2 Revisão de Literatura

2.1 Evolução da tecnologia educativa: a calculadora gráfica

> *O uso de instrumentos de cálculo num ensino para todos. (...) Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos. O ensino do Liceu, que é para todos, deve ser orientado no sentido de proporcionar a todos o manejo do instrumento que a técnica nova permite.*
>
> *Bento de Jesus Caraça, 1942*
> *Gazeta de Matemática, n.º 11*

Desde os tempos mais remotos, cada civilização teve as suas tecnologias próprias que utilizava para as mais diversas tarefas, desde a produção de alimentos e vestuário à realização de registos e cálculos. De facto, a tecnologia tem estado sempre presente na sala de aula e não somente nas aulas de Matemática, basta lembrar, por exemplo, a evolução que sofreram os instrumentos de escrita. As práticas correntes em Matemática e a sua nomenclatura reflectem o desenvolvimento tecnológico da sociedade. Por outro lado, as ideias e técnicas matemáticas têm sido

igualmente indispensáveis para criar novas tecnologias e novos instrumentos ([52] p. 41).

O Homem tem utilizado os mais variados instrumentos para contar, a começar pelos dedos da mãos (os Oksapmin, da Nova Guiné, representavam os números naturais usando diversas partes do corpo). Existem estudos arqueológicos que revelaram marcações efectuadas por seres humanos para efeitos de contagem com mais de 30 000 anos. Pequenas pedras foram também utilizadas como meios auxiliares para a realização das operações aritméticas usuais. Este facto esteve na origem do termo “cálculo” do latim, *calculu*, pedra ([52] p. 41).

Nas aulas de Matemática sempre se ensinou a tabuada. No entanto, ao longo dos tempos outros meios automáticos de cálculo foram sendo procurados como, por exemplo, o ábaco (figura 2.1) ou o quipos dos Incas. O ábaco pode ser considerado a máquina de calcular mais antiga da história do cálculo. Não se sabe ao certo em que altura apareceu o ábaco mas pensa-se que se desenvolveu independentemente em diferentes países, sendo um destes países a China. O ábaco é um dispositivo de cálculo aritmético que consiste, geralmente, num quadro de madeiras com cordas ou arames transversais, correspondentes cada um a uma posição digital (unidades, dezenas,...) e nos quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas, contas,...) que podem fazer-se deslizar livremente.

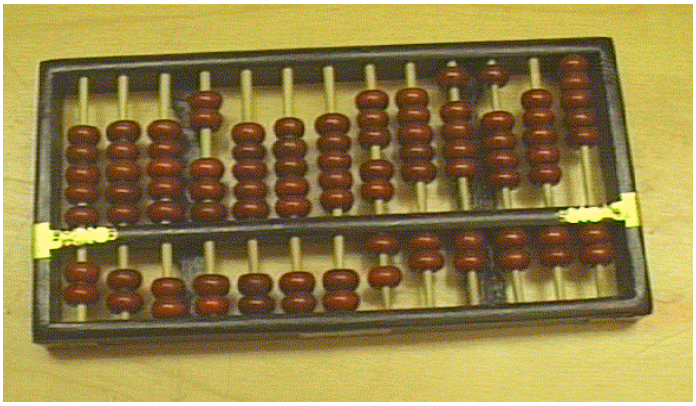


Fig. 2.1 - Ábaco

O aparecimento das tábuas de logaritmos (séculos XVI e XVII) foi extremamente importante. Como referem Sebastião e Silva e Silva Paulo, no seu *Compêndio de Álgebra*, "se esta invenção tem chegado ao conhecimento de Kepler mais cedo ter-lhe-ia reduzido o longo trabalho de 22 anos de cálculos que fez para estabelecer as leis do movimento dos planetas. Foi esse conhecimento, decerto, que fez de Kepler um dos mais entusiastas divulgadores do método dos logaritmos" ([57]).

Posteriormente, apareceram as réguas de cálculo (figura 2.2) que facilitaram ainda mais a realização de cálculos que não necessitassem de uma rigorosa precisão (continuava-se todavia a usar as tábuas de logaritmos nos casos em que os problemas envolvessem resultados com números com 7, 10 ou mais casas decimais) ([57]). Foi em 1622 que surgiu a primeira régua de cálculo da autoria de William Oughtred (1574 – 1660). Esta consistia em duas escalas logarítmicas (em que da origem ao número vai o seu logaritmo), escalas essas que deslizam uma em relação à outra. Para multiplicar dois números alinha-se a origem de uma com o multiplicando na outra, e lê-se nesta o resultado no alinhamento do multiplicador (que está na primeira, obviamente). Trata-se de uma máquina analógica em que se somam dois comprimentos proporcionais aos logaritmos dos números a multiplicar. A divisão é igualmente simples, e se o método não é muito preciso, em compensação é altamente simples e eficaz.

