolução dos problemas combinatórios revelaram-se diversificadas e clarificadoras dos raciocínios envolvidos e, à semelhança das opiniões dos alunos sobre as estratégias utilizadas na resolução dos problemas propostos durante a intervenção de ensino, apoiaram-se essencialmente em desenhos e operações numéricas, não se verificando uma grande valorização das fórmulas, tendo predominado a das combinações simples. Curiosamente, três alunos utilizaram a fórmula como síntese da resolução efectuada.

O forte recurso a simbolização algébrica (por exemplo, iniciais que simbolizam nomes), gráfica (por exemplo, tracinhos que simbolizam as posições dos elementos) e numérica (por exemplo, números que simbolizam pessoas, pessoa 1, 2, ...) teve um papel importante na organização da informação pertinente para a resolução do problema e na esquematização das situações de contagem apresentadas, revelando preocupação dos alunos na interpretação do problema.

Na resolução dos problemas propostos no teste por fases, a enumeração sistemática e o diagrama em árvore, quando utilizados, ocorreram essencialmente como estratégias intermédias, na medida em que foram utilizadas para listar situações a serem contadas. Apenas uma resolução assentou exclusivamente na estratégia de enumeração (sistemática, incompleta e correcta), da qual não resultou uma generalização para a totalidade das possibilidades.

As resoluções dos alunos permitem especular sobre a influência da intervenção de ensino no desenvolvimento das capacidades de raciocínio combinatório e das conexões entre as operações combinatórias, em detrimento de um ensino mais centrado na aplicação das fórmulas, convergindo para

as indicações do programa de Matemática A (ME, 2002) e da opinião de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997a).

Os erros identificados na fase I do teste e referidos por vários autores (e.g., Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997b; Correia, 2008; Esteves, 2001; Silva, Fernandes & Soares, 2004) relacionam-se, predominantemente, com os *operandos* e a *ordem*, seguindo-se a *repetição*, a *operação combinatória*, os *parâmetros*, a *operação numérica* e a *enumeração*. O erro mais frequente ocorreu associado aos operandos considerados nas expressões obtidas, resultando de contagens *incompletas correctas* (de parte das configurações possíveis), *completas incorrectas* (repetição de configurações possíveis) e *incompletas incorrectas* (parte das configurações possíveis e configurações que não eram pedidas no enunciado). A este erro seguiu-se o erro de ordem, predominantemente associado à não consideração da ordem quando ela era importante.

As opiniões dos alunos sobre a intervenção de ensino e os erros identificados enfatizam a importância dos raciocínios indutivo e analógico e da recursão na resolução de problemas, e em especial na resolução de problemas combinatórios (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994), e a importância de retirar o máximo proveito de estratégias como o diagrama de árvore, a enumeração sistemática e a tradução do problema inicial em subproblemas, permitindo ao aluno uma clarificação do significado dos operandos envolvidos nas expressões obtidas e das operações numéricas consideradas por aplicação das regras do produto, da soma e do quociente.

Referências bibliográficas

- Almeida, A. L. & Ferreira, A. C. (s/d). *Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9.º ano do ensino fundamental e 2.º ano do ensino médio*. Consultado em 6 de Dezembro de 2008 em http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebiapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997a). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-276). Amsterdam: IOS Press.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo V. & Godino, J. D. (1997b). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.
- Correia, P. F. (2008). *Raciocínios em Combinatória de alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- DeGuire, L. (1991). Permutations and Combinations: A problem-solving Approach for Middle School Students. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 59-66). Reston, VA: NCTM.
- Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2003). Cooperative problem solving in combinatorics: the inter-relations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 389-403.
- Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2004). Students' Verification Strategies for Combinatorial Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15-36.
- English, L. (1998). Rethinking what it means to understand: the case of combinatorial problem solving. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times, Proceedings of the twenty first annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (vol. 1, pp. 185-193). Brisbane, Australia: Mathematics Education Research.

- English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In J. Graham, (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Esteves, I. (2001). *Investigando os factores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8.ª série do ensino fundamental*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.
- Gardiner, A. (1991). A Cautionary Note. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 10-17). Reston, VA: NCTM.
- Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les Probabilités à l'école*. Paris: CEDIC.
- Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 435-443.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- ME (2002). *Matemática A. Programa do 12.º ano*. Lisboa: Autor.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Tradução espanhola do original de 2000)
- Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da Ideia do Acaso na Criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Publicações Gradiva. (Tradução portuguesa do original de 1945)
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade de Granada, Departamento de Didáctica da Matemática.
- Roa, R., Batanero, C. & Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, 15(2), 5-25.
- Silva, D., Fernandes, J. A. & Soares, A. (2004). Intuições de alunos de 12.º ano em Combinatória: um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Watson, R. (1996). Students' Combinatorial Strategies. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15(1), 27-32.

PALPITES EFECTUADOS POR ALUNOS DO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE EM COMBINATÓRIA

Paulo Ferreira Correia

Escola Secundária/3 de Barcelos

ferreiracorreiapaulo@gmail.com

Resumo. Neste artigo apresentam-se os principais resultados de um trabalho de investigação sobre os palpites efectuados por alunos do 9.º ano em Combinatória.

Para tal foram efectuadas entrevistas individuais, durante as quais foi aplicado um questionário que contemplava questões sobre permutações simples, arranjos com e sem repetição e combinações simples. Em cada questão os alunos faziam um palpite para o número total de possibilidades, seguindo-se a sua resolução.

Em geral, os resultados apontam para o facto de os palpites não se reduzirem a meras estimativas efectuadas ao acaso e que a realização de um palpite, como a antecipação do número de casos possíveis, poderá representar um desafio para os alunos.

Palavras-chave: Operações combinatórias; Palpites; Alunos do 9.º ano de escolaridade.

1. Introdução

A pouca ênfase dada à Combinatória no currículo escolar contrasta com a importância que lhe é atribuída para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos, sobretudo pela sua influência no desenvolvimento do pensamento formal. Por outro lado, a Combinatória deveria representar um domínio privilegiado do ensino da matemática, pela sua aplicação nas mais variadas áreas científicas e por permitir desenvolver técnicas gerais de resolução de problemas, que não se restringem apenas à Combinatória.

As razões referidas e o facto de ser possível ensinar com êxito alguns procedimentos combinatórios a adolescentes de 10-15 anos (Fischbein, Pampu & Mînzat, 1970) realçam a conveniência de aprofundar esta temática nos currículos escolares, designadamente no currículo da disciplina de Matemática. Estes factos destacam ainda a importância de compreender a forma como raciocinam os sujeitos em Combinatória e, portanto, a necessidade de se continuar a investigar o assunto sob o ponto de vista didáctico (Roa & Navarro-Pelayo, s/d).

O conhecimento do professor acerca da forma como raciocinam os alunos, aquando da realização de uma qualquer tarefa, e aqui especificamente de Combinatória, é essencial para que se possa desenvolver um ensino que promova a aprendizagem com compreensão. Segundo Kapur (1970), comparativamente à aplicação de métodos de cálculo, na matemática discreta nem sempre estão disponíveis métodos poderosos de resolução dos problemas e é sempre requerida uma grande capacidade de intervenção criativa.

2. Enquadramento teórico

2.1. Desenvolvimento cognitivo da criança e do adolescente em Combinatória

Relativamente ao desenvolvimento mental da criança e do adolescente, Piaget (1990) define-o como “uma construção contínua” (p. 12), ao longo de estádios de desenvolvimento. Especificamente, no desenvolvimento da lógica, é aos 7-8 anos, em média (idades médias que dependem dos meios sociais e escolares), que a criança consegue chegar à construção de uma lógica e a estruturas operatórias concretas. As operações incidem apenas sobre os próprios objectos que a criança se limita a classificar, ordenar, etc. É por volta dos 11-12 anos que surgem as operações da lógica das proposições (podendo doravante incidir sobre simples hipóteses e não exclusivamente sobre objectos), tornando-se assim

possível o raciocínio hipotético-dedutivo e, portanto, a construção de uma lógica formal. Uma nova estrutura de conjunto se constitui, a “«rede» da lógica das proposições, reconhecível pelo aparecimento das operações combinatórias” (Piaget, 1990, p. 169).

Os trabalhos de Piaget atribuem aos esquemas combinatórios um papel importante relativamente ao desenvolvimento da inteligência formal, tendo identificado etapas no processo evolutivo espontâneo (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

No estudo realizado por Piaget e Inhelder (s/d) foi pedido a crianças que permutassem ou combinassem pequenos conjuntos de fichas coloridas. Os métodos usados nessas operações combinatórias, depois de analisados, levaram os autores a concluir que a criança no estágio pré-operacional só consegue encontrar algumas combinações, permutações e arranjos, ficando a enumeração de todas as possibilidades, de uma forma empírica, para o estágio operacional concreto. Finalmente, é apenas no estágio operacional formal, na “idade de 11-12 anos [que se] assinala um marco (...) na compreensão das operações combinatórias” (Piaget & Inhelder, s/d, p. 282).

Segundo Fischbein (1975), o desenvolvimento da capacidade combinatória realiza-se de uma forma gradual, as combinações a partir dos doze anos, os arranjos pelos treze anos e as permutações não antes de se atingir os catorze anos, mas sem que se desenvolva completamente nesta etapa.

Fischbein (1975), discordando de Piaget, partilha com Bruner a hipótese de que recorrendo a métodos adequados de representação é possível preparar a passagem para o estágio seguinte, bem como acelerar o processo de transição entre estádios. Assim, segundo este autor, a capacidade de resolver problemas combinatórios nem sempre é alcançada no nível das operações formais quando os sujeitos não recebem instrução sobre tais processos, ou seja, a instrução é necessária, pois a criança não adquire de forma espontânea as técnicas combinatórias, nem mesmo no período das operações formais.

Também Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), estudando o efeito do modelo combinatório no raciocínio combinatório de 720 alunos de 14-15 anos de idade, concluíram sobre a importância do ensino na melhoria das capacidades combinatórias destes alunos na resolução dos problemas. O número médio de erros cometidos pelos alunos antes da instrução e depois do ensino do tema foi de 10,59 e de 7,01, respectivamente, o que revela um efeito positivo da instrução na capacidade de resolver problemas de Combinatória.

2.2. Intuições em Combinatória

Na opinião de Bruner (1973), um cuidadoso exame da natureza do pensamento intuitivo poderá ser de grande utilidade para quem tenha a seu cargo a responsabilidade de ensinar e elaborar currículos. Se o objectivo é influenciar favoravelmente as intuições, é necessário identificar os esquemas estruturais e os esquemas específicos que as sustentam (Fischbein & Grossman, 1997).

Segundo Bruner (1973), o formalismo da aprendizagem escolar tem, de certa forma, desvalorizado a intuição, sendo pouco provável que o aluno possa desenvolver ou ter confiança nos seus métodos intuitivos de pensar se nunca os viu a serem utilizados. Logicamente que ao incentivar os alunos a arriscarem um palpite, professor e alunos devem entender que se trata de palpites “educados” (Bruner, 1973, p. 60), o que significa tratar-se de palpites que não são dados ao acaso, implicando a intervenção de algum mecanismo cognitivo (Fischbein & Grossman, 1997).

Interessados em obter informação sobre a relação entre esquemas e intuições em Combinatória, Fischbein e Grossman (1997) desenvolveram uma investigação com crianças e adultos, sem instrução formal do tema, tendo concluído que as intuições são controladas, correcta ou incorrectamente, por esquemas. Assim, parece necessário identificar as bases intuitivas dos alunos relativamente a um problema (Bruner, 1973) e descobrir a forma de desenvolver, nos alunos, as capacidades intuitivas desde os primeiros graus de ensino (Fischbein, 1994).

Para Fischbein (1975) “as intuições são parte integrante da conduta inteligente” (p. 117). Trata-se, portanto, de cognições que intervêm de forma directa nas acções práticas ou mentais em virtude das suas características de imediaticidade, globalidade, capacidade de extrapolação, consistência e auto-

evidência. O autor define *intuições primárias* como cognições que resultam directamente da experiência, sem necessidade de instrução sistemática, e *intuições secundárias* como cognições que têm todas as características das intuições primárias, mas são construídas a partir da educação científica, principalmente na escola (p. 117).

Fischbein e Grossman (1997), assumindo que “não existem intuições puras, *essas intuições são sempre manipuladas e formadas por certos esquemas intelectuais*” (p. 28), investigaram as relações entre intuições e esquemas. Para os autores, a expressão “conhecimento intuitivo” refere-se a uma estimação directa, contrastando com uma solução baseada numa contagem explícita, e “esquema” refere-se a um programa (sequência de passos relativamente flexíveis e adaptáveis a essas circunstâncias) com o objectivo de interpretar uma certa quantidade de informação e preparar e controlar a reacção correspondente. Assim, um esquema expressa “uma forma de pensamento, interpretação e resolução” (p. 30).

Na investigação de Fischbein e Grossman (1997) participaram 253 alunos do 7.º, 9.º e 11.º anos de escolaridade, estudantes universitários e adultos matriculados num curso de literacia Matemática. Nenhum dos participantes tinha recebido, formalmente, instrução em Combinatória.

Foi administrado um questionário constituído por problemas de Combinatória, envolvendo permutações simples de 3, 4 e 5 elementos, arranjos (com e sem repetição) e combinações simples de 3, 4 e 5 elementos tomados 2 a 2. Foi pedido aos alunos para estimarem um valor relativamente a cada problema. Posteriormente, em entrevista, foi solicitada aos sujeitos uma explicação das estimativas, com o intuito de obter uma melhor compreensão dos mecanismos subjacentes às respostas intuitivas.

No que diz respeito aos problemas de permutações simples de três elementos, verificou-se uma tendência geral para sobrestimar ($\bar{x} \approx 7,0$) o número total de possibilidades (6). Relativamente às permutações de 4 e 5 elementos (em que as respostas correctas eram, respectivamente, 24 e 120) verificou-se uma tendência contrária, observando-se uma subestimação ainda mais acentuada no caso das permutações simples de 5 elementos (as médias das estimativas para P_4 e P_5 foram, respectivamente, 19,3 e 48,3).

As justificações apresentadas, para a estimativa efectuada do número total de permutações de 3 elementos, referem-se essencialmente à operação 3×2 (referindo que um dos elementos se mantém fixo e os restantes 2 elementos trocam as suas posições). Segundo os autores, algumas das respostas correctas foram o resultado de mera coincidência, já que as expressões numéricas 3×2 e $3 \times 2 \times 1$ conduzem à mesma resposta. Alguns dos sujeitos fizeram primeiro o palpite 6 e só depois é que tentaram encontrar uma explicação para a sua resposta. A justificação de alguns participantes consistiu na enumeração das 6 configurações possíveis.

Relativamente às permutações de 4 elementos, as justificações incidiram essencialmente nas operações: 4×4 ou 4^2 (referindo que cada um dos 4 elementos pode aparecer em cada uma das quatro posições); 3×4 (referindo que um dos elementos se mantém fixo e os restantes 3 elementos trocam as suas posições); e 2^4 (referindo que, em cada par, os dois elementos podem mudar as suas posições e há, ao todo, 4 elementos).

No que respeita às permutações de 5 elementos, as justificações incidiram essencialmente nas operações 5×5 , 4×5 e 2^5 (referindo explicações semelhantes às apresentadas para as estimativas efectuadas para as permutações de 4 elementos). Houve ainda quem referisse que efectuou a estimativa ao acaso.

Os autores concluíram que, exceptuando alguns casos, as estimativas intuitivas expressaram um esquema intelectual particular, que conduziu a uma sobrestimação ou subestimação do número correcto de possibilidades. Concluíram também que as respostas dos sujeitos têm as suas origens nos esquemas operacionais de Combinatória, e são, normalmente, o resultado de uma operação binária específica (multiplicação ou potenciação).

Quanto aos problemas de arranjos com repetição, as variadas operações binárias usadas levaram a resultados que não se afastaram muito da resposta correcta ($\bar{x} \approx 9,0$, $\bar{x} \approx 16,1$ e $\bar{x} \approx 28,8$, respectivamente, para os $\bar{A}_2^3$, $\bar{A}_2^4$ e $\bar{A}_2^5$).

De uma maneira geral, as médias das estimativas intuitivas sobrestimaram os valores das respostas correctas (que são 9, 16 e 25, respectivamente, para os $\bar{A}_2^3$, $\bar{A}_2^4$ e $\bar{A}_2^5$). Relativamente aos problemas de $\bar{A}_2^3$ e $\bar{A}_2^4$, essa sobrestimação é muito pouco significativa e, contrariamente ao caso das permutações, a sobrestimação para o caso dos $\bar{A}_2^5$ não é tão acentuada, dado que, neste caso, as operações binárias multiplicativas são as requeridas para a obtenção da resposta correcta.

As justificações mais frequentes incidiram, novamente, em operações binárias de multiplicação, nomeadamente: 2×3 , 2^3 e 3^2 para os $\bar{A}_2^3$; 2×4 , 2^4 e 4^2 para os $\bar{A}_2^4$; e 2×5 , 2^5 e 5^2 para os $\bar{A}_2^5$.

Relativamente aos problemas de arranjos simples (em que as respostas correctas são 6, 12 e 20, respectivamente, para os A_2^3 , A_2^4 e A_2^5), registou-se, em quase todos os níveis etários, uma tendência para sobrestimar o número correcto de possibilidades (uma vez que as médias gerais dos palpites foram $\bar{x} \approx 7,5$, $\bar{x} \approx 14,7$ e $\bar{x} \approx 25,1$, respectivamente, para os A_2^3 , A_2^4 e A_2^5).

Alguns dos sujeitos explicaram as estimativas apresentadas para os A_2^3 enumerando três dos possíveis pares de letras e multiplicando por 2. No entanto, as justificações mais frequentes, em todos os níveis etários, consistiram nas operações 2×3 , 2^3 e 3^2 .

Também no caso dos A_2^4 , alguns dos participantes utilizaram um procedimento sistemático para produzir a totalidade das configurações. No entanto, a maioria recorreu, mais uma vez, às operações binárias de multiplicação, nomeadamente, 2×4 , 2^4 e 4^2 . Relativamente aos A_2^5 , os participantes que tinham recorrido, no problema anterior, a um procedimento sistemático para obter uma estimativa para o número total de possibilidades, foram capazes de identificar a lei de formação dos arranjos simples de n elementos tomados 2 a 2. Mas, a maioria justificou as respostas com uma das seguintes operações: 2×5 , 2^5 e 5^2 .

Segundo os autores, a sobrestimação resultou, essencialmente, de os alunos terem utilizado as mesmas operações para resolverem os problemas de arranjos com repetição e os problemas de arranjos simples.

Quanto às combinações simples, os autores observaram uma tendência para sobrestimar o número de possibilidades ainda mais do que no caso dos arranjos simples ($\bar{x} \approx 4,7$, $\bar{x} \approx 9,3$ e $\bar{x} \approx 14,9$, respectivamente, para as C_2^3 , C_2^4 e C_2^5). Na opinião dos autores, isto não significa que os sujeitos tenham simplesmente reproduzido os valores obtidos para os arranjos, uma vez que as médias das estimativas obtidas para as combinações simples foram, na generalidade, inferiores às obtidas para o caso dos arranjos simples.

Na opinião de Fischbein e Grossman (1997), estes resultados apontam para o facto de as estimativas intuitivas não se reduzirem a meros palpites realizados ao acaso.