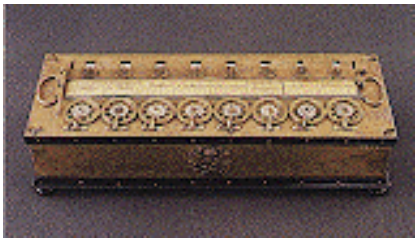


Fig. 2.2 – Régua de cálculo

Mais tarde surgiram as máquinas de calcular mecânicas. Os precursores das máquinas de calcular foram Wilhelm Schickard (1592 – 1635) e Blaise Pascal (1623 – 1662) ([64] p. 28).

Em 1623 Schickard construiu a primeira máquina mecânica de adicionar e subtrair. No entanto, esta máquina não foi divulgada publicamente. Em 1645, Pascal, com o objectivo de auxiliar o pai nos trabalhos com impostos, arquitectou uma máquina, designada por Pascaline (figura 2.3), que permitia adicionar e subtrair números até oito dígitos. O facto destas máquinas só permitirem a multiplicação por adições sucessivas e a divisão por subtracções sucessivas limitava o seu interesse prático ([64] p. 28).



Fig. 2.3 – Pascaline

A primeira máquina capaz de multiplicar foi construída por Gottfried Leibniz (1646 – 1716). Leibniz (figura 2.4) iniciou uma série de inovações que posteriormente foram aproveitadas nas máquinas de calcular mecânicas produzidas industrialmente. Todavia, o seu tempo não estava ainda preparado, em termos tecnológicos, para a generalização das máquinas mecânicas de cálculo. Somente em 1810 viria a ser construída a primeira máquina de calcular comercial ([64] p. 28).



Fig. 2.4 – G. Leibniz

Charles Babbage (1791 – 1871) (figura 2.5) foi professor de Matemática na *Universidade de Cambridge*, onde teve um papel importante na reestruturação do ensino da disciplina. Em 1820 iniciou a construção de uma máquina que seria a primeira aproximação de um computador, a "*Difference Machine*" (figura 2.6).

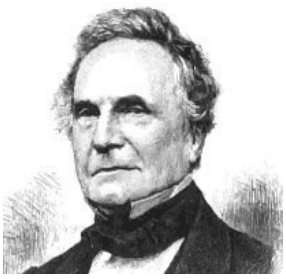


Fig. 2.5 – Charles Babbage



Fig. 2.6 – *Difference Machine*

Esta máquina permitia calcular automaticamente tabelas de funções trigonométricas e logarítmicas. Por esta descoberta recebeu, a 13 Julho de 1823, uma medalha de ouro da Astronomical Society que lhe permitiu obter o financiamento necessário para se dedicar à construção de uma nova máquina, a "*Analytical Engine*" (figura 2.7). Na concepção da sua segunda máquina, Babbage baseou-se nos cartões do tear manual. A "*Analytical Engine*" tinha uma memória constituída por grupos de 50 rodas contadoras, que podiam conter 1000 números de 50 dígitos cada (podendo, mediante perfuração e posterior releitura de cartões, estender a memória indefinidamente) e era constituída pelo moinho (a unidade aritmética da máquina, que fazia os cálculos), pela unidade de controlo (que controlava a ordem pela qual as operações eram feitas) e por mecanismos de entrada e saída. Esta estrutura prenuncia os modernos computadores electrónicos ([64] p. 29).

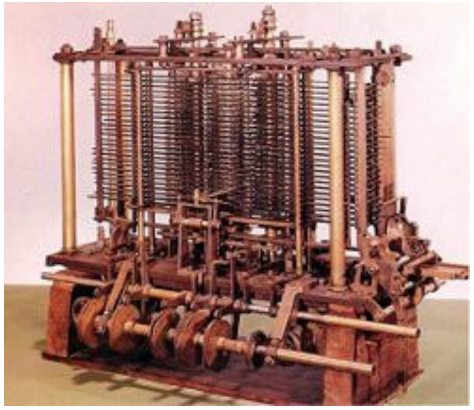


Fig. 2.7 – *Analytical Engine*

Nenhuma das máquinas de Babbage chegou a ser terminada, em grande parte pela falta de ferramentas de precisão que ainda não existiam.

Uma importante colaboradora e financiadora de Babbage foi Augusta Ada Byron (1815 – 1852, filha de Lord Byron e posteriormente Condessa de Lovelace) (figura 2.8). Augusta ajudou a desenvolver as instruções para a máquina analítica e é por vezes considerada a primeira programadora de computador do mundo ([64] p. 29).



Fig. 2.8 – Condessa Lovelace

Nos finais do século XIX as máquinas de calcular comerciais generalizaram-se, sendo famosa a máquina que o estatístico americano Herman Hollerith (1860 – 1929) construiu para tratar os dados do censo de 1890 nos Estados Unidos. O anterior censo, iniciado em 1880, levara cerca de 7 anos a ser calculado. Esperava-se que o de 1890 demorasse 10 anos devido ao crescimento populacional. A máquina de somar eletromecânica de Hollerith, construída em 1886 (figura 2.9), levou 6 semanas a efectuar esse *census* ([64] p. 29).