Depois de compararem os palpites com as explicações dos alunos e com as respostas correctas, os autores concluíram que as estimativas estavam, de algum modo, relacionadas com o número de elementos da população e da amostra. Quanto aos cálculos referidos pelos alunos nas entrevistas, estes incidiram essencialmente em operações binárias multiplicativas (nunca aditivas), que reflectem a influência da natureza multiplicativa das operações combinatórias. Mesmo nos problemas de permutações simples (de 3, 4 e 5 elementos), os sujeitos do estudo recorreram sempre a operações

binárias multiplicativas, comprimindo a operação necessária quando estão envolvidos mais do que dois factores.

Quando os autores pediram aos sujeitos para explicar como estimariam as permutações simples de n elementos ou o número de configurações de dimensão dois, partindo de n elementos dados (e de acordo com uma regra), os sujeitos referiram uma das seguintes operações binárias: n^2 , $n \times (n-1)$, $n \times 2$, 2^n .

A análise das médias das estimativas efectuadas pelos participantes mostrou que a relação entre os seus valores seguia um comportamento semelhante ao que se verifica entre os valores das respostas correctas. Isto é, as estimativas efectuadas para as permutações simples eram superiores às estimativas efectuadas para os arranjos com repetição, que por sua vez eram superiores às efectuadas para os arranjos simples e, estas últimas, eram superiores às estimativas efectuadas para as combinações simples.

Num outro estudo, Fischbein, Pampu e Mînzat (1970) pediram a crianças de idades compreendidas entre os 10 e os 15 anos para estimarem o número de permutações de 3, 4 e 5 elementos. Também neste caso, os autores observaram uma tendência dos alunos para subestimar o número correcto de possibilidades, subestimação que se torna mais significativa à medida que aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória. No entanto, os resultados mostraram que as estimativas melhoravam com a idade.

Na investigação efectuada por Silva, Fernandes e Soares (2004) sobre as intuições em Combinatória de 38 alunos do 12.º ano de escolaridade antes da leccionação do tema, embora não tenha sido utilizada por muitos alunos, a estratégia denominada pelos autores por estimativa subjectiva (uma vez que os alunos se limitavam apenas a indicar um valor para o número total de possibilidades), foi usada ao longo da maioria das questões estudadas. Partindo da hipótese de que os palpites apresentados (por iniciativa dos alunos, uma vez que não lhes foi pedida qualquer estimativa) não foram efectuados completamente ao acaso, os autores compararam a média das estimativas dos alunos (nas questões em que elas surgiram) com o valor da resposta correcta. Relativamente às estimativas subjectivas, concluíram que os alunos subestimaram o número de permutações simples e o número de arranjos simples, nas questões que envolviam um maior número de elementos, e sobestimaram o número de permutações com repetição e o número de combinações simples em qualquer caso.

Da análise dos valores calculados através da estratégia cálculos/fórmulas, os autores concluíram que as respostas erradas resultaram da utilização de operações de multiplicação e de potenciação, que nuns casos conduziram a uma sobrestimação e noutros a uma subestimação do número total de possibilidades.

3. Metodologia

3.1. Caracterização dos participantes

Neste estudo participaram os vinte e sete alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade de uma escola secundária com 3.º ciclo do ensino básico, de um concelho situado a 20 km de Braga, no início do 1.º período do ano lectivo 2006-2007.

Dos 27 participantes, 67% são do sexo masculino e 33% do sexo feminino, sendo a média das idades 14 anos. No que se refere ao aproveitamento na disciplina de Matemática, as médias da turma no 7.º e 8.º anos de escolaridade foram, respectivamente, 3,6 e 3,2, numa escala de 1 a 5.

No que respeita às preferências dos participantes, relativamente à disciplina de Matemática, podemos concluir que se trata de um grupo de alunos em que a maioria diz gostar da disciplina, já que foram 56% os que assinalaram (no questionário) a opção *Gosto*. Foram apenas 4% os que referiram gostar muito de Matemática e 18% os que assinalaram a opção *Não gosto*. Aproximadamente 22% dos participantes referiram que a Matemática lhes era indiferente e nenhum aluno assinalou a opção *Não gosto nada*. No entanto, independentemente das preferências referidas, todos os alunos se revelaram

receptivos e empenhados na realização das tarefas propostas no questionário e nos diálogos orais mantidos aquando da sua resolução.

3.2. Método de recolha de dados

A recolha de dados efectuou-se através de um questionário e de entrevistas individuais. No questionário, por escrito, os alunos forneceram dados pessoais, apresentaram a resolução dos problemas de Combinatória e manifestaram as suas opiniões sobre os problemas; na entrevista, estabeleceu-se um diálogo entre aluno e investigador, a fim de descobrir o raciocínio envolvido na resolução dos problemas de Combinatória, diálogo que foi fomentado por características associadas aos problemas ou pelo convite à apresentação de justificações das resoluções apresentadas (Hunting, 1997).

No sentido de garantir que todos os alunos estivessem em igualdade de circunstâncias, no que respeita ao conhecimento de métodos organizados de contagem, deu-se início às entrevistas após o término das aulas destinadas à leccionação do tema Estatística e Probabilidades. Em média, o tempo de duração das entrevistas foi de 70 minutos.

Pediu-se aos alunos para verbalizarem oralmente, em voz alta, os seus pensamentos, por um lado para se obterem justificações e, por outro lado, para não interromper os alunos a meio de um raciocínio. Sempre que se revelou pertinente, o investigador questionou os alunos com o objectivo de aprofundar a sua compreensão.

Tomando, intencionalmente, como referência o desenho de investigação de Piaget e Inhelder (s/d), o questionário, utilizado neste estudo, incorporava um factor de aprendizagem inerente à ordem de apresentação dos grupos de problemas, à ordem das questões, ao aumento da dimensão da população e, no caso da alínea *d*), ao aumento da dimensão da amostra.

Quanto ao primeiro grupo de problemas, *Dispor amigos em fila para tirar uma fotografia*, este era constituído pelas questões 1a), 1b) e 1c), que consistiam, respectivamente, na contagem das permutações simples P_3 , P_5 e P_n .

No que respeita ao segundo grupo de problemas, *Formar números*, também este era constituído por três questões 2a), 2b) e 2c), que consistiam, respectivamente, na contagem dos arranjos com repetição $\overline{A}_2^3$, $\overline{A}_2^5$ e $\overline{A}_2^n$. Caso o aluno respondesse acertadamente às questões 2a) e 2b), pedia-se para responder à questão 2d), que consistia na contagem dos $\overline{A}_3^5$.

Relativamente ao terceiro grupo de problemas, *Definir bandeiras com barras horizontais*, as questões 3a), 3b) e 3c) consistiam, respectivamente, na contagem dos arranjos simples A_2^3 , A_2^5 e A_2^n . Mais uma vez, e apenas no caso de o aluno responder acertadamente às questões 3a) e 3b), propunha-se a resolução da questão 3d), que consistia na contagem dos arranjos simples A_3^5 .

Finalmente, o quarto grupo de problemas, *Formar grupos de pessoas para participarem num concurso*, constituído por três questões: 4a), 4b) e 4c), em que o objectivo era contar, respectivamente, as combinações simples C_2^3 , C_2^5 e C_2^n e, no caso de o aluno apresentar as respostas correctas para as questões 4a) e 4b), era proposta a resolução da questão 4d), que consistia na contagem das C_3^5 . Apresentava-se um exemplo em todas as questões, excepto nas questões 1c), 2c), 3c) e 4c), uma vez não lhes corresponderem respostas numéricas.

Na definição da ordem de apresentação dos problemas do questionário, teve-se em consideração a ordem utilizada por Fischbein e Grossman (1997) e, no caso específico dos problemas *Formar números*, *Definir bandeiras com barras horizontais* e *Formar grupos de pessoas para participarem num concurso*, atendeu-se ainda ao facto de que $C_2^n = \frac{1}{2} \times A_2^n$ e $A_2^n = \overline{A}_2^n$ n , para $n \geq 2$.

A questão *d)*, para além de fazer parte integrante do questionário, só era apresentada ao aluno caso ele chegasse à resposta correcta nas questões *a)* e *b)*. Não que o interesse se centrasse na obtenção de uma resposta certa ou errada nas questões *a)* e *b)*, mas porque se pretendia averiguar sobre o impacto produzido por um aumento na dimensão da amostra no desempenho dos alunos, pelo que a questão perderia interesse no estudo caso os alunos não respondessem correctamente às questões *a)* e *b)*.

Lida a questão e observado o respectivo exemplo, o aluno tomaria, de forma autónoma, as suas decisões relativamente aos aspectos essenciais do enunciado de cada problema apresentado (pertinência ou não da ordem de disposição dos elementos, possibilidade ou não de repetição dos elementos e dimensões da população e da amostra). Por outro lado, o aluno deveria apontar, em primeiro lugar, o palpite e só depois é que passaria à sua resolução, devendo repetir este procedimento ao longo de todo o questionário.

Neste estudo, o palpite é encarado como uma primeira abordagem de um problema, em que se pretende compreender os esquemas estruturais (Fischbein & Grossman, 1997) que sustentam a resposta antecipada como o resultado de uma intuição e atendendo ao facto de que, segundo Schielack (1991), as actividades de contagem devem ser iniciadas com uma previsão de possíveis resultados.

Pretendia-se também averiguar sobre possíveis influências das resoluções das questões nos palpites e vice-versa, através de uma análise dos palpites efectuados e dos valores calculados pelos alunos.

3.3. Tratamento e análise dos dados

O estudo dos raciocínios utilizados pelos alunos, na resolução dos problemas de Combinatória, foi realizado mediante a análise dos palpites efectuados, das resoluções e valores calculados, das explicações apresentadas, dos comentários realizados e dos comportamentos observados nos alunos e anotados pelo investigador e de um quadro de referência teórico.

Procuraram-se padrões e outros aspectos importantes para o estudo e, paralelamente, foram analisadas as explicações e os comentários efectuados pelos alunos, tendo-se efectuado uma selecção de extractos das entrevistas, com o objectivo de exemplificar e precisar o significado dos dados apresentados e das interpretações efectuadas.

A análise da influência entre os palpites apresentados pelos alunos, os valores calculados e os valores correctos, efectuou-se através: da comparação entre as médias dos palpites, as médias dos valores calculados e os valores correctos; dos comentários efectuados pelos alunos acerca dos palpites efectuados; da comparação entre os comentários efectuados pelos alunos sobre os raciocínios envolvidos na obtenção da estimativa efectuada (essencialmente nos palpites mais frequentes) e as operações numéricas utilizadas para a resolução dos problemas; e da interpretação dos diálogos do aluno com o investigador, que evidenciavam influências entre os valores estimados e os valores calculados.

A sobrestimação e a subestimação do número total de possibilidades foram medidas pela amplitude, em percentagem, entre a média dos palpites e valor correcto.

4. Apresentação dos resultados

4.1. Palpites efectuados para as permutações simples

Na figura 1 comparam-se os valores das respostas correctas com as médias dos palpites efectuados pelos alunos para as P_3 e para as P_5 .

Na realização de um palpite para o número total de possibilidades de permutar três elementos (questão 1a) verificou-se uma tendência para efectuar estimativas de valor ligeiramente superior ao da resposta correcta (6), sendo a média dos palpites 7,8 (com um desvio padrão de 4,4). Os palpites efectuados pelos alunos foram: 3 (4% dos alunos), 4 (7% dos alunos), 5 (7% dos alunos), 6 (37% dos alunos), 9 (37% dos alunos), 12 (4% dos alunos) e 27 (4% dos alunos).

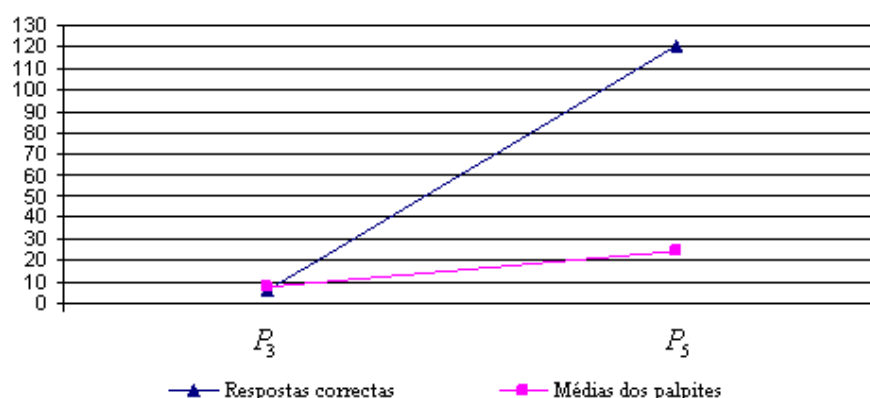


Figura 1. Respostas correctas e médias dos palpites efectuados nas questões 1a) e 1b)

Quanto aos palpites efectuados para as P_5 (questão 1b) constatou-se uma tendência contrária ao que aconteceu para as P_3 , verificando-se uma forte subestimação do número total de possibilidades (120), sendo a média dos palpites 24,9 (com um desvio padrão de 23,9). Os palpites efectuados pelos alunos foram: 5 (4% dos alunos), 6 (4% dos alunos), 10 (22% dos alunos), 15 (4% dos alunos), 20 (29% dos alunos), 25 (25% dos alunos), 55 (4% dos alunos), 75 (4% dos alunos) e 120 (4% dos alunos).

Da análise das médias dos palpites efectuados para as questões 1a) e 1b), conclui-se que os alunos efectuaram palpites para a questão 1b) que, em média, excederam apenas em 17 unidades a média dos palpites efectuados para a questão 1a).

No quadro 1 apresentam-se exemplos de comentários produzidos pelos alunos acerca dos palpites mais frequentes para as P_3 e para as P_5 .

Quadro 1 – Comentários dos alunos sobre os palpites mais frequentes para as P_3 e para as P_5

Questões	Palpites	Comentários
1a)	6	—Pensei em muitas formas diferentes que me vieram [ao pensamento] (aluno A_{16}).
	9	—Três vezes três (...) são os três amigos e as três filas [posições na fila] (aluno A_4). —Foi mesmo à toa! (aluno A_{17}).
1b)	10	—Fui ao dobro (...) foi por aí que eu cheguei aqui ao 10 [2×5] (aluno A_1). —Como era o dobro [na resolução da questão 1a), isto é 2×3], ou seja, [o dobro resulta de fazer] dez sobre cinco [2×5] (aluno A_6).
	20	—O que fiz foi o esquema da árvore de cabeça (aluno A_5). —O número total de amigos [cinco] com quatro alunos que viriam a seguir à primeira [posição da fila] (aluno A_{10}). —Foi à sorte (aluno A_4).
	25	—São cinco [amigos para dispor em fila], multiplica-se por cinco (aluno A_2).

Relativamente ao palpite 6 para a questão 1a), em algumas situações, o palpite coincidiu com a resposta correcta por mera coincidência, uma vez que resultou da multiplicação do número de elementos apresentado no enunciado por dois, isto é 3×2 , fora do contexto das permutações de três elementos, ou seja, $3 \times 2 \times 1$.

O palpite 5 efectuado pelo aluno A_{18} para a questão 1a) resultou de uma enumeração mental de possibilidades pois, tal como o aluno refere, “fiz mais ou menos (...) tentei fazer mais por cabeça”. Já o palpite 5 efectuado pelo aluno A_2 “foi um tiro no escuro”.

Os alunos A_{17} e A_{21} efectuaram, respectivamente, os palpites 75 e 55 para a questão 1b), intuindo que um pequeno aumento no número de elementos para permutar produziria um aumento significativo no tamanho da solução.

Apenas o aluno A_9 efectuou o palpite 120 para a questão 1b), revelando na sua justificação o esquema operacional de combinatória envolvido na determinação das P_5 , quando refere ter feito “ 1×2 , o que deu vezes 3, o que deu vezes 4 e o que deu vezes 5”.

Se assumirmos que o palpite 15, efectuado pelo aluno A_8 na questão 1b), resultou da soma de $5 + 4 + 3 + 2 + 1$, podemos concluir que o aluno intuiu a lei de formação das permutações de 5 elementos, revelando no entanto dificuldades ao nível da regra do produto.

Da observação atenta do investigador durante as entrevistas, concluiu-se que o palpite efectuado por alguns alunos, e com maior incidência na questão 1a) face ao reduzido número de possibilidades de dispor em fila os três amigos, resultou de uma enumeração mental das possibilidades. Isto porque se observou que os alunos apontavam com os dedos para os nomes e, simultaneamente, iam dobrando os dedos da mão com o intuito de registar o número de possibilidades encontradas. Outros referiram mesmo a enumeração como estratégia utilizada na realização do palpite.

Relativamente às operações referidas pelos alunos para efectuarem os palpites para as questões 1a) e 1b) foram: 2×3 e 3×3 na questão 1a) e 2×5 , 5×4 , 5×5 e $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ na questão 1b). Quanto ao palpite 15, na questão 1b), ele foi obtido através do resultado da expressão numérica $5 + 4 + 3 + 2 + 1$.

De uma maneira geral, os palpites efectuados pelos alunos nas questões 1a) e 1b) expressaram o recurso a estratégias que na questão 1a) conduziram a uma sobrestimação da resposta correcta e que na questão 1b) conduziram a palpites, cuja média não ultrapassa 21% do valor correcto. Assim, com o aumento do número de elementos para permutar, verificou-se uma subestimação bastante acentuada da resposta correcta por parte da maioria dos alunos.

Quanto às estratégias utilizadas pelos alunos na questão 1a), concluiu-se que eles recorreram essencialmente a enumeração mental das possibilidades, facilitada pelo reduzido número de elementos envolvidos. Relativamente à questão 1b), o número de elementos envolvidos e o tamanho da solução impeliram os alunos a utilizarem operações, que foram essencialmente binárias e de multiplicação, sozinhas ou combinadas com a enumeração mental de algumas configurações.

O palpite efectuado “à sorte” foi referido nas duas questões, mas com maior incidência na questão 1b). No entanto, da observação do investigador, dos comentários de alguns alunos e dos valores de alguns palpites (frequentes e justificados por outros alunos como o resultado de uma operação), depreende-se que os mesmos não foram efectuados tão “à toa” quanto alguns alunos referiram.

4.2. Palpites efectuados para os arranjos com repetição

Na figura 2 comparam-se os valores das respostas correctas com as médias dos palpites efectuados pelos alunos para as $\bar{A}_3^3$, $\bar{A}_2^5$ e $\bar{A}_3^5$.