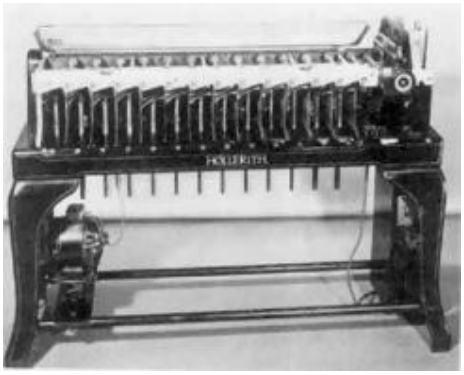


Fig. 2.9 – Máquina de somar de Hollerith

Até 1930 as aplicações do cálculo mecânico ao domínio científico foram um pouco negligenciadas. Todavia, o desenvolvimento das diversas ciências e a sua aplicação a sectores cada vez mais diversos da actividade humana exigiam cálculos cada vez mais complexos ([64] p. 29).

Os computadores só surgiram após o término da II Guerra Mundial. Num artigo da revista *Scientific American* de 1949 pode ler-se: ”Uma nova revolução está a ter lugar na tecnologia actual”. A revolução a que se refere o artigo foi o computador ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Calculator) (figura 2.10) construído nos Estados Unidos, na Universidade da Pensilvânia, em 1946. O ENIAC ocupava diversas salas, pesava cerca de 30 toneladas, precisava de 18 000 tubos de vácuo, 70 000 resistências e tinha capacidades de cálculo inferiores às das actuais máquinas de calcular de bolso (tinha uma memória para armazenar 20 números de 10 dígitos cada um) ([64] p. 29).



Fig. 2.10 – Computador ENIAC

O primeiro computador comercialmente disponível, o UNIVAC, apareceu em 1951 e baseava-se no ENIAC. Estes computadores de primeira geração (1945 – 1956) eram caracterizados por serem programados para uma tarefa específica. Cada computador tinha uma linguagem binária diferente (código máquina). Outras características destes computadores eram a utilização de tubos de vácuo (responsáveis pelas enormes dimensões) e os tambores magnéticos para armazenamento de dados ([64] p. 29).

Em 1948, a invenção do transístor contribui para uma significativa mudança nos computadores. Desde esta data que os computadores vêm

decrescendo em dimensão. Em 1956 o transístor começa a ser montado nos computadores. A segunda geração de computadores (1956-1960) substitui a linguagem máquina com o *assembly*, o que permite a utilização de códigos abreviados em substituição dos longos e difíceis códigos binários. No início dos anos 60 surgem os primeiros computadores comercializados (*Burroughs*, *Control Data*, *IBM*,…) com sucesso em áreas como as universidades, negócios e governos.

A necessidade de facilitar a programação levou ao surgimento das primeiras linguagens de alto nível, muito parecidas com a linguagem humana: o FORTRAN (1957) e o COBOL (1959). É com estas linguagens que começa toda a indústria de *software* ([64] p. 29).

A terceira geração (1960 – 1971) é marcada pelos circuitos integrados e pelo desenvolvimento do chamado sistema operativo (programa central que controla as tarefas mais básicas do computador deixando aos programas o trabalho mais específico). A quarta geração (1971 – presente) caracteriza-se pelo aparecimento do microprocessador ([64] p. 30).

A concepção de máquinas que permitissem realizar de forma expedita operações aritméticas cansativas esteve sempre na mente de matemáticos de diversas épocas. Sem deixar de ter em conta o papel de diversos domínios da ciência e da técnica que permitiram a sua realização prática, podemos considerar o computador como sendo o resultado natural do desenvolvimento de determinadas áreas da Matemática. Ao longo da segunda metade do século XX foram sendo desenvolvidas máquinas baseadas primeiro em sistemas mecânicos, depois em sistemas analógicos e finalmente em sistemas digitais. O seu objectivo era o de automatizar a realização de cálculos específicos.

Actualmente assistimos ao desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos, com mais potencialidades e muito mais baratos.

A calculadora começou por ser uma ferramenta dedicada ao cálculo. Hoje em dia ela é correntemente utilizada nas mais diversas actividades e por pessoas de todas as profissões e estratos sociais. Muitos trazem-na permanentemente consigo, uma vez que todos os telemóveis possuem uma calculadora que permite efectuar as operações aritméticas usuais. Certamente já existem telemóveis que possuem calculadoras mais avançadas.

As primeiras calculadoras electrónicas apareceram no início dos anos 60 e no início dos anos 70 surgiram modelos miniaturizados, alguns em tamanho de bolso. Enquanto que os modelos mais simples só permitem executar as quatro operações aritméticas básicas e determinar raízes quadradas, os modelos mais sofisticados podem mesmo calcular funções matemáticas transcendentes (trigonométricas, logarítmica, exponencial, etc.). Estas são as chamadas calculadoras científicas (figura 2.11).

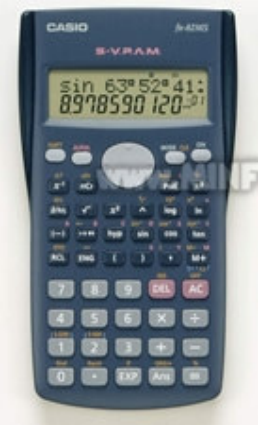


Fig. 2.11 – Máquina científica (Casio FX-82MS)

As actuais calculadoras programáveis de bolso são verdadeiros computadores já que, para além de dispositivos de entrada (teclado) e saída (ecrã), podem armazenar dados e programas (memória) e contêm no seu interior um microprocessador (cálculo e controle) ([64] p. 30).

No decorrer dos anos 80 surgiu um novo tipo de calculadoras que veio trazer uma revolução ainda maior: as calculadoras gráficas (figura 2.12). Estas são na realidade pequenos computadores com capacidade, por exemplo, para traçar uma grande variedade de gráficos em pouco tempo, programar e trabalhar com funções estatísticas. Enquanto não existirem nas escolas computadores em número suficiente, é de esperar que os alunos do Ensino Secundário possuam uma máquina de calcular gráfica, tal como acontece com o manual escolar. De facto, a calculadora gráfica além de ser muito mais barata do que um computador, é mais prática e pode ser usada a qualquer hora e em qualquer lugar, uma vez que o seu manuseamento é bastante simples, depois do domínio de algumas funções básicas. Além disso, o computador é normalmente uma ferramenta pesada, de difícil manuseamento para pessoas não experimentadas, tanto professores como alunos.

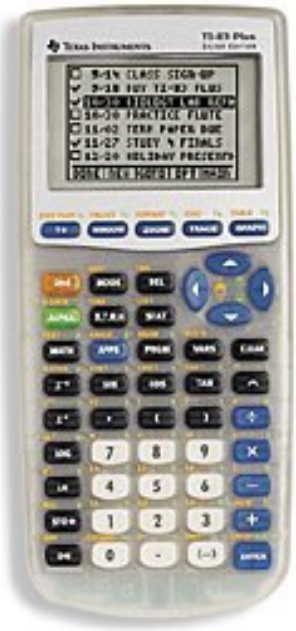


Fig. 2.12 – Texas Instruments TI – 83 Plus

Apesar de as máquinas gráficas actualmente comercializadas em Portugal se encontrarem mais direccionadas para o Ensino Secundário, onde o seu uso é obrigatório, nos últimos anos têm surgido diversas actividades de investigação no âmbito do estudo das funções no terceiro ciclo do Ensino Básico (ver por exemplo o livro *Funções no 3º ciclo com tecnologia* ([32]

pp. 10 – 14)). É claro que as calculadoras gráficas não poderão fazer tudo aquilo que está ao alcance de um computador, mas possuem imensas potencialidades.

Em 1995 surgiu no mercado uma nova geração de calculadoras que possui um Sistema Algébrico Computorizado (Computer Algebra System - CAS). A Texas Instruments TI – 92 é um exemplo desta classe (figura 2.13). Mais recentemente surgiu uma máquina da marca Casio com as mesmas capacidades, a ClassPad 300 (figura 2.14). Estes novos instrumentos de trabalho permitem realizar "manipulação simbólica", ou seja, executam cálculos numéricos e simbólicos em álgebra e em cálculo. De facto, estas máquinas conseguem, por exemplo, calcular derivadas, algumas primitivas, resolver sistemas de equações, inverter matrizes, traçar gráficos de funções de duas variáveis reais, simplificar expressões simbólicas ou factorizar polinómios. Este tipo de máquina não é autorizada no exame nacional de Matemática do Ensino Secundário.



Fig. 2.13 – Texas Instruments TI –92

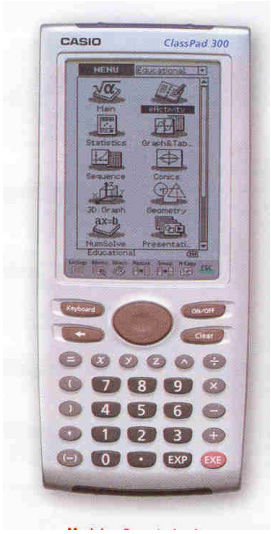


Fig. 2.14 – Casio ClassPad 300

Existem diversos tipos de calculadoras. Nem todas funcionam do mesmo modo e nem todas têm as mesmas possibilidades. Importa por isso identificar as suas características mais importantes, sabendo o professor quais os principais aspectos em que se diferenciam as calculadoras mais correntes ([52] p. 229).