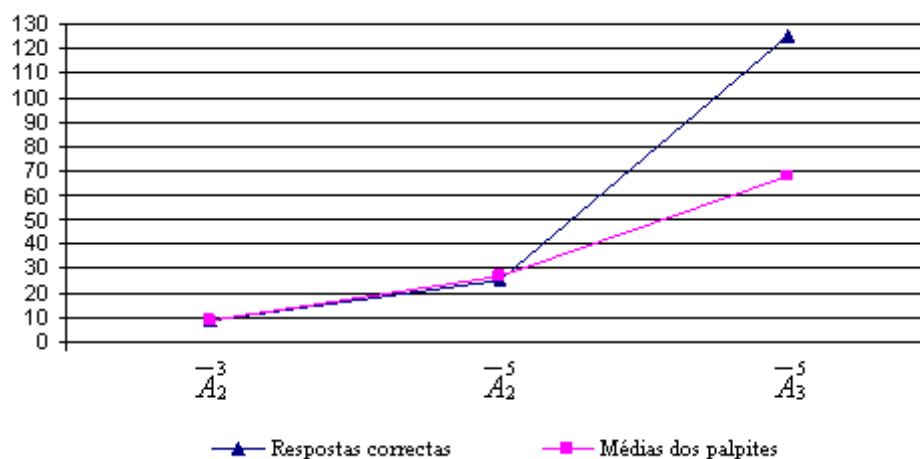


Figura 2. Respostas correctas e médias dos palpites efectuados nas questões 2a), 2b) e 2d)

Relativamente à questão 2a), e pretendendo-se que os alunos efectuassem um palpite para o número total de possibilidades para os arranjos com repetição de três elementos tomados dois a dois, verificou-se uma tendência para efectuar estimativas de valor muito próximo da resposta correcta (9), sendo a média dos palpites 9,1 (com um desvio padrão de 6,9). Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 2a) foram: 2 (4% dos alunos), 4 (4% dos alunos), 5 (4% dos alunos), 6 (14% dos alunos), 7 (4% dos alunos), 8 (4% dos alunos), 9 (62% dos alunos) e 42 (4% dos alunos).

Quanto aos palpites efectuados na questão 2b), para o número total de possibilidades de formar números com dois algarismos escolhidos de entre cinco algarismos dados, constatou-se uma tendência para sobrestimar ligeiramente o número total de possibilidades (25), sendo a média dos palpites 27,1 (com um desvio padrão de 20,8). Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 2b) foram: 10 (8% dos alunos), 15 (4% dos alunos), 19 (4% dos alunos), 20 (11% dos alunos), 25 (65% dos alunos), 40 (4% dos alunos) e 125 (4% dos alunos).

No que respeita aos palpites efectuados na questão 2d), para o número total de possibilidades de formar números com três algarismos de entre os cinco algarismos dados, constatou-se uma tendência para subestimar de forma acentuada o número total de possibilidades (125), sendo a média dos palpites 68,0 (com um desvio padrão de 39,9), média que ultrapassa em pouco metade do valor da resposta correcta. Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 2d) foram: 15 (4% dos alunos), 25 (18% dos alunos), 30 (4% dos alunos), 40 (9% dos alunos), 50 (18% dos alunos), 65 (4% dos alunos), 75 (13% dos alunos), 100 (4% dos alunos) e 125 (26% dos alunos).

No quadro 2 apresentam-se exemplos de comentários produzidos pelos alunos acerca dos palpites mais frequentes para os $\bar{A}_2^3$, $\bar{A}_2^5$ e $\bar{A}_3^5$.

O aluno A_9 referiu ter recorrido ao raciocínio utilizado no problema um (de permutações simples) para obter o palpite 125 na questão 2b), o que obviamente conduziu a um palpite muito afastado do valor correcto.

O palpite 20 parece ter resultado da multiplicação 5×4 (assumindo que não era possível repetir os algarismos) e o palpite 10 da multiplicação 5×2 (isto é, da multiplicação do número de algarismos disponíveis pela dimensão da amostra).

Como resultado de uma tentativa de enumeração mental das possibilidades, o aluno A_{14} efectuou o palpite 15, referindo que “dava o 123, 124 e 125. Depois fiz o 3 com cada um deles. Dava quinze [possibilidades no total]”.

Quadro 2 – Comentários dos alunos sobre os palpites mais frequentes para os $\bar{A}_2^3$, $\bar{A}_2^5$ e $\bar{A}_3^5$

Questões	Palpites	Comentários
2a)	6	– Posso passar os números em que eu pensei? (aluno A_{11}). – Fiz de cabeça (aluno A_{20}). – Este exercício é igual ao anterior [referindo-se às P_3]. Também tem três. Mas a resposta é igual!
	9	– Acho que dá nove. Como aqui no exemplo posso pôr 11, se somar isto tudo dá nove (aluno A_7). –Porque aqui pus três vezes três, nove (aluno A_4).
2b)	20	–Para o 20 pus à sorte (aluno A_4).
	25	–Mentalmente juntei o 1 com o 1 que deu 11. Depois vi que eram cinco números. Como eram cinco números fiz os cinco números que há pelos cinco (aluno A_{23}). –Eu fiz cinco vezes cinco (...), um cinco são os algarismos que temos aqui e o outro cinco é que a cada algarismo destes podemos adicionar [associar] cinco algarismos (aluno A_6).
2d)	25	– É a mesma coisa [que na questão 2b)], só muda [o número de] algarismos [que passa de dois para três] (aluno A_{16}). –[Só considere] dois algarismos, o terceiro ficava sempre igual. Mas tenho que mudar os três. (...). Esqueci-me do terceiro algarismo". (aluno A_8).
	50	–Aqui talvez quarenta e seis... [pausa], mas... [pausa] talvez 50. Não sei! (aluno A_1). –Foi praticamente à toa (aluno A_{17}).
	75	–Cinco algarismos vezes cinco que dá vinte e cinco e [depois] vinte e cinco por três (aluno A_9).
	125	–Vamos ter 1, 2, 3, 4 e 5. No outro vamos ter outra vez 1, 2, 3, 4 e 5. E em cada um deles vamos ter cinco. Então cinco vezes cinco vezes cinco, cento e vinte e cinco. (aluno A_5).

Quanto ao palpite 100 foi justificado pelo aluno A_7 da seguinte forma:

No meu palpite, com o número 1 consegue-se fazer vinte vezes um número com três algarismos [enumera alguns oralmente]. Depois o 2 dá mais vinte vezes, o 3 mais vinte vezes, o 4 mais vinte vezes e o 5 mais vinte vezes.

O número elevado de possibilidades para o palpite da questão 2d) foi a principal causa das incertezas dos alunos quanto ao valor estimado. Repare-se no comentário do aluno A_3 que duvidou do número total de possibilidades.

Acho que é um valor muito grande. Ora, cinco ao cubo dá cento e vinte e cinco. Não pode ser tão ... [Pausa]. Mas é enorme, este número! Acho que é um palpite que não dá! Não dá para fazer tantas vezes!

Relativamente ao aluno A_{24} que efectuou o palpite 40, referiu que não tinha “a mínima ideia de como é que estava a fazer. É mesmo à toa”.

Quanto às operações referidas pelos alunos para efectuarem os palpites para as questões 2a), 2b) e 2d) foram: 2×3 e 3×3 na questão 2a), 5×5 na questão 2b) e 5×5 , $5 \times 5 \times 3$, $20 + 20 + 20 + 20 + 20$, $5 \times 5 \times 5$ e 5^3 na questão 2d). No entanto, depreende-se que também poderiam ter sido utilizadas as operações 2×5 e 5×4 na questão 2b) e 5×3 na questão 2d).

As operações binárias de multiplicação utilizadas pelos alunos conduziram a palpites próximos das respostas correctas nas questões 2a) e 2b), uma vez que estas são as operações requeridas para a obtenção do número total de possibilidades de arranjar com repetição n objectos tomados 2 a 2. Já na questão 2d), as operações utilizadas conduziram a palpites muito inferiores ao valor da resposta correcta. Assim, com o aumento do número de elementos envolvidos na operação, verificou-se um afastamento da média dos palpites relativamente à resposta correcta, verificando-se na questão 2d) uma subestimação acentuada, cuja média dos palpites em pouco ultrapassa metade do valor correcto.

Na questão 2a), a estratégia de enumeração mental das possibilidades conduziu a palpites próximos da resposta correcta, uma vez que o número reduzido de configurações possíveis facilitou o processo de contagem. Já na questão 2b) as multiplicações binárias foram a estratégia predominante, para além de numa fase inicial os alunos fazerem uso da enumeração mental. Quanto à questão 2d), alguns alunos voltaram a referir que os palpites foram efectuados “à toa”. No entanto, depreende-se que a maioria desses palpites efectuados “à sorte” ocorreu após uma tentativa de enumeração mental de algumas possibilidades e da procura de uma operação que se ajustasse à percepção dos alunos sobre o número de configurações possíveis. O elevado número de possibilidades conduziu a palpites bastante afastados da resposta correcta.

4.3. Palpites efectuados para os arranjos simples

Na figura 3 comparam-se os valores das respostas correctas com as médias dos palpites efectuados pelos alunos para as A_2^3 , A_2^5 e A_3^5 .

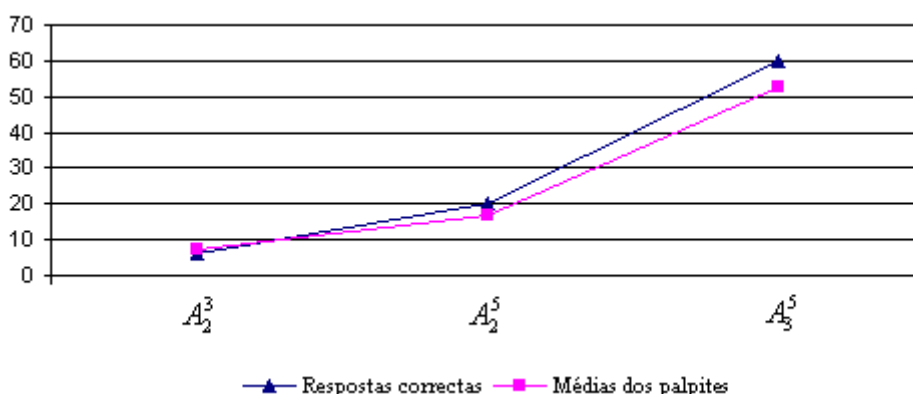


Figura 3. Respostas correctas e médias dos palpites efectuados nas questões 3a), 3b) e 3d)

Relativamente à questão 3a), e pretendendo-se que os alunos fizessem um palpite do número total de possibilidades de definir bandeiras com duas barras horizontais de cores diferentes escolhidas de

entre três cores dadas, verificou-se uma tendência para efectuar estimativas ligeiramente superiores ao valor da resposta correcta (6), uma vez que a média dos palpites é 7,3 (com um desvio padrão de 3,4). Os palpites efectuados pelos alunos na questão 3a) foram: 4 (7% dos alunos), 5 (4% dos alunos), 6 (59% dos alunos), 8 (4% dos alunos), 9 (19% dos alunos) e 18 (7% dos alunos).

Quanto aos palpites efectuados na questão 3b), para o número total de possibilidades de definir bandeiras com duas barras horizontais de cores diferentes escolhidas de entre cinco cores, constatou-se uma tendência para subestimar ligeiramente o número total de possibilidades (20), uma vez que a média dos palpites é 16,7 com um desvio padrão de 6,1. Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 3b) foram: 6 (4% dos alunos), 10 (30% dos alunos), 12 (7% dos alunos), 16 (4% dos alunos), 20 (33% dos alunos), 21 (4% dos alunos) e 25 (18% dos alunos).

Quanto aos palpites efectuados na questão 3d), para o número total de possibilidades de definir bandeiras com três barras horizontais de cores diferentes escolhidas de entre cinco cores, constatou-se uma tendência para subestimar ligeiramente o número total de possibilidades (60), uma vez que a média dos palpites é 54,5 com um desvio padrão de 32,8. Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 3d) foram: 10 (5% dos alunos), 12 (5% dos alunos), 15 (5% dos alunos), 20 (5% dos alunos), 25 (12% dos alunos), 38 (5% dos alunos), 60 (43% dos alunos), 75 (5% dos alunos), 100 (5% dos alunos), 110 (5% dos alunos) e 125 (5% dos alunos).

No quadro 3 apresentam-se exemplos de comentários produzidos pelos alunos acerca dos palpites mais frequentes para os A_2^3 , A_2^5 e A_3^5 .

Quadro 3 – Comentários dos alunos sobre os palpites mais frequentes para os A_2^3 , A_2^5 e A_3^5

Questões	Palpites	Comentários
3a)	6	—O azul só podemos pôr com o preto e com o verde (...) [e assim sucessivamente] (aluno A_6). —Aqui o palpite [questão 3a)] é multiplicar as duas cores [duas barras horizontais] pelas três cores que há (aluno A_2). — Eu pus que era 6 porque cada uma dessas cores vai ser... [pausa] se a primeira for azul, por exemplo, a segunda pode ser preto ou verde. Ou seja, dois vezes três (aluno A_5).
	9	— É 9 porque é 3 vezes 3 (aluno A_4).
3b)	10	—Aqui o palpite é multiplicar as duas barras pelas cores que há (aluno A_2). —Pensei um bocadinho e fui pondo [enumerando mentalmente configurações possíveis] (aluno A_{19}).
	20	— Eu pus 20 porque se a primeira for azul, por exemplo, a segunda pode ser branca, castanha, preta ou verde. Ou seja, cinco vezes quatro (aluno A_5).
	25	— É 25 porque é 5 vezes 5 (aluno A_4).
3d)	60	—Como são cores diferentes, fiz cinco vezes quatro, que dá vinte. Não se pode repetir as cores. Depois fiz vinte vezes três, que é o número [de possibilidades] e que dá sessenta (aluno A_9).

O palpite 18 efectuado na questão 3a), para além de reflectir uma interpretação incorrecta do problema, reflecte também falta de compreensão da regra do produto. Isto porque se depreende que os alunos A_{15} e A_{25} entenderam que o produto de 3×3 (permitindo a repetição das cores) contemplaria apenas metade das possibilidades, isto é, não incluiria as trocas na ordem dos elementos de cada configuração e, portanto, haveria a necessidade de duplicar o resultado anterior. Desta forma, o valor do palpite seria o resultado de $(3 \times 3) \times 2$.

Mesmo partindo de um raciocínio incongruente com aquele que está subjacente à operação combinatória em questão, a realidade é que a multiplicação efectuada para a obtenção do palpite 6 para a questão 3a) (2×3) conduz, por mera coincidência, à resposta correcta, já que $A_2^3 = 2 \times 3 = 6$. Contudo, no que respeita ao palpite da questão 3b), este raciocínio ($2 \times 5 = 10$) conduz a um valor diferente da resposta correcta, uma vez que $A_2^5 = 5 \times 4 = 20$.

Assim, alguns dos palpites 6 e o palpite 10 representam os produtos das multiplicações 3×2 e 5×2 , em que o primeiro factor representa o número de cores apresentadas em cada uma das questões e o segundo factor representa o número de barras horizontais das bandeiras.

O aluno A_{17} acerca do palpite 100 efectuado para a questão 3d) referiu que o mesmo foi efectuado “completamente à toa”.

O palpite 60 também poderia representar o produto de $(5 \times 4) \times 3$, em que o factor 3 representaria o número de barras da bandeira, conduzindo ao valor da resposta correcta por mera coincidência. Esta possibilidade é colocada face à utilização de um raciocínio semelhante na realização do palpite para a questão 2d) ($5 \times 5 \times 3$).

Quanto ao palpite 12, efectuado pelo aluno A_7 para a questão 3d), poderia representar a soma de $5 + 4 + 3$, onde o erro reflectiria a falta de compreensão da regra do produto. O palpite 15, efectuado pelo aluno A_{25} , poderia representar o produto de 5×3 , ou seja, o resultado da multiplicação do número de cores disponíveis pelo número de barras da bandeira.

Relativamente às operações referidas pelos alunos para efectuarem os palpites para as questões 3a), 3b) e 3d) foram: 3×2 e 3×3 na questão 3a); 2×5 , 5×4 e 5×5 na questão 3b) e $5 \times 4 \times 3$ na questão 3d). No entanto, depreende-se que também poderiam ter sido utilizadas as operações $3 \times 3 \times 2$ na questão 3a), $5 + 4 + 3$ e 5×3 na questão 3d).

As operações efectuadas pelos alunos conduziram a médias dos palpites não muito afastadas das respostas correctas nas questões 3a), 3b) e 3d), uma vez que estas são as operações requeridas para a obtenção do número total de possibilidades de arranjar sem repetição n objectos, tomados 2 a 2 e tomados 3 a 3.

Da subestimação pouco acentuada que se verificou para a questão 3d), conclui-se que o impacto produzido pelo aumento da dimensão da amostra sobre o grau de dificuldade na realização de um palpite para o número total de possibilidades não foi tão significativo quanto nas questões 1b) e 2d).

Na questão 3a), mais uma vez a estratégia de enumeração mental das possibilidades conduziu a palpites próximos da resposta correcta, uma vez que o número reduzido de configurações possíveis facilitou o processo de contagem. Já na questão 3b) as multiplicações binárias foram a estratégia predominante, para além de numa fase inicial os alunos fazerem uso da enumeração mental. Quanto à questão 3d), verificou-se uma redução do número de alunos a comentarem que o palpite foi feito “à sorte”, depreendendo-se que à medida que foram avançando na resolução das questões, foram utilizando operações mais ou menos relacionadas com o procedimento correcto.

À medida que aumentava o número de elementos envolvidos no problema e consequentemente a dimensão da solução, de uma maneira geral, os alunos começavam por efectuar uma enumeração

mental de algumas configurações com o intuito de procurarem uma operação que se ajustasse à percepção que tinham desenvolvido relativamente ao número de configurações possíveis.

4.4. Palpites efectuados para as combinações simples

Na figura 4 comparam-se os valores das respostas correctas com as médias dos palpites efectuados pelos alunos para as C_2^3 , C_2^5 e C_3^5 .

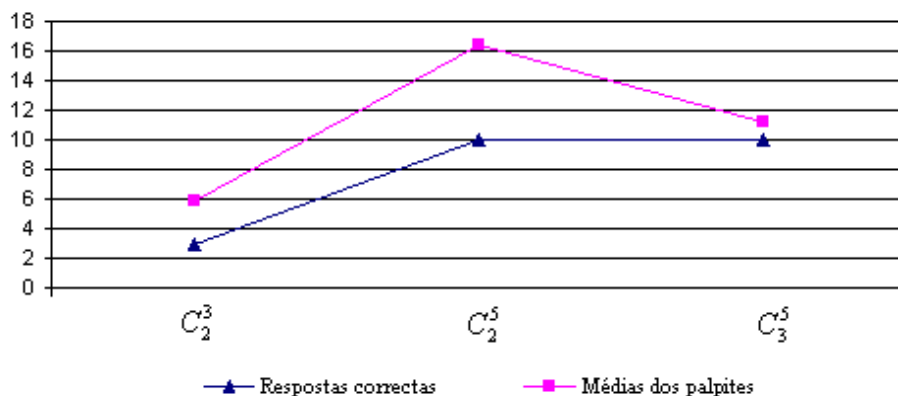


Figura 4. Respostas correctas e médias dos palpites efectuados nas questões 4a), 4b) e 4d)

Relativamente à questão 4a), e pretendendo-se que os alunos efectuassem um palpite para o número total de possibilidades para as combinações simples de três elementos tomados dois a dois, verificou-se uma tendência para sobrestimar de forma significativa a resposta correcta (3), uma vez que a média dos palpites é 5,9 (um desvio padrão de 1,4). Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 4a) foram: 3 (7% dos alunos), 6 (75% dos alunos), 9 (7% dos alunos), 4 (7% dos alunos) e 8 (4% dos alunos).