Em síntese e citando M. Cardoso ([10] p. 27):

> *Já que a tecnologia está hoje ao alcance de todos, a escola deve assumir o papel de ajudar os alunos a usá-la adequadamente e a estarem preparados para compreender os novos avanços que inevitavelmente surgirão. Para isso necessitarão fundamentalmente de compreender os conceitos matemáticos, ter espírito crítico na interpretação de resultados, ter um pensamento matemático flexível e resolver problemas.*



Fig. 2.15 – Banda desenhada do Calvin e Hobbes publicada no jornal *Público*

2.2 Os Programas do Ensino Secundário e o uso da calculadora gráfica

Nos últimos anos a utilização da tecnologia e das calculadoras gráficas, em particular no processo de ensino-aprendizagem, tornou-se imprescindível e tem dado uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática em Portugal. De facto, a utilização de tecnologia no ensino de Matemática é hoje largamente defendida pelas mais variadas instâncias ligadas à Educação Matemática. Para confirmar este facto basta recorrer a programas e manuais escolares, a actas de encontros e a trabalhos de investigação publicados nesta área.

O uso da tecnologia facilita uma participação mais activa do aluno na sua aprendizagem, levando a que este a utilize não apenas como um simples instrumento de cálculo, mas sobretudo como um meio incentivador do espírito de pesquisa ([14] pp. 10 – 11). No caso particular da calculadora gráfica, a sua utilização nas aulas de Matemática possibilita uma maior autonomia para o professor e para os alunos do que qualquer outro instrumento de cálculo (a utilização de um "view-screen" permite, por exemplo, que todos os alunos acompanhem a explicação do professor). Ela permite igualmente a obtenção de soluções numéricas e geométricas (e em alguns casos também formais) de problemas menos académicos e mais reais, testar resultados e diagnosticar erros. De facto, a abordagem de situações mais realistas pode constituir uma fonte de significados e de motivação e a exploração de exemplos possibilita um tratamento indutivo ou experimental da Matemática.

Os novos programas de Matemática A para o Ensino Secundário ([15]), assim como os anteriores ([14]), estabelecem como finalidades da disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa;
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia entre outras, formando para uma cidadania activa e participativa.

Num mundo em que cada vez mais a máquina estará presente para realizar trabalhos rotineiros (mais ligados a tarefas de cálculo intensivo), os desafios que se colocarão na "interpretação e intervenção no real" e na resolução de problemas concretos, quer sejam relacionados ou não com uma determinada profissão, incluirão certamente a ferramenta computacional. É claro que a "cultura científica, técnica e humanística" não deixará de incluir o conhecimento das capacidades e limites da máquina e o significado da contribuição de áreas como a inteligência artificial, o cálculo intensivo e os sistemas algébricos computacionais ([59]).

Os programas referidos exemplificam como as suas finalidades poderão ser concretizadas, estabelecendo como objectivos e competências gerais, entre outros, os seguintes:

- Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva, analítica e usando a calculadora gráfica (conhecimentos);
- Exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens (capacidades/aptidões);
- Analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução (capacidades/aptidões);
- Formular generalizações a partir de experiências (capacidades/aptidões).

Em todos estes objectivos está presente a dimensão gráfica, sendo por isso indispensável o uso da calculadora gráfica. A recomendação da utilização das calculadoras gráficas, feita no ano lectivo 1995/1996, nas orientações de gestão do programa de Matemática, foram o elemento decisivo que levou muitos professores a prestarem atenção a estas máquinas. Esta recomendação, muito embora possa não ter contribuído para uma maior utilização das calculadoras gráficas nas aulas de Matemática, deu origem a algumas discussões, em virtude do recurso à tecnologia gráfica ser permitida no exame nacional, embora não fosse considerada necessária (só as calculadoras científicas eram obrigatórias). Diversos professores

expressaram a sua preocupação quanto às consequências da vivência do processo de ensino/aprendizagem com o apoio da tecnologia, numa avaliação final, decisiva para a vida futura dos alunos, independente desta. Existiram ainda algumas preocupações relativamente às desigualdades que estas máquinas podiam fazer surgir, em virtude de nem todos os alunos poderem adquirir a sua calculadora e alguns receios quanto às implicações que a tecnologia poderia vir a ter nos conteúdos que até então eram ensinados.

A partir do ano lectivo de 1997/1998 as calculadoras gráficas passaram a ser de uso obrigatório e a sua utilização obrigatória no exame nacional. Foi a partir desta altura que a generalização desta tecnologia se tornou uma realidade. Além das calculadoras gráficas, o programa do Ensino Secundário prevê igualmente a utilização de sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores. As escolas começam a dispor de algumas máquinas (nos designados Laboratórios de Matemática) que podem ser emprestadas aos alunos com mais dificuldades financeiras e as calculadoras gráficas tendem a tornar-se uma realidade em todas as salas de aula de Matemática. Esbate-se assim um dos aspectos mais polémicos relativos à utilização das calculadoras gráficas.