Relativamente à questão 4b), e pretendendo-se que os alunos efectuassem um palpite para o número total de possibilidades para as combinações simples de cinco elementos tomados dois a dois, verificou-se uma tendência para sobrestimar a resposta correcta (10), uma vez que a média dos palpites é 16,4 com um desvio padrão bastante elevado de 10,3. Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 4b) foram: 5 (4% dos alunos), 6 (4% dos alunos), 8 (4% dos alunos), 10 (33% dos alunos), 13 (4% dos alunos), 20 (47% dos alunos) e 60 (4% dos alunos).

Relativamente à questão 4d), e pretendendo-se que os alunos efectuassem um palpite para o número total de possibilidades para as combinações simples de cinco elementos tomados três a três, verificou-se uma tendência para sobrestimar ligeiramente a resposta correcta (10), uma vez que a média dos palpites é 11,2 (com um desvio padrão de 5,2). No entanto, esta sobrestimação revelou-se menos acentuada do que a verificada para as questões 4a) e 4b). Repare-se, no entanto, que a resposta correcta para as questões 4b) e 4d) é a mesma. Refira-se ainda que apenas cinco alunos efectuaram um palpite na questão 4d), o que significa que apenas estes alunos responderam correctamente às questões 4a) e 4b). Os palpites efectuados pelos alunos para a questão 4d) foram: 5 (20% dos alunos), 6 (20% dos alunos) e 15 (60% dos alunos).

No quadro 4 apresentam-se exemplos de comentários produzidos pelos alunos acerca dos palpites mais frequentes para as C_2^3 , C_2^5 e C_3^5 .

Quadro 4 – Comentários dos alunos sobre os palpites mais frequentes para as C_2^3 , C_2^5 e C_3^5

Questões	Palpites	Comentários
4a)	6	—Como eram poucas pessoas, eu fiz de cabeça (aluno A_6). —Era o número de pessoas vezes as restantes (...) Escolhi o Abel e depois só faltavam duas (aluno A_9). —3 é o número de pessoas, vezes 2 que é o número de pessoas que vão participar no concurso (aluno A_{24}).
4b)	10	—É Carla - Abel, Carla - David, ... (aluno A_8). —5 é o número de pessoas e 2 é o número de pessoas que vão ser escolhidas (aluno A_{24}).
	20	—Pegava nas 5 pessoas e fazia vezes 4 (...) porque não podia escolher outra vez a mesma (aluno A_9). —4 com o Abel, 4 com a Berta, 4 com a Carla, 4 com o David e 4 com a Eva. Somando tudo dá 20 (aluno A_2).

Nenhum aluno, de entre os cinco que efectuaram um palpite para a questão 4d), comentou o palpite, tendo-se observado apenas no aluno A_7 (que efectuou o palpite 6) um comportamento que evidenciava a enumeração mental de configurações.

Mais uma vez, da observação atenta do investigador e dos comentários efectuados pelos alunos acerca dos palpites, concluiu-se que os palpites indicados por alguns alunos foram o resultado de uma enumeração mental das possibilidades, mesmo porque a dimensão reduzida da resposta era favorável à utilização desta estratégia.

Relativamente às operações referidas pelos alunos para efectuarem os palpites para as questões 4a) e 4b) foram: 3×2 na questão 4a) e 5×2 , 5×4 e $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ na questão 4b). No entanto, depreende-se que também poderiam ter sido utilizadas as operações 3×3 na questão 4a) e 5×3 na questão 4d).

Relativamente às operações utilizadas pelos alunos para efectuarem um palpite nas questões 4a) e 4b), estas foram essencialmente as mesmas que as utilizadas para efectuarem um palpite para as questões 3a) e 3b). Em consequência, nos problemas de combinações simples verificou-se uma tendência para sobrestimar o número total de possibilidades de formar grupos de pessoas para participarem num concurso, nas questões 4a), 4b) e 4d).

Relativamente às questões 4a) e 4b), as operações numéricas utilizadas pelos alunos para fazerem um palpite para o número total de possibilidades foram basicamente as mesmas que as aplicadas nas questões 3a) e 3b). Se a média dos palpites da questão 4a) baixou relativamente à média dos palpites da questão 3a), o mesmo não se verificou em relação às questões 4b) e 3b), que foram praticamente iguais. Regra geral, as estratégias utilizadas pelos alunos e o entendimento efectuado acerca dos problemas de combinações simples não teve em consideração que $C_2^n = \frac{1}{2} A_2^n$.

A questão 4d) foi a única questão para a qual nenhum aluno efectuou um palpite coincidente com a resposta correcta e nenhum aluno referiu ter efectuado um palpite “à toa” para as questões 4a), 4b) e 4d).

De entre os cinco alunos que apresentaram um palpite para a questão 4d), nenhum foi capaz de intuir que o número de formas possíveis de escolher duas pessoas de entre cinco para participarem num concurso é igual ao número de maneiras de escolher as três pessoas de entre as cinco dadas que não participariam no concurso, isto é, que $C_2^5 = C_3^5$ dado que $C_k^n = C_{n-k}^n$, para $n \geq k$.

4.5. Palpites, valores calculados e valores correctos

Os valores calculados foram obtidos recorrendo a enumeração, diagramas em árvore e operações numéricas (predominando a multiplicação) ou então conjugando mais do que uma destas estratégias.

A estratégia operação, nos problemas de permutações simples, foi usada apenas na resolução da questão 1b). A única operação numérica utilizada foi a de multiplicação reduzida a dois factores ou consistindo em multiplicações sucessivas, por aplicação da regra do produto, no caso das respostas correctas. Na resolução das questões de arranjos simples e combinações simples, sempre que foi utilizada apenas a estratégia operação, esta foi sempre de multiplicação.

As expressões algébricas apresentadas para as questões 1c), 2c), 3c) e 4c) foram: $n \times (n-1)$ (ou $n \times n - n$) que foi a resposta de 2 alunos na questão 1c), 9 alunos na questão 3c) e 5 alunos na questão 4c); $n \times n$ (ou n^2) que foi a resposta de 2 alunos na questão 1c) e de 14 alunos na questão 2c); $2n$ que foi a resposta de 4 alunos na questão 2c), 6 alunos na questão 3c) e 6 alunos na questão 4c); $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots$ que foi a resposta de 3 alunos na questão 1c); $\frac{n \times (n-1)}{2}$ que foi a resposta de 1 aluno na questão 4c); e $2n^2$, que foi a resposta de 1 aluno na questão 2c).

Na tabela 1 podem observar-se as discrepâncias entre as médias dos palpites, as médias dos valores calculados e os valores correctos observadas em todas as questões.

Tabela 1 – Médias dos palpites, médias dos valores calculados e valores correctos

Operação combinatória	Valores correctos			Médias dos palpites ($\bar{x}_p$) e médias dos valores calculados ($\bar{x}_c$)					
				a)			b)		
	a)	b)	d)	$\bar{x}_p$	$\bar{x}_c$	$\bar{x}_p$	$\bar{x}_c$	$\bar{x}_p$	$\bar{x}_c$
1. Permutações simples	6	120	–	7,8	6,7	24,9	52,7	–	–
2. Arranjos com repetição	9	25	125	9,1	9,2	27,1	25,6	68,0	115,0
3. Arranjos simples	6	20	60	7,3	5,9	16,7	18,2	54,5	56,4
4. Combinações simples	3	10	10	5,9	5,0	16,4	17,4	11,2	10,7

Da tabela 1 resulta que as médias dos palpites e dos valores calculados da questão 4d) se aproximam mais do número total de possibilidades. Por outro lado, observa-se que as médias dos palpites e dos valores calculados para a questão 4d) são inferiores às da questão 4b). Este facto sugere que os alunos que apresentaram um palpite para a questão 4d), inferior ao palpite efectuado para a questão 4b) (3 alunos em 5), possam ter intuído que, mantendo constante o número de elementos disponíveis para combinar, um aumento da dimensão da amostra resultaria num menor número de grupos.

Para além das operações utilizadas pelos alunos, para efectuarem um palpite para o número total de possibilidades, conduzirem a subestimações ou sobrestimações, as médias dos palpites efectuados

para os problemas de arranjos com repetição, arranjos simples e combinações simples verificam a mesma relação de ordem dos valores correctos, isto é, $\bar{A}_2^3 > A_2^3 > C_2^3$; $\bar{A}_2^5 > A_2^5 > C_2^5$; e $\bar{A}_3^5 > A_3^5 > C_3^5$.

Na tabela 2 apresenta-se a variação (sobrestimação e subestimação) das médias dos palpites e das médias dos valores calculados em relação aos valores correctos observada em todas as questões.

Tabela 2 – Percentagem de subestimação/sobrestimação do número total de possibilidades

Operação combinatória	Valores correctos			Percentagem de subestimação (-) / sobrestimação (+) nas médias dos palpites (<i>A</i>) e nas médias dos valores calculados (<i>C</i>)					
				<i>a)</i>		<i>b)</i>		<i>d)</i>	
	<i>a)</i>	<i>b)</i>	<i>d)</i>	<i>P</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>C</i>
1. Permutações simples	6	120	–	+30	+12	-79	-56	–	–
2. Arranjos com repetição	9	25	125	+1	+2	+8	+2	-46	-8
3. Arranjos simples	6	20	60	+22	-2	-17	-9	-9	-6
4. Combinações simples	3	10	10	+97	+67	+64	+74	+12	+7

Da análise da tabela 2 resulta que as médias dos palpites e as médias dos valores calculados seguem um comportamento semelhante, isto é, observa-se uma tendência para subestimar/subcalcular ou sobrestimar/sobrecalcular o número total de possibilidades.

Concluiu-se também que os alunos não perceberam o efeito produzido pelo aumento do número de elementos na dimensão da solução das questões 1*b*) (120 possibilidades) e 2*d*) (125 possibilidades), uma vez que se verifica uma subestimação bastante acentuada. Nestes casos, a dimensão da solução revelou-se um factor responsável pela forte subestimação verificada. No caso das permutações de 5 elementos a subestimação parece ser o reflexo da utilização de operações de multiplicação reduzidas a dois factores, quando no procedimento correcto estão envolvidos mais factores. No caso dos arranjos com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3 a subestimação parece estar relacionada com a redução do número de factores ou com os factores que foram considerados pelos alunos como compensadores do aumento da dimensão da amostra de 2 para 3. Contudo, nas questões 2*a*) e 2*b*) a sobrestimação é pouco acentuada, uma vez que nestes casos as operações binárias de multiplicação ou de potenciação são as requeridas para a obtenção da resposta correcta.

A sobrestimação na questão 3*a*) resultou, essencialmente, de uma parte dos alunos terem utilizado as mesmas operações que utilizaram na resolução da questão 2*a*). No entanto, a inversão da tendência nos valores calculados, reflectindo um entendimento de que a ordem não era importante, parece ter-se reflectivo nos palpites que se seguiram, uma vez que registam subestimações ligeiras.

No caso das combinações simples, a sobrestimação deve-se, essencialmente, ao facto de os alunos terem utilizado as operações que utilizaram nos problemas de arranjos simples. Contudo, isto não significa que os alunos tenham simplesmente reproduzido os valores obtidos para os arranjos simples, uma vez que, na generalidade, as médias dos palpites para as combinações simples são inferiores às médias obtidas para os arranjos simples.

Na questão 4*d*), a baixa sobrestimação está relacionada, essencialmente, com os factores envolvidos na operação efectuada, que em 3 de 5 palpites se pressupõe ter envolvido a dimensão da população e a dimensão da amostra.

Na tabela 3 podem observar-se as percentagens dos palpites mais frequentes nas questões *a*), *b*) e *d*).

Tabela 3 – Percentagens dos palpites mais frequentes nas questões *a)*, *b)* e *d)*

Palpites	1a)	2a)	3a)	4a)
6	37	14	59	75
9	37	62	19	7
<i>Total</i>	74	76	78	82
Palpites	1b)	2b)	3b)	4b)
10	22	8	30	33
20	29	11	33	47
25	25	65	18	—
<i>Total</i>	76	84	81	80
Palpites	—	2d)	3d)	4d)
15	—	4	5	60
25	—	18	12	—
50	—	18	—	—
60	—	—	43	—
75	—	13	5	—
125	—	26	5	—
<i>Total</i>	—	79	70	60

Da ocorrência de palpites iguais nas questões *a)*, nas questões *b)* e nas questões *d)* (relembre-se que nos problemas de permutações simples não havia questão *d)*) depreende-se que os alunos utilizaram raciocínios semelhantes na obtenção dos palpites. Assim, as operações utilizadas conduziram a subestimações ou sobrestimações mais ou menos acentuadas, conforme se ajustassem melhor ou pior à operação combinatória.

A maioria dos valores dos palpites parece envolver uma operação (predominantemente de multiplicação) e as dimensões da população e da amostra.

Para a realização dos palpites nas questões 1a), 2a), 3a) e 4a) observaram-se comportamentos reveladores de uma enumeração mental das possibilidades e alguns alunos referiram as operações utilizadas. Da análise das resoluções dos alunos através da estratégia operação, concluiu-se que os valores calculados resultaram das expressões numéricas 2×3 e 3×3 , também referidas por alguns alunos para efectuarem os palpites nas questões *a)*.

Para a realização dos palpites para as questões 1b), 2b), 3b) e 4b) observaram-se comportamentos reveladores de uma enumeração mental de algumas possibilidades, depreendendo-se que esta estratégia acabaria por ser conjugada com uma operação, dado o tamanho da solução. Alguns alunos comentaram a enumeração mental efectuada e as operações utilizadas. Da análise das resoluções dos alunos através da estratégia operação, conclui-se que os valores calculados resultaram das expressões numéricas $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, 5×5 , 5×4 , 2×5 , também referidas por alguns alunos para efectuarem os palpites nas questões *b)*.

Relativamente aos palpites para as questões 2d) e 3d), depreende-se que os palpites resultaram essencialmente de operações, que poderiam ter envolvido os valores calculados nas questões 2b) e 3b), uma vez que as operações referidas pelos alunos para efectuarem os palpites foram: 25×3 , 20×5 , 25×5 e $5 \times 4 \times 3$. Da análise das resoluções dos alunos através da estratégia operação,

concluiu-se que os valores calculados resultaram das expressões numéricas $5 \times 5 \times 5$, 5^3 , $5 \times 5 \times 3$, $(5 + 5 + 5 + 5 + 5) \times 3$, $20 + 20 + 20 + 20 + 20$, $5 \times 4 \times 3$ e 12×5 .

Relativamente aos palpites para a questão 4d), depreende-se que os palpites 5 e 6 poderiam ter resultado de uma enumeração mental das possibilidades e o palpite 15 da operação 5×3 . Repare-se, por exemplo, nos palpites 6, 10 e 15 efectuados pelo aluno A_8 para as questões 4a), 4b) e 4d) respectivamente.

O aluno A_6 efectuou o seguinte comentário sobre os palpites 6 e 10, respectivamente para as questões 3a) e 3b):

Eu pensei assim [para o palpite da questão 3a)]: o azul só podemos pôr com o preto e com o verde [verbalizando a enumeração mental efectuada] (...) e dá seis (...). Se na [questão] 3a) tínhamos três [cores] e não podíamos repetir, era 3×2 . Aqui [na questão 3b)] é 5×2 que dá dez. O cinco era o número de cores e o dois era como na [questão] 3a).

O palpite parece ter assumido um papel importante ao desafiar o aluno a efectuar uma abordagem geral do problema e ao encorajá-lo a formular conjecturas antes de iniciar a resolução. Por exemplo, o aluno A_{24} , quando comentava o palpite 25 para a questão 2b), referiu que:

Eu dei o palpite [25] porque acima [na questão 2a)] tem três Algarismos e na resolução nove formas. Para dar nove meti três e multipliquei por três. Então aqui, tinha cinco Algarismos e multipliquei por cinco e deu-me vinte e cinco.

De seguida, o aluno A_{24} efectuou o palpite 40 para a questão 2d) e explicou que tinha sido “mesmo à toa”, uma vez que não tinha a “mínima ideia de como é que estava a fazer”. Resolveu a questão 2d) e obteve o valor calculado 124. De seguida, resolveu correctamente as questões 3a) e 3b) e efectuou o palpite 100 para a questão 3d), justificando a sua opção da seguinte forma: “vou pôr [o palpite] como fiz na outra [questão, a 2d)]”. No entanto efectuou um palpite para a questão 3d) (100) superior ao palpite efectuado para a questão 2d) (40) e inferior ao valor calculado nesta questão (124). Assim, depreende-se que o aluno na obtenção do palpite para a questão 3d) tomou em consideração a subestimação efectuada na questão 2d) e a impossibilidade de repetição dos elementos na questão 3d).

O palpite também parece ter contribuído para estimular os alunos a experimentarem raciocínios operatórios (quase sempre, operações multiplicativas) que eles, possivelmente, não efectuariam ou evitariam caso não lhes fosse pedido para fazerem um palpite. Encontrar-se-iam nesta última situação os dois alunos que resolveram as questões recorrendo apenas à enumeração e o aluno que recorreu apenas ao diagrama em árvore. Ou então, aqueles alunos que resolveram correctamente as questões b) através da estratégia enumeração ou da estratégia diagrama em árvore e que, a pedido do investigador, não foram capazes de apresentar uma resolução alternativa através da estratégia operação (3 alunos na questão 2b), 5 alunos na questão 3b) e 4 alunos na questão 4b)).

Investigador – Não és capaz de arranjar uma maneira mais rápida de chegar a esse valor? Fazendo apenas uma conta...

A_{16} – Não. Mas tem que haver. Eu sei que deve haver, porque não ia estar no teste a fazer isto [enumerar].

A realização de um palpite seguido da resolução provocou nos alunos o questionamento do palpite e do valor calculado, quando confrontados com valores diferentes para o mesmo problema. Algumas situações até impeliram o aluno a procurar mais configurações.

A_8 – Já me perdi aqui! [Na resolução da questão 1a)]

Investigador – E porque dizes que te perdeste?

A_8 – Não estou a conseguir.

Investigador – Não estás a conseguir...

A_8 – Nove [palpite para a questão 1a)], não é?

Investigador – Não estás a conseguir o 9?

A_8 – Não estou a conseguir o 9 (...) [estou] a ver se consigo encontrar mais algum. Mas acho que não. [O aluno já tinha enumerado as seis possibilidades.]

Investigador – E porque achas que não?

A_8 – Porquê? Hum, eu não estou a encontrar nada!

(...)

A_8 – 15 [palpite para a questão 1b)] e eu já fiz [na resolução da questão 1b)] 10.

Investigador – Disseste 15 e eu já fiz 10...

A_8 – Sim.

Investigador – Andas à procura do 15, é isso?

A_8 – Sim, ando à procura!

(...)

A_8 – Onze. Falta um. Não consigo encontrar o 12 [palpite para a questão 3b)]. O décimo segundo não consigo encontrar. Enganei-me outra vez no palpite. (...) Só encontrei 11 mas o palpite foi 12.

5. Conclusões

As sobrestimações e as subestimações dos valores correctos observadas neste estudo assemelham-se às obtidas por Fischbein e Grossman (1997), nas questões comuns aos dois estudos, à excepção do problema de arranjos simples de 5 elementos tomados 2 a 2, em que aqueles autores observaram uma tendência para sobrestimar o número total de possibilidades. As diferenças registadas entre os dois estudos poderão encontrar alguma justificação em factores de ordem metodológica, particularmente no facto de neste estudo se ter optado pela realização do palpite seguido da resolução da questão, em que cada resolução poderia influenciar os palpites seguintes.

Nos problemas de combinações simples observou-se uma tendência para sobrestimar o número de combinações simples em qualquer caso, conclusão obtida também por Fischbein e Grossman (1997) e Silva, Fernandes e Soares (2004). De uma maneira geral, o entendimento dos alunos acerca dos problemas de combinações simples não teve em consideração que $C_2^n = \frac{1}{2} A_2^n$ e que $C_3^n = \frac{1}{6} A_3^n$ e também não perceberam que $C_2^5 = C_3^5$.

A elevada dimensão da solução, nas permutações simples de 5 elementos (120) e nos arranjos com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3 (125), esteve associada a subestimações acentuadas, facto que também foi observado por outros autores (e.g., Fischbein & Grossman, 1997; Fischbein, Pampu & Minzat, 1970, Silva, Fernandes & Soares, 2004).

Para além deste estudo assentar em opções metodológicas diferentes das consideradas por Fischbein e Grossman (1997), os resultados obtidos também apontam para o facto de os palpites dos alunos não se reduzirem a meras estimativas realizadas ao acaso.

Depois de comparar os palpites dos alunos com os seus comentários desses palpites, as resoluções obtidas através da estratégia *operação* e as justificações apresentadas, as fórmulas obtidas e as respostas correctas, também se concluiu que os palpites envolviam, de alguma forma, as dimensões da população e da amostra. Por outro lado, algumas das operações utilizadas pelos alunos para efectuarem os palpites conduziram ao número total de possibilidades por mera coincidência, uma vez que os operandos envolvidos na operação utilizada eram os mesmos operandos que estão envolvidos no procedimento correcto, mas com significados diferentes.

Os cálculos efectuados na realização de um palpite ao incidirem, essencialmente, em operações de multiplicação, reflectiram a influência da natureza multiplicativa das operações combinatórias.

Tal como Fischbein e Grossman (1997), concluiu-se que as médias dos palpites efectuados para os problemas de arranjos com repetição, arranjos simples e combinações simples verificam a mesma relação de ordem das respostas correctas.

Na realização de um palpite para o número de permutações de 5 elementos observou-se uma tendência para reduzir a dois o número de factores.

À medida que os alunos foram avançando na resolução dos problemas do questionário, os palpites, as resoluções e os valores calculados parece terem exercido alguma influência nos palpites das questões seguintes, principalmente nas estimativas efectuadas nas questões em que a dimensão da amostra era 3.

6. Recomendações para o ensino

Na medida em que o palpite desafiou o aluno a efectuar uma abordagem geral do problema, encorajando-o a formular conjecturas, sugere-se, em consonância com Schielack (1991), que as actividades de contagem sejam iniciadas com uma previsão de possíveis resultados.

Esta importância reforça-se na medida em que o palpite também contribuiu para estimular os alunos a experimentarem operações (essencialmente de multiplicação) que eles, possivelmente, não efectuariam ou evitariam caso não lhes fosse pedido para antecipar um valor para o número total de possibilidades.

A realização de um palpite, antes da resolução da questão, provocou nos alunos o questionamento do palpite e do valor calculado, quando confrontados com valores diferentes para o mesmo problema, o que sugere, tal como referem Fischbein e Grossman (1997), que ao proporcionarmos situações deste tipo em sala de aula estaremos a criar desafios para o aluno. Por outro lado, como refere Bruner (1973), o palpite poderá representar um benefício na aprendizagem dos alunos se os professores os incentivarem a arriscar palpites “educados” (p. 60), que, posteriormente, serão submetidos a uma análise crítica.

Referências bibliográficas

- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.
- Bruner, J. S. (1973). *O processo da Educação*. São Paulo: Companhia Editora Nacional. (Tradução portuguesa do original de 1966.)
- Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischbein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189-201). Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: D. Reidel.

- Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics; an educational approach*. Dordrecht: D. Reidel. (2 ed.).
- Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 27-47.
- Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111-127.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da Ideia do Acaso na Criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)
- Piaget, J. (1990). *Seis estudos de Psicologia*. Lisboa: Publicações Dom Quixote. (Tradução portuguesa do original de 1973)
- Roa, R. & Navarro-Pelayo, V. (s/d). Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la Probabilidad (on line). Consultado em 15 de Dezembro de 2006, em:
http://www.caib.es/ibac/esdeveniment/jornades_10_01/doc/Roa-Navarro.doc
- Schielack, J. (1991). Primary Experiences in Learning What (As Well as How) to Count. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 44-50). Reston, VA: NCTM.
- Silva, D., Fernandes, J. A. & Soares, A. (2004). Intuições de alunos de 12.º ano em Combinatória: um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

O TRABALHO COLABORATIVO DE DUAS PROFESSORAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO DOS ARRANJOS COMPLETOS

Bárbara do Alvar de Carvalho

Escola Secundária/3 Camilo Castelo Branco

barbara.alvar@gmail.com

Resumo. Partindo das potencialidades das estratégias espontâneas dos alunos sobre a operação combinatória “arranjos completos”, pretendemos evidenciar o impacto do trabalho colaborativo sobre o ensino ministrado por duas professoras que leccionaram em realidades díspares e com intenções e concepções sobre o ensino também diferentes.

Subjaz a este estudo o propósito de mostrar que, num assunto curricular onde tradicionalmente os alunos adquirem o conceito através da realização de exercícios repetitivos, há outra possibilidade de abordagem, usando tarefas abertas e a aprendizagem por descoberta.

O trabalho e a reflexão em grupo, bem como a assistência às aulas pelas docentes, numa perspectiva colaborativa, constituiu por si só um processo de mudança profissional docente. Além disso, a observação e a reflexão realizadas revelaram a valorização pelas professoras de tarefas exploratórias, estratégias espontâneas dos alunos e ideias erradas. A par disto, verificou-se o desenvolvimento de uma consciência crescente de que a mudança de estratégias na prática lectiva é possível a partir do envolvimento e do esforço pessoais.

1. Introdução

A Combinatória é leccionada pela primeira vez no 12.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2002), integrada no tema de Probabilidades e Combinatória, e é considerado um tema difícil, quer pelos alunos quer pelos professores (Silva, Fernandes & Soares, 2004).

Dada a importância que a Combinatória assume actualmente em vários domínios científicos e ao nível das suas aplicações, reveste-se de particular importância descobrir até que ponto os alunos são capazes de resolver problemas de Combinatória. Segundo Fernandes (1990), em geral, “a resolução de problemas (...) tornaria os objectivos do ensino mais práticos e imediatos; aproximaria a escola do meio envolvente, na medida em que o seu ensino se refere, também, a questões vividas nesse meio” (pp. 8-9). No caso particular da Combinatória, para Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1996) as estratégias de resolução de problemas de Combinatória constituem estratégias gerais, aplicáveis não apenas à Combinatória, o que releva o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas.

Além da sua importância no desenvolvimento das probabilidades, a capacidade combinatória é um componente fundamental do pensamento formal. De acordo com Inhelder e Piaget (s/d), as operações combinatórias representam algo mais importante do que um mero ramo da matemática, constituindo um sistema tão geral quanto a proporcionalidade e a correlação, que emerge simultaneamente depois da idade dos 12-13 anos (o período de operações formais, de acordo com a teoria de Piaget). No entanto, Batanero (2004) defende que a “capacidade de resolver problemas combinatórios nem sempre se alcança no nível das operações formais. Se não houver um ensino específico, há um número significativo de alunos que nunca chega a alcançar esta capacidade” (p. 23). Partilham da mesma opinião outros investigadores (e.g., Fischbein, Pampu & Minzat, 1970; Fischbein, 1975; Heitele, 1975; Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997; Silva, Fernandes & Soares, 2004; Correia & Fernandes, 2007). A este respeito, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) afirmam: “Desta forma, atrasar o ensino da Combinatória, ou, por outras palavras, não cultivar o raciocínio combinatório quando os alunos reúnem as condições adequadas para o exercitarem, pode significar uma limitação séria ao desenvolvimento do seu pensamento formal” (p. 80).

São várias as causas apontadas para explicar o insucesso dos alunos em Matemática; entre elas, as que estão relacionadas com os professores e o seu processo de ensino, nomeadamente as referentes às metodologias de ensino usadas nas suas práticas pedagógicas. Com efeito, interessa compreender o modo como os professores reflectem sobre as suas práticas de ensino. O grupo que se formou, constituído por duas professoras e pela investigadora, teve como objectivo comum aprender para fazer melhor, explorar e questionar as suas práticas, aprendendo a partir dos saberes e das práticas dos outros, onde não entra a competitividade, e partilhando experiências, numa tentativa de superar conjuntamente as dificuldades encontradas.

Para além do objectivo de saber em que medida o trabalho em equipa pode contribuir para o aprofundamento das práticas de ensino, a parte da investigação que aqui se apresenta visou estudar o contributo do trabalho colaborativo na predisposição para enfrentar mudanças e na criação de expectativas positivas dos professores em relação às possibilidades de êxito dos alunos na aprendizagem do tema de Análise Combinatória.

Relativamente aos professores, os seus valores, as suas concepções e as suas preferências influenciam estilos de ensino diversos e ancoram, também, de turma para turma, diferenças nas preferências de ensino dos alunos: uns preferem um ensino mais concreto e outros um ensino mais abstracto, uns preferem um ensino individual e outros um ensino de grupo, uns preferem um ensino centrado na descoberta e outros preferem um ensino mais orientado.

2. Estratégias de Resolução de Problemas em Combinatória

Para English (2005) devem ser dadas oportunidades aos alunos para explorar situações que envolvam problemas combinatórios sem instrução directa, pois os problemas combinatórios permitem uma variedade de soluções e representações que lhes possibilita trabalhar para atingirem uma solução com o mínimo de conhecimento matemático.

Segundo Batanero et al. (1994), perante um problema de combinatória, é importante que se dê aos alunos tempo suficiente para que investiguem as possíveis soluções utilizando todos os meios, e os professores devem desafiar os alunos a “inventarem as suas próprias representações” (p. 118), incluindo o uso de desenhos, tabelas, listagens sistemáticas e não sistemáticas e modelos concretos (English, 2005). Mais especificamente, de acordo com Batanero et al. (1997), considera-se ser recomendável proporcionar aos alunos tarefas que envolvam actividades de *enumeração*, construção de *diagramas de árvore* e o uso de *materiais manipuláveis*, como recursos didácticos essenciais para o adequado desenvolvimento do raciocínio combinatório, característico do pensamento formal, em oposição à simples aplicação das fórmulas de cálculo.

O esquema realiza uma função essencial no pensamento produtivo, conciliando o abstracto com o concreto. O esquema, que é uma simplificação e uma “destilação” do concreto, prepara o terreno para o conceptualismo, fornecendo relações abstractas à representação espacial, dando-lhe significado dinâmico e, consequentemente, um potencial construtivo e criativo (Fischbein, 1975). Tais esquemas podem-se tornar uma fonte de erros, sendo desejável, por isso, que o processo seja sistematicamente guiado pelo professor, nomeadamente através de um questionamento apropriado quando os alunos se encontram a trabalhar nos problemas no sentido de promover a sua compreensão. Por exemplo, pedir aos alunos que expliquem e justifiquem as suas soluções pode levá-los a rejeitarem algumas das suas ideias originais ou a modificar, refinar ou consolidar os seus argumentos originais (Maher & Martino, 1996, citado em English, 2005). É importante que os alunos tenham liberdade de usar representações e abordagens diferentes, e que sejam encorajadas a descrever e a explicar as suas acções. Ao fazê-lo, os alunos conseguem identificar as semelhanças e as diferenças entre as suas próprias formas de representação e as dos outros. Batanero et al. (1994) enfatizam que a “apresentação das soluções encontradas pelos alunos, conjuntamente com a sua discussão colectiva, permitirá criar uma atmosfera de aprendizagem eficaz” (p. 118).

O valor educativo da Matemática Discreta, ensinada num nível escolar mais baixo, reside no facto de que “força” os alunos a pensarem acerca de processos elementares importantes, tais como a enumeração sistemática. Para resolverem problemas de contagem, os estudantes devem começar por *enumerar* alguns casos para descobrir a estrutura do problema, com ou sem a ajuda de um *diagrama de árvore*. Em vez disso, também podem utilizar a multiplicação para contar colecções agrupadas, aplicar as regras da adição e da multiplicação.

Para Batanero et al. (1994),

Através das actividades de enumeração sistemática e de contagem praticam-se as capacidades numéricas básicas, as relações entre os números naturais, assim como as operações de adição e multiplicação. Desta forma, exercita-se a classificação de objectos no que diz respeito a certas propriedades, e, habitua-se o aluno na busca de procedimentos sistemáticos e no pensamento indutivo e algorítmico. (p. 118)

Com um número pequeno de elementos os alunos seguem um sistema: a *enumeração* ou o *diagrama de árvore* e consideram as questões de fácil resolução.

Os *diagramas de árvore* são um dos recursos mais úteis para visualizar tanto as situações de Combinatória como as de Probabilidades, apresentam características intuitivas importantes e oferecem uma representação global da estrutura de situação e isto contribui para a imediatez da compreensão e para se encontrar uma solução do problema. Segundo Heitele (1975),

O diagrama de árvore é uma representação icónica de importância fundamental, porque visualiza a estrutura multi-passos da experiência, assim como os resultados possíveis, e assim trabalha em conjunto com outras operações combinatoriais. Por esta razão, as operações combinatoriais básicas, mais do que serem simplesmente algoritmos padrão para calcular os campos de probabilidade de experiências compostas, fornecem uma visão directa, em particular na sua forma icónica e inactiva, para a estrutura interior das experiências de acaso e o encadeamento de experiências sucessivas dentro de um complexo maior. (p. 198)

Assim, explorando o diagrama de árvore, por aproximações sucessivas, os alunos acabam por descobrir uma regra de cálculo. Ao aprenderem a fazer uso de um diagrama de árvore as crianças estão, de facto, a assimilar uma *lei de construção*. Os recursos indutivos do modelo são evidentes e os sucessivos passos de raciocínio dentro do modelo têm lugar indutivamente e quase de imediato (Fischbein, 1975).

Pode-se objectar que o aspecto demonstrativo está ausente, pois os alunos que chegam ao princípio da construção por aproximações progressivas acabam por descobrir uma regra de cálculo, mas não estão a usar estritamente uma demonstração recursiva. O ponto de vista de Fischbein, é de que, mesmo que o controle dedutivo não seja explícito, ele ocorre no processo construtivo, e é perfeitamente evidente na modalidade simbólica.

A exploração de tarefas propostas requer que, em cada momento, através de uma generalização limitada, se dê o salto em direcção ao passo seguinte no processo de um pensamento construtivo, encorajando a participação dos alunos. O professor deve estar atento às questões que formula, privilegiando os raciocínios e a argumentação dos alunos (NCTM, 1991). Por exemplo, com o *diagrama de árvore* pretende-se que os alunos construam sequências e de seguida identifiquem regularidades a aplicar, por transferência e generalização, a outras sequências (Fischbein, Pampu & Mînzat, 1970). É importante fornecer aos alunos oportunidades de se envolverem no processo matemático de representação, raciocínio, abstracção, generalização e de estabelecer conexões entre as ideias matemáticas. Os problemas combinatorios podem ajudar os alunos a construir representações significativas, a raciocinarem matematicamente e a generalizarem conceitos matemáticos (Sriraman & English, 2004, citados em English, 2005). Consequentemente, tanto o ensino como a avaliação da

combinatória devem ser baseados na resolução de diferentes problemas combinatórios, nos quais os alunos necessitam de procedimentos de enumeração sistemáticos, de recorrência, de classificação, de tabelas e diagramas árvore.

Batanero et al. (1994) fazem uma proposta de ensino considerando as operações combinatórias: combinações, arranjos, permutações, notações e fórmulas; os procedimentos e os modelos combinatórios implícitos (quadro 1).

Quadro 1 – Procedimentos e modelos combinatórios implícitos (Batanero et al., 1997)

<i>Procedimentos combinatórios</i>	
Lógicos	Classificação, enumeração sistemática, princípio de inclusão/exclusão e a recorrência
Gráficos	Diagrama de árvore e gráficos
Numéricos	Princípio da adição, da multiplicação e da divisão, números combinatórios e fraccionários, o triângulo de Pascal
Tabulares	Construção de tabelas e quadros
Algébricos	Geração de funções
<i>Modelos combinatórios implícitos</i>	
Seleção	De uma amostra a partir de um conjunto de objectos, amostras ordenadas e não ordenadas – arranjos e combinações
Distribuição	Está relacionado com o conceito de aplicação - arranjos e permutações
Partição	Partição de um conjunto em subconjuntos, dificilmente usado nas tarefas

3. O trabalho colaborativo

Shulman (1993) realça a importância da aprendizagem em contextos colaborativos com outros profissionais, uma vez que o conhecimento que resulta da experiência é produzido, ainda, de forma muito isolada. De certa forma, todos nós, no nosso dia-a-dia, sentimos o quanto é insuficiente o espírito de colaboração e sentido de comunidade profissional dos professores.

A colaboração tem vindo a afirmar-se como uma importante estratégia de trabalho no mundo da educação. Cada vez mais, no sistema educativo, é advogada a colaboração entre professores para a realização de diversas tarefas, como planificações ou projectos de escola. Contudo, na realidade, muitas destas actividades, incluindo as planificações, são feitas de forma individual. Hargreaves (1998) aponta duas explicações para esta forma de trabalho: “no primeiro e mais tradicional, o individualismo é associado à desconfiança, aos comportamentos defensivos e à ansiedade; o segundo, a defeitos e fracassos dos professores, que seriam, em parte, «naturais» e, em parte, o resultado das incertezas do seu trabalho” (p. 188). O professor tem medo de ser observado, por exemplo, na sua prática lectiva, refugiando-se assim no individualismo.

Além disso, existem condicionalismos de ordem física, nomeadamente a falta de locais onde os professores se possam reunir, além de o factor tempo ser determinante na escassa realização de trabalho em grupo.

Subjacente ao trabalho colaborativo, Boavida e Ponte (2002) sustentam que existe um objectivo geral comum, partilhado por todos, e, no relacionamento entre os participantes, tem que se verificar um clima de confiança, disponibilidade para ouvir os outros, negociação, diálogo e respeito mútuo.

Na fase inicial do trabalho em grupo, as pessoas têm que aprender a lidar umas com as outras, conhecendo-se ou não previamente. Os membros da equipa têm que ter a mesma oportunidade de participar e os cargos que ocupam são irrelevantes. Tem que se estabelecer uma relação de trabalho onde impere a confiança e onde reine o diálogo, como forma de gerir as diferenças dos participantes.

A colaboração assume-se como um meio ou um processo dinâmico, que comporta procedimentos muitas vezes não previstos ou planificados, possibilitadores do desenvolvimento do conhecimento didáctico dos intervenientes.

Segundo Boavida e Ponte (2002), um grupo de trabalho que se constitui para desenvolver uma investigação parte da iniciativa de uma ou mais pessoas. No projecto de investigação que se pretende levar a cabo, a iniciativa partirá do investigador, que apresentará a ideia base e um plano geral de trabalho, distribuindo os papéis desempenhados por cada parceiro colaborante, de uma forma aberta e negociável. Neste processo de negociação, é fundamental, à partida, apresentar as vantagens que emergirão do envolvimento de cada um, nomeadamente a oportunidade de desenvolver aprendizagens comuns e individuais.