As capacidades gráficas das calculadoras viabilizam uma mudança na abordagem das funções, valorizando os aspectos intuitivos na construção de conceitos e na respectiva formalização, e na abordagem da estatística e das probabilidades, sendo agora mais importante a análise e interpretação dos resultados, visto que a calculadora realiza a parte mecânica e de representação da informação. Por exemplo, a formulação de “generalizações a partir de experiências” será em grande parte exequível apenas com o auxílio das capacidades numéricas ou gráficas de uma calculadora gráfica ou de um computador. Um tal processo de experimentação fornece-nos evidência para estabelecer conjecturas ou formular hipóteses que posteriormente deverão ser confirmadas, sempre que possível, através de uma demonstração lógico-dedutiva.

De acordo com o mesmo programa,

> *Não é possível atingir os objectivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, embora não seja exigível que sejam todas tratadas simultaneamente em todas as ocasiões; em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar "modelos matemáticos que permitam a sua interpretação". Não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas sim combinar adequadamente os diferentes processos de cálculo, sem esquecer o cálculo mental.*

Citando Miguel de Guzmán ([59]), os estudantes devem ser preparados para um "diálogo inteligente com as ferramentas que já existem".



Fig. 2. 16 – Sebastião e Silva

A utilização de tecnologia facilita ainda uma participação activa do estudante na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva (1914 – 1972) (figura 2.16), quando escrevia no *"Guia para a utilização do Compêndio de Matemática"* ([61]) que

> *haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino... fosse tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo.*

O estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia.

No programa de Matemática A para o Ensino Secundário ([15]) estão também previstas algumas actividades matemáticas, que poderão ser exploradas com o auxílio da calculadora gráfica (propostas por Bert Waits, investigador americano, no seu livro "The Power of Visualization in Calculus" de 1992). A saber:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Na realização destas actividades, quer o professor quer o aluno deverão ter consciência das limitações da calculadora gráfica. Segundo o programa oficial “os alunos devem ter a oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade”. Por outro lado, espera-se que os próprios professores de

Matemática confrontem os seus alunos com aqueles casos menos rotineiros, muitas vezes denominados de difíceis, porque são precisamente este tipo de exemplos que melhor proporcionam situações de ensino/aprendizagem extremamente enriquecedoras. O programa não admite que o uso da calculadora gráfica seja desligado de quaisquer considerações teóricas ([59]).

É de consenso geral que a dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que é importante o uso de tecnologia mais adequada. É necessário ter presente que a ”tecnologia” em si não é o conteúdo de ensino no programa do Ensino Secundário, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam a sua utilização. O recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos e prepará-los para usar a Matemática num mundo que vive na era das novas tecnologias da informação e da comunicação. Como qualquer ferramenta, a tecnologia pode ser utilizada de um modo mais ou menos adequado. Nunca deve ser utilizada como simples substituição de raciocínios básicos, mas sim de modo a enriquecer a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda e significativa.

Um aluno deverá habitualmente registar por escrito, com os comentários que entender mais adequados, todas as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (desenvolvendo-se assim tanto o espírito crítico como a capacidade de comunicação matemática). Assim sendo, a utilização da calculadora gráfica permite um maior envolvimento e descoberta por parte dos alunos.

O programa de Matemática A do Ensino Secundário ([15]) tem a preocupação de alertar o professor para diversos aspectos:

> *ao usar a calculadora gráfica, os estudantes devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas; devem sempre traçar um número apreciável de funções (...) usando calculadora gráfica escolhendo o melhor rectângulo de visualização; devem ser incentivados a elaborar conjecturas, evitando conclusões apressadas, sendo sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões. Devem ainda estudar situações em que uma descrição qualitativa satisfatória do comportamento da função só é possível com um gráfico múltiplo (conjunto de gráficos em diferentes rectângulos de visualização). Um estudante deve ser confrontado com situações em que os erros de aproximação conduzam a resultados absurdos. Como forma de evitar muitas situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de nos cálculos intermédios se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.*

Longe de querer eliminar a intervenção do professor, a calculadora tornou-se um instrumento que possibilita uma aprendizagem objectiva, desenvolve o espírito crítico e dá novas possibilidades de investigação a professores e alunos.

2.3 Vantagens na utilização da calculadora gráfica e exploração de potenciais limitações

Há quase uma década que os alunos usam calculadoras gráficas para explorar diversos conceitos do ponto de vista gráfico e numérico. As potencialidades gráficas tornam ainda possível, por exemplo, a investigação de algumas propriedades das funções, aplicações mais realistas e a análise de dados reais.

Nos últimos anos têm sido realizados vários estudos com o objectivo de analisar a utilização das calculadoras gráficas no ensino e na aprendizagem da Matemática. Existem algumas pesquisas (ver [2] e [10], por exemplo) que têm analisado o impacto da presença da calculadora gráfica na sala de aula, o efeito no que diz respeito a professores e alunos, e as possibilidades de utilização como ferramenta para o estudo de diversos conteúdos matemáticos. No entanto, grande parte destes trabalhos incidem somente nas possibilidades de utilização da calculadora gráfica no estudo de funções. Esta situação, deve-se talvez ao facto de que a principal característica da calculadora gráfica seja o de representar gráficos de funções definidas por expressões algébricas. Existem também estudos que avaliam o desempenho alcançado por alunos que efectuaram a sua aprendizagem com recurso a esta tecnologia e a sua comparação com o nível dos que nunca utilizaram calculadoras gráficas.

Segundo M. Cardoso ([10]), "a calculadora gráfica é uma ferramenta que terá muito impacto no ensino/aprendizagem da Matemática ao nível do curso secundário"[2]. Segundo esta autora, a calculadora gráfica diminui o tempo gasto com cálculos à mão, possibilitando mais tempo para o aprofundamento de conceitos e a interpretação de resultados. Na sua opinião, o treino repetitivo e quase exclusivo de cálculos de papel e lápis não traz benefícios, tornando-se mesmo prejudicial uma vez que:

> *gasta demasiado tempo que poderia ser utilizado em actividades mais importantes, que façam apelo à exploração e compreensão dos conceitos; pode provocar uma total desmotivação de alunos que já os dominem ou que nunca os dominarão, por mais esforços que os professores façam nesse sentido; e faz naturalmente emergir concepções da Matemática como um mero conjunto de regras mágicas e fórmulas a aplicar em situações rigidamente determinadas.*

[2] Esta opinião proferida em 1995 confirma-se actualmente.

Ainda segundo esta autora, a calculadora gráfica: (a) aumenta as oportunidades de resolução de problemas, uma vez que torna possível abordar problemas reais, com dados reais e não simplificados como era inevitável com a realização dos cálculos à mão; (b) permite uma aprendizagem por descoberta, já que os alunos podem explorar, experimentar, visualizar, relacionar, tendo um papel mais activo na compreensão e na avaliação das ideias matemáticas e podendo, ao assumir essa atitude investigativa, (re)criar, como o matemático, o seu próprio saber; (c) permite que os alunos se apercebam da interacção entre os pontos de vista numérico, geométrico e algébrico e sejam capazes de pensar também numérica ou geometricamente. Vejamos um exemplo ([19]). No caso da equação

$$x^3 + x^2 = 1,$$

a utilização de uma calculadora gráfica permite resolvê-la:

1. determinando os valores de x para os quais a função $f(x) = x^3 + x^2$ toma o valor 1;
2. calculando as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = x^3 + x^2$ e $g(x) = 1$;
3. determinando os zeros da função $h(x) = x^3 + x^2 - 1$.

Como referem J. A. Fernandes e Olga Vaz ([19] p. 45),

> *acrescentando a estas diferentes abordagens a possibilidade de representação algébrica, gráfica e numérica, podemos constatar quão variada e plena de sentido pode ser a aprendizagem do aluno.*

Deste modo, os alunos tornam-se menos passivos, mais interessados e trabalham mais em grupo, fazendo mais investigação e consulta. Por outro lado, o professor actua muito mais como orientador/consultor e menos como expositor/explicador.

De uma formal geral, os estudos mencionados anteriormente referem que o uso de calculadoras gráficas na aprendizagem da Matemática é muito positivo, nomeadamente no que diz respeito à aprendizagem de conceitos, à realização de actividades de modelação, ao desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à Matemática, à motivação dos alunos e ao desenvolvimento do espírito crítico em relação aos resultados. Referem, por exemplo, que um dos domínios altamente favorecido pela utilização da tecnologia gráfica é a resolução de problemas. De facto, o uso de uma máquina gráfica possibilita uma maior flexibilização na abordagem do problema, uma maior aptidão para resolver problemas e mais tempo dedicado à sua resolução, uma maior concentração na parte matemática do problema e não na manipulação algébrica, a resolução de problemas não rotineiros inacessível por via algébrica e uma maior auto-confiança nas suas capacidades de resolução. Assim sendo, a correcta utilização da calculadora gráfica poderá proporcionar ao aluno facilidades na aquisição, compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos.