A equipa que se pretende formar poderá ser constituída por elementos com diferentes experiências, concepções e expectativas “de modo a possibilitar olhares múltiplos sobre uma mesma realidade, contribuindo, assim, para esboçar quadros interpretativos mais abrangentes para essa mesma realidade” (Boavida & Ponte, p. 46).

O trabalho colaborativo de equipa, que se pretende implementar, envolverá o desenvolvimento de instrumentos e métodos de ensino, a planificação e calendarização das actividades a desenvolver, bem como a discussão e reflexão sobre as actividades realizadas na sala de aula. Para além destas actividades, em que intervirão todos os elementos da equipa, realizar-se-á uma divisão de tarefas tirando partido da experiência, interesses e possibilidades dos diversos membros.

Para Little (1990) existem quatro formas de colaboração descritas no quadro 2.

Quadro 2 – Formas de colaboração profissional entre professores segundo Little (1990).

Narrar e procurar ideias	Cada professor preserva a sua individualidade, não se expondo aos outros, ou seja, é a característica de uma cultura de colaboração de individualismo e é conservadora.
A ajuda e apoio	É talvez aquela que os professores mais esperam do outro colega – ajuda para a resolução de problemas e dificuldades com que se deparam. Normalmente, existe sempre um professor mais experiente do que outro no grupo, e é a esse professor experiente que o colega poderá solicitar ajuda e apoio. Esta forma de colaboração integra, de igual modo, uma postura de um certo individualismo por parte do professor.
Partilha	Corresponde a um intercâmbio de materiais, métodos e trocas de ideias e opiniões. Esta representa uma concepção de colaboração menos privada e mais partilhada e vem estabelecer uma ruptura com a cultura de ensino chamada "tradicional". O facto de o professor sentir confiança suficiente para se expor fomenta um caminho rico de potencialidades para o seu desenvolvimento.
Trabalho em co-propriedade	Encontros entre professores "firmados na responsabilidade partilhada para o trabalho de ensinar (interdependência), na ideia de uma <i>autonomia colectiva</i> , no apoio às iniciativas e liderança dos professores no que respeita à prática profissional e na afiliação ao grupo, fundadas no trabalho profissional" (p. 519). A autora completa esta ideia argumentando que aquilo a que chama autonomia colectiva "não implica consenso de pensamento ou uniformização da acção" (p. 521). A existência de opiniões e concepções diferentes respeitam-se e complementam-se.

Através das formas de colaboração entre professores, podemos então distinguir entre narrar e procurar ideias, ajuda e apoio, partilha e trabalho em co-propriedade (Little, 1990). Da primeira para a última fase regista-se uma interdependência crescente entre os participantes. Esta interdependência é visível ao definirem objectivos mais claros quanto ao trabalho comum, ao mesmo tempo que é mais exigente e prolongada no tempo. Estes aspectos, potenciam a promoção do desenvolvimento profissional dos participantes.

Para que a implementação do trabalho colaborativo tenha sucesso, é necessário ultrapassar quatro situações de dificuldade (ver quadro 3) com as quais se pode deparar no desenvolvimento do trabalho em equipa (Boavida & Ponte, 2002).

Quadro 3 – Dificuldades inerentes ao trabalho colaborativo

Imprevisibilidade	Esta forma de trabalho não pode ser planificada ao pormenor: necessita de ser renegociada a qualquer momento, pois é um processo revestido de dinamismo e criatividade. Esta renegociação pode alterar os papéis inicialmente previstos; no entanto, supõe-se que os participantes não se vão sentir em desvantagem com os novos papéis.
Gestão das diferenças	Os métodos de trabalho e as expectativas de cada interveniente são diferentes. Estas diferenças devem ser geridas e ultrapassadas pelo grupo, através de uma negociação eficaz. E utilizando o diálogo como instrumento de confronto de ideias, fortalecem-se as relações de confiança.
Contrariar a desigualdade entre os custos e os benefícios	Se o envolvimento dos intervenientes não corresponder às metas a que se propõem, os intervenientes poderão abandonar esta forma de trabalho, ou seja, para que o processo seja satisfatório, é necessário contrariar a desigualdade entre os custos e os benefícios.
Conformismo	O grupo de trabalho tem que estar atento, pois estas situações podem colocar em risco o sucesso de todo o trabalho e são susceptíveis de serem ultrapassadas em conjunto.

Estas dificuldades inerentes ao trabalho colaborativo poderão ser solucionadas com uma negociação cuidada, pois “permeia o projecto do princípio ao fim, sendo fundamental nos inevitáveis momentos de crise” (Boavida & Ponte, 2002, p. 49). Através do diálogo contínuo e das relações de confiança que se vão desenvolvendo ao longo do tempo, favorece-se a auto-confiança de todos.

4. Metodologia

O estudo que se desenvolveu centrou-se em situações de formação através da investigação - acção, onde se pretendeu que os professores participantes, canalizando as suas experiências prévias, se assumissem como agentes da sua própria mudança e do meio envolvente, contribuindo, deste modo, para o seu desenvolvimento profissional (Caetano, 2004). No quadro da investigação qualitativa em educação, estudaram-se aspectos particulares da evolução de professores de Matemática, no que concerne às suas concepções sobre a Combinatória e ao seu desempenho na leccionação do respectivo tema, sempre numa perspectiva de promoção do seu desenvolvimento em termos de conhecimento didáctico, em contexto de trabalho colaborativo. Em termos de desenho de investigação, usamos uma metodologia de estudo de caso (Bogdan e Biklen, 1994), aplicado às duas professoras que participaram no estudo.

As participantes são duas professoras responsáveis e empenhadas profissionalmente e ambas consideravam que contextos de trabalho colaborativo são potenciadores de sucessivas mudanças e

aprendizagens, mesmo que lentas, e a valorização deste tipo de trabalho vem do passado, não constituindo, por isso, uma novidade para qualquer delas.

A formação académica das professoras é semelhante, ambas têm a Licenciatura em Ensino de Matemática e, posteriormente, Margarida fez o mestrado em “Supervisão pedagógica no ensino da Matemática e Maria fez uma Pós-graduação em “Tecnologia Educativa”. Margarida tem 40 anos, 15 de serviço e já leccionou a Combinatória durante 6 anos. Maria tem 32 anos e leccionou 5 anos o tema de Combinatória nos 10 anos de serviço que possui.

Ao investigar em que medida um projecto de investigação - acção, realizado por duas professoras e pela investigadora, pode contribuir para esse desenvolvimento profissional, não se pretende generalizar os resultados obtidos, mas apenas analisar e compreender, num contexto particular, o alcance de uma certa prática.

A recolha de dados foi feita ao longo de três meses, Setembro, Outubro e Novembro de 2008. Os métodos de recolha de dados utilizados nesta investigação foram a observação, a entrevista, as notas de campo e as conversas informais.

A observação ocorreu no contexto natural onde se desenvolveu a investigação e aconteceu em interacção com os participantes. Foram feitas gravações de todas as reuniões de planificação, de partilha de ideias e de reflexão conjunta, bem como foram também observadas aulas, quer pela investigadora quer pela investigadora na companhia da participante que não se encontrava a leccionar no momento, no âmbito do ensino do tema de Análise Combinatória, que foram objecto de reflexão e análise nas reuniões com as participantes.

As observações das sessões e das aulas foram registadas através das notas de campo feitas pela investigadora.

Tornou-se indispensável, do ponto de vista metodológico, recorrer à entrevista, para se tentar perceber o significado das mudanças ocorridas, possibilitando, com maior facilidade, a apreensão da compreensão que as professoras fazem acerca dos fenómenos nos quais estiveram envolvidas e implicadas. Para tal, foram realizadas duas entrevistas a cada professora, que tiveram lugar no início e no final do trabalho empírico.

A análise das reuniões assistidas pela investigadora teve por base as notas de campo, registos escritos de propostas de tarefas apresentadas pelas participantes e transcrições de registo áudio, com o objectivo de clarificar e verificar o trabalho desenvolvido, a discussão emergente na preparação da acção do professor, bem como a reflexão que estes fizeram sobre a pré-acção, acção, e pós-acção.

5. Apresentação de resultados

Perante o objectivo comum de melhorar o ensino e de crescer profissionalmente, através da construção de um bom clima de trabalho e de aceitação mútua onde impera o respeito, a abertura de espírito, a responsabilidade, a confiança, a motivação, a auto-estima, pretendeu-se criar um grupo de trabalho coeso e unido, visto existir já, à partida, uma relação de proximidade entre as professoras que proporcionou uma partilha de experiências adquiridas e de saber. Apesar de o grupo de trabalho ser constituído por três elementos – duas professoras e a investigadora – com idades próximas, pode ser considerado um grupo de pessoas que apresentam competências diversificadas, o que se tornou uma mais-valia porque lhe instigou uma dinâmica de trabalho enriquecedora.

Margarida aceitou o convite que lhe foi feito para participar neste projecto, desenvolvido no ano lectivo de 2007/2008, tendo esperança que poderia constituir uma mais-valia para o seu crescimento profissional. A necessidade que sente em se integrar em projectos propostos pelo Ministério da Educação ou outras entidades, acrescentando: “estive 5 anos no acompanhamento do Ensino Secundário, e estou, este é o meu 3.º ano, no acompanhamento do Plano da Acção da Matemática” (Margarida, entrevista inicial). Frequenta regularmente cursos de formação sempre no sentido de aprender mais, o que é uma característica muito notória desta professora. Como manifestou na entrevista inicial, sempre gostou de

desafios e de inovar. “Ao enfrentar desafios, o professor sofre, naturalmente, pressão para mudar” (Polettini, 1999, p. 189). Implementar na prática lectiva uma tarefa inovadora pode desencadear mudanças que se forem significativas podem contribuir para o crescimento do professor a nível pessoal e profissional.

Margarida dizia, em conversas informais e geralmente no final das sessões, que estava cansada das tarefas rotineiras dos manuais, achava que eram sempre a mesma coisa, e gostava de experimentar coisas novas nas suas aulas, sendo portanto um desafio.

Maria não manifestou as mesmas expectativas face ao projecto de investigação. Contribuiu para a sua adesão a amizade de muitos anos que mantinha com a investigadora, participando neste trabalho com a finalidade de ajudar, não descurando, no entanto, os benefícios de que poderia usufruir com a sua participação no estudo.

Para ser honesta, primeiro uma relação de amizade que existe entre mim e a investigadora, uma admiração muito grande profissional pela investigadora e pela certeza que este projecto vai trazer muitas mais-valias para mim, a nível profissional, nas estratégias e na forma de ensinar especificamente este tema, mas que também vou poder transportar, claro, para outros conteúdos. (Maria, entrevista inicial)

Estas professoras eram incitadas pela curiosidade de encontrar formas alternativas de tarefas a propor aos alunos: “Espero que traga estratégias inovadoras, que possamos trabalhar colaborativamente e eu também levar parte deste trabalho para as minhas colegas, na minha escola, e que traga muitas melhorias à minha prática educativa, especialmente neste conteúdo” (Maria, entrevista inicial).

Maria mostrou disponibilidade, à partida, para abrir a porta da sala onde decorriam as suas aulas para ser observada, quer pela investigadora quer pela outra colega participante, predispondo-se, depois de ter pedido autorização formal aos pais dos alunos. Porém, Maria mostrava-se muito preocupada com o compromisso que tinha estabelecido com o grupo de trabalho da sua escola:

(...) fazemos todos trabalho nas turmas em forma conjunta, nunca acontece numa turma os professores fazerem uns exercícios e noutra outros, nunca. Portanto, consensualmente definimos o que vamos fazer: ‘do manual vamos fazer este, este e este. Fora do manual, deste manual, este, este e este’, e todos fazemos exactamente os mesmos. Damos os testes nas mesmas semanas, com os mesmos conteúdos. Nunca dizemos as notas aos alunos sem antes os outros saberem. Há esse respeito, no fundo, pelo trabalho, uma vez que trabalhámos em conjunto. (Maria, entrevista inicial)

Era notória e constante a sua inquietação com a preparação dos seus alunos para os testes intermédios, os exames nacionais e o atraso provocado pela implementação de tarefas diferentes, que poderia comprometer o cumprimento da planificação relativamente aos colegas da escola. Maria teve sempre uma atitude crítica e construtiva em relação a tudo o que se fazia, nomeadamente em relação às propostas apresentadas nas sessões de planificação, na observação e reflexão das aulas.

Estas professoras leccionavam em localidades e escolas diferentes. As turmas onde decorreu a investigação já eram delas desde o 10.º ano, por isso, neste contexto, percepcionava-se um ambiente de trabalho calmo, agradável, cordial e de empatia e cumplicidade entre os intervenientes. A turma da Maria, no 10.º ano, era constituída por 23 alunos e transitaram apenas 9 para o 11.º ano. Durante este ano lectivo iniciou com os 9 alunos inscrevendo-se, no decorrer do primeiro mês de aulas, mais 4 alunos e 2 estavam a assistir, e todos têm como disciplina de formação específica Economia. A turma da Margarida vem do 10.º ano, com sensivelmente os mesmos alunos, cerca de 26; no entanto, inscreveram-se mais alunos e actualmente é constituída por 32 alunos, com disciplinas de formação específica variadas, nomeadamente Geologia, Física, Físico-Química, Biologia, Economia e Biologia.

Como actualmente acontece em todas as instituições educativas, as professoras estão a viver um processo de mudança organizacional, nomeadamente, a implementação do novo modelo de

avaliação e o novo modelo de gestão, situação de conflito e de incerteza que constituiu um enorme constrangimento para o desenvolvimento deste trabalho, visto que estão envolvidas em novas dinâmicas, disponibilizando pouco tempo para os trabalhos inerentes a este projecto. No sentido de dar respostas a esta problemática, as professoras procuraram conciliar todo o tipo de tarefas, pois são pessoas para não desistir quando se comprometem.

5.1. Sessões de trabalho de planificação

Foi a investigadora quem apresentou uma proposta de uma tarefa à equipa (sessão 2), à qual as colegas aderiram com curiosidade na sua implementação e achando-a pertinente e interessante. A tarefa consistia numa adaptação do teste desenvolvido por Correia (2008), e com ele pretendia-se dar oportunidade aos alunos de explorarem problemas combinatórios antes da instrução directa (English, 2005). Para tal, ministraram o teste antes do início do ensino do tema de Combinatória, o que coincidiu com no início do ano lectivo. O objectivo era analisar e descrever as estratégias utilizadas pelos alunos e identificar factores potenciadores de uma aprendizagem significativa, culminando na adaptação das nossas estratégias de ensino às estratégias reveladas pelos alunos. Perspectivámos, assim, a preparação de tarefas que levassem os alunos a estabelecerem relações entre as ideias que já tinham e os conhecimentos novos que iriam adquirir.

Na sessão 3, as professoras já tinham aplicado o teste, emergindo durante a análise de algumas respostas e discussões no grupo o seguinte diálogo:

Maria: (...) tendo em conta estas dificuldades, não é? Tentar analisar na turma. Assim é mais fácil perceber o que alguns pensaram. Eles estarem a falar connosco, não é? Era mais fácil do que escrever.

Margarida: Sim.

Bárbara: Uma aula de debate?

Maria: Até porque vai ser uma grande ajuda, porque a partir daí nós... não é? Vai-se chegar a resultados interessantes para depois começar o trabalho.

Bárbara: E é um confronto de ideias e discussão entre os alunos da turma, não é? Qual a dificuldade?

Maria: E aí é mais fácil porque uns poderão duma forma e outros doutra, e vão explicar uns aos outros como é que pensaram, e vai ser mais fácil perceber o caminho certo.

Margarida: Vamos.

Maria: Vamos. Acho que sim.

Bárbara: Isso quer dizer que vocês gostaram de usar este teste?

Maria: Sim.

Margarida: Que tem... eles usam isto, usam isto que é... Portanto, um exemplo pode ser dado a um aluno, ele foi dado, e depois aparece aqui a realização do aluno, e depois ajudam o professor a partir daquela realização a perceber o erro. Porque muitas vezes eu olho para um erro e digo assim: 'Ai! Ele errou por causa disto assim, assim'. E outra colega diz assim: 'Olha, repara que ele fez isto, se calhar...'. E depois vou ver isso, se calhar. (sessão 3)

Passada uma semana, na sessão seguinte, as participantes surgiram com uma nova ideia de organização da planificação das aulas, tendo como base as respostas dos alunos às questões do teste já resolvido:

Margarida: Eu gostava que começássemos a falar sobre o objectivo. (...) Mas em termos também de aulas, (...) começamos uma abordagem na parte da combinatória usando estes exemplos, é isso?

Maria: Exactamente. Perceber que estratégia é que eles usam.

Margarida: Mas vamos fazer uma mistura de tudo o que está aqui ou vamos por etapas? Fazemos isso pausadamente. Portanto, analisámos, interferimos a meio com outras coisas ou não?

Maria: Eu acho que seria interessante fazer como a Margarida disse. (sessão 4)

Dadas as diferentes características de trabalho, postura e atitude de ambas as professoras, ficou acordado existir sempre abertura para cada uma realizar tarefas que poderiam não ser consideradas nas sessões de planificação. Para tal, elaborámos um guião orientador pouco estruturado de cada aula, onde constava uma tarefa introdutória comum, adaptada do teste de Paulo (2008), e as tarefas de desenvolvimento. As tarefas de desenvolvimento integravam-se numa ficha que elaborámos em conjunto a partir das várias propostas feitas pelos elementos do grupo nas sessões, ou até informalmente, e compiladas posteriormente em casa pela investigadora. As várias fichas de trabalho elaboradas foram distribuídas aos alunos de acordo com o assunto abordado em cada aula.

Na sessão 1, concordámos que deveríamos iniciar a leccionação do tema com os arranjos completos, pelo facto de os alunos apresentarem nesta questão um maior número de respostas correctas, como se verificou também em outras investigações. Considerámos ser uma variável a ter em conta, pois, deste modo, os alunos ficavam motivados para a aprendizagem das operações seguintes, que se tinham revelado mais difíceis aquando da realização do teste.

Maria iniciou a sessão 5 com a apresentação de uma proposta de um plano informal, de como gostaria que decorresse a sua primeira aula assistida pelas colegas. Apresentou sugestões de algumas respostas, escolhidas por ela, sobre arranjos com repetição. A Maria tinha informado em sessões anteriores e reforçou novamente a ideia que era notório nas respostas apresentadas pelos seus alunos verificar que muitos já tinham tido instrução de Combinatória, provavelmente em explicações. Considerando também outros factores, seleccionou respostas que achou pertinentes para os alunos analisarem em pares e, ao partilhar com a equipa, justificou a sua escolha, através do seguinte diálogo:

Bárbara: Olha, Maria, então tu achas que fazes bem em seleccionar em vez de dares os testes a cada um dos alunos, o seu próprio teste?