Ao longo dos últimos anos foram surgindo, em diversas publicações nacionais e internacionais, actividades matemáticas para serem desenvolvidas na sala de aula, nas quais a calculadora gráfica desempenha um papel fundamental ([5], [18], [20], [21], [24], [56]). Todavia, paralelamente à utilização da calculadora, recomenda-se um acompanhamento algébrico, de tal modo que o aluno reconheça e compreenda os vários passos na resolução de uma determinado problema, maximizando-se assim o aproveitamento pedagógico, contribuindo-se para o desenvolvimento do raciocínio e desmistificando-se os fantasmas da inutilidade/dificuldade geralmente conotados com a Matemática. O professor deverá pois realçar junto dos alunos que a calculadora serve realmente para que possamos estudar mais facilmente algumas questões que sem ela seriam difíceis de abordar, mas não é uma “varinha mágica” que substitui o conhecimento matemático. A calculadora é um instrumento, não um fim a atingir. Sem um investimento profundo no conhecimento matemático a calculadora é tão inútil como outra qualquer ferramenta que possuímos mas não sabemos manejar.

Por outro lado, há estudos que se dedicam às limitações deste tipo de calculadoras, considerando-as como um obstáculo à aprendizagem da "verdadeira" matemática, que é aquela que do ponto de vista de alguns autores, só pode ser desenvolvida utilizando lápis e papel. Segundo estes, a utilização e o abuso das novas tecnologias está a prejudicar fortemente a capacidade de abstracção dos nossos alunos. Segundo R. Albuquerque (Opinião – Cartas ao Director, Boletim da SPM, n.º 38, Abril de 1998, p. 140)

> *(...) seria interessante medir quanto a exagerada utilização e as concessões que se fazem às máquinas pelas suas limitações e resultados aproximados, no decorrer de uma aula, estão formando espíritos menos rigorosos, menos exigentes e mais preguiçosos, tanto da parte dos alunos como dos professores.*

Um dos primeiros autores em Portugal a alertar para as limitações das calculadoras gráficas foi C. Albuquerque, em 1996, antes mesmo da entrada em vigor do ajustamento do programa do ensino secundário. No trabalho "Calculadoras gráficas – alguns contra-exemplos" ([1]), o autor refere que

> *as calculadoras gráficas têm um conjunto de limitações que se devem quer ao pouco desenvolvimento da tecnologia (pouca memória e baixa resolução do ecrã[3]), quer à impossibilidade de captar em imagens discretas certas características das funções reais de variável real. Assim, uma utilização acrítica pode conduzir a todo o tipo de inferências erróneas. (...) Não se pretende afirmar a inutilidade das calculadoras mas sim realçar que não faz sentido um uso intuitivo desligado da análise.*

Apesar de, desde 1995, a discussão das limitações da calculadora ter estado presente (podem por exemplo ver-se alguns dos exemplos trabalhos nessa altura em [58] pp. 44-48) a reflexão sobre o assunto tem sido escassa ou superficial. Há necessidade, 10 anos depois, de aprofundar o debate.

[3] Actualmente parte destas limitações já foram ultrapassadas.

Nos últimos têm também surgido alguns trabalhos que utilizam algumas das características da calculadora gráfica, vistas habitualmente como obstáculos, com o objectivo de desenvolver novas aprendizagens e motivar para o ensino/aprendizagem dos aspectos matemáticos envolvidos (ver por exemplo [12] e [17]). Segundo M. Consciência,

> *(...) as limitações das calculadoras gráficas podem ser usadas pedagogicamente. Penso que é importante confrontar os alunos com as limitações da máquina e explorar as situações que daí possam advir.*

Considere-se por exemplo a janela de visualização de uma calculadora gráfica. Quando um gráfico é representado no écran da calculadora, ele surge na janela de visualização ajustada anteriormente à entrada da função, ou seja, a calculadora não apresenta o gráfico da função no écran com o seu melhor ajustamento. Esta limitação da calculadora pode ser explorada em diversas actividades (ver por exemplo [20]), sendo de extrema importância a postura do professor num contexto de sala de aula. De facto, uma incorrecta intervenção do professor poderá, por exemplo, prejudicar o trabalho do aluno na sua investigação matemática. Assim sendo, é necessário que o professor conheça as características da máquina que deseja utilizar, planeie cuidadosamente cada actividade, esteja preparado para demonstrar aos seus alunos a necessidade de se ser crítico e questione constantemente a sua postura na sala de aula.

Na resolução de uma actividade do género da descrita anteriormente, as conclusões a que os alunos chegam podem ser obtidas através das possibilidades que a calculadora gráfica possui de permitir testar rapidamente hipóteses para que as conjecturas elaboradas sejam ou não reformuladas, de modo a permitir a que se cheguem às generalizações.

É claro que as constantes inovações tecnológicas têm permitido ultrapassar algumas das limitações iniciais das calculadoras gráficas. No

entanto, a máquina mais eficiente do ponto de vista tecnológico, poderá não ser a mais eficiente do ponto de vista educacional. De facto, no exemplo já referido, uma calculadora que possuísse um ajustamento da janela de visualização automático, poderia ser considerado mais eficiente. Todavia, esta potencialidade não iria permitir que alguns exemplos devidamente escolhidos pudessem ser catalisadores de aprendizagens, possibilitando nomeadamente, discussão entre professores e alunos e compreensão de conceitos.