Maria: Pois. O que acontece é assim, ao eu dar os testes a cada um o que é que ia acontecer? Muitos usaram o mesmo processo, e depois era assim, estarmos a perguntar, por exemplo: 'Explica-me tu', e eles: 'ah, porque eu fiz uma árvore assim', e tu perguntas: 'e como?', não estavam a ver o exemplo dele, ou seja, esse tinha que ir fazer a árvore. A seguir o outro: 'eu fiz uma árvore mas não fiz assim', 'então vai fazer a outra assim', que é igual. (sessão 5)

Margarida comentou que as respostas que a Maria tinha escolhido estavam correctas, ao que a Maria respondeu que teve 100% de respostas correctas na questão 2a); relativamente às outras, algumas apresentavam-se incompletas e incorrectas. No entanto, a Maria referiu que deveríamos premiar as respostas correctas.

A Bárbara chamou a atenção para a conveniência de apresentar várias situações aos alunos nos problemas que se propõem, nomeadamente variar o tipo de elementos como números, objectos e pessoas, bem com ter em conta o número de objectos, pois como verificámos no teste, à medida que o número de elementos aumentava, o número de respostas correctas diminuía. Maria mencionou que o tipo de problemas que seleccionou contemplava estes requisitos. Em sessões anteriores, constatámos que alguns alunos da Margarida responderam incorrectamente à questão 2a) e muitos usaram a estratégia "operação". Perante esta realidade, esta docente e a investigadora acharam que seria mais pertinente aquando da leccionação das operações, organizar a turma em grupos e entregar a resposta do próprio teste a cada aluno — "Vamos entregar o teste ao aluno, seria um ponto de partida", para que desta forma eles reflectam em conjunto sobre as estratégias usadas, os erros e dificuldades sentidas,

partilhando e confrontando as resoluções de cada um com os colegas, justificando, desta forma, porque consideram as suas respostas correctas e dando oportunidade aos alunos de procurarem sozinhos a solução. Porém, Margarida e os outros elementos da equipa de trabalho depararam-se com vários dilemas, como se ilustra a seguir:

Margarida: Eu estou a imaginar a situação, ao entregar aos alunos o teste. Tudo bem, estou de acordo. Agora, eu estava a pensar era: que diálogo, ou o que é que eu posso comunicar que consiga exprimir ao máximo tudo o que se passa naquelas cabecinhas. Porque a maneira como eu comunico, as perguntas que eu vou fazer ou não vou fazer, pode fazer com que o processo seja muito rápido e muito superficial. Posso conseguir aprofundar, e posso aprofundar e ao mesmo tempo conseguir recolher a informação e depois fazer com que tudo fique claro, como posso aprofundar e confundir tudo.

Na segunda parte, Margarida propôs-se realizar uma discussão no grupo turma, tendo a professora como função fazer um questionamento apropriado para levar os alunos a rejeitarem ou modificarem algumas ideias incorrectas e a clarificarem os seus raciocínios. Nesta fase, a professora sentiu que, para pôr em prática esta estratégia, teria que preparar muito bem em casa esta actividade, pois exigia, por parte dela, o conhecimento de todas as estratégias usadas pelos alunos para poder desenvolver um questionamento pertinente.

Margarida: Então (...), nós temos que estudar muito bem o que está nos testes. O que cada um pensa (...), eu conheço muito bem o material que eles têm nas mãos.

Bárbara: Convinha.

Margarida: Para conseguir confrontar, fazer assim umas questões interessantes.

Na sessão 6, Maria apresentou o guião final da sua aula à qual, no dia seguinte, Margarida e a Bárbara iriam assistir. Fez algumas alterações que achou necessárias e que a equipa considerou e apropriou.

Maria: E depois de eles verem [os raciocínios uns dos outros] qual é que eles consideram que foi no fundo o mais útil, o mais fácil, aquele que produziu mais efeito directamente? Porque, por exemplo, houve alunos que fizeram a enumeração, [com mais elementos] já sentiram necessidade de fazer em árvore. Depois, antes de chegar à generalização [2c]) e chegar à [2d)] terão de tentar resolver exercícios que envolvessem o mesmo raciocínio, ver exactamente que processo agora é que eles vão escolher. O primeiro é simples, que é lançar cinco vezes um dado cubo com as faces numeradas de um a seis. Esses até eles podem fazer pela enumeração que não vai demorar muito, não é? Mas pode ser que alguns tentem, mas até podem tentar fazer pela árvore [incompleta ou não], chegam por dedução e percebem logo quantos casos vão dar, não é? Ou poderão fazer logo pelo produto se tiverem percebido, não é? Depois é uma roda com números de um a dez, roda-se quatro vezes quantos códigos diferentes é que podem gerar...

Bárbara: Essa questão, então tu vais dar antes do problema de generalização?

Maria: Dou antes do problema de generalização (...) porque nenhum deles generalizou. Se tivessem feito muitos exercícios com o mesmo raciocínio, usando a regra de produto, depois eram capazes de generalizar sozinhos. Provavelmente veremos se são ou não. Eu creio que possam ser, mas depois vamos ver. Analisar primeiro o a) e o b), depois fazia estes exercícios, depois ia fazer o d) e depois no final ficava a generalização [2c)]. Para ver exactamente o que é que dava.

Bárbara: Deixa-me só perguntar-te uma coisa. O quarto item [2d)] não tem menos elementos do que o exercício que tu estás a propor?

Margarida: Tem menos, não tem?

Maria: Quer dizer que este raciocínio, [apresentado na questão 2d) do teste], para eles, não teve significado nenhum neste contexto. Zero, não é? Pois eles não o fizeram. (sessão 6)

Depois, desta conversa, o problema do dado foi substituído pelo lançamento de um rapa duas vezes. Em seguida, reflectimos em conjunto sobre problemas que se propuseram e que se integraram na Ficha de trabalho. Tinham sido apresentados três problemas de Batanero et al. (1997), pela investigadora, que se enquadravam nos seguintes modelos implícitos: um de selecção, outro de distribuição e outro de partição.

Margarida comentou que, no problema de distribuição, os alunos possivelmente apresentariam muitas dificuldades em interpretá-lo e, por isso, achámos oportuno resolvê-lo. Estivemos, então, a confrontar dois métodos de resolução: um utilizando os arranjos com repetição e outro que utilizava um esquema que se traduzia na soma de três parcelas, utilizando a operação combinatória “Combinações”. Todas achámos que este último processo seria a opção dos alunos e, como tal, seria um óptimo problema para ser resolvido novamente quando se leccionasse a operação “Combinações”.

Maria: Vão fazer. Eu na minha opinião acho que eles vão imaginar tipo pares ordenados (4, 0), (3, 1), (2, 2), e assim vão enumerar.

Margarida: Criar as possibilidades.

Maria: Eu acho que o problema vai surgir quando eles tiverem (3,1) e (1,3) porque se não tiverem noção que os quartos são diferentes, e por isso é diferente (1,3) e (3,1) (...), vão ter menos resultados do que aqueles possíveis, não é? O nosso n diminui em relação aos outros [problemas]. Aqui, neste caso, é arranjos com repetição de 2, 4 a 4.

Margarida: Apesar de que se a Maria der este problema a seguir a toda a estrutura que está a fazer, eles ficam um bocadinho não é? Condicionados pelo que aconteceu na aula, não será? (sessão 6)

Achámos particularmente benéfico procurar a informação e a análise cuidadosa das respostas dos nossos alunos e fazer uma apreciação das estratégias espontâneas por eles usadas, pois considerámos que este conhecimento ajudar-nos-á, como professores, a orientar a nossa prática lectiva. Na consecução deste objectivo, as participantes propuseram-se assistir às aulas umas das outras, pensando, desta forma, aprender e poder reflectir de forma crítica sobre a sua própria prática lectiva (NTCM, 2007).

5.2. Prática pedagógica das professoras

No estudo da prática pedagógica das professoras tivemos como foco as tarefas implementadas na sala de aula, observando a operacionalização da planificação do conteúdo desenvolvida nas diversas sessões. Nesse sentido, ambas as docentes concretizaram o guião que se apresenta a seguir.

Tarefas de introdução

- Análise dos itens 2a) e 2b) do teste. Discussão dos processos de resolução/ estratégias utilizadas.
- Exercícios propostos:
 1. A Inês vai lançar um rapa (R; T; D; P) duas vezes consecutivas. Quantos são os resultados possíveis?
 2. O João Hardware decidiu criar um código de acesso ao seu cacifo. O código é uma sequência de 3 letras e dois dígitos. Quantos códigos consegue formar?
Nota: Considera o alfabeto com 26 letras.
- Análise dos itens 2d) e 2c) do teste.

Tarefas de desenvolvimento

1. Resolução da ficha de trabalho 2.
2. Definição de arranjos completos.
3. Exercícios do manual.

Tarefas de introdução

Maria iniciou a aula, entregando a cada aluno um documento com cinco folhas contendo respostas, por ela seleccionadas, previamente, à questão 2 do teste, destacando: “Ora bem, os processos [de resolução] são todos diferentes”. De imediato, uma aluna referiu que a sua resposta não tinha sido incluída, denotando que gostaria de ver o que fez, pois já tinha realizado o teste no início do ano lectivo.

Enquanto entregava as resoluções, Maria pediu aos alunos, autores das respostas entregues, para explicarem à turma o raciocínio utilizado, dando 2 ou 3 minutos para que, em pares, os alunos analisassem e verificassem os processos de resolução apresentada nas alíneas 2a) e 2b): “O que é que eu quero que façam? Pode ser dois a dois, analisem por favor estas duas primeiras respostas em todas as folhas”.

Maria falou todo o tempo e forneceu todas as explicações, umas vezes completando os raciocínios iniciados pelos alunos, outras vezes transformando o que os alunos diziam noutra linguagem, que ela achava que eles compreenderiam melhor ou visando organizar o discurso do aluno, como se ilustra no diálogo seguinte:

Maria: Então pensou como a Filipa. Só que a Filipa escreveu em texto e depois fez a enumeração. E o André pensou numa árvore, não é? Ou seja, primeiro deu a resposta e depois...

André: Para o primeiro dava três...

Maria: Para o primeiro dava três hipóteses, não era? E depois para o segundo, três. Então quer dizer, pensou assim: o primeiro algarismo teria três hipóteses, o segundo tinha três hipóteses, e por isso deu nove, foi? (...)

Após manter este diálogo com os alunos e de terem, em conjunto, chegado à resposta correcta das alíneas 2a) e 2b), a docente perguntou se seria então necessário usar o diagrama de árvore, a tabela ou a enumeração para responder às questões, como se realça:

Maria: Então, se agora escolhêssemos aqui um processo para resolver as duas questões, como é que vocês resolviam a a)? Como é que fariam?

Aluna: 3x3.

Maria: 3x3. E o b)?

Aluna: 5x5.

Maria: Ou seja, já não pensavam em árvore?

Alunos: Não.

Maria: Já não faziam a enumeração?

Alunos: Não.

Maria: Fariam todos o produto, Patrícia?

Patrícia: Sim.

Maria: Ou faria árvore?

Patrícia: Não.

Maria: Fazia sempre o produto? Muito bem. Então vamos ditar aqui uns exercícios para fazer. Exercício 1. Posso ditar?

Maria não transmitiu a informação, mas conduziu os alunos à resposta pretendida através de uma sucessão de questões de *confirmação e focalização*, em que o professor, conhecendo a resposta, pretende confirmar se os alunos também a conhecem. Para tal, o professor coloca questões de focalização de modo a orientar o aluno para aquilo que pretende (Ponte & Serrazina, 2000).

Depois de ditar os dois exercícios, que constam no guião da aula, foi dado algum tempo para os alunos os resolverem sozinhos. No caso do exercício 1, o Pedro, depois de solicitado, respondeu: “Existem 4 faces, num lançamento existem 4 hipóteses; se for em 2 lançamentos será 4×4 ”, e o André

acrescentou 4^2 . Partindo desta constatação, a professora escreveu de imediato no quadro: $4^2, 4^4, \dots, 4^{100}$. Uma aluna corroborou a escrita da professora, pois não se iria escrever $4 \times 4 \times \dots \times 4$ (50 vezes) se girássemos o rapa 50 vezes, mas sim 4^{50} .

Relativamente ao exercício 2, a professora escreveu no quadro a resposta de Rita: $26 \times 26 \times 26 \times 2 \times 2 \times 2$. Outra aluna acrescentou: “Se fizermos como o André fica: $26^3 \times 2^3$ ”.

De seguida, a professora, orientando os alunos, propôs-lhes que analisassem criticamente as respostas à alínea d), dizendo:

eu quero que tenham capacidade crítica (...); olhar para a a) e b) e ver o processo que utilizaram para a a) e para a b). E depois, na d), [verificar] se mantiveram o processo. Por exemplo, estas estavam erradas e a d) está certa ou estas estão certas e a d) está errada. Sim? Em cada uma eu quero que pensem assim.

Continuando, a professora pediu à aluna Elsa para que lhe explicasse o raciocínio por si usado.

Elsa: (...) [construía] outro ramo.

Maria: Há aqui [teve] preguiça para fazer, leu mal e não viu que era três, e viu que era dois? Diga o que é que pensou.

Elsa: ...

Maria: Ou seja, e não achou ridículo dar 20, quando à frente, com dois, lhe tinha dado 25?

Elsa: Pois, enganei-me.

Maria: Não tem capacidade crítica para dizer? Oh meu Deus! Então, quer dizer, tem menos ainda que a resposta b)? Mas se hoje fizesse como é que pensaria?

Elsa: Se calhar, acrescentava um ramo à árvore.

Maria: Sim. Ah! Sem fazer o produto como nós fizemos até agora, acrescentaria um ramo à árvore. André, ora muito bem, vamos explicar a d) da segunda página. Como é que pensou, se não se importa? Porque é assim, o André...

A professora pediu ao André para explicar o seu raciocínio, visto estar correcto. O André explicou que, com 2 algarismos, tinha 25 números, na alínea b). Por isso, nesta situação, seria 25×5 , acrescentando que seria 5^3 porque “são três dígitos e para cada um temos 5 hipóteses”, ao mesmo tempo que escrevia no quadro:

$$\begin{array}{r} 25 \times 5 \\ - - - \quad 5^3 \\ 5 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

Após a resolução da alínea d), passou-se para a resolução da alínea 2c). Nesta alínea, um aluno apresentou como resposta $2n$. Confrontado com a explicação desta resposta, ele justificou-se: “queria usar a alínea b) mas perdi-me”. A professora tomou o que o João escreveu e copiou para o quadro:

Algarismo	Números
1	5

De seguida, outros alunos completaram:

2	$25 = 5^2$
...	...
n	n^2

Rita apressou-se a dizer: “usei os dois exemplos de cima”, a alínea a) e b), e a professora escreveu no quadro:

2a) $3 \times 3 = 9$	3^2
2b) 5×5	5^2
2c) $n \times n$	n^2

n^3 se tiver 3 algarismos

n^5 se tiver 5 algarismos

Esta professora conduziu a resolução das tarefas propostas sendo a aula controlada por ela ao estabelecer o ritmo da actividade dos alunos.

Na sua abordagem metodológica, Margarida incentivou os alunos, organizados em grupos, a partilharem os resultados e as estratégias usadas por cada um nas suas respostas à questão 2 do teste: “Toda a gente vai analisar todo o material que têm no grupo relativamente às questões 2a) e 2b). Não quero saber se está certo ou errado, podemos ir mais além, perceber o raciocínio, está bem? Então vá lá.”

Os alunos envolveram-se rapidamente na tarefa proposta pela professora; não só porque era muito significativa para os discentes, visto assentar num trabalho realizado por eles, mas também por estarem habituados a trabalhar de forma autónoma nas suas aulas de Matemática. Margarida organiza os seus alunos, desde o 10.º ano, frequentemente, em trabalho de grupo o que potencia discussões ricas.

Durante a aula, verificou-se que quando não havia consenso, os alunos chamavam a professora para os esclarecer, ao que ela contestava: “Têm que referir a estratégia que foi usada, têm que transmitir ou tentar transmitir aquilo que foi pensado pelos vossos colegas, por cada um, na resolução das alíneas a) e b).” Tendo sido consensual, nas sessões de planificação, a importância das discussões finais, no grupo turma, a professora desafiou cada grupo a escolher um porta-voz para expor as conclusões a que tinham chegado.

Paulo: Com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números diferentes de dois algarismos podemos fazer? [questão 2a)] O meu raciocínio foi: o número de elementos possíveis elevado ao número de vezes que eu tinha que utilizá-los.

Margarida: Temos aí o 3^2 . E porque é que pões aí um dois? (...) Então tu consegues imaginar ou lembras-te de algum raciocínio antes de chegares a essa analogia?

Margarida, ao longo da aula, foi colocando questões sem validar as respostas dos alunos. Segundo esta professora, os seus alunos não gostam de ser orientados, devendo ser dado um certo tempo e deixar os alunos fazerem algum esforço no sentido de explorar e justificar.

Margarida: (...) Portanto, o raciocínio que tu achas que fizeste na altura foi esse.

Paulo: Se calhar veio do 9.º ano, só que eu não sei, nesta altura não sei.

Margarida: E consegues explicar com outra linguagem naquilo que pensaste?

Paulo: Primeiro fiz assim: 12, 22, 23 ... Se fossem 20 números com não sei quantos algarismos, não fazia isto, tinha que arranjar outra forma de fazer isto.

Margarida: Ah! Então quer dizer, a fórmula do exercício veio a partir duma coisa que tu fizeste e que eu não vi.

Paulo: Exacto.

Margarida: Ai tu fizeste isso! Então porque é que tu não puseste só 9 e puseste 3^2 ? É que aí deu-te 9.

O aluno explicou que na sua folha de rascunho tinha enumerado todos os casos possíveis e escreveu no quadro, tentando apresentar uma expressão porque no caso de ter muitos elementos não poderia fazer a enumeração. Então, o Paulo construiu as linhas da tabela:

	11	22	33
	12	23	32
	21	31	13

A partir da tabela, Paulo parece ter recorrido à fórmula da área do quadrado, definido na tabela, para encontrar a fórmula dos arranjos completos:

eu fiz isto, só que depois tinha que arranjar uma maneira de fazer uma fórmula. E tive a tal ideia de 3^2 . E depois é que e lembrei que se podia fazer o número de elementos pelo número de vezes que tinha que utilizá-los.

Antes, Margarida tinha chamado a atenção para a existência de uma enumeração sistemática ou não sistemática, pois o Paulo, ao não seguir um sistema para organizar os dados, tinha-se esquecido do número 13.

Alguns alunos usaram raciocínios em que nem nós nem outros alunos, nomeadamente o aluno porta-voz do grupo, tínhamos pensado. Assim, a partilha e o confronto de ideias suscitou a discussão de questões e raciocínios que teriam passado despercebidos, como confirma o diálogo seguinte, em que Paulo apresenta apenas como resposta a expressão $11 > 33$:

Paulo: Temos outro caso, mas este caso foi mesmo dramático.

Margarida: Este caso começa mal. O Paulo já começa a dizer que ele é dramático. Então vamos lá ver qual é o drama.

Paulo: (...)

Margarida: E então? Dai olhaste... para que parte é que tu olhaste, para tentar perceber?

Paulo: Eu acho que o que está aqui não tem nada a ver.

Margarida: Pronto. Mas então, tinha o 9?

Paulo: Tinha o 9, tinha a resposta correcta.

Margarida: Tinha o 9, tinha a resposta. E aí? E então chegámos à conclusão que essa pessoa não fez um raciocínio, a não ser chegar ao resultado, foi?

Paulo: Não, pode ter feito um raciocínio, mas não foi...

Aluna: Explícito.

Margarida: É essa a opinião do grupo sobre quem pôs o 9? Muito bem. Mas eu sei quem foi o autor. O autor foi o Hugo.

Então Hugo explicou que 11 era o menor número e 33 o maior, que tinha feito no rascunho a enumeração e que pela contagem lhe deu o 9. Finalmente, disse com satisfação: “Está explicado. Afinal o 9 tinha um raciocínio”.

Teresa, porta-voz de outro grupo, chamou a atenção de toda a turma para o facto de ter feito uma má interpretação dos conceitos, números diferentes e Algarismos diferentes, não os compreendendo e confundindo-os inicialmente.

Margarida questionou o grupo turma sobre, se fosse agora, qual a estratégia que considerariam na resolução desta questão. Uns disseram que usavam o diagrama de árvore, “para ter segurança”, ao que Margarida replicou: “E se tivésseis muitos elementos?” Uma aluna disse que faria uma árvore, ainda que incompleta.

De seguida, Margarida ditou os dois problemas previstos no guião. Depois de ter construído uma tabela e um diagrama no quadro, Paulo fez questão de dizer, com convicção, que queria testar a fórmula encontrada antes. E foi através da discussão em torno das estratégias usadas por Paulo que os alunos resolveram os problemas e generalizaram.

Comparativamente com Maria, que manteve uma atitude mais directiva, a postura de Margarida ao longo das suas aulas assistidas foi querer aprender com as respostas dos alunos e considerá-las como recursos para promover a aprendizagem com compreensão. Na consecução de tal objectivo, evitava dar as respostas, desafiando os alunos a encontrá-las por si próprios.

Tarefas de desenvolvimento

Aquando da resolução do problema 1 da ficha:

Numa caixa há quatro berlindes numerados (com os dígitos 2, 4, 7, 9). Escolhemos um dos berlindes e registamos o seu número. Pomo-lo de volta na caixa. Repetimos o processo

até que formemos um dígito de três números. Quantos números diferentes de três dígitos é possível obter? Por exemplo, podíamos obter o número 222.

um aluno de Maria comentou: “é como que seja uma extracção com reposição”, ou seja, o aluno sentiu necessidade de comparar o novo por analogia com o já conhecido, usando desta forma um raciocínio analógico. Após várias intervenções dos alunos, a Maria escreveu no quadro o esquema:

$$\begin{array}{ccc} 1^{\text{a}} V & 2^{\text{a}} V & 3^{\text{a}} V \\ 4 & \times & 4 & \times & 4 & = & 4^3 \end{array}$$

A professora questionou a turma no sentido de saber o número de alunos que responderam 4^3 . Levantaram o braço 7 alunos, embora os restantes também tenham respondido correctamente.

A postura dos alunos da Margarida perante a resolução deste problema de selecção foi idêntica, acertaram com muita facilidade e com compreensão relativamente rápido.

A questão 3 – Um rapaz tem quatro carros de cores diferentes (preto, laranja, branco e cinza) e decide distribuir os carros pelos seus amigos Peggy, John e Linda. De quantas formas diferentes é que ele pode distribuir os carros? Por exemplo, ele podia dar todos os carros à Linda. —, um problema de “partição”, não foi trabalhada na sessão de preparação da aula. A professora pediu aos alunos que descrevessem o raciocínio usado, e a Catarina disse logo 4^3 , acrescentando: “4 carros por três pessoas”. Maria apressou-se a escrever no quadro $4 \times 4 \times 4$ e colocou a questão: “Todos vão receber o carro preto, por exemplo ao mesmo tempo?” Deste confronto com o erro, um aluno sugeriu que seria como sentar 4 pessoas e a Maria escreveu $4 \times 3 \times 2$. Tendo um aluno sugerido que “A Peggy fica com 4 carros”, a professora escreveu no quadro algumas configurações:

P	L	J
4	—	—
3	1	—
3	—	1
2	1	1

A discussão manteve-se por uns bons minutos, permitindo que todos os alunos partilhassem as suas ideias e revelando dificuldades relativamente à realização desta tarefa. Durante esta parte da aula, Maria utilizou um questionamento apropriado visto que quis conhecer os porquês das respostas erradas e correctas que iam surgindo, valorizando, desta forma, as capacidades dos alunos e proporcionando-lhes oportunidades de descoberta.

Devido ao avançado da hora e perante as dúvidas dos seus alunos, a professora estabeleceu algumas conclusões que escreveu no quadro: “Vamos fixar os carros”.

preto ,	laranja ,	branco	e cinza
P	L	B	C
↓	↓	↓	↓
3 hipóteses			

Maria: Ou vai para a Peggy, eu vou pôr aqui por letras, ou vai para o John ou vai para a Linda. Sim? Depois, o carro laranja pode ir para quantas pessoas?

Aluna: Para três.

Maria: O branco?

Aluna: Para 3.

Maria: E o cinza? Para três. Quer dizer que a forma que eu tenho para distribuir os carros vai ser 3^4 . Sim? Agora vão ler o enunciado seguinte. Ora bem, Joaninha, posso, querida? Diz assim: ‘Quatro crianças, a Alice, a Berta, a Carol e a Diana, vão passar a noite a casa

da avó delas. Ela tem dois quartos diferentes disponíveis, um no rés-do-chão e outro no andar de cima, nos quais ela pode colocar algumas ou todas as crianças para dormir.' Ou seja, quer dizer, podem ficar todas num e nenhuma no outro, não é, ou ela dividir as crianças. Ela pode usar só um quarto para colocar as crianças ou ela pode colocar a Alice, a Berta e a Carol no rés-do-chão e a Diana no quarto de cima. Sim?

Perante este problema de distribuição, os alunos de Maria e Margarida reagiram com muita facilidade à sua resolução. No entanto, Margarida não validou de imediato a solução desenvolvendo-se uma discussão durante um certo tempo, como o confirma o diálogo seguinte:

Margarida: Ana! Explica o problema.

Helena: A Alice, a Berta, a Carol e Diana têm dois quartos disponíveis. (...) Como vimos também pelos arranjos, temos as quatro crianças para dois quartos; que fica 4^2 , que dá 16.

Margarida: Mas se eu olhar para o teu esquema vejo assim: no primeiro quarto ficam quatro, no segundo zero; e depois tens...

Relativamente ao problema 3, os alunos da Margarida fizeram um debate demorado, confrontaram diversas estratégias que surgiram na sua resolução, muito semelhantes às surgidas na aula da Maria, não conseguindo, no entanto, chegar ao final com sucesso auferindo o mesmo desfecho. É de salientar que Margarida implementou este problema depois do problema 2 da ficha em resultado da reflexão realizada sobre a aula da Maria, que aconteceu antes desta aula de Margarida.

5.3 Sessões de reflexão sobre a prática

Na primeira sessão de reflexão, a investigadora interveio pouco para permitir às professoras reflectirem sobre as suas práticas de forma natural e espontânea, pois receava-se que as professoras interpretassem as suas questões sobre aspectos da aula que lhe pareciam pertinentes como uma apreciação negativa do que tinha acontecido.

A organização das sessões de reflexão das aulas assistidas obedeceu a um padrão pouco estruturado: em primeiro lugar, tinha a palavra a professora que tinha leccionado, fazendo uma apreciação global da aula, depois falava a professora que assistiu à aula e no final a investigadora. No entanto, ainda na primeira sessão, Margarida, a professora que mais tarde leccionou o mesmo conteúdo, questionou Maria sobre aspectos didácticos, nomeadamente a exploração do problema 3 da ficha de trabalho. Nesta situação, ao verbalizar o seu pensamento através das questões postas pelas colegas que assistiram à sua aula, Maria clarificou o seu raciocínio ao repensar a situação e promoveu o seu enriquecimento profissional e pessoal.

Nos comentários que Maria teceu ao longo da planificação da lição não se vislumbrava que a aula fosse tão expositiva e orientada, assim como o não cumprimento do guião previamente definido, proferindo: “eu acho que até um bloco para arranjos com repetição é muito, é cansativo. Até para eles vai ser cansativo porque..., eles não vão precisar e vão dizer: “ai, isto é tão fácil”, e depois na aula a seguir levam um balde de água fria porque já não é tão fácil” (sessão 5).

Temos de ter em conta que um plano de aula, por mais informal que seja, é um conjunto de intenções que nem sempre é realizado e cuja apropriação depende das perspectivas do professor que o implementa. No caso de Maria, talvez mais as suas perspectivas sobre o ensino da matemática do que o não cumprimento do guião expliquem a sua perplexidade no fim da aula: “Se dermos assim a Combinatória não cumprimos o programa e o teste intermédio realiza-se no dia 10 de Dezembro”. Na aula seguinte, agendou aulas extra para consolidação de conteúdos, propondo a resolução de problemas e exercícios do manual.

Sobre estas aulas podemos inferir o quão necessário é pedir aos alunos que elaborem explicações teóricas e escritas acerca do seu trabalho, verbalizem o seu pensamento de forma a organizarem os seus conhecimentos com a ajuda do professor. Em conversa informal com Margarida, depois da aula, ela

comentou que por vezes os professores interpretam erradamente respostas, como a que o Paulo apresentou no teste. Por ter apresentado apenas o resultado final, podia pensar-se que o aluno copiou pois não apresentou qualquer processo de resolução. Sem dúvida, surpreendeu-nos a riqueza do seu raciocínio. Como muitas vezes avaliamos injustamente determinadas situações! A resposta dada por este aluno veio ao encontro do cenário sugerido na reflexão à aula da professora Maria, em que se deveria ter explorado uma resposta apresentada por uma aluna na sua aula.

É de salientar as dificuldades apresentadas pelos alunos ao problema 3 da ficha de trabalho.

(...) era um problema de enunciado de grau de dificuldade acima do habitual, a interpretação. Para além daquilo que se exige habitualmente no 12.º, de um raciocínio muito elaborado e fora do contexto, completamente descontextualizado do que eles habitualmente fazem, porque eles têm que inverter a ordem, ou seja, eles não vão pensar... Eles habitualmente pensam é nas pessoas para os carros e não nos carros para as pessoas. Isso, para eles, no início foi alguma confusão e só orientados... Observando pela confrontação das respostas erradas é que foram chegando. Claro que não chegaram, efectivamente, sozinhos ao resultado. Chegaram a uma orientação e houve uma hipótese de um que dizia: 'ah, podem ficar os cinco numa pessoa e os outros não têm nenhuma, depois...' isso foi o registo. Mas, para efectivamente eles chegarem ao raciocínio de que poderia ser três hipóteses para o primeiro caso, três hipóteses para o segundo, eu tive que os orientar muito para isso, eles sozinhos não conseguiriam. (Maria, sessão 7)

Apesar dos constrangimentos, há aspectos positivos a retirar, como a leitura e a interpretação:

Olha, Margarida, eu acho que consegui só uma coisa. A primeira coisa e a mais importante é que eles agora já lêem muitas vezes o enunciado. Hoje eles leram para aí três vezes cada enunciado. (...) Porque se eu dissesse: a mais-valia é muito difícil, eles...Isso eu vou ver daqui a uns tempos. Essa não me parece que seja a mais-valia. A mais valia foi adverti-los efectivamente, que eles têm que interpretar muito bem, que eles têm que criar um esquema mental, que eles não podem passar para a solução sem tentar esquematizar. E hoje [na aula seguinte] era isso que a gente fazia... (Maria, sessão 7)

Porém, o que acaba de ser dito não é confirmado pela prática. Como podemos verificar, o diálogo de Maria com os alunos sobre as respostas dadas às alíneas 2a) e 2b) é dissuasor dos alunos usarem as técnicas informais de contagem, os esquemas, incentivando o uso de técnicas formais, culminando, este facto, na resposta a uma questão do questionário que as professoras ministraram aos alunos no final do ensino do tema: "A resolução do teste antes de aprenderes Combinatória facilitou a tua aprendizagem das operações combinatórias? Porquê?"

Bárbara: Há aqui uma resposta: 'Sim, facilitou. Antes de aprender Combinatória era preciso um maior raciocínio e também recorrer a desenhos, diagramas, etc.'

Maria: Ou seja, o que é que acontece? Eles acabaram por achar que simplificou todos os processos que faziam anteriormente, que já não precisam de fazer isso porque... Eles acharam que isto lhes facilitou muito mais. Porque é que faziam árvores? É muito mais fácil assim, não é? (...) Porque eles agora decerto já não têm uma necessidade de esquematizar. Ou seja, neste momento eles já sabem coisas muito mais difíceis (...). (Sessão 14)

Nas palavras da Maria também se verificou o quão importante foi para os alunos a valorização das suas produções pelos colegas e pela professora, pois "resolviam o mesmo problema por outras formas, isso é que eles gostaram. O facto de termos estudado mais pormenorizadamente cada questão [do teste], fazermos vários processos diferentes."

Também na opinião da Margarida:

(...) gostei porque nunca me tinha apercebido que era tão importante para eles nós valorizarmos os raciocínios, mesmo aquilo em que eles estavam errados. (...). E o que eu acho ótimo. Acho que eles realmente nos deram, pelo menos a mim, uma grande lição com aquilo que escreveram. (...) Também focaram o facto dos colegas... dos colegas, no fundo, aperceberem-se também dos raciocínios que eles tiveram, e que lhes deu uma, como eles dizem aqui: 'mais vontade de mostrar de que sou capaz', a auto-confiança. Então, muitas vezes nós falámos em motivação dos alunos, que é colocar uns computadores, uns quadros interactivos, umas coisas, e afinal eles motivam-se mais... [com uma coisa tão simples]. (...)

Talvez o facto de eles terem desenvolvido os seus raciocínios, e sentiram que eles estavam a fabricar, no fundo, o conhecimento, lhes deu demasiada auto-confiança (...). São eles que estão a fabricar o conhecimento e sentem que não estão a decorar, não estão a aprender algo que lhes é impingido, eles estão a sentir de onde vêm as bases, (...) porque vêm a lógica das coisas. (Sessão 14)

6. Conclusões

O teor das reuniões de trabalho evoluiu com o tempo pois entre as participantes gerou-se um clima de empatia, que constituiu uma mais-valia para este trabalho. Inicialmente centrámo-nos na observação das respostas ao teste, na tentativa de interpretação dos pensamentos dos alunos e na planificação das aulas. Na prática lectiva, os alunos confrontaram-se com as várias interpretações examinaram e debateram as estratégias usadas por eles na resolução dos problemas. Nas reuniões de reflexão entre docentes, analisámos a acção, sempre no sentido de alterar e mudar as práticas lectivas, visando o sucesso escolar dos alunos.

Notou-se o despertar de um sentido de pertença das participantes ao projecto, perceptível na forma de interacção entre as três, na confiança e no à-vontade que progressivamente mostravam em expor as dificuldades da prática e de outros problemas com o objectivo de partilha. Proporcionou-se momentos de reflexão conjunta e de desenvolvimento de um diálogo que veiculava o sentimento de um apoio na resolução de dificuldades sentidas. Este contexto de trabalho, a nosso ver, contribuiu para uma aprendizagem mútua. Intuímos também que a observação de aulas das professoras desencadeasse novas formas de concretizar o mesmo guião de aula como consequência da nova compreensão das situações vividas na observação da aula.

Maria revelou-se sempre uma pessoa muito confiante no que já sabia e no que fazia desvalorizando, por vezes, as potencialidades do trabalho colaborativo que se desenvolveu no sentido de potenciar a mudança, sobretudo, de atitude e de suporte para melhorar a sua prática lectiva a partir da troca de ideias e experiências.

Margarida revelou outra postura perante o projecto, nomeadamente, acreditando na concretização das estratégias delineadas nas sessões de planificação e mostrando muita vontade em experimentá-las, o que conseguiu com êxito, apesar de ter que gerir algumas dificuldades. Margarida tomou consciência de que tinha de estudar e preparar muito bem as lições, para que, desta forma, pudesse orientar com sucesso as aulas que estávamos a planificar em conjunto. Para tal, imaginava em casa episódios que poderiam acontecer durante a sua acção docente, treinando mesmo o tipo de questões a colocar aos alunos. Considerou este trabalho essencial para evitar cair na rotina que frequentemente se verifica no trabalho dos professores com o decorrer do tempo.

Apesar de lento e do reconhecimento de pequenos avanços em considerar novas tarefas que contextualizassem uma troca e um confronto de ideias e de opiniões entre os alunos, visando centrar o ensino nas suas experiências, as actividades implementadas revelaram-se uma mais-valia no crescimento do conhecimento didáctico das professoras.

A adesão a novas estratégias e/ou metodologias na prática docente, permitiu concluir que ocorreu alguma mudança, contribuindo para uma melhoria do conhecimento didático das participantes e da investigadora. Neste processo de mudança, a colaboração e a reflexão realizadas nas sessões foram os instrumentos fundamentais, como defende Poletini (1999, p. 194): “Reflectimos, reavaliando e reorganizando experiências vividas, no sentido de procurar orientação para experiências futuras, sendo nesta perspectiva muito importante a reflexão sobre o pensamento e a reflexão sobre a nossa prática e a prática dos outros”.

Referências bibliográficas

- Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales. ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística: Actas – I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 85 - 102). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento Combinatorio. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: ISO Press.
- Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Caetano, A. P. (2004). A mudança dos professores pela investigação - acção. *Revista Portuguesa de Educação*. 17(1), 97-118.
- Correia, P. F. (2008). *Raciocínios em combinatória de alunos de alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2007). Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. In A. Barca, M. Peralbo, A. Porto, B. Duarte da Silva e L. Almeida (Eds.), *Libro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía* (pp. 1138-1663). A Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación.
- English, L. (2005). Combinatorics and the development of children`s combinatorial reasoning. In J. Graham, (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.121-141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fernandes, J. A., Sousa, M. V. & Ribeiro, S. A. (2004). O Ensino da Estatística no ensino básico e secundário. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística, Actas – I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 165-193). Braga: Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho.
- Ferreira, A. C. (2006). Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras. *Quadrante*, 15 (1), 121-144.
- Ferreira, J. S. (2007). *O ensino da combinatória no 12.º ano de escolaridade: análise das estratégias de ensino*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischbein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189-201). Dordrecht: Reidel.

- Garcia, C. M. (1992). A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 51-76). Lisboa: Dom Quixote.
- Garnica, A. V. & Fernandes D. N. (2002). Concepções de professores formadores de professores: Exposição e análise de seu sentido doutrinário. *Quadrante*, 11(2), 75-98.
- Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempo de mudança*. Lisboa: McGraw-Hill.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Little, J. (1990). The persistence of privacy: Autonomy and initiative in teachers' professional relations. *Teachers Collage Record*. 9 (4), 509-536.
- Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Tradução portuguesa do original de 1989.)
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Tradução portuguesa do original de 2000.)
- Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *Actas do ProfMat 2003* (CD-Rom, pp. 25-39). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Poletini, A. F. F. & Sabaraense, N. C. (1999). Inovação, mudança e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante*, 8(1-2), 189-212.
- Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.
- Shulman, L. S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject specific conceptions of teaching. In L. Mesa & J. Jeremias (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 53-69). Santiago de Compostela: Tórculo Ediciones.
- Silva, D. N., Fernandes, J. A. & Soares, A. J. (2004). Intuições de alunos de 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística: Actas – I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho.