Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paula Maria Pereira de Barros

O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico

janeiro de 2018

Universidade do Minho
Instituto de Estudos da Criança

Paula Maria Pereira de Barros

O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico

Tese de Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação de
Professor Doutor José António da Silva Fernandes
Professora Claúdia Mendes Araújo

janeiro de 2018

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente tese. Confirmo que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer forma de falsificação de resultados.

Mais declaro que tomei conhecimento integral do Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, 19 de janeiro de 2018

Nome completo: Paula Maria Pereira de Barros

Assinatura: Paula Maria Pereira de Barros

Ao José Miguel

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José António Fernandes e à Professora Cláudia Mendes Araújo, meus orientadores, pela sua constante disponibilidade, pela forma interessada com que acompanharam este estudo, enriquecendo-o com os seus comentários e sugestões, e pelo incentivo que me deram ao longo de todo o percurso.

A todos os alunos e professores que participaram neste estudo, pela sua colaboração. Em especial aos alunos da turma diretamente envolvida na intervenção de ensino, pela disponibilidade demonstrada em todas as fases do processo.

Aos professores que ajudaram na revisão dos questionários, pela sua disponibilidade e por contribuírem com as suas sugestões para o seu aperfeiçoamento.

À Maria João, pela paciência infinita que teve na revisão do texto desta tese.

Aos amigos que me acompanharam neste trajeto, pelo estímulo e partilha de ideias.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, tornaram possível a realização deste trabalho.

À minha família, por todo o apoio, incentivo e tantas outras coisas...

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO SUPERIOR POLITÉCNICO

RESUMO

A Álgebra Linear constitui uma fonte de dificuldades para muitos alunos, problema que se agrava na medida em que esta área integra o currículo de diversos cursos do ensino superior. Por outro lado, a exígua investigação realizada em Portugal neste domínio destaca a necessidade de efetuar mais estudos, que possam fundamentar as decisões relativas ao seu ensino e à sua aprendizagem. Assim, tendo como base estas preocupações, o estudo realizado procurou responder às seguintes questões de investigação: 1. Quais os erros cometidos e as dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?; 2. Quais as caraterísticas do ensino de álgebra linear no ensino superior politécnico segundo os professores?; 3. Qual a influência de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades dos alunos e na utilização de *software* sobre a aprendizagem dos estudantes em álgebra linear?

Para responder às questões supracitadas, desenvolveu-se uma investigação em duas partes que se interligam, tendo-se recorrido, em termos metodológicos, a métodos quantitativos e qualitativos. A primeira parte do estudo foi desenvolvida em duas fases: na primeira, identificaram-se os erros e dificuldades de 310 alunos de vários cursos de licenciatura em engenharia aquando da resolução de questões sobre Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, e, na segunda, aplicou-se um questionário *online* a professores do ensino superior politécnico público com o propósito de caracterizar o seu ensino de Álgebra Linear.

Na segunda parte do estudo, realizou-se uma intervenção de ensino envolvendo 28 alunos de uma turma de Engenharia Química e Biológica, em que se tentou implementar um ensino mais centrado no aluno e na promoção da aprendizagem a partir dos erros, tendo-se utilizado também como apoio o *software Microsoft Mathematics*. A recolha de dados centrou-se, essencialmente, na gravação de aulas, nas produções dos alunos e na aplicação de um questionário e de uma entrevista a cada um deles para obter a sua opinião sobre a intervenção de ensino realizada.

Os resultados obtidos permitiram constatar que os alunos têm diversas dificuldades na resolução de questões relacionadas com Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, tendo-se concluído que algumas delas têm origem em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear. Quanto ao ensino da Álgebra Linear, conforme foi percecionado pelos professores, concluiu-se que ainda é bastante apoiado em metodologias tradicionais, privilegiando o método expositivo e com um uso pouco expressivo de tecnologias.

Por último, as estratégias seguidas na intervenção de ensino contribuíram para os alunos participarem mais ativamente nas aulas e, na opinião da maioria dos alunos, permitiram também identificar os seus erros, tomar consciência das suas dificuldades e clarificar alguns conceitos/procedimentos. O *Microsoft Mathematics*, para além do efeito motivacional, teve igualmente um papel importante na deteção e correção de erros. Porém, a falta de empenho e de estudo é, ainda, na opinião dos alunos, um entrave para a sua aprendizagem.

Palavras-chave: Álgebra linear, ensino superior politécnico, ensino e aprendizagem, erros e dificuldades dos alunos.

THE TEACHING AND LEARNING OF LINEAR ALGEBRA CONCEPTS IN POLYTECHNIC HIGHER EDUCATION

ABSTRACT

Linear algebra is a source of difficulties for many students, a problem that is aggravated by the fact that this area integrates the curriculum of several higher education courses. On the other hand, the few research carried out in Portugal in this field highlights the need to carry out further studies, which can support the decisions regarding its teaching and learning. Thus, based on these concerns, the study sought to answer the following research questions: 1. What are the mistakes made and difficulties experienced by students in learning linear algebra contents?; 2. What are the characteristics of linear algebra teaching in polytechnic higher education according to teachers?; 3. What is the influence of a teaching centred on the exploration of students' errors and difficulties and on the use of software on students' learning in linear algebra?

In order to answer the aforementioned questions, a research has been developed in two interlinked parts and, methodologically, quantitative and qualitative methods were used. The first part of the study was developed in two phases: in the first one the errors and difficulties of 310 students of several engineering degree courses when solving questions about matrices and determinants and systems of linear equations were identified, and in the second an online questionnaire was applied to public polytechnic higher education teachers with the purpose of characterizing their linear algebra teaching.

In the second part of the study, a teaching intervention involving 28 students from a Chemical and Biological Engineering class was carried out, in which an attempt was made to implement a student-centred teaching and to promote learning based on errors. Microsoft Mathematics software was also used as support. Data collection focused essentially on recording lessons, the student's productions and by applying a questionnaire and interviewing each one of them to get their opinion about the intervention performed by the teacher.

The obtained results allowed to verify that students have several difficulties in the resolution of issues related to matrices and determinants and systems of linear equations, having concluded that some of them have origin in propaedeutic contents to linear algebra. Regarding the teaching of linear algebra, as it had been perceived by the teachers, it was concluded that it is still strongly supported in traditional methodologies, privileging the expository method and with a brief expressive use of technologies.

Lastly, the strategies followed in the teaching intervention contributed for students to participate more actively in the classes and, in the opinion of most students, it also allowed to identify their mistakes, to be aware of their difficulties and to clarify some concepts/procedures. Microsoft Mathematics, besides the motivational effect, also had an important role in the detection and correction of mistakes. However, the lack of commitment and study is still, in the opinion of the students, a hindrance to their learning.

Keywords: Linear algebra, polytechnic higher education, teaching and learning, students' errors and difficulties.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS vii
RESUMO ix
ABSTRACT xi
ÍNDICE xiii
ÍNDICE DE TABELAS xix
ÍNDICE DE FIGURAS xxiii
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO 1
1.1. Problema e questões do estudo 1
1.2. Relevância do estudo 4
1.3. Estrutura da tese 8
CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO 11
2.1. A Álgebra Linear no currículo 11
2.1.1. A Álgebra Linear no currículo do ensino básico e secundário 11
2.1.2. A Álgebra Linear no currículo do ensino superior 15
2.2. Dificuldades em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear 18
2.3. Dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear 26
2.3.1. Dificuldades no tema Matrizes e determinantes 35
2.3.2. Dificuldades no tema Sistemas de equações lineares 40
2.4. O ensino da Álgebra Linear 55
2.4.1. O ensino de matemática no ensino superior 55
2.4.2. Recomendações para o ensino da Álgebra Linear 61
2.4.2.1. A importância das aplicações 66
2.4.2.2. A importância da geometria 70
2.4.2.3. A importância da tecnologia 73
2.4.3. O erro e a sua importância didática 86
2.4.3.1. Conceito de erro 86
2.4.3.2. A pesquisa sobre análise de erros em matemática 88
2.4.3.3. Importância do erro para o ensino e a aprendizagem 93
2.4.3.4. O erro e a avaliação 97

CAPÍTULO III – MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO 103
3.1. Opções metodológicas 103
3.2. Contexto do estudo 107
3.3. Aspetos metodológicos inerentes à 1.ª fase da primeira parte do estudo 108
3.3.1. Participantes no estudo 108
3.3.2. Métodos de recolha de informação 109
3.3.3. Métodos de análise dos dados 111
3.4. Aspetos metodológicos inerentes à 2.ª fase da primeira parte do estudo 111
3.4.1. Participantes no estudo 111
3.4.2. Métodos de recolha de informação 112
3.4.2.1. Instrumento de recolha de dados – O questionário 112
3.4.2.2. Aplicação do questionário 115
3.4.3. Métodos de análise dos dados 115
3.5. Aspetos metodológicos inerentes à segunda parte do estudo 115
3.5.1. Participantes no estudo 115
3.5.1.1. Os grupos de trabalho e a seleção efetuada para o estudo de casos na turma . 118
3.5.2. A estratégia da intervenção de ensino 119
3.5.2.1. As tarefas de trabalho em grupo 120
3.5.2.2. O debate em grande grupo 120
3.5.2.3. Os minitestes e a sua revisão 121
3.5.3. O *Microsoft Mathematics* 122
3.5.4. Métodos de recolha de dados 125
3.5.4.1. O teste diagnóstico 125
3.5.4.2. As gravações das aulas e as produções dos alunos 127
3.5.4.3. O questionário 127
3.5.4.4. As entrevistas 129
3.5.5. Métodos de análise dos dados 130
3.6. Síntese 131

CAPÍTULO IV – DIFICULDADES DOS ALUNOS EM ÁLGEBRA LINEAR E PERSPETIVAS DOS PROFESSORES SOBRE O SEU ENSINO 133
4.1. Dificuldades dos alunos em Álgebra Linear 133
4.1.1. Matrizes e determinantes – Análise das respostas e raciocínios dos alunos 133
4.1.1.1. Questão 1 134
4.1.1.2. Questão 2 144
4.1.1.3. Questão 3 150
4.1.1.4. Questão 4 160
4.1.1.5. Questão 5 169
4.1.2. Sistemas de equações lineares – Análise das respostas e raciocínios dos alunos 175
4.1.2.1. Questão 1 175
4.1.2.2. Questão 2a) 180
4.1.2.3. Questão 2b) 190
4.2. O ensino da Álgebra Linear do ponto de vista dos professores 202
4.2.1. Dados pessoais 203
4.2.2. UC de Álgebra Linear e o curso 205
4.2.3. Preparação das aulas 207
4.2.4. Implementação das aulas 212
4.2.5. Avaliação das aprendizagens dos alunos 215
4.2.6. Dificuldades dos alunos 216
4.3. Síntese 221
CAPÍTULO V – INTERVENÇÃO DE ENSINO 227
5.1. As aulas da intervenção de ensino 228
5.1.1. Avaliação diagnóstica 230
5.1.1.1. Questão 1 230
5.1.1.2. Questão 2 236
5.1.1.3. Questão 3 238
5.1.1.4. Questão 4 240
5.1.1.5. Questão 5 241

5.1.1.6. Questão 6 242
5.1.1.7. Questão 7 243
5.1.1.8. Questão 8 245
5.1.1.9. Questão 9 245
5.1.1.10. Questão 10 247
5.1.1.11. Grau de dificuldade do teste diagnóstico 248
5.1.2. O ensino dos temas 249
5.1.2.1. O ensino do tema Matrizes e determinantes 250
5.1.2.2. O ensino do tema Sistemas de equações lineares 301
5.1.3. Os minitestes e a sua revisão 334
5.1.3.1. O miniteste de Matrizes e determinantes e a sua revisão 335
5.1.3.2. O miniteste de Sistemas de equações lineares e a sua revisão 343
5.2. Avaliação da intervenção de ensino – O ponto de vista dos alunos 351
5.2.1. Informações gerais 351
5.2.2. Opinião sobre o *software Microsoft Mathematics* 354
5.2.3. Opinião sobre as aulas 361
5.3. Síntese e comentários 386
CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES 391
6.1. Síntese do estudo 391
6.2. Principais conclusões do estudo 394
6.2.1. Erros e dificuldades dos alunos 394
6.2.1.1. Dificuldades em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear 402
6.2.2. O ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear na perspetiva dos professores 405
6.2.3. A exploração dos erros e dificuldades e a sua influência na aprendizagem dos alunos 411
6.2.3.1. Contributos do trabalho em grupo e do debate em grande grupo 411
6.2.3.2. Contribuições do uso do *software Microsoft Mathematics* 414
6.2.3.3. A influência da revisão dos minitestes e da reformulação dos trabalhos 417

6.2.3.4. Considerações sobre o ensino e a aprendizagem baseadas na intervenção de ensino 419
6.3. Limitações do estudo 422
6.4. Recomendações 423
6.4.1. Recomendações didáticas 423
6.4.2. Recomendações para futuras investigações 425
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 427
ANEXOS 453
Anexo I – Conteúdos programáticos da UC de ALGA 454
Anexo II – Ficha de dados dos alunos participantes na 1.ª fase da primeira parte do estudo .. 455
Anexo III – Questões resolvidas pelos alunos na 1.ª fase da primeira parte do estudo 456
Anexo IV – Questionário aplicado aos professores 461
Anexo V – Ficha de dados dos alunos participantes na segunda parte do estudo 469
Anexo VI – Teste diagnóstico 471
Anexo VII – Fichas de trabalho e informativas utilizadas na intervenção de ensino 473
Anexo VIII – Minitestes 489
Anexo IX – Avaliação da intervenção de ensino 490

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Conteúdos do 3.º ciclo do ensino básico relacionados com AL 12
Tabela 2 – Conteúdos do ensino secundário relacionados com AL 12
Tabela 3 — Ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose 70
Tabela 4 — Estatutos do erro de acordo com vários modelos pedagógicos 90
Tabela 5 – Taxonomia de uso de erros como trampolim para a investigação 92
Tabela 6 – Contraposição entre a pedagogia do êxito e a pedagogia do erro 94
Tabela 7 – Distribuição dos alunos por curso 108
Tabela 8 – Distribuição dos alunos em cada trabalho atendendo ao curso 111
Tabela 9 — Classificações obtidas, com ou sem exame, na disciplina que frequentaram no 12.º ano 117
Tabela 10 — Motivos apontados pelos alunos para terem frequentado menos de 80% das aulas no ano letivo 2012/2013 118
Tabela 11 — Síntese dos métodos de recolha de dados 132
Tabela 12 — Raciocínios dos alunos na questão 1 sobre Matrizes e determinantes 135
Tabela 13 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 1 sobre Matrizes e determinantes 137
Tabela 14 — Raciocínios dos alunos na questão 2 sobre Matrizes e determinantes 145
Tabela 15 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 2 sobre Matrizes e determinantes 146
Tabela 16 — Raciocínios dos alunos na questão 3 sobre Matrizes e determinantes 151
Tabela 17 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 3 sobre Matrizes e determinantes 153
Tabela 18 — Raciocínios dos alunos na questão 4 sobre Matrizes e determinantes 160
Tabela 19 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 4 sobre Matrizes e determinantes 162
Tabela 20 — Raciocínios dos alunos na questão 5 sobre Matrizes e determinantes 169
Tabela 21 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 5 sobre Matrizes e determinantes 171
Tabela 22 — Raciocínios dos alunos na questão 1 sobre Sistemas 176
Tabela 23 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 1 sobre Sistemas 176

Tabela 24 — Raciocínios dos alunos na questão 2a) sobre Sistemas 180
Tabela 25 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 2a) sobre Sistemas 182
Tabela 26 – Raciocínios dos alunos na questão 2b) sobre Sistemas 190
Tabela 27 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 2b) sobre Sistemas 193
Tabela 28 — Idade dos professores 203
Tabela 29 — Habilitação académica mais elevada dos professores 203
Tabela 30 – Distribuição dos professores atendendo aos anos de docência no ensino superior e no ensino da UC de AL 204
Tabela 31 — Número de cursos diferentes em que os professores já lecionaram a UC 204
Tabela 32 – Temas que fazem parte do programa de AL e ordem pela qual são abordados .. 207
Tabela 33 – Intervenção na preparação das aulas 207
Tabela 34 – Periodicidade da preparação das aulas 208
Tabela 35 – Recursos usados na preparação de aulas 208
Tabela 36 – Finalidades do uso dos livros de texto 209
Tabela 37 – Finalidades do uso dos computadores pelos professores na preparação das aulas 209
Tabela 38 – Aspetos enfatizados nas tarefas preparadas para as aulas 210
Tabela 39 – Livros de texto recomendados pelos professores 210
Tabela 40 – Designação do *software* usado na UC de AL e temas onde é utilizado 212
Tabela 41 – Metodologias de trabalho usadas nas aulas 213
Tabela 42 – Uso do computador e da calculadora pelo professor e alunos nas aulas 214
Tabela 43 – Finalidades do uso do computador e da calculadora nas aulas 214
Tabela 44 – Modalidades de avaliação utilizadas pelos professores 215
Tabela 45 – Valorização dos métodos de avaliação em termos de ponderação 216
Tabela 46 – Temas em que os alunos sentem dificuldades 217
Tabela 47 – Razões das dificuldades dos alunos 217
Tabela 48 – Sugestões para melhorar a aprendizagem dos alunos em Álgebra Linear 218
Tabela 49 — Síntese dos erros cometidos e dificuldades evidenciadas nas respostas às questões 222
Tabela 50 — Síntese dos resultados obtidos no questionário 224
Tabela 51 — Calendarização da intervenção de ensino de acordo com as tarefas propostas ... 228
Tabela 52 — Respostas dos alunos nas alíneas a), b) e c) da questão 1 230

Tabela 53 – Síntese dos erros cometidos pelos alunos nas alíneas da questão 1 235
Tabela 54 – Respostas dos alunos na questão 2 236
Tabela 55 – Respostas dos alunos na questão 3 238
Tabela 56 – Respostas dos alunos nas alíneas a), b) e c) da questão 4..... 240
Tabela 57 – Respostas incorretas dos alunos nas alíneas a), b) e c) da questão 4..... 241
Tabela 58 – Respostas dos alunos na questão 5 242
Tabela 59 – Respostas dos alunos nas alíneas da questão 6 242
Tabela 60 – Respostas dos alunos na questão 7 243
Tabela 61 – Respostas dos alunos na questão 8 245
Tabela 62 – Respostas dos alunos na questão 9 246
Tabela 63 – Respostas dos alunos na questão 10 247
Tabela 64 – Respostas dos alunos quanto ao grau de dificuldade do teste 248
Tabela 65 – Relação entre o n.º de vezes que os alunos frequentaram a UC e o n.º de alíneas resolvidas de forma correta/parcialmente correta/incorreta/não respondidas 249
Tabela 66 – Classificação das respostas dos grupos à questão 4 da ficha de trabalho n.º 1 .. 253
Tabela 67 – Classificação das respostas dos grupos à ficha de trabalho n.º 3 262
Tabela 68 – Respostas dos oito[1] grupos à questão 3 da ficha de trabalho n.º 8. 308
Tabela 69 – Desempenho dos 26 alunos no miniteste de Matrizes e determinantes..... 335
Tabela 70 – Desempenho dos 28 alunos no miniteste de Sistemas de equações lineares 343
Tabela 71 – Percentagem de aulas a que os estudantes assistiram 351
Tabela 72 – Contributo dos estudantes para os trabalhos em grupo realizados nas aulas e fora das aulas..... 352
Tabela 73 – Frequência com que os estudantes têm trabalhado em grupo ao longo do seu percurso escolar 353
Tabela 74 – Relação dos alunos com a matemática no ensino secundário 354
Tabela 75 – Frequência com que os estudantes utilizaram o *Microsoft Mathematics* em determinadas situações 354
Tabela 76 – Utilidade do *software* no apoio à aprendizagem 356
Tabela 77 – Aspetos em que os estudantes tiveram dificuldades quando utilizaram o *Microsoft Mathematics*..... 358
Tabela 78 – Aspetos em que os estudantes tiveram dificuldades em interpretar os resultados obtidos quando utilizaram o *Microsoft Mathematics* 358

Tabela 79 — Vantagens da utilização do *Microsoft Mathematics* 359
Tabela 80 — Desvantagens da utilização do *Microsoft Mathematics* 360
Tabela 81 – Dificuldades dos estudantes relativamente aos conteúdos abordados sobre Matrizes e determinantes 362
Tabela 82 – Dificuldades dos estudantes relativamente aos conteúdos abordados sobre Sistemas de equações lineares 363
Tabela 83 – Temas em que os alunos tiveram dificuldade em acompanhar as aulas 364
Tabela 84 – Razões a que se devem as dificuldades que os estudantes tiveram 365
Tabela 85 – Opinião dos estudantes sobre o grupo e o trabalho desenvolvido 367
Tabela 86 – Opinião dos estudantes sobre as tarefas propostas 371
Tabela 87 – Contributos das tarefas de grupo em que tinham de analisar as resoluções realizadas por outros alunos 372
Tabela 88 – Aspetos para os quais contribuiu a interação e discussão estabelecida no seio do grupo 374
Tabela 89 – Contributos da discussão das diferentes resoluções das tarefas 375
Tabela 90 – Contributos do processo de revisão/reformulação das resoluções dos trabalhos 377
Tabela 91 – Opinião dos estudantes sobre a revisão dos minitestes 378
Tabela 92 – Importância das estratégias utilizadas para a aprendizagem dos alunos 381
Tabela 93 — Aspetos mais positivos da unidade curricular segundo os alunos 384
Tabela 94 — Aspetos mais negativos da unidade curricular segundo os alunos 384
Tabela 95 — Motivos que segundo os alunos levaram à sua reprovação na unidade curricular ALGA 385
Tabela 96 – Sugestões dos professores para melhorar a aprendizagem da Álgebra Linear 410

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Interface do *software Microsoft Mathematics*. 124
Figura 2. Apresentação de um contraexemplo (A36, Versão XA). 135
Figura 3. Referência à possível dimensão das matrizes (A81, Versão XA). 135
Figura 4. Referência à possível dimensão das matrizes (A207, Versão YB). 136
Figura 5. Justificação com base num exemplo e na dimensão (A103, Versão XI). 136
Figura 6. Multiplicação das entradas homólogas (A82, Versão YB). 138
Figura 7. Aplicação de regras falsas da multiplicação (A8, Versão ZC). 138
Figura 8. Dedução incorreta da dimensão da matriz produto (A250, Versão XD). 138
Figura 9. Considerar possível efetuar uma multiplicação que não está definida (A145, Versão XK). 139
Figura 10. Possibilidade de multiplicar matrizes com a mesma dimensão (A73, Versão XA)... 139
Figura 11. Exemplo concreto de matrizes que verificam a afirmação (A292, Versão XH). 140
Figura 12. Classe de matrizes de ordem dois que verificam a afirmação (A169, Versão YB)... 140
Figura 13. Exemplo que verifica o contrarrecíproco da afirmação (A95, Versão ZL). 140
Figura 14. Classe de exemplos de matrizes que verifica o contrarrecíproco da afirmação (A288, Versão YB). 141
Figura 15. Referência apenas a AB (A27, Versão YF). 141
Figura 16. Referência apenas a BA^T (A134, Versão ZL). 142
Figura 17. Recurso a propriedade não válida (A285, Versão XA). 142
Figura 18. Recurso a propriedade não válida (A281, Versão YB). 142
Figura 19. Recurso a propriedade não válida (A215, Versão ZC). 143
Figura 20. Classificação incorreta de matrizes como não quadradas (A297, Versão YF). 143
Figura 21. Exemplo para provar a falsidade do recíproco (A54, Versão XD). 144
Figura 22. Apresentação de um contraexemplo (A146, Versão K). 145
Figura 23. Transformação da potência em produto (A81, Versão A). 145
Figura 24. Falsas regras da multiplicação de matrizes (A128, Versão I). 147
Figura 25. Incorreção no cálculo do quadrado das matrizes (A299, Versão H). 147
Figura 26. Multiplicação e potenciação incorreta (A119, Versão K). 148
Figura 27. Exemplo que verifica a afirmação (A32, Versão A). 148

Figura 28. Considerar válida a comutatividade da multiplicação de matrizes (A208, Versão A). 149
Figura 29. Análise incompleta sem concretizar as matrizes (A260, Versão E). 149
Figura 30. Considerar o quadrado do produto como o quadrado da soma (A40, Versão D). ... 150
Figura 31. Utilização incorreta de caso notável (A165, Versão D). 150
Figura 32. Aplicação do teorema de Laplace (A44, Versão XA). 151
Figura 33. Aplicação das propriedades dos determinantes (A77, Versão YD). 152
Figura 34. Transformação da matriz dada numa matriz triangular (A103, Versão XI). 152
Figura 35. Aplicação do teorema de Laplace apenas a uma entrada da linha (A302, Versão YK). 153
Figura 36. Cálculo incorreto dos cofatores aquando da aplicação do teorema de Laplace (A178, Versão YD). 154
Figura 37. Aplicação incorreta da regra de Sarrus nos determinantes de matrizes de ordem três (A66, Versão YD). 154
Figura 38. Troca de linhas sem trocar o sinal do determinante (A229, Versão YD). 155
Figura 39. Recurso a uma regra não válida baseada na regra de Sarrus (A100, Versão XI). ... 155
Figura 40. Determinante como produto dos elementos da diagonal principal (A282, Versão YH). 156
Figura 41. Determinante de uma matriz de ordem três como diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária (A94, Versão XI). 156
Figura 42. Verificação se a transposta é a matriz inversa (A118, Versão YK). 157
Figura 43. Cálculo da matriz inversa determinando o inverso de cada entrada da matriz dada (A53, Versão YD). 157
Figura 44. Tentativa de cálculo da matriz inversa pelo método de eliminação de Gauss-Jordan (A110, Versão YK). 158
Figura 45. Fórmula de cálculo da inversa com recurso á matriz adjunta (A40, Versão YD). 158
Figura 46. Recurso à comutatividade para justificar a existência de matriz inversa (A30, Versão XI). 158
Figura 47. Interpretação incorreta do resultado obtido (A87, Versão XI). 159
Figura 48. Verificação com base na definição de inversa de uma matriz (A101, Versão YL). 161
Figura 49. Cálculo da matriz inversa pelo processo da matriz adjunta (A64, Versão XB). 161

Figura 50. Cálculo da matriz inversa pela definição de inversa de uma matriz (A49, Versão YC). 161
Figura 51. Adjunta como transposta da matriz dada (A147, Versão XJ)..... 163
Figura 52. Ignorar os sinais na determinação dos cofatores (A13, Versão XF). 163
Figura 53. Cálculo da matriz inversa pela definição sem apresentação da conclusão final (A288, Versão XB). 164
Figura 54. Inversa por tentativa (A65, Versão XB)..... 164
Figura 55. Cálculo da matriz inversa através do inverso de cada uma das entradas (A294, Versão XF). 164
Figura 56. Confusão de matriz inversa com matriz simétrica (A183, Versão YC). 165
Figura 57. Subtração das matrizes para verificar se a matriz dada é inversa de si própria (A85, Versão YL). 165
Figura 58. Matriz nula como resultado do produto (A121, Versão YL). 166
Figura 59. Matriz transposta como candidata a inversa (A195, Versão XB). 166
Figura 60. Matriz transposta como candidata a inversa (A16, Versão YG). 166
Figura 61. Influência da igualdade dos determinantes de A e A^T (A8, Versão YC)..... 167
Figura 62. Multiplicação das entradas correspondentes da matriz (A82, Versão XB). 167
Figura 63. Multiplicação utilizando um algoritmo que não é válido (A25, Versão YG). 167
Figura 64. Cálculo do determinante (A7, Versão YG). 168
Figura 65. Argumentos genéricos sem aplicação à situação (A310, Versão XB). 168
Figura 66. Escolha de uma inversa ao acaso (A50, Versão YC)..... 169
Figura 67. Recurso a um contraexemplo (A220, Versão XB). 170
Figura 68. Referência à dimensão das matrizes (A134, Versão XL)..... 170
Figura 69. Exemplo que verifica a afirmação (A159, Versão YC). 171
Figura 70. Classificação incorreta das matrizes como singulares (A225, Versão YC). 172
Figura 71. Classificação incorreta da matriz soma (A 173, Versão XB)..... 172
Figura 72. A matriz não é invertível quando tem zeros na diagonal principal (A137, Versão XL). 173
Figura 73. Determinante da soma como soma dos determinantes (A194, Versão YC)..... 173
Figura 74. Matrizes que não verificam a hipótese (A242, Versão YG). 174
Figura 75. Calcular a matriz inversa como o inverso de cada uma das entradas (A69, Versão XB)..... 175

Figura 76. Apresentação de um exemplo de sistema possível e determinado (A223, Versão C). 177
Figura 77. Referência a uma classe de exemplos de sistemas possíveis e indeterminados (A101, Versão A)..... 177
Figura 78. Recurso a um exemplo para considerar três soluções para o sistema (A127, Versão A)..... 178
Figura 79. Recurso a um exemplo para considerar três soluções para o sistema (A44, Versão B). 178
Figura 80. Soluções definidas pelos pontos de interseção das retas duas a duas (A158, Versão C)..... 178
Figura 81. Sistema homogéneo como podendo ter somente a solução nula (A180, Versão A). 179
Figura 82. Falsas fórmulas no cálculo do determinante (A202, Versão A). 179
Figura 83. Substituição das incógnitas pela solução proposta (A212, Versão D)..... 180
Figura 84. Resolução do sistema pelo método da substituição (A103, Versão A)..... 181
Figura 85. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (A110, Versão B). 181
Figura 86. Substituição em $Ax = b$ (A216, Versão B)..... 183
Figura 87. Resolução baseada na matriz inversa quando esta não existe (A281, Versão C). ... 183
Figura 88. Interpretação incorreta do resultado – Método de eliminação de Gauss (A6, Versão B). 184
Figura 89. Interpretação incorreta do resultado – Método da substituição (A89, Versão A). 184
Figura 90. Interpretação incorreta do resultado – Método da substituição (A168, Versão C)... 184
Figura 91. Interpretação incorreta do resultado – Substituição das incógnitas pela solução (A278, Versão C). 185
Figura 92. Escrita do sistema na forma matricial (A80, Versão D)..... 185
Figura 93. Solução na coluna dos termos independentes (A57, Versão A)..... 186
Figura 94. Operações elementares incorretas (A127, Versão A)..... 186
Figura 95. Incorreção na substituição de uma das incógnitas (A238, Versão B). 187
Figura 96. Cálculo incorreto do determinante (A118, Versão D)..... 187
Figura 97. Determinação da característica sem a matriz estar em escada por linhas (A116, Versão B). 188
Figura 98. Considerar apenas três incógnitas (A72, Versão B)..... 188
Figura 99. Multiplicação incorreta (A233, Versão C). 188

Figura 100. Substituição da solução apenas na primeira equação (A55, Versão D). 189
Figura 101. Análise da dependência das linhas (A60, Versão B). 189
Figura 102. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss e classificação com base nas características (A154, Versão D). 190
Figura 103. Utilização do método de eliminação de Gauss (A57, Versão A)..... 191
Figura 104. Método da substituição (A283, Versão D). 191
Figura 105. Concretização de b como vetor nulo (A17, Versão C). 192
Figura 106. Analisar o sistema para o caso em que a segunda componente do vetor dos termos independentes é zero (A220, Versão C). 192
Figura 107. Indicar que o vetor dos termos independentes pertence ao subespaço gerado pelas colunas da matriz dos coeficientes (A304, Versão B). 192
Figura 108. Multiplicação de linhas (A182, Versão A). 194
Figura 109. Não aplica as operações aos termos independentes (A50, Versão A). 194
Figura 110. Recurso à inversa da matriz dos coeficientes (A66, Versão A). 194
Figura 111. Cálculo do determinante e recurso ao método da inversa (A281, Versão C) 195
Figura 112. Determinante zero implica sistema impossível (A132, Versão C)..... 195
Figura 113. Aplicação de falsas fórmulas (A21, Versão D). 196
Figura 114. Generalização das propriedades para matrizes não quadradas (A141, Versão B). 196
Figura 115. Sistema impossível devido à matriz não ser quadrada (A84, Versão B). 197
Figura 116. Determinação da característica sem qualquer tentativa de transformar previamente a matriz numa matriz em escada por linhas (A101, Versão A). 197
Figura 117. Processo de transformação em escada por linhas não concluído (A206, Versão D). 198
Figura 118. Escolha de um valor não significativo para o parâmetro alfa (A265, Versão D). ... 198
Figura 119. Interpretação incorreta dos valores obtidos pelo método da substituição (A203, Versão D). 199
Figura 120. Classificação incorreta do sistema (A120, Versão B)..... 199
Figura 121. Concretização da solução e do vetor dos termos independentes (A195, Versão A). 200
Figura 122. Definição de sistema de equações lineares (A81, Versão C)..... 200
Figura 123. Enunciado de conceitos teóricos relativos à relação entre as características e o tipo de sistema (A226, Versão A)..... 201

Figura 124. Escolha de um vetor de termos independentes que verifica a afirmação (A188, Versão C). 201
Figura 125. Considerar impossível um sistema baseado no facto de ter mais incógnitas do que equações (A49, Versão C)..... 201
Figura 126. Passagem incorreta da forma matricial para a notação usual (A72, Versão B)..... 202
Figura 127. Referência ao vetor dos termos independentes como vetor solução (A263, Versão A). 202
Figura 128. Distribuição dos professores de acordo com o tipo de curso em que lecionaram a UC. 205
Figura 129 — Tipo de aulas que os professores lecionaram no ano letivo 2011/2012. 206
Figura 130. Diversidade dos métodos de avaliação utilizados. 215
Figura 131. Resolução do sistema pelo método da substituição (A17). 231
Figura 132. Considerar incorretamente que a divisão é impossível (A6). 231
Figura 133. Resolução incorreta da equação $-2y = 0$ (A16). 231
Figura 134. Resolução incorreta da equação $x + y = 1$ (A4)..... 232
Figura 135. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (A20)..... 232
Figura 136. Interpretação incorreta do resultado obtido (A15). 232
Figura 137. Resolução incorreta da equação $-4y = 0$ (A2)..... 233
Figura 138. Resolução pelo método da substituição (A6)..... 233
Figura 139. Resolução pelo método de eliminação de Gauss (A20). 234
Figura 140. Conclusão pela observação das equações do sistema (A19). 234
Figura 141. Tentativa de resolução (A24)..... 234
Figura 142. Resolução incorreta da equação $x + y = 1 - z$ (A25). 235
Figura 143. Tradução correta do enunciado (A20)..... 236
Figura 144. Tradução correta do enunciado (A28)..... 236
Figura 145. Definição correta da primeira equação do sistema (A22). 237
Figura 146. Indicação apenas da solução (A4). 237
Figura 147. Confusão entre coeficientes das incógnitas e o valor destas (A10). 237
Figura 148. Utilização da variável x com dois significados distintos (A26). 237
Figura 149. Dificuldades na formalização (A14). 238
Figura 150. Equações sem significado aparente (A15). 238
Figura 151. Substituição das incógnitas pela solução proposta (A1)..... 239

Figura 152. Resolução do sistema pelo método de substituição (A4). 239
Figura 153. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (A20). 239
Figura 154. Resolução incorreta da equação $-2z=-2$ (A10). 240
Figura 155. Apresentação de um exemplo correto para cada caso (A19). 241
Figura 156. Apresentação de um exemplo referente a uma equação não linear (A1). 241
Figura 157. Resolução pela lei do anulamento do produto (A21). 243
Figura 158. Resolução pela fórmula resolvente (A18). 243
Figura 159. Erro no sinal do produto (A20). 244
Figura 160. Fórmula resolvente incorreta (A16). 244
Figura 161. Produto escalar como vetor (A17). 245
Figura 162. Produto escalar como vetor (A6). 245
Figura 163. Apresentação de um exemplo (A2). 246
Figura 164. Tentativa de prova da propriedade (A19). 246
Figura 165. Apresentação de um contraexemplo (A17). 247
Figura 166. Utilização de propriedades gerais (A14). 247
Figura 167. Exemplos diferentes para verificar cada uma das afirmações (A4). 248
Figura 168. Resposta do grupo G2 à questão 2 da ficha 1. 251
Figura 169. Resposta do grupo G7 à questão 2 da ficha 1. 252
Figura 170. Resposta incorreta do grupo G5 à questão 3g) da ficha 1. 252
Figura 171. Resposta incorreta do grupo G7 à questão 3h) da ficha 1 e comentário da professora. 253
Figura 172. Resposta do grupo G2 à questão 1 da ficha 2. 255
Figura 173. Resposta do grupo G4 à questão 1 da ficha 2. 256
Figura 174. Resposta do grupo G1 à questão 2 da ficha 2. 259
Figura 175. Resposta do grupo G2 à questão 2 da ficha 2. 260
Figura 176. Resposta do grupo G8 à questão da ficha 3 e comentário da professora. 263
Figura 177. Resposta do grupo G1 à questão 1d) da ficha 4. 268
Figura 178. Resposta do grupo G2 à questão 1d) da ficha 4. 268
Figura 179. Resposta do grupo G4 à questão 1, referente ao raciocínio da Florbela, da ficha 5. 270
Figura 180. Resposta do grupo G7 à questão 1, referente ao raciocínio da Luísa, da ficha 5. 272
Figura 181. Resposta do grupo G1 à questão 1, referente ao raciocínio da Luísa, da ficha 5.. 272

Figura 182. Resposta do grupo G2 à questão 1, referente ao raciocínio da Maria, da ficha 5 após a reformulação. 273
Figura 183. Resposta do grupo G7 à questão 2 da ficha 5. 274
Figura 184. Parte inicial da resposta do grupo G3 à questão 2 da ficha 5. 275
Figura 185. Resposta do grupo G2 à questão 4b) da ficha 5. 279
Figura 186. Resposta do grupo G1 à questão 4a) da ficha 5. 280
Figura 187. Resposta do grupo G1 à questão 4b) da ficha 5. 280
Figura 188. Resposta do grupo G4 à questão 1b) da ficha 6. 282
Figura 189. Resposta do grupo G2 à questão 1b) da ficha 6 e comentário da professora. 284
Figura 190. Resposta do grupo G8 à questão 1b) da ficha 6 e comentário da professora. 284
Figura 191. Resposta do grupo G3 à questão 1b) da ficha 6 e comentário da professora. 286
Figura 192. Resposta do grupo G4 à questão 2 da ficha 6. 286
Figura 193. Resposta do grupo G3, após a reformulação, à questão 2 da ficha 6. 288
Figura 194. Resposta do grupo G3 à questão 1 da ficha 7. 289
Figura 195. Resposta do grupo G8 à questão 1 da ficha 7. 289
Figura 196. Resposta do grupo G1 à questão 2.1a) da ficha 7. 291
Figura 197. Resposta do grupo G2 à questão 2a) da ficha 7. 291
Figura 198. Resposta do grupo G6 à questão 2.1b) da ficha 7. 292
Figura 199. Resposta do grupo G2 à questão 2.1b) da ficha 7. 293
Figura 200. Resposta do grupo G1 à questão 2.1b) da ficha 7. 294
Figura 201. Resposta do grupo G8 à questão 2.2 da ficha 7. 295
Figura 202. Resposta do grupo G9 à questão 2.2 da ficha 7. 296
Figura 203. Resposta do grupo G3 à questão 2.2 da ficha 7. 296
Figura 204. Resposta do grupo G6 à questão 3 da ficha 7. 299
Figura 205. Resposta do grupo G8 à questão 3, referente ao raciocínio da Júlia, da ficha 7. .. 299
Figura 206. Resposta do grupo G3 à questão 3, referente ao raciocínio da Júlia, da ficha 7. .. 300
Figura 207. Resposta do grupo G9 à questão 3, referente ao raciocínio da Maria, da ficha 7. 300
Figura 208. Resposta do grupo G1 à questão 1 da ficha 8. 306
Figura 209. Resposta do grupo G8 à questão 2 da ficha 8. 307
Figura 210. Resposta do grupo G2, referente ao raciocínio da Joana, na questão 5 da ficha 8. 312

Figura 211. Resposta do grupo G6, referente ao raciocínio da Joana, na questão 5 da ficha 8. 312
Figura 212. Resposta do grupo G7, referente aos raciocínios do Manuel e do Joel, na questão 5 da ficha 8. 312
Figura 213. Resposta do grupo G1 à questão 5 da ficha 8. 313
Figura 214. Resposta do grupo G9 à questão 2a) da ficha 9. 315
Figura 215. Resposta do grupo G3 à questão 2a) da ficha 9. 316
Figura 216. Resposta do grupo G1 à questão 2b) da ficha 9. 316
Figura 217. Resposta do grupo G5 à questão 2b) da ficha 9. 316
Figura 218. Resposta do grupo G7 à questão 2b) da ficha 9. 317
Figura 219. Resposta do grupo G9 à questão 3 da ficha 9. 321
Figura 220. Resposta do grupo G2 à questão 3 da ficha 9. 321
Figura 221. Resposta do grupo G4 à questão 1 da ficha 10. 325
Figura 222. Resposta do grupo G3 à questão 2 da ficha 10. 326
Figura 223. Resposta do grupo G1 à questão 2 da ficha 10. 327
Figura 224. Resposta do grupo G2 à questão 2 da ficha 10. 328
Figura 225. Resposta do grupo G6 à questão 2 da ficha 10. 329
Figura 226. Extrato da resposta do grupo G4 à questão 4 da ficha 10. 331
Figura 227. Extrato da resposta do grupo G7 à questão 4 da ficha 10. 331
Figura 228. Resposta do grupo G6 à questão 4 da ficha 10. 332
Figura 229. Resposta do aluno A14 à questão 1a) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 336
Figura 230. Resposta do aluno A14 à questão 1a) na revisão do miniteste de Matrizes e deteminantes. 337
Figura 231. Resposta do aluno A6 à questão 1b) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 337
Figura 232. Resposta do aluno A6 à questão 1b) na revisão do ministeste de Matrizes e determinantes. 338
Figura 233. Resposta do aluno A12 à questão 2a) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 338
Figura 234. Resposta do aluno A18 à questão 2a) do ministeste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 339

Figura 235. Resposta do aluno A12 à questão 2a) na revisão do miniteste de Matrizes e determinantes. 339
Figura 236. Resposta do aluno A18 à questão 2a) na revisão do miniteste de Matrizes e determinantes. 339
Figura 237. Resposta do aluno A15 à questão 2b) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 340
Figura 238. Resposta do aluno A15 à questão 2b) na revisão do ministeste de Matrizes e determinantes. 340
Figura 239. Resposta do aluno A26 à questão 1a) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 341
Figura 240. Resposta do aluno A26 à questão 1a) na revisão do miniteste de Matrizes e determinantes. 342
Figura 241. Resposta do aluno A16 à questão 1b) do ministeste de Matrizes e determinantes e comentários da professora. 342
Figura 242. Resposta do aluno A16 à questão 1b) na revisão do ministeste de Matrizes e determinantes. 343
Figura 243. Resposta do aluno A13 na questão 1b) do miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora. 345
Figura 244. Resposta do aluno A13 à questão 1b) na revisão do ministeste de Sistemas de equações lineares. 345
Figura 245. Resposta do aluno A10 à questão 1b) no miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora. 346
Figura 246. Resposta do aluno A10 à questão 1b) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares. 347
Figura 247. Resposta do aluno A2 à questão 1a) no miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora. 347
Figura 248. Resposta do aluno A2 à questão 1a) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares. 348
Figura 249. Resposta do aluno A6 à questão 2a) do miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora. 349
Figura 250. Resposta do aluno A6 à questão 2a) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares. 349

Figura 251. Resposta do aluno A21 à questão 2b) do miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora. 350
Figura 252. Resposta do aluno A21 à questão 2b) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares. 351
Figura 253. Aspetos principais da opinião dos alunos sobre o trabalho de grupo e em grande grupo. 388
Figura 254. Opinião dos alunos sobre o *Microsoft Mathematics*. 389
Figura 255. Esquema-síntese dos aspetos mais relevantes da componente diagnóstica e formativa da avaliação efetuada durante a intervenção de ensino. 390
Figura 256. Caracterização sumária do estudo realizado. 393
Figura 257. Categorização das respostas dos alunos nas questões sobre os temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. 394
Figura 258. Percentagem de alunos que revelaram raciocínios não válidos que remetem para dificuldades no cálculo ou na compreensão do conceito de inversa de uma matriz. 396
Figura 259. Percentagem de alunos que recorreram a propriedades não válidas nas questões sobre Matrizes e determinantes. 397
Figura 260. Raciocínios lógicos não válidos utilizados nas questões sobre Matrizes e determinantes (MD) e sobre Sistemas de equações lineares (SEL). 400
Figura 261. Percentagem de alunos que recorreram a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação nas questões sobre Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. ... 402
Figura 262. Percentagem de respostas de cada tipo nas questões do teste diagnóstico. 403
Figura 263. Percentagem de professores que usam muitas vezes ou sempre cada uma das metodologias de trabalho. 407
Figura 264. Frequência dos aspetos enfatizados pelos professores nas tarefas preparadas para as aulas. 409
Figura 265. Etapas seguidas no processo de exploração do erro para promover a aprendizagem. 411

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o problema em estudo bem como as questões de investigação a ele inerentes. Evidencia-se também a sua relevância no contexto do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear (AL) no ensino superior. Por fim, faz-se, ainda, uma breve descrição da estrutura da tese.

1.1. Problema e questões do estudo

O facto de ser professora da unidade curricular (UC) de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA) no ensino superior politécnico tem motivado a investigadora a refletir sobre as suas práticas de ensino, interrogando-se sobre como melhorar o ensino e aprendizagem desta UC. De salientar que se tem constatado uma permanente desmotivação dos alunos face à UC, atingindo as taxas de reprovação, na generalidade das turmas, níveis considerados preocupantes. Por exemplo, considerando a relação entre os aprovados e avaliados, nos anos letivos 2010/2011, 2011/2012 e 2012/2013, anteriores à intervenção de ensino que é parte integrante desta investigação, as taxas de aprovação na UC dos cursos de licenciatura em engenharia foram superiores a 50% apenas num deles, variando nos restantes entre 14,5% e 48,7%. Esta situação torna-se ainda mais problemática se se considerar a percentagem dos aprovados em relação ao número de inscritos.

Este cenário, como se pode apurar por algumas referências (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000a; Souza & Simmer, 2014), também acontece em outros países. Por exemplo, Souza e Simmer (2014), mencionando instituições do ensino superior do Estado do Espírito Santo, Brasil, referem que estas apresentaram índices de reprovação na disciplina de AL superiores a 50%, chegando, em alguns casos, quase a 90%. Também no contexto brasileiro, Celestino (2000) relata que, no período entre o 1.º semestre de 1993 e o 1.º semestre de 1997, as reprovações em AL na Universidade Estadual de Campinas, na Universidade de São Paulo e na Universidade Estadual Paulista oscilaram entre 25% e 50%. Cita ainda pesquisas realizadas em outros países que mostram que os alunos apresentam dificuldades na compreensão dos principais conceitos de AL e, consequentemente, um baixo aproveitamento tanto nesta disciplina como em outras que dependem de um considerável suporte teórico.

Dorier, Robert e Sierspinska (2000), na conclusão do livro *On the teaching of linear algebra*, editado por Dorier (2000a), em que se apresentam estudos sobre o ensino da AL, realizados por diversos investigadores de diferentes países, comentam: "há um amplo consenso em afirmar que tanto o ensino como a aprendizagem da álgebra linear são difíceis" (p. 273). Corroborando esta afirmação, Gueudet-Chartier (2004) refere que "é um facto bem conhecido que os estudantes consideram este assunto difícil" (p. 491), parecendo muito abstrato e desconectado de todos os conhecimentos matemáticos anteriores. Hillel (2000) afirma até que "o ensino da álgebra a um nível universitário é quase universalmente considerado como uma experiência frustrante para professores e estudantes" (p. 191).

Coloca-se então a questão de como promover um ensino da AL que, para além de manter os alunos motivados, permita que estes desenvolvam as competências consideradas essenciais para um bom desempenho no presente e no futuro, sempre que precisarem de recorrer a esses conhecimentos.

Tendo como pano de fundo esta preocupação, partindo do pressuposto que conhecer os erros dos alunos pode ser um bom princípio para o professor conseguir programar um ensino mais eficaz e adequado às necessidades destes (Ferreira & Brumatti, 2009; Godino, Batanero & Font, 2003) e tendo em atenção que a reflexão e discussão sobre os erros pode ser um ponto de partida para os estudantes participarem ativamente na sua superação (Pochulu, 2004), neste estudo, formularam-se as seguintes questões de investigação:

Questão de investigação 1 — Quais os erros cometidos e as dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?

Questão de investigação 2 — Quais as características do ensino de álgebra linear no ensino superior politécnico segundo os professores?

Questão de investigação 3 — Qual a influência de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades dos alunos e na utilização de *software* sobre a aprendizagem dos estudantes em álgebra linear?

Estas três questões fomentaram a organização do estudo em duas partes, uma focada nas duas primeiras questões de investigação e outra na terceira. Na primeira parte, que se desenvolveu em duas fases, pretendeu-se efetuar uma contextualização do ensino e da aprendizagem da AL no ensino superior politécnico, tanto do ponto de vista das dificuldades evidenciadas pelos estudantes (1.ª fase) como do ensino, tal como é percecionado pelos professores (2.ª fase). A segunda parte, apoiada nos resultados da primeira, na experiência de

docência da investigadora e na literatura consultada, consistiu numa intervenção no terreno, visando-se averiguar as vantagens e inconvenientes dessa intervenção na perspetiva da melhoria das aprendizagens dos alunos na área de AL.

Tendo em vista responder às questões de investigação estabelecidas, adotaram-se métodos de recolha de dados diversificados e selecionaram-se também diferentes participantes. Assim, para estudar a primeira questão de investigação (1.ª fase da primeira parte do estudo), os participantes foram os alunos dos cursos de licenciatura em engenharia que frequentavam a UC de ALGA no ano letivo 2011/2012, numa instituição do ensino superior politécnico. Nesse estudo, especificamente, procurou-se categorizar as respostas e raciocínios dos alunos e identificar os erros cometidos na resolução de questões sobre Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares.

Para estudar a segunda questão de investigação (2.ª fase da primeira parte), em que se pretendia caracterizar o ensino da AL, foi aplicado um questionário *online* aos professores que lecionavam, em 2011/2012, uma UC de AL nos institutos politécnicos públicos portugueses. Mais especificamente, pretendeu-se indagar os professores sobre os seus métodos na preparação, implementação e avaliação das aulas de AL, as suas perceções relativas às dificuldades dos alunos e conhecer as suas recomendações didáticas para a melhoria do ensino de AL.

No caso da terceira questão (segunda parte do estudo) implementou-se uma intervenção de ensino na UC de ALGA numa turma de um curso de licenciatura em engenharia, assumindo-se esta como um estudo de caso. Especificamente, essa intervenção visou promover um ensino mais centrado no aluno, sendo um dos objetivos fundamentais levar este a assumir um papel ativo na identificação dos seus erros e na sua correção, assim como na superação das suas dificuldades. Em traços gerais, as estratégias seguidas foram: avaliação diagnóstica, trabalho em grupo, debate em grande grupo sobre o trabalho realizado, reformulação dos trabalhos, realização de minitestes em duas etapas (resolução e respetiva revisão) e utilização do *software Microsoft Mathematics* como apoio na resolução das tarefas propostas. Algumas delas visavam originar discussão sobre conceitos/procedimentos identificados como geradores de erros e dificuldades. Para além dos dados recolhidos através da gravação de aulas e das produções dos alunos, a intervenção realizada foi igualmente submetida à apreciação por parte de cada um dos estudantes através de um questionário e de uma entrevista, no sentido de identificar as

vantagens e inconvenientes das várias estratégias para a sua aprendizagem, assim como obter sugestões de melhoria a implementar no futuro.

1.2. Relevância do estudo

A massificação do ensino superior que ocorreu num determinado número de países, incluindo Portugal, fez afluir a este grau de ensino alunos oriundos de camadas socioeconómicas e socioculturais muito heterogéneas, com níveis de conhecimentos, capacidades, atitudes, expectativas e projetos vocacionais claramente diferentes (Esteves, 2008; Nunes & Sebastião, 2004). Callejo (2013), aludindo ao contexto espanhol, refere que as universidades já não são os centros de elite como no passado, sendo necessário adotar uma nova abordagem de ensino, de forma a colmatar o fosso entre o ensino secundário e o superior.

No âmbito da matemática, segundo Nunes e Sebastião (2004), o insucesso nas unidades curriculares (UCs) constitui um obstáculo com o qual professores e alunos se deparam em grande parte dos politécnicos e universidades portuguesas. Assim, é natural que, por parte das instituições do ensino superior e dos professores envolvidos, haja a preocupação de perceber as razões do fracasso de muitos estudantes na área da matemática e encontrar estratégias para melhorar o seu desempenho. Como alegam Ramos, Delgado, Afonso, Cruchinho, Pereira, Sapeta e Ramos (2013),

> para além do professor do ensino superior dever continuar a preocupar-se com o domínio científico dos conteúdos a trabalhar com os seus estudantes, também deve passar a dar atenção ao que se passa ao nível do ambiente de aprendizagem relativo às unidades curriculares que ministra. (p. 117)

No que diz respeito à AL, a importância de investigações sobre o seu ensino e aprendizagem centra-se no facto dela se encontrar subjacente a quase todos os domínios da matemática e até mesmo de outras áreas, como as Ciências da Computação, a Engenharia e a Física, entre outras. De igual modo, Monteiro (2001) considera que a AL fornece um quadro teórico rigoroso adequado ao tratamento de inúmeras questões oriundas das diversas áreas científicas. O autor realça ainda o papel formativo e propedêutico da AL, visto que, em termos curriculares, constitui muitas vezes o primeiro contacto dos estudantes com uma teoria apresentada de modo consideravelmente abstrato. Corroborando estas ideias, Berman e Okubo (2015) também consideram que "a AL é uma das áreas mais importantes na educação de matemáticos, cientistas, engenheiros e economistas" (p. 593). Consequentemente, torna-se

imprescindível que aqueles que pretendam trabalhar com as ciências que utilizam a matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento, dominem os seus principais conceitos (Coimbra, 2008; Machado, 2004).

No entanto, de acordo com Celestino (2000), as pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de disciplinas de cursos superiores, em todo mundo, são relativamente recentes e, no início, centravam-se na área do cálculo diferencial e integral. Ou seja, a didática da AL é um dos ramos mais jovens, dentro da didática da matemática, pois, embora antes da década de 90 se tenham publicado isoladamente trabalhos sobre temas de ensino e aprendizagem da AL, é apenas a partir de 1990 que se começa a estudar esse assunto de forma sistemática. Nessa fase inicial podem-se distinguir duas grandes correntes: o movimento da reforma curricular que se iniciou nos Estados Unidos, dinamizado pelo Linear Álgebra Curriculum Study Group (LACSG), e as investigações iniciadas por Dorier em França, dentro do campo da didática da matemática francesa. Posteriormente, com Dubinsky, começaram também a aparecer contribuições em didática da AL dentro da linha de investigação do pensamento matemático avançado (Mosquero & Salcedo, 2008).

Em Portugal, a investigação educacional sobre o ensino superior é, ainda, incipiente (Esteves, 2012) e tem tido como um dos seus campos principais a problemática do insucesso escolar e da adaptação dos estudantes ao ensino superior. Só mais recentemente as práticas de ensino e de avaliação, em relação com a aprendizagem, começaram a granjear o interesse da comunidade científica e a ser objeto de estudo, com expressão em teses e dissertações (Rodrigues, Nunes, Devesa & Fera, 2012). Especificamente na área da matemática, embora ainda sejam escassos os estudos sobre o seu ensino e aprendizagem em cursos não ligados à formação inicial de professores, esta temática começa a adquirir alguma relevância, nomeadamente com as investigações de Gonçalves (2017), Magalhães (2016), Rosa (2015), Aquino (2013), Seabra (2013), Henriques (2010), Domingos (2003) e Gonçalves (2005), referindo-se apenas a última à AL. No entanto, essas pesquisas ainda são exíguas quando comparadas com os estudos realizados no contexto da formação de professores ou do ensino básico/secundário. Particularmente, como refere Cosme (2015), em Portugal, existem poucos estudos sobre didática de AL.

Destaca-se, assim, a necessidade de efetuar mais investigações na área da AL, que possam fundamentar, de forma coerente, as decisões que precisam ser assumidas no ensino

superior, como forma de ultrapassar as dificuldades diagnosticadas e implementar metodologias de ensino que conduzam a alterações significativas em termos da aprendizagem dos estudantes.

Esta investigação foca-se, essencialmente, nos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, escolha que foi influenciada por variadas razões. Uma delas, de ordem prática, foi evitar um estudo demasiado extenso que sobreviria se se abarcassem todos os temas que são lecionados na UC de ALGA da instituição onde este estudo foi desenvolvido. Outra razão teve a ver com o programa da própria UC, pois, de acordo com a sequência de conteúdos que neste é recomendada, a compreensão dos temas em causa (Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares) é importante para o acompanhamento dos temas subsequentes que são lecionados, como Espaços vetoriais, Transformações lineares e Valores e vetores próprios. Para além disso, como esses temas estão entre os três primeiros a abordar (o primeiro é Números complexos), isso permitiu, no ano em que se implementou a intervenção de ensino, iniciar a lecionação da UC com uma metodologia diferenciada da habitual, evitando que houvesse um abandono precoce dos alunos às aulas.

Outra razão pertinente é o facto de Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares serem temas comuns a vários cursos, sendo habitual, no caso das engenharias, ser necessário recorrer a conhecimentos destes domínios para modelar problemas nas suas áreas de intervenção profissional.

A importância desses temas é, também, reconhecida por vários autores (Cardoso, Kato & Oliveira, 2013; Costa, 2008; González, 2009; Ibarra, 2008; Sanches, 2002) que realçam o ponto de vista da sua aplicabilidade, designadamente o facto de servirem de base para a compreensão de conhecimentos mais avançados ou a articulação com outros conceitos matemáticos.

Por exemplo, Costa (2008) considera a noção de sistemas de equações uma ferramenta matemática importante na medida em que, "além de permitir a modelação de diversas situações matemáticas das outras ciências e do quotidiano, ela também possibilita a articulação de outras noções matemáticas, desde o ensino fundamental até o superior" (p. 1). De igual modo, Ibarra (2008) enfatiza o facto de os sistemas de equações serem um objeto matemático com ampla utilização na área de engenharia, podendo aplicar-se na modelação de vários problemas, como sejam o fluxo de tráfego, dietas, circuitos elétricos, misturas, equilíbrio de equações químicas, etc.

González (2009) corrobora as ideias anteriores, pois, para além de referir o caráter aplicativo dos sistemas como modelo matemático para muitos problemas ou fenómenos reais em distintas áreas do conhecimento (Física, Biologia, Química, Economia, etc.), considera-os essenciais para o desenvolvimento e interpretação de muitos conceitos importantes em AL como matriz, determinante, inversa de uma matriz, característica, independência linear, etc. Pelo que conclui que a resolução de sistemas não é somente o problema central da AL, como declara Strang (1988), mas também o seu "coração".

Na mesma linha, mas no contexto matricial, Sanches (2002) afirma que a álgebra das matrizes tem uma importância significativa para várias ciências, encontrando cada vez mais aplicações em diversos setores. Assim, na sua opinião,

> se não ocorrer uma aprendizagem significativa e relevante dos conceitos de matrizes, os estudantes poderão apresentar dificuldades, em níveis mais avançados, para compreender e aplicar outros conceitos relacionados, tais como conceitos de programação, computação gráfica, custos de produção, teoria dos grafos, circuitos elétricos, modelos económicos lineares, entre centenas de outros. (p. 7)

Esta ideia vai de encontro à opinião de Cardoso et al. (2013), que consideram que as operações com matrizes fornecem a base para os raciocínios necessários à compreensão dos conteúdos de AL.

Birinci, Delice e Aydin (2014) destacam ainda que os sistemas de equações lineares e as matrizes se podem considerar áreas de aplicação para os símbolos, linguagens e operações, pois, por exemplo, quando se resolve um sistema de equações lineares, usando operações elementares sobre as linhas da matriz, é necessário utilizar um determinado número de regras que devem ser explicitadas usando simbologia matemática. Assim, consideram importante compreender os conhecimentos e competências dos estudantes em sistemas de equações e matrizes.

Em conclusão, pelo exposto, faz todo o sentido que, neste estudo, dentro do domínio da AL, as preocupações com o ensino e a aprendizagem dos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares tenham uma dimensão relevante.

1.3. Estrutura da tese

A tese está organizada em seis capítulos. No Capítulo I – *Introdução* – mencionam-se as questões que nortearam o estudo e evidencia-se a relevância da investigação no contexto do ensino e aprendizagem da AL no ensino superior, terminando-se com a descrição dos subcapítulos que constam de cada um dos capítulos que compõem a tese.

No Capítulo II – *Enquadramento teórico* – faz-se referência a diversos documentos e resultados de investigações relacionadas com o estudo desenvolvido. Este capítulo encontra-se dividido em quatro subcapítulos. No primeiro, *A Álgebra Linear no currículo*, faz-se uma breve descrição dos programas de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, relativamente aos conteúdos relacionados com AL e tecem-se, com base na opinião de alguns autores, algumas considerações sobre a introdução de temas de AL como Matrizes e Determinantes no currículo do ensino secundário, apresentando-se como exemplo referências curriculares de países em que essa introdução é uma realidade. Termina-se, este subcapítulo, com referências à AL no currículo de vários cursos do ensino superior, tanto em Portugal como em outros países. No segundo subcapítulo, *Dificuldades em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear,* procura-se fazer um apanhado de dificuldades dos alunos em conceitos que podem afetar a aprendizagem de AL, como, por exemplo, os conhecimentos sobre lógica. No terceiro subcapítulo, *Dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear*, faz-se uma revisão de vários estudos que relatam investigações sobre dificuldades de alunos em vários temas ligados à AL, com especial destaque para Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. No quarto subcapítulo, *O ensino da Álgebra Linear*, começa-se por fazer uma breve caracterização do ensino da matemática no ensino superior, relatam-se depois alguns estudos que focam aspetos relevantes para o ensino da AL, como a importância das aplicações, da geometria e da tecnologia, entre outros, dando-se, ainda, um especial destaque ao erro e ao seu papel como promotor de uma estratégia didática que leve a uma aprendizagem significativa.

No Capítulo III – *Método de investigação* – fundamentam-se as opções metodológicas, salientando-se as diferenças para cada uma das partes do estudo. Em seguida, explicita-se o contexto do estudo e focam-se os restantes aspetos metodológicos inerentes a cada uma das partes do estudo, nomeadamente: apresentam-se os participantes, mencionam-se os métodos de recolha de informação, descrevendo os instrumentos de recolha de dados e os

procedimentos utilizados nessa recolha, e referem-se, de forma sumária, os métodos de análise de dados.

No Capítulo IV – *Dificuldades dos alunos em Álgebra Linear e perspetivas dos professores sobre o seu ensino* – expõem-se os resultados referentes à primeira parte do estudo, em dois subcapítulos que correspondem às duas fases que a integram. Assim, no primeiro subcapítulo, *Dificuldades dos alunos em Álgebra Linear*, relativo à 1.ª fase da primeira parte, apresentam-se e analisam-se as respostas e os raciocínios aduzidos pelos alunos nas várias questões que lhes foram propostas nos dois temas estudados, isto é, Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. No segundo subcapítulo, *O ensino da Álgebra Linear do ponto de vista dos professores*, apresentam-se os resultados da 2.ª fase da primeira parte do estudo. Assim, com base na análise dos dados obtidos no questionário, respondido pelos professores participantes no estudo, faz-se a caracterização destes e das UCs que lecionam no domínio da AL. Efetua-se ainda uma descrição dos aspetos que se relacionam com a preparação, implementação e avaliação das aulas de AL segundo o ponto de vista dos professores, assim como a sua perceção sobre as dificuldades dos alunos e as suas sugestões para melhorar o ensino e a aprendizagem de AL. O capítulo termina com um terceiro subcapítulo que corresponde a uma síntese dos aspetos mais relevantes.

No Capítulo V – *Intervenção de ensino* – apresentam-se os resultados da segunda parte do estudo, que se subdividiu em três subcapítulos. No primeiro subcapítulo, *As aulas da intervenção de ensino*, focam-se os resultados da avaliação diagnóstica, descrevem-se as aulas da intervenção, destacando-se os aspetos que se consideraram mais relevantes para o estudo, e apresenta-se uma análise do desempenho dos alunos nos minitestes e na sua revisão. No segundo subcapítulo, *Avaliação da intervenção de ensino – o ponto de vista dos alunos*, apresentam-se e analisam-se as opiniões dos alunos sobre as estratégias seguidas durante a intervenção de ensino e as vantagens/desvantagens das mesmas em termos da sua aprendizagem, tendo como suporte os dados recolhidos aquando da aplicação do questionário e da realização das entrevistas. Por fim, no último subcapítulo, *Síntese e comentários*, apresenta-se uma súmula dos principais resultados que foram sendo abordados ao longo do capítulo.

No Capítulo VI – *Conclusões* – faz-se um sumário da investigação realizada, apresentam-se as interpretações e reflexões finais para responder às questões que orientaram o estudo, efetuam-se considerações sobre o ensino e a aprendizagem da AL baseadas na intervenção de

ensino realizada, identificam-se as principais limitações do estudo e tecem-se algumas recomendações didáticas e para futuras investigações.

Esta tese termina com a apresentação das referências bibliográficas e dos anexos. Estes últimos encontram-se divididos em nove secções. Assim, na primeira inclui-se a descrição dos conteúdos programáticos da UC de ALGA relativa aos cursos de licenciatura em engenharia afetos à instituição de ensino em que se realizou o estudo. A segunda e a terceira secções contêm documentação relativa à 1.ª fase da primeira parte do estudo, isto é, respetivamente, a ficha de dados que os alunos preencheram e o enunciado das questões a que eles responderam. A quarta secção inclui o questionário que foi aplicado aos professores na 2.ª fase da primeira parte do estudo. As restantes secções incluem os instrumentos que foram utilizados para a recolha de dados na segunda parte do estudo, ou seja, a ficha de dados dos alunos; os enunciados do teste diagnóstico, das fichas de trabalho e dos minitestes; o questionário aplicado aos participantes na intervenção de ensino e o guião das entrevistas.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, que está organizado em quatro secções, referenciam-se diversos documentos, trabalhos e resultados de investigações relacionados com o estudo desenvolvido.

Inicialmente, destacam-se as referências à Álgebra Linear (AL) em termos curriculares, tanto a nível nacional como internacional; depois focam-se as dificuldades em conteúdos propedêuticos necessários para a aprendizagem da AL; faz-se, ainda, um levantamento dos estudos que apontam dificuldades dos estudantes em temas de AL, com especial incidência para os temas de Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. Passando para a vertente do ensino da AL realiza-se um apanhado de pesquisas que se referem a esta temática, dando especial relevo à importância do erro neste contexto.

2.1. A Álgebra Linear no currículo

No currículo português, conhecimentos sobre Álgebra são trabalhados com os alunos ao longo do ensino básico e secundário. Porém, no que diz respeito à AL, embora os sistemas de equações lineares e algumas noções sobre vetores façam parte integrante do currículo do ensino básico ou secundário (Ministério da Educação e Ciência, 2013a; Ministério da Educação e Ciência, 2013b; Ponte et al., 2007; Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2001, 2002), as suas temáticas são essencialmente abordadas no ensino superior, como se pode constatar pelas referências mais detalhadas que a seguir se apresentam.

2.1.1. A Álgebra Linear no currículo do ensino básico e secundário

Durante a elaboração desta tese, houve alterações curriculares no ensino básico e secundário ao nível dos programas da disciplina de Matemática. Como a implementação do novo currículo está a ser efetuada de forma faseada, os participantes no estudo concluíram o ensino secundário antes da sua concretização. Assim, referencia-se o currículo em vigor antes do ano letivo de 2013/2014, com especial incidência para os conteúdos curriculares, focando-se, em seguida, alguns aspetos que neste domínio sofreram algum tipo de alteração.

Nos programas do 2.º ciclo anteriores a 2013/2014 não é feita referência direta a conteúdos de AL, aparecendo as primeiras referências a vetores e a sistemas de equações lineares no 3.º ciclo do ensino básico (Ponte et al., 2007), conforme consta da Tabela 1.

Tabela 1 – Conteúdos do 3.º ciclo do ensino básico relacionados com AL

Tema geral	Tópicos	Objetivos específicos
Geometria - Isometrias	Translação associada a um vetor	Compreender as noções de vetor e de translação e identificar e efetuar translações. Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações. Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vetores
Álgebra - Equações	Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas	Resolver sistemas de equações pelo método de substituição. Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações. Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações.

No programa atualmente em vigor, os conteúdos relativos a sistemas mantiveram-se, tendo a sua abordagem passado do 9.º para o 8.º ano.

No caso do ensino secundário, antes de 2013/2014, apenas no programa de Matemática A (Silva et al., 2001, 2002) se incluem conteúdos mais diretamente relacionados com AL, os quais se apresentam na Tabela 2.

Tabela 2 – Conteúdos do ensino secundário relacionados com AL

Tema geral	Conteúdos
10.º ano Geometria no Plano e no Espaço I	Geometria Analítica - O método cartesiano para estudar geometria no plano e no espaço: - Vetores livres no plano e no espaço: componentes e coordenadas de um vetor num referencial ortonormado; vetor como diferença de dois pontos. - Colinearidade de dois vetores.
11.º ano Geometria no plano e no espaço II	Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço: - Definição e propriedades; - Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado. Interseção de planos e interpretação geométrica: - Resolução de sistemas

No programa que está atualmente em vigor, o tema Geometria analítica é, igualmente, um campo de destaque nos dois primeiros anos do ensino secundário. No entanto, a Interseção de planos e interpretação geométrica tendo em vista a resolução de sistemas deixou de ser contemplada.

Embora no currículo português, antes do ensino superior, não seja dada muita ênfase a conteúdos de AL, há autores (e.g., Pinho, 2010; Harel, 2000; Day & Kalman, 1999) que

advogam a sua introdução numa etapa anterior à universitária. Por exemplo, Harel (2000) defende que, no ciclo anterior à entrada para a universidade, se comecem a aprender conceitos básicos da AL, segundo uma orientação geométrica. No entanto, considera que, mais do que desenvolver procedimentos algorítmicos de matrizes e determinantes, tornar-se-ia importante que os alunos começassem a atribuir um significado informal e contextualizado a conceitos como independência linear, subespaço gerado, espaço vetorial e transformação linear. Na sua perspetiva, os estudantes que seguirem um programa de AL na escola secundária tornar-se-ão mais motivados e preparados cognitivamente para estas e outras ideias abstratas na primeira disciplina de AL da faculdade.

No mesmo sentido, Day e Kalman (1999) apresentam uma lista de conceitos e procedimentos, que, na sua opinião, são possíveis de abordar antes da entrada dos alunos no ensino superior: operações com matrizes; interpretação de vetores; linearidade e combinações lineares e conhecimentos de geometria, essencialmente retas e planos no espaço tridimensional. Em Portugal, Pinho (2010), na sua dissertação de mestrado, propõe a introdução das matrizes no currículo de matemática do ensino secundário e o seu uso na resolução de problemas. Na sua perspetiva, parece lógico juntar a utilidade e aplicação prática dos sistemas de equações lineares à sua resolução através de matrizes, já que esta nova forma de resolver problemas irá beneficiar o desenvolvimento da capacidade de raciocínio lógico dos alunos, ao mesmo tempo que os motiva para a aprendizagem.

Esta opinião parecer ser consentânea com o que ocorre em alguns países, como Espanha e Brasil, nos quais tópicos como matrizes e determinantes fazem parte do currículo do *bachillerato* e do ensino médio, respetivamente.

Particularmente em Espanha, de acordo com o *Boletín Oficial del Estado* (2015), nas duas modalidades do *bachillerato*, Ciências e Humanidades e Ciências Sociais, que incluem disciplinas de matemática (Matemáticas I e II na modalidade Ciencias e Matemáticas aplicadas à las Ciencias Sociales I e II na modalidade Humanidades e Ciencias Sociales), conteúdos de matrizes e determinantes aparecem explicitamente citados num bloco designado por Números e álgebra. No 1.º ano do *bachillerato* é referido o método de Gauss para a resolução e interpretação de sistemas de equações lineares tanto na disciplina de Matemáticas I como na de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, recomendando-se nesta última a limitação dos sistemas a 3 incógnitas. No 2.º ano do *bachillerato* amplia-se o leque dos conceitos a abordar

sobre o tema em ambas as disciplinas. Especificamente, para Matemáticas II, no documento citado, é apresentada a seguinte listagem de conteúdos:

> Estudo das matrizes como ferramenta para manejar e operar com dados estruturados em tabelas e gráficos. Classificação de matrizes. Operações.
> Aplicação das operações das matrizes e das suas propriedades na resolução de problemas extraídos de contextos reais.
> Determinantes. Propriedades elementares.
> Característica de uma matriz.
> Matriz inversa.
> Representação matricial de um sistema: discussão e resolução de sistemas de equações lineares. Método de Gauss. Regra de Cramer. Aplicação à resolução de problemas. (p. 421)

Na disciplina de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, os conteúdos recomendados são basicamente os mesmos, com apenas algumas diferenças, a saber: no caso dos determinantes, o seu cálculo limita-se a matrizes até à ordem três e não são referenciadas as propriedades elementares. Na discussão de sistemas é igualmente referido como limite três equações com três incógnitas e não é referida a Regra de Cramer. No domínio da resolução de problemas é explicitado que se devem resolver problemas das ciências sociais e da economia.

No contexto brasileiro, por exemplo no Estado de São Paulo, de acordo com um documento da Secretaria de Estado da Educação – *Currículo do Estado de São Paulo* (2012) –, é recomendada a abordagem do tema Matrizes e determinantes na 2.ª série do ensino médio. Este tema é referido na componente Números/Relações, com a designação Matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, e inclui como conteúdos: "Matrizes: significado como tabelas, características e operações; A noção de determinante de uma matriz quadrada; Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento" (p. 67). No âmbito do tema, o documento apresenta, ainda, como "habilidades a desenvolver":

- Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano;
- Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenómenos físicos ou geométricos (imagens digitais, pixels, etc.);
- Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes;
- Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até à 4.ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los. (p. 67)

A importância da introdução de conteúdos relativos a matrizes e determinantes no ensino médio brasileiro é reforçada pelo *Currículo Mínimo*, documento elaborado pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (2012) para a sua rede de ensino, "com a finalidade de orientar, de forma clara e objetiva, os itens que não podem faltar, em cada disciplina, ano de escolaridade e bimestre" (p. 2). Particularmente no âmbito da Matemática, na 2ª série do ensino médio, o tema Matrizes e Determinantes aparece incluído no Campo Algébrico Simbólico, sendo os itens: "Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes, Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes, Resolver problemas utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial, Calcular os determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3" (p. 18) mencionados como habilidades e competências a desenvolver.

2.1.2. A Álgebra Linear no currículo do ensino superior

Em Portugal, tanto no subsistema politécnico como universitário, tópicos de AL fazem parte do currículo de diversos planos de estudos de cursos de licenciatura, como cursos nas áreas de matemática, física, engenharia, gestão, etc.

Particularmente, nos institutos politécnicos portugueses, conteúdos de AL estão integrados no currículo de licenciaturas como Ciências Empresariais, Segurança Informática em Redes de Computadores (Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Felgueiras), Informática de Gestão (Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança), Tecnologias da Informação e Comunicação (Escola Superior de Tecnologia de Abrantes), Tecnologia e Gestão Industrial (Escola Superior de Tecnologia de Setúbal), Energia e Ambiente (Escola Superior de Tecnologia e Gestão da Guarda), etc. É mesmo quase consensual a sua presença no plano de estudos do 1.º ano de praticamente todos os cursos de engenharia dos institutos superiores politécnicos, habitualmente com as designações de Álgebra Linear, Álgebra Linear e Geometria Analítica ou simplesmente Álgebra.

Quanto aos temas abordados na área das engenharias, os mais comuns são matrizes, determinantes, sistemas de equações lineares, espaços vetoriais, transformações lineares e valores e vetores próprios, incluindo-se também, em alguns casos, números complexos, espaços euclidianos e geometria analítica. Este programa está mais ou menos em sintonia com o que é recomendado para uma primeira disciplina de AL pelo Linear Algebra Curriculum Study Group (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993), grupo de trabalho que se iniciou em 1990 e que propôs

um conjunto de recomendações fundamentadas na prática de ensino e na pesquisa em álgebra nos Estados Unidos (Dorier & Sierpinska, 2001).

A nível internacional, a AL tem também uma forte presença nos currículos dos cursos do ensino superior (Aydin, 2009; Bogomolny, 2006; Britton & Henderson, 2009; Dorier, 2000a, 2016; Grande, 2006; Gueudet-Chartier, 2004; Oktaç & Trigueros, 2010). Por exemplo, segundo Oktaç e Trigueros (2010), as escolas de Administração, Economia, Ciências Sociais, Engenharia, Física, Biologia, etc. de todas as universidades mexicanas contemplam, nos seus programas, pelo menos uma disciplina com conteúdos de AL, pois esta é um ramo da matemática que se considera importante praticamente em todas as profissões pelas suas possibilidades de aplicação na solução de diversos problemas. Da mesma forma, Grande (2006), focando o contexto brasileiro, refere que a AL é ministrada nos cursos de graduação do ensino superior em diversas carreiras como Matemática, Física, Engenharia, Economia, Administração, Estatística e Ciências da Computação. Também Ortega (2002), no contexto espanhol, assevera que a AL é um assunto presente nas primeiras disciplinas de quase todas as engenharias e licenciaturas de Ciências, Ciências da Natureza e da Saúde e Ciências Sociais.

Quanto aos conteúdos abordados, há uma similaridade com o que acontece no contexto português. Por exemplo, Britton e Henderson (2009), ao descreverem uma investigação realizada com estudantes de uma universidade australiana, referem que no 1.º ano da disciplina de AL se introduzem vetores (como segmentos de reta orientados), retas e planos no espaço, operações com matrizes, método de eliminação de Gauss, determinantes e valores e vetores próprios; enquanto no 2.º ano se introduzem espaços vetoriais, subespaço gerado, independência linear, subespaços, espaço nulo e espaço das colunas de matrizes, transformações lineares e diagonalização.

No caso da Argentina, tanto Celis, Kurdobrin, Pérez, Sabatinelli e Guzmán (2012), no contexto da Universidade Nacional do Rosário, como Sara, Scardigli, Pustilnik, Cittadini e Pano (2006), no âmbito da Universidade Tecnológica Nacional, fazem referência a uma disciplina que aborda conteúdos de AL que são comuns a todas as engenharias. Na primeira universidade, a disciplina é designada por Álgebra e Geometria II, e tem como conteúdos básicos sistemas de equações lineares, complementos sobre vetores, matrizes, determinantes, espaços vetoriais, transformações lineares, valores próprios e vetores próprios, produto externo e produto interno (Celis et al., 2012). Na segunda, a disciplina é designada por Álgebra e Geometria Analítica e os conceitos a abordar são, na sua maioria, idênticos à anterior, com exceção de complementos

sobre vetores e produto externo e interno que não são focados, mas acrescentam-se os conteúdos reta e plano, diagonalização de matrizes simétricas, cónicas e quádricas.

Situação semelhante se passa no contexto espanhol, pois, de acordo com Prieto (2014), o conteúdo das disciplinas centradas em AL dos cursos de Física, Matemática e Engenharia Civil da universidade de Cantabria, em termos gerais é análogo, focando-se no estudo dos espaços vetoriais, matrizes, determinantes e espaços euclidianos.

Embora usualmente a AL represente o primeiro contacto com a abordagem axiomática "moderna", desde os anos 90, em muitas universidades, o seu ensino tornou-se menos formal, sendo muitas vezes precedido de uma disciplina preparatória em geometria cartesiana ou uma disciplina de lógica e teoria de conjuntos. No entanto, a ideia de continuar a ensinar a teoria axiomática dos espaços vetoriais durante os dois primeiros anos da universidade não foi questionada seriamente, pelo que em muitos países o ensino da AL continua bastante formal (Dorier, 2016).

Podem-se, assim, distinguir duas tradições principais no ensino da AL, uma focada no estudo formal dos espaços vetoriais e outra com uma abordagem mais analítica baseada no cálculo matricial (Dorier 2002; Orzech & Hillel, 2001). A primeira abordagem, designada por vezes como da abstração para o cálculo, começa com os espaços vetoriais e as aplicações lineares e depois as matrizes e os sistemas de equações lineares são tratados como aplicações dos conteúdos anteriores. A segunda, considerada do cálculo para a abstração, sugere que o cálculo matricial e os sistemas lineares precedam os espaços vetoriais e as aplicações lineares, no sentido de capacitar os estudantes para desenvolverem a linguagem e o raciocínio necessário para entender conteúdos mais abstratos (Klapsinou & Gray, 1999). Entre estas duas orientações existe uma série contínua de modelos de ensino, em que cada polo é mais ou menos dominante (Dorier, 2002). Como refere Aydin (2013), o mais importante é decidir qual é o programa que faz sentido para os estudantes em função da especificidade de cada curso.

2.2. Dificuldades em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear

A questão dos conhecimentos prévios que são necessários para a aprendizagem da AL no ensino superior é um assunto que não se deve descurar se se pretender que a passagem entre o ensino secundário e superior se faça de forma harmoniosa, integrada e com um sentido de continuidade. Como refere Henriques (2010):

> Os conceitos abordados no ensino superior revestem-se de grande complexidade, exigindo um bom domínio do pensamento matemático. Este pensamento matemático avançado não é algo que surge naturalmente, mas é uma competência que tem que ser adquirida pelos estudantes para compreender os conceitos matemáticos abordados neste nível de ensino (ao entrar no campo da Matemática avançada). Se um aluno apresenta falhas na compreensão de resultados matemáticos elementares, o processo de aprendizagem de novos assuntos, fica, frequentemente, comprometido e esta transição torna-se um momento crítico de insucesso para muitos alunos. (p. 7)

No entanto, existem pesquisas (Uzuriaga; Arias & Manco, 2010; Celis et al., 2012) que retratam dificuldades dos estudantes em conceitos ou procedimentos que se esperaria terem sido assimilados durante o ensino básico e secundário e que acabam por afetar o desempenho dos alunos em disciplinas como AL.

Por exemplo, Uzuriaga, Arias e Martinez (2008), num estudo com professores que orientam as disciplinas de AL numa universidade da Colômbia, concluíram que 64,3% dos participantes considera que os estudantes não têm os conhecimentos prévios para frequentar a disciplina de AL, indicando como causas principais os problemas no momento de abstrair e generalizar e o escasso manejo algébrico.

Da mesma forma, Brito, Rodríguez, Valle e Fraga (2010), baseados na sua experiência de ensino em Cuba, observam que muitos dos estudantes que chegam ao ensino superior têm pouca motivação para o estudo da matemática, apresentam dificuldades na compreensão e assimilação de conteúdos assim como no processo de modelação de fenómenos, não sabem para que serve a matemática, aprendem os conteúdos de forma mecanicista e não interpretam corretamente os resultados obtidos.

Também Celis et al. (2012), tendo como contexto os anos iniciais dos cursos de engenharia de uma universidade da Argentina, são da opinião que as dificuldades que observaram revelam a falta de articulação entre o que os alunos aprenderam no ensino médio e as exigências da educação superior. Particularmente, na disciplina de Álgebra Linear e Geometria II, identificaram dificuldades como falta de compreensão da leitura, falta de domínio

de conceitos básicos, falta de habilidades para análise e resolução de problemas, dificuldades na abordagem de qualquer questão que envolva o "pensamento formal", deficiente capacidade de aplicação, insuficiente desenvolvimento da capacidade criativa e impossibilidade de transferir conhecimentos para novas situações.

Pretendendo, de forma similar, identificar algumas causas que determinam o baixo aproveitamento na disciplina de AL numa universidade da Colômbia, Uzuriaga et al. (2010) aplicaram, a 234 alunos que frequentavam a disciplina, um questionário, para determinar a sua atitude e aptidão em relação à matemática, e um exame para avaliar os conhecimentos prévios em matemática básica e fundamental. No questionário, 56% dos estudantes manifestaram que foi difícil aprender matemática, o que atribuíram à dificuldade em assimilar os temas lecionados nas aulas, às poucas bases matemáticas adquiridas no ensino secundário e aos seus métodos de estudo que consideram inapropriados. Quanto à avaliação de conceitos e conhecimentos prévios para frequentar AL, os autores observaram que 84% dos alunos não conseguiram superar a prova que envolvia conceitos relativos a conjuntos, propriedades básicas de números reais, grau de abstração para modelar uma situação e resolvê-la, linha reta e plano cartesiano, funções, domínio e imagem, tendo sido de 28 pontos a média dos resultados no exame, quando 72 pontos era o valor máximo que podiam obter.

Com o intuito de explicar as dificuldades na aprendizagem de tópicos algébricos num ambiente mediado tecnologicamente, Herrera e González (2011) realizaram uma experiência com 23 alunos que frequentavam a disciplina de Introdução à AL da especialidade de Educação Matemática no Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Venezuela. Os participantes, numa tarefa introspetiva, escreveram as suas dificuldades, que os autores organizaram através da taxonomia proposta por Socas (2000):

- Dificuldades associadas à complexidade dos objetos matemáticos: deficiência nos conhecimentos prévios requeridos para a compreensão dos temas associados a espaços vetoriais, como teoria de conjuntos, lei de composição interna e externa, identificação das propriedades associadas às operações de corpo dos números racionais e reais.
- Dificuldades associadas aos processos de pensamento matemático: distinguem os temas que consideram que não conseguiram compreender com clareza em disciplinas anteriores, e a maioria concorda que não sabe demonstrar.

– Dificuldades associadas aos processos de ensino desenvolvidos para a aprendizagem da matemática: falta de tempo nas avaliações, o que os leva a resolver os problemas sem dedicar muito tempo a entender o enunciado, a complexidade da linguagem matemática, sobretudo em livros, e a falta de pedagogia dos docentes.
– Dificuldades associadas aos processos de desenvolvimento cognitivo dos alunos: reconhecem a importância de uma boa redação para a compreensão de uma demonstração e alguns manifestam ter algumas dificuldades neste aspeto.
– Dificuldades associadas a atitudes afetivas e emocionais frente à matemática: manifestam ter certas crenças e atitudes negativas face à aprendizagem da disciplina, como por exemplo, sentimentos de insegurança, predisposição negativa, desmotivação, medo, necessidade de acertar na resposta.

Pode-se, assim, considerar que muitas vezes os alunos têm dificuldades porque não adquiriram a diversidade de conhecimentos necessários para responder às tarefas para as quais são solicitados. E, de acordo com Panizza e Drouhard (2003), um dos aspetos da complexidade da aquisição do conhecimento matemático reside precisamente, nessa diversidade de conhecimentos que confluem numa atividade matemática. Neste contexto, em conjunto com outros investigadores do grupo franco-argentino CESAME, os autores desenvolveram um modelo que consiste numa organização do conhecimento necessário para a atividade matemática, que denominaram "as três ordens do conhecimento": Conhecimentos de ordem I – conhecimentos explícitos (axiomas, definições, propriedades, teoremas); Conhecimentos de ordem II – algumas regras do jogo matemático, o que faz com que o discurso matemático funcione (linguagem matemática, validade em matemática,...) e Conhecimentos de ordem III – conceções acerca do que é fazer matemática, o que é matemática.

Como exemplificam Martinez e Detzel (2010), é comum observar nas produções de alunos, de nível médio e superior, que a justificação da falsidade de uma afirmação seja feita recorrendo a outra proposição verdadeira que envolve parte dos conteúdos enunciados. Por exemplo, perante a tarefa de "determinar e justificar se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas: (1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, com $a, b \in IR$; (2) Todo o múltiplo de 3 é um múltiplo de 9", é habitual encontrar respostas por parte dos alunos do tipo: "Falso porque o que vale é $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$", "Falso. Todo o múltiplo de 9 é de 3". De acordo com os autores, neste caso, os alunos adquiriram apenas conhecimentos de ordem I, isto é, conhecem as

definições, mas não são capazes de provar a falsidade da afirmação (conhecimentos de ordem II).

Assim, a não apropriação pelos alunos dos conhecimentos das várias ordens que são úteis para realizar provas ou demonstrações, em particular de conceitos sobre lógica clássica e de métodos de prova, são uma das fontes de erros e dificuldades na resolução de tarefas de AL. Como refere Hillel (2000), num determinado nível, as dificuldades dos alunos em AL resultam simplesmente da sua inexperiência com provas. Mais concretamente, afirma que

> as dificuldades dos alunos relacionadas com as provas incluem: não compreender a necessidade de provas nem as várias técnicas de prova, não sendo capazes de lidar com os quantificadores, muitas vezes implícitos; confundir condições necessárias e suficientes; fazer generalizações apressadas com base em evidências muito instáveis e escassas. (p. 191)

Para esta situação pode também ter concorrido o facto de, durante os últimos anos, as provas terem assumido um papel de menor relevo no ensino secundário, portanto, quando os estudantes começam os seus estudos no ensino superior, têm grandes dificuldades no reconhecimento, compreensão e construção de provas (Alvarado & González, 2009a). Porém, Socas (2000) adverte que pelo facto de no ensino secundário se abandonarem certas demonstrações formais em benefício de uma aplicação mais instrumental das regras matemáticas, isso não deve implicar o abandono do pensamento lógico por ele ser uma destreza de alto nível, que é necessária para alcançar determinados níveis de competência matemática. Considera, também, que a dedução lógica não se deve confundir nem com dedução formal nem com procedimentos algorítmicos, mas o pensamento lógico deve estar presente em todas as atividades matemáticas, precisamente porque a incapacidade para seguir um argumento lógico é uma das causas geradora de maiores dificuldades na aprendizagem da matemática.

Numa experiência concreta em que analisa as dificuldades que os estudantes universitários da Georgia, Estados Unidos, apresentam na realização de provas matemáticas formais, Moore (1994) identificou como maiores fontes de dificuldades: não serem capazes de indicar as definições; ter pouco entendimento intuitivo dos conceitos; possuir imagens concetuais inadequadas para fazer as provas; serem incapazes ou não estarem dispostos para gerar e usar os seus próprios exemplos; não saberem como usar as definições para obterem a estrutura geral das provas; serem incapazes de entender e usar a linguagem matemática e as notações; não saberem como começar as provas. Refere, ainda, que uma das razões da

inabilidade dos estudantes para gerar e usar exemplos é que eles têm um reportório limitado de conhecimento do domínio específico do qual os retirar.

Numa pesquisa similar, no âmbito de um projeto de investigação sobre o desenvolvimento da habilidade lógica de demonstração de proposições, Caputo e Macias (2006) analisaram as demonstrações dos alunos, dos cursos de Professores de Matemática e Licenciatura em Matemática de uma universidade Argentina, em resposta a questões incluídas em testes da disciplina de Álgebra I, do 1.º ano. Desse estudo concluíram que as principais dificuldades se devem a dois fatores: a inadequada construção das noções algébricas realizada em etapas anteriores da sua formação, havendo elementos indicadores de que a rutura aritmética-algébrica não foi devidamente alcançada; e o desconhecimento do que significa demonstrar, já que os seus primeiros contactos com esta atividade se realizam no 1.º ano da universidade.

Em entrevistas com os alunos, os autores constataram que, nas etapas anteriores da sua escolaridade, eles não realizavam demonstrações mas verificações de igualdades, o que, no seu entender, explica o facto dessa conceção de prova aparecer de forma recorrente nos trabalhos, podendo constituir um obstáculo para a aprendizagem posterior. Ou seja, os professores ao omitir as provas dos teoremas e em seu lugar oferecerem exemplos como justificação, embora sem consciência disso, podem estar a transmitir a ideia de que bastam as provas empíricas para estabelecer a verdade de proposições matemáticas (Harel & Sowder, 1998; Alvarado & González, 2009b).

De facto, como referem diversos autores (Alvarado & González, 2009b; D'Andrea, Cañibano & Sastre, 2014; Recio & Godino, 2001; Stavrou, 2014; Stylianides, 2009; Weber, 2001), muitos estudantes acreditam que para demonstrar um teorema ou para provar a validade de uma proposição basta apresentar um ou vários exemplos concretos que os verificam, forma de provar não válida que é designada por Balacheff (2000) como empirismo ingénuo.

Por exemplo, num estudo realizado por Sastre e D'Andrea (2013), com 171 estudantes universitários do 1.º ano de uma universidade argentina, os autores contataram que, num conjunto de exercícios em que os alunos tinham de determinar o valor de verdade de uma série de afirmações, a maioria dos alunos, na sua validação, recorreu à verificação, para alguns exemplos, e considerou essa ação suficiente para estabelecer a verdade de uma proposição matemática. Os autores são de opinião que, embora no geral os estudantes entendam o que se espera deles quando se lhes pede uma demonstração e reconheçam que a verificação é insuficiente como demonstração, tendem a recorrer à mesma como mecanismo de prova

quando encontram dificuldades, comportamento que consideram estar provavelmente associado ao facto de que na vida e nas ciências experimentais a verificação é o método de prova *standard*.

Essa conceção de prova aparece, também, no estudo de D'Andrea, Cañibano e Sastre (2014) cujo objetivo era analisar a atitude de 114 estudantes de engenharia quando averiguam o valor lógico de proposições no contexto matemático. Por exemplo, numa questão em que tinham de averiguar, justificando, se a afirmação "Se a é par então a^2 é par, $\forall a \in Z$." é verdadeira ou falsa, 79% dos alunos utilizou o empirismo ingénuo para confirmar a veracidade da proposição (68% apresentando um só exemplo e 11% exibindo vários exemplos) e 3% dos alunos realizou uma tentativa de experiência crucial (Stylanides, 2009; Balacheff, 2000), o que significa que também usaram argumentos empíricos mas, contrariamente ao empirismo ingénuo, existia uma estratégia na seleção dos exemplos utilizados.

Os autores constataram que há alunos que atuam de forma muito similar, tanto no caso de proposições falsas como verdadeiras, ou seja, quando justificam a falsidade de uma afirmação, uma percentagem importante de alunos exibe um contraexemplo, no entanto, quando querem validar uma proposição verdadeira, uma percentagem similar também apresenta um exemplo, pelo que concluem que os alunos não distinguem a diferença entre as duas ações.

Como refere Bogomolny (2006), o estatuto de um contraexemplo é muito poderoso quando comparado com o estatuto de outros exemplos, pois enquanto um contraexemplo é suficiente para tirar conclusões definitivas, vários exemplos de apoio e verificação não são suficientes. A distinção entre a admissibilidade/inadmissibilidade de exemplos como prova é uma das dificuldades também observadas por Harel e Sowder (1998) num estudo com estudantes universitários. Verificaram, ainda, que há alunos que mesmo que saibam que existe um contraexemplo para a afirmação dada, não o consideram como evidência suficiente para considerar a afirmação falsa, pois veem-no como uma exceção.

Provar afirmações usando exemplos concretos foi também um dos quatro erros mais comuns que Stavrou (2014) detetou ao analisar os trabalhos de casa de 97 estudantes de uma universidade canadiana, que frequentavam a disciplina de teoria dos números e álgebra abstrata, numa pesquisa cujo intuito era investigar quais os erros cometidos pelos estudantes quando escrevem provas matemáticas. Os outros três erros mais comuns foram: assumir a conclusão para provar a conclusão; não provar ambas as condições num argumento bicondicional e empregar de forma incorreta as definições. O erro de usar exemplos concretos foi mais frequente em provas da forma "se p, então q" e em afirmações que requeriam uma

prova por indução matemática. De igual forma, o erro de assumir a conclusão das afirmações no sentido de provar a conclusão prevaleceu nas afirmações da forma "se p, então q". Neste caso, os estudantes iniciaram a prova assumindo que q é verdadeira, e depois criaram argumentos circulares de forma a concluir que p também é verdadeira.

No prosseguimento do seu estudo, 91 novos estudantes, que frequentaram a mesma disciplina, foram informados sobre os erros comuns dos outros estudantes antes de especificar o seu trabalho de casa. Neste caso, o autor observou três padrões de comportamento: (1) opção por deixar mais questões por responder do que no grupo de estudantes anterior; (2) completar as provas com evidência empírica e (3) insegurança quanto ao método a usar, visível por comentários do género: "não tenho a certeza de como começar a prova".

Como a opção por deixar mais questões sem resposta ocorreu nos exercícios onde o grupo anterior tipicamente provava usando exemplos ou assumia a conclusão na prova, Stavrou interpreta essa atitude pelo facto dos estudantes já entenderem que essas abordagens são inválidas e, uma vez que percebam que tal resposta não trará pontos adicionais, escolhem deixar em branco, ou como não conseguem escrever uma prova que evite esses erros, escolhem não escrever nada. No segundo caso, o autor presume que os estudantes completaram as suas provas com evidência empírica no sentido de gerarem exemplos para se convencerem a eles mesmos ou melhor entenderem a afirmação.

A conclusão similar chegou Pfeiffer (2009) numa investigação em que apresentou provas matemáticas contendo erros aos estudantes do 1.º ano de matemática de uma universidade irlandesa, no sentido de estes avaliarem e criticarem os argumentos, constatando que muitos estudantes estão cientes de que verificar a veracidade de uma afirmação, com apenas alguns exemplos, não é suficiente para a provar. No entanto, o autor considera que os exemplos desempenham um papel muito importante na argumentação matemática dos estudantes, pois mesmo depois de aceitarem que um argumento está correto não ficam convencidos até que lhes sejam apresentados alguns exemplos.

Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (2000), com base em estudos de diagnóstico de dificuldades em AL, realizados com alunos universitários em França, também constataram que a falta de conhecimentos prévios em lógica e teoria de conjuntos contribuem para os erros que os alunos cometem em AL.

Especificamente as dificuldades no raciocínio condicional são apontadas por Gouveia, Roazzi, Moutinho, Dias e Brien (2002) como razão para muitos dos erros que os alunos

cometem ao averiguar se uma afirmação é ou não válida. Este raciocínio envolve a realização de inferências com base na relação "se... então..." dada, podendo considerar-se quatro formas lógicas que seguem desta relação condicional: *Modus Ponens* (se p então q e p é verdadeiro, leva à conclusão que q é verdadeiro), *Modus Tollens* (se p então q e q é falso, leva à conclusão que p é falso), Afirmação do Consequente (se p então q, q é verdadeiro), Negação do Antecedente (se p então q, p é falso), sendo apenas as duas primeiras inferências válidas. Há pesquisas que demonstram que as pessoas raciocinam corretamente diante das inferências válidas, mas cometem erros lógicos com as inválidas, erros esses que advêm da interpretação errónea da condicional como bicondicional – se e somente se. Assim, diante de "se p, então q" as pessoas concluem "se não p, então não q". De acordo com esta interpretação, o antecedente é tanto suficiente quanto necessário para o consequente, o que torna válidas as quatro inferências citadas (Gouveia et al., 2002).

Por exemplo, Alvarado e González (2009b) num estudo com estudantes de matemática aplicada de uma universidade mexicana, que responderam a um questionário onde tinham de selecionar o argumento válido de entre várias afirmações apresentadas e justificar a sua escolha, constataram que eles apresentaram, entre outras, as seguintes dificuldades: utilização indiferenciada da implicação ($p \Rightarrow q$) e da sua recíproca ($q \Rightarrow p$) ou da sua implicação contrária ($\neg p \Rightarrow \neg q$) e a crença de que um simples exemplo é suficiente para provar uma afirmação, este último já focado noutros estudos.

Dificuldades na compreensão do significado dos símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ foram também detetadas por Sastre e D'Andrea (2013) numa pesquisa em que pretendiam caracterizar as dificuldades de estudantes universitários argentinos na compreensão da linguagem matemática e natural e a incidência dessas dificuldades nos processos de validação. Verificaram, ainda, que a maioria dos alunos confunde a conjunção com a disjunção inclusiva. Embora no geral compreendam que se ambas as proposições atómicas são verdadeiras a proposição final também é verdadeira, quer o conectivo lógico seja a conjunção ou a disjunção inclusiva, já quando uma das proposições atómicas é falsa e a outra verdadeira, os alunos tendem a analisar separadamente o valor de verdade de cada componente, sem chegar a qualquer conclusão sobre o valor lógico da proposição composta.

A linguagem do quotidiano também representa um obstáculo para a aprendizagem de demonstrações (Alvarado & González, 2013), já que os estudantes podem ter dificuldades em distinguir a argumentação intuitiva que usam na vida diária do raciocínio dedutivo que é

necessário na aula de matemática (Recio & Godino, 2001). Como referem Alvarado e González (2013), uma implicação, em muitas ocasiões, admite diversas conotações de causalidade e temporalidade que fazem com que o seu significado se afaste do sentido matemático e que, noutras ocasiões, a linguagem comum lhe dá um significado diferente pela tendência a subentender o que não está dito. Corroborando esta ideia, Laudien (1999) também afirma que na linguagem quotidiana as afirmações "se... então..." muitas vezes são usadas no mesmo sentido que "...se e só se...", pois, por exemplo, quando os pais dizem ao filho "se tiveres boas notas damos-te uma bicicleta", a criança sabe que isso significa que terá o presente se, e só se tiver boas notas, sendo esta afirmação entendida com o significado de "...se e só se...", levando por isso à confusão da condicional com a bicondicional. No mesmo sentido, Epp (2003) sugere que a diferença existente entre a linguagem informal do quotidiano e a linguagem da matemática pode conduzir a cometer "o erro da recíproca" (de "se p então q" e q, deduzir p), a dificuldades na interpretação de proposições quantificadas e na sua negação e a cometer erros na negação de implicações e de afirmações que contêm os conectivos da conjunção ou da disjunção.

Em termos gerais, Lucas, Bon, Pérez e Casas (2014) pensam que o problema do insucesso dos alunos a matemática quando chegam ao ensino superior vai muito mais além da qualidade da "bagagem" de conhecimentos que transportam do ensino secundário para o universitário. Na sua opinião, mais do que o saber científico, o aluno deveria ter aprendido a adaptar-se a novos desafios/tarefas que possam surgir na universidade, a responder a questões colocadas de forma diferente da habitual, a ampliar as situações problemáticas e a questionar e a estabelecer conjeturas que lhe permitam solucionar um determinado problema proposto.

2.3. Dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear

Parece ser consensual que a AL é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior, mesmo a nível internacional (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000a).

Na sua dissertação, Celestino (2000), fazendo referência ao contexto brasileiro, foca a pesquisa de uma equipa de investigadores da Universidade Estadual de Campinas que teve como intuito identificar as "disciplinas problema", no período entre o 1.º semestre de 1993 e o 1.º semestre de 1997. Desse estudo verificaram que a AL era uma das disciplinas que apresentava um elevado índice de reprovação, entre 25% a 50%, nas três universidades em que

foi realizada a pesquisa (Universidade Estadual de Campinas, Universidade de São Paulo, Universidade Estadual Paulista), refletindo assim as dificuldades dos estudantes na sua aprendizagem. Também no contexto brasileiro, Coimbra (2008) refere que no Estado do Pará, em duas universidades públicas onde lecionou durante décadas essa temática, o cenário não é diferente do apresentado por Celestino (2000).

Na opinião de Dorier (2000b), a AL continua a ser uma disciplina difícil, não apenas temida pelos estudantes, mas também pelos professores, especialmente aqueles que se sentem frustrados por os estudantes não compreenderem conteúdos que para eles parecem tão elementares e porque, muitas vezes, não conseguem entender as respostas inconsistentes de seus alunos. Acrescenta, ainda, que, geralmente, as principais dificuldades apontadas pelos professores dizem respeito à falta de prática e competência na linguagem formal, lógica elementar, teoria dos conjuntos e geometria.

Como mencionam Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (2000), já no final dos anos oitenta, Robert e Robinet, num trabalho de diagnóstico sobre dificuldades dos alunos, referem que estes criticam na AL o excessivo uso de formalismo, a enorme quantidade de novas definições e a falta de conexão com o que já sabem de matemática. Nesse estudo ficou patente que os alunos tinham a sensação de estar a aterrar num novo planeta, não sendo capazes de encontrar o seu caminho nesse novo mundo.

Ideia semelhante é retratada no trabalho realizado por uma equipa de investigadores franceses do *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* com estudantes de Ciências do 1.º ano, que, ao analisarem o currículo de AL do ensino universitário, por contraste com o currículo oficial francês estabelecido para alunos do ensino secundário, sublinham o quão novo esse campo é para os alunos que saem do secundário, uma vez que não receberam qualquer preparação formal. As dificuldades que detetaram nos estudantes dizem respeito ao excesso de novas palavras que tinham para aprender (como se se tratasse da aprendizagem de uma nova língua), aos métodos de exposição e demonstração totalmente novos e à natureza do "modelo universal" da AL (Artigue, Chartier & Dorier, 2000).

Também Isik, Bas, Okur, Bekdemir e Ciltas (2014), num estudo em que avaliaram as perspetivas sobre o ensino da AL de estudantes, futuros professores do ensino primário (alunos de 6 a 14 anos), de duas universidades turcas, apontam variadas causas para as dificuldades dos alunos, algumas das quais já referenciadas em estudos anteriores:

– Razões relativas à estrutura da disciplina: abstração dos temas, não haver relação entre os temas, não compreender a aplicabilidade do conhecimento aprendido para o futuro, complexidade dos temas, não saber a área de uso dos temas, uso excessivo de símbolos e complexidade nos símbolos, abrangência dos temas, grande número de definições e teoremas.
– Razões relativas ao ensino da disciplina: sistema de educação, falta de recursos adicionais, horas insuficientes da disciplina.
– Dificuldades que têm a ver com os próprios estudantes: a falta de preparação, a não interiorização dos tópicos, preconceitos sobre a disciplina, o pensamento de apenas passar à disciplina, não estudar os tópicos, não fazer perguntas, medo dos exames.

Dorier e Sierspinska (2001), baseando-se em diversas investigações, apresentam uma síntese do que consideram ser algumas razões que levam os estudantes do ensino superior a considerar a AL tão difícil de aprender:

– A abordagem axiomática para a AL parece supérflua e sem sentido para muitos estudantes. Como todos os problemas ao alcance dos estudantes do 1.º ano da universidade podem ser resolvidos sem usar a teoria dos espaços vetoriais, esta tem poucas hipóteses de ser considerada por estes como uma necessidade intelectual.
– A AL é um 'composto explosivo' de linguagens e de sistemas de representação: existem as linguagens geométrica das retas e planos, a algébrica das equações lineares, n-uplos e matrizes, a linguagem abstrata dos espaços vetoriais e das transformações lineares; existem os registos gráficos, tabelares e simbólicos e existem as representações cartesianas e paramétricas dos subespaços. Os professores movem-se constantemente entre estas linguagens, registos e modos de representação sem darem o tempo necessário para os alunos fazerem as conversões e discutir a sua validade.
– A AL é altamente exigente do ponto de vista cognitivo. Na maioria dos níveis, a sua compreensão requer uma quantidade razoável de flexibilidade cognitiva para se mover entre linguagens variadas, pontos de vista e registos semióticos.

Quanto a temas mais específicos da AL, são vários os autores que identificaram dificuldades dos estudantes em conceitos de AL como espaços vetoriais (Coimbra, 2008; Cerutti & Andreoli, 2002; Andreoli, 2003, 2005; Gonçalves, 2005; Britton & Henderson, 2009), transformações lineares (Hillel, 2000; Karrer, 2006; Molina e Oktaç, 2007), matrizes e determinantes (Aygor & Ozdag, 2012; Ferro, 2011; Hurman, 2007) ou sistemas de equações

lineares (Bianchini & Almouloud, 1996; Herrero, 2004; Pantoja, 2008; Delgado, Mendoza & Castañeda, 2009).

Por exemplo, Coimbra (2008), num questionário que realizou com 15 estudantes de duas turmas de AL de uma universidade pública do Pará, com o intuito de avaliar o nível de aquisição dos conceitos básicos de espaço vetorial pelos alunos, constatou que estes não foram assimilados, mesmo de forma rudimentar pela maioria dos alunos. Exemplificando, na questão "O subconjunto $S = \{(x, y) \mid y = 1\}$ é um subespaço vetorial de IR^2?" apenas quatro alunos responderam satisfatoriamente e na questão "Quais as características mais importantes de um espaço vetorial?" somente dois alunos conseguiram citar essas características, tendo ocorrido várias respostas com afirmações redundantes do tipo: "É um conjunto cujos elementos são vetores". O autor refere a presença de obstáculos, tanto didáticos como epistemológicos, ao desenvolvimento do conhecimento. No caso dos primeiros, identifica-os pelas atitudes dos alunos em relação à matemática, ao revelarem uma conceção de que em matemática tudo se responde ou constrói por meio de cálculos numéricos ou manipulações algébricas, não admitindo, portanto, respostas por palavras, como poderia ter sido feito em relação às perguntas supracitadas.

Cerutti e Andreoli (2002) e Andreoli (2005) realizaram um estudo com estudantes do 1.º ano da área de ciências exatas de uma universidade da Argentina com o objetivo de diagnosticar as conceções que os estudantes apresentam sobre as noções de independência e dependência linear. Na primeira fase, analisaram as respostas e justificações de 81 alunos às questões dos exames finais. Relativamente à questão: "O vetor $(-3, 2)$ é uma combinação linear dos vetores $(0, 1)$ e $(3, 2)$? Justifique a sua resposta." verificaram que 26% dos estudantes não deram qualquer resposta e 41% dos alunos responderam incorretamente por não dominarem um método ou procedimento que lhes permitisse determinar se um vetor de IR^2 é ou não combinação linear dos outros. Quanto à questão: "Os vetores $(3, -2)$ e $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ são linearmente independentes? Justifique a sua resposta." verificaram que 61% (33% não responderam e 28% responderam incorretamente) dos estudantes não conheciam um método ou procedimento para responder ou responder corretamente. Concluíram, assim, que os estudantes alcançaram um conhecimento incompleto e atomizado do tema.

Numa terceira fase, Andreoli (2005) realizou uma entrevista semiestruturada a seis estudantes, baseada na pergunta: "Escreva quatro conjuntos de três vetores em IR^3 em que

exatamente nenhum, um, dois e três vetores, respetivamente, sejam combinação linear dos restantes; e um questionário em que pedia que os alunos investigassem se determinadas afirmações, relacionadas com os conceitos de dependência/independência linear, eram verdadeiras ou falsas.

Com base nos resultados obtidos na pesquisa, a autora contatou que os alunos se apropriam de algumas conceções erróneas relativas aos conceitos de independência e dependência linear, como por exemplo: verificar a independência linear reduz-se a observar se a cardinalidade do conjunto de vetores é igual à dimensão do espaço; a comparação da característica com a ordem de uma matriz somente é eficaz na classificação de sistemas de equações lineares, não para a determinação da dependência linear em alguns casos; a partir de um conjunto de vetores linearmente dependentes não se pode obter um subconjunto de vetores linearmente independentes; o número de vetores linearmente independentes de um conjunto é igual à diferença entre o cardinal do conjunto e o número de vetores que se podem escrever como combinação linear dos restantes; a ideia de vetores geométricos concorrentes limita-se a dois vetores e não mais.

Integrado no mesmo estudo, mas numa segunda fase, Andreoli (2003) analisou as respostas dadas por 15 professores do ensino básico da Argentina a um problema que envolvia o conceito de dependência linear e que se traduzia pelo sistema:

$$\begin{cases} b + c = 60 \\ 2b + 6c = 250 \\ c = 2b \end{cases}, \text{ com } b \text{ e } c \text{ números naturais.}$$

No problema solicitava-se a determinação dos valores de b e c, e esperava-se que o professor, ao longo do processo de determinação, constatasse que o sistema não tem solução. Foi também solicitado aos professores que alterassem os valores do sistema de modo a torná-lo possível e determinado, e posteriormente pediram-se novas alterações de modo a torná-lo indeterminado.

O estudo mostrou que sete professores não responderam à pergunta de tornar o sistema possível e indeterminado, possivelmente por não compreenderem a relação de dependência entre as equações e o número de soluções de um sistema linear. A autora concluiu, ainda, através de uma entrevista realizada aos professores, que apenas dois deles trabalhavam a situação de um sistema linear indeterminado com os seus alunos e apenas outro as relações de dependência linear entre as equações na resolução de sistemas lineares.

Britton e Henderson (2009) relatam o início de um estudo sobre como os alunos aprendem (ou não aprendem) conceitos particulares num curso de AL, focando-se nos conceitos de fecho e de funções como elementos de espaços vetoriais, que consideram cruciais para compreender os espaços vetoriais abstratos. Os estudantes que participaram no estudo estavam a frequentar a segunda disciplina de AL, sendo maioritariamente estudantes de engenharia e alguns estudantes de ciências. No estudo examinaram as respostas dos estudantes a duas questões envolvendo subespaços, um em IR^3 e outro no espaço das funções reais de domínio IR (designado por F): 1) Seja $V = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in IR \right\}$. Mostre que V é um subespaço de IR^3; 2) Seja X o conjunto de funções $f : IR \to IR$, tal que o gráfico $y = f(x)$ passa pelo ponto $(0, 0)$. Mostre que X é um subespaço de F.

Analisando as respostas à pergunta 1, as autoras constataram que a tarefa foi repleta de dificuldades, das quais evidenciaram: o formalismo necessário para escrever uma prova convincente; os problemas com a teoria da lógica e dos conjuntos e a dificuldade de passar do modo abstrato, em que a definição é formulada, para o modo algébrico, em que a pergunta é enquadrada. A um nível ainda mais básico, ficou claro que alguns estudantes não tinham entendido a diferença entre subconjunto e subespaço. No que diz respeito às respostas à pergunta 2, os estudantes exibiram não só os mesmos equívocos genéricos relatados na pergunta 1, mas também evidenciaram uma confusão adicional, causada aparentemente por terem que lidar com funções como elementos de um espaço vetorial.

As autoras concluíram, então, que a incapacidade dos estudantes para fazer progressos na tarefa de provar o fecho da adição nessas duas perguntas parecia ser a consequência de dificuldades profundas, que tinham a ver com a compreensão do significado dos símbolos e das mensagens que transmitem. A definição de fecho para a adição é enganadoramente simples e os seus níveis de significado não são evidentes para todos os estudantes. Muitos não ficaram, aparentemente, conscientes de que deve ser confirmado que a soma de quaisquer dois vetores do conjunto é, ainda, um vetor do conjunto e não apenas que a soma dos dois vetores é um vetor.

Em Portugal, Gonçalves (2005), como parte integrante da sua dissertação de mestrado, realizou um estudo que consistiu em recolher elementos sobre o conhecimento dos alunos acerca dos conceitos de subespaço gerado e de conjunto de vetores geradores, em dois

momentos distintos: (a) no início da frequência da disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA), antes da aprendizagem dos conceitos referidos, ao nível do conhecimento de pré-requisitos (conceito de vetor e conceitos relacionados com este), através do questionário I; (b) depois da frequência da disciplina, sobre o modo como decorreu a aprendizagem daqueles conceitos, através do questionário II.

Responderam ao questionário I 21 estudantes, distribuídos por três universidades públicas portuguesas, da formação inicial de professores de Matemática do 3.º Ciclo e Ensino Secundário. Da totalidade destes estudantes, seis responderam ao questionário II.

Através do primeiro questionário, o autor constatou que os estudantes revelavam lacunas bastante significativas sobre o conceito de vetor e conceitos relacionados. Também ficou patente que os estudantes sentiram maiores dificuldades nas representações gráficas em IR^3 do que em IR^2 , facto que o autor considera poder ser justificado pela preferência dos estudantes pensarem em termos algébricos, conjuntamente com a possibilidade da prática do docente contemplar, preferencialmente, o recurso a exemplos abordados algebricamente.

Relativamente à aprendizagem dos conceitos em estudo, o autor concluiu que os alunos observados experimentaram dificuldades na compreensão dos conceitos de subespaço gerado e conjunto de vetores geradores. E embora os nomes dos conceitos e alguns processos ficassem retidos na mente dos alunos, a efetiva aprendizagem parece não ter ocorrido. Apresenta, assim, uma síntese das tendências detetadas nos estudantes no que concerne à aprendizagem dos dois conceitos:

- Ênfase na mecanização da resolução de exercícios;
- Abordagem dos conceitos segundo procedimentos algorítmicos;
- Preferência pela abordagem algébrica em detrimento da abordagem geométrica;
- Pressuposto da desconexão entre os conceitos em estudo e entre estes e quaisquer outros conceitos.

No âmbito das transformações lineares, Karrer (2006) aplicou um questionário a 86 estudantes dos cursos de Ciências da Computação e Engenharia da Computação, de quatro instituições particulares do ensino superior do Estado de São Paulo, que tinham frequentado a disciplina de AL no semestre anterior. A autora concluiu que, frequentemente, os estudantes associavam o objeto "transformação linear" com a sua representação simbólico-algébrica, ou seja, confundiam este objeto matemático com uma das suas representações. Na análise das respostas ao questionário também observou que, nas questões nas quais não se especificava o

tipo de representação a ser utilizado, poucos alunos apresentaram uma representação diferente da linguagem natural, de uso comum, sendo esta também, na maioria das vezes, insatisfatória. Karrer destaca que, especificamente nas questões que solicitavam justificação da linearidade da transformação, as condições praticamente não foram citadas.

Igualmente relacionado com o tema transformações lineares, Hillel (2000) analisou a resolução de alguns problemas resolvidos por 29 estudantes numa aula do início do 2.º semestre, os quais já tinham concluído um semestre de AL (a maioria no ano anterior).

Um dos problemas consistiu na seguinte situação:

– Seja $T : IR^3 \to IR^3$ um operador linear representado pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, relativamente à base $\beta = \{(1,1,1),(2,1,0),(0,5,6)\}$ de IR^3. Encontre $T\big((1,1,1)\big)$.

Este problema foi dado como uma atividade de sala aula, em que os alunos poderiam consultar os seus colegas mais próximos. Apesar disso, houve apenas três respostas corretas, tendo 17 estudantes deixado a questão sem resposta (segundo o autor, possivelmente porque não perceberam que $(1,1,1)$ já era um vetor da base).

Três estudantes multiplicaram a matriz A por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tendo obtido o vetor $\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix}$ como resposta. Um outro estudante tomou a primeira coluna de A como resposta, isto é: "$T\big((1,1,1)\big) = (1,3,6)$", e outro, embora com a mesma abordagem, hesitou entre a escolha da primeira coluna e a primeira linha, tendo escrito: "$T\big((1,1,1)\big) = (1,3,6)$ ou $(1,2,3)$".

Hillel concluiu que o erro de tomar uma coluna da matriz como a imagem do vetor da base através do operador parece ser um erro persistente, referindo que tem observado o mesmo fenómeno com outros grupos de estudantes trabalhando em tarefas semelhantes. Na sua opinião, esta incorreção decorre de os alunos pensarem que as colunas da representação matricial de um operador são as imagens dos vetores de base, e não representações destas imagens em relação a uma base. A dificuldade é agravada pelo facto de que esta é uma interpretação correta no caso da base canónica.

Mais tarde, na 8.ª semana de aulas, aplicou um teste aos mesmos alunos, no qual se incluía a seguinte questão, relacionada com representação matricial:

– Seja $T : IR^3 \to IR^3$ um operador linear representado pela matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ relativa à base $\{(1,3,0),(0,1,3),(0,0,1)\}$. Encontre a matriz que representa T na base canónica.

Houve 15 respostas corretas, num total de 29. De realçar que dez respostas continham um erro familiar, tendo esses alunos encontrado as coordenadas de cada vetor $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ em relação à base dada. Mas uma vez descoberto que, por exemplo, $e_1 = (1,3,0) - 3(0,1,3) + 9(0,0,1)$, portanto de coordenadas $(1,-3,9)$ na base dada, passaram a calcular o produto de A por $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ e consideraram o vetor resultante como $T(e_1)$ em vez das coordenadas de $T(e_1)$ em relação à base.

O autor considera que numa disciplina de AL típica existem dois tipos de obstáculos epistemológicos. O primeiro decorre da familiaridade dos alunos com a geometria analítica e coordenadas de um vetor em relação à base canónica. Pensar sobre vetores e transformações em contexto geométrico certamente liga essas noções às mais familiares. Contudo, observa que o nível de pensamento geométrico pode tornar-se num obstáculo ao pensamento sobre base (em vez de eixos) e sobre a necessidade de mudança de base. O outro obstáculo acontece porque as noções específicas relacionadas com IR^n foram aprendidas pelos alunos. Essas noções resolvem uma variedade de problemas que são direta ou indiretamente ligados à noção central de sistemas de equações lineares. Assim, este nível de descrição algébrica torna-se um obstáculo à aprendizagem da teoria geral e à aceitação de outros tipos de objetos, tais como funções, matrizes ou polinómios como vetores.

Com o intuito de indagar nos estudantes as suas noções sobre transformações lineares em contexto geométrico, Molina e Oktaç (2007) efetuaram uma entrevista individual a cinco estudantes, com idades entre os 23 e 26 anos, que tinham terminado uma licenciatura em Ensino da Matemática, na qual tinham tido uma ou duas disciplinas de AL. No momento da entrevista, os estudantes estavam inscritos num programa de mestrado em Matemática Educativa de um centro de investigação e frequentavam um curso que envolvia o uso do *software Cabri Géomètre* como recurso para o ensino da AL. Neste curso ainda não tinha sido abordado o tópico das transformações lineares.

Como resultado principal do estudo, os autores referem que os modelos intuitivos, detetados em todos os estudantes, sobre as transformações lineares eram uma série de casos particulares de transformações lineares que se conhecem no ambiente escolar, como expansões, contrações, reflexões, rotações e composições destas. Os estudantes, com o conjunto anterior de transformações lineares em IR^2 como universo, ao enfrentarem as perguntas, na maioria dos casos, determinaram se a transformação era linear; no caso em que não formasse parte do seu universo, ela foi excluída da classe de transformações lineares.

Os autores constataram ainda que três estudantes consideravam uma transformação linear como a transformação de um vetor particular, e não como uma função que transforma todo o plano. Situação que consideram explicar-se pelo facto de em vários livros de texto e na aula de AL se tratarem somente exemplos gráficos de transformações lineares em que se envolve um só vetor e a sua imagem através dessa transformação linear.

2.3.1. Dificuldades no tema Matrizes e determinantes

A tendência para generalizar as propriedades duma estrutura algébrica para outras, sem repensar a sua validade, é uma das fontes de erros e dificuldades no caso das Matrizes e determinantes. Por exemplo, Ochoviet e Oktaç (2009), num estudo com alunos do Uruguai, constataram que tanto os do ensino superior como os do secundário tinham uma certa tendência em generalizar a lei do anulamento do produto para o caso das matrizes, mesmo já tendo abordado nas aulas a sua não validade nesse contexto. Especificamente, numa entrevista, os alunos do ensino superior referiram que, quando consideraram que um dos fatores teria de ser zero, pensaram nessa propriedade no contexto dos números reais. Os autores consideram que, para além da experiência da aplicação da propriedade em situações e contextos familiares, esta extensão incorreta às matrizes também é favorecida pelos livros de texto, na medida em que apresentam, muitas vezes, a propriedade sem explicitar o conjunto em que se está a trabalhar e sem chamar a atenção para a sua não universalidade, levando a que os estudantes fixem apenas a sintaxe da escrita.

Numa linha similar, Hurman (2007), numa investigação com alunos do 1.º ano da Licenciatura em Administração de uma universidade argentina, num exercício de um teste parcial que se relacionava com propriedades matriciais, verificou que os estudantes não tinham em conta a característica dos entes com que estavam a operar, pelo que continuavam a trabalhar com as matrizes como se fossem números e com determinantes como se fossem

matrizes. Para além disso, muitos dos erros comuns que cometiam com números eram transpostos para as matrizes. Por exemplo, numa das alíneas do exercício em que tinham de completar a afirmação "Se A e B são matrizes quadradas, então $(AB)^2 = \ldots$" houve alunos que recorreram ao que a autora chama de fenómenos didáticos, isto é, consideraram $(AB)^2 = A^2B^2$, $(AB)^2 = B^2A^2$ ou $(AB)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

A autora também observou que a não comutatividade da multiplicação de matrizes é para os estudantes meramente declarativa, pois não é considerada quando realizam as operações matriciais. Por exemplo, quando completam as afirmações "Se A é invertível e $AX = B$, então $X = \ldots$" e "Se P é invertível e $P^{-1}AP = B$, então $A = \ldots$", há alunos que, na resolução das equações, multiplicam em qualquer lugar (à esquerda ou à direita) e, no caso da segunda afirmação, alguns alunos recorrem à comutatividade na simplificação do primeiro membro.

Dificuldades relativamente à compreensão da não comutatividade da multiplicação de matrizes e do próprio algoritmo da multiplicação foram também sentidas pelos professores universitários do estudo de Leder (1991, citado em Sanches, 2002), que, embora não ensinassem matemática, foram sujeitos a uma apresentação do tema matrizes, realizada por dois professores de matemática.

Também Cardoso et al. (2013) detetaram a existência de dificuldades na resolução de situações-problema relativas a matrizes num estudo com 11 estudantes, que frequentavam a unidade curricular (UC) de AL de um curso de Física do ensino superior brasileiro. Por exemplo, numa questão que envolvia multiplicação e subtração de matrizes, dois estudantes cometeram erros que se relacionam com a incompreensão dos respetivos algoritmos. Um efetuou corretamente a multiplicação de matrizes, mas errou na subtração, pois aplicou o mesmo processo utilizado na multiplicação, substituindo o produto dos elementos pela subtração. Outro errou na multiplicação, multiplicando as matrizes elemento a elemento, ou seja, recorrendo ao produto de Hadamard das matrizes. As autoras consideram que os alunos cometeram estes equívocos pelo facto dos procedimentos necessários para a utilização de cada um desses algoritmos serem distintos, o que se pode ter tornado num obstáculo para a aprendizagem das operações.

Noutra questão em que pediam o quadrado de uma matriz de ordem três, quatro estudantes calcularam o quadrado de cada entrada da matriz, embora três deles, em questões anteriores, parecessem ter compreendido os procedimentos necessários para a multiplicação de duas matrizes. Os autores pensam que isso se explica pelo facto de os estudantes ainda não

terem tornado operatórios os conhecimentos sobre multiplicação de matrizes, o que os leva a tratarem a potência de matrizes da mesma forma que tratam a potência dos seus elementos.

Assim, como há estudantes que tratam situações que envolvem matrizes como se estivessem a operar com números reais, generalizando, apressadamente, às matrizes propriedades válidas apenas para estes, os autores concluem que eles confundem os objetos matemáticos matriz e número. No entanto, defendem que essa dificuldade pode ser superada se os alunos tiverem mais tempo para interagir com problemas multiplicativos e aditivos que envolvam matrizes.

No ensino não superior, Aygor e Burhanzade (2014), num estudo com estudantes de uma escola secundária turca, identificaram também alguns erros cometidos na resolução de questões sobre matrizes:

- No cálculo de $2A+3B$ fazem bem a soma, mas ao realizar o produto confundem-no com a multiplicação por um determinante e multiplicam apenas a primeira linha de cada matriz.
- No cálculo de $(AB)^T$ realizam a multiplicação da mesma forma que a adição, isto é, multiplicam a entrada de A com a correspondente entrada de B.
- No cálculo de $(A^2)^T$ calculam o quadrado de cada uma das entradas.

Já Stewart e Thomas (2003) detetaram dificuldades na definição do conceito de matriz inversa, num estudo com 70 estudantes universitários do 1.º ano da universidade de Auckland, Nova Zelândia. Quando lhes pediram para explicar a definição de matriz invertível pelas suas próprias palavras, 33% não respondeu e apenas 18,6% respondeu corretamente. As respostas incorretas mais comuns remeteram para procedimentos de cálculo como a referência de colocar a matriz identidade ao lado ou fazer a redução por linhas para encontrar a inversa, tendo também muitos estudantes reformulado o enunciado dado, respondendo por exemplo que uma matriz invertível é uma matriz que se pode inverter. Os autores destacam também a resposta de um estudante que torna explícito que não consegue definir o conceito, mas apenas sabe calcular a inversa.

Stewart e Thomas (2004) verificaram, igualmente, que os estudantes são melhores a seguir procedimentos do que a considerar os conceitos subjacentes à matriz inversa. Pois, numa questão de um teste colocada a 65 estudantes da universidade de Auckland, em que se pedia para averiguar, justificando, a verdade ou falsidade das afirmações: Se A é invertível, então a

inversa de A^{-1} é a própria matriz A; Se $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $ad=bc$, então A não é invertível; Se A pode ser reduzida à matriz identidade, então A tem de ser invertível; Se A é invertível, então as operações elementares sobre linhas que reduzem A à identidade I_n também reduzem A^{-1} a I_n, as respostas corretas variaram entre 7% e 38%, o que, segundo os autores, indica que houve alguns problemas em entender os conceitos básicos apresentados.

Birinci, Delice e Aydin (2014), tendo como foco de estudo os processos de resolução de sistemas de equações lineares e especificamente o uso de matrizes e das suas soluções, realizaram uma investigação com estudantes do 2.º ano de uma universidade turca, que estavam a frequentar uma disciplina de AL. Para tal, pediram aos estudantes que definissem o conceito de matriz, explicassem as características de algumas matrizes especiais e aplicassem alguma terminologia matricial. Somente 1,3% dos alunos foi capaz de definir matriz corretamente e 50,6% deram respostas parciais que se basearam na interpretação do conceito como uma ferramenta usada para resolver m equações com n incógnitas.

Quanto às questões que envolvem características sobre matrizes triangulares superiores, na maior parte das respostas corretas e parciais, a tendência foi dar exemplos.

Estes autores verificaram, ainda, que muitos estudantes não são capazes de transformar uma matriz para a forma de escada por linhas quando está escrita na forma ampliada, tendo alguns assumido, incorretamente, que completaram as operações quando obtêm uma linha de zeros, ignorando que mais dois ou três passos ainda seriam necessários para colocar a matriz exatamente na forma reduzida por linhas. Um erro simbólico também frequente foi a confusão dos parêntesis retos das matrizes com a notação de determinante.

No que se refere aos conceitos relacionados com determinantes, numa questão em que dada uma matriz A de ordem dois, os alunos tinham de indicar, justificando, se $\det(5A)=5\det(A)$, Stewart e Thomas (2004) constataram que 49% não usaram a regra, aplicando antes uma abordagem processual calculando $\det(5A)$ e $5\det(A)$, cerca de 9% cometerem erros de cálculo, chegando a uma conclusão errada, e 12% não deram qualquer resposta. Os autores realçam que estes alunos estão mais dispostos para usar uma abordagem algorítmica do que uma abordagem concetual, facto que consideram poder dever-se ao desconhecimento da relação $\det(kA)=k^n\det(A)$, sendo n a ordem da matriz, a não estarem seguros dos seus conhecimentos, necessitando de fazer a verificação, ou porque preferem trabalhar dessa maneira. Porém, consideram haver alguma evidência de que os estudantes não

conhecem o resultado, uma vez que apenas 7% dos estudantes calcularam ambos os determinantes, dizendo depois que $\det(5A) = 5^2 \det(A)$, mas nenhum generalizou as suas conclusões apresentando o resultado $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Com o propósito de investigar as conceções erradas de estudantes de licenciatura quando resolvem questões sobre matrizes e determinantes, Aygor e Ozdag (2012) realizaram um estudo com 60 estudantes do 1.º ano da Faculdade de Arte e Ciências da universidade Yildiz Technical, na Turquia. Depois dos conteúdos sobre matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares terem sido abordados, os autores pediram aos estudantes que resolvessem quatro questões, duas sobre determinantes e duas que envolviam a resolução de sistemas de equações, estas últimas perspetivando que os alunos aplicassem o método de Gauss-Jordan na sua resolução, para assim se perceber se confundiam matrizes e determinantes. Os autores identificaram seis conceções erradas que mostram a confusão entre operações com matrizes e operações com determinantes:

- Quando trocam linhas para resolver o sistema pelo método de Gauss, trocam o sinal da matriz;
- Quando multiplicam um determinante por *k*, multiplicam todas as linhas do determinante;
- Adicionam determinantes adicionando as entradas correspondentes de cada determinante;
- Quando estão a reduzir uma matriz à forma de escada por linhas, aplicam propriedades dos determinantes e reduzem a ordem da matriz;
- Ao encontrar o valor do determinante, os alunos tentam transformá-lo no determinante da matriz identidade;
- Ao resolver o sistema de equações a matriz ampliada deve ser colocada na forma de escada por linhas, utilizando para isso as operações elementares sobre as linhas. Os estudantes confundem os conceitos de operações com matrizes com determinantes e efetuam operações elementares sobre as colunas.

Igualmente no contexto dos determinantes, Ozdag e Aygor (2012), num estudo com 71 estudantes do 1.º ano de licenciatura em matemática de uma universidade turca, em que pretendiam investigar o seu desempenho e os métodos que utilizavam para encontrar a factorização de um determinante de uma matriz de dimensão $n \times n$, verificaram que apenas dez estudantes conseguiram resolver a questão proposta completamente, tendo 36 sido incapazes

de a resolver. Confrontando o desempenho nessa questão com questões colocadas antes aos alunos, em que a dimensão da matriz era 3×3, os autores constataram que o desempenho piorou consideravelmente quando a dimensão da matriz aumentou, pelo que concluíram que a dimensão das matrizes afeta o desempenho dos estudantes negativamente.

Ferro (2011), num estudo com um grupo de estudantes do ensino secundário espanhol (2.º ano do b*achillerato*), em que analisou provas de avaliação sobre a temática matrizes e determinantes, concluiu que o tema apresenta uma notável dificuldade para os alunos. Embora os exercícios que consistiam unicamente na repetição de uma rotina não lhes tenham levantado obstáculos, os estudantes sentiram dificuldades na compreensão e aplicação dos conceitos teóricos. O êxito que tiveram nas respostas às perguntas teóricas dos exames deveu-se à repetição de demonstrações observadas nas aulas, faltando-lhes conhecimentos teóricos suficientes para abordar outro tipo de situações. Mais concretamente, a autora menciona que os principais erros detetados foram:

- Incorreções nas operações simples (adição, subtração, ...), que conduzem a erros de vulto ao longo do exercício. O aluno não se dá conta da incoerência de alguns resultados e não os verifica, mostrando uma falta de sentido crítico;
- Aplicação incorreta de resultados teóricos, sobretudo ao aplicar o teorema de Rouché-Fröbenius e as propriedades dos determinantes;
- Dificuldades em lidar com situações diversas que dependam de um parâmetro;
- Imprecisão nas definições de conceitos que indicam uma compreensão insuficiente;
- Confusão entre a notação e os conceitos de matriz e determinante;
- Realização incorreta de demonstrações, excetuando as realizadas com antecedência nas aulas e que só supõem a memorização.

2.3.2. Dificuldades no tema Sistemas de equações lineares

Embora os sistemas de equações lineares sejam um tema abordado no ensino não superior, há estudos que demonstram que continuam a existir dificuldades na compreensão e resolução analítica e gráfica de sistemas mesmo no ensino superior.

Souza e Simmer (2014) realizaram um estudo com 45 estudantes do ensino médio e 200 do ensino superior de cursos de engenharia do Brasil, em que aplicaram um questionário com o intuito de explorar a compreensão do significado de equações e sistemas lineares, bem como o

desempenho dos alunos na aplicação desses conceitos num problema com linguagem analítica e noutro em linguagem natural relacionado com o quotidiano.

Quando questionaram os alunos sobre o que entendiam por equação linear, ninguém respondeu de forma completa, no entanto respostas com base em aspetos da expressão analítica deixaram pistas de que os estudantes tinham alguma noção, mesmo que mínima, sobre o reconhecimento da expressão. Quase todas as respostas desconexas ou erradas vieram dos estudantes do ensino médio (11% de 45) e 76% não responderam à pergunta. Dos estudantes do ensino superior ainda houve 29% que não responderam, mas 70% dos estudantes responderam com base em algum aspeto correto da noção (com base em aspetos da expressão analítica ou geométrica), mesmo que de forma incompleta.

Quanto ao significado de sistema linear, continua a haver maior percentagem de estudantes que respondem corretamente no ensino superior (22%) do que do ensino médio (4%). Contudo, a pesquisa revelou um alto índice (89%) de não respondentes e respondentes que apresentaram conceitos errados, sem sentido ou incompletos de estudantes de ensino médio. Facto que os autores consideram preocupante pelo possível comprometimento da evolução do estudante quando for requerido o uso dessas ferramentas no ensino superior. Esta constatação pode ser um forte indício dos fracassos observados em disciplinas de AL no ensino superior, quando se pretende a produção de significados para os objetos matemáticos. Esta hipótese é reforçada ao constatar-se a percentagem de 76% nas mesmas categorias para os estudantes do ensino superior.

Numa outra questão em que, dado um sistema de duas equações a duas incógnitas, sendo o parâmetro k um dos termos independentes, se pedia os valores de k para os quais o sistema não admitia solução, apenas 2% dos estudantes do ensino médio e 54,5% do ensino superior resolveram corretamente o sistema. No entanto, dos que acertaram, nenhum estudante do ensino médio e aproximadamente metade do ensino superior interpretou corretamente o resultado obtido, considerando que quando $k = 6$ o sistema seria impossível. Ora, nesse caso, o sistema apresentava um número infinito de soluções, sendo para valores de k diferentes de 6 que não se obtém qualquer solução.

Quanto ao problema do quotidiano, 87% dos estudantes de ensino médio e 52% dos do ensino superior não souberam resolver ou apresentaram respostas erradas ou absurdas. Este resultado, na opinião dos autores, leva a crer que o avanço da escolaridade contribuiu para a produção de significados dos estudantes.

Jordão e Bianchini (2012), com base numa proposta de trabalho, concretizada por alunos do ensino médio brasileiro, que consistiu na resolução algébrica e gráfica de sistemas de equações lineares de três equações a três incógnitas, no último caso com o auxílio do *software Winplot*, verificaram que os alunos apresentaram dificuldades ao aplicar o método de escalonamento: ao multiplicarem a primeira equação por um número (não nulo), adicionando a seguir o resultado com a segunda ou terceira equação, erram nos cálculos. Para além disso, constataram que os alunos transferem os conhecimentos adquiridos no estudo dos sistemas lineares 2×2 para a resolução dos sistemas lineares 3×3, o que nem sempre leva a interpretações corretas. Por exemplo, na interpretação da solução do sistema, ao obterem duas equações do tipo $0x+0y+0z=0$ e $0x+0y+0z=a$, em que $a\in IR$, surgem dúvidas quanto à classificação do sistema, se é impossível ou possível indeterminado, não percebendo que a solução do sistema está ligada à interseção dos três planos no espaço. Esta dúvida só foi esclarecida ao utilizar o *software Winplot*, classificando o sistema linear como impossível. Noutra situação, um aluno, ao combinar duas equações do sistema linear 3×3, encontra o valor de uma das incógnitas, o que o leva a classificar automaticamente o sistema como possível e determinado.

Delgado, Mendoza e Castañeda (2009) realizaram um estudo, com 26 estudantes do curso de Sistemas de Informação da Faculdade Atual da Amazónia, sobre a aprendizagem da resolução de problemas através de sistemas de equações lineares. Os estudantes foram divididos em dois grupos de 13 alunos: num deles a resolução de problemas foi o centro da aprendizagem e no outro os problemas foram aplicados no final de cada tema, ao que chamaram ensino tradicional. Com base na realização de testes diagnósticos, os autores constataram que, embora a resolução de problemas que conduzem a sistemas de equações lineares devesse ser um tema onde os alunos demonstrassem habilidades, porque são conteúdos trabalhados no ensino que precede o ensino superior, poucos alunos conseguiram resolver sistemas de três equações com três incógnitas e os que tentaram responder, resolveram-nos através da estratégia de tentativa e erro.

Relativamente à experiência realizada, constataram que a instrução centrada na resolução de problemas foi mais eficiente do que o ensino tradicional, concluindo, assim, que os conteúdos devem ser abordados à medida que são necessários para a resolução dos problemas.

Cury e Bisognin (2009), para aprofundar a análise das resoluções escritas dos estudantes de um sistema de equações lineares, estudaram as respostas de estudantes do 1.º ano que

frequentavam cursos de Engenharia, Arquitetura, Ciência da Computação, Ciências Contáveis e Licenciatura em Matemática de oito instituições gaúchas de ensino superior, à questão:

> O valor de dois carros do mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é: a) 5.000; b) 13.000; c) 18.000; d) 23.000; e) 41.000. (p. 4)

Em termos quantitativos, 63% dos estudantes assinalaram a alternativa correta, 24% indicaram uma opção incorreta e 13% não responderam. Depois de classificar as produções, as autoras utilizaram ideias sobre o sentido do símbolo e sentido da estrutura para discutir as dificuldades dos estudantes. Assim, numa análise qualitativa, consideraram que as produções escritas mostravam o desenvolvimento da questão pelo aluno, considerando 138 respostas, nas quais os estudantes procuraram representar matematicamente a situação descrita no enunciado e solucioná-la. Apresentaram, então, quatro categorias de classificação das respostas: categoria A – produções em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema e apresentou a resposta correta; categoria B – produções em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema, mas errou alguns detalhes e não apresentou a resposta correta; categoria C – casos em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, mas não soube resolver o sistema; categoria D – produções em que o aluno não soube modelar o problema.

Utilizando estas categorias, as autoras observaram existir 94 resoluções da categoria A, 9 da categoria B, 25 da categoria C e 10 da categoria D. Constataram também que dos 103 estudantes cujas resoluções foram classificadas como A ou B, 67% deles empregaram o método de adição e 33% o método de substituição. Os estudantes cujas resoluções se enquadraram na categoria C parecem ter uma das componentes do sentido do símbolo, reconhecendo a forma apropriada de representar o problema, mas não têm o sentido da estrutura, pois não parecem reconhecer o método adequado de solução nem as manipulações algébricas possíveis ou utilizáveis. Finalmente, dos exemplos de resoluções da classe D, as autoras consideraram como evidências claras de falta de sentido da estrutura aquelas produções em que os estudantes tiveram dificuldades em utilizar o princípio multiplicativo para determinar equações equivalentes que somadas permitem cancelar termos semelhantes e isolar uma das incógnitas.

Cury e Bortoli (2011) estudaram a mesma questão com 31 alunos da disciplina de Pré-Cálculo, de cursos de Administração, Ciências Contábeis, Engenharia Agronômica, Química ou Sistemas de Informação, de uma Instituição de Ensino Superior do Paraná, tendo 27 alunos apresentado algum tipo de resolução. Confrontando os seus resultados com os de Cury e Bisognin (2009), os autores concluíram que os alunos parecem ter duas grandes dificuldades: a) identificam o sistema de equações que modela o problema, mas não conseguem resolvê-lo, por falta de habilidades algébricas; b) não compreendem que o problema pode ser resolvido por um sistema de equações lineares e usam tentativas de adequar os valores numéricos às alternativas de resposta.

Ramírez, Chavarría, Barahona e Mora (2009) realizaram um estudo no Instituto Tecnológico da Costa Rica, em que analisaram e classificaram as formas de raciocínio de alguns estudantes, que ingressaram pela primeira vez no ensino universitário, em problemas de geometria e sistemas de equações, recorrendo a questionários e entrevistas como métodos de recolha de dados. Num dos itens de um questionário diagnóstico, em que se solicitava um sistema de equações que permitisse resolver o problema "A idade da Maria excede em 4 anos a idade do Carlos e a soma das suas idades é 32 anos", e em que se informava que deveriam representar a idade da Maria por x e a idade do Carlos por y, os autores detetaram principalmente os erros: tomar $y = x + 4$; interpretar incorretamente qua a soma das suas idades é 32 anos; tratar de resolver o problema com uma só equação; tomar a expressão excede em 4 como $x = 4y$ e escrever uma equação de uma variável de maneira incorreta.

Concluíram também que, embora os alunos tenham recebido instrução nos temas durante a formação secundária e tenham frequentado um semestre de instrução básica num curso introdutório universitário, alguns apresentaram obstáculos que perduraram, particularmente continuaram a errar ao interpretar a linguagem matemática e ao escrever em simbologia matemática expressões como "o dobro", "o triplo", "cinco anos mais", entre outros, o que pensam poder explicar-se pela presença de obstáculos epistemológicos.

Neira (2012) realizou uma investigação cujo objetivo era analisar as dificuldades que os estudantes do 1.º ano de Ciências Administrativas de uma universidade de Lima, Peru, apresentam ao traduzir da linguagem verbal para a matemática problemas contextualizados presentes no livro de texto que utilizam, quando estudam sistemas de equações lineares com duas variáveis. Aplicaram um questionário a um grupo de 36 estudantes, escolhendo 9 que tinham frequentado previamente uma disciplina de matemática. Do estudo realizado, concluíram

que os estudantes têm dificuldades para efetuar a tradução dos problemas contextualizados da linguagem verbal para a matemática e vice-versa. Também observaram que os alunos não validam a relação matemática que modela o problema, nem verificam ou interpretam os resultados.

Bianchini e Almouloud (1996), com o objetivo de estudar o problema do ensino/aprendizagem de sistemas lineares, bem como encontrar uma explicação dos erros dos alunos e descobrir as suas origens, aplicaram um teste numa turma de 1.º ano do curso de ciência da computação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Observaram que, quando se pede aos alunos para resolverem um sistema, é muito difícil eles concluírem que o sistema pode ser impossível, pois consideram que devem encontrar sempre uma resposta. Para além disso, verificaram que para resolver um sistema de equações lineares com três equações e duas incógnitas os alunos consideram que só são necessárias duas equações, ignorando o facto que a solução deve satisfazer todas as equações. Destacam também a confusão entre parâmetro e incógnita quando os alunos resolvem um sistema linear com parâmetros, na medida em que consideram que todos devem ser determinados, sem refletirem qual deles deve ficar em função do outro.

Zandieh e Andrews-Larson (2015), pretendendo identificar os raciocínios dos estudantes e as dificuldades na resolução de sistemas de equações, em que o número de equações e de incógnitas era diferente, realizaram um estudo em que analisaram os exames finais de 69 estudantes, a maioria de cursos de engenharia, pertencentes a duas turmas de AL de uma universidade pública dos Estados Unidos. As autoras analisaram uma questão, com duas versões similares, em que se pretendia que os estudantes resolvessem um sistema de equações lineares com quatro equações, que tinha uma única solução, e interpretassem geometricamente o conjunto-solução (pedia-se que assinalassem a opção correta entre as hipóteses apresentadas). Na versão A (respondida por 32 alunos) as equações deviam ser interpretadas como equações de planos (3 incógnitas) e na versão B (respondida por 37 alunos) as equações deviam ser interpretadas como equações de retas (2 incógnitas). Constataram que houve uma maior percentagem de estudantes que chegaram à solução e à interpretação geométrica corretas na versão B (62,2% e 70,3%, respetivamente) do que na versão A (50% e 46,9%, respetivamente), tendo, no caso da versão A, cinco estudantes falhado na interpretação geométrica embora tivessem apresentado a resolução algébrica correta.

Atendendo particularmente às resoluções dos estudantes, as autoras verificaram também que, no caso da versão B, pelo facto de haver mais linhas que colunas, a calculadora que usavam dava uma mensagem de erro quando faziam a redução por linhas, houve estudantes que concluíram que a matriz não podia ser reduzida e pararam de tentar resolver o problema, concluindo que ele não tinha solução. No caso da versão A, houve estudantes que, embora tenham resolvido corretamente o sistema pelo método de eliminação de Gauss-Jordan, como obtêm uma linha de zeros, consideraram que o sistema tinha uma infinidade de soluções porque criaram uma nova variável que consideraram livre.

Martínez e Saéz (2014) com base na sua experiência de lecionação de disciplinas de matemática, do 1.º ano, na universidade de Cádiz, Espanha, observaram algumas lacunas que os alunos têm no âmbito dos sistemas de equações lineares. Por exemplo, referem que os alunos não assimilaram um sistema como uma série de condições que as incógnitas devem cumprir, e que se não há condição sobre alguma significa que pode tomar qualquer valor. Constataram que se ao resolver um sistema deixar de "aparecer" uma incógnita a maioria dos alunos ignora este facto. Quando se pergunta: Qual o valor da incógnita que falta?, concluem que se não aparece é porque não existe, e o que não existe vale zero.

As autoras também observaram que, seja qual for a proveniência dos alunos, a maioria interiorizou o seguinte esquema para resolução de sistemas de três equações com três incógnitas:

---

1. Se não há parâmetros, calcula-se o determinante da matriz dos coeficientes aplicando a regra de Sarrus. Se é distinto de zero, o sistema resolve-se usando a regra de Cramer. Se é zero, dispensam-se uma ou duas equações e determina-se uma ou duas incógnitas em função do resto.
2. Se há parâmetros, os seus valores obtêm-se igualando a zero o determinante da matriz dos coeficientes e para estes resolve-se o sistema como no passo anterior.

No entanto, referem que embora o esquema da tabela sirva para resolver um tipo de exercício muito concreto, frequentemente os alunos tratam de o reproduzir seja qual for a forma do sistema. Com efeito, às vezes, tentam calcular o determinante embora seja impossível, surgindo também muitas dúvidas quando falta alguma incógnita e quando o número de equações e de incógnitas é muito diferente.

Pantoja (2008) reafirma a ausência de significado no estudo de sistemas de equações lineares através do processo de eliminação de Gauss, referindo que os alunos não

compreendem o significado das operações efetuadas com os coeficientes das linhas que compõem o sistema e acabam por operar com as mesmas de forma aleatória até conseguirem escalonar o sistema e encontrar a solução desejada.

Lorenzo, Ferreyra e Parodi (2012), pretendendo analisar o grau de algebrização que alcança um aluno ao finalizar a disciplina de AL, realizaram um estudo com alunos do $1.^{o}$ ano das carreiras de Professores e Licenciatura em Matemática, Física e Computação, da Universidade Nacional de la Pampa, Argentina, em que analisaram duas atividades que propuseram aos alunos. Para o estudo consideraram as produções dos alunos cujo desempenho se encontrava acima da média, sendo as respostas analisadas correspondentes a estudantes que ficaram aprovados em todos os exames parciais. A tarefa que descrevem é a seguinte:

a) Resolver o sistema $\begin{cases} 3x+6y+5z=10 \\ -2x-5y+z=1 \\ x+8y-6z=6 \end{cases}$ pelo método que considera mais conveniente.

b) Encontrar os valores reais de alfa para os quais o sistema $\begin{cases} 3x+6y+5z=10 \\ -2x-5y+z=1 \\ x+2y-\alpha=\dfrac{10}{3} \end{cases}$ tem um número infinito de soluções.

c) Usando algum dos valores de alfa encontrados em b), que soluções teria o sistema homogéneo associado? Justificar.

d) Expressar o número infinito de soluções do sistema não homogéneo b) como combinação linear de uma solução particular e do número infinito de soluções do sistema homogéneo associado.

e) Escrever o sistema da alínea a) na forma $Ax=b$. Que relação existe entre a classificação do sistema e a matriz?

Quanto aos resultados obtidos, os autores constataram que, no caso da alínea a), todos os alunos utilizaram o método de Gauss, que seria o método esperado. Porém, na alínea b), nenhum aluno recuperou o trabalho realizado previamente, voltando a aplicar a técnica usada em a), considerando os autores que esta ocorrência se pode dever ao facto de que ao tratar-se de outra questão os alunos supunham que tinham de começar uma resolução desde o início. Na alínea c), apenas um aluno utilizou os resultados teóricos esperados como única justificação, de resto, na maioria dos casos, aplicaram novamente a técnica para responder e outros mencionaram a propriedade pertinente (Resolução de um sistema de equações lineares a partir

de uma solução particular e da resolução do sistema homogéneo associado) mas não a consideraram suficiente como justificação e necessitaram de verificar analiticamente o exemplo. A alínea d) foi resolvida por todos, segundo o esperado, já que consistia simplesmente em reunir informação das alíneas anteriores. A alínea e) requer explicitamente exibir a relação entre a matriz e as soluções do sistema, questão que já está resolvida ao se ter encontrado a matriz escalonada reduzida em a). No entanto, somente um dos alunos justifica desta maneira, enquanto os outros calculam o determinante da matriz antes de responderem.

Bozzalla e Garcia (2015), com o intuito de analisar os erros e as dificuldades na resolução de tarefas referentes a sistemas de equações lineares, de duas equações a duas incógnitas, de alunos do 1.º ano da Faculdade de Ciências Económicas da Universidade Argentina da Empresa, realizaram um estudo com uma amostra de 50 alunos de diversos cursos. Nesse estudo constataram que alguns alunos:

- Percebem a solução de um sistema de equações lineares como um valor para x e outro para y e não a interpretam como um ponto de coordenadas (x, y).
- Não têm hábitos de trabalho num registo gráfico, o que origina a que interpretem mal as equações num dado contexto. Por exemplo, num item em que eram apresentadas três figuras, que representavam graficamente determinados sistemas, e se solicitava que escolhessem a figura que correspondia a um sistema previamente dado na forma analítica, houve alunos que escolheram o gráfico em que o ponto de interseção das retas era o pretendido, mas sem atenderem ao facto das retas corresponderem às equações do sistema dado.
- Sentem mais confiança no trabalho realizado no registo algébrico. Numa questão, que podia ser totalmente resolvida na forma gráfica, a maioria dos alunos recorreu ao registo algébrico para a resolver.
- Possuem a crença de que todo o sistema possui solução única e, na busca dessa solução, cometem erros algébricos, de interpretação e, muitas vezes, isto gera contradições no seu raciocínio que para eles não são percetíveis. Por exemplo, numa questão em que eram dadas as representações gráfica e analítica de uma das equações do sistema e apenas a analítica da outra equação, equivalente à primeira, pretendia-se que averiguassem se o sistema tinha solução e indicassem o conjunto-solução. Um dos alunos, embora mencione que a solução não é única porque as retas se sobrepõem, propõe como conjunto-solução um único ponto. Noutro caso, a necessidade de

expressar um conjunto-solução leva a uma má interpretação da expressão $0 = 0$, considerando estes valores como os valores de x e de y.

De Vries e Arnon (2004), pretendendo conhecer as ideias dos estudantes sobre o conceito de solução, realizaram um estudo com doze estudantes do ensino superior, do curso de formação de professores, que tinham frequentado uma disciplina de AL. Constataram que alguns estudantes confundiram a solução de uma equação (ou sistema) com a constante do lado direito da equação (ou sistema). Na opinião dos autores, isto pode estar relacionado com conceitos associados por estudantes universitários (assim como do ensino básico/secundário) ao sinal de igualdade, como retratam investigações que mostram que estudantes de diferentes idades tendem a interpretar o sinal de igual com o significado de "o resultado é", em vez de simbolizando equivalência. Também verificaram que vários estudantes, quando questionados sobre a forma da solução de uma equação, procederam à sua resolução, confundindo assim os conceitos de solução e de resolução. Na opinião dos autores, para estes estudantes o conceito de solução foi desenvolvido a partir da ação de resolução da equação (ou de sistema de equações) em vez da ação de substituição, ou seja, como os métodos de resolução (algoritmos) que eles usam (o método de eliminação de Gauss ou outro) são difíceis de interiorizar, não se torna fácil para o estudante prever a forma do resultado, a solução, sem realmente resolver a equação (ou sistema).

Parraguez e Botz (2012), pretendendo investigar como é que os estudantes universitários ligam os conceitos de dependência e independência linear de vetores em IR^2 e IR^3 e o de solução de um sistema de equações lineares homogéneo, aplicaram um questionário a sete estudantes de uma instituição de educação superior chilena, todos aprovados na disciplina de AL e com bons resultados académicos. Constataram que, para a maioria dos alunos, o conceito de solução de um sistema de equações lineares reduz-se a um par ou terno ordenado, aproximadamente metade dos alunos não tem uma visão geométrica do conceito solução, e aqueles que a têm associam-na à interseção comum de retas ou planos.

A maioria dos estudantes manifestou conceber como equivalentes os conceitos de colinearidade e dependência linear, assim como não colinearidade e independência linear. Esta associação leva-os a estabelecer relações geométricas corretas a respeito da dependência e independência linear entre dois vetores em IR^2, cometendo erros no caso de três vetores não colineares de IR^2.

Concluem que, no geral, os estudantes não estabeleceram conexões entre os conceitos de solução de um sistema de equações lineares e o de dependência e independência linear quando trabalham em $I\!R^2$, resolvendo, a maioria deles, separadamente os sistemas de equações lineares e a dependência linear de vetores, sem advertir que ambas equivalem a resolver o mesmo sistema de equações. E, no caso de $I\!R^3$, a maioria dos estudantes não consegue sequer relacionar esses conceitos. Constataram também que nem todos os estudantes tinham um conceito geométrico de solução de um sistema de equações lineares, porque a maioria das vezes se situam a partir da álgebra para abordar e resolver os problemas, o que limita não só o seu desenvolvimento na disciplina de AL, mas também a sua conceção dos objetos matemáticos apresentados. Facto que, na sua opinião, é consequência da forma como se abordam usualmente os sistemas de equações lineares (com ênfase na abordagem algébrica em detrimento da geométrica) e a importância que se dá aos métodos de resolução algébrica. No entanto, destacam que resolver um sistema por algum dos métodos algébricos convencionais não constitui necessariamente uma aprendizagem alcançada pois o estudante pode estar a responder simplesmente a um algoritmo.

Herrero (2004), baseando-se em resultados de investigações realizadas, aponta algumas dificuldades que os alunos apresentam quando estudam sistemas lineares: dificuldades em usar operações aritméticas elementares para resolver problemas verbais envolvendo equações e sistemas de equações; dificuldade em converter a linguagem escrita corrente em linguagem matemática; falta de hábito dos alunos em verificarem as respostas encontradas e não efetuarem a representação e resolução gráfica de um sistema de equações lineares, dando a este registo de representação um estatuto inframatemático. Segundo a autora, essas dificuldades têm diversas origens, entre as quais destaca:

- A complexidade matemática dos elementos básicos que se utilizam na aquisição do objeto sistemas de equações lineares (números reais e função afim, ambos em vias de construção);
- A forma abstrata como o conceito de sistemas de equações lineares é trabalhado e a não interpretação do significado das soluções encontradas pelos alunos;
- A rutura entre o pensamento aritmético e algébrico.

De acordo com a autora, em geral, o ensino da matemática organiza-se como se a coordenação entre os distintos registos de representação semiótica fosse rápida e natural. No entanto, na sua opinião, não basta uma série de problemas para que os estudantes controlem

com responsabilidade um sistema de equações lineares, sendo imprescindível trabalhar diferentes registos semióticos que admitem um tratamento em cada um deles.

No mesmo sentido, já Machado (1996) considerava urgente trabalhar com a mudança de registo tanto do algébrico para o gráfico como vice-versa, tanto no ensino superior como não superior, para não nos arriscarmos a ter alunos "cegos" no sentido de trabalharem com sistemas sem lhes darem qualquer significado. Esta situação está patente nas dificuldades evidenciadas pelos alunos em diversos estudos que se focam na resolução gráfica de sistemas de equações lineares e na sua relação com a resolução algébrica.

Por exemplo, solicitando a resolução algébrica e gráfica de um sistema de equações lineares com duas equações a duas incógnitas, numa turma de alunos do segundo ano do ensino médio brasileiro, Pereira, Júnior e Mendoza (2013) observaram que estes utilizaram com eficiência a regra de Cramer para resolver o sistema mas encontraram dificuldades quando representaram o sistema de equações graficamente, pois não esboçaram o gráfico corretamente, não se lembraram que uma equação do primeiro grau com duas incógnitas determina uma reta e que a interseção das duas retas representa o conjunto-solução do sistema de equações.

Uzuriaga, Arias e Manco (2010), num estudo em que analisaram os conhecimentos prévios de 234 alunos, propedêuticos à disciplina de AL, também observaram dificuldades na relação entre a representação gráfica e analítica de sistemas. Por exemplo, numa questão em que dada a equação $3x + y = 7$, se pedia para juntar outra equação de tal maneira que: os gráficos das duas equações cortam-se num único ponto; os gráficos das duas equações não se cortam; os gráficos das duas equações cortam-se em infinitos pontos, apenas 14% dos estudantes respondeu acertadamente.

Focando também a perspetiva geométrica, Badano, Cabana, Lepera e Moriñigo (2002) aplicaram um teste a estudantes da universidade de Buenos Aires, na disciplina de AL, após a lecionação dos temas, cujo objetivo era conhecer o nível de assimilação alcançado pelos alunos no que se refere a posições relativas de retas e planos e ao conceito de dimensão de subespaços ou do conjunto-solução de um sistema de equações lineares. Numa questão em que dado um sistema de três equações lineares a três incógnitas, possível e indeterminado, se pedia para indicarem se o conjunto-solução era um subespaço de $I\!R^3$ de dimensão um, uma reta, um ponto, ou um plano, apenas 31,4% dos estudantes responderam corretamente, 32,1% escolheram como resposta um plano, não interpretando que neste caso o conjunto-solução é a

interseção de três planos e portanto seria somente um plano se os três fossem coincidentes, 24,6% responderam que era um ponto, e 10,6% um subespaço de $I\!R^3$ de dimensão um. Na questão "As soluções da equação $3x_1 + 2x_2 = -1$ são os pontos de uma reta..." 44,1% dos alunos escolheram a resposta correta (em $I\!R^2$), tendo 5,4% escolhido a resposta em $I\!R^3$, 40,7% em qualquer espaço, 9,3% em nenhum espaço. Na perspetiva dos autores pode inferir-se que os alunos não assimilaram a relação entre característica de uma matriz e a dimensão do conjunto-solução.

Lucas, Bon, Gascón Pérez e Casas (2014), num estudo com 51 alunos do último ano do ensino secundário português e 21 alunos que frequentavam o 1.º ano do ensino universitário espanhol, aplicaram um questionário constituído por questões habituais e menos usais. Concluíram que os estudantes se depararam com grandes conflitos quando lhes é proposta a resolução da tarefa inversa de uma determinada tarefa, que é mais usual para eles. Por exemplo, no que se refere ao tema sistemas e geometria analítica, numa questão em que dada uma reta se pede aos alunos para escreverem a equação da reta representada, os alunos tiveram melhor desempenho (88, 24% de acertos dos portugueses, 20,69% dos espanhóis) que em outra tarefa em que se pedia um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas dadas duas soluções do sistema (1,96% de acertos em Portugal; 0% em Espanha). Na opinião dos autores, quando neste último item se propõe uma tarefa inversa, que implica que o estudante considere a equação de uma reta como o conjunto de pontos que são solução de um sistema de equações lineares possível e indeterminado, os dados revelam claramente a ausência de articulação entre a Geometria e a Álgebra na atividade matemática escolar desenvolvida nestes dois países.

Cutz (2005), com o intuito de estudar a representação geométrica da solução ou soluções de um sistema de equações lineares com duas e três variáveis, assim como a conversão entre a representação geométrica e analítica dos sistemas de equações lineares, delineou uma série de tarefas que foram aplicadas através de uma entrevista a cinco estudantes mexicanos, do ensino superior, que recentemente tinham frequentado uma disciplina de AL.

Na análise das entrevistas, a autora observou a associação de soluções de um sistema de três equações lineares com duas variáveis com os pontos de interseção de pelo menos duas das retas que representam o sistema, de modo que um sistema de equações que é representado por três retas que se intersetam duas a duas terá três soluções. Os estudantes também consideraram um ponto representado a três dimensões como uma reta, pelo facto de estarem a

ter em conta três dimensões; e que quando três planos se intersetam numa linha reta se tem uma solução para o sistema, pois tomam a reta como um objeto e não como um conjunto de pontos, o que indica uma confusão entre os modos de pensamento geométrico e analítico.

Por outro lado, a autora também constatou que existe uma tendência para considerar o conjunto de elementos (retas ou planos) sobrepostos como representando um sistema sem solução, já que os estudantes consideram a solução como o ponto (reta) de interseção dos elementos retas (planos), isto é, esperam ver o ponto (reta) de interseção para determinar o número de soluções do sistema.

De acordo com a opinião desta autora, fundamentada em trabalhos de investigação sobre sistemas de equações lineares, no ensino tradicional favorecem-se os métodos de resolução na sua forma puramente algorítmica, quer dizer, estes temas são tratados na escola (e nos livros de texto) por meio de regras ou métodos que permitem ao estudante encontrar a solução do sistema deixando de lado o seu significado subjacente. Mais ainda, favorece-se o ensino dos sistemas de equações que apresentam solução única em detrimento dos sistemas com infinitas soluções ou que não têm solução, que se abordam de forma superficial ou não se abordam mesmo. Por outro lado, os sistemas de equações com três incógnitas poucas vezes são tratados no ensino secundário numa forma algébrica e não são estudados graficamente.

Arellano e Oktaç (2009), num trabalho de investigação focado em identificar algumas dificuldades que podem apresentar os estudantes ao tratar de colocar em correspondência o registo gráfico com o algébrico, propuseram tarefas a seis estudantes do nível médio superior (idades de 16 a 18), onde face a gráficos de retas é solicitada a sua respetiva escrita algébrica, assim como é pedido que escrevam sistemas de três equações lineares com duas variáveis obedecendo a determinados requisitos, de forma a obter diferentes representações de três retas no plano. Constataram que somente um estudante realizou corretamente as atividades e mostrou uma passagem eficiente entre os registos de representação. Houve estudantes que manifestaram dificuldades em interpretar uma das diferentes categorias de três retas no plano com um sistema de três equações lineares. Por exemplo, quando se pediu para escreverem um sistema de três equações lineares com duas variáveis, em que na sua representação gráfica se observem só duas retas, houve respostas como: “Para cada equação existe uma reta, pelo que não se podem desenhar duas retas com três equações.”; “Não existe nenhuma terceira equação capaz de representar duas retas.”.

De acordo com os autores, os resultados pouco satisfatórios que se obtiveram ao passar do registo gráfico para o algébrico devem-se aos alunos não discriminarem as variáveis visuais pertinentes. Outra das causas que apontam é o facto de os alunos estarem presos a um determinado registo de representação, pelo que, quando saem do contexto no qual se realizou a aprendizagem, mostram-se incapazes de manipular os conhecimentos adquiridos.

Assim, os autores defendem que é muito importante "construir a expressão algébrica a partir de uma gráfica", com vista a uma interpretação global, bem como dispor de vários registos de representação semiótica e realizar uma coordenação entre eles.

Ramírez, Oktaç e García (2006), focando-se nas dificuldades dos estudantes na representação gráfica de sistemas de equações lineares com duas variáveis, descrevem um estudo com cinco estudantes da área de engenharia de uma universidade, que tinham frequentado uma disciplina de matemática que envolvia conceitos de AL. Observaram que a maioria dos estudantes apresenta dificuldades no modo de pensamento sintético-geométrico, não mostrando, para além disso, uma conexão adequada entre os modos sintético e analítico. Mais particularmente, na questão "faz o gráfico das possíveis posições que têm duas retas no plano", todos os estudantes identificaram o caso de retas estritamente paralelas, todavia somente um dos cinco estudantes identificou o caso de duas retas coincidentes. Na representação gráfica de duas retas concorrentes, quatro estudantes consideram as retas perpendiculares como uma situação diferente dos outros casos onde o ângulo de interseção é distinto de 90°. Segundo os autores, isto pode dever-se à importância que é concedida à perpendicularidade em qualquer representação visual no ensino. Além disso, também as decisões dos estudantes se baseiam na perceção visual (uma característica do pensamento geométrico) e não totalmente nas propriedades dos objetos matemáticos.

Noutra questão, em que se pedia aos estudantes para representarem a) duas retas que tivessem um só ponto em comum no plano, b) um par de retas que não tenha pontos em comum e c) um par de retas que tenha mais de um ponto em comum, verificaram que embora os estudantes não tivessem dificuldades com as alíneas a) e b), quatro deles não conseguiram representar as retas que tinham mais de um ponto em comum. Por exemplo, dois estudantes interpretam a expressão "mais do que um" como um "número finito maior que 1" e excluem a possibilidade de "infinito", considerando que duas retas no máximo podem ter um ponto em comum.

Stewart e Thomas (2004) realizaram um estudo, com 65 alunos da universidade de Auckland, Nova Zelândia, em que analisaram a resolução de algumas questões de um teste de AL. Pretendendo ver se os estudantes conseguiam fazer a conexão entre a representação algébrica e gráfica, uma das questões consistia em averiguar se dois planos, dados pelas suas equações, se intersetavam e fazer a descrição dessa interseção. Os autores constataram que embora na questão se referisse que as equações determinavam planos em IR^3, não ficou claro que os estudantes vissem a interseção dos dois planos representados pelas duas equações como uma linha reta, pois muitos estudantes tentaram fazer redução por linhas (alguns de forma correta outros não) sem mencionar a existência da reta e 35% dos alunos nem sequer responderam, tendo somente 11% respondido corretamente .

Já noutra questão, em que dado um sistema de duas equações com duas incógnitas, com termos independentes desconhecidos, se pretendia encontrar os valores desses termos que tornavam o sistema consistente, apenas 38% responderam à questão corretamente e 23% não deram qualquer resposta. Embora muitos dos estudantes fizessem a redução por linhas, não acrescentaram mais nada às suas descobertas.

2.4. O ensino da Álgebra Linear

Tendo em consideração as dificuldades supracitadas, que eventualmente representarão apenas uma amostra da realidade, considera-se pertinente fazer um levantamento de estudos, com especial destaque para trabalhos sobre AL, tanto sobre as características do ensino de matemática no ensino superior como sobre as pesquisas que visam estratégias de ensino para melhorar o desempenho dos estudantes. Como referem Godino et al. (2003), "temos de cuidar não somente do currículo, mas também da metodologia de ensino se queremos desenvolver a capacidade matemática dos estudantes" (p.74).

2.4.1. O ensino de matemática no ensino superior

A implementação do processo de Bolonha no ensino superior europeu apostou num modelo de ensino baseado na aprendizagem ativa. Como referem Caballero e Bolívar (2015), dotar os alunos do papel de protagonistas no processo de ensino aprendizagem e promover a sua autonomia com o acompanhamento planificado dos professores foi o foco central das políticas e discursos académicos que mobilizaram a mudança. No entanto, levantam a questão se se terão posto em marcha os mecanismos necessários para mudar as conceções dos

professores acerca da docência, tradicionalmente entendida como forma de transmissão de conhecimentos.

Esta conceção de ensino é, de certa forma, retratada por Gonçalves (2008) quando afirma que:

> O método expositivo, no qual o professor usa a fala e o estudante usa a audição como principais canais de transmissão/receção de informação, continua a ser, em plena era da tecnologia da informação, o método mais usado pelos professores no ensino superior e para muitos, no início do século XXI, ainda é impensável lecionar no ensino superior sem recorrer à apresentação expositiva. (p. 8)

De acordo com a autora, as razões que explicam a preferência dos docentes do ensino superior por esta metodologia vão desde a simples modelação, ensinam assim porque assim foram ensinados, e a conformidade com as expetativas gerais da comunidade educativa, até à crença de que se trata do modelo mais adequado para apresentar informações atualizadas, interpretações críticas sobre a investigação em dado campo e para promover o pensamento crítico nos estudantes.

A autora considera também que, quando bem gerido, o ensino expositivo cumpre objetivos de aprendizagem cognitiva relevantes, como a aquisição de informação e a sua compreensão, sendo também um fator decisivo para interessar o estudante por temas que até aí ignorava, iniciando-o no prazer do conhecimento e na exploração cada vez mais aprofundada dos conteúdos. Na sua perspetiva,

> uma apresentação bem planificada, com uma estrutura coerente e exposta com clareza e entusiasmo pode ser uma experiência enriquecedora e estimulante quer para os estudantes quer para os professores, mas deve socorrer-se de estratégias de envolvimento ativo dos estudantes, quer ao longo da apresentação do professor (durante a qual o estudante deve ser envolvido tomando apontamentos ou registando dúvidas e relacionando assuntos), quer nas pausas da apresentação, que se destinam ao questionamento, à resolução de problemas, à análise de casos, à visualização de recursos audiovisuais, à aplicação de conhecimentos, etc. (p. 18)

Os resultados de um estudo de Vaz-Rebelo, Pessoa e Barreira (2010), resultante de entrevistas a professores universitários do ensino superior português, encontram-se dentro desta ideologia, já que constataram que embora os docentes utilizem predominantemente o método expositivo, procuram também articulá-lo com estratégias e recursos pedagógicos (como apelar à participação, fazer perguntas, utilizar exemplos, relacionar a teoria com a prática,...), fazendo dele um método que pode proporcionar a participação e a reflexão por parte dos estudantes. Do mesmo modo, na avaliação das aprendizagens verificaram que embora exista uma

predominância da avaliação sumativa, há uma tentativa de conciliação desta com a avaliação formativa.

No entanto, um ensino que promova um maior envolvimento dos estudantes nem sempre é uma realidade como constataram Trejo e Camarena (2011) num estudo com três docentes de matemática de uma universidade mexicana, em que visavam analisar as conceções dos professores relativamente ao ensino de sistemas de equações lineares com duas incógnitas. Estes autores concluíram que o ensino deste objeto matemático era baseado em conceções tradicionais onde o professor é quem ensina e o estudante é quem aprende, numa atitude passiva e com predomínio de uma visão instrumentalista da matemática, isto é, como um conjunto de regras e procedimentos e enfatizando um ensino por repetição.

Focando o ensino expositivo realizado numa disciplina de Matemática que envolve conteúdos de AL, numa universidade de Madrid, Ortega (2002) afirma que, habitualmente, o professor expõe os principais conteúdos, ilustrando os diferentes conceitos com numerosos exemplos para que os alunos possam compreender com base em situações concretas os resultados gerais que se vão expondo. No entanto, considera que embora a metodologia expositiva possa gerar aprendizagens significativas, existem dificuldades acrescidas que podem impedir a consecução desse tipo de aprendizagem. Na sua perspetiva, as principais dificuldades que gera esse tipo de metodologia sobre um programa de AL básica baseiam-se em três situações que considera claramente prejudiciais para o aluno, na medida em que podem levar o aluno a efetuar uma aprendizagem memorista que o impede de relacionar os diferentes conceitos que se vão introduzindo:

- O professor deve realizar no quadro numerosas operações de cálculo rotineiro, que ilustrem de maneira concreta os numerosos procedimentos que contém a AL;
- Não é fácil determinar quando um processo meramente mecânico foi compreendido e assimilado pelo aluno;
- A necessidade de realizar demonstrações gerais de alguns resultados de AL constitui uma tarefa muito complicada para o aluno na medida em que utilizam raciocínios dedutivos que geralmente tendem a ser de aprendizagem pouco atrativa.

Mencionando o ensino universitário na Colômbia, Uzuriaga e Arias (2006) referem que o ensino da AL se faz de maneira muito similar nas diferentes universidades colombianas, sendo muito académico, independente do plano de estudos em que está inserida a disciplina e afastado da realidade, interesses e expetativas dos alunos a quem é dirigido. Com base num

questionário passado a 78 alunos de vários cursos de engenharia da Universidade Tecnológica de Pereira, concluíram que 93,7% dos alunos não usaram programas que lhes permitissem solucionar exercícios práticos e apenas 6,3% dos alunos afirmou ter usado a calculadora e algum *software* para resolver exercícios próprios da disciplina, que lhes permitiram reforçar os conceitos propostos. Diferentemente, 48,6% usaram a calculadora ou um programa de computador para efetuar cálculos básicos.

Também relativamente *ao software*, Vergara, Avilez e Romero (2016), num estudo com cinco docentes de AL da Faculdade de Ciências da Universidade de Atlântico da Colômbia, concluíram que embora 60% dos professores considere importante o uso de algum *software* como estratégia didática para levar a cabo o ensino da AL, os outros 40% não consideram. Mesmo, assim, 76% diz utilizar ou já ter utilizado algum *software* para apoiar o ensino de AL, o que consideram trazer maiores potencialidades didáticas. Porém, 26% não usam nem costumam usar qualquer *software*.

Num estudo sobre o ensino da AL na universidade Tecnológica de Pereira, Uzuriaga et al. (2008) aplicaram um questionário aos professores que coordenam as disciplinas de AL. Em termos de resultados, verificaram que 28,6% dos professores usam as tecnologias de informação e comunicação para acompanhar o desenvolvimento da disciplina e 71,4% não as usam. Quanto a propor atividades ou exercícios que permitam ilustrar aplicações de AL, constataram que 98% dos professores o fazem, sendo que 92,3% destes mostram aplicações em geometria, que é um capítulo do programa, e somente um refere aplicações da disciplina em circuitos elétricos.

Quanto à metodologia que usam para o desenvolvimento da disciplina, 57,1% centram-se em aulas tradicionais, com exposição dos temas, e 42,9% referem uma metodologia na qual propõem atividades que permitem ao estudante obter os conceitos e teoremas: proposta de leituras prévias ou sugestão de problemas que conduzem ao conceito a tratar.

No âmbito do ensino superior português, o uso de recursos tecnológicos nas aulas de AL também ainda está aquém do que seria desejável. Ideia que é corroborada pelo estudo de Gonçalves e Costa (2014), com 41 professores que lecionavam AL a cursos de engenharia, em que concluem que os recursos que os professores usam nas aulas não acompanham os avanços tecnológicos. Os autores constataram que o quadro e o projetor multimédia são os recursos que mais professores dizem utilizar (100% e 51,2%, respetivamente), sendo apenas 36,6% os que referem o uso do computador e *software*. Para estes últimos, o quadro é utilizado

para a resolução de exercícios e exemplificação de conceitos e aplicações, o projetor multimédia para a apresentação de teoria e o computador para o apoio na resolução de exercícios.

No contexto brasileiro, Kuehn, Schwerty, Silva e Valle (2005), refletindo sobre o ensino da matemática nos cursos de engenharia na Universidade Regional de Blumenau, concluíram que as aulas são estritamente expositivas e obedecem geralmente à sequência teoria, exemplo, resolução de exercícios extra-classe e avaliação individual. Referem que não é deixado muito tempo para discussões e reflexões, e que as justificações de falta de tempo para esta prática são, entre outras, o facto de o programa ter de ser cumprido e a dificuldade de introduzir outras dinâmicas pelo grande número de alunos na sala. Constataram ainda que, como reflexos desta prática, têm observado que os alunos atuam como agentes passivos do processo de aprendizagem, ficando, portanto, cada vez mais desmotivados.

Analogamente, no ensino superior cubano, Escalona (2011), num estudo realizado com oito professores do departamento de matemática de uma universidade, que lecionavam em diversos cursos de engenharia, constatou que:

- A maioria imita padrões de conduta que assimilaram dos seus professores anteriores;
- Há uma tendência para o ensino por transmissão-receção de conteúdos, pois a aula de matemática está concebida como uma atividade encaminhada para a transmissão de conhecimentos por parte de um sujeito ativo (o professor) e a receção dos mesmos por um sujeito passivo (o aluno). Em geral, os alunos, em vez de estarem atentos ao raciocínio e participarem nas aulas, limitam-se a tomar apontamentos que depois tratam de memorizar ao estudar para os exames;
- O estilo de exposição nas aulas é determinado pela elaboração dos fundamentos lógicos da matemática. Normalmente, estas iniciam-se através da definição do conteúdo, sem significado para os alunos e completamente alheio às suas vivências. Não se trabalha na resolução de problemas profissionais do engenheiro em formação;
- Existe um desconhecimento das relações interdisciplinares entre a matemática e as outras disciplinas de cada curso;
- Há uma utilização insuficiente das relações existentes entre os conteúdos dos diferentes temas incluídos na disciplina, não se facilitando assim o processo de ensino aprendizagem.

Tendo como foco a utilização da geometria e figuras, Gueudet-Chartier (2004), num estudo com 31 professores universitários em França, conclui que existem duas tendências

principais entre os professores: cerca de 30% dos professores privilegiam uma abordagem estrutural, sem praticamente recorrerem a figuras ilustrativas, sendo neste caso a geometria apresentada como consequência natural da teoria geral; 40% optam por apresentar a geometria afim associada a representações pictóricas antes de introduzir AL. Refere ainda que apenas uma minoria dos professores (15%) utiliza figuras especialmente concebidas para o ensino da AL.

Realçando a importância da motivação, Milevicich e Lois (2007) consideram que o reconhecimento dos fatores motivacionais vinculados à aprendizagem, a sua incidência na qualidade e rendimento académico é, geralmente, um dos aspetos mais descuidados pelos docentes universitários, não tendo, portanto, esses fatores em conta nas suas tomadas de decisão em termos de ensino pois consideram, essencialmente, que um bom ensino é consequência direta da fluência em termos de conteúdos. Porém, como referem os autores, dado que um aluno motivado intrinsecamente está mais disposto a aplicar um esforço mental significativo durante a realização das suas tarefas, a comprometer-se em processamentos mais ricos e elaborados e no emprego de estratégias de aprendizagem mais profundas e efetivas, os professores encontram-se perante o desafio de ter que adotar novas estratégias e estilos de ensino mais centrados no aluno como protagonista do processo de aprendizagem e, por conseguinte, a modificar de algum modo a sua habitual forma de ensinar.

Quanto à utilização de livros de texto, Gonçalves (2005) concluiu, na sua investigação com alunos do ensino superior, que estes não estão inclinados para estudarem pelos livros indicados pelo professor ou por qualquer outro livro, recorrendo preferencialmente aos apontamentos retirados das aulas e a apontamentos fornecidos pelo próprio professor. Na sua perspetiva, existem alguns aspetos intrínsecos aos livros que podem condicionar o trabalho do estudante: o facto de serem escassas as vezes em que os autores relacionam os novos conceitos com algo que os estudantes já estudaram antes faz com que estes tendam a ver os assuntos como algo totalmente novo e estanque; a existência de uma discrepância notória entre as simbologias adotadas nas várias obras pode implicar que o estudante procure outras alternativas para desenvolver o seu estudo, pois depara-se com notações que não conhece, muitas vezes diferentes das utilizadas pelo professor.

No domínio da avaliação, Del Puerto e Seminara (2011), a partir da sua experiência como docentes universitários na Argentina, mencionam que a avaliação neste nível de ensino se faz quase exclusivamente mediante exames parciais e finais independentes do processo de ensino-aprendizagem, e está relacionada somente com a medição dessas aprendizagens, a acreditação

ou certificação, e muito poucas vezes com a tomada de consciência, por parte dos alunos e docentes, das aprendizagens adquiridas ou das dificuldades de compreensão dos temas.

A conclusão similar chegaram González, Hernández e Hernández (2007) num estudo, com nove docentes de uma faculdade de engenharia Venezuelana, cujo objetivo era determinar a proximidade da avaliação que se emprega na aprendizagem de AL ao enfoque construtivista. Os autores constataram que os elementos de avaliação que os docentes aplicam na sua prática pedagógica são utilizados como instrumentos de medição, já que os seus resultados não são empregados para melhorar a aprendizagem

Já no contexto português, Nunes e Sebastião (2004) consideram que a cultura de ensino instalada, que se baseia em exames, motiva um modelo de estudo descontínuo que se caracteriza pelo facilitismo durante os períodos letivos, seguido de esforços anormais nos dias que antecedem os exames e as entregas de trabalhos. Na sua opinião, a aprendizagem resultante desta metodologia está longe de ser uma aprendizagem significativa, não promovendo a aquisição de competências essenciais aos profissionais que se pretende formar.

2.4.2. Recomendações para o ensino da Álgebra Linear

Para que os conceitos tratados no curso de AL sejam de alguma forma duradouros, é indispensável que o processo de ensino se realize de forma significativa, isto é, que promova uma aprendizagem que a partir de conhecimentos, atitudes, motivações e interesses, e experiências prévias dos estudantes faça com que os novos conteúdos tenham para eles um determinado sentido (Uzuriaga & Arias, 2006).

Esta preocupação com a aprendizagem dos alunos leva vários autores a recomendar abordagens metodológicas para o ensino de AL como a utilização de diferentes representações dos conceitos, a utilização de *sofware*, a resolução de problemas e aplicações, uma abordagem progressiva dos conceitos, relacionada, sempre que possível, com os conhecimentos anteriores dos alunos, a leitura de textos matemáticos, os debates em pequeno e grande grupo, sendo, muitas vezes, sugerida uma combinação de várias estratégias.

Por exemplo, Artigue et al. (2000) citam uma equipa de pesquisadores franceses do *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*, que, face às dificuldades apresentadas por estudantes de ciências do 1.º ano, indicou as seguintes sugestões metodológicas para o ensino da AL:

– Estabelecer objetivos para a compreensão de algumas noções básicas, isto é, limitar o conteúdo e adiar a formalização de certas noções que só podem ser estudadas numa fase inicial com a ajuda de exemplos;
– Limitar o vocabulário e os símbolos ao que é estritamente necessário e adequado;
– Usar exemplos que os alunos já conheçam da escola secundária (geometria e equações);
– Escolher exercícios e instrumentos de avaliação que testem a verdadeira compreensão e não apenas a manipulação mecânica dos conceitos;
– Ensinar aos alunos como se estrutura uma demonstração;
– Dar aos alunos as representações;
– Manter esta metodologia de ensino em futuras disciplinas voltadas para a AL;
– Integrar nas aulas resultados decorrentes da investigação em educação matemática.

No contexto do ensino superior português, Fernandes (1999), discutindo o ensino da matemática para os cursos de engenharia, ideias que também se podem aplicar especificamente à AL, considera que "o treino dum engenheiro não pode contemplar apenas aspetos utilitários ou empíricos, deve ser sim uma formação para o futuro mais ou menos distante, mais ou menos incerto, no qual a matemática tem um papel muito relevante" (pp. 52-53). Neste contexto, advoga que existem três aspetos essenciais na forma de ensinar matemática a engenheiros:

– Problemas: o ensino deve ser baseado, em grande medida, na resolução de problemas;
– Ensinar com rigor: o ensino deve ser rigoroso e não ceder a argumentos fáceis e incorretos para, supostamente, facilitar a exposição;
– Motivar com exemplos e aplicações: o ensino não pode descurar as aplicações a problemas de engenharia pois se for abstrato e desprovido de conteúdo prático tem pouca utilidade para um engenheiro e é desmotivador.

A estes três aspetos formais, o autor acrescenta três aspetos práticos que considera importantes:

– Visualizar: é preciso saber ensinar recorrendo às novas ferramentas ao nosso dispor, como vídeos, computadores, internet, manipuladores simbólicos, etc., para cativar os alunos e facilitar a aprendizagem.

– Integrar aulas teóricas/práticas/laboratoriais: na aprendizagem da matemática não existe uma divisão natural entre a discussão dos conceitos, a resolução de problemas e a experimentação no computador.
– Aumentar o tempo de estudo: aprender e interiorizar os conceitos requer tempo de estudo individual.

Também no contexto português, mas mais concretamente sobre o ensino dos conceitos de subespaço gerado e de conjunto de vetores geradores, Gonçalves (2005) é da opinião que a metodologia para a introdução destes conceitos deve visar:

– A abordagem algébrica e geométrica de ambos os conceitos;
– A introdução de exemplos e exercícios progressivamente mais complexos, ou seja, dos exercícios rotineiros aos exercícios teóricos;
– A resolução de tarefas em suporte informático, com o uso do *software* conhecido, que permitam essencialmente situações de exploração;
– A implementação de medidas de incentivo para o uso de livros pelos alunos quer nas aulas quer extra-aula.

Celis et al. (2012) e Messina, Cittadini, Pulstilnik, Sara e Pano (2012) também advogam o interesse didático da leitura de textos matemáticos, em particular no âmbito da AL. Para Celis et al. esse interesse advém do facto da leitura de um texto de matemática ser um trabalho análogo, em certos aspetos, à resolução de problemas. Assim, consideram que o aluno deve ler quotidianamente os enunciados dos exercícios e problemas, assim como os apontamentos que tomou durante a aula, pois como essa leitura exige um esforço e, por vezes, um esforço criativo, uma certa "colaboração" com o autor do texto, torna a atividade de ler numa situação de aprendizagem. Na sua opinião, os professores hesitam na utilização do texto matemático como meio de aprendizagem porque consideram a sua leitura mais complicada que no caso de outras áreas pelo facto de a matemática não ter somente uma simbologia que lhe é própria, mas também uma sintaxe particular.

Messina et al. (2012) consideram que o estudante universitário, ao frequentar as diferentes disciplinas, deve desenvolver práticas de linguagem e pensamentos próprios de âmbito académico superior, já que cada disciplina tem a sua própria lógica de produção escrita, de encarar a leitura dos textos e de estabelecer a comunicação entre quem pertence à mesma comunidade científica ou profissional, devendo, na sua perspetiva, os docentes responsabilizar-se por esta alfabetização académica. Assim, realizaram um estudo exploratório acerca das

perguntas que formulam os estudantes a partir da leitura de um texto de matemática, de forma a obter informação acerca das representações mentais que constroem e analisar se dominam as habilidades metacompreensivas que se encontram na base da formulação de perguntas. Participaram no estudo estudantes de dois cursos, que frequentavam a disciplina de Álgebra e Geometria Analítica na Universidade Tecnológica Nacional de Buenos Aires. Começaram por propor aos alunos, com uma semana de antecipação, a leitura de um texto que invocava e integrava conceitos fundamentais de álgebra linear e de geometria analítica e cujo tema ainda não tinha sido trabalhado. No dia destinado à atividade, os alunos deveriam responder por escrito a três perguntas propostas pela docente, que lhes solicitou também que formulassem por escrito três perguntas. Os autores constataram que os estudantes inquiridos elaboraram perguntas pouco profundas e mostraram possuir escassa habilidade ou desconhecimento da estratégia de formulação de perguntas para melhorar a compreensão ou aprofundar um tema. Situação que pensam ser explicável pelo facto de os estudantes estarem no início da sua formação e o texto eleito apresentar os temas como uma sequência fechada, com resposta única, o que pode ter constituído um fator pouco inspirador de perguntas complexas. No entanto, os autores advogam que, com esta experiência, abriram uma porta ao debate docente sobre a importância de considerar a leitura académica nas tarefas quotidianas, particularmente, sobre a necessidade de incorporar nas práticas de ensino a elaboração, por parte dos alunos, de perguntas sobre os textos.

A combinação de várias práticas que promovem uma aprendizagem ativa e fomentam o envolvimento dos estudantes e o trabalho cooperativo estão patentes num projeto que Idris (2005) desenvolveu, com estudantes que estavam a frequentar a disciplina de AL, numa universidade dos Emirados Árabes Unidos, que se desenrolou em dois contextos:

- Sala de aula: pequenas apresentações teóricas por parte do professor, discussões de grupo, apresentações dos alunos e discussões em aula;
- Laboratório de informática: ênfase na AL como ciência experimental (projetos, exercícios, exemplos e aplicações), incluindo também a elaboração de relatórios e a resolução de tarefas de papel e lápis para desenvolver habilidades básicas.

Fazendo o balanço da experiência, a autora concluiu que apresentações curtas por parte dos professores são benéficas para os estudantes, pois estes seguem bem uma exposição quando esta dura até cerca de quinze minutos, as notas de leitura do que ouviram em sala de aula são auxiliares de aprendizagem eficazes e a discussão dos estudantes em pequeno grupo e

com a turma é uma boa maneira de melhorar o seu nível de compreensão. Considera, ainda, que os resultados foram muito encorajadores, pois a assistência aumentou, assim como a atenção e o envolvimento dos alunos; aumentou o nível de compreensão dos conceitos fundamentais e desencorajou-se uma série de maus hábitos de estudo, tais como a memorização; o método utilizado fez o aluno concentrar-se na resolução de problemas e descoberta dos resultados e permitiu ao professor ter acesso ao que os alunos diziam ou pensavam.

Godino et al. (2003) são, igualmente, da opinião que a comunicação matemática entre alunos e entre alunos e professor é importante, e apresentam alguns motivos:

- Quando se pede aos estudantes que pensem e raciocinem sobre a matemática e que comuniquem os resultados do seu pensamento a outras pessoas, de maneira oral ou escrita, eles aprendem a ser claros e convincentes.
- Quando os estudantes escutam as explicações de outros companheiros, têm a oportunidade de desenvolver as suas próprias interpretações. Os diálogos em que as ideias matemáticas se exploram de distintas perspetivas ajudam os participantes a ajustar o seu pensamento e a fazer conexões.
- Quando os alunos participam em discussões nas quais têm de justificar as suas soluções – especialmente quando há desacordos – melhoram a sua compreensão matemática, pois têm que convencer os seus companheiros de pontos de vista diferentes. Esta atividade também ajuda os estudantes a desenvolver uma linguagem para expressar ideias matemáticas e torna-os conscientes da necessidade de usar uma linguagem precisa.

Assim, "os alunos que têm oportunidade, estímulo e apoio para falar, escrever, ler e escutar nas aulas de matemática recebem um duplo benefício: melhoram a sua aprendizagem matemática enquanto aprendem a comunicar de maneira matemática" (p.36, Godino et al., 2003).

As opiniões dos alunos também podem constituir uma fonte para o professor repensar as estratégias que utiliza no ensino da AL. Isik, Bas, Okur, Bekdemir e Ciltas (2014), quando questionaram os 72 estudantes do seu estudo, que frequentavam o curso de ensino de matemática primária de duas universidades turcas, sobre o que poderia ser feito para um ensino mais efetivo da disciplina de AL obtiveram as seguintes sugestões: a concretização dos tópicos (21 alunos), o aumento da prática (16 alunos), explicar os tópicos de uma forma mais

detalhada, dar mais ênfase à preparação dos alunos (3 alunos), fazer mais esforço para desenvolver atitudes positivas (1 aluno), adotar uma linguagem mais fácil (1 aluno).

2.4.2.1. A importância das aplicações

O recurso a aplicações no ensino superior, de forma a trabalhar com uma matemática contextualizada, é uma das estratégias que vários autores (Nieto, Lopes & Silva, 2007; Soares, 1999; Trejo, Camarena & Trejo, 2013) consideram importante, especialmente quando se leciona em cursos de engenharia. Existem, no entanto, alguns fatores que podem complicar esse tipo de abordagem:

- O modelo concentrado ou compactado do ensino superior faz com que seja difícil desenvolver aplicações da matemática adequadas ao respetivo curso, pois o estudante ainda não aprendeu os correspondentes conteúdos das outras disciplinas que lhe permitiriam entendê-las (Nieto et al., 2007; Soares, 1999). Neste contexto, Soares argumenta que seria mais adequado que a matemática das licenciaturas de engenharia fosse lecionada ao longo dos anos de duração do curso, tornando-se assim disciplinas mais horizontais e integradoras e permitindo promover as aplicações.
- O próprio professor, para além dos conhecimentos matemáticos, precisa de ter os conhecimentos que o evento ou problema a contextualizar requerem (Brito et al., 2010; Trejo et al., 2013).
- As dificuldades dos alunos em interpretar e começar a trabalhar com as situações apresentadas, como, por exemplo, dificuldades em selecionar as variáveis e interpretar possíveis relações entre elas (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010; Trigueros & Possani, 2013).
- A falta de autonomia dos alunos e a sua dependência da ajuda do professor pode comprometer o sucesso das tarefas (Gonçalves & Costa, 2012).
- As dificuldades em conteúdos propedêuticos, tanto do ponto de vista concetual como procedimental. De realçar que os aspetos de cálculo também se podem tornar mais complexos para o estudante, pelo facto de os problemas reais terem, normalmente, uma maior dimensão e envolverem, por vezes, um número significativo de variáveis (Gonçalves & Costa, 2012; Possani et al., 2010).

Por exemplo, Gonçalves e Costa (2012) na abordagem do tema Sistemas de equações lineares, da UC de Matemática Discreta e Álgebra Linear, com 18 alunos do 1.º ano de um curso de engenharia elétrica do ensino politécnico português, exploraram uma atividade de

modelação matemática. Esta foi decomposta em três tarefas para, ao longo do capítulo, funcionar como aproximação a novos conceitos em situações concretas e no contexto de trabalho de grupo: a primeira tarefa pressupunha a escrita de equações lineares associadas às leis de Kirchhoff num circuito elétrico; e a segunda e terceira tarefas, a realizar em aulas subsequentes, implicariam a escrita do sistema em linguagem matricial e a resolução do mesmo com aplicação do método de eliminação de Gauss, respetivamente. Na primeira tarefa os autores constataram que os alunos, mesmo conhecendo as leis de Kirchhoff, tiveram dificuldades em modelar a situação, necessitando da ajuda do professor. Relativamente às outras tarefas, realçam a falta de autonomia e a dependência dos alunos da ação do professor, considerando que a propensão para os alunos com dúvidas se dirigirem ao professor, antes destas serem discutidas no grupo, pode ser concomitante com a subvalorização do esforço para tentar resolver as tarefas. Referem também que os alunos começaram por sentir dificuldades em escrever o sistema na forma canónica, essencialmente devido à atribuição de letras diferentes das habituais x, y e z para as variáveis. Concluíram, assim, que o facto da tarefa proposta ser uma situação atípica, conduzindo a um sistema com um elevado número de equações e de incógnitas, os erros de modelação e os erros de utilização do *software*, neste caso o *Scilab*, condicionaram parte do propósito inicial de valorização, por parte dos alunos, do desenvolvimento de atividades desta natureza.

Algumas destas dificuldades foram também identificadas por Possani et al. (2010) num estudo com alunos dos cursos de Negócios e Ciências Sociais, Engenharia e Economia, em que foi aplicada uma sequência de ensino, na disciplina de AL, em torno da resolução de sistemas de equações lineares, a partir de uma situação de modelação de fluxo de tráfego. Nomeadamente referem que as principais dificuldades dos estudantes, quando confrontados com o problema, foram: a procura de uma solução imediata, o que levou ao uso de cálculos numéricos, representações gráficas específicas ou à proposta de um modelo matemático não diretamente relacionado com o problema; reconhecer algumas hipóteses que já tinham sido apresentadas no enunciado, e acrescentar, quando necessário, hipóteses adicionais; identificar as variáveis relevantes e interpretar os parâmetros nos modelos propostos; encontrar um modelo matemático apropriado para o problema e, depois de estabelecido, interpretá-lo; e dificuldades com os conceitos de função e variação.

De acordo com os autores, os professores da disciplina concluíram que é fundamental guiar os estudantes com questões que os ajudem a refletir sobre o que já sabem e a focar-se em

estratégias que podem ser frutíferas para a solução do problema. Apesar das dificuldades, os autores constaram que os estudantes demonstraram muito interesse ao longo de todo o processo, e trabalharam intensamente nas atividades propostas. Consideram, ainda, que a estratégia seguida deu oportunidade aos estudantes para mostrarem o que sabem e o que estão a aprender e, como todo o seu trabalho foi documentado, esse registo será uma importante ferramenta para avaliar o seu progresso.

Kuehn, Schwerty, Silva e Valle (2005), embora concordem que as aplicações em matemática nos cursos de engenharia são importantes, realçam que estas não precisam de ser específicas de cada curso, podendo ser aplicações simples, concretas, relativas ao quotidiano, para que o aluno visualize a teoria matemática estudada, ou ainda, que estimulem o seu raciocínio lógico, tornando o ensino interessante.

De igual forma Laugwitz (1974) destaca a importância de motivar os alunos para a matemática com base em exemplos a partir do seu ambiente, adequados à sua idade e aos seus conhecimentos. Critica assim a abordagem dos livros de apoio para o ensino da AL, pois considera que estes cometem o erro de primeiro apresentar uma versão, mais ou menos profunda da AL, e só posteriormente algumas aplicações, sendo os exemplos principalmente focados na geometria. Na sua perspetiva, a motivação dos estudantes que não têm como prioridade a matemática terá que ser realizada para cada novo conceito/método, devendo ser, sempre que possível, extra-matemática, com base em aplicações diretas que são mentalmente acessíveis aos alunos. Apresenta, assim, sugestões de tarefas abrangendo domínios como a mecânica, os sistemas de comunicação, criptografia, probabilidades, otimização, entre outras.

Também dando importância às aplicações, González (2014) descreve uma experiência realizada na disciplina de AL, com estudantes para professores de matemática da Universidade Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela, em que se propôs aos estudantes a realização de um trabalho cujo propósito era estabelecer e tornar explícitas as relações, vínculos ou aplicações da álgebra. Neste trabalho os estudantes podiam usar a perspetiva intra-matemática, exibindo as aplicações ou vínculos da álgebra com outros ramos de matemática, tais como análise, geometria, etc., ou partir de uma perspetiva inter-matemática, mostrando as aplicações e/ou relações da álgebra com outras áreas do conhecimento, como Economia, Informática, Biologia, Física, etc. Para além disso, expuseram a sistematização dos seus trabalhos, enfatizando os vínculos e/ou as relações encontradas num evento de caráter público, intitulado "Jornadas de Aplicaciones del Álgebra".

Baseando-se em resultados preliminares, o autor constatou que o aluno apreendeu a complexidade dos objetos próprios da álgebra, compreendeu a conexão entre a linguagem natural e a específica da álgebra, em particular o papel do simbolismo nesta última, e mostrou capacidade para vislumbrar o papel que a área terá no desafio interdisciplinar que deverá enfrentar como futuro educador matemático. Para além disso, verificou uma mudança de atitude que tende a favorecer a compreensão dos conteúdos.

Na opinião de González, o êxito da atividade baseou-se na assessoria constante, tanto do docente da disciplina como de muitos docentes da especialidade, na flexibilidade do tempo para que os estudantes amadurecessem as suas ideias, na clareza do estabelecimento do propósito do trabalho, na atribuição de diferentes bibliografias, no desenvolvimento do trabalho através de grupos de estudantes, na mudança de atitude frente ao conhecimento e à aprendizagem, na modificação da verticalidade da relação através do estabelecimento de uma comunicação horizontal entre o estudante e o docente e no facto de não se ter concedido importância à extensão do trabalho (quantidade) mas às múltiplas conexões que se estabeleceram (qualidade).

Em suma, o professor deve-se preocupar com o ambiente de sala de aula, com o seu papel como mediador e orientador e com a escolha criteriosa das tarefas com vista à consecução dos seus objetivos. Visando essa seleção, Lesh e Doerr (2003, cit. em Possani et al., 2010) indicam alguns princípios que os problemas de modelação matemática, passíveis de serem introduzidas na sala de aula, devem respeitar:

- Princípio da realidade: o contexto é suficientemente realista para motivar os alunos e o problema contém elementos matemáticos suficientes para não ser considerado trivial;
- Princípio da construção do modelo: o problema é suficientemente rico para necessitar de conceitos matemáticos para o desenvolvimento do modelo;
- Princípio da autoavaliação: os alunos são capazes de verificar o seu progresso e se o seu modelo é adequado à situação que está a ser modelada. Esta avaliação indicará aos estudantes eventuais modificações no modelo que possam ser necessárias;
- Princípio da documentação de construção: os alunos são capazes de registar os seus processos de pensamento, escrevendo os pressupostos e o modelo algebricamente. Isto também permitirá ao professor verificar o progresso e avaliar o desenvolvimento da linha de pensamento dos estudantes, sugerindo possíveis atividades adicionais ou novos conceitos para melhorar o modelo;

– Princípio da generalização de construção: os modelos desenvolvidos devem poder ser generalizados para outras situações ou problemas;
– Princípio da simplicidade: os problemas devem ter um nível de complexidade adequado que permita aos alunos analisá-los e desenvolver os modelos.

Skovsmose (2000), embora refira que as referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática se insere na sociedade, não considera suficiente contruir uma educação matemática baseada somente nessas referências. Assim, propõe, como resultado da combinação entre os paradigmas exercícios e cenários para investigação com as referências à matemática pura, semirrealidade e realidade, seis ambientes de aprendizagem (Tabela 3).

Tabela 3 – Ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose (2000, p. 73)

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

No entender do autor, a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode oferecer novos recursos que levem os alunos a agir e a refletir, dando assim à educação matemática uma dimensão crítica.

2.4.2.2. A importância da geometria

Para Rosso e Barros (2013), o estudo da AL emprega diferentes linguagens e representações, sendo possível distinguir três linguagens básicas: geométrica, aritmética e algébrica, além de uma variedade de representações. Estas diferentes linguagens e representações induzem distintas maneiras de abordar um conceito, propondo formas de pensar e marcos de trabalho diferenciados, que requerem habilidades e destrezas para mudar constantemente de uma linguagem para outra. Tendo em atenção este aspeto, os autores consideram que no ensino da AL se deveria propiciar o trabalho com as diferentes formas de representação como maneira de favorecer a independência do conceito a respeito da linguagem usada e das suas representações e explicitar a polissemia subjacente nos símbolos utilizados.

Hillel (2000) acrescenta às linguagens anteriores a abstrata, pois considera que uma disciplina típica de AL inclui várias linguagens, ou modos de descrição dos objetos básicos e das operações de AL, como:

– O modo abstrato – que usa a linguagem e os conceitos da teoria geral formalizada, incluindo: espaços vetoriais, subespaços, subespaço gerado, dimensão, operadores, núcleos;
– O modo algébrico – que usa a linguagem e os conceitos da teoria mais específica de $\mathbb{R}^n$, incluindo: n-uplos, matrizes, característica, soluções de sistemas de equações, espaço das linhas;
– O modo geométrico – que usa a linguagem e o conceito de espaço bi e tridimensional, incluindo: segmentos de reta orientados, pontos, linhas, planos, transformações geométricas.

Segundo Harel (2000), a geometria a duas e três dimensões será o contexto concreto para se introduzir o conceito de gerador, de dependência linear e de base, entre outros, para que depois o estudante possa abstrair esses conceitos de AL. No mesmo sentido, Konyalioğlu, Işik, Kaplan, Hizarci e Durkaya (2011) consideram que, quando os conceitos de AL são explicados, para além de se apresentarem expressões abstratas e definições algébricas, também deve ser ensinado o significado destas expressões e definições, recorrendo à geometria de uma forma significativa.

Dundar, Gokkurt e Soylu (2012) são, também, da opinião que os conceitos nas aulas de AL devem ser explicados com as suas representações visuais, pois consideram que, como os conceitos de AL são abstratos, serão apenas memorizados pelos estudantes e não completamente compreendidos se não forem explicados com alguma exposição concreta. Porém, embora pensem que as figuras geométricas têm uma grande importância na visualização de relações nos problemas e na interpretação de conceitos abstratos, consideram que elas nem sempre clarificam as definições ou conceitos na sua totalidade. Portanto, advogam que: quando o método da concretização é usado nos conceitos de AL, depois de um conceito ou definição ser explicado com figuras geométricas, é preciso dar lugar às suas definições algébrica e abstrata; se um conceito ou uma definição for dado antecipadamente, também deve ser compreendido pelos estudantes através da perspetiva geométrica.

No entanto, Harel (2000) adverte que embora a geometria possa ser uma ferramenta muito poderosa para solidificar conceitos de AL, é preciso considerar cuidadosamente a maneira como é introduzida e usada. Segundo ele, "nós, os professores, vemos como a situação geométrica é isomorfa à algébrica e por isso acreditamos que o conceito geométrico pode ser

um corredor para o conceito algébrico mais abstrato. Infelizmente, muitos estudantes não compartilham esta visão importante" (p. 185).

Harel acrescenta ainda ter verificado que, quando a geometria é introduzida antes dos conceitos algébricos serem formados, muitos alunos veem a geometria como o conteúdo a ser estudado. Assim, quando a abordagem geométrica precede a introdução algébrica dos conceitos, constata-se a tendência de os alunos se remeterem ao "mundo geométrico dos vetores" e não passarem para o caso geral.

No mesmo sentido, Artigue et al. (2000) referem que a análise histórica mostra que as relações entre a álgebra linear e a geometria são muito complexas, o que no seu entender permite supor que o uso da geometria para ensinar AL levantará importantes problemas didáticos. Da mesma forma, baseando-se na reflexão sobre diversas pesquisas realizadas no âmbito da AL, Dorier e Sierpinska (2001) consideram que a relação entre a AL e geometria é epistemologicamente menos natural do que pode parecer, podendo em alguns casos esta atuar como um obstáculo para a compreensão da primeira. Assim, embora as concretizações geométricas possam ajudar os estudantes na compreensão de conceitos abstratos, não é boa ideia iniciar uma disciplina de AL com geometria vetorial e construir os conceitos algébricos como uma mera generalização da geometria (Dorier & Sierpinska 2001), devendo antes ser abordada em diversos domínios matemáticos e ser associada a outros temas como polinómios, funções, sequências, etc. (Gueudet-Chartier, 2004).

Grande (2006) pretendendo investigar, nos livros didáticos de AL do ensino superior, quais os registos de representação semiótica mais utilizados no estudo das noções e tarefas propostas sobre independência linear, constatou que os autores dos livros didáticos privilegiam determinados registos de representação, como o registo numérico (tabelar ou por n-uplos) e o registo simbólico-algébrico, sendo os registos simbólico-matricial e geométrico menos explorados. Portanto, considera que o facto de os livros analisados apresentarem poucas opções quanto à possibilidade das conversões de registos, pode levar o aluno a adquirir uma visão fragmentada do conhecimento.

Na opinião do autor, as noções de independência e dependência linear deviam ser introduzidas inicialmente na disciplina de AL explorando-se o registo geométrico, o que mobilizaria possíveis conhecimentos adquiridos pelo aluno na disciplina de Geometria Analítica para a introdução dos conceitos de AL, e auxiliaria posteriormente nas generalizações a IR^n e outros espaços vetoriais.

Karrer (2006) partindo do princípio que os livros didáticos, embora não constituam a única fonte de trabalho do professor, desempenham um papel de referência na sua atividade e podem servir de referencial para elaborar conjeturas sobre o tipo de ensino que se está a desenvolver, também analisou alguns livros didáticos. Desse estudo verificou que as conversões que partem do registro gráfico são pouco exploradas e não há qualquer indicação de uso de *software* para fins geométricos.

No que concerne aos sistemas de equações lineares, Cutz (2005), como diagnosticou dificuldades em interpretar a solução de sistemas no modo geométrico numa investigação com alunos do ensino superior mexicano, recomenda que os professores relacionem a solução de um sistema de equações lineares com a sua representação gráfica e deem mais atenção ao seu significado, evitando que a explicação fique apenas ao nível da mecanização de métodos de resolução dos sistemas. Constatando que o modo de pensamento estrutural é o menos favorecido no tratamento de sistemas através do ensino tradicional, sugere, ainda, que os professores procurem estratégias que favoreçam o tratamento dos sistemas nos distintos modos de pensamento, assim como planeiem atividades que coloquem o estudante em algum modo de pensamento específico, mas sobretudo que incitem a transição entre esses modos de pensamento.

Corroborando esta ideia, já em etapas anteriores ao ensino superior, Ochoviet (2009) recomenda que os sistemas de equações sejam apresentados em diferentes modos de pensamento como os referidos por Sierspinska (2000): o sintético-geométrico; o analítico-aritmético e o analítico-estrutural. Considera que, desta forma, os estudantes construirão uma visão mais ampla e profunda do conceito de solução de um sistema de equações lineares, o que lhes permitirá no futuro aprender estruturas mais gerais e abstratas.

2.4.2.3. A importância da tecnologia

De acordo com Atencio (2013), a vertiginosa difusão das TIC e o crescente desenvolvimento de diverso *software* científico estão a produzir mudanças relevantes nos processos formativos em matemática, favorecendo a criação de novos e melhores recursos didáticos e de autoaprendizagem, assim como uma nova forma de gerar e difundir conhecimento ou experiências cognitivas.

Particularmente no ensino superior, Torres e Anta (2006) defendem que o uso das TIC tem vantagens, tanto porque permite ao professor diferentes abordagens de ensino como

proporciona aos alunos uma maior responsabilização pela sua própria aprendizagem. Mais especificamente, no domínio da matemática, consideram que:

- O aluno sente-se participante da sua aprendizagem, o que favorece a sua autonomia;
- Os estudantes contactam com os conteúdos a partir de ambientes menos rígidos, o que beneficia a sua familiarização com todo o tipo de *software*, em particular matemáticos;
- O uso de *software* matemático permite combinar dados de forma numérica, simbólica e gráfica, tratando a matemática de forma global;
- O professor, ao ter acesso a ferramentas técnicas mais avançadas, pode melhorar os seus métodos de exposição, facilitando a assimilação dos conteúdos por parte dos estudantes;
- A representação gráfica tridimensional torna-se mais exequível, o que permite a representação dinâmica dos conceitos e procedimentos matemáticos;
- Pode-se fomentar nos estudantes a cultura histórica de forma amena.

No ensino da matemática, Noss e Hoyles (1996) destacam a existência de dois tipos de *software*: os que reproduzem o conhecimento matemático recomendado nos currículos e os que trazem aplicações computacionais novas, promovendo diferentes formas de conceber a matemática. Estes autores consideram que o *software* do segundo tipo é o que oferece mais vantagens pedagógicas, pois, na sua perspetiva, como o do primeiro tipo não fornece aos alunos uma forma de expressar as suas ideias matemáticas, também não consegue abrir *janelas* para os processos de aprendizagem matemática. Comentam, ainda, que uma ferramenta computacional não deve apenas desempenhar o papel de simulador, mas deve estabelecer também um ambiente favorável à expressão de ideias e à articulação das relações envolvidas, pois é neste processo de articulação que o aluno pode criar matemática.

Particularmente na AL, há vários autores que recomendam a utilização de tecnologia, reconhecendo a sua importância para o processo de ensino aprendizagem, tanto como apoio em termos de ensino como pela possibilidade de gerar ambientes de exploração e descoberta. Ou seja, a tecnologia, e essencialmente o computador, para além de poder ter como objetivos a instrução, o reforço de conceitos (Aydin, 2009; Carlson et al., 1993; Diković, 2007), a geração de exemplos ilustrativos e a motivação para a aprendizagem da teoria (Diković, 2007), pode também providenciar ambientes para uma exploração ativa de propriedades, conceitos matemáticos ou estruturas (Aydin, 2009; Day & Kalman,1999), permite eliminar o trabalho penoso de cálculo, possibilitando que os alunos se concentrem principalmente no significado dos

resultados obtidos e na justificação dos procedimentos escolhidos (Aydin, 2009; Day & Kalman, 1999; Fernandes & Vaz, 1998), tornando possível ao professor explorar mais situações ligadas à realidade (Carlson et al., 1993; Fernandes & Vaz, 1998) e permitindo aprofundar determinados temas com interesse para os estudantes (Diković, 2007).

A maioria destes aspetos são também referidos por Ortega (2002) como vantagens indiscutíveis que o uso de sistemas de cálculo algébrico (CAS), como o *Derive*, proporciona no ensino e aprendizagem da AL. Este autor considera, ainda, que a tecnologia se pode converter num catalisador para que os professores melhorem os seus métodos de ensino, já que com o uso de CAS é incrementada a importância do professor no processo de ensino na medida em que este se converte no acompanhante e diretor indiscutível do processo de descoberta que realizam os alunos.

No entanto, Ortega (2002) alerta, também, para os perigos da utilização de CAS:

- Perder o sentido das operações que se realizam de forma automática de todos os cálculos;
- Perder destrezas básicas, por um uso antecipado dos sistemas para cálculos que devem considerar-se fundamentais e básicos para o estádio evolutivo do aluno;
- Confundir manipulação matemática com conhecimento matemático;
- Desenvolver a convicção de que o computador resolve tudo, sem ter em conta que somos nós que devemos introduzir os dados e interpretar os resultados, que em algumas ocasiões são dados impossíveis;
- Perder o sentido da dificuldade, pelo próprio imediatismo de resposta que proporciona o sistema e porque dá a sensação de que todos os problemas se resolvem rapidamente.

Para além do *Derive*, também *software* como *Matlab*, *Maple*, *Mathematica, Mathwright*, *Cabri*, *Linalg* e *Geometer's Sketchpad* são indicados (Aydin, 2009; Day & Kalman, 1999; Gonçalves, 2005) como passíveis de serem utilizados no âmbito da AL.

Por exemplo, Harel (2000), referindo-se às indicações do LACSG, sugere que o *Matlab* pode ser um dos programas a incorporar no ensino da AL, na medida em que pode ajudar os estudantes na construção de n-uplos e matrizes concretas. Lihong, Chongrong e Zhao (2011) consideram, igualmente, que a utilização do *Matlab* para resolver alguns problemas de AL simplifica o processo operativo, aprofunda a compreensão do conhecimento, deixa gradualmente os estudantes desenvolverem uma boa análise dos problemas e competências de resolução de

problemas, ou seja, melhora a habilidade dos estudantes em AL e dá-lhes uma base de apoio para a prossecução dos seus estudos.

Nyondo (1992), focando uma experiência de utilização do *Matlab* na universidade de Tecnologia da Papua Nova Guiné, após os conteúdos serem abordados nas aulas, conclui que o uso do *Matlab* capacita os alunos para reconhecerem a importância das tarefas propostas. No entanto, considera que o desenvolvimento de um novo ambiente baseado no computador requer um rearranjo considerável das atividades de sala de aula e enfrenta limitações de tempo.

Também recorrendo ao *Matlab,* Bueno (1999, cit. Rosales, 2012) realizou uma proposta metodológica para o ensino da AL, na universidade privada de Santa Cruz da Sierra, Bolívia, dirigida a estudantes de carreiras da área empresarial. Auscultando a opinião dos estudantes, constatou que 100% dos estudantes considerou que o uso do computador ajudou a melhorar a sua motivação pelo assunto; 100% recomendou que fosse aplicada a mesma metodologia nos semestres seguintes; 83% estimou que o uso do computador tornou a matéria mais divertida; 67% considerou que lhe ajudou a aprender melhor os conceitos; 83% opinou que o uso do computador os ajudou a não abandonar a matéria e 100% indicou que o uso do computador os ajudou a resolver problemas de um modo mais eficiente.

Méndez (2004) utilizou o *software Maple* no estudo das unidades didáticas matrizes e determinantes e sistemas de equações lineares, com 35 alunos do último ano do ensino secundário de Ciências Sociais espanhol. Em ambos os temas dedicou três das 19 sessões de 50 minutos a tarefas com o *Maple*. Os alunos resolveram umas fichas de trabalho, primeiro com o *Maple* e depois manualmente, comparando-se posteriormente os resultados obtidos com base em dois aspetos: o grau de acerto e o tempo utilizado. Avaliando a experiência, o autor concluiu que é visível a efetividade do *Maple* à luz dos resultados obtidos em termos de grau de acertos e tempo de realização, especialmente nos exercícios que requeriam um maior número de operações. Para além disso, como os alunos voltaram a rever os conceitos para realizar a prova, motivados pelo novo recurso, obtiveram-se também melhores resultados na resolução à mão dos exercícios propostos.

Na perspetiva do autor, a universalização do uso de sistemas de cálculo simbólico possibilitará a melhor compreensão dos conceitos, a redução dos tempos de aprendizagem e a inclusão de outros conceitos matemáticos que atualmente não se podem abordar no ensino secundário devido ao tempo requerido pelos cálculos envolvidos.

Também utilizando o *Maple*, mas no contexto do ensino superior, Mallet (2007) realizou um estudo com alunos da Universidade de Tecnologia de Queensland, Austrália, que frequentavam uma disciplina que incluia conteúdos de AL, e que servia de pré-requisito para disciplinas de matemática de anos posteriores. Após a lecionação dos temas teóricos, foi requerido aos estudantes que assistissem a aulas tutoriais no laboratório de matemática onde realizaram tarefas orientadas com o *Maple*, sendo o objetivo principal das sessões estudar um sistema de equações lineares nas suas diferentes vertentes, visual, algébrica e tabelas de dados.

Analisando o impacto da experiência, o autor conclui que a troca da sala de aula pelo laboratório foi apreciada pelos alunos na medida em lhes forneceu uma mudança de ambiente e uma maneira diferente de interagir com o assunto, possibilitando-lhes olhar para os sistemas lineares de diversas formas. No entanto, uma grande proporção foi crítica em relação ao *Maple* pela sua complicada sintaxe, mesmo que não lhes tenha sido requerido para a aprenderem ou a desenvolverem por eles próprios.

Na perspetiva de Mallet, o *Maple* pode ser usado para promover uma aprendizagem mais ativa e a exploração fácil de diferentes representações. Todavia, alerta que pode ser bastante exigente para os estudantes moverem-se entre diferentes representações de um conceito, o que pode lançar alguma confusão nas aulas, pelo que não deve ser assumido que estes reconhecerão todas as conexões imediatamente.

Soares e Santos (2010) fazem a apologia do uso do *Scilab* no ensino médio brasileiro como auxiliar nos cálculos dos temas matrizes e determinantes. Num estudo que desenvolveram com alunos, essencialmente do curso técnico integrado, concluíram que a linguagem de programação usada no *Scilab* é de fácil aprendizagem, sendo totalmente viável o seu uso por qualquer estudante do ensino médio, mesmo que este não tenha nenhum conhecimento de informática, tornando as aulas de matemática muito mais atrativas para os alunos. Na sua perspetiva, o uso do *Scilab* torna-se um aliado do professor na medida em que os alunos percebem a importância de cada definição, teorema e suas respetivas demonstrações na construção do conhecimento matemático.

Atencio (2013), pretendendo determinar a funcionalidade, as vantagens, limitações e dificuldades no uso do *software Scilab* e *Octave*, principalmente para temas de AL, realizou uma experiência educativa com este *software*, na Universidade Tecnológica do Panamá, com 70 estudantes de diversas carreiras de engenharia do 1.º ano. No fim do semestre aplicou uma entrevista sobre cada ferramenta utilizada, constatando que, na opinião dos alunos, o *Scilab* foi

superior ao *Octave* na maioria dos aspetos avaliados, como facilidade de manuseamento, desenho claro e atrativo do ecrã. No entanto, no que diz respeito à ajuda na solução de diversos problemas, a avaliação é idêntica para ambos (67 alunos responderam "sim" em ambos os casos). O autor conclui, assim, que existe um grande nível de aceitação por parte dos estudantes no uso do *software Scilab* e *Octave* como ferramentas de apoio para a solução de problemas de AL.

Recorrendo também ao *Scilab* em tópicos de AL, Rosales (2012) relata um estudo com 31 estudantes da Universidade de Caldas, Colômbia, da Faculdade de Ciências Exatas e Naturais e da Faculdade de Engenharia. A metodologia usada foi construtiva, ativa e participativa, onde o estudante conjetura, demonstra e verifica muitas propriedades da álgebra matricial e sistemas de equações lineares, usando papel e lápis e o *Scilab*.

O autor concluiu que o *Scilab*, para além de ser motivador para a aprendizagem, possibilitou que os estudantes concretizassem com maior facilidade os cálculos necessários para resolver os problemas, centrando-se assim nos verdadeiros objetivos da disciplina, embora a metodologia tenha reduzido as habilidades e destrezas manuais de cálculo. Para além disso, a interatividade gerada pela estratégia didática foi positiva nos três âmbitos de comunicação: alunos com alunos, alunos com o professor e alunos com o *Scilab*.

Ortega (2002), com a finalidade de analisar a influência que exercem os programas de cálculo simbólico na aprendizagem de AL, em particular o *software Derive*, realizou uma experiência educativa com alunos do 1.º ano da Licenciatura em Administração e Direção de Empresas da Universidade Autónoma de Madrid, que frequentavam a disciplina de Matemática II, que centra os seus conteúdos na AL. Ao incorporar o *Derive* na sua estratégia didática, o autor constatou que:

- Propiciou-se uma atitude de procura de soluções, o que permitiu utilizar o programa como uma autêntica ferramenta de experimentação. Facto que sucedeu porque o *Derive* forneceu aos alunos mais tempo para pensar, deixando o rotineiro para o computador;
- O uso do programa não gerou barreiras adicionais para a aprendizagem dos conteúdos de AL, já que se trata de um programa fácil de aprender e de manejar;
- Embora os alunos não tenham adquirido um grau de autonomia significativo, ofereceu-lhes a possibilidade de tentar, com alguma autonomia, a resolução de muitos problemas que não tinham sido capazes de realizar com papel e lápis;

– O grau de motivação dos alunos foi bastante elevado, o que é referenciado pelas elevadas percentagens de alunos que assistiram às aulas, presentes no exame e aprovados na disciplina;
– O ambiente da disciplina foi muito participativo, e a dinâmica de aula muito ativa e experimental;
– Os alunos viram realizadas as suas expectativas e mostraram satisfação pela disciplina, notando-se uma evolução progressiva na sua aprendizagem.

Sintetizando, o autor concluiu que o *Derive* permitiu que os alunos realizassem com menos esforço os cálculos repetitivos e rotineiros necessários para resolver os problemas e exercícios de AL, fazendo com que se concentrassem nas ações necessárias para entender a AL. Isto proporcionou aos alunos a possibilidade de dedicarem mais tempo à experimentação e à investigação, embora tenha provocado uma certa diminuição das habilidades e destrezas manuais de cálculo.

Também com recurso ao *Derive*, Prugent e Gallese (2002) relatam um estudo realizado com alunos da Licenciatura em Economia da Universidade Nacional do Rosário, Argentina, em que incorporaram essa ferramenta computacional como recurso didático no ensino da AL e sua aplicação à Economia. Fazendo uma avaliação preliminar da experiência, concluíram que o interesse, a dinâmica ou o estímulo que produz o trabalho em laboratório é altamente satisfatório, já que a maioria dos alunos considerou a tarefa interessante. Para além disso, os alunos consideraram importante a rapidez de cálculo, por exemplo, no caso de inversas de matrizes, valores e vetores próprios, diagonalização de matrizes, etc., manifestando que uma vez entendida a teoria se podem aprofundar os conceitos. Valorizaram, ainda, a utilidade da ferramenta computacional no processo de aprendizagem não só para esta disciplina, mas também para outras disciplinas do currículo.

No contexto do ensino superior em Portugal, Pires e Marques (2009), no âmbito de um projeto de utilização de *software* nas aulas de matemática com o objetivo de ajudar os alunos a lidar melhor com conceitos abstratos, quando estes são apresentados pela primeira vez, e, assim, aumentar o sucesso académico, realizaram uma experiência com estudantes do 1.º ano de três cursos de engenharia do subsistema politécnico da Universidade do Algarve. Nela, utilizaram o *software Scientific WorkPlace* (que integra um processador de texto científico e um sistema de álgebra computacional), para os cálculos algébricos, e o *GeoGebra*, para a representação geométrica.

O programa da disciplina foi reorganizado de modo a ser mais eficiente pedagogicamente e para permitir a integração de tecnologias nas aulas. Estas foram sempre baseadas numa apresentação em *PowerPoint* com vários *links* para construções geométricas em *GeoGebra* e/ou cálculos no *Scientific WorkPlace* e começavam com temas muito concretos, progredindo gradualmente para questões mais abstratas com o intuito de manter os alunos presentes nas aulas até o final do semestre. No que diz respeito à avaliação, os alunos realizaram, durante o semestre, três testes de escolha múltipla, que completaram com trabalhos de casa propostos nas aulas de tutoria.

Os autores observaram que a possibilidade de fazer cálculos de uma forma rápida permitiu dar muito mais exemplos de situações diferentes e, por vezes, com cálculos complicados, contribuindo para que os alunos assimilassem com mais facilidade os conceitos que para eles tradicionalmente são difíceis, como matrizes inversas ou vetores próprios.

Fazendo o balanço da experiência, Pires e Marques concluíram que a utilização de tecnologias provou ser uma maneira eficiente para o ensino a nível universitário, pois não só se manteve elevado o interesse dos alunos nas aulas ao longo de todo o semestre, como os resultados finais foram muito bons e substancialmente superiores aos de anos anteriores.

Utilizando igualmente o *GeoGebra*, mas com o intuito de abordar o estudo das soluções de sistemas de equações lineares de duas equações a duas incógnitas a partir da sua representação geométrica, Hummes e Breda (2013) realizaram um estudo de caso com alunos do 9.º ano, do ensino fundamental, numa escola da rede pública brasileira. Desse estudo, constataram que, embora os alunos apresentassem algumas dificuldades sobre os comandos a utilizar no *GeoGebra* para resolver os sistemas, discutiram o procedimento e o resultado das suas construções com os colegas, promovendo-se, assim, uma interação e um espírito de solidariedade na sala de aula. Consideraram também que houve uma aprendizagem no que diz respeito à tecnologia, pois os alunos não conheciam o *GeoGebra* nem os recursos que o mesmo oferecia para a construção de objetos matemáticos. Além disso, ao visualizarem as soluções dos sistemas propostos, perceberam que havia somente três possíveis resultados: uma solução, representada pelo ponto de interseção das retas; um número infinito de soluções, representadas pela sobreposição das retas; ou nenhuma solução, representada pelo paralelismo estrito das retas. Esta visualização permitiu-lhes igualmente comparar algébrica e geometricamente as soluções dos sistemas propostos, já que alguns resultados obtidos a partir da resolução

algébrica não faziam sentido para eles e, ao observarem a solução geométrica, conseguiam perceber o comportamento do sistema.

A vantagem da utilização do *GeoGebra* na resolução de tarefas sobre sistemas, principalmente quando se pretende favorecer a passagem entre registos de representação semiótica, é também apontada por Santos e Di Blasi (2011) numa experiência com 37 estudantes do 1.º ano do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Nacional, Argentina, que frequentavam a disciplina de Álgebra e Geometria Analítica. Os autores constataram que, com o apoio do *GeoGebra*, os alunos faziam conversões do registo geométrico para o algébrico e do algébrico para o geométrico de maneira autónoma.

Recorrendo igualmente a um *software* de geometria dinâmica, o *Cabri*, para além do ambiente de papel e lápis, Karrer (2006) realizou um estudo que envolveu atividades de exploração das diversas representações de transformações lineares planas, com seis alunos de Engenharia da Computação de uma instituição particular de ensino superior de São Paulo, Brasil. Desse estudo conclui que a utilização do *software* para apoio à construção e resolução das atividades trouxe aos estudantes grandes benefícios na concetualização das transformações lineares planas, porque permitiu a exploração de situações não usuais, o estabelecimento e validação experimental de conjeturas, o trabalho com conversões envolvendo o registo gráfico e a inter-relação dinâmica entre os diferentes registos. Além disso, as situações desenvolvidas no ambiente computacional permitiram uma visão de aplicação de propriedades relativas ao conceito de transformação linear no plano, como, por exemplo, a obtenção da aplicação linear que transformava a circunferência na elipse.

Aranda e Callejo (2010) recorreram ao *applet Descartes* (http:recursostic.education.es/descartes/web) com o objetivo de conhecer em que medida os alunos aproveitam ou não o potencial de utilizar simultaneamente as representações analítica e geométrica vinculadas ao conceito de dependência linear. Participaram na experiência seis alunos do 2.º ano do *bachillerato* espanhol (17-18 anos) que tinham estudado previamente a dependência linear em IR^2 e IR^3, utilizando papel e lápis. Esta experiência desenvolveu-se em duas sessões: a primeira contemplou o trabalho da dependência linear em IR^2, com dois e três vetores; na segunda abordou-se a dependência linear de três vetores em IR^3.

Os autores constataram que a atividade dos alunos em contextos tecnológicos, delineados para a finalidade anteriormente citada, onde se integram diferentes tipos de representação inter-relacionados, ajuda a avançar na construção do conceito de dependência linear, já que a

interação e dinamismo das ações de relacionar, procurar e estender facilitaram aos estudantes a coordenação interna entre as representações analíticas e geométricas do conceito no caso dos vetores do plano. Já no caso de três vetores linearmente dependentes em IR^2 ou IR^3, a caracterização geométrica através do *applet* carecia de alguma clareza pelo que, neste caso, os estudantes centraram a sua atenção no tratamento analítico.

O *Winplot* é um dos *programas* que se pode considerar relevante na compreensão de sistemas de equações lineares, pois permite a associação entre a resolução algébrica e geométrica. Este facto foi constatado por Batista, Barcelos e Afonso (2005) numa experiência envolvendo alunos do Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro, em que lhes solicitaram que representassem geometricamente sistemas lineares de duas equações a duas incógnitas e de três equações a três incógnitas, fazendo a sua classificação a partir da análise dessas representações.

Esse aspeto foi também comprovado por Jordão (2011) num estudo similar com alunos do 2.º ano do ensino médio de uma instituição privada de São Paulo, destacando esta autora o contributo do *Winplot* para a visualização e compreensão da resolução de sistemas lineares em três dimensões. Porém, observou que no caso dos sistemas impossíveis, embora o *Winplot* possibilitasse a movimentação dos três planos a fim de facilitar a visualização da sua posição relativa, a resolução gráfica desses sistemas não ficou suficientemente clara, pois os alunos apresentaram dificuldades em visualizar e interpretar os sistemas lineares cujos gráficos eram três planos que se intersetavam, dois a dois, segundo retas paralelas. Realça também a limitação do *Winplot* quanto à localização e determinação das coordenadas do ponto de interseção de três planos no espaço, já que foi necessário, durante a experimentação no laboratório de informática, que os alunos recorressem ao registo algébrico para determinarem os valores x, y e z pertencentes ao conjunto dos números reais. Caso esses valores sejam determinados corretamente, os alunos, ao inseri-los no programa, podem ver o ponto na interseção dos três planos; caso contrário, o ponto não aparece no ecrã.

Quando o objetivo principal é a abordagem dos temas matrizes ou determinantes, no ensino médio brasileiro, há autores que recorrem ao *software WinMat* (Belo, 2011) ou ao *Wimmatrix* (Baggio, Schossler & Dullius, 2010). Na opinião de Belo, embora operar com o *WinMat* não seja uma tarefa trivial, o trabalho torna-se mais prático. Considera que se deve utilizar este recurso para que os estudantes confiram as suas respostas após fazerem os

cálculos, o que aumentará a sua satisfação quando chegam à resposta correta, incentivando-os a resolver cada vez mais tarefas.

Baggio et al. (2010) utilizaram o *Wimmatrix* no âmbito de uma experiência que realizaram com duas turmas do 2.º ano do ensino médio brasileiro, uma com 20 alunos do ensino regular e outra com 23 alunos da Educação de Jovens e Adultos, em que propuseram tarefas com o sentido de explorar duas metodologias: a modelagem matemática e o *software Wimmatrix*. Concluíram que ambientes escolares diferentes exigem metodologias diferenciadas pois verificaram que, embora as duas metodologias tenham sido bem aceites por ambas as turmas, a modelagem matemática cativou mais os alunos da turma de adultos e o *software* os alunos do ensino regular. Os autores explicam esta situação pelo facto de os primeiros não possuírem muito contato com as tecnologias, mas terem o hábito de ler jornais e ver noticiários, que foram alguns dos meios utilizados para propor tarefas de modelagem.

Os autores comentam, ainda, que o recurso às tecnologias não é por si só suficiente para estimular o interesse dos estudantes, pois, para acompanhar o processo de ensino/aprendizagem, é necessário que o estudante esteja envolvido numa aprendizagem significativa.

Para alcançar esse objetivo pode ser importante a combinação de recursos múltiplos como páginas *web*, *software*, ... aliada à diversificação das estratégias de ensino como se pode constatar por algumas experiências realizadas (e.g., Ciancio & Oliva, 2006; Aydin, 2008; Pecuch-Herrero, 2000).

Por exemplo, Ciancio e Oliva (2006) propuseram o uso de recursos tecnológicos, especificamente uma página *Web*, para desenvolver conteúdos teóricos do tema transformações lineares, e *software* científico – o *Maple*, para resolver situações práticas, num estudo que realizaram com estudantes do 1.º ano das Licenciaturas em Geofísica e em Astronomia da Faculdade de Ciências Exatas, Físicas e Naturais da Universidade Nacional de San Juan, Argentina.

Na primeira fase do estudo, realizaram cinco sessões no gabinete de computação em que os alunos trabalharam, em grupos de dois ou três, com guias teórico-práticos, no desenvolvimento dos conteúdos e atividades relativas às transformações lineares apresentados na página Web. Na segunda fase, foi proposto um guia de trabalho, eminentemente prático, em que os estudantes precisavam de aplicar os comandos do *software*. Também se incluíram

situações que requeriam um planeamento algébrico prévio, para logo executar comandos do programa e, assim, obter a solução algébrica ou gráfica.

As autoras observaram que a abordagem utilizando uma página *web* permitiu desenvolver uma forma distinta de aprender AL, tendo os alunos opinado que a aplicação deste recurso lhes permitiu avançar na apropriação dos conteúdos ao seu próprio ritmo de aprendizagem. Na segunda fase do trabalho, o facto de os alunos terem sido envolvidos em pequenas atividades de investigação, favoreceu o intercâmbio de opiniões. As autoras concluíram que a utilização deste tipo de práticas na aula tem efeitos positivos, designadamente: incrementa o aspeto lúdico na aprendizagem da AL, o que conduz a um aumento de motivação e a uma melhoria na qualidade do processo educativo; o computador oferece resultados e imagens instantâneas que facilitam a compreensão e mantêm a atenção do estudante na atividade que está a desenvolver, o que se torna gratificante quando a adequada manipulação dos conceitos e procedimentos conduz à solução correta.

Aydin (2008), no sentido de discutir o papel do computador no ensino e na aprendizagem de AL, realizou um estudo com estudantes do Departamento de Primária da Faculdade de Educação da Universidade Yüzüncü Yil, Turquia, em que considerou dois grupos: o grupo experimental com 27 estudantes e o grupo de controlo com 28. Na sala do grupo de controlo não estava disponível nenhum computador e na exploração dos tópicos seguiu-se a ordem adotada na maioria dos livros didáticos de AL. No grupo experimental foi implementado um ensino assistido por computador numa dependência do laboratório de informática, tendo os alunos realizado trabalho exploratório com programas de AL e alguns projetos durante o semestre.

O autor observou que a diferença de desempenho entre o grupo experimental e o grupo controle, avaliada através de um teste, após a implementação da experiência, foi significativa, concluindo que a utilização da estratégia de ensino descrita promoveu a melhoria da aprendizagem do grupo experimental. Porém, no seu entender, esta melhoria pode ser devida à combinação das estratégias de ensino.

A conclusão semelhante chegou Pecuch-Herrero (2000), numa pesquisa com estudantes universitários da Universidade do Arizona, Estados Unidos, que frequentavam a disciplina de AL, pois constatou que a melhoria da aprendizagem foi devida à combinação das estratégias de ensino, como sejam: exploração de novos conceitos, através de exercícios de computador; ensino de transformações lineares o mais cedo possível; ênfase na geometria; ênfase na escrita

matemática por meio do desenvolvimento de um portefólio; uso de projetos realizados com meios computacionais para motivação e aplicações e não ao uso de tecnologia por si só.

Tando Aydin como Pecuch-Herrero constataram que a instrução baseada no computador pode diminuir a qualidade da aprendizagem de AL se se der muita ênfase ao trabalho individual com o computador. Assim, consideram que a incorporação da tecnologia no ensino funciona melhor quando é feita em conjunto com estratégias de ensino que promovem o pensamento crítico e aumentam a comunicação entre alunos e professores. Nesta situação, uma vez que os algoritmos sejam adequadamente compreendidos, os alunos passam menos tempo com cálculos e mais tempo a discutir problemas e provas.

Almaguel, Alvarez e Pernía (2016) comentam que embora existam diversas ferramentas para o trabalho com matrizes, estas têm um inconveniente do ponto de vista pedagógico na medida em que servem quase exclusivamente para produzir resultados. Assim, o nível de interatividade com o usuário é baixo, já que, após introduzir os dados, o computador mostra simplesmente a resposta, não podendo o estudante ver o desenvolvimento das operações. Na opinião dos autores, um estudante precisa de ferramentas que lhe permitam compreender e visualizar todo o processo para desenvolver habilidades no trabalho com matrizes. Para tal, realizaram um estudo utilizando um *software* desenvolvido no departamento, que, para além de apresentar um sistema de exercitação e prática, permitia que os estudantes acedessem à sequência de passos correspondentes aos procedimentos efetuados nas operações com matrizes. Como o objetivo do estudo era averiguar se a aplicação em causa tinha algum efeito no processo de ensino aprendizagem das operações com matrizes, escolheram como participantes alunos do 1.º ano de engenharia informática de dois anos letivos diferentes, 24 alunos do ano 2013/2014 e 24 do ano 2014/2015. Apenas neste último ano o tema matrizes foi abordado recorrendo ao *software*, tendo no ano anterior sido lecionado de forma tradicional.

Almaguel et al. verificaram que os resultados alcançados pelos estudantes que usaram o *software* foram superiores aos resultados alcançados pelos estudantes que foram sujeitos ao ensino tradicional. Concluíram, assim, que o *software* educativo proposto pode ser de grande utilidade no processo de ensino aprendizagem das operações com matrizes nos cursos de engenharia.

2.4.3. O erro e a sua importância didática

2.4.3.1. Conceito de erro

De acordo com Godino et al. (2003), "falamos de erro quando o aluno realiza uma prática (ação, argumentação, etc.) que não é válida do ponto de vista da instituição matemática escolar" (p. 69). Consideram ainda que:

> O termo dificuldade indica o maior ou menor grau de êxito dos alunos perante uma tarefa ou tema de estudo. Se a percentagem de respostas incorretas (índice de dificuldade) é elevada diz-se que a dificuldade é alta, pelo contrário se essa percentagem é baixa, a dificuldade é baixa. (p. 69)

Para Radatz (1980), os erros dos estudantes em educação matemática não são simplesmente o resultado da ignorância ou de acidentes ocasionais. Na sua opinião, muitos dos erros dos estudantes não são devidos a insegurança, falta de cuidado ou condições situacionais únicas, mas são o resultado ou o produto de experiências prévias na aula de matemática. O autor considera que os erros dos estudantes ilustram as suas dificuldades e mostram que estes não foram capazes de entender ou compreender certos conceitos, técnicas, problemas, etc.

Numa perspetiva similar, Socas (2007) considera que o erro tem distintas procedências, mas "sempre se considerará como um esquema cognitivo inadequado e não somente como consequência da falta de conhecimento ou de um despiste" (p. 33).

De acordo com Rico (1998), um aluno, ao cometer um erro, expressa o caráter incompleto do seu conhecimento, permitindo, assim, aos seus companheiros ou ao professor ajudá-lo a completar o conhecimento adicional ou a levá-lo a compreender por si mesmo o que é que estava mal.

Para De la Torre (1993), o tema erro aparece onde existe um ato humano, considerando-o um tema multidisciplinar porque é estudado por diversas áreas do conhecimento experiencial e científico. Na sua perspetiva, os diversos significados do erro podem resumir-se em quatro categorias: pensamento, linguagem, ação (proceder) e erro voluntário (engano).

Já Brousseau (1976) utiliza o conceito de obstáculo:

> O erro não é apenas o resultado da ignorância, da incerteza, do acaso, como se defende nas teorias empiristas ou behavioristas de aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que teve o seu interesse, os seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inapropriado. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, são baseados em obstáculos. Quer do ponto de vista do professor, quer do aluno, o erro é constitutivo do significado do conhecimento adquirido. (p. 104)

Para além disso, este autor considera que um obstáculo se manifesta por erros que não são devidos ao acaso, mas são reprodutíveis e persistentes. Distingue assim três origens fundamentais desses obstáculos que se encontram no ensino da matemática: uma origem ontogénica, correspondente aos obstáculos resultantes das limitações relativas ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes; uma origem didática, para os obstáculos ligados às opções do sistema educativo e uma origem epistemológica, os que estão mais diretamente relacionados com o conceito.

A noção de obstáculo epistemológico foi descrita inicialmente pelo filósofo francês Bachelard na obra *A Formação do Espírito Científico*, publicada em 1938. Segundo Bachelard (n.d.):

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. (p. 17)

Embora refira que a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação, o autor considera que não é uma tarefa fácil.

Para Rico (1998), a noção de obstáculo epistemológico de Bachelard realiza uma aproximação sistemática aos processos de criação e constituição do conhecimento. Reconhece, ainda, que esta noção e as suas sucessivas tipificações e caracterizações têm sido utilizadas como chave para o estudo, sistematização, análise e explicação dos erros que se apresentam no pensamento científico.

Como consequência do desenvolvimento nas diferentes áreas de investigação que se dedicam a estudar os processos de ensino-aprendizagem, surgiram distintos modelos de análise didática, entre os quais o enfoque ontosemiótico (Pochulu & Font, 2011), no qual se pode integrar o conceito de conflito semiótico.

De acordo com Godino, Batanero e Font (2008), "um conflito semiótico é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições)" (p.23). Os autores distinguem, ainda, conflitos semióticos dos tipos epistémico, cognitivo e interacional. Os primeiros referem-se ao caso em que a disparidade mencionada se produz entre significados institucionais, os conflitos do tipo cognitivo sucedem quando a disparidade se produz entre práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito e os do tipo interacional acontecem quando a disparidade se produz entre as práticas

(discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor). Pochulu e Font (2011) consideram que estes três tipos de conflitos não são exclusivos, já que, segundo a perspetiva que se foca, um mesmo conflito pode incluir-se num tipo ou noutro.

2.4.3.2. A pesquisa sobre análise de erros em matemática

A análise de erros em educação matemática, que teve início em trabalhos desenvolvidos na primeira metade do século XX, tem uma longa história, caracterizada por interesses e abordagens muito diferentes, que foram moldados pelas ciências contemporâneas dominantes, como a pedagogia e a psicologia, e pelos objetivos e formas de organização determinados pelas respetivas políticas educacionais (Cury, 2004; Radatz, 1980; Radatz, 1979).

Fazendo uma retrospetiva das contribuições mais significativas para a análise de erros no âmbito da educação matemática até ao final de 1970, com destaque para os estudos na Alemanha e nos Estados Unidos, Radatz (1980) constata que se podem distinguir três tendências:

- A aritmética constitui o assunto dominante na maior parte dos estudos.
- A teoria dos erros foi desenvolvida esporadicamente na Alemanha, com grandes intervalos no meio, e com uma pequena continuidade, em oposição ao seu desenvolvimento nos Estados Unidos.
- Existe uma pluralidade de abordagens teóricas e tentativas de explicação das causas dos erros cometidos pelos estudantes no processo de aprendizagem matemática.

Os pesquisadores nos Estados Unidos eram influenciados pelo behaviorismo e na Alemanha pela teoria de Gestalt, pela psicanálise e a psicologia do pensamento, facto que pode ter sido responsável pela ausência de troca de informações entre os diversos investigadores (Radatz, 1979, 1980).

Nos Estados Unidos, desde 1917, com Thorndike (pai da psicologia educacional) começa a difusão de trabalhos sobre a determinação dos erros (Engler, Gregorini, Müller, Vranken & Hecklein, 2004).

Na Alemanha, Radatz (1980) menciona Weimer como o fundador da investigação didática orientada para o estudo dos erros, cujo objetivo era estabelecer padrões de erros que explicassem os erros individuais em todos os assuntos educacionais e para os grupos de todas as idades. Nesta perspetiva, agrupou os erros em cinco categorias: erros familiares, erros

persistentes, erros por similaridade, erros mistos e erros devido a situações emocionais (Rico, 1998).

Na União Soviética, a análise de erros e das dificuldades individuais de aprendizagem tomou força nos princípios dos anos 60, quando se consolidou a investigação sobre educação matemática, tendo como investigadores de referência Kuzmitskaya e Menchinskaya, que conseguiram determinar e descrever as causas dos erros (Radatz, 1980, Engler et al., 2004). Por exemplo, Menchinskaya, para além de destacar a regularidade dos erros dos estudantes em educação matemática, enfatizou a complexidade dos processos que estão entre as causas potenciais do erro. Assinalou assim quatro áreas de causas, não totalmente diferenciadas: erros devidos a uma realização incorreta de uma operação, erros de uma compreensão concetual qualitativamente insuficiente, erros mecânicos, por distração ou perda de interesse, e erros devidos à aplicação de regras ou algoritmos inadequados (Rico, 1998).

Em Espanha, investigadores como Villarejo, Fernández Huerta, Centeno, Rico, Castro, Gonzalez, Coriat e Molina, entre outros, mobilizaram-se em torno do tema a partir da década de 50, destacando-se a procura da identificação dos erros mais frequentes, apresentação de bases para o ensino corretivo e a necessidade de interpretar os erros para orientar o processo de ensino (Engler et al., 2004). Neste país, Rico (1998) refere, ainda, a *Editorial Síntesis*, em que a maior parte dos trabalhos publicados tratam dos principais erros detetados em cada um dos tópicos que integram a área temática correspondente.

Em termos globais, antes de 1960, os estudos realizados consistiram essencialmente em realizar a contagem do número de soluções incorretas e na análise dos tipos de erros detetados para proceder a uma classificação, tentando dessa maneira analisar como surgem e fazer inferências sobre que fatores, especialmente de conteúdo matemático, poderiam estar na sua origem (Socas, 2007; Del Puerto, Minnard & Seminara, 2006; Rico, 1998). De acordo com Rico (1998), uma das metas usuais destes estudos consistiu em preparar listagens de exercícios em que a quantidade de prática proposta para cada tarefa ou algoritmo numérico refletisse a sua dificuldade intrínseca, medida pelo rendimento obtido em populações padrão. Nesse sentido, os investigadores trabalhavam com um grande número de crianças às quais passavam provas, ordenando posteriormente os exercícios de acordo com a percentagem de alunos que os realizavam mal. Ou seja, tratava-se de tentativas empíricas para simplesmente descobrir quais os problemas aritméticos que eram intrinsecamente fáceis e quais eram difíceis. Portanto, o

autor constata que a influência da metodologia psicométrica e das avaliações em relação à norma estão muito presentes em todos estes trabalhos iniciais sobre o estudo de erros.

Em sentido similar, Cury (1994) refere que tanto sob a perspetiva do behaviorismo, como sob a do processamento da informação, a análise de erros em Matemática restringiu-se a uma função diagnóstica e reparadora na medida em que os pesquisadores se preocupavam em classificar os erros para permitir aos professores uma modificação nas estratégias de ensino, tornando-as mais eficazes. Na opinião da autora, parecia vigorar a visão absolutista da Matemática, no momento em que os pesquisadores e professores procuravam fornecer aos alunos meios de alcançarem a verdade absoluta, evitando os erros.

Nas décadas de 80 e 90, sob a influência do paradigma construtivista, começou a ser feita uma nova abordagem na análise de erros. Baseando-se nas ideias de Piaget, Vygotsky, Kuhn, Lakatos, Papert e outros, surgiram autores que abandonaram certas limitações do behaviorismo e do processamento da informação, usando os erros para explorar o funcionamento da mente, aproveitando-os como elementos fundamentais para o desenvolvimento da disciplina ou avançando na compreensão de linguagens de programação e do próprio conteúdo estudado (Cury, 2004). Como refere Socas (2007), tomou-se consciência de que o erro é algo normal no processo de ensino-aprendizagem, o que pressupõe pesquisar sobre os erros não apenas através de questionários gerais mas aprofundar o processo de construção dos objetos matemáticos por parte dos alunos como recurso para saber em que é que estão a pensar.

Astolfi (1999) reagrupa os diferentes estatutos que pode ter o erro segundo os vários modelos pedagógicos (Tabela 4).

Tabela 4 – Estatutos do erro de acordo com vários modelos pedagógicos (Astolfi, 1999, p. 21)

	Falta	Falha de programa	Obstáculo
Estatuto do erro	Nega-se o erro, "falha", "disparate"		O erro positivo (postulado de sentido)
Origem do erro	Responsabilidade do aluno, que deveria impedi-lo	Defeito da programação	Dificuldade objetiva na apropriação do conteúdo ensinado
Modo de o tratar	Avaliação *a posteriori* para o castigar	Tratamento *a priori* para o prevenir	Trabalho *in loco* para o tratar
Modelo pedagógico de referência	Modelo Transmissivo	Modelo Condutista	Modelo Construtivista

Segundo Astolfi (1999), nos modelos construtivistas, os erros não se consideram faltas condenáveis nem falhas de programa lamentáveis, são sintomas interessantes dos obstáculos

com que se enfrenta o pensamento dos alunos: "'Os vossos erros interessam-me', parece pensar o professor, já que estão no mesmo centro do processo de aprendizagem que se quer conseguir e indicam os processos concetuais que devem obter-se" (p. 14).

Como refere Cury (1995), "a perspetiva construtivista apresenta uma visão mais aberta, aceitando os erros cometidos pelos alunos e até estimulando a sua ocorrência, considerando as possibilidades que se abrem para o sujeito construtor do conhecimento" (p. 44).

Sintetizando, pode-se constatar que as investigações em análise de erros podem ser agrupadas em torno de dois objetivos principais: a superação do erro através da sua eliminação, ou através da exploração das suas potencialidades. Na primeira categoria encontram-se as investigações realizadas sob a influência do behaviorismo e do processamento da informação; na segunda aparecem os trabalhos de carácter construtivista. Porém, esta divisão não é estanque, podendo encontrar-se as duas visões em alguns trabalhos (Pochulu, 2004, Cury, 1994). Como afirma Cury (1994), o que distingue realmente as pesquisas é a ênfase na eliminação ou na exploração do erro e as consequências do seu estudo para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Como constata Pinto (2000), considerar o erro como estratégia didática construtiva levanta a hipótese de que a passagem de uma visão condutivista, em que o erro é avaliado como produto, para uma visão construtivista, em que o erro é avaliado como parte do processo, apresenta-se como uma possibilidade para a mudança do ensino.

De acordo com Cury (1994), Borasi, incorporando ideias de Kuhn, Lakatos, Piaget e Vergnaud, propõe novos rumos para a análise de erros, fugindo de certas limitações do behaviorismo e do processamento da informação. Considera também que a ideia de Borasi sobre o papel construtivo do erro é diferente da dos piagetianos pois, mesmo enfatizando a exploração e a descoberta como objetivos das pesquisas, considera o erro como instrumento didático, enquanto que para Piaget e colaboradores o papel do erro é de construtor do conhecimento.

Como se pode constatar, Borasi (1996) apresenta uma ampla abordagem, com diferentes alternativas, sobre a possibilidade da utilização de análise de erros no processo de ensino e aprendizagem (Tabela 5). A combinação de todas as categorias permite, pelo menos, nove usos dos erros como trampolim para a investigação.

Tabela 5 – Taxonomia de uso de erros como trampolim para a investigação (Borasi, 1996, p.279)

Situação de aprendizagem	Nível do discurso matemático		
	Execução de uma tarefa matemática específica	Compreensão de alguns conteúdos técnico-matemáticos	Compreensão da natureza da matemática
Remediação	Análise de erros reconhecidos para compreender o que deu errado e corrigi-lo, de modo a executar a tarefa com sucesso. (Remediação/tarefas)	Análise de erros reconhecidos para esclarecer incompreensões de conteúdo técnico-matemático. (Remediação/conteúdos)	Análise de erros reconhecidos para esclarecer mal-entendidos a respeito da natureza da matemática ou assuntos matemáticos gerais. (Remediação/matemática)
Descoberta	Os erros e os resultados incertos são usados construtivamente na resolução de um novo problema ou tarefa; monitorizando o trabalho de alguém para identificar erros potenciais. (Descoberta/tarefa)	Os erros e os resultados incertos são usados construtivamente para aprender sobre novos conceitos, regras, tópicos, etc. (Descoberta/conteúdo)	Os erros e resultados incertos são usados construtivamente para aprender sobre a natureza da matemática ou sobre alguns assuntos matemáticos gerais. (Descoberta/matemática)
Investigação	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem gerar investigações em novas direções e a realização de novas tarefas matemáticas. (Investigação/tarefa)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspetivas e *insights* sobre um conceito, regra ou tópico, etc., não contemplado no plano de aula original. (Investigação/conteúdo)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a perspetivas não esperadas e *insights* sobre a natureza da matemática ou sobre assuntos matemáticos gerais. (Investigação/matemática)

Afirmando que investigações realizadas nos últimos anos mostram a importância de centrar a atenção não somente nas respostas corretas dos estudantes mas também nos erros que cometem, Socas (2007) considera Borasi uma das autoras para quem a interpretação exclusiva do erro como instrumento de diagnóstico e de correção explora só parcialmente o seu potencial educativo. Na sua perspetiva, deve ampliar-se este ponto de vista de modo a considerar os erros como instrumento de motivação e como ponto de partida para explorações matemáticas criativas, que implicam atividades valiosas de delineação e resolução de problemas, destacando, ainda, que os erros podem proporcionar uma compreensão mais completa e profunda do conteúdo matemático e da natureza da matemática.

2.4.3.3. Importância do erro para o ensino e a aprendizagem

As pesquisas envolvendo a análise de erros podem ajudar os professores a reconhecer a natureza dos erros cometidos pelos estudantes em cada conteúdo a ser desenvolvido e as suas possíveis causas. Este conhecimento pode gerar uma reflexão sobre a própria prática, conduzir à procura de estratégias de ensino da matemática mais adequadas às necessidades dos alunos, insistindo nos aspetos que geram mais dificuldades, e contribuir para preparar tarefas mais eficientes para a correção dos erros (Ferreira & Brumatti, 2009; Socas, 2000, 2007).

Como comentam Godino et al. (2003):

> todas as teorias sobre o ensino-aprendizagem de matemática coincidem na necessidade de identificar os erros dos alunos no processo de aprendizagem, determinar as suas causas e organizar o ensino tendo em conta essa informação. O professor deve ser sensível às ideias prévias dos alunos e utilizar as técnicas do conflito cognitivo para promover o progresso na aprendizagem. (p. 69)

Para De la Torre (1993), a utilização do erro deve ser instrumental, não como técnica precisa nem como norma-padrão, mas como procedimento ou conjunto de procedimentos que ajudam a organizar sequencialmente as ações de forma a alcançar determinados fins educativos. Considera que "uma adequada conceptualização e utilização do erro no ensino pode converter-se numa estratégia ao serviço da inovação educativa" (p.18).

Porém, isso nem sempre é uma realidade, pois como referem Quinzá-Torroja, Escalona e Macías (2004), mencionando o ensino tradicional no contexto universitário, nos primeiros anos da universidade, os erros detetam-se principalmente nos exames e remedeiam-se mandando os alunos ao exame seguinte. Esta utilização do erro como critério classificador, a mais erros corresponde menor aprendizagem e, por conseguinte, pior classificação, é também mencionada por De la Torre (1993), como exemplo do que considera ser prática corrente tanto no ensino superior como não superior. Desta forma, o erro é o critério base para a avaliação das aprendizagens e raramente se questiona como é que o aluno chegou a tais resultados. Assim, considerando a vantagem de uma pedagogia do erro em contraposição com uma pedagogia do êxito, que, na sua opinião, foi uma conceção assumida tanto pelos teóricos da educação como pelos profissionais de ensino, desde as origens da pedagogia, De la Torre apresenta um confronto entre as duas perspetivas (Tabela 6).

Tabela 6 – Contraposição entre a pedagogia do êxito e a pedagogia do erro (De la Torre, 1993, pp.99-100)

Pedagogia do êxito	Pedagogia do erro
Considerações sobre o erro	
Desvio da norma. Comportamento inadaptado Elemento regressivo prejudicial na aprendizagem Caráter sancionável, punitivo Evitar o erro Indicador de resultados não conseguidos	Desajuste entre o esperado e obtido Elemento construtivo, inovador Condição concomitante de aprendizagem Aceitação e análise do erro. Diagnóstico Sintoma de processos de aprendizagem
Abordagem concetual	
Atende a resultados Predomínio do critério de eficácia Relação entre objetivo-produtos Origina uma pedagogia por objetivos Investigação de eficácia no ensino aprendizagem	Atenção preferente a processos Predomínio do critério de eficiência Relação entre processo, meios e produto Dá origem a pedagogia do processo Investigação dos processos cognitivos
Papel do professor	
Corrige e sanciona erros, equívocos Planifica e projeta ações que assegurem êxito Dirige as aprendizagens Atitude rígida a respeito do plano inicial Avalia sobretudo os conhecimentos	Diagnóstico através de erros Apresenta situações de aprendizagem Orienta e guia as aprendizagens Atitude flexível a respeito do plano inicial Avalia também processos, estratégias, etc.
Papel do aluno	
Atitude recetiva a respeito do plano de atividades Predomina o princípio de individualização Aprendizagem centrada em objetivos de conhecimento	Atitude participativa no plano de atividades Integra individualização e socialização Maior amplitude de aprendizagem
Metodologia	
Exercitação e aplicação	Heurística e aprendizagem autónoma
Avaliação	
Centrada na avaliação de objetivos concetuais Instrumentos objetivos e objetiváveis	Avaliação de processos, meios e resultados Instrumentos objetivos e subjetivos

Na perspetiva de De la Torre (1993), o primeiro passo para o professor passar de uma pedagogia do êxito a uma pedagogia do erro é tomar consciência de que o erro tem o seu lado positivo, ou seja, o professor aceita o erro como algo natural ao processo, examina o porquê do mesmo e utiliza-o como estratégia para novas aprendizagens.

Da mesma forma, Pinto (2000) advoga que embora em geral o professor tenda a orientar a sua ação sobre o erro por uma perspetiva essencialmente empirista, isto é, sobretudo corretiva, esta pode ser substituída por uma postura construtiva, em que se dá mais importância aos procedimentos do que aos resultados, em que o erro passa a ser problematizado sob várias dimensões e focalizado na sua génese. Na sua perspetiva, o erro, quando submetido à reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transformar-se numa estratégia didática inovadora, pela possibilidade que oferece ao professor de ampliar os seus saberes e, com isso, melhorar o seu ensino.

Para De la Torre (1993), podem-se considerar três fases no tratamento didático dos erros: deteção, identificação e correção. Nesta última fase, De la Torre (1993) e Pochulu (2004) alertam para o facto de que a correção do professor por si só não introduz mudanças se o sujeito não reflete sobre elas, isto é, a ajuda para superar um erro, que consiste em contrapor o argumento insuficiente do aluno com a verdade do professor e exigir a sua imediata substituição, sem nenhuma outra justificação, é inadequada (Quinzá-Torroja et al., 2004).

Desta forma, a preocupação que deve guiar o professor não é tanto corrigir o erro, mas conseguir que o aluno tome consciência dos seus erros e seja capaz de os corrigir (De la Torre, 1993, Ramos & Curi, 2014), devendo-se assim usar na sala de aula estratégias que propiciem a discussão sobre os erros, levando os alunos a participar ativamente na sua superação (Cury, 2004; Engler et al., 2004; Pochulu, 2004). Como referem Engler et al. (2004), o processo de ensino e aprendizagem deverá incluir critérios de diagnóstico, correção e superação mediante atividades que promovam o exercício da crítica sobre as próprias produções. O docente deve fazer com que o aluno enfrente a contradição proveniente do erro e logre eliminar os seus falsos conceitos para que estes não voltem a aparecer, processo que gera na aula discussões e debates que são de um grande valor para o aluno aprender a partir das suas próprias interações. Em sentido similar, Pochulu (2004) considera que "dar lugar ao erro na aula é trabalhá-lo, descobrindo as hipóteses falsas que levaram a produzi-lo, buscando os caminhos possíveis até redescobrir os conceitos válidos e matematicamente aceites, comparando versões corretas com erróneas, etc." (p. 12).

Cury (2004) considera que é possível fazer uso da análise de erros em quaisquer circunstâncias, desde que sejam respeitadas as seguintes premissas básicas: devolver ao aluno a análise feita e discutir com ele os resultados; planear estratégias para trabalhar com conteúdos em que há maior incidência de erros, propondo questões que envolvam o interesse dos alunos; aproveitar recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de formas variadas; para cada questão proposta ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem no grupo de alunos para aproveitar todas as oportunidades de os fazer refletir sobre o seu próprio pensamento.

Também De la Torre (1993), com base em diversos autores, propõe algumas estratégias que podem ser utilizadas na correção e retificação de erros:

– Ficha de registo de erros: Observação e registo sistemático dos erros que os alunos cometem com mais frequência;

– Corrigir ou melhorar exercícios: Introduzir em tarefas os erros que sejam mais frequentes, pedindo aos alunos que individualmente, ou em grupo, os localizem, identifiquem e corrijam;
– Segunda oportunidade: Dar aos alunos uma nova oportunidade para apresentar o seu trabalho para uma nova avaliação;
– Correção cooperativa: Propor a correção dos exercícios pelos pares/grupos;
– Revisão de exercícios mal resolvidos;
– Caça ao erro do professor: Colocar diferentes tipos de erros nas suas explicações que têm de ser descobertos pelos alunos;
– Autorreflexão e metacognição: Introduzir a autorreflexão como estratégia de análise do próprio fracasso.

Para Del Puerto, Minnard e Seminara (2006) a implementação de questionários para a deteção de erros, e posterior classificação dos mesmos com base em alguma das categorias vigentes, é uma metodologia que permite obter uma "radiografia" do estado de conhecimento, constituindo uma valiosa ajuda na hora de reorganizar a prática pedagógica. Nesse sentido, consideram que a análise dos erros cometidos pelos alunos na sua aprendizagem providencia uma informação rica acerca de como se constrói o conhecimento matemático, constituindo, ainda, uma excelente ferramenta para pôr em relevo o estado do conhecimento dos alunos, imprescindível na hora de realimentar o processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista melhorar os resultados. Na sua opinião, os erros cometidos pelos alunos, a regularidade com que estes aparecem e os padrões comuns a que obedecem são alguns dos elementos que permitem fazer inferências acerca dos processos mentais dos alunos e das estruturas em que se vão organizando os conhecimentos.

Para Funes, Macias e Jiménez (2002), a maioria das vezes, não se faz um uso adequado da informação que os erros trazem acerca do conhecimento dos alunos. Tendo em atenção que alguns conhecimentos prévios podem funcionar como um obstáculo para a aquisição de novo conhecimento, estes autores consideram que é preciso que o processo de construção do conhecimento inclua o diagnóstico e a superação dos erros, devendo o ensino partir de uma conceção do conhecimento que considere o erro como parte constitutiva deste. Uma vez detetados e categorizados os erros, é interessante focar-se no seu estudo para usá-los em benefício da aprendizagem significativa dos alunos. Consideram também que os erros podem ser úteis como motivação, valorizados como tentativas criativas para gerar situações de

metacognição onde os alunos analisem os seus próprios processos de aprendizagem. Com base num seminário, realizado com 20 professores de diferentes níveis de ensino e de distintos países, que constou da leitura de textos e deteção de erros a partir de uma seleção de provas de avaliação de alunos de diferentes idades, seguida da discussão sobre as ações em contexto de ensino para superação dos erros analisados e as suas causas, os autores elaboraram as seguintes reflexões que emergiram dessa experiência, tendo em vista a melhoria da prática docente: considerar o currículo um espaço para indagar sobre a gestão da simbologia específica da temática tratada; realizar a devolução aos alunos dos trabalhos com erros e gerar discussões de grupo sobre o assunto; propor situações onde seja possível detetar e diagnosticar dificuldades que conduzem ao erro; estimular entre os alunos o trabalho cooperativo, aberto ao diálogo e à crítica; agrupar os alunos segundo as categorias dos erros que se manifestem, para promoção da consciencialização e reflexão; aplicar estímulos e jogos didáticos que ajudem a superar os erros muito arreigados nos alunos e favorecer reuniões entre docentes para procurar e analisar estratégias que favoreçam a verdadeira aprendizagem.

2.4.3.4. O erro e a avaliação

Como "a avaliação não constitui uma componente isolada e dissociada de todo o processo educativo, mas acima de tudo ela é uma parte inseparável de um complexo sistema onde o fim último do ato educativo é a aprendizagem" (Santos, 2008, p. 12), é importante para a superação de erros e dificuldades que as metodologias de avaliação assumam também uma vertente formativa.

Na opinião de Pinto (2000), numa avaliação em que o foco da atenção está voltado para o acerto da resposta, provavelmente o erro não será valorizado pelo professor como instrumento de reflexão. Porém, numa conceção de avaliação mais preocupada com a formação do aluno em termos de aprendizagens significativas e duradouras, o erro deixa de ser apenas uma resposta a ser analisada, passando a ser uma questão desafiadora que o aluno coloca ao professor e, por conseguinte, um elemento que desencadeia um amplo questionamento do ensino. Assim, para o autor, neste paradigma de avaliação formativa, em vez de uma avaliação apenas de resultados que enfatiza os fracassos e a ausência de aprendizagem pelo aluno, o erro dirige o olhar do professor para o contexto e para o processo de construção do conhecimento, avaliando-se assim menos para punir e mais para formar.

Na perspetiva da avaliação formativa, o erro assume um valor de grande importância pois é através dele que se pode aceder aos processos mentais do aluno, compreender como pensa e

que relações estão a ser estabelecidas num dado momento. Assume-se, assim, uma nova postura face ao erro, isto é, de uma função contabilística (quantos mais erros, maior a sanção) passa a ser visto como uma fonte poderosa de informação, quer para o professor, quer para o próprio aluno. Contudo, para que a aprendizagem aconteça e seja duradoura no tempo, é essencial que os erros cometidos sejam reconhecidos e compreendidos não só pelo professor, mas fundamentalmente pelo aluno, cabendo a este último desejavelmente a sua correção (Santos, 2008).

Del Puerto e Seminara (2011), partindo da ideia de que a avaliação através do estudo dos erros que cometem os alunos permite pôr em evidência os conflitos cognitivos ainda não resolvidos, e que revelam uma aprendizagem incompleta, realizaram uma experiência de devolução da avaliação com o intuito de promover a mudança concetual nos alunos através do trabalho sobre as suas avaliações. A experiência foi realizada com 38 alunos da Faculdade Regional de Buenos Aires que frequentavam a disciplina de AL. Depois de o tema retas e planos ter sido abordado, foi pedido aos alunos que resolvessem, individualmente, dois exercícios sobre retas no espaço, em que tinham de fundamentar todas as respostas e apresentar um desenvolvimento completo dos exercícios, com explicações sobre a respetiva resolução. Foram explicados previamente os critérios que se iriam utilizar na correção, inclusivamente a importância da redação das justificações e notações. Os docentes corrigiram o trabalho, marcando os erros sem clarificar a forma correta de resolução, e incluíram chamadas ao lado da página onde indicaram possíveis erros de redação, de notação ou falhas nas justificações. Esta primeira entrega teve uma classificação entre um e 10 e foi pedido aos alunos que, para a aula seguinte, voltassem a pensar nos exercícios e os refizessem em casa, modificando o que tinham escrito tendo em conta as observações feitas pelo docente. Considerando a importância que tem a aprendizagem e trabalho cooperativo, assim como as suas vantagens motivacionais, comunicou-se aos alunos que poderiam consultar os colegas, mas deveriam demonstrar a sua contribuição pessoal no trabalho, realizando uma entrega individual do mesmo. Esta segunda avaliação teve uma nota entre um e 10, que fez média com a primeira avaliação. Os trabalhos foram posteriormente corrigidos no quadro com os alunos. Após esta experiência, os autores aplicaram aos alunos um questionário, que já tinham aplicado em 2009, num contexto de avaliação tradicional. Enquanto que nesse contexto tinham concluído que a mudança concetual relativa ao tema tinha sido alcançada por poucos alunos, no caso da experiência descrita obtiveram melhores resultados, pois houve mais alunos que deram respostas corretas e a

ausência de resposta também foi menor. Concluíram também que a devolução da avaliação teve uma influência positiva no processo de mudança concetual, facto que consideram dever-se à orientação dos alunos em função dos seus próprios erros. Na sua perspetiva, o aluno, ao refazer o seu exame a partir dos comentários do docente sobre os seus acertos, erros e dificuldades, tem ainda oportunidade de continuar a reorganizar os conteúdos no seu esquema cognitivo, fazendo uso dessa valiosa informação que põe em evidência os eventuais conflitos que podem produzir-se entre os conhecimentos anteriores e os novos.

Assim, advogando a vantagem deste tipo de abordagem, Del Puerto e Seminara (2011) argumentam que, como na avaliação sumativa a devolução do exame é um momento de grande importância na aprendizagem do aluno, se estes recebem apenas os comentários da avaliação na perspetiva de resultado final do seu trabalho, ficará justificada a sua qualificação, mas ter-se-á perdido a oportunidade de utilizar uma informação valiosíssima para realimentar os processos de ensino e aprendizagem. "Com a devolução da avaliação, o aluno pode ainda reorganizar a informação, alcançar uma maior integração dos conceitos e procedimentos, e acercar-se da mudança concetual desejável, se esta ainda não se tiver produzido" (p.175). Para além disso, consideram que, para o docente, a informação que provém da avaliação constitui, sem dúvida, um *feedback* imprescindível na hora de reorientar e melhorar as suas estratégias de ensino.

Cherepinsky (2011) manifesta a mesma opinião, pois considera que, como os estudantes raramente usam os exames já classificados para estudar, um método alternativo de classificação, baseado na autorreflexão, encoraja-os a usar os seus erros como um recurso de aprendizagem. Partindo deste pressuposto, o autor implementou esta metodologia de avaliação com alunos do ensino superior no âmbito de unidades curriculares de cálculo. No método de classificação que aplicou devolveu o teste com cada questão marcada como certa ou errada. Assim, os alunos para cada questão errada deveriam identificar o erro, identificar a sua gravidade e descrever a forma de o corrigir. Quanto à classificação, por cada erro corretamente identificado, classificado e corrigido o aluno tinha de volta metade da pontuação perdida.

Particularmente, o autor verificou que os estudantes acreditavam ter aprendido mais a partir da autorreflexão sobre o exame do que com a classificação tradicional. Porém, os que mais valorizaram o método foram os que tiveram fraco desempenho no exame original, pois alguns dos que tinham as suas respostas quase certas consideraram que perderam muito tempo a rever as resoluções, somente para encontrar um pequeno erro, o que não compensava

os ganhos em termos de classificação, ideia que também foi retratada no estudo de De Lange (1987, cit. em Menino, 2004).

O autor afirma que o método de classificação descrito encoraja os estudantes a desenvolverem a habilidade para encontrar erros no seu próprio trabalho e a corrigi-los, sem dependerem de uma fonte externa para a análise das respostas, sendo esta uma habilidade útil em muitos contextos, independentemente do curso frequentado.

Zerr e Zerr (2011) realizaram também um estudo com alunos universitários envolvendo a revisão de provas pelos pares, uma abordagem em que a característica chave era enfatizar o papel do estudante como revisor. Especificamente, foram fornecidos aos estudantes problemas – "problema de revisão por pares" – no âmbito dos usuais trabalhos de casa, em que se solicitava a prova de uma afirmação matemática. Na data limite de entrega, tinham de levar uma cópia para o professor e outra para a turma. A cópia entregue ao professor era classificada como se fosse qualquer outro problema de trabalho de casa, enquanto a outra era dada a um colega da turma para revisão. Desta forma, cada estudante servia de revisor da prova do mesmo problema que tinha acabado de provar. Para facilitar o processo de revisão, e assegurar, na medida do possível, que cada estudante produzisse uma revisão útil, eram-lhes fornecidas algumas questões orientadoras. Como este tipo de trabalho envolve estudantes que estão a ler o trabalho de outros, uma das características mais proeminentes é o facto de eles estarem expostos a um número significativo de provas potencialmente incorretas. No fim do processo, cada estudante teria o que poderia constituir três diferentes momentos de prova do problema dado: a sua prova original; o *feedback* que recebeu do revisor da prova e o *feedback* implícito na solução do problema que ele recebeu quando foi revisor. Assim, cada aluno, para além de poder usar o *feedback* recebido pelos pares para melhorar as suas provas, podia também usufruir da reflexão e aprendizagem realizada quando ele próprio reviu a prova de outro colega.

Porém, os autores alertam que a resposta à tarefa em tempo útil e o esforço que os alunos estão dispostos a dispensar para a realizar são fatores que podem comprometer o processo.

Experiências semelhantes de devolução da avaliação têm sido realizadas a nível dos ensinos básico e secundário (e.g., Leal, 1992; Martins, Saporiti, Neves, Bastos & Trindade, 2003; Menino, 2004; Nunes, 2005; Gomes, 2013), seguindo as orientações do que se designa por teste em duas fases, que, de acordo com Santos (2005), foi um instrumento de avaliação

introduzido em Portugal no âmbito do projeto Mat789. Mais propriamente, segundo Santos (2004):

> Entende-se por teste em duas fases um teste que é realizado em duas etapas. Uma primeira, na sala de aula em tempo limitado e uma segunda fora da sala de aula. Entre a primeira e a segunda fase, o professor comenta as respostas dadas pelo aluno na primeira fase e entrega-a ao aluno para que este possa dispor desta informação no trabalho a realizar na segunda fase. (p. 14)

O teste em duas fases inclui perguntas de resposta curta ou fechada e perguntas de desenvolvimento ou abertas. Estas últimas envolvem, normalmente, justificações e podem ser respondidas usando diferentes tipos de estratégias (Leal, 1992, Menino, 2004). A classificação dos testes é feita tendo em conta as duas produções do aluno, sendo a segunda tão importante como a primeira, tendo o teste apenas uma nota referente a todo o processo (Martins et al., 2003). Ou seja, o resultado obtido é uma classificação, mas que terá de ter em consideração o desempenho nas duas fases e a evolução evidenciada pelo aluno. Assim, embora se esteja perante uma avaliação sumativa, todo o processo tem um cunho muito profundo de avaliação formativa (Borralho, Lucena & Brito, 2015).

Na segunda fase, os alunos aprofundam as suas respostas, tendo a oportunidade de, autonomamente, voltar a refletir sobre as questões colocadas e, como esta fase é realizada fora da sala de aula, os alunos têm a possibilidade de consultar livros e de interagir com colegas e professores, dispondo de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as suas respostas iniciais (Martins et al., 2003, Menino, 2004). Estes comentários, pelo facto de serem de natureza mais personalizada, promovem também uma maior proximidade entre professor e aluno (Martins et al., 2013; Boralho et al., 2015).

Corroborando as reflexões já citadas para o ensino superior, também as professoras do estudo de Menino (2004), que se realizou no 2.º ciclo do ensino básico, comentando a aplicação do teste realizada em duas fases, colocaram a ênfase no papel que é dado ao erro. Na sua perspetiva, este passa a ser encarado de uma forma positiva, como uma possibilidade de realizar novas aprendizagens, na medida em que é proposto aos alunos que de forma crítica e ativa encontrem estratégias que permitam superar as dificuldades sentidas, sendo a tónica colocada no desenvolvimento de capacidades de autorregulação. Os professores do estudo de Leal (1992) evidenciaram mais algumas vantagens desse instrumento de avaliação: minimizar o *stress* dos alunos; contribuir para que estes adquiram uma atitude diferente face à matemática e aumentem a sua autoconfiança; permitir ao professor, por um lado, avaliar o que o aluno é

capaz de fazer sozinho, em tempo limitado, e, por outro, avaliar o empenhamento e perseverança deste em melhorar o seu produto.

No entanto, também ficou ciente que nem sempre é fácil que os alunos compreendam e aceitem de forma imediata o processo associado ao teste em duas fases (Gomes, 2013; Leal, 1992, Menino, 2004). Na opinião de Gomes (2013), os alunos têm alguma dificuldade em adaptar-se a uma forma diferente de avaliação porque ainda estão ligados à quantificação dos seus conhecimentos. Porém, para Menino (2004), depois de algumas utilizações, os alunos compreenderão os seus objetivos e as suas potencialidades.

Do ponto de vista dos professores, um dos aspetos que pode constituir uma desvantagem do processo de revisão descrito é o facto de se gastar mais tempo na avaliação, implicando também uma maior quantidade de trabalho para o professor, situação que é referenciada por vários autores (e.g., Cherepinsky, 2011; Gomes, 2013; Leal, 1992; Menino, 2004). No entanto, como afirma Cherepinsky (2011), "é um investimento de tempo que vale a pena para o professor e para o estudante" (p. 300).

CAPÍTULO III

MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, para além de se fundamentarem as opções metodológicas, identificam-se os participantes na investigação e o contexto em que foi realizado o estudo e descrevem-se os métodos de recolha de informação.

3.1. Opções metodológicas

Uma boa parte das três últimas décadas do século passado foi caracterizada pelo debate epistemológico entre os paradigmas qualitativo e quantitativo (Coutinho, 2011). Tradicionalmente considerava-se natural a opção por um destes paradigmas de investigação, e, como mencionam Reichardt e Cook (1997), a adesão a esse paradigma implicava automaticamente o emprego dos métodos de investigação a ele associados, ou seja, que se usassem apenas técnicas e recursos correspondentes a metodologias quantitativas ou qualitativas, respetivamente. No entanto, cada vez mais a possibilidade de articular métodos quantitativos e qualitativos em trabalhos de investigação, visando satisfazer o mais eficazmente possível os seus propósitos, tem sido defendida por diversos autores. Como refere Sousa (2005), referindo-se às investigações em educação mais recentes, os investigadores parecem ter ultrapassado a questão qualitativa-quantitativa, "colocando-se numa posição eclética para procurar retirar a maior informação possível do contexto da investigação, procedendo ao cruzamento de diferentes metodologias, independentemente dos seus pressupostos epistemológicos" (p. 33). Por exemplo, Bryman (1992), partindo do pressuposto que as vertentes qualitativa e quantitativa se devem tornar independentes das suas origens epistemológicas, afirma que é a interligação das virtudes e defeitos de cada método que proporciona uma fundamentação lógica para integrar as duas vertentes de investigação.

Num sentido similar, Reichardt e Cook (1997) consideram que "tratar como incompatíveis os dois tipos de métodos estimula obviamente os investigadores a empregar somente um método quando a combinação dos dois seria mais adequada para as necessidades da investigação" (p. 30). Assim, estes autores alegam que um investigador não tem que aderir cegamente a um dos paradigmas, mas pode eleger uma mistura de atributos de ambos para melhor atender às exigências do problema de investigação. Na sua perspetiva, podem existir

vantagens na utilização conjunta de métodos quantitativos e qualitativos na medida em que possibilitam atender aos múltiplos propósitos que pode ter uma investigação, podem ajudar a alcançar perceções que nenhum dos dois conseguiria por si só e contribuir para corrigir possíveis enviesamentos, pela consequente triangulação dos dados. Analogamente, Fernandes (1991) refere que "há vantagens e desvantagens em cada um dos paradigmas de investigação e que dados de natureza quantitativa e qualitativa podem ser recolhidos, com claras vantagens, no processo de resolução do mesmo problema" (p. 66). No mesmo sentido, Günther (2006) afirma que "enquanto participante do processo de construção de conhecimento, idealmente, o pesquisador não deveria escolher entre um método ou outro, mas utilizar as várias abordagens, qualitativas e quantitativas que se adequam à sua questão de pesquisa. Do ponto de vista prático existem razões de ordens diversas que podem induzir um pesquisador a escolher uma abordagem, ou outra" (p. 207).

Para além da triangulação, Heyvaert, Deleye, Saenen, Van Dooren e Onghena (2017) enumeram mais quatro propósitos dos métodos de investigação mistos: complementaridade; expansão; desenvolvimento e iniciação. Na triangulação procura-se convergência, confirmação e/ou correspondência dos resultados dos diferentes métodos usados no estudo; na complementaridade procura-se elaboração, aprimoramento, ilustração e/ou esclarecimento dos resultados de um método a partir dos resultados do outro método; na expansão procura-se ampliar a amplitude e o alcance da inquirição usando diferentes métodos em diferentes componentes do estudo; no desenvolvimento procura-se usar os resultados de um método para ajudar a desenvolver ou informar o outro método; e na iniciação procura-se a descoberta de paradoxos e contradições, novas perspetivas e/ou reformulação de perguntas ou resultados de um método com perguntas ou resultados do outro método. No presente estudo enfatizam-se, sobretudo, os propósitos de complementaridade, expansão e desenvolvimento.

Arnal, Rincón e Latorre (1992) recomendam igualmente que a natureza da área problemática e os objetivos da investigação devem determinar a escolha do método a adotar.

Seguindo as perspetivas supracitadas, optou-se no estudo realizado por uma metodologia em que se articularam os métodos quantitativos e qualitativos de acordo com os dados que se pretendiam recolher em cada uma das partes do estudo, tendo como orientação a procura de respostas para as questões de investigação estabelecidas.

Assim, como "em investigação quantitativa é normalmente possível obter dados sobre um conjunto alargado de pessoas relativos a um certo número de questões pré-determinadas"

(Fernandes, 1991, p. 66), esta metodologia foi predominante na 1.ª fase da primeira parte do estudo, usando-se métodos quantitativos com características descritivas pois como se pretendia indagar *Quais os erros cometidos e as dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?*", quantificou-se o tipo de erros e a predominância de dificuldades em testes realizados pelos alunos. No entanto, como o objetivo principal era fazer um levantamento do tipo de dificuldades e dos processos de raciocínio que conduzem a resoluções incorretas, esta parte do estudo também teve um forte cunho qualitativo.

De igual forma, usaram-se métodos quantitativos na 2.ª fase da primeira parte do estudo para dar resposta à questão: *Quais as características do ensino de álgebra linear no ensino superior politécnico segundo os professores?*, em que se aplicou um questionário aos professores do ensino superior politécnico que tinham lecionado a unidade curricular (UC) de Álgebra Linear (AL). Neste caso, optou-se por uma abordagem no sentido descritivo e não orientada por hipóteses.

A opção por um questionário escrito, em vez de outro método de recolha de dados, como, por exemplo, entrevistas, assentou nas seguintes razões: o número de professores a incluir no estudo ser em número considerável e estar num ambiente geográfico bastante amplo, não sendo viável para a investigadora percorrer o país para encontrar os professores disponíveis a ser entrevistados. Acresce também o facto de, para algumas respostas, os professores necessitarem de consultar alguma documentação, como os programas das unidades curriculares (UCs), tarefa que poderia ser mais facilitada se dispusessem de liberdade para responder ao questionário em vários momentos ou no momento e local onde tivessem a documentação disponível.

Para além disso, a opção pelo questionário *online* facilitou a sua submissão após o preenchimento, permitiu à investigadora ir renovando o pedido de colaboração, para os não respondentes, e teve a vantagem de os dados já serem recolhidos num formato computadorizado que facilita o seu tratamento.

Na segunda parte do estudo, em que se pretendia responder à questão: *Qual a influência de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades dos alunos e na utilização de software sobre a aprendizagem dos estudantes em álgebra linear?*, embora se tenham usado pontualmente métodos quantitativos, para tratar os dados relativos ao questionário passado aos alunos para avaliar a experiência de ensino realizada, optou-se por uma vertente predominantemente qualitativa. Esta escolha teve presente o facto desta parte do estudo se relacionar mais diretamente com a prática de ensino, pois, como diz Fernandes (1991), a

investigação qualitativa permite identificar variáveis relevantes para o estudo do ensino e da aprendizagem que não são facilmente detetadas através da utilização dos métodos típicos da investigação quantitativa, fornecendo assim informação acerca do ensino e da aprendizagem que de outra forma não se pode obter. Além disso, nesta fase predominam as características da investigação qualitativa referidas por Bogdan e Biklen (1994), isto é, a fonte direta de dados é o ambiente natural, o investigador é o instrumento principal de recolha de dados, é uma investigação descritiva, há mais interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos, os dados são analisados de forma indutiva e o significado é de importância vital.

Incluída na abordagem qualitativa, seguiu-se ainda uma metodologia de estudo de caso, pois o estudo de caso é a metodologia de investigação ideal para compreender e interpretar observações do fenómeno educacional no seu contexto natural (Merriam, 1988). Além disso, esta metodologia é especialmente adequada quando se quer responder às questões 'como?' e 'porquê?', quando se investiga um fenómeno atual no seu contexto real e em que o investigador tem muito pouco ou nenhum controlo sobre os acontecimentos (Yin, 1989). Dado que o estudo de caso é adequado quando o fenómeno em estudo não se pode isolar do seu contexto, permanece assim insubstituível nos domínios em que a experimentação, envolvendo controlo experimental, não pode ter lugar ou em que é limitado o seu campo de aplicação (Matos & Carreira, 1994a). De notar que, de acordo com Sousa (2005), em investigação em educação um caso poderá ser "uma nova matéria curricular, um acontecimento, um grupo-turma de alunos, um professor ou qualquer outra situação única que necessita de ser estudada como tal no seio do contexto em que sucede ou sucedeu" (p. 139).

Ponte (1994, p. 11) afirma que "os estudos de caso usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria", tendo como objetivo fundamental proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico. Nesta perspetiva, os estudos de caso são, segundo Merriam (1988), particularísticos, já que se focalizam numa situação, acontecimento, programa ou fenómeno particulares; o caso é importante pelo que revela acerca do fenómeno e daquilo que ele representa. Merriam (1988) menciona ainda mais três características que considera essenciais num estudo de caso qualitativo. Assim, considera que os estudos de caso são: descritivos – porque o produto final é uma descrição rica e completa do fenómeno que está a ser estudado; heurísticos – na medida em que "iluminam a compreensão do leitor acerca do fenómeno em estudo" (p. 13) e indutivos – dado que a maior parte destes estudos tem como

base o raciocínio indutivo. Generalizações, conceitos ou hipóteses emergem da análise dos dados, dados esses que estão presos ao contexto.

A investigadora desempenhou simultaneamente o papel de investigadora e professora, tanto na 1ª fase da primeira parte do estudo, com algumas turmas, como na segunda. Este duplo papel na opinião de Bogdan e Biklen (1994) pode ser potenciador da melhoria da eficácia de ensino pois "os professores, ao agirem como investigadores, não só desempenham os seus deveres, mas também se observam a si próprios, dão um passo atrás e distanciam-se dos conflitos imediatos, tornam-se capazes de ganhar uma visão mais ampla do que se está a passar" (p. 286). Para além disso, esse estatuto facilitou a introdução no campo e o acesso aos participantes, permitindo, como era essencial na segunda parte do estudo, uma interação com estes durante um período de tempo relativamente longo. Assim, neste caso, a investigadora assumiu o papel de observadora participante pois, como referem Gómez, Flores e Jiménez (1999), houve uma "implicação do observador nos acontecimentos e fenómenos que está a observar" (p. 165). De acordo com estes autores, este tipo de observação tem a vantagem de favorecer "a aproximação do investigador às experiências em tempo real em que vivem pessoas e instituições, o investigador não necessita que ninguém lhe conte como sucederam as coisas ou como alguém disse que sucederam, ele estava ali e formava parte daquilo" (p. 166). Porém, o duplo papel de professora e investigadora também é gerador de alguns conflitos, pois, enquanto professora, existe uma preocupação com as aprendizagens dos alunos e com a lecionação dos conteúdos programáticos no tempo de aula disponível, e, enquanto investigadora, a preocupação principal é tentar obter dados para responder às questões de investigação, aspetos que num ambiente real de sala de aula nem sempre são convergentes. Como referem Matos e Carreira (1994b), ser simultaneamente observador e participante é uma situação ambígua, difícil de sustentar e muitas vezes geradora de ansiedade para o próprio investigador na medida em que ao mesmo tempo que deseja participar no contexto em estudo tenta manter-se suficientemente desligado para o observar e analisar.

3.2. Contexto do estudo

Na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do instituto politécnico onde foi desenvolvida grande parte da investigação, existe, no 1.º ano de todos os cursos de licenciatura, uma UC que integra conteúdos de AL. Nos cursos de Engenharia Biomédica, Mecânica, Química e Biológica, Eletrotécnica, Civil e Informática, essa UC é denominada Álgebra Linear e Geometria Analítica

(ALGA) e tem um programa comum. Esta disciplina, com 6 *European Credits Tranfer System* (ECTS), é lecionada no 1.º semestre letivo do 1.º ano, tem um total de 60 horas teórico-práticas de contacto e 162 horas totais de trabalho, com uma carga horária letiva de quatro horas semanais. Quando há um número de alunos considerável no curso, duas horas são lecionadas para toda a turma, revestindo uma dimensão mais teórica e em que predomina a exposição dos conteúdos, e as outras duas horas são de caráter prático, sendo a turma dividida em grupos mais pequenos, predominando a resolução de exercícios, que, na maioria das vezes, são resolvidos pelo professor. Esta metodologia prevaleceu no ano letivo 2011/2012, ano em que foi realizada a 1.ª fase da primeira parte do estudo.

No entanto, quando o número de alunos do curso é reduzido e há apenas uma turma, ambas as aulas assumem um caráter teórico-prático. Esta situação verificou-se em 2013/2014, o ano letivo em que foi realizada a segunda parte do estudo.

Relativamente aos conteúdos programáticos, os temas gerais são, pela ordem em que normalmente são abordados, Números complexos, Matrizes e determinantes, Sistemas de equações lineares, Geometria analítica no plano e no espaço, Espaços vetoriais, Aplicações lineares e Valores e vetores próprios (ver versão detalhada dos conteúdos programáticos no Anexo I).

3.3. Aspetos metodológicos inerentes à 1.ª fase da primeira parte do estudo

3.3.1. Participantes no estudo

A 1.ª fase da primeira parte do estudo envolveu trezentos e dez alunos da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de um instituto politécnico, inscritos em várias licenciaturas de engenharia (Tabela 7), que se encontravam a frequentar a UC de ALGA no ano letivo 2011/2012.

Tabela 7 – Distribuição dos alunos por curso

Curso	N.º de alunos
Eng. Biomédica	74
Eng. Civil	41
Eng. Eletrotécnica	41
Eng. Informática	59
Eng. Mecânica	75
Eng. Química e Biológica	20
Total	310

A maioria dos alunos é do sexo masculino (71%), as suas idades variam entre 17 e 50 anos, sendo a idade mais frequente 19 anos e a média e o desvio-padrão das idades 22,5 e 2,87 anos, respetivamente.

Quanto à forma de entrada no ensino superior, a maioria dos alunos (68,1%) entrou pelo Contingente Geral, 30% entrou por Concursos Especiais, como titulares de um diploma de especialização tecnológica (28,1%) ou como titulares das provas especialmente adequadas a avaliar a capacidade dos maiores de 23 anos para acesso ao ensino superior (1,9%), e os restantes 1,9% ao abrigo de um Protocolo entre Cabo Verde e a instituição de acolhimento.

No ensino secundário, a maioria dos alunos frequentou Matemática A (72,3%), tendo 25,5% frequentado Matemática B ou Matemática do ensino profissional e 2,2% a Matemática do seu país de origem, isto é, de Cabo Verde ou Brasil.

Apenas 3,5% dos alunos têm o estatuto de trabalhador-estudante. A maioria dos alunos escolheu o curso que frequenta em 1.ª (71,9%) ou 2ª opção (12,3%). Pouco mais de metade, 51,9%, entraram em 2011/2012 no curso que frequentam, 22,9% entraram no ano letivo anterior e os restantes 25,2% no ano letivo 2009/2010 ou antes. Porém, apenas 50,3% estão a frequentar a UC pela primeira vez, pois há alunos que, embora tenham entrado no curso em 2011/2012, já a tinham frequentado noutra instituição ou noutro curso do instituto politécnico em causa.

3.3.2. Métodos de recolha de informação

No ano letivo 2011/2012, em que se fez a recolha dos dados relativos à 1.ª fase da primeira parte do estudo, a UC foi lecionada por três professoras, uma das quais a autora deste estudo e responsável pela docência em alguns dos cursos. Como a preparação da UC foi efetuada em equipa, todos os alunos tiveram acesso ao mesmo material de apoio às aulas, constituído por apontamentos teóricos (tipo sebenta) e fichas de trabalho que incluíam exercícios e problemas.

Em termos da avaliação das aprendizagens, por acordo entre os alunos e as docentes, foi decidido que, para além dos exames das épocas normal e de recurso, ao longo do semestre se fariam pequenos trabalhos durante as aulas, consistindo na resolução de algumas questões sobre os temas lecionados. Assim, foram propostos três trabalhos: o primeiro sobre Números complexos e Matrizes e determinantes; o segundo sobre Sistemas de equações lineares e o terceiro sobre Espaços vetoriais e Aplicações lineares. Os alunos foram previamente avisados da

realização dos trabalhos e, aquando da sua resolução, já tinham sido lecionados os conteúdos relativos aos temas. Em termos da classificação final dos estudantes na UC, a cotação dos três trabalhos foi de um valor a acrescentar à nota final do exame, sendo este igualmente cotado para 20 valores. Também se informaram os alunos de que, na correção dos trabalhos, se valorizaria o seu empenho na resolução das questões e não apenas o resultado final.

Cada um dos trabalhos foi realizado nos últimos 30 minutos de uma das aulas teóricas, embora na prática este tempo tivesse sido um pouco ampliado em função de se ter permitido que os alunos, usassem também alguns minutos do intervalo, caso necessitassem. Os alunos podiam consultar os apontamentos das aulas ou outra documentação que considerassem pertinente.

Foram utilizadas versões diferentes para cada trabalho pelo facto de nem sempre estes serem realizados no mesmo dia para todos os cursos e porque, em algumas turmas, o número de alunos era considerável, sendo importante garantir que a resolução fosse realizada individualmente. De entre as várias versões, cada aluno respondeu apenas a uma.

Alguns alunos não compareceram a todos os trabalhos pelo que o número de alunos afeto a cada um deles é variável, sendo a principal razão a diminuição da assiduidade dos alunos às aulas à medida que o semestre avança, ocorrência já habitual em outros anos. Para atenuar este problema e incentivar os alunos a quem o primeiro trabalho não correu bem a não desistirem, tomou-se a decisão de contar apenas para a avaliação os dois melhores trabalhos. Contudo, esta medida não teve o impacto desejado, pois houve um decréscimo significativo do número de participantes, já que no primeiro trabalho participaram 300 alunos, no segundo 242 e no terceiro 177. De notar também que houve 10 alunos que, embora não tivessem comparecido ao primeiro trabalho, realizaram o segundo.

Na presente investigação estudam-se apenas as resoluções dos alunos, em termos de respostas e raciocínios, das questões dos trabalhos que se reportam aos temas de Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares (Anexo III), que são aqueles que se enquadram na temática do estudo. Atendendo ao curso, a distribuição dos alunos em cada um desses trabalhos é a que se apresenta na Tabela 8.

Tabela 8 – Distribuição dos alunos em cada trabalho atendendo ao curso

Curso	Matrizes e determinantes	Sistemas de equações lineares
Eng. Biomédica	73	56
Eng. Civil	40	24
Eng. Eletrotécnica	41	36
Eng. Informática	53	46
Eng. Mecânica	74	62
Eng. Química e Biológica	19	18
Total	300	242

3.3.3. Métodos de análise dos dados

Em termos de tratamento e análise das respostas dos alunos às questões dos trabalhos, começou-se por classificar as respostas com base na utilização de raciocínios válidos, raciocínios não válidos e não justifica ou não responde, calculando-se as frequências absolutas e relativas correspondentes. De seguida, no caso dos raciocínios válidos, descreve-se o tipo de resoluções efetuadas. No caso dos raciocínios não válidos, definiram-se categorias de erros, estabelecidas *a posteriori* (Gall, Gall & Borg, 2003), cuja frequência é quantificada e apresentada em tabelas de frequências absolutas e relativas. Essas categorias são descritas e apresentadas aquando da apresentação dos resultados (Capítulo IV).

3.4. Aspetos metodológicos inerentes à 2.ª fase da primeira parte do estudo

3.4.1. Participantes no estudo

Através de consulta, pela internet, das páginas referentes ao ensino superior politécnico público do país, identificaram-se as instituições que têm cursos que incluem, no seu plano de estudos, a UC de AL, de ALGA ou outra UC similar cujos conteúdos se centrem em temas de AL. Não se considerou pertinente abranger as UCs onde os temas de AL não aparentavam ser o foco principal, na medida em que o programa mencionava vários conteúdos de outros temas, por exemplo de cálculo.

Concluiu-se assim, que as instituições que interessavam seriam predominantemente Escolas Superiores de Tecnologia e/ou Gestão, Institutos Superiores de Engenharia ou Escolas Superiores de Comunicação/Turismo.

Para prosseguir na pesquisa, contactaram-se os coordenadores dos departamentos ou das áreas científicas onde essas UCs estavam afetas, no sentido de fornecerem informação sobre os professores que no ano letivo 2011/2012 lecionavam a UC de AL ou outra UC similar. Esta informação permitiu confirmar se na instituição se lecionava a UC e quais os docentes que

interessava contactar para responderem ao questionário. Nos casos em que não houve uma resposta atempada da instituição ou em que não foram indicados todos os docentes que lecionavam a disciplina, constatação feita através da página da instituição, adicionaram-se também esses endereços aos fornecidos.

Aos docentes identificados foi enviada uma mensagem, diretamente para o seu endereço eletrónico, solicitando a colaboração para responder a um questionário e enviando para esse efeito o respetivo *link* de ligação para o aplicativo *LimeSurvey*, onde aquele podia ser respondido. Foi igualmente solicitado aos docentes que, caso não lecionassem AL ou disciplina similar, comunicassem esse facto para o *email* da investigadora. Desta forma, foi possível eliminar alguns docentes da lista inicial e acrescentar outros que alguns colegas tiveram a gentileza de indicar. Após este processo, considerou-se que 97 docentes estariam nas condições pretendidas do estudo.

Sintetizando, os participantes na 2.ª fase da primeira parte do estudo foram os professores que lecionaram, pelo menos, uma UC de AL ou similar, no ano letivo de 2011/2012, no ensino superior politécnico. Os dados foram recolhidos através de um questionário que foi enviado a 97 docentes de várias instituições do país. No fim do processo, consideraram-se válidas 60 respostas.

A caracterização dos participantes é apresentada no Capítulo IV, pois os dados que a permitem realizar resultam da aplicação do questionário.

3.4.2. Métodos de recolha de informação

Apresentam-se de seguida os procedimentos efetuados.

3.4.2.1. Instrumento de recolha de dados – O questionário

O questionário (Anexo IV), intitulado "A Álgebra Linear no ensino superior politécnico", tinha como finalidade principal caraterizar o ensino de AL no ensino superior politécnico, atendendo ao ponto de vista dos professores que lecionavam a UC.

Tal como sugerem Carmo e Ferreira (1998) e Hill e Hill (2000), o questionário foi objeto de apreciação prévia por parte de três professores de instituições do ensino superior: dois professores doutorados na área de álgebra, tendo ambos já lecionado UCs de AL, um no ensino superior politécnico e outro numa universidade; e outro professor doutorado na área de educação, trabalhando também no ensino superior politécnico, e com uma larga experiência de ensino na área da didática e da educação matemática.

Assim, começou-se por solicitar a revisão do questionário a este último professor. Isso originou o acrescento de alguns itens em algumas questões e a correção de aspetos de linguagem noutros. Para além disso, gerou a subdivisão de uma das questões referentes à preparação de aulas, tendo-se optado por separar o aspeto de *com quem prepara as aulas* da *periodicidade com que são preparadas* e, na parte alusiva à implementação de aulas, as questões referentes às calculadoras e computadores foram ramificadas em dois itens: *aulas de caráter mais prático* e *aulas de caráter mais teórico*.

Na escala de tipo Likert, a adotar, a utilização de quatro níveis foi a proposta que se considerou mais apropriada. No entanto, foi sugerida a alteração das opções de resposta para *nunca ou quase nunca*, *poucas vezes*, *muitas vezes* e *sempre ou quase sempre* em vez de *nunca*, *poucas vezes*, *muitas vezes* e *sempre*, que constavam da primeira versão.

Depois de realizadas as reformulações, enviou-se a nova versão para os outros dois professores a quem se tinha pedido para fazer também a revisão do questionário.

Com base nas suas propostas, foram clarificados mais alguns aspetos de linguagem e levantou-se novamente a questão da designação dos níveis da escala de Likert. Na opinião de um dos professores, o *nunca ou quase nunca* utilizado na escala poderia levantar alguns problemas de interpretação, essencialmente nos casos em que a opção *outros* pudesse ser contemplada. Assim, depois de auscultar novamente a opinião do professor que tinha proposto a mudança, considerou-se que seria mais pertinente manter a designação da escala inicial: *nunca*, *poucas vezes*, *muitas vezes* e *sempre*.

Quanto ao tempo de resposta, os três professores consideraram que estaria dentro do considerado adequado e que o fundamental seria haver alguma predisposição para responder.

Depois da nova correção, em função das sugestões, com o intuito de testar o funcionamento do aplicativo *LimeSurvey* e a adequação da forma de armazenamento dos dados, para além da avaliação dos professores supracitados, foi ainda solicitado a mais oito docentes, de vários níveis e áreas de ensino, e a um técnico de informática que respondessem ao questionário e o submetessem. Pediu-se, ainda a estes intervenientes, que se manifestassem sobre a funcionalidade do aplicativo, que alertassem a investigadora para aspetos de linguagem que considerassem pouco claros ou confusos e que dessem a sua opinião sobre se a escala utilizada lhes suscitaria dúvidas ao responder às questões.

Quanto à escala a adotar, foi consentâneo que a utilização de quatro níveis seria pertinente, pois o obrigar a tomar uma posição faz com que se reflita mais sobre o que se quer responder e a designação dos níveis adotada também não levantou qualquer problema.

Considerando assim as opiniões e sugestões dos vários intervenientes no processo de validação deste instrumento, resultou a versão definitiva do questionário (Anexo IV). Este é constituído por 29 perguntas organizadas em seis secções: dados pessoais; UC de Álgebra Linear e o curso; preparação de aulas; implementação das aulas; avaliação das aprendizagens dos alunos e dificuldades dos alunos. A primeira secção — Dados pessoais — é constituída por seis questões, em que se pretende obter alguma caracterização, do ponto de vista pessoal e académico, dos participantes do estudo. Em face desse objetivo, os dados obtidos são incluídos no subcapítulo "Seleção e caracterização dos participantes no estudo". A segunda secção — UC de Álgebra Linear e o curso — é constituída por quatro questões, cada uma delas com vários itens, com as quais se pretende obter informações sobre a UC de AL, ou similar, dos cursos que os professores lecionaram no ano letivo 2011/2012. Nas secções seguintes, em termos globais, pretendia-se que os professores tivessem em consideração a sua experiência de lecionação da UC de AL. Assim, a terceira secção – Preparação de aulas – é constituída por oito questões, com vários itens, que visam recolher informações sobre vários aspetos ligados à preparação de aulas como, por exemplo, a periodicidade com que se preparam aulas, os recursos utilizados e a sua aplicabilidade, e o tipo de tarefas que se enfatizam. Já a quarta secção – Implementação de aulas – é constituída por seis questões, no geral com vários itens cada uma, e visa essencialmente caracterizar a frequência de utilização de determinadas metodologias de trabalho. A penúltima secção – Avaliação das aprendizagens dos alunos – é constituída por uma única questão em que se pretende averiguar as formas de avaliação que utilizam habitualmente os professores e a ponderação que lhes costumam atribuir. A última secção – Dificuldades dos alunos – é constituída por quatro questões, três delas com vários itens, em que se pretende averiguar em que temas os alunos têm mais dificuldades e a razão dessas dificuldades, e uma questão de resposta aberta em que se pretende saber a opinião dos professores sobre a forma de melhorar a aprendizagem em AL. Para além disso, no fim do questionário, há um espaço em que os professores podem acrescentar alguma observação ou esclarecimento que considerem pertinente.

3.4.2.2. Aplicação do questionário

Como já se referiu, o questionário foi elaborado no aplicativo *LimeSurvey*, pelo que foi preenchido *online*, podendo os professores guardar os dados e aceder novamente ao questionário para completar as suas respostas.

O questionário foi enviado, pela primeira vez, aos professores em 7 de maio de 2012. Esta data prendeu-se com a sua elaboração, com a necessidade de esperar pela informação de quais os professores que lecionavam a UC e com o facto de haver UCs de AL, embora em número reduzido, que funcionavam no segundo semestre, pretendendo-se que os docentes que as lecionavam também respondessem ao questionário.

Despois do envio inicial, houve várias tentativas para solicitar aos professores que colaborassem no estudo, mais precisamente foram enviados oito lembretes, tendo o último sido enviado no dia 12 de setembro de 2012. Nesta altura, deu-se por terminado o processo por se considerar que já não se obteriam mais respostas e pelo facto de se estar a iniciar um novo ano letivo, pelo que não teria sentido estar a responder a algumas das questões que abrangiam apenas a experiência do ano anterior.

3.4.3. Métodos de análise dos dados

Na análise de dados do questionário, recorreu-se ao *software* SPSS para o seu tratamento. Foram utilizadas técnicas de estatística descritiva, nomeadamente o cálculo de frequências organizadas em tabelas como forma de estruturar e sintetizar a informação.

Particularmente no caso das varáveis quantitativas, recorreu-se, quando se considerou pertinente, ao cálculo dos extremos, da moda, da média e do desvio-padrão. Para facilitar a leitura dos dados em alguns casos recorreu-se também ao agrupamento de dados em classes.

No caso das respostas abertas, definiram-se categorias e apresentaram-se os exemplos que se consideraram mais significativos.

3.5. Aspetos metodológicos inerentes à segunda parte do estudo

3.5.1. Participantes no estudo

Para participar na segunda parte do estudo, foi selecionada uma turma do 1.º ano do curso de Licenciatura em Engenharia Química e Biológica, que foi uma das turmas atribuída à professora/investigadora para a lecionação da UC de ALGA. Para além disso, a opção por este curso deveu-se ao facto de haver mais alunos a comparecer às aulas logo na primeira semana e

não ser um curso que exigisse a divisão em duas turmas. Com efeito, considerou-se que optar por um curso com divisão da turma iria dificultar a experiência na medida em que há sempre bastantes alunos com a UC em atraso, muitas vezes com sobreposição de horário com outras UCs, o que origina que não assistam às aulas sempre na mesma turma, situação que poderia inviabilizar os trabalhos em grupo que se iriam propor.

Consideraram-se como participantes na experiência os alunos que foram frequentando as aulas durante o seu decurso e que participaram pelo menos em algumas das tarefas propostas, o que perfaz no total 28 alunos. Estes eram maioritariamente do sexo feminino (78,6%) e tinham idades compreendidas entre os 18 e os 25 anos, sendo as mais frequentes 21 (21,4%) e 22 anos (21,4%). A média das idades era 21,3 e o desvio-padrão 1,66.

Dos alunos, 27 eram estudantes ordinários e apenas um estudante-trabalhador. Todos tinham entrado no ensino superior através de concursos especiais, sendo titulares de um diploma de especialização tecnológica (CET de nível 5). Um dos alunos tinha frequentado um CET de Qualidade Ambiental e todos os outros tinham frequentado um CET de Análises Químicas e Biológicas.

Os alunos entraram no curso em três anos letivos distintos, tendo apenas 10 (35,7%) entrado no ano letivo em que se realizou a experiência de ensino. Assim, mais de metade da turma (64,3%) não estava a frequentar a UC pela primeira vez. Destaca-se, ainda, que a maioria dos alunos (75%) entrou no ensino superior na primeira fase do concurso de acesso, tendo também a maioria (75%) escolhido o curso de Engenharia Química e Biológica como 1.ª opção.

Quanto à disciplina de matemática que frequentaram pela última vez antes de entrar no ensino superior, à exceção de um aluno que, porque não teve matemática no CET, frequentou a disciplina de matemática do 12.º ano, em Cabo Verde, todos os outros frequentaram a matemática do CET. A classificação final que os alunos obtiveram nessa disciplina oscilou entre 10 e 17 valores, sendo a mais frequente 10 valores (28,6%), a média das classificações 12,4 valores e o desvio-padrão 2,25.

Dos 28 alunos, 23 (82,1%) tinham concluído o 12.º ano antes de entrarem no CET e cinco (17,9%) não o concluíram.

Quanto à disciplina de Matemática que frequentaram no 12.º ano, a predominância vai para Matemática A (53,6%,), tendo um quarto dos alunos frequentado Matemática B ou Matemática do ensino profissional (EP) e os restantes (21,4%) Matemática do ensino de Cabo Verde (Tabela 9).

Houve nove alunos que não fizeram exame à disciplina de Matemática que tiveram no 12.º ano, todos os que frequentaram Matemática B ou Matemática do ensino profissional e dois dos alunos que frequentaram Matemática A (Tabela 9). Todos os alunos que frequentaram Matemática em Cabo Verde fizeram exame, mas este foi realizado no próprio país, de acordo com o programa aí em vigor.

Dos 19 alunos que fizeram exame, a nota mínima obtida foi seis e a máxima 15, sendo a nota mais frequente nove valores (5 alunos). Embora a média das classificações seja 10,0 valores, verifica-se alguma dispersão das notas pois o desvio-padrão é 2,13 valores. Dos alunos que não fizeram exame, a nota mínima é 10 e a máxima 13, sendo 12 valores a classificação mais frequente (4 alunos). Neste caso, as classificações são menos dispersas pois a média é 11,8 e o desvio-padrão 0,97.

Tabela 9 – Classificações obtidas, com ou sem exame, na disciplina que frequentaram no 12.º ano

Disciplina	Classificação com exame						Classificação sem exame				Total
	< 10	10	11	12	13	15	10	11	12	13	
Matemática A	9	2	1	–	–	1	1	1	–	–	15 (53,6%)
Matemática B ou do EP	–	–	–	–	–	–	–	1	4	2	7 (25,0%)
Matemática Cabo Verde	–	2	1	1	2	–	–	–	–	–	6 (21,4%)
Total	9	4	2	1	2	1	1	2	4	2	28 (100%)

No que diz respeito mais especificamente à UC de ALGA, 10 alunos (35,7%) nunca a tinham frequentado e 18 alunos (64,3%) já a tinham frequentado em anos anteriores.

Dos 18 alunos que estavam inscritos à UC em 2012/2013 (ano anterior à intervenção de ensino), a maioria frequentou 50% ou mais das aulas (77,8%), mas apenas sete alunos (38,9%) frequentou o número de aulas obrigatório para obter frequência à UC, isto é, pelo menos 80% das aulas.

Os 11 alunos que frequentaram menos de 80% das aulas atribuíram esse facto essencialmente a não estarem motivados para frequentar a UC (8 alunos) e a terem sobreposição de horário com outras UCs (5 alunos, Tabela 10).

Tabela 10 – Motivos apontados pelos alunos para terem frequentado menos de 80% das aulas no ano letivo 2012/2013

Motivos	N.º de alunos (%)
Tinha sobreposição de horário com outras unidades curriculares	5 (45,5%)
Tinha dificuldade em compreender os conteúdos abordados nas aulas	2 (18,2%)
Não estava motivado para frequentar a unidade curricular	8 (72,7%)
O horário das aulas não me agradava	2 (18,2%)
Outro motivo	2 (18,2%)

Já no que diz respeito à sua participação nos momentos de avaliação em 2012/2013, designadamente teste parcial, exames de época normal e de recurso, dos 18 alunos apenas dois não compareceram a qualquer dos momentos de avaliação e oito compareceram a todos.

3.5.1.1. Os grupos de trabalho e a seleção efetuada para o estudo de casos na turma

Nas aulas em que se realizou a intervenção de ensino, o trabalho em grupo foi uma das metodologias adotada, pelo que houve necessidade de dividir a turma em grupos.

Para ir de encontro aos objetivos pretendidos, nomeadamente para promover uma participação mais efetiva de todos os elementos do grupo nas tarefas propostas, considerou-se que o número de elementos deveria ser de dois a quatro, perspetivando-se grupos de três elementos como a opção mais adequada. Grupos com mais de quatro elementos poderiam tornar mais difícil o envolvimento de todos eles e o trabalho apenas em pares aumentava o número de grupos na turma, o que poderia dificultar o acompanhamento por parte da professora, e, caso um elemento faltasse, a atividade perderia o caráter de trabalho em equipa.

Os grupos foram, na generalidade, formados pelos alunos de acordo com as suas preferências, após ter sido dada a indicação de que no máximo deveriam ter três elementos. Houve, no entanto, alunos que não se integraram imediatamente num grupo, pelo que acabaram por se juntar, um pouco ao acaso, aos grupos que tinham elementos em falta. Um dos alunos, como não podia frequentar todas as aulas, optou por não se integrar em qualquer grupo.

Assim, na turma, acabaram por se formar inicialmente nove grupos, oito com três elementos e um com quatro. Este último incluía uma aluna com estatuto de trabalhador-estudante que nem sempre podia assistir às aulas. Num dos grupos de três elementos, um dos alunos deixou de comparecer às aulas da UC pelo que o grupo passou a ter apenas dois alunos.

Para efeitos do estudo consideraram-se apenas os 28 alunos que continuaram a comparecer às aulas.

Dos grupos formados foram escolhidos três para gravar as interações aquando da resolução das tarefas, tendo a sua escolha obedecido aos seguintes critérios: os alunos terem comparecido às aulas anteriores; serem grupos com composição distinta (um grupo constituído apenas por alunos que estavam a frequentar a UC pela primeira vez, outro em que todos os alunos estavam a repetir a UC e um grupo misto) e terem mostrado disponibilidade para que as interações no grupo pudessem ser áudio-gravadas.

3.5.2. A estratégia da intervenção de ensino

As aulas foram orientadas de acordo com os conteúdos programáticos da UC (Anexo I), procurando-se promover um ensino mais centrado no aluno e orientado por uma pedagogia do erro (De la Torre, 1993), isto é, tentou-se usar estratégias que propiciassem a discussão sobre os erros e levassem os alunos a participar ativamente na sua superação (Cury, 2004; Engler et al. 2004; Pochulu, 2004). Para tal, no decurso das aulas, seguiu-se, essencialmente, a sequência: breve exposição de conteúdos por parte da professora, quando pertinente, trabalho em pequeno grupo e debate na turma sobre os resultados do trabalho de grupo. Recomendou-se, ainda, sempre que se considerou pertinente, o uso do *software Microsoft Mathematics*.

De realçar que, num ambiente de aprendizagem em grupo, os alunos têm o seu espaço para pensar, discutir, errar e corrigir, superando em conjunto, e mais facilmente, as dificuldades (Henriques, 2010; Kuehn et al., 2005). O *software Microsoft Mathematics* constitui também um valioso aliado na resolução das tarefas tanto para apoio nos cálculos e representações como para identificação e correção de erros.

Procurou-se igualmente realizar uma avaliação que envolvesse as componentes diagnóstica, formativa e sumativa. Assim, para além do teste diagnóstico, os elementos de avaliação da UC foram os trabalhos de grupo, os minitestes e o exame, correspondentes, respetivamente, a 15%, 25% e 60% da classificação total. Integrando estas componentes, mas com um intuito mais formativo, embora também contribuindo para a avaliação sumativa, estavam ainda inseridas a reformulação dos trabalhos de grupo e a revisão dos minitestes, que pretendiam incentivar os alunos a identificar e tomar consciência dos seus erros e a desenvolver aptidões para os corrigir e ultrapassar as dificuldades (De la Torre, 1993; Ramos & Curi, 2014).

As aulas tinham a duração de, aproximadamente, duas horas e decorriam duas vezes por semana. Assim, os alunos tinham uma aula na segunda-feira, das 18h às 20h, e outra à quarta-feira, das 16h às 18h.

3.5.2.1. As tarefas de trabalho em grupo

Em geral, as tarefas propostas pretendiam privilegiar um trabalho mais autónomo por parte dos alunos, levando-os, sempre que possível, a interpretar conceitos e a descobrir propriedades. Contudo, algumas tarefas tinham um objetivo mais específico no âmbito da investigação, pretendendo-se que levassem à discussão de erros e dificuldades já detetados na primeira parte da investigação ou identificados na literatura. Para tal, propuseram-se questões em que estavam em causa conceitos/procedimentos geradores de erros/dificuldades, algumas das quais envolviam a análise de "resoluções" de outros alunos (participantes na primeira parte do estudo) no sentido de promover a discussão acerca dos erros cometidos e da sua correção.

Embora se tivesse a preocupação de propor algumas tarefas ligadas a contextos da semirrealidade (Skovsmose, 2000) que fossem mais significativos para os alunos, a maior parte delas envolvia contextos puramente matemáticos.

Devido ao tempo de aula disponível para a sua realização, aos conhecimentos ou dificuldades de cada grupo e à sua capacidade de trabalho, algumas tarefas foram realizadas em contexto exterior à sala de aula. Ou seja, sempre que os alunos não tivessem tempo para acabar o trabalho de grupo na aula e não se considerasse pertinente, por motivos de calendarização, continuar na aula seguinte, era proposto que concluíssem o trabalho em grupo em horário extra-aula. De qualquer forma, independentemente disso, os alunos entregavam sempre, no final de cada aula, o trabalho produzido.

3.5.2.2. O debate em grande grupo

Após a resolução das tarefas no grupo, as produções dos alunos eram sempre apresentadas à turma, realizando-se um debate em grande grupo orientado pela professora. Este tinha como intuito a análise das diferentes resoluções, no sentido de reconhecer a(s) resposta(s) correta(s), identificar e corrigir os erros cometidos, com a participação ativa dos alunos em todo o processo.

Embora o objetivo inicial fosse realizar esse debate na aula em que se realizassem as tarefas, na maior parte das vezes isso não foi possível, muitas vezes porque o ritmo de trabalho dos grupos era diferente e pretendia-se fazer a discussão apenas quando todos os grupos já tivessem refletido sobre a resolução das questões. A discussão faseada também pareceu não

resultar, na medida em que os alunos que não tinham concluído o trabalho proposto para a aula não prestavam atenção às intervenções dos colegas. Assim, sempre que não foi exequível o plano inicial, optou-se por realizar a discussão na aula imediatamente a seguir à da resolução das tarefas. Nesta situação, a professora digitalizava previamente as respostas dos grupos que correspondiam a resoluções diferenciadas e projetava-as para a turma no decurso do debate.

Sempre que o debate referente a tarefas efetuadas na quarta-feira passasse para a segunda-feira da semana seguinte, a professora colocava pequenas notas no trabalho, alertando para aspetos que teriam de repensar ou reformular e enviava a sua digitalização para o correio eletrónico que tinha sido fornecido pelos alunos. Desta forma, o que os alunos tinham feito estava mais presente aquando do debate e tinham algum tempo para repensar algumas das suas respostas. Após o debate em grande grupo, os alunos podiam ainda corrigir o trabalho efetuado e reformular o que considerassem adequado.

3.5.2.3. Os minitestes e a sua revisão

Os dois minitestes, um correspondente ao tema Matrizes e determinantes e outo relativo ao tema Sistemas de equações lineares, que são os temas em estudo nesta investigação, foram realizados no fim de cada tema, em data previamente combinada com os alunos. A revisão dos minitestes foi igualmente realizada em ambiente de sala de aula, mas numa aula extra, também em horário previamente acordado com os alunos. Antes da revisão dos minitestes, os alunos tiveram acesso ao enunciado e, no próprio dia da revisão, foi-lhes fornecida a resolução que tinham feito com notas da professora, que indicavam se a questão estava correta ou não. Caso houvesse erros na resposta, assinalava-se a localização das incorreções e convidava-se o aluno a identificar o erro, a procurar a definição ou o procedimento que seria adequado para responder à questão. Pretendia-se, deste modo, que os alunos respondessem a essas notas da professora, para além de corrigirem os erros cometidos.

A classificação final de cada miniteste resultou da soma das classificações obtidas nessas duas fases do processo. Aquando da revisão, os alunos tiveram acesso à classificação provisória que lhes fora atribuída. A avaliação quantitativa da revisão efetuada pelos alunos seguia as seguintes regras: nas questões em que cometeram erros, podiam obter até metade da pontuação perdida se os corrigissem e respondessem às notas registadas pela professora, quando tal se justificasse; por cada questão que os alunos não tinham respondido, poderiam recuperar um quarto da pontuação da pergunta se a resolvessem corretamente. Neste último

caso, pretendia-se motivar os alunos que não tinham tido um desempenho favorável a resolver igualmente as questões.

3.5.3. O *Microsoft Mathematics*

Segundo Sousa e Araújo (n.d.), o *software Microsoft Mathematics*, inicialmente com a designação *Microsoft Math*, foi lançado pela *Microsoft Corporation* em 2006 e surgiu para tentar resolver o problema de muitos alunos brasileiros que tinham dificuldades nas disciplinas que envolviam cálculo. No início, estava apenas disponível para uso de uma comunidade estudantil, chamada *Microsoft Students*, que frequentava um curso que visava formar alunos na área de tecnologias de informação para o mercado de trabalho. Depois de algumas melhorias, o programa passou a ser disponibilizado para o público em geral e a ser comercializado. Atualmente, o *software* está na versão 4.0 e passou a ser totalmente gratuito[1].

A qualidade do *Microsoft Matematics* foi galardoada com o Prémio de Excelência Tecnológica 2008, concedido pela revista Tech & Learning (Freire, 2013), e há vários autores (Assum, Guil & Mallet, 2014; Freire, 2013; Gayoso, Queiruga, Hernández & Rodríguez, 2011; Getenet & Beswick, 2014, Oktaviyanthi & Supriani, 2015; Purwanti & Pustari, 2013) que reconhecem as suas potencialidades para apoiar o ensino/aprendizagem de diversos temas de matemática.

Por exemplo, Assum, Guil e Mallet (2014), após uma análise exaustiva de algum *software*, em que o *Microsoft Mathematics* estava incluído, indicam que as suas características principais são: permitir trabalhar a álgebra, o cálculo, a aritmética e a estadística; efetuar tanto cálculos numéricos como simbólicos e ainda realizar gráficos em duas e três dimensões.

Num sentido semelhante, Getenet e Beswick (2014), baseando-se também em outros estudos, referem que o *Microsoft Mathematics* pode auxiliar os alunos a compreender uma série de conceitos matemáticos, como por exemplo: ajudar a visualizar os efeitos da mudança de parâmetros; a sua interface permite a resolução de problemas com uso de sintaxe mínima e facilita a animação; o uso do comando "animação" possibilita aulas de descoberta e oferece formas de visualização dos gráficos das famílias das funções logarítmicas.

No âmbito do ensino superior, Gayoso et al. (2011) consideram que o programa permite aos alunos familiarizar-se com os principais conceitos explicados nas disciplinas de Álgebra Linear, Cálculo e Estatística, e que as suas capacidades gráficas possibilitam que seja utilizado

[1] O *software* pode ser descarregado em http://www.microsoft.com/pt-pt/download/details.aspx?id=15702

tanto como material de apoio nas aulas como para que os alunos realizem os seus próprios cálculos e desenvolvam uma aprendizagem por descoberta.

As vantagens de utilização do Microsoft Mathematics no ensino superior são também referenciadas por Freire (2013) e Oktayviyanthi e Supriani (2015). O primeiro, com base numa investigação realizada no âmbito da disciplina de Geometria Analítica, com 31 alunos do curso de Arquitetura de Interiores da Universidade Técnica de Ambato, concluiu que quanto maior for o grau de utilização do *Microsoft Mathematics* maior será o grau de aprendizagem significativa na disciplina. De forma similar, Oktayviyanthi e Supriani (2015), num estudo com 22 alunos do 1.º ano da Universidade Serang Raya da Indonésia, no âmbito de uma disciplina de cálculo, em que num grupo o ensino se baseou no método tradicional e no outro se utilizou o *software*, constataram que este último obteve melhor desempenho na disciplina e que o programa teve um efeito positivo na confiança dos alunos em matemática. Concluem, assim, que o *Microsoft Mathematics* auxilia os alunos a adquirir uma melhor compreensão, enriquece a sua aprendizagem matemática e aumenta a motivação dos estudantes para estarem mais envolvidos nas atividades.

Focando-se em aspetos relativos à usabilidade do *Microsoft Mathematics*, Assum et al. (2014) referem ainda que a sintaxe para comunicar com o *software* é quase sempre a que se utiliza em matemática e que a interface no seu conjunto é muito similar ao processador de texto ou da folha de cálculo, também comercializadas pela mesma empresa. É, assim, um programa acessível ao utilizador, aspeto que é importante de acordo com Ortega (2002):

> O sistema de cálculo algébrico eleito não deve representar um obstáculo inicial para o aluno, quer dizer que deve ser um programa simples na sua manipulação de tal forma que possa ser facilmente utilizável pelos alunos sem necessidade de investir demasiado tempo no estudo do seu funcionamento. (p.64)

Em síntese, o *Microsoft Mathematics* foi escolhido por diversas razões, algumas de caráter mais geral e outras mais especificamente relacionadas com o tema em análise. Assim, como razões de âmbito geral podem-se apontar:

- É um *software* livre, pelo que os alunos podem facilmente ter acesso ao programa mesmo que queiram trabalhar no seu computador pessoal;
- As instruções e explicações de resolução são dadas em português;
- O programa tem uma interface simples e facilmente compreensível para o utilizador (Figura 1). Disponibiliza ainda uma calculadora, o que permite trabalhar de forma semelhante à que é utilizada quando se usa uma calculadora gráfica. Como a UC é

lecionada no 1.º ano, 1.º semestre, estes aspetos podem ser uma vantagem para os alunos que a frequentam pela primeira vez, pois permite que o aluno se centre na própria tarefa e não perca tanto tempo na aprendizagem da utilização do *software*;

– Pode ser utilizado como apoio a diversas áreas da matemática, já que permite o cálculo de derivadas e integrais, de algumas medidas estatísticas (como média, moda, mediana,...), operar com números complexos, operar com matrizes, etc.;

– Permite efetuar representações gráficas no plano e no espaço;

– Permite exportar para o *Microsoft Word* o trabalho realizado.

–

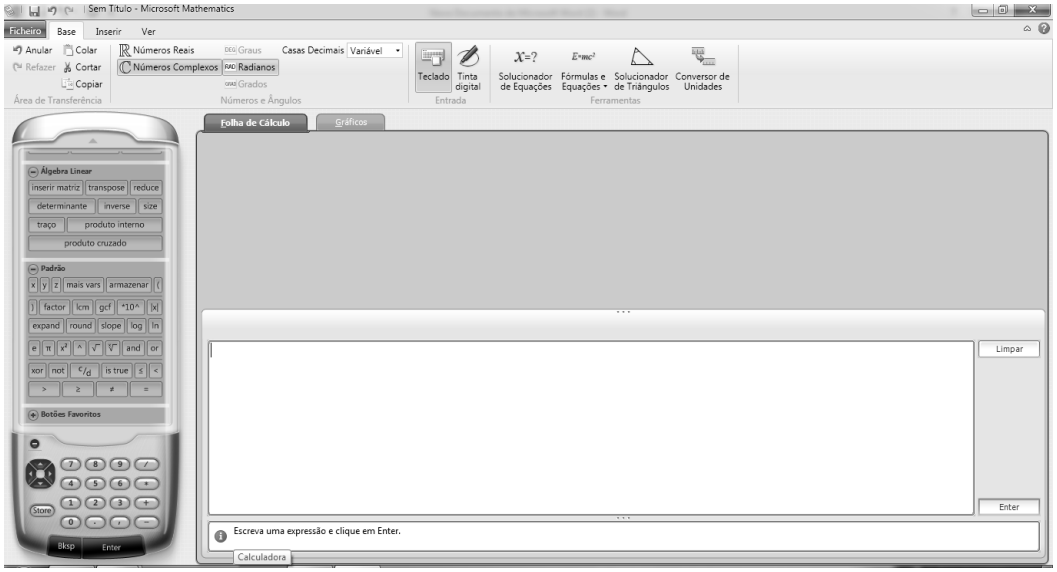


Figura 1. Interface do *software Microsoft Mathematics*.

Quanto às razões que se prendem com os próprios temas em análise no presente estudo, podem-se apontar:

– As entradas das equações, matrizes, ... podem ser efetuadas da mesma forma que se escrevem manualmente;

– Apresenta um "solucionador de equações" que permite resolver sistemas de equações lineares;

– Dá explicações quando não é possível efetuar alguma operação com matrizes. Por exemplo: quando se pede para adicionar matrizes com diferentes dimensões a mensagem obtida é "As matrizes têm de ter o mesmo tamanho para a operação pretendida";

– Apresenta explicações detalhadas sobre os métodos utilizados para efetuar alguns dos cálculos pedidos. Por exemplo, no cálculo dos determinantes pode-se escolher a explicação pelo Teorema de Laplace ou pela Regra de Sarrus;

– Permite efetuar representações gráficas, o que possibilita ao aluno relacionar a visualização da representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema;
– Permite representar graficamente equações com parâmetros, o que possibilita a visualização das mudanças em função da variação do valor do parâmetro, o que é útil na discussão de sistemas de equações lineares.

O *Microsoft Mathematics* apresenta, no entanto, também algumas desvantagens. Quando se utiliza o solucionador de equações para resolver sistemas com mais equações do que incógnitas, a resposta obtida é: "o sistema de equações atual não tem variáveis suficientes". Este aspeto pode ser ultrapassado se se acrescentar a variável "em falta" em alguma equação com coeficiente zero. Não permite dar resposta a situações que excedem um determinado número de dados, designadamente, não permite resolver analiticamente sistemas de equações com mais de seis equações e a introdução de matrizes de dimensão superior a 15×15.

3.5.4. Métodos de recolha de dados

Nesta parte do estudo utilizaram-se vários instrumentos de recolha de dados de acordo com o tipo de informação que se pretendia obter:

– Avaliação diagnóstica – teste escrito com questões consideradas propedêuticas à aprendizagem dos temas da experiência, designado por teste diagnóstico (Anexo VI).
– Aulas da UC – recolheram-se todas as produções dos alunos, as interações de três grupos foram gravadas em áudio e as discussões em grande grupo foram gravadas em vídeo. A investigadora tomou ainda algumas notas sobre as aulas, o que foi feito imediatamente após o seu término.
– Avaliação da intervenção de ensino pelos alunos – questionário escrito (Anexo IX) e entrevistas semiestruturadas (Anexo IX) a cada um dos alunos que participou na experiência.

3.5.4.1. O teste diagnóstico

O teste diagnóstico é constituído por 10 questões, algumas das quais com alíneas, que pretendem testar conhecimentos prévios dos alunos que são importantes para a compreensão dos temas Sistemas de equações lineares e Matrizes e determinantes. Para tal, as cinco primeiras questões envolvem conceitos mais diretamente relacionados com o tema Sistemas de equações lineares, três com o tema Matrizes e determinantes e as outras duas com aspetos

lógicos relativos a ambos os temas. A primeira questão, com três alíneas, envolve a resolução de sistemas e a indicação dos respetivos conjuntos-solução. Os sistemas das alíneas a) e b) são ambos possíveis, sendo o primeiro determinado e o segundo indeterminado, e o da alínea c) é um sistema impossível. Na segunda questão requer-se a tradução de um enunciado num sistema de equações lineares e na terceira trata-se de verificar se um dado valor é solução do sistema de equações lineares apresentado. Na quarta, com três alíneas, e na quinta questão pretende-se testar os conhecimentos dos alunos sobre a representação ou interpretação gráfica de sistemas.

As três questões relacionadas com o tema Matrizes e determinantes envolvem a identificação de propriedades das operações com números reais, a lei do anulamento do produto e o produto escalar de vetores.

No que concerne às duas últimas questões, relacionadas com raciocínios lógicos, na primeira pretendia-se testar se os alunos consideravam que uma afirmação se poderia considerar válida com base num exemplo concreto que a verificasse, e na segunda pretendia-se averiguar se para os alunos uma implicação e a sua recíproca, num determinado contexto, traduziam a mesma afirmação.

O teste diagnóstico foi realizado na quarta aula da UC, quando ainda não tinham sido abordados os temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, apenas tinha sido iniciado o primeiro tema do programa – Números complexos. Responderam ao teste diagnóstico 23 alunos. Foi-lhes dito que dispunham de todo o tempo da aula (2 horas) que necessitassem para responder, o que levou entre 40 a 60 minutos. Embora tenha sido dito que o teste não seria usado para os classificar, salientou-se que era importante que o realizassem individualmente para se conseguir detetar tanto os seus conhecimentos como as suas dificuldades.

A intenção era realizar o teste logo na primeira semana de aulas, mas pelo facto de ser uma UC do primeiro semestre, do primeiro ano, e haver alunos ainda a inscrever-se no curso, decidiu-se que seria melhor deixar para a segunda semana de aulas. Nem todos os alunos que frequentaram as aulas responderam ao teste por não estarem presentes nessa aula. Houve, no entanto, quatro alunos que, embora não tendo comparecido, realizaram o teste na semana seguinte no gabinete da investigadora. Porém, depois desta data não se julgou conveniente passar o teste diagnóstico porque já se tinham lecionado outros conceitos que poderiam interferir nas respostas dadas.

3.5.4.2. As gravações das aulas e as produções dos alunos

A parte das aulas em que houve discussão em grande grupo foi filmada em vídeo, tendo previamente sido solicitada aos alunos permissão para realizar essas filmagens. A câmara de vídeo estava assente num tripé e ficou localizada no fundo da sala para causar a menor interferência possível no desenvolvimento normal da aula. Com o mesmo fim, e para que os alunos se habituassem à sua presença, filmou-se antes uma das aulas que não estava integrada na investigação.

Os gravadores áudio foram utilizados para gravar as interações de três grupos previamente escolhidos. O objetivo destas gravações foi comunicado aos alunos e garantiu-se que o seu teor não teria quaisquer efeitos para a UC em termos avaliativos. Face à solicitação de colaborarem na investigação, os alunos acederam prontamente. Para promover um clima de maior à-vontade, foi-lhes dito que poderiam desligar os gravadores quando sentissem que o teor da conversa não era dirigido para a exploração das tarefas. No mesmo sentido, e para que os alunos se habituassem à presença dos gravadores, eles foram levados para algumas aulas anteriores e colocados nas mesas de trabalho de diversos alunos durante algum tempo.

Foram recolhidas todas as produções escritas realizadas pelos alunos/grupos de trabalho, nomeadamente respostas do teste diagnóstico, tarefas realizadas nos grupos e sua reformulação, minitestes e respetiva revisão. Também se solicitou que enviassem para a professora os registos do *software Microsoft Mathematics* correspondentes às operações/procedimentos que realizaram, embora, por vezes, alguns alunos se tenham esquecido ou não guardaram os ficheiros, acabando por se perder parte dessa informação. Os alunos que enviaram esses ficheiros utilizaram diretamente uma *pen drive* ou enviaram-nos para o cacifo digital da UC, existente na plataforma da instituição, que permite o depósito para cada aluno de documentação a que o professor tem acesso.

3.5.4.3. O questionário

O questionário encontra-se dividido em três partes: Informações gerais, Opinião sobre o *software Microsoft Mathematics* e Opinião sobre as aulas (Anexo IX). Na primeira parte, constituída por quatro questões, algumas das quais com alíneas, recolhem-se informações relativas ao número de vezes que frequentaram a UC, à participação dos alunos nas aulas, nos trabalhos de grupo, nos minitestes e respetiva revisão, assim como a frequência com que têm trabalhado em grupo ao longo do seu percurso escolar. Na segunda e terceira parte solicita-se aos alunos que, ao responder às questões, centrem a sua opinião sobre os temas Matrizes e

determinantes e Sistemas de equações lineares. Na segunda parte, constituída por cinco questões, pretende-se obter informações sobre as tarefas para as quais os alunos utilizaram o *software*, as dificuldades que tiveram e as vantagens e desvantagens da sua utilização. A terceira parte, constituída por 12 questões, é direcionada para a opinião sobre as aulas. Assim, pretende-se que os alunos quantifiquem as dificuldades que tiveram em alguns dos conteúdos abordados, indiquem se tiveram dificuldades nos temas e a que se deveram essas dificuldades. Para além disso, pede-se a opinião dos alunos sobre o grupo e o trabalho desenvolvido, as tarefas de grupo em que tiveram de analisar resoluções, a interação e a discussão estabelecidas no seio do grupo, o confronto com as diferentes resoluções das tarefas, o processo de reformulação dos trabalhos, a revisão dos minitestes e a importância das estratégias utilizadas para a aprendizagem dos estudantes. Nesta parte havia apenas uma questão de resposta aberta em que os alunos podiam acrescentar os comentários que considerassem pertinentes.

O questionário foi objeto de apreciação prévia por um professor doutorado na área de Educação e com uma larga experiência de ensino na área da didática e da educação matemática, que já tinha dado o seu contributo para o mesmo efeito no questionário aos professores, sendo, por isso, já conhecedor dos objetivos do estudo. Em termos gerais, essa avaliação originou o acrescento de alguns itens e a correção de aspetos de linguagem de forma a tornar as questões mais claras. Para além disso, considerou-se pertinente a sugestão de, também neste questionário, se utilizar apenas quatro opções de resposta nos itens de escala tipo Likert: *discordo totalmente*, *discordo*, *concordo* e *concordo totalmente*. Assim, eliminou-se a opção *sem opinião* por se considerar que seria importante compelir os alunos a uma tomada de posição sobre a sua concordância/discordância com as situações apresentadas e também porque teria mais sentido manter a mesma tipologia de escalas de frequência e de dificuldade usadas nos itens anteriores do questionário, que também têm quatro opções. Embora tenha sido sugerido o acréscimo de mais espaços para comentários livres dos alunos, esta ideia não foi aceite por se considerar que o questionário se poderia tornar demasiado extenso, por não ser habitual os alunos responderem a questões de resposta aberta e já existir uma questão no final do questionário que permitiria aos alunos apresentarem os comentários que considerassem pertinentes. Depois de se terem efetuado estas reformulações, solicitou-se a nove alunos de engenharia, que tinham frequentado, no primeiro semestre, a UC de ALGA, embora não exatamente nos mesmos moldes, que analisassem o questionário e lhe respondessem, mesmo não estando seguros de algumas respostas, e que indicassem se havia questões que não

previamente acordado com os alunos, e foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas na íntegra.

3.5.5. Métodos de análise dos dados

As respostas dos alunos, obtidas no teste diagnóstico, classificaram-se como *corretas*, *parcialmente corretas* e *incorretas*, construindo-se tabelas de frequências com base nessa categorização. A utilização da categoria *parcialmente correta* só foi utilizada nas questões em que se considerou pertinente, face às resoluções dos alunos. Fez-se, ainda, uma análise descritiva dos raciocínios tipo que conduziram às respostas dadas, tentando, no caso das respostas incorretas, retratar as dificuldades sentidas e os erros cometidos.

As gravações áudio das interações dos três grupos foram transcritas na íntegra. As filmagens relativas aos debates em grande grupo foram observadas, fez-se o registo e transcreveu-se o que se considerou pertinente no âmbito do estudo.

A orientação da análise das aulas relativa à intervenção de ensino seguiu a sequência em que habitualmente são abordados os conteúdos, centrando-se, essencialmente, nas questões que foram debatidas nas aulas e que se revelaram tarefas geradoras de discussão de erros e dificuldades dos alunos ou que permitiram avaliar o impacto do *Microsoft Mathematics* na sua aprendizagem. Os episódios de aula que se descrevem são complementados com excertos dos diálogos ocorridos nos três grupos ou em grande grupo e com exemplos tipo das produções dos alunos.

No caso das produções obtidas nos minitestes, analisaram-se as respostas, classificaram-se em *corretas*, *incorretas*, *parcialmente corretas* e *não responde* e determinaram-se as frequências relativas afetas a cada tipo de resposta. Confrontaram-se depois esses dados com o desempenho alcançado com a revisão dos minitestes. Utilizaram-se, ainda, as produções dos alunos para exemplificar alguns erros cometidos e retratar as mudanças de raciocínio aquando da revisão.

Na análise de dados do questionário passado aos alunos, para avaliar a intervenção de ensino, recorreu-se ao *software SPSS* para o seu tratamento. Foram utilizadas técnicas de estatística descritiva, nomeadamente o cálculo de frequências organizadas em tabelas como forma de estruturar e sintetizar a informação.

No caso das respostas abertas, definiram-se categorias *a posteriori*, de acordo com as respostas dadas.

As entrevistas realizadas aos alunos foram transcritas na íntegra e, na sua análise, seguiram-se essencialmente as categorias previamente definidas no questionário, recorrendo-se às respostas dos alunos para justificar/complementar a informação obtida através daquele. As informações suplementares ao questionário, que resultaram de questões que se considerou conveniente contemplar no guião das entrevistas ou que foram emergindo aquando da sua realização, foram integradas com a análise das respostas ao questionário de forma descritiva ou, nos casos que se considerou pertinente, definindo-se categorias *a posteriori* e organizando a informação em tabelas de frequências.

3.6. Síntese

Atendendo aos objetivos que norteiam a investigação, que implicaram a subdivisão do estudo em duas partes, tendo a primeira duas fases, seguiu-se uma metodologia que envolveu a recolha de dados de natureza quantitativa e qualitativa.

Na 1.ª fase da primeira parte, cujo objetivo era identificar as dificuldades dos estudantes do ensino superior em conteúdos de AL, recolheram-se dados sobre questões a que os alunos responderam no âmbito da avaliação da UC de ALGA que estavam a frequentar.

Na 2.ª fase da primeira

Mathematics sempre que se considerou adequado. Todos os documentos produzidos pelos alunos foram recolhidos, gravaram-se em áudio as interações de três grupos e em vídeo a discussão em grande grupo, assim como se registaram notas de aula. Para além disso, pediu-se aos alunos para avaliarem a intervenção de ensino através da aplicação de um questionário e realizaram-se entrevistas a todos os alunos para complementar os dados do questionário.

Utilizaram-se, assim, diferentes métodos de recolha de dados: questionários, documentos escritos, gravações áudio e vídeo de aulas, entrevistas semiestruturadas e notas de campo.

Apresenta-se, de seguida, na Tabela 11, de forma sintética, as técnicas e procedimentos de recolha de dados em cada um das partes do estudo.

Tabela 11 — Síntese dos métodos de recolha de dados

Parte do estudo		Métodos de recolha de dados	
1.ª Parte – 2011/2012	1.ª Fase: Dificuldades dos alunos em temas de AL	Trabalhos – Resposta a questões sobre Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares	Registo escrito
	2.ª Fase: Perspetivas dos professores	Questionário sobre o ensino de AL	Registo escrito
2.ª Parte – 2013/2014 Intervenção de ensino sobre Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares		Teste diagnóstico	Registo escrito
		Produções dos alunos – resposta às tarefas e respetivas reformulações	Registo escrito
		Minitestes e respetiva revisão	Registo escrito
		Observação das interações de três grupos de trabalho	Gravadas em áudio e transcritas
		Observação do debate em grande grupo	Gravadas em vídeo e transcrita a parte áudio
		Questionário	Registo escrito
		Entrevistas	Gravadas em áudio e transcritas
		Observação participante das aulas	Registo escrito

CAPÍTULO IV

DIFICULDADES DOS ALUNOS EM ÁLGEBRA LINEAR E PERSPETIVAS DOS PROFESSORES SOBRE O SEU ENSINO

Neste capítulo, apresentam-se os resultados relativos à primeira parte do estudo, que se desenvolveu em duas fases. Com esse intuito, o primeiro subcapítulo reporta-se à primeira fase, o segundo subcapítulo à segunda fase e, no terceiro, efetua-se uma síntese dos resultados apresentados nos dois subcapítulos anteriores.

4.1. Dificuldades dos alunos em Álgebra Linear

Nesta secção, descreve-se a 1.ª fase da primeira parte do estudo que se desenvolveu no sentido de dar resposta à seguinte questão de investigação: *Quais os erros cometidos e as dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?*

Como já foi referido no Capítulo III – Método de investigação, participaram nesta fase do estudo 310 alunos dos cursos de engenharia que frequentavam, no ano letivo 2011/2012, a unidade curricular (UC) de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA). Os alunos realizaram dois trabalhos, um com questões sobre Matrizes e determinantes e outro sobre Sistemas de equações lineares, tendo as suas respostas e raciocínios sido objeto de análise.

As respostas dos alunos começam por ser classificadas atendendo ao facto de envolverem raciocínios válidos, não válidos e não terem respondido ou não apresentarem qualquer justificação para a resposta dada. De seguida, para além de se exemplificarem raciocínios que conduziram à resposta correta, agrupam-se os raciocínios não válidos em categorias de acordo com o tipo de erros cometidos.

4.1.1. Matrizes e determinantes – Análise das respostas e raciocínios dos alunos

O trabalho sobre o tema Matrizes e determinantes foi realizado por 300 alunos e constava de 12 versões diferentes. Embora algumas questões das versões fossem praticamente idênticas, trocando-se apenas a posição das letras que designavam as matrizes, utilizando letras diferentes ou, por vezes, trocando a ordem em que apareciam as operações, outras diferiam no tipo de operações ou na forma da própria questão (Anexo III). Cada aluno respondeu apenas a três das questões sobre matrizes.

Assim, para facilitar o tratamento dos dados, em vez de se analisarem as respostas separadamente de cada uma das questões de cada versão, agruparam-se as questões das várias versões tendo em conta a similaridade do tipo de pergunta efetuada, tendo-se formado cinco grupos de questões. A ordem das questões pode ser diferente nas diversas versões, pelo que a sequência que aqui se apresenta não corresponde necessariamente à ordem pela qual as perguntas foram colocadas. Assim, por exemplo, a designação utilizada "questão 1" pretende apenas identificar o tipo de questão que se vai analisar, que abarca as questões similares das várias versões do trabalho. Em quatro (questões 1, 3, 4 e 5) das cinco questões, as versões integradas em cada uma foram agrupadas em diferentes tipos — tipo X, tipo Y,... — pois, embora se possam resolver utilizando o mesmo tipo de raciocínio, há uma diferenciação no enunciado que justifica esta referência em separado. Portanto, para se identificar a versão que o aluno resolveu, utiliza-se primeiro a referência ao tipo de questão e depois a versão correspondente. Por exemplo, a designação "Versão XA" significa que o aluno respondeu à Versão A que está incluída na questão do tipo X.

4.1.1.1. Questão 1

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas foram:

- Questão do tipo X — Se B é uma matriz do tipo $m \times n$ e $A + (BC)$ está definida, então A e C são matrizes com a mesma dimensão;
- Questão do tipo Y — Se $A(BA)$ está definida, então A e B são matrizes quadradas;
- Questão do tipo Z — Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada, então A é uma matriz quadrada.

A questão do tipo X engloba as versões A, D, E, H, I e K; a do Tipo Y engloba as versões B, F e J e a do tipo Z as versões C, G e L (Anexo III). Nas versões do tipo Y e do tipo Z, há apenas troca da posição das letras que designam as matrizes ou utilização de letras diferentes. Nas versões do tipo X, para além deste aspeto, aparece ainda a situação de troca de operações, isto é, por exemplo $(CA) + B$ em vez de $A + (BC)$.

A questão 1 foi apresentada aos 300 alunos, o que significa que todos os alunos que realizaram o trabalho sobre o tema Matrizes e determinantes responderam ou à questão do tipo X, ou à do tipo Y ou à do tipo Z. A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos encontra-se na Tabela 12.

Tabela 12 — Raciocínios dos alunos na questão 1 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios	Tipo de questão			Total
	X	Y	Z	
Válidos (respostas corretas)	48	8	10	66 (22,0%)
Não válidos	60	51	38	149 (49,7%)
Sem justificação ou não responde	45	22	18	85 (28,3%)
Total	153	81	66	300 (100%)

Os alunos que apresentaram raciocínios válidos indicaram um exemplo concreto de matrizes que contrariava a afirmação feita, efetuando ou não as operações envolvidas, explicitaram a possível dimensão das matrizes ou combinaram ambos os processos para justificarem a sua resposta. Ou seja, estes alunos recorreram a um exemplo ou a uma classe de exemplos para justificar a sua resposta. Por exemplo, o aluno A36 apresenta um exemplo concreto para cada uma das matrizes e efetua as respetivas operações (Figura 2).



Figura 2. Apresentação de um contraexemplo (A36, Versão XA).

Já os alunos A81 e A207 optaram por fazer apenas referência à dimensão de cada uma das matrizes, tendo em atenção a possibilidade de realizar as operações envolvidas (Figura 3 e Figura 4).

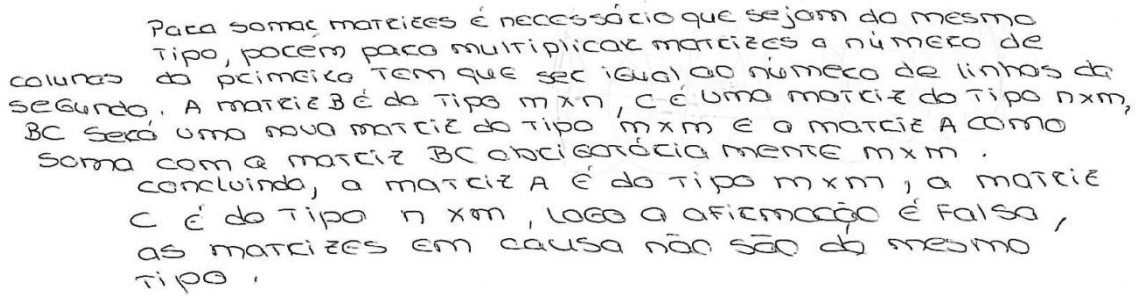


Figura 3. Referência à possível dimensão das matrizes (A81, Versão XA).

Embora se considerassem corretas respostas deste tipo, o comentário "as matrizes em causa não são do mesmo tipo" pode não ser verdadeiro se $m = n$, pois neste caso as matrizes terão a mesma dimensão, aspeto que não ocorreu a este aluno e à maior parte dos alunos que não concretizaram a dimensão das matrizes em termos numéricos. Esta situação já não ocorre nas justificações do tipo seguinte:

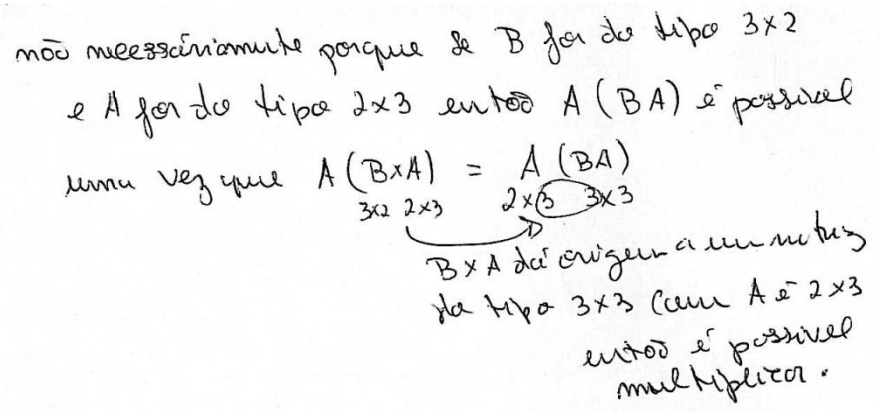


Figura 4. Referência à possível dimensão das matrizes (A207, Versão YB).

O aluno A103 (Figura 5) combina os dois processos na sua justificação, já que recorre a um exemplo concreto para as matrizes envolvidas na multiplicação, efetuando o produto, mas utiliza a referência à dimensão das matrizes para continuar a justificação relativa à possibilidade de adição.

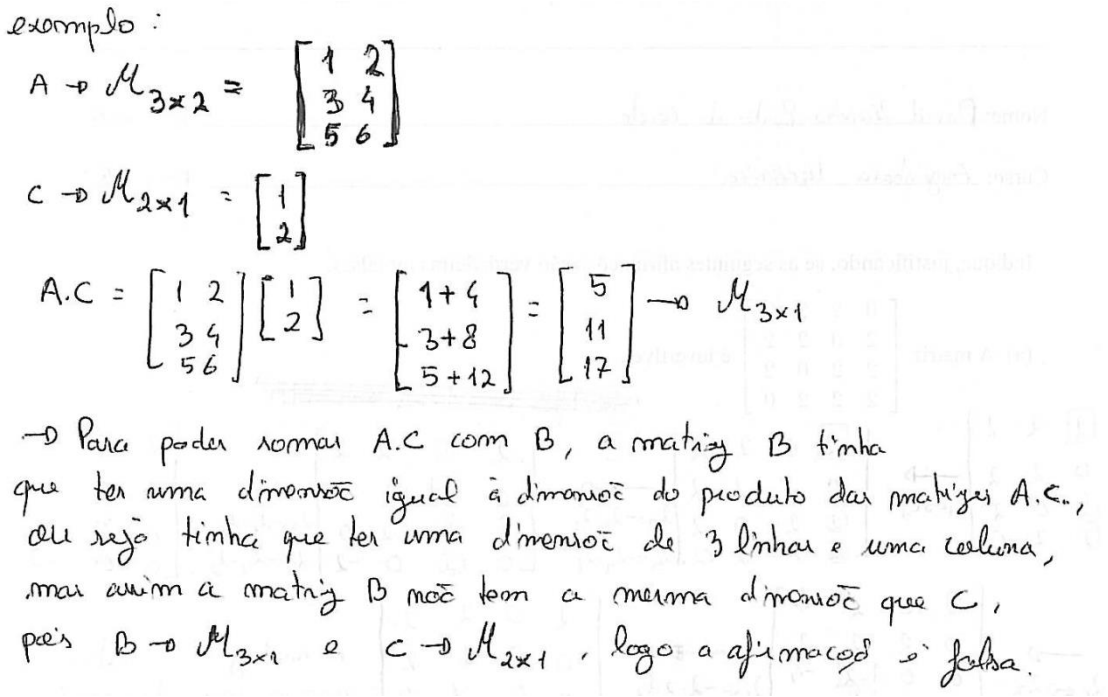


Figura 5. Justificação com base num exemplo e na dimensão (A103, Versão XI).

Na categoria *sem justificação ou não responde*, para além da ausência de resposta (40 alunos), integraram-se as respostas dos alunos que classificaram a afirmação como verdadeira ou falsa (45 alunos), sem indicar qualquer justificação ou reescrevendo a afirmação dada ou a sua negação.

Analisadas as 149 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 13, com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 13 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 1 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios não válidos	Tipo de questão			Total
	X	Y	Z	
Dificuldades nas operações com matrizes	26	15	7	48 (32,2%)
Exemplo que verifica a afirmação	9	19	11	39 (26,2%)
Análise incompleta	4	11	5	20 (13,4%)
Recurso a propriedades não válidas	6	2	8	16 (10,7%)
Incompreensão de conceitos	1	3	5	9 (6,1%)
Recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação	8	—	1	9 (6,1%)
Prova da falsidade do recíproco	5	—	1	6 (4,0%)
Outros	1	1	—	2 (1,3%)

No raciocínio *dificuldades nas operações com matrizes* incluíram-se as resoluções dos alunos que revelaram dificuldades em trabalhar as operações de multiplicação (47 alunos) ou de adição (1 aluno) no universo das matrizes.

As dificuldades na adição são praticamente inexistentes, havendo apenas um aluno que não reconhece as condições em que é possível efetuar a adição de matrizes na medida em que argumenta: "Falsa. Para haver uma adição não é preciso ter a mesma dimensão" (A260, Versão XA).

No caso das dificuldades na multiplicação, surgiram distintas situações:

- Apresentação de um exemplo concreto, mas multiplicando de forma incorreta as matrizes (11 alunos);
- Dedução incorreta da dimensão da matriz produto, nas justificações baseadas na dimensão das matrizes (13 alunos);
- Dificuldade no reconhecimento das condições em que é possível efetuar a multiplicação (23 alunos).

Mais concretamente, na situação de multiplicação incorreta há alunos que aplicam falsas regras, multiplicando as entradas correspondentes das matrizes, ou seja, utilizando o Produto de Hadamard (Figura 6) ou cometendo outros erros (Figura 7).

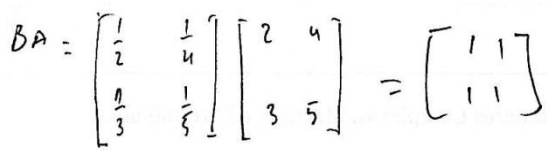


Figura 6. Multiplicação das entradas homólogas (A82, Versão YB).

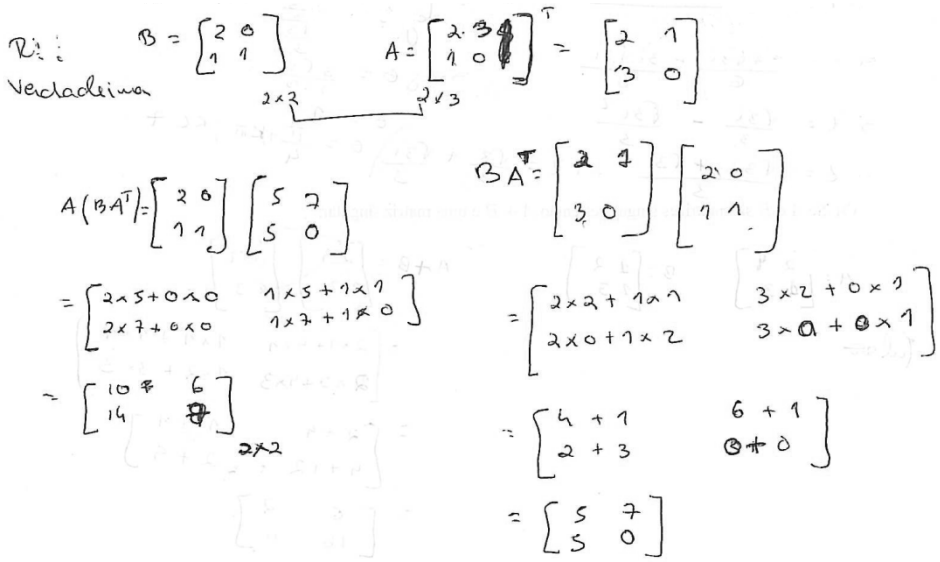


Figura 7. Aplicação de regras falsas da multiplicação (A8, Versão ZC).

Neste caso, o aluno A8 também considerou que BA^T seria o mesmo que A^TB, pois trocou a ordem das matrizes no seu cálculo.

No que se refere à dedução incorreta da dimensão da matriz produto, pode-se observar, na Figura 8, a resposta do aluno A250, que considera a dimensão da matriz produto como o número de colunas da primeira matriz pelo número de linhas da segunda, que é o tipo de erro mais frequente neste contexto.

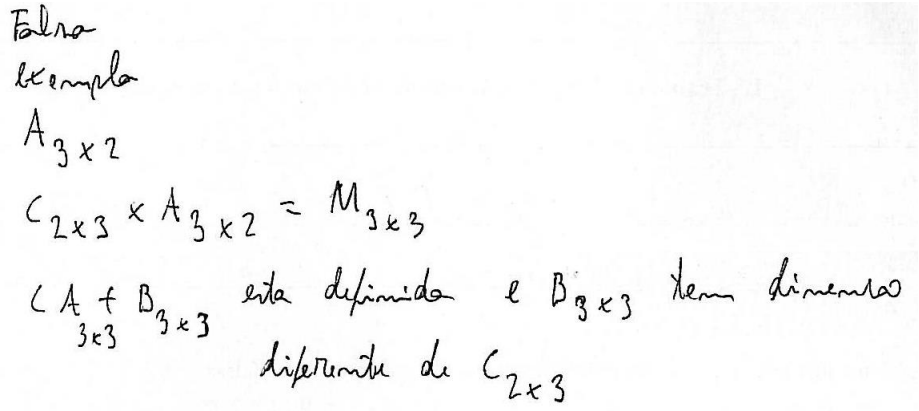


Figura 8. Dedução incorreta da dimensão da matriz produto (A250, Versão XD).

No caso da dificuldade no reconhecimento das condições em que é possível efetuar o produto, há alunos que apresentam um exemplo com matrizes concretas ou mencionam apenas a dimensão das matrizes, e referem, incorretamente, que é possível efetuar a multiplicação (Figura 9) ou que não é possível, quando isso não é verdade; outros consideram que só se podem multiplicar matrizes quadradas: "Sim. Porque só se pode multiplicar matrizes quadradas" (A155, Versão YJ), ou matrizes que tenham a mesma dimensão (Figura 10).

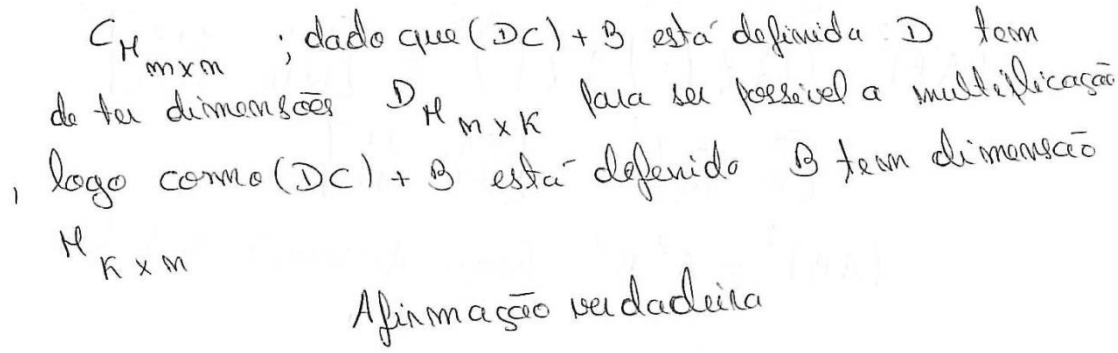


Figura 9. Considerar possível efetuar uma multiplicação que não está definida (A145, Versão XK).

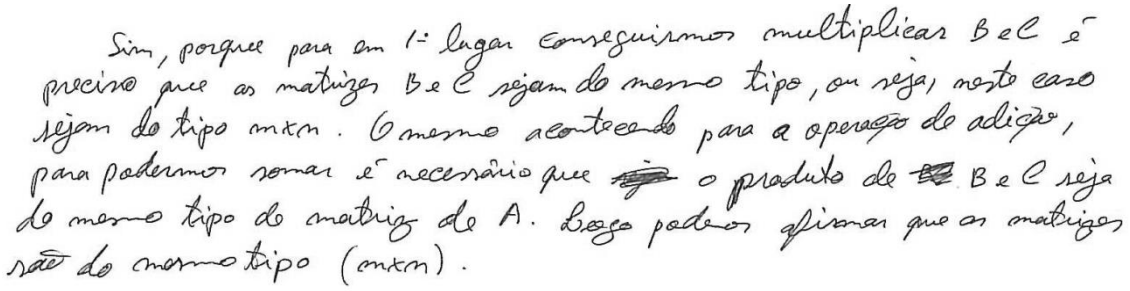


Figura 10. Possibilidade de multiplicar matrizes com a mesma dimensão (A73, Versão XA).

De notar que as afirmação dos alunos A145 e A73 seriam válidas se $m = k = n$ e $m = n$, respetivamente, isto é, sendo as matrizes quadradas da mesma ordem.

No raciocínio *exemplo que verifica* a afirmação incluíram-se as resoluções dos alunos que apresentam:

- Um exemplo concreto de matrizes que verificam a afirmação dada ou, de forma semelhante, referem a dimensão possível dessas matrizes de forma a comprovar a afirmação, pelo que concluem erradamente que a afirmação é verdadeira (30 alunos);
- Um exemplo concreto ou uma classe de exemplos (quando se referem apenas à dimensão das matrizes) de matrizes que verificam o contrarrecíproco da afirmação dada (9 alunos). Porém, como nem sempre interpretam de forma correta o resultado do seu raciocínio alguns (5 alunos) chegam à conclusão (correta) de que a afirmação é falsa.

No primeiro caso, tem-se por exemplo os alunos A292 (Figura 11) e A169 (Figura 12), que apresentam ou fazem referência a matrizes de ordem dois, que permitem verificar a afirmação dada.

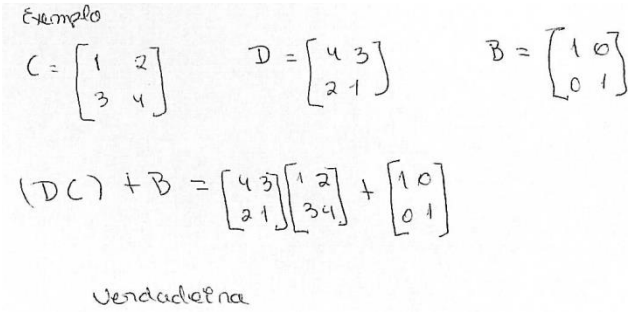


Figura 11. Exemplo concreto de matrizes que verificam a afirmação (A292, Versão XH).

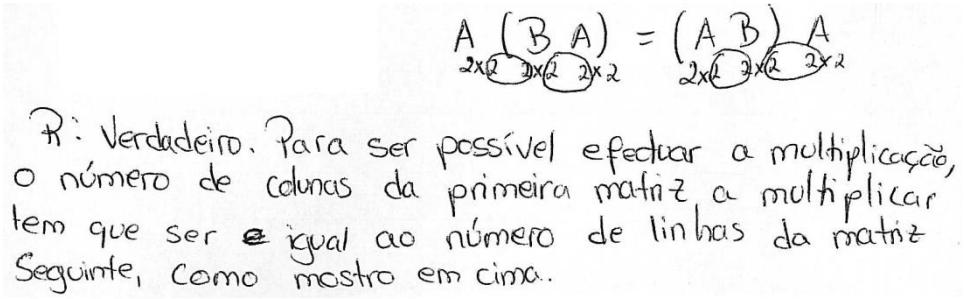


Figura 12. Classe de matrizes de ordem dois que verificam a afirmação (A169, Versão YB).

No segundo caso, como já se referiu, os alunos tentam verificar o contrarrecíproco. Simbolicamente, se na afirmação dada traduzirmos o antecedente pela proposição p e o consequente pela proposição q, temos $p \Rightarrow q$. Os alunos arranjam um exemplo (concretizam a matriz), ou uma classe de exemplos (indicam a dimensão das matrizes) que verifica $\neg q \Rightarrow \neg p$ (Figura 13 e Figura 14).

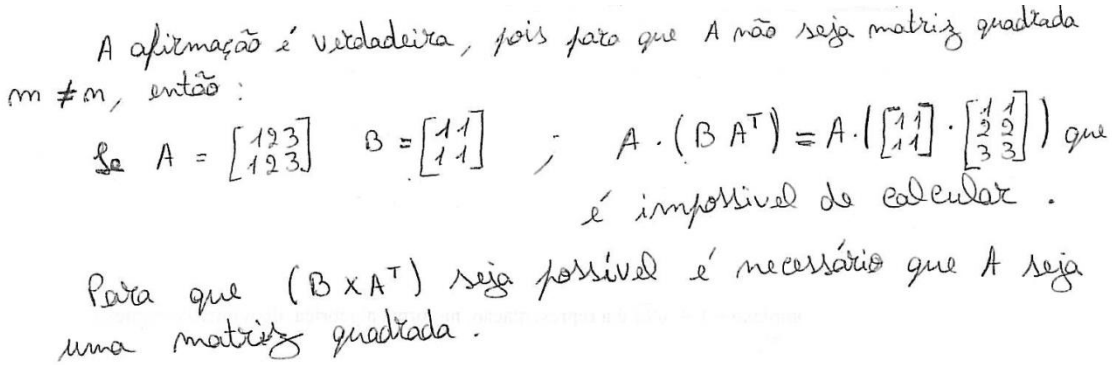


Figura 13. Exemplo que verifica o contrarrecíproco da afirmação (A95, Versão ZL).

Neste caso, o aluno A95 interpreta corretamente o resultado final do seu raciocínio embora este seja incorreto, contrariamente ao que sucede no caso do aluno A288.

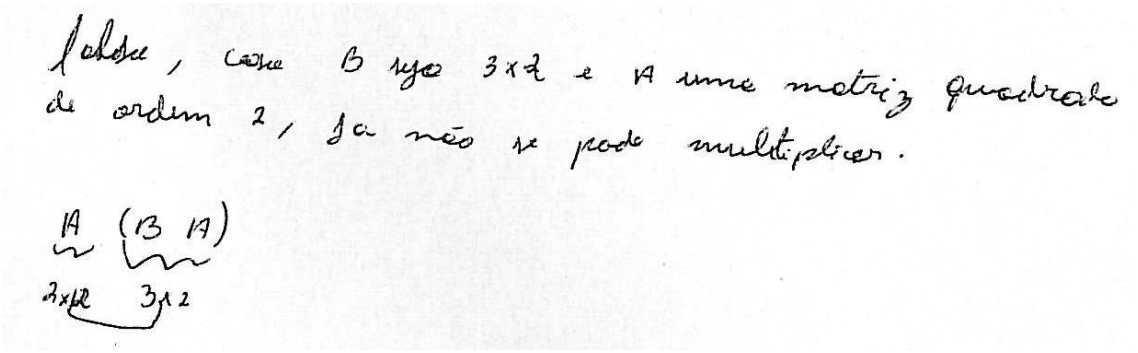


Figura 14. Classe de exemplos de matrizes que verifica o contrarrecíproco da afirmação (A288, Versão YB).

De realçar que, nesta categoria de raciocínio, mais do que dificuldades no âmbito da AL, estão presentes dificuldades no âmbito da lógica clássica, já que os alunos aceitam que basta um exemplo para confirmar a validade de uma afirmação e não reconhecem o tipo de raciocínio que utilizam quando verificam o contrarrecíproco.

No raciocínio *análise incompleta*, os alunos, com base num exemplo concreto ou fazendo referência à dimensão de matrizes, analisam apenas uma parte da expressão dada, normalmente a que está entre parênteses, não fazendo qualquer referência à outra parte. Embora, em alguns casos (10 alunos), os argumentos que os alunos apresentam não sirvam para justificar a situação na totalidade (Figura 15), há outros casos em que isso acontece (10 alunos, Figura 16). Assim, nestes últimos, pode-se considerar que se está próximo da resposta correta, embora de forma incompleta.

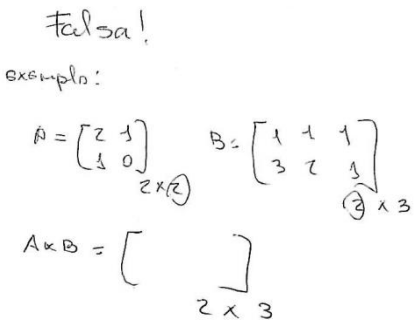


Figura 15. Referência apenas a AB (A27, Versão YF).

Como se pode verificar, o aluno A27 apresenta um exemplo em que está correta a análise da situação para AB mas, como o objetivo era analisar $B(AB)$, o exemplo apresentado não lhe iria permitir responder de forma correta na medida em que, para o exemplo de matrizes apresentado pelo aluno, $B(AB)$ não está definida. No caso da resposta do aluno A134, a situação já é diferente, pois este podia continuar a justificação para $A(BA^T)$ com base no exemplo dado.

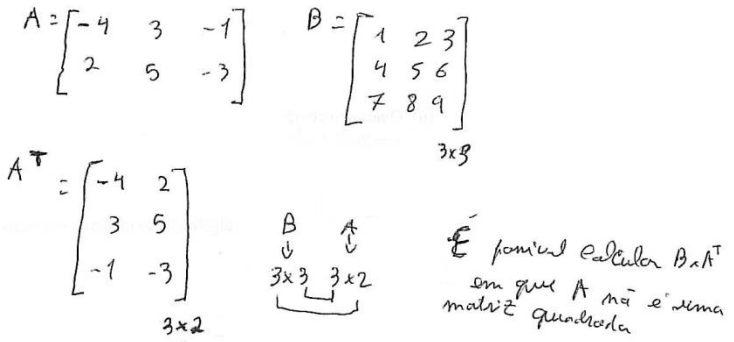


Figura 16. Referência apenas a BA^T (A134, Versão ZL).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas* incluíram-se as respostas dos alunos que recorrem a propriedades que não têm sentido e que parecem ser uma adaptação de várias propriedades válidas noutros contextos (ver Figura 17, Figura 18 e Figura 19).

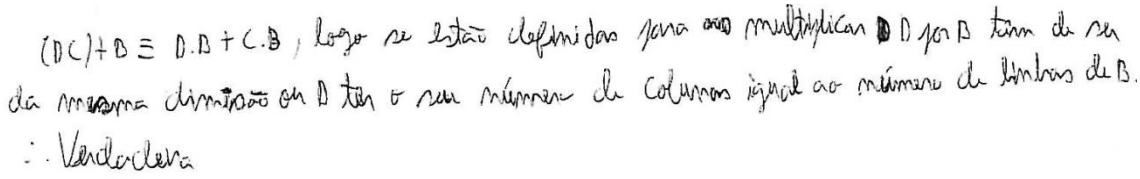


Figura 17. Recurso a propriedade não válida (A285, Versão XA).

Por exemplo, neste caso (Figura 17), o aluno parece considerar que $(DC)+B$ é o mesmo que $(D+C)B$ pois, aparentemente, resolve a situação como se estivesse a aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A conclusão que apresenta posteriormente também não é compatível com a classificação da afirmação como verdadeira.

Dos alunos que responderam às questões do Tipo Y e Tipo Z (Figura 18 e Figura 19), alguns também cometem um erro semelhante, embora nas expressões dadas só estejam envolvidas as operações de multiplicação ou de transposição.

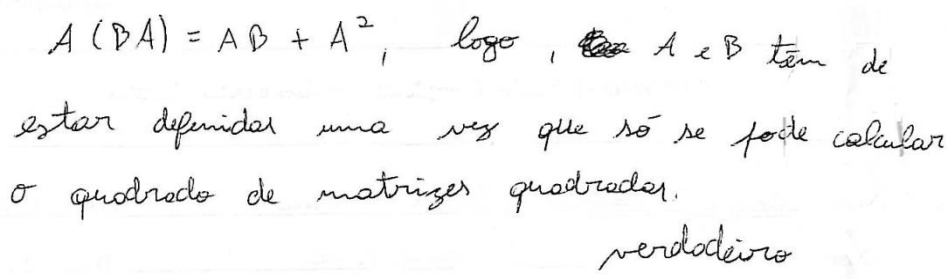


Figura 18. Recurso a propriedade não válida (A281, Versão YB).

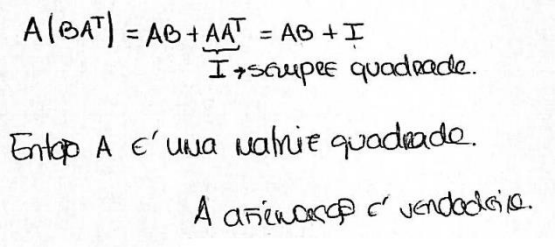


Figura 19. Recurso a propriedade não válida (A215, Versão ZC).

Neste caso parece estar também presente a ideia de matriz ortogonal, em que $A^{-1} = A^T$, já que o aluno considera $AA^T = I$.

No raciocínio *incompreensão de conceitos*, os alunos demonstram que não têm ideias muito claras sobre os conceitos envolvidos na afirmação dada, entre eles o conceito de transposta de uma matriz, o de matriz quadrada e o de dimensão de uma matriz.

No caso da transposta, cinco alunos associam-na apenas a matrizes quadradas, como se pode exemplificar com a afirmação do aluno A18: "Verdadeiro, pois para ser transposta tem de ser quadrada" (Versão ZG). Esta exigência de as matrizes serem quadradas é também referida pelo aluno A161, que demonstra dificuldades no conceito de dimensão, pois considera que: "As matrizes A e C só têm a mesma dimensão se forem quadradas" (Versão XA).

Dos três alunos que manifestaram dificuldades no conceito de matriz quadrada, um considera as matrizes quadradas limitadas ao universo restrito das matrizes de ordem dois e os outros dois têm uma ideia incorreta do conceito, como se pode verificar, por exemplo, pela resposta do aluno A297, que considera como não quadradas matrizes que o são (Figura 20).

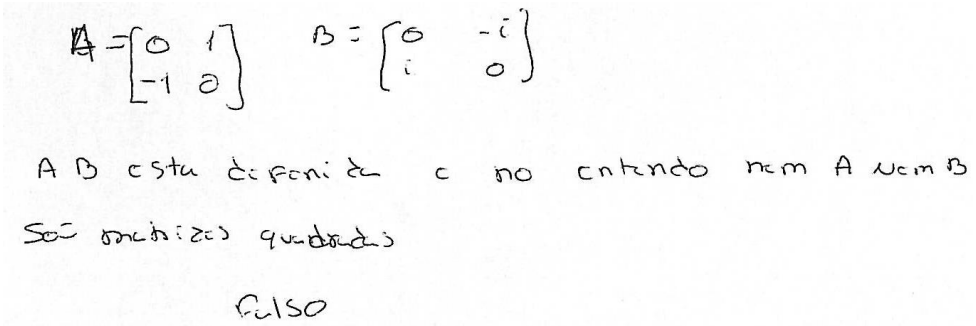


Figura 20. Classificação incorreta de matrizes como não quadradas (A297, Versão YF).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação*, os alunos fazem referência a argumentos válidos, mas que ou são irrelevantes para dar resposta à questão ou, embora tenham a ver com a questão, não são aplicados à situação em causa. O argumento mais usado é o que faz referência à possibilidade de adicionar matrizes: "Verdadeira, pois apenas se podem somar matrizes que tenham a mesma dimensão" (A240, Versão XD).

No raciocínio *prova da falsidade do recíproco*, os alunos partem de exemplos (concretizando as matrizes) ou de classes de exemplos (indicando a dimensão das matrizes) que confirmam o consequente da afirmação dada e concluem que o antecedente é falso, ou seja, que a expressão dada não está definida, pelo que, no geral, chegam à conclusão correta de que a afirmação é falsa, mas utilizando um raciocínio que não é válido (Figura 21). Explicitando, em termos de lógica clássica, se na afirmação dada se traduzir o antecedente pela proposição p e o consequente pela proposição q, tem-se $p \Rightarrow q$. Os alunos tentam provar que a implicação recíproca, $q \Rightarrow p$, é falsa, ou seja, que se tem $\neg(q \Rightarrow p)$ que é equivalente a $q \wedge \neg p$.

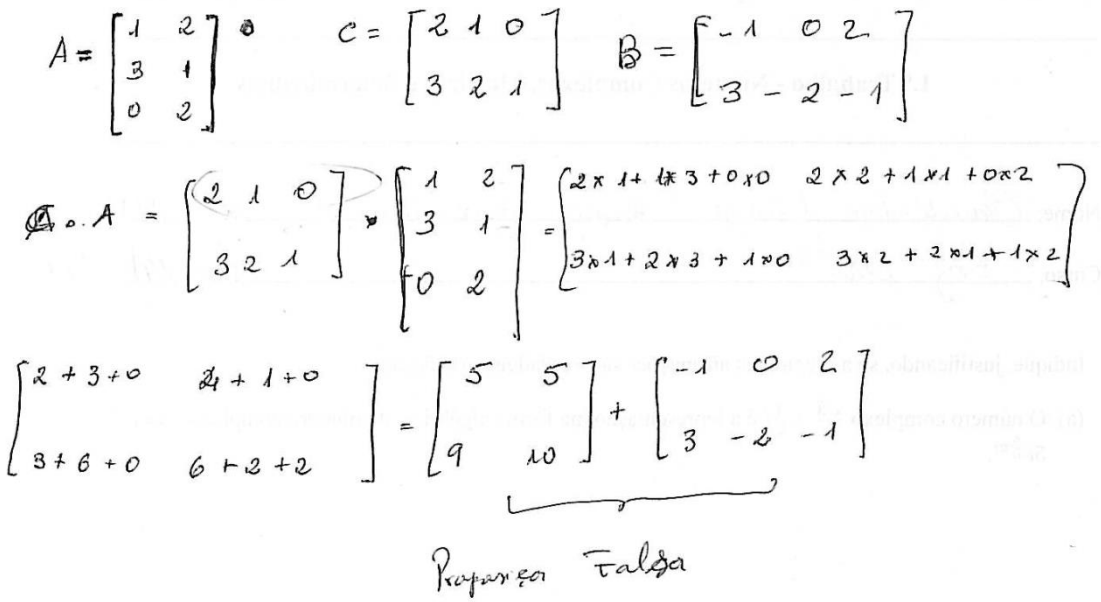


Figura 21. Exemplo para provar a falsidade do recíproco (A54, Versão XD).

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.1.1.2. Questão 2

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa: Se B e C são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(CB)^2 = C^2B^2$.

Esta questão foi respondida por 153 alunos, que foram confrontados com uma das versões A, D, E, H, I e K. A única variante nas diferentes versões é a alteração das letras que designam as matrizes, pelo que se analisaram conjuntamente.

A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos encontra-se na Tabela 14.

Tabela 14 – Raciocínios dos alunos na questão 2 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios	Total
Válidos (respostas corretas)	22 (14,4%)
Não válidos	102 (66,7%)
Sem justificação ou não responde	29 (18,9%)
Total	153 (100%)

Os alunos que apresentaram raciocínios válidos, na sua maioria (15 alunos), justificaram a sua resposta apresentando um exemplo concreto de matrizes (normalmente de ordem dois) que contrariavam a afirmação feita (Figura 22).

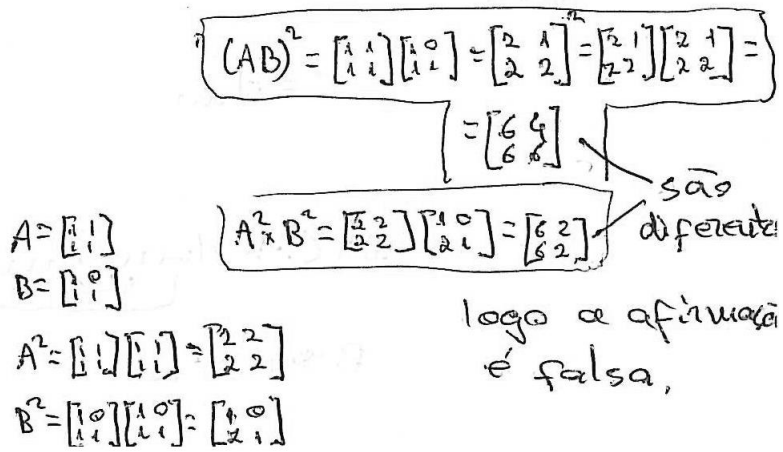


Figura 22. Apresentação de um contraexemplo (A146, Versão K).

Houve ainda sete alunos que tentaram justificar utilizando referências mais teóricas, por exemplo, focando a prioridade das operações: "Falso, porque termos B^2A^2 é fazer os dois ao quadrado e depois a multiplicação e ter $(BA)^2$ fazemos primeiro a multiplicação, depois o elevado ao quadrado, isto vai ter valores diferentes." (A1, Versão E), ou transformando a potenciação na multiplicação, referindo, de forma mais ou menos explícita, a não comutatividade da multiplicação de matrizes (Figura 23).

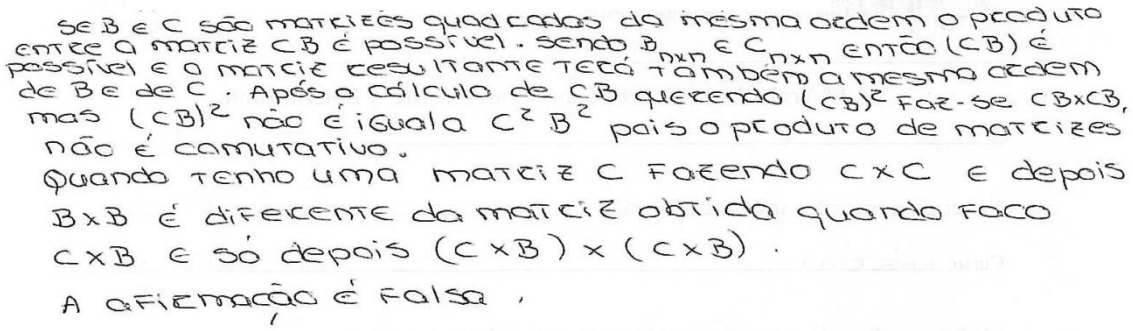


Figura 23. Transformação da potência em produto (A81, Versão A).

Embora este último tipo de respostas se considere correto, é de realçar que os alunos não têm geralmente em conta o facto de poder haver casos em que as matrizes possam comutar. Assumem normalmente que $(CB)^2 \neq C^2B^2$ em termos gerais. Esta é uma situação que se compreende em virtude das dificuldades na lógica clássica que os alunos já demonstraram ter na questão anterior. Embora possam ter uma ideia intuitiva de que há casos em que se possa verificar a igualdade, não têm consciência da pertinência de focar esse aspeto na sua justificação.

Na categoria *sem justificação ou não responde*, para além da ausência de resposta (8 alunos), integraram-se as respostas dos alunos que classificaram a afirmação como verdadeira ou falsa (21 alunos), mas sem indicar qualquer justificação ou apenas reescrevendo a afirmação dada ou a sua negação. Neste caso, quem respondeu que a afirmação era "verdadeira" (15 alunos) pode-se ter baseado no facto dessa propriedade ser válida para números reais.

Analisadas as 102 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 15, com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 15 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 2 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios não válidos	Total
Dificuldades nas operações com matrizes	48 (47,1%)
Exemplo que verifica a afirmação	18 (17,6%)
Aplicação da comutatividade da multiplicação em matrizes	13 (12,7%)
Análise incompleta	11 (10,8%)
Recurso a propriedades não válidas	10 (9,8%)
Outros	2 (2,0%)

No raciocínio *dificuldades nas operações com matrizes*, os alunos justificam a sua resposta com base num exemplo, mas ou utilizam falsas regras na multiplicação de matrizes (5 alunos, Figura 24) ou calculam o quadrado de uma matriz elevando ao quadrado cada uma das suas entradas (30 alunos, Figura 25), havendo também alunos que cometem ambos os erros (11 alunos, Figura 26). Incluíram-se ainda nesta categoria de raciocínio as respostas de dois alunos que demonstram ter dificuldade no reconhecimento das condições em que é possível efetuar a multiplicação, como se pode verificar pela resposta do aluno A233: "Falso, porque se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, não são possíveis de multiplicar. O número de colunas de A tem de ser diferente do número de linhas de B" (Versão D).

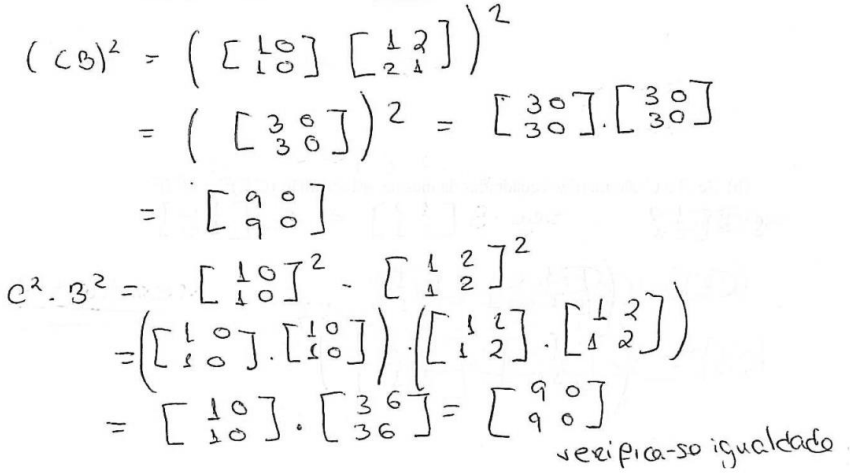


Figura 24. Falsas regras da multiplicação de matrizes (A128, Versão I).

Como se pode constatar, embora o aluno A128 transforme de forma correta a potência num produto, aplica uma regra incorreta para calcular esse produto. Aparentemente, para multiplicar as matrizes, o aluno efetua o produto interno de cada vetor coluna da primeira matriz por cada vetor linha da segunda matriz, isto é, se $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix} (a,c)\cdot(e,f) & (b,d)\cdot(e,f) \\ (a,c)\cdot(g,h) & (b,d)\cdot(g,h) \end{bmatrix}$. Este produto corresponde, na realidade, ao produto BA.

Já o aluno A299 calcula corretamente o produto de matrizes, mas considera sempre o quadrado de uma matriz como o quadrado de cada uma das entradas, pelo que tem apenas dificuldades na potenciação. A primeira tendência de resposta é a aplicação imediata de propriedades válidas em $\mathbb{R}$, sem refletir como é que a potenciação se relaciona com a multiplicação.

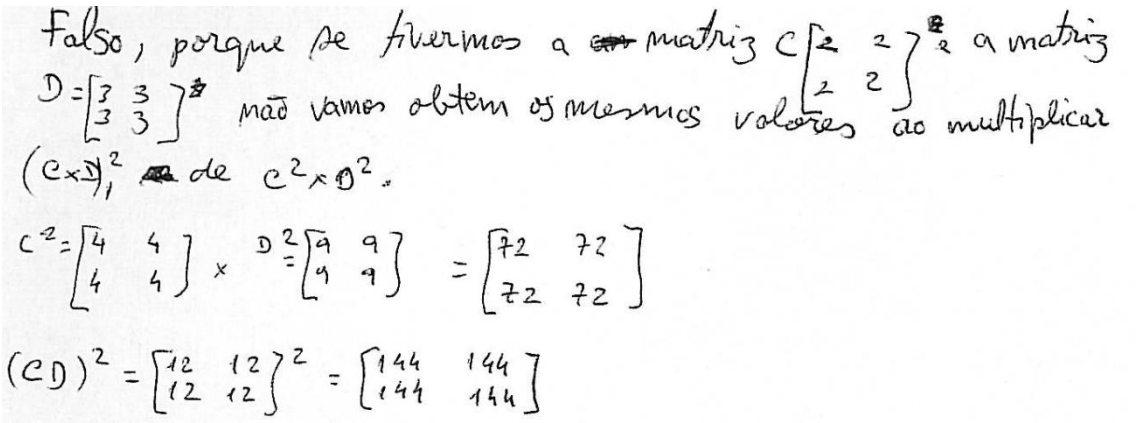


Figura 25. Incorreção no cálculo do quadrado das matrizes (A299, Versão H).

O aluno A119, para além de cometer o erro de potenciação acima citado (elevar ao quadrado cada uma das entradas da matriz), faz confusão quando aplica o algoritmo da

multiplicação, na medida em que entende "o produto linha por coluna" no sentido de cada elemento por si em vez de "produto interno do vetor linha pelo vetor coluna". Assim se $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, aplicando a "regra" utilizada pelo aluno $AB=\begin{bmatrix} a\times e & b\times g \\ c\times f & d\times h \end{bmatrix}$.

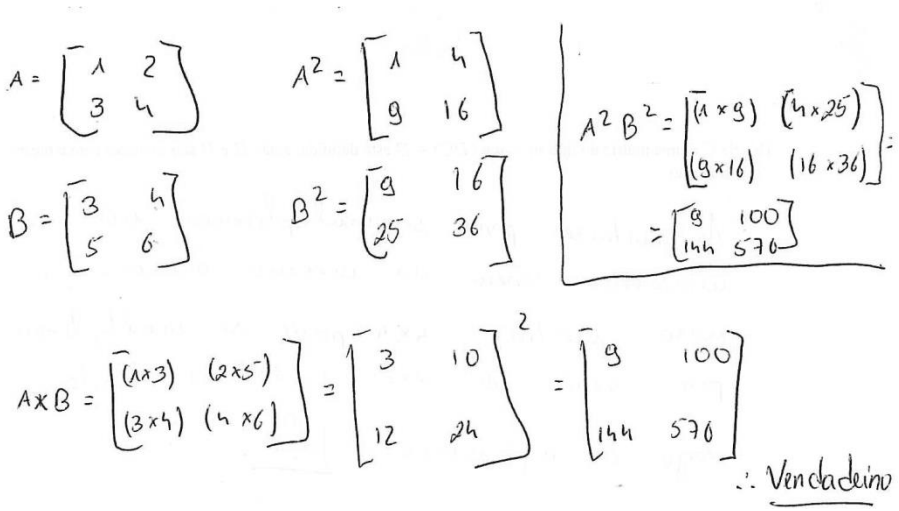


Figura 26. Multiplicação e potenciação incorreta (A119, Versão K).

No raciocínio *exemplo que verifica a afirmação*, os alunos apresentam um exemplo para o qual a afirmação dada é válida. A partir daqui, no geral, os alunos concluíram que a afirmação é verdadeira (Figura 27). Houve, no entanto, alguns que concluíram que era falsa (4 alunos), o que tanto pode dever-se a uma deficiente interpretação dos resultados obtidos como a uma perceção intuitiva de que a afirmação seria falsa, embora não tenham conseguido arranjar um contraexemplo.

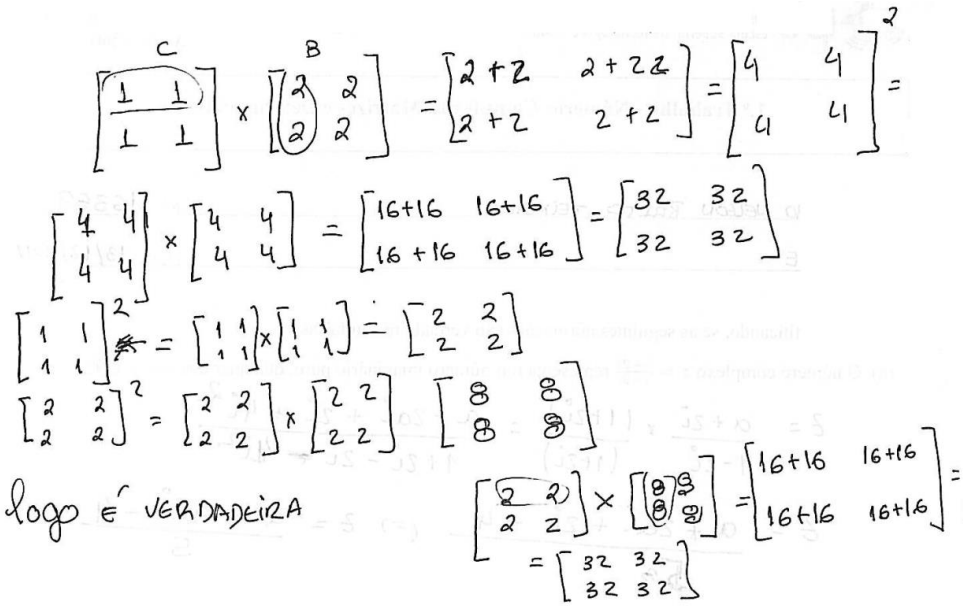


Figura 27. Exemplo que verifica a afirmação (A32, Versão A).

No raciocínio *aplicação da comutatividade da multiplicação em matrizes*, os alunos consideram válida, para o caso geral, a propriedade comutativa da multiplicação de matrizes e aplicam-na para concluírem que a afirmação é verdadeira (Figura 28).

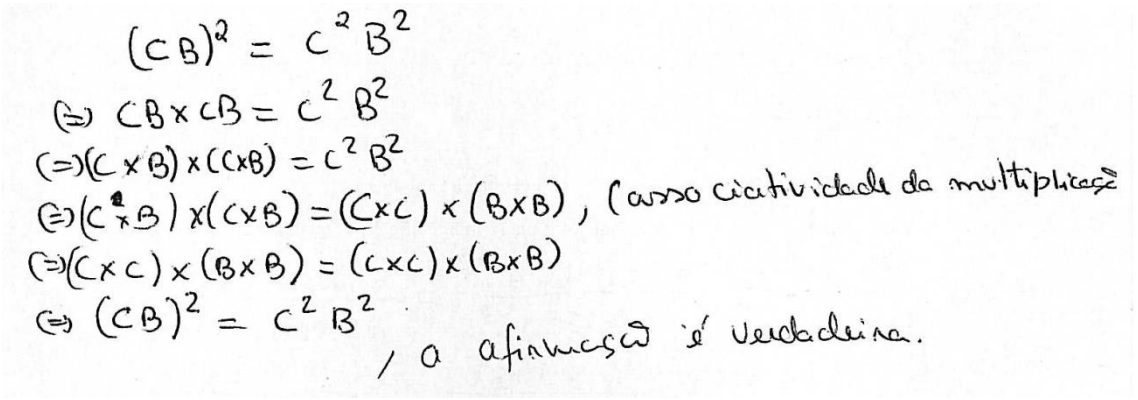


Figura 28. Considerar válida a comutatividade da multiplicação de matrizes (A208, Versão A).

No raciocínio *análise incompleta* incluíram-se as respostas dos alunos que partiram de um exemplo, numérico ou literal, e realizaram algumas operações de forma correta mas não concluíram o seu raciocínio ou não escolheram a concretização das variáveis para analisar a veracidade ou não da afirmação (Figura 29). De realçar que alguns dos exemplos escolhidos dão origem a cálculos que se complicam bastante, o que pode ter levado os alunos a não concluírem o seu raciocínio. Existe também uma falta de sensibilidade na escolha de exemplos que facilitem a justificação.

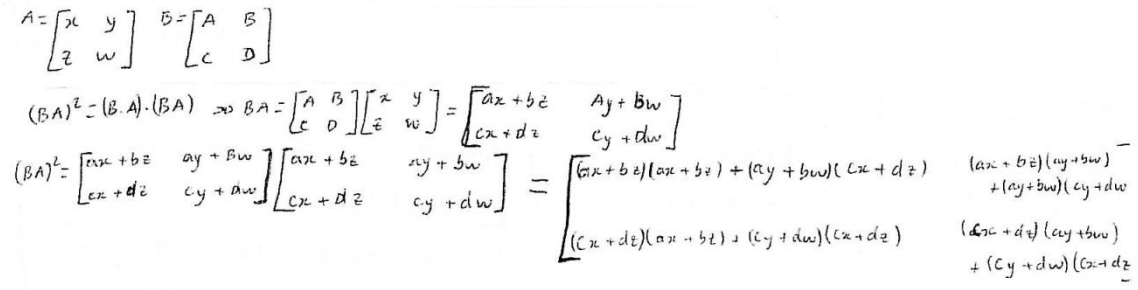


Figura 29. Análise incompleta sem concretizar as matrizes (A260, Versão E).

Como se pode constatar neste exemplo (Figura 29), o aluno escolhe uma classe de matrizes quadradas de ordem dois, realiza parte dos cálculos de $(BA)^2$ de forma correta, mas não conclui o seu raciocínio, eventualmente devido à morosidade em realizar as operações que obteve. Poderia ter chegado à resposta correta se concretizasse numericamente as matrizes e simplificasse a expressão em falta, B^2A^2.

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas*, os alunos justificam a sua resposta com base em propriedades ou argumentos que não são corretos. Os raciocínios mais comuns são

confundir o quadrado do produto de duas matrizes com o quadrado da soma ou da diferença dessas matrizes (6 alunos, Figura 30) ou recorrer ao quadrado da soma para tirar ilações sobre o quadrado do produto (2 alunos, Figura 31). Neste último caso, os alunos cometem, ainda, o erro de utilizar um caso notável para desenvolver o quadrado da soma (Figura 31), propriedade válida no conjunto dos números reais mas não para matrizes sobre *IR* em geral, podendo-se considerar que, implicitamente, estão a considerar válida a comutatividade na multiplicação de matrizes.

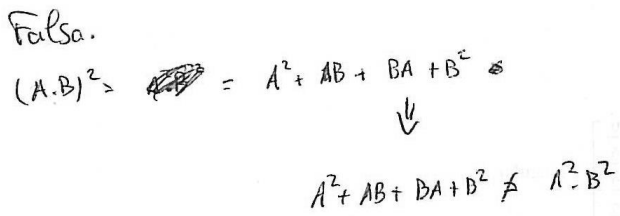


Figura 30. Considerar o quadrado do produto como o quadrado da soma (A40, Versão D).

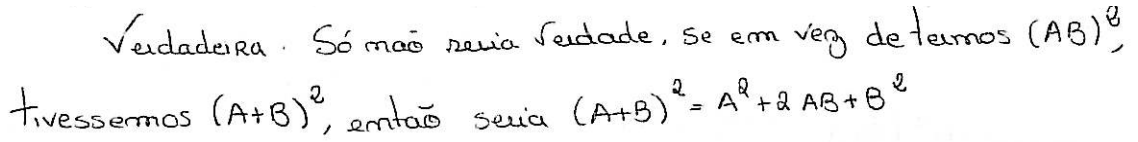


Figura 31. Utilização incorreta de caso notável (A165, Versão D).

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.1.1.3. Questão 3

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas para cada versão foram:

– Questão do tipo X: Versões A e E – A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível; Versão I – A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.

– Questão do tipo Y: Versão K – A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é singular; Versões D e H – A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é singular.

Esta questão foi respondida por 153 alunos. A categorização das respostas, tendo em atenção se se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos, encontra-se na Tabela 16.

Tabela 16 – Raciocínios dos alunos na questão 3 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios	Tipo de questão		Total
	X	Y	
Válidos (respostas corretas)	14	9	23 (15,0%)
Não válidos	50	58	108 (70,6%)
Sem justificação ou não responde	9	13	22 (14,4%)
Total	73	80	153 (100%)

A maioria dos alunos que apresentaram raciocínios válidos justificou a sua resposta calculando o determinante da matriz em questão aplicando o teorema de Laplace (Figura 32) ou utilizando as propriedades dos determinantes (Figura 33).

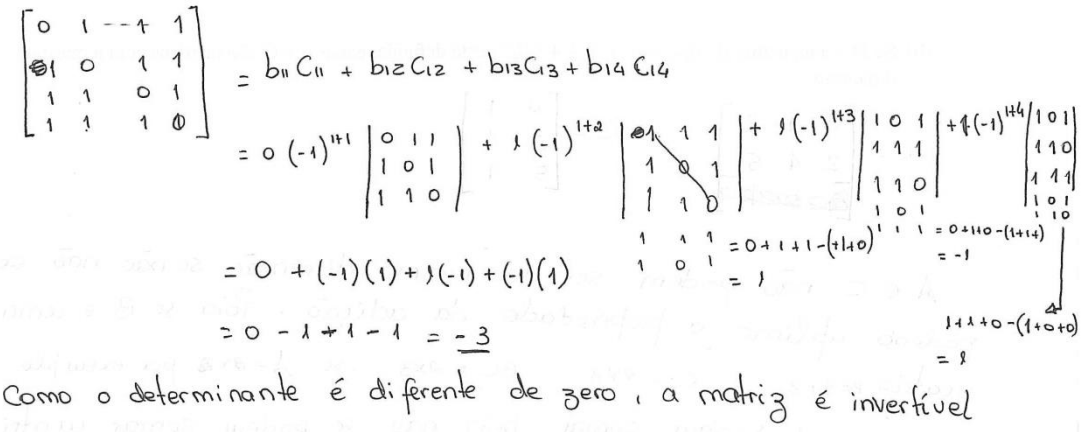


Figura 32. Aplicação do teorema de Laplace (A44, Versão XA).

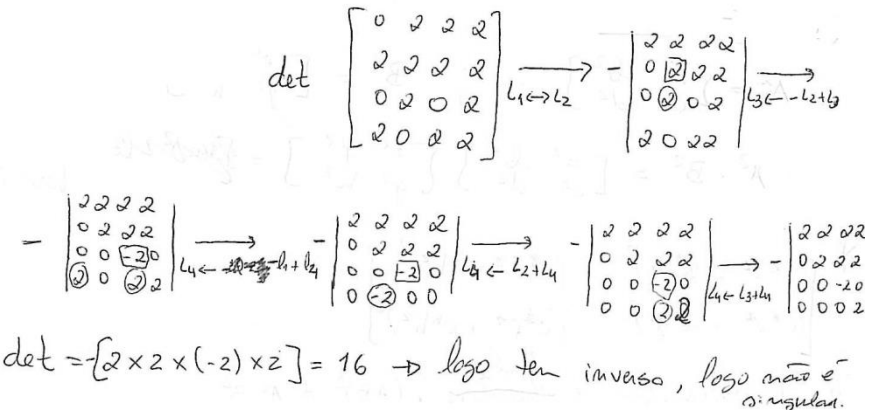


Figura 33. Aplicação das propriedades dos determinantes (A77, Versão YD).

Houve ainda dois alunos que recorreram a processos menos usuais para justificar a sua resposta. Um deles, o aluno A157, refere: "A afirmação é verdadeira, pois a linha diagonal é composta por zeros, e os outros números são exatamente iguais (2), por isso podemos dizer que esta matriz é invertível" (Versão XI). Este raciocínio pode-se considerar correto se admitirmos que os "números iguais" vão ser sempre diferentes de zero. O outro aluno transforma a matriz dada numa matriz triangular, concluindo que, como a matriz final não tem elementos nulos na diagonal principal, a matriz dada é invertível (Figura 34).

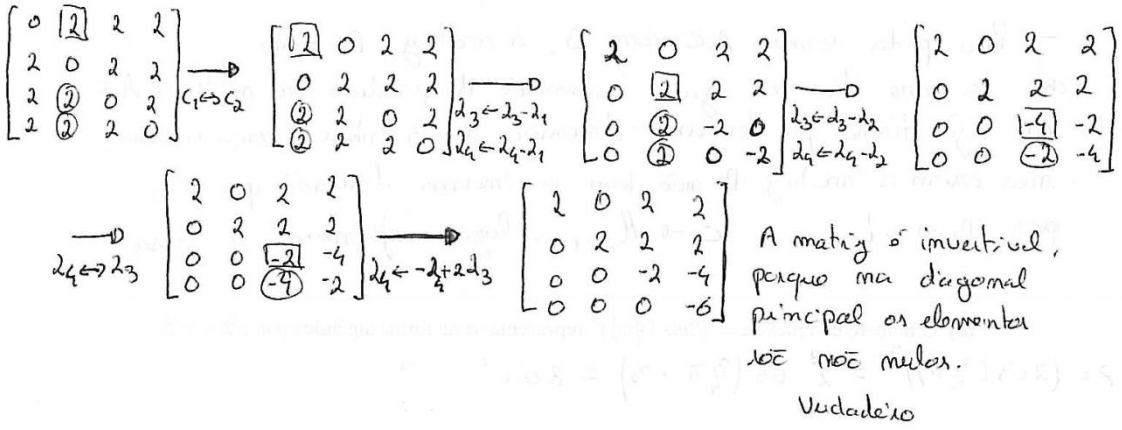


Figura 34. Transformação da matriz dada numa matriz triangular (A103, Versão XI).

Na categoria *sem justificação ou não responde*, para além da ausência de resposta (14 alunos), integraram-se as respostas dos alunos que apenas mencionaram que a afirmação era verdadeira ou falsa (8 alunos), sem indicar qualquer justificação.

Analisadas as 108 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 17, com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 17 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 3 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios não válidos	Tipo de questão		Total
	X	Y	
Dificuldades no cálculo do determinante	15	20	35 (32,4%)
Influência do zero na diagonal principal	13	14	27 (25,0%)
Recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação	5	10	15 (13,9%)
Incompreensão do conceito de matriz singular/invertível	3	10	13 (12,0%)
Dificuldades na determinação da matriz inversa	7	3	10 (9,2%)
Recurso a propriedades não válidas	2	—	2 (1,9%)
Interpretação incorreta do resultado obtido	1	1	2 (1,9%)
Outros	4	—	4 (3,7%)

No raciocínio *dificuldades no cálculo do determinante* incluíram-se as resoluções dos alunos que manifestaram dificuldades para calcular os determinantes ou não os calcularam corretamente. Concretamente, salientam-se:

- Dificuldades na aplicação do teorema de Laplace (11 alunos);
- Incorreções na aplicação da regra de Sarrus para determinantes de ordem três (1 aluno);
- Dificuldades na aplicação das propriedades dos determinantes (9 alunos);
- Utilização de regras não aplicáveis ao determinante em causa (14 alunos).

No primeiro caso, houve alunos que ao aplicarem o teorema de Laplace não acabaram a resolução ou cometeram erros como: aplicar apenas o teorema a uma das entradas da matriz da linha escolhida (Figura 35), não calcular de forma correta os cofatores (Figura 36), entre outros. Por vezes aplicam bem o teorema no determinante inicial, mas, quando o aplicam novamente aos determinantes de ordem três, cometem erros.

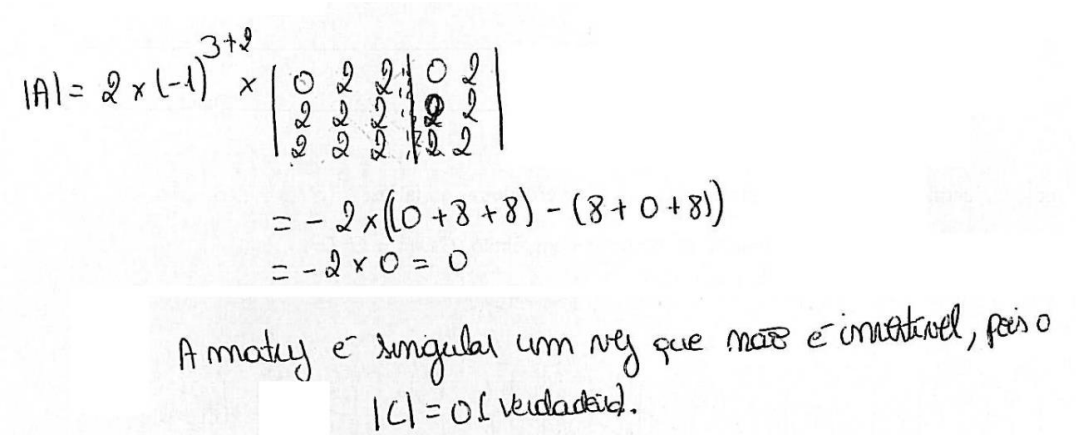


Figura 35. Aplicação do teorema de Laplace apenas a uma entrada da linha (A302, Versão YK).

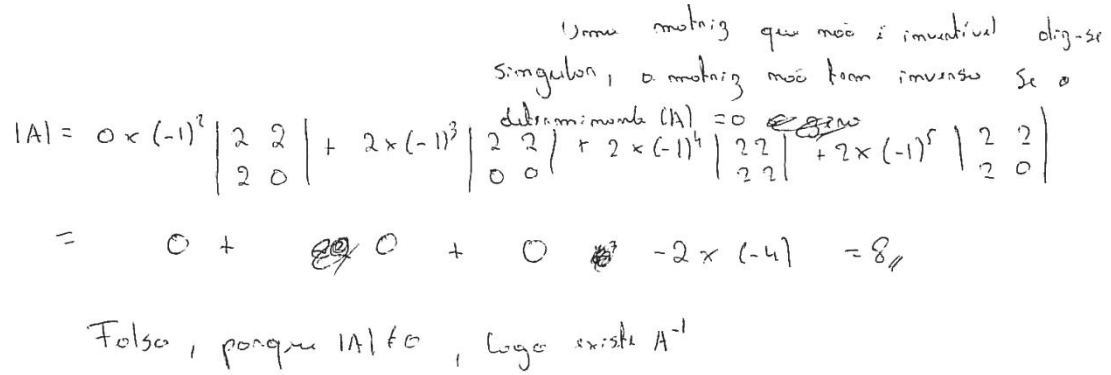


Figura 36. Cálculo incorreto dos cofatores aquando da aplicação do teorema de Laplace (A178, Versão YD).

Quanto às incorreções na aplicação da regra de Sarrus para determinantes de matrizes de ordem três, o aluno multiplica primeiro os elementos das diagonais secundárias e subtrai à soma do produto dos elementos das diagonais principais (Figura 37).

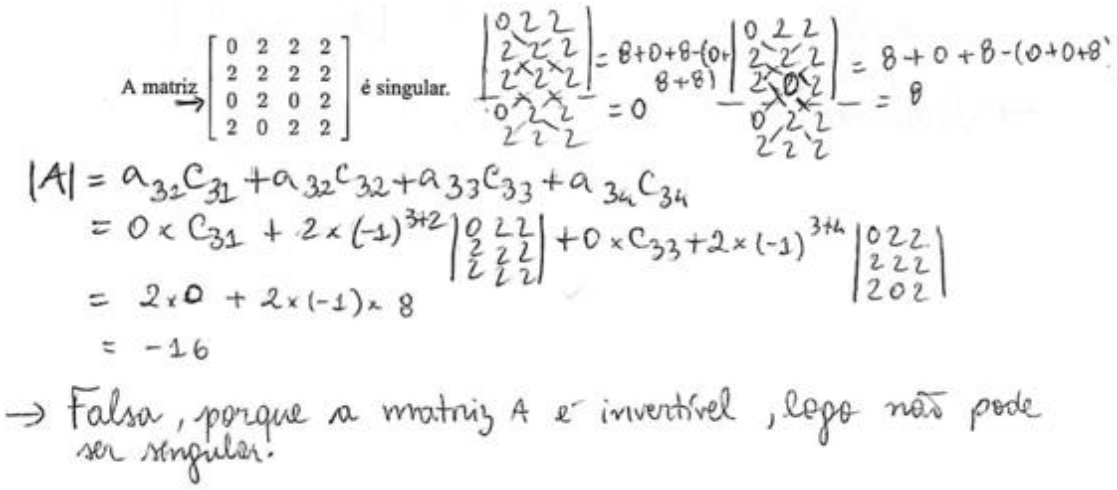


Figura 37. Aplicação incorreta da regra de Sarrus nos determinantes de matrizes de ordem três (A66, Versão YD).

Dos alunos que tiveram dificuldades na aplicação das propriedades dos determinantes, alguns não acabaram o raciocínio e, nas respostas dos que concluíram ou que supuseram ter concluído, o erro mais frequente foi não afetarem o determinante de sinal contrário quando trocavam duas linhas. Por exemplo, o aluno A229 (Figura 38) faz uma tentativa para colocar zeros abaixo da diagonal principal do determinante, aplicando as propriedades mas esquece-se de trocar o sinal quando troca as linhas. Além disso não acaba o processo, embora pareça pensar que o finalizou, na medida em que calcula o valor do determinante multiplicando os elementos da diagonal principal.

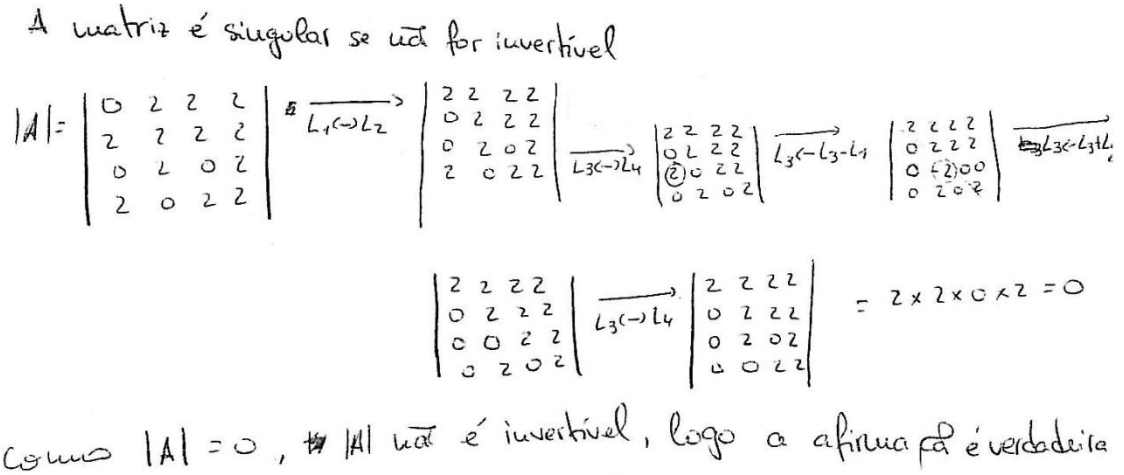


Figura 38. Troca de linhas sem trocar o sinal do determinante (A229, Versão YD).

Os alunos que aplicaram regras que se adequariam a outras situações, mas não ao determinante da matriz em causa, apresentaram um dos seguintes raciocínios:

- Calcularam o determinante da matriz dada (que é de ordem quatro) utilizando uma regra não válida baseada na regra de Sarrus (5 alunos, Figura 39);
- Multiplicaram explicitamente os elementos da diagonal principal, concluindo que o determinante era zero (3 alunos, Figura 40), ou aludiram a esse produto de forma implícita (5 alunos) na medida em que consideraram que o determinante é zero por haver elementos nulos na diagonal principal: "Falso, porque se trata de uma matriz singular, isto é, um dos elementos da diagonal principal é 0, daí que o determinante desta matriz seria 0" (A164, Versão XA);
- Calcularam apenas a diferença entre o produto das entradas da diagonal principal e o produto das entradas da diagonal secundária, o que se assemelha à regra que se utiliza para determinantes de matrizes de ordem dois (1 aluno, Figura 41).

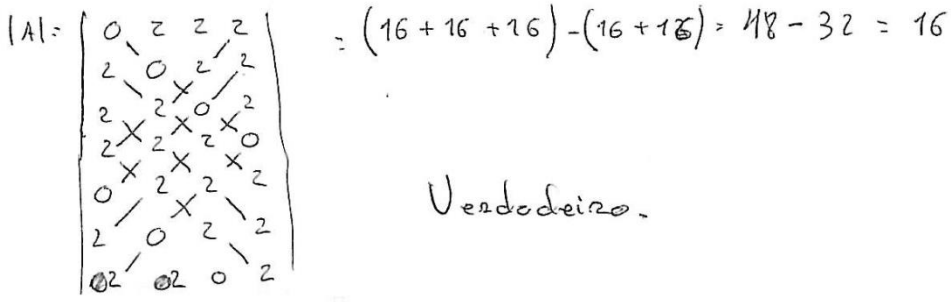


Figura 39. Recurso a uma regra não válida baseada na regra de Sarrus (A100, Versão XI).

O aluno A100 transpõe os seus conhecimentos sobre a regra de Sarrus, que se aplica aos determinantes de ordem três, para o determinante em causa, acrescentando assim, ao determinante, as três primeiras linhas e efetuando a diferença da soma dos produtos dos

elementos das diagonais principais pela soma dos produtos dos elementos das diagonais secundárias.

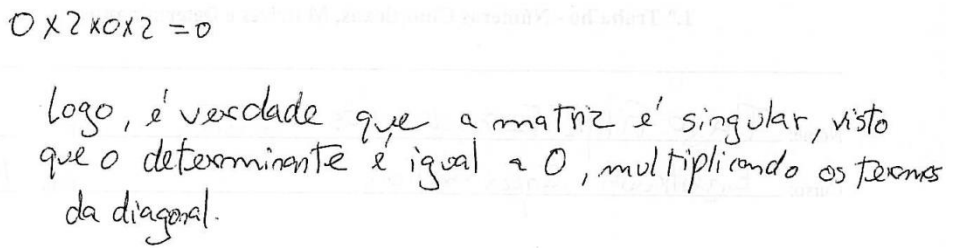


Figura 40. Determinante como produto dos elementos da diagonal principal (A282, Versão YH).

Da mesma forma, os alunos A282 e A94 apresentam procedimentos que seriam válidos para o cálculo de determinantes de matrizes específicas, como as matrizes triangulares e matrizes de ordem dois, respetivamente.

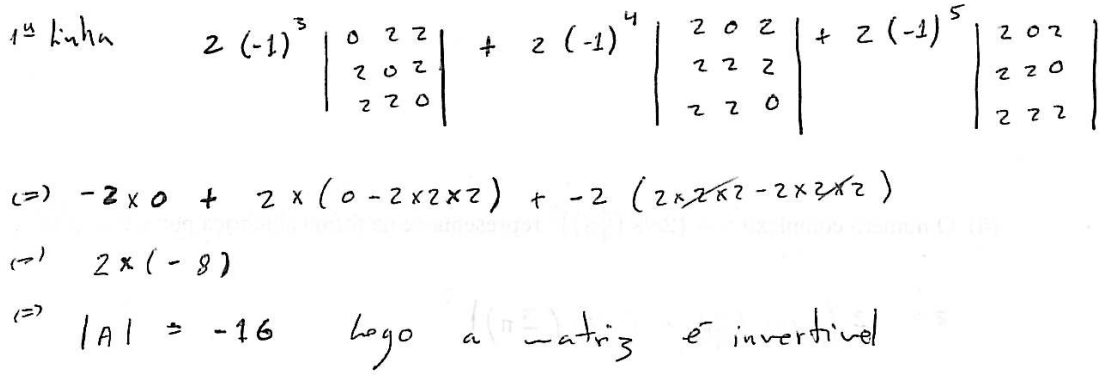


Figura 41. Determinante de uma matriz de ordem três como diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária (A94, Versão XI).

No raciocínio *Influência do zero na diagonal principal*, consideraram-se as respostas dos alunos que presumiram que, pelo facto da matriz ter zeros na diagonal principal, não era invertível. Por exemplo, "Falso. A matriz não é invertível, pois para ser invertível todos os elementos da diagonal principal têm de ser diferentes de zero, o que não acontece nesta matriz." (A176, Versão XA); "Afirmação verdadeira. A matriz é singular pois na diagonal principal existem dois zeros." (A305, Versão YD).

No raciocínio *incompreensão do conceito de matriz singular/invertível*, os alunos fazem comentários que demonstram que confundem o conceito de matriz em causa com outros conceitos. Por exemplo, confundem a matriz singular com uma matriz triangular, diagonal, simétrica: "Falsa, pois a matriz A tem elementos não nulos abaixo da diagonal principal, logo não é uma matriz triangular superior, não é singular." (A285, Versão YH); "Falso. Esta matriz

para ser singular tinha de conter números nulos na parte superior e inferior." (A279, Versão YH); "Falso, $A \neq A^T$." (A74, Versão YD).

Há ainda três alunos que verificam pela definição de inversa se a transposta da matriz é a sua inversa, concluindo que a matriz dada não é singular por isso não acontecer. Neste caso, poderão estar a confundir o conceito de matriz singular com o de matriz ortogonal (Figura 42).

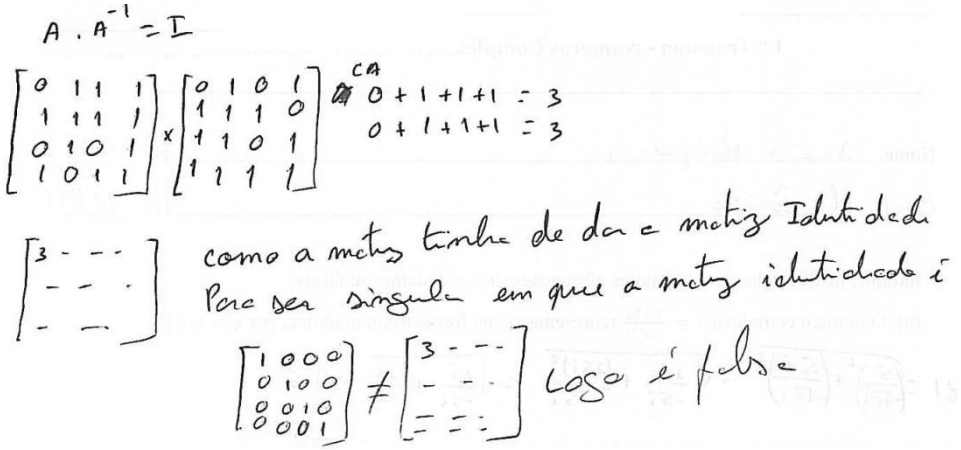


Figura 42. Verificação se a transposta é a matriz inversa (A118, Versão YK).

No raciocínio *dificuldades na determinação da matriz inversa*, os alunos tentam determinar a inversa da matriz para responder à questão. No entanto, verificam-se várias situações:

- Cometem erros no cálculo da adjunta da matriz ao usar o método de determinar a inversa pela adjunta, pois consideram que a matriz adjunta é igual à transposta da matriz dada (1 aluno);
- Consideram a inversa como o inverso de cada uma das entradas da matriz dada (3 alunos, Figura 43);
- Tentam calcular a inversa utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan, mas não concluem o raciocínio (4 alunos, Figura 44);
- Tentam calcular a inversa pela definição, mas não concluem o raciocínio (2 alunos).

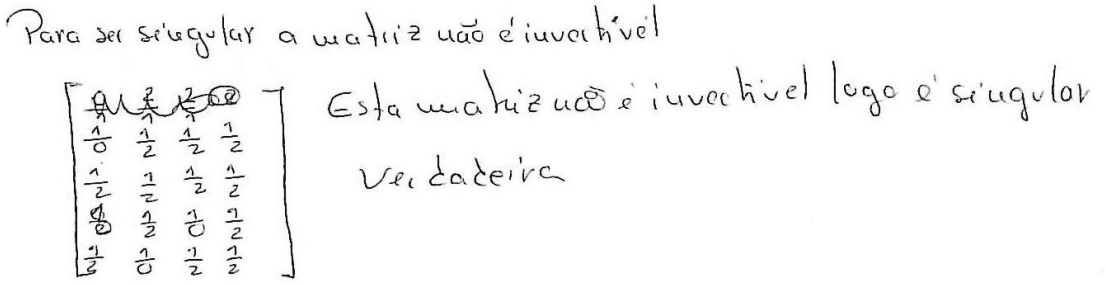


Figura 43. Cálculo da matriz inversa determinando o inverso de cada entrada da matriz dada (A53, Versão YD).

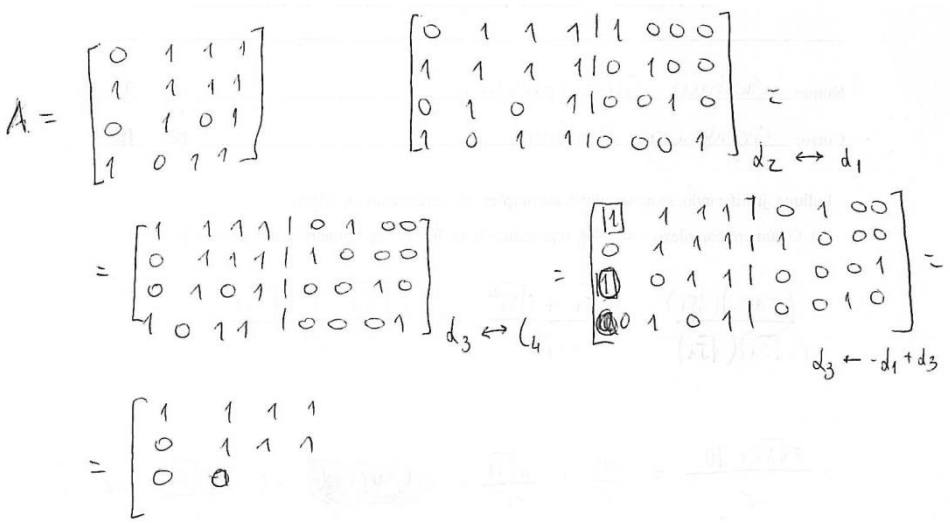


Figura 44. Tentativa de cálculo da matriz inversa pelo método de eliminação de Gauss-Jordan (A110, Versão YK).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação*, os alunos fazem alguns comentários válidos alusivos à situação, mas não os aplicam concretamente aos dados da questão. Por exemplo, "Uma matriz que não é invertível diz-se matriz singular" (A31, Versão YH); "Uma matriz singular não pode ser invertível, para ser invertível não pode ter mais do que uma inversa" (A61, Versão YD); "é invertível se o determinante for diferente de zero" (A244, Versão XE) ou indicam a fórmula de cálculo da inversa de uma matriz (Figura 45).

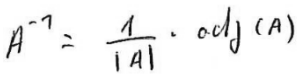


Figura 45. Fórmula de cálculo da inversa com recurso á matriz adjunta (A40, Versão YD).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas* consideraram-se as respostas dos alunos que enunciam propriedades, não mencionadas nas outras categorias, que não são válidas no contexto em causa. Neste caso, um aluno afirma: "Verdadeira. É invertível pois a diagonal principal da matriz é zero" (A11, Versão XE); e outro considerou que a matriz seria invertível se houvesse comutatividade na multiplicação entre a matriz dada e outra matriz que parece escolhida ao acaso (Figura 46).

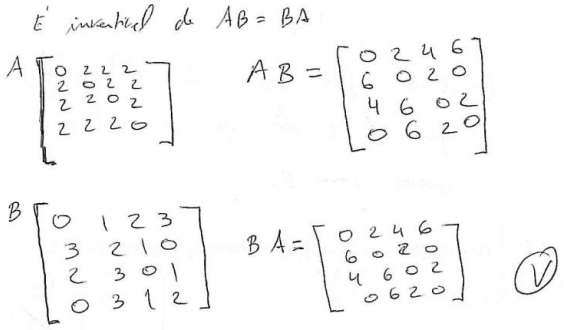


Figura 46. Recurso à comutatividade para justificar a existência de matriz inversa (A30, Versão XI).

De realçar que, neste caso, o aluno obtém $AB = BA$ porque multiplica de forma incorreta as matrizes, já que considera o produto das entradas correspondentes. O aluno parece ter fixado a ideia de que para uma matriz ser inversa da outra elas terão de ser comutáveis, esquecendo-se que o seu produto tem de ser igual à matriz identidade da ordem correspondente à das matrizes dadas.

No raciocínio *interpretação incorreta do resultado obtido* incluíram-se as respostas dos alunos que calcularam o determinante de forma correta, recorrendo ao teorema de Laplace ou às propriedades dos determinantes, mas, face ao resultado obtido, não tiram a conclusão adequada (Figura 47).

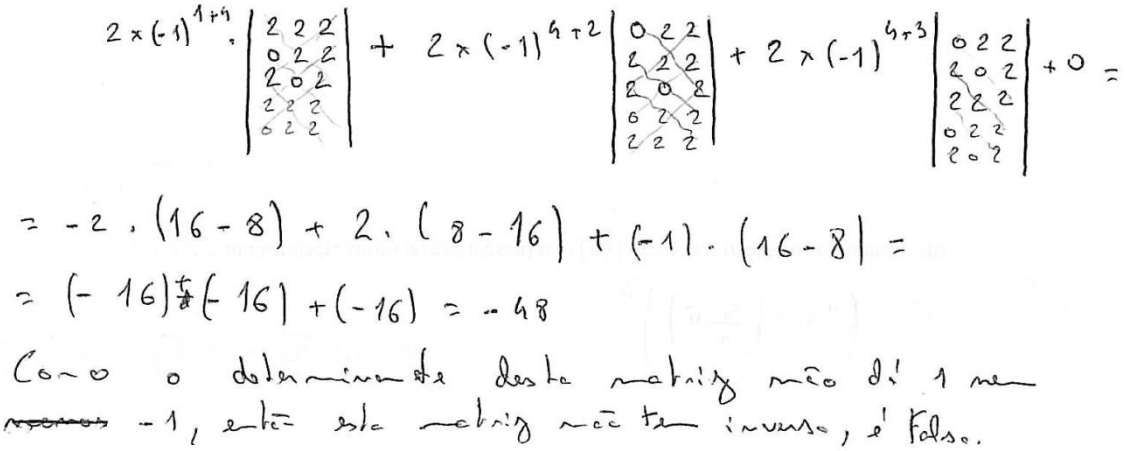


Figura 47. Interpretação incorreta do resultado obtido (A87, Versão XI).

Neste caso, embora o aluno saiba que tem de recorrer ao determinante para chegar a uma conclusão, ele não sabe relacioná-lo de forma correta com o conceito de matriz invertível. A menção ao 1 e -1 como determinante pode indicar que está a relacionar com o facto do determinante de uma matriz ortogonal ser 1 ou -1.

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.1.1.4. Questão 4

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas para cada versão foram:

– Questão do tipo X, que engloba: Versão B — A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; Versão F — A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; Versão J — A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

– Questão do tipo Y, que engloba: Versão C — A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ é inversa de si própria; Versão G — A matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ é inversa de si própria; Versão L — A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ é inversa de si própria.

Esta questão foi respondida por 147 alunos. A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos encontra-se na Tabela 18.

Tabela 18 — Raciocínios dos alunos na questão 4 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios	Tipo de questão		Total
	X	Y	
Válidos (respostas corretas)	35	33	68 (46,2%)
Não válidos	39	28	67 (45,6%)
Sem justificação ou não responde	7	5	12 (8,2%)
Total	81	66	147 (100%)

Os alunos que apresentaram raciocínios válidos justificaram a sua resposta recorrendo à verificação através da definição de inversa de uma matriz (48 alunos, Figura 48) ou calcularam a matriz inversa da matriz dada (20 alunos).

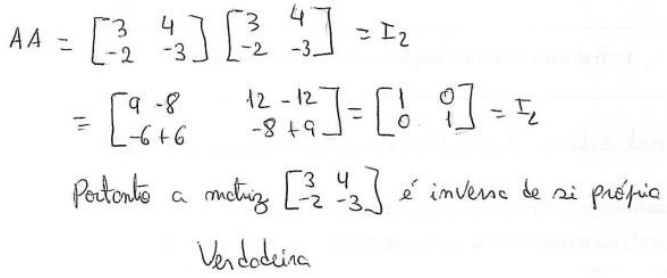


Figura 48. Verificação com base na definição de inversa de uma matriz (A101, Versão YL).

Os alunos que calcularam a matriz inversa recorreram ao processo que envolve o cálculo da matriz adjunta (11 alunos, Figura 49), utilizaram a definição (8 alunos, Figura 50) ou calcularam a inversa recorrendo ao método de eliminação de Gauss-Jordan (1 aluno).

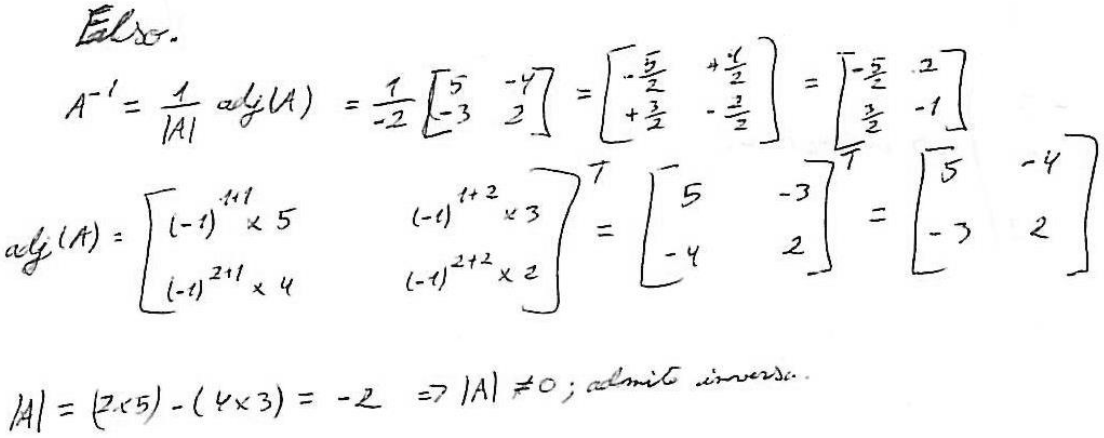


Figura 49. Cálculo da matriz inversa pelo processo da matriz adjunta (A64, Versão XB).

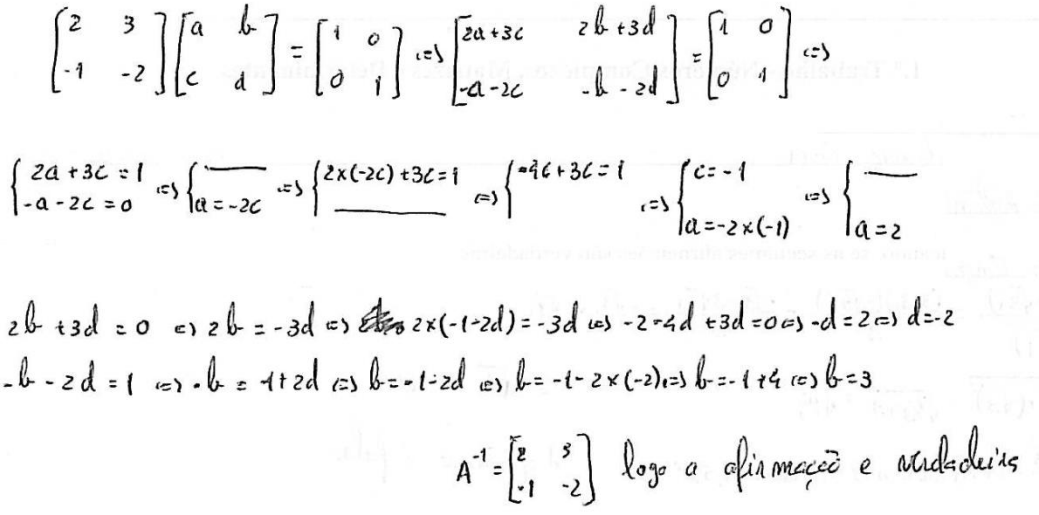


Figura 50. Cálculo da matriz inversa pela definição de inversa de uma matriz (A49, Versão YC).

De notar que 20 dos alunos ainda sente necessidade de determinar a inversa para responder à questão, o que pode denotar ainda uma compreensão mais algorítmica e menos interpretativa do conceito de matriz inversa.

Na categoria *sem justificação ou não responde*, para além da ausência de resposta (5 alunos), integraram-se as respostas dos alunos que apenas mencionaram que a afirmação era verdadeira ou falsa, sem indicar qualquer justificação (7 alunos).

Analisaram-se, de seguida, as 67 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, e estabeleceram-se várias categorias, sendo estas apresentadas na Tabela 19, com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 19 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 4 sobre Matrizes e determinantes

	Tipo de questão		Total
Raciocínios não válidos	X	Y	
Dificuldades na determinação da matriz inversa	23	4	27 (40,3%)
Incompreensão do conceito de matriz inversa	4	8	12 (17,9%)
Recurso a propriedades não válidas	3	8	11 (16,4%)
Dificuldades na multiplicação de matrizes	8	3	11 (16,4%)
Recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação	1	3	4 (6,0%)
Escolha de uma inversa ao acaso	—	2	2 (3,0%)

No raciocínio *dificuldades na determinação da matriz inversa* consideraram-se as resoluções dos alunos que tentaram calcular a inversa da matriz dada por processos adequados, mas que tiveram dificuldades na sua concretização ou que utilizaram regras falsas na determinação da matriz inversa.

Assim, houve 14 alunos que tentaram calcular a inversa recorrendo à matriz adjunta, isto é, usando a fórmula $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$, mas cometeram um dos seguintes erros: consideraram a matriz adjunta igual à transposta da matriz dada (2 alunos, Figura 51) ou à matriz dos cofatores (2 alunos), esquecendo-se neste caso de determinar a transposta da matriz dos cofatores; calcularam incorretamente os cofatores (8 alunos, Figura 52); consideraram a matriz inversa igual à matriz dos cofatores (1 aluno) ou à matriz adjunta, esquecendo-se de determinar o quociente desta pelo determinante da matriz (1 aluno).

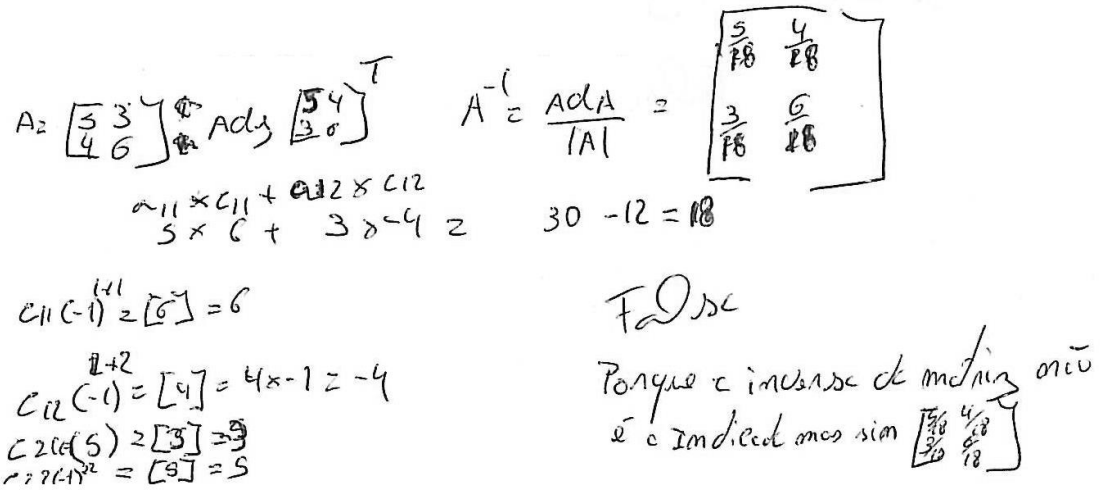


Figura 51. Adjunta como transposta da matriz dada (A147, Versão XJ).

De notar que, neste caso, o aluno calcula corretamente os cofatores, utiliza-os para calcular o determinante, mas não para calcular a adjunta da matriz.

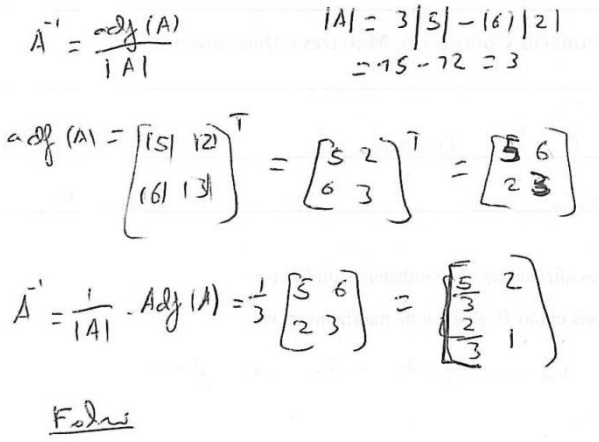


Figura 52. Ignorar os sinais na determinação dos cofatores (A13, Versão XF).

Os erros mencionados remetem essencialmente para dificuldades relacionadas com a aplicação do algoritmo na determinação da inversa. De realçar, novamente, que não havia necessidade de determinar a matriz inversa para responder à questão.

Também houve seis alunos que tentaram determinar a matriz inversa recorrendo à definição de inversa de uma matriz, mas cometeram erros na resolução do sistema ou não acabaram a resolução e estes últimos, com base nos cálculos já efetuados, não tiraram qualquer conclusão relativamente à veracidade da afirmação dada (Figura 53).

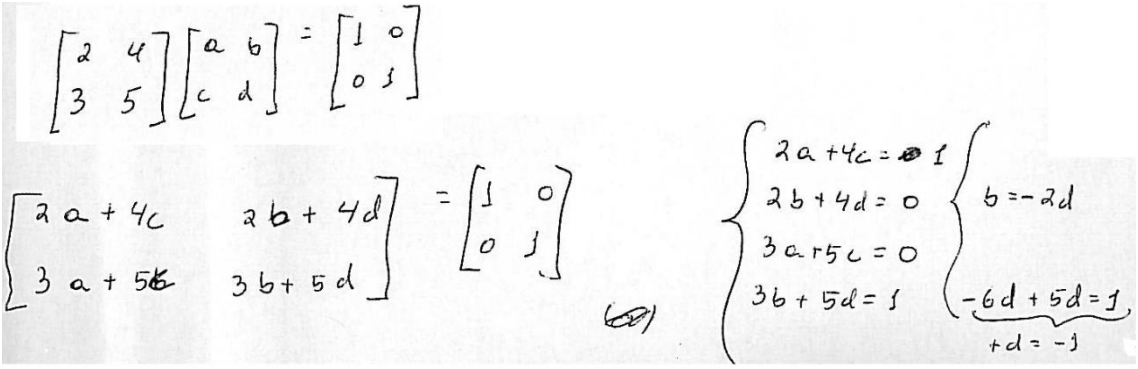


Figura 53. Cálculo da matriz inversa pela definição sem apresentação da conclusão final (A288, Versão XB).

Neste caso, o aluno resolve praticamente tudo o que é necessário para dar a resposta, mas não apresenta qualquer conclusão, eventualmente porque não resolveu até ao fim o sistema.

Há ainda um aluno que aparentemente usou um processo de determinação da inversa por tentativas, pois não apresenta quaisquer cálculos. No entanto, o produto da matriz pela candidata a inversa é quase a identidade, falhando uma das entradas (Figura 54).

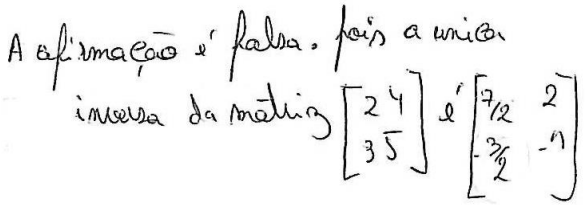


Figura 54. Inversa por tentativa (A65, Versão XB).

No caso da utilização de regras falsas, há seis alunos que, para calcular a matriz inversa, calculam o inverso de cada uma das entradas da matriz dada, concluindo assim que a afirmação é verdadeira (Figura 55).

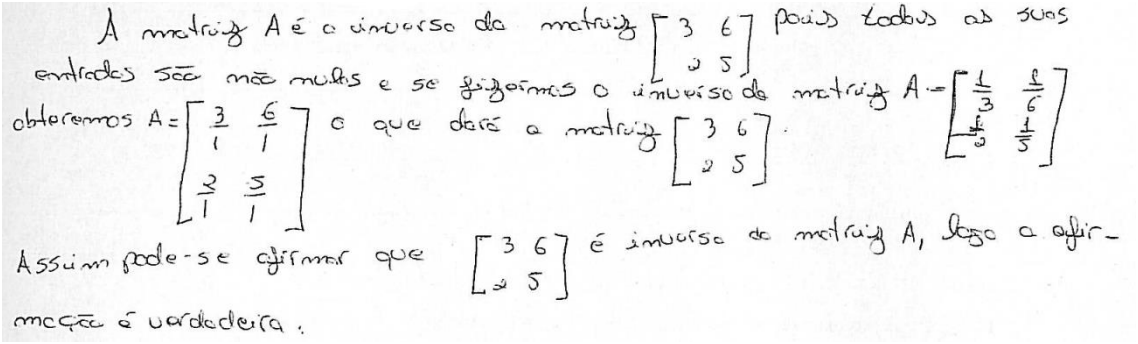


Figura 55. Cálculo da matriz inversa através do inverso de cada uma das entradas (A294, Versão XF).

Neste raciocínio, presente apenas nas questões do tipo X, pode estar patente uma generalização do conceito de inverso de um número real para o contexto das matrizes, ou do caso das matrizes diagonais em que essa propriedade é válida.

No raciocínio *incompreensão do conceito de matriz inversa*, consideraram-se as resoluções dos alunos que mostram ter ideias pouco claras sobre a definição de inversa de uma matriz ou que parecem confundir esse conceito com o de inversa para a adição, ou seja, com o de matriz simétrica de uma dada matriz. Por exemplo: consideram como inversa a matriz simétrica da matriz dada (5 alunos, Figura 56); subtraem ou adicionam as matrizes, em vez de as multiplicar, ao verificar se a matriz é inversa de si própria ou da matriz dada (4 alunos, Figura 57); quando tentam determinar a inversa pela definição consideram que o resultado da multiplicação tem de ser a matriz nula (1 aluno, Figura 58); consideram como produto uma das matrizes dadas e tentam determinar a matriz que multiplicada pela outra matriz dada dê esse produto (1 aluno, questão do tipo X); ou classificam incorretamente a matriz dada como matriz singular (1 aluno, questão do tipo Y), sem qualquer justificação adicional. Nos primeiros casos, talvez exista alguma confusão entre inverso para a adição e inverso para a multiplicação.

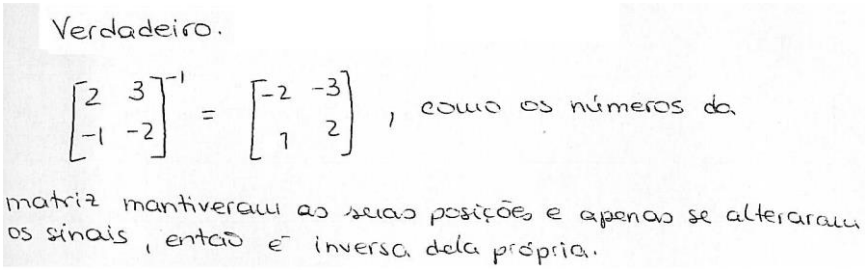


Figura 56. Confusão de matriz inversa com matriz simétrica (A183, Versão YC).

De realçar que, neste caso, o aluno, para além de determinar de forma incorreta a inversa, também não parece ter uma ideia muito clara do que significa igualdade de matrizes. Nos outros casos, os alunos, no geral, concluem que a afirmação é falsa, já que têm presente o conceito adequado de igualdade de matrizes.

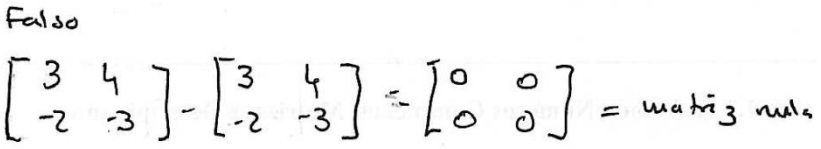


Figura 57. Subtração das matrizes para verificar se a matriz dada é inversa de si própria (A85, Versão YL).

No exemplo seguinte (Figura 58), está implícito que o aluno considera que, ao realizar a multiplicação da matriz pela sua inversa, deve obter a matriz nula, já que resolve um sistema homogéneo. De notar que o aluno demonstra ter também bastantes dificuldades na resolução do sistema.

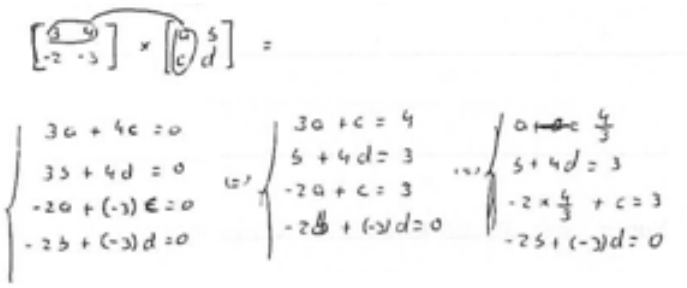


Figura 58. Matriz nula como resultado do produto (A121, Versão YL).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas* consideraram-se as respostas dos alunos que enunciam propriedades que não são válidos no contexto em causa. Por exemplo, consideram que a candidata a matriz inversa é a transposta da matriz dada (questão tipo Y), ou de uma das matrizes dadas (questão tipo X). Seguidamente, ou fazem a verificação pela definição, concluindo que o produto não é a matriz identidade (Figura 59) ou assumem que, como a matriz dada não é igual à sua transposta, a afirmação é falsa (Figura 60). Há ainda um aluno que determina a inversa da matriz e a sua transposta e, como elas não são iguais, conclui que "a matriz não é inversa de si própria" (A126, Versão Y).

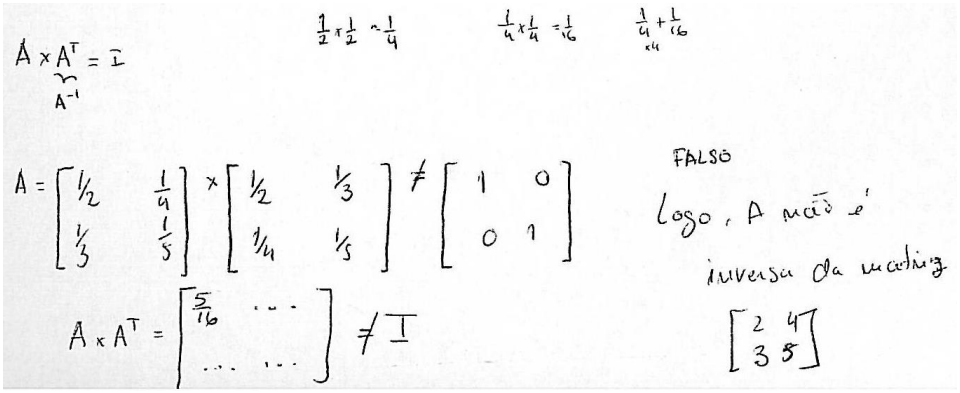


Figura 59. Matriz transposta como candidata a inversa (A195, Versão XB).

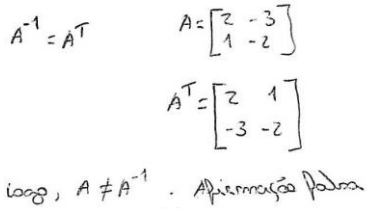


Figura 60. Matriz transposta como candidata a inversa (A16, Versão YG).

Nestes casos, parece estar subjacente a confusão com o conceito de matriz ortogonal, em que se verifica que a inversa da matriz é igual à sua transposta.

Há ainda um aluno que considera que, pelo facto dos determinantes da matriz dada e da sua transposta serem iguais, já se pode considerar que são inversa uma da outra (Figura 61), pelo que está também subjacente a ideia de ligação da transposta com a inversa.



Figura 61. Influência da igualdade dos determinantes de A e A^T (A8, Versão YC).

Outro aluno utiliza uma fórmula sem sentido para calcular a inversa, pois considera que a inversa de A é igual ao inverso do determinante de A, talvez fazendo confusão com a propriedade $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$, focada nas aulas.

No raciocínio *dificuldades na multiplicação de matrizes* consideraram-se as resoluções dos alunos que recorreram à definição de matriz inversa para dar a sua resposta, ou para verificação ou para calcular a inversa, mas não efetuaram a multiplicação de forma correta. Assim, por exemplo, multiplicam as entradas correspondentes (2 alunos, Figura 62) ou utilizam outros algoritmos não adequados para multiplicar as matrizes (Figura 63), que, em alguns casos, se assemelham às propriedades da distributividade da multiplicação em relação à adição, válidas para números reais.

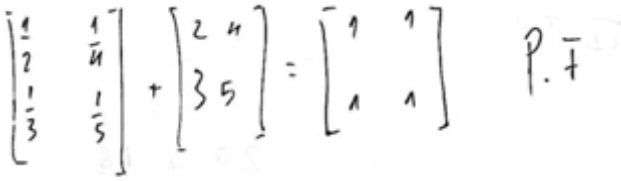


Figura 62. Multiplicação das entradas correspondentes da matriz (A82, Versão XB).

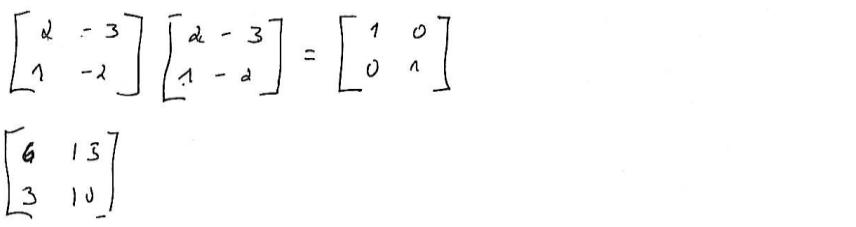


Figura 63. Multiplicação utilizando um algoritmo que não é válido (A25, Versão YG).

Neste caso, está implícito que o aluno realizou as seguintes operações: para a primeira linha, primeira coluna: $2\times 2+2\times 1$; para a primeira linha, segunda coluna: $(-3)\times(-3)+(-3)\times(-2)$; para a segunda linha, primeira coluna: $1\times 2+1\times 1$; e para a segunda linha, segunda coluna: $(-2)\times(-3)+(-2)\times(-2)$.

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação* consideraram-se as respostas dos alunos que enunciam propriedades ou apresentam resoluções que, embora corretas, não são relevantes para justificar a resposta ou não são aplicadas à questão em causa. Por exemplo, há alunos que calculam o determinante da matriz dada (questão do tipo Y) e concluem que ela é invertível, o que é uma afirmação correta, mas não dá diretamente resposta à questão (3 alunos, Figura 64).

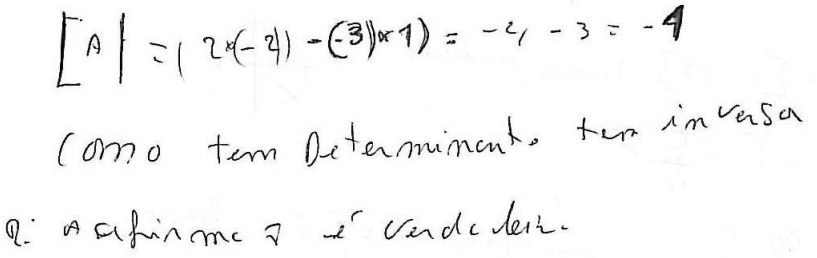


Figura 64. Cálculo do determinante (A7, Versão YG).

Neste caso, há também um pequeno engano nos cálculos finais por causa dos sinais.

Já o aluno A310 tira conclusões corretas sobre o que aconteceria se as duas matrizes fossem inversas uma da outra, mas não aplica o seu raciocínio às matrizes dadas (Figura 65).

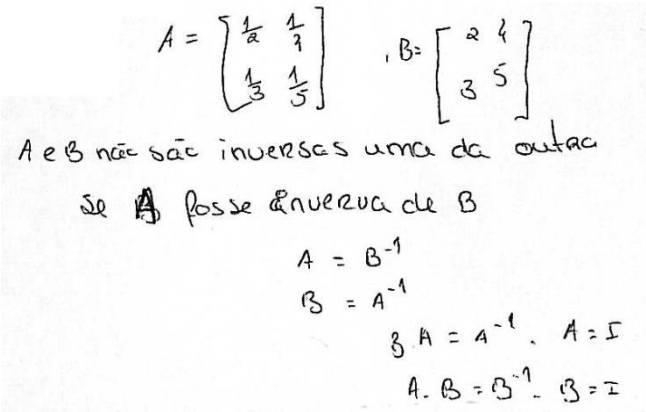


Figura 65. Argumentos genéricos sem aplicação à situação (A310, Versão XB).

No raciocínio *escolher uma inversa ao acaso,* os alunos escolhem uma inversa concreta e verificam pela definição se é inversa da matriz dada (Figura 66).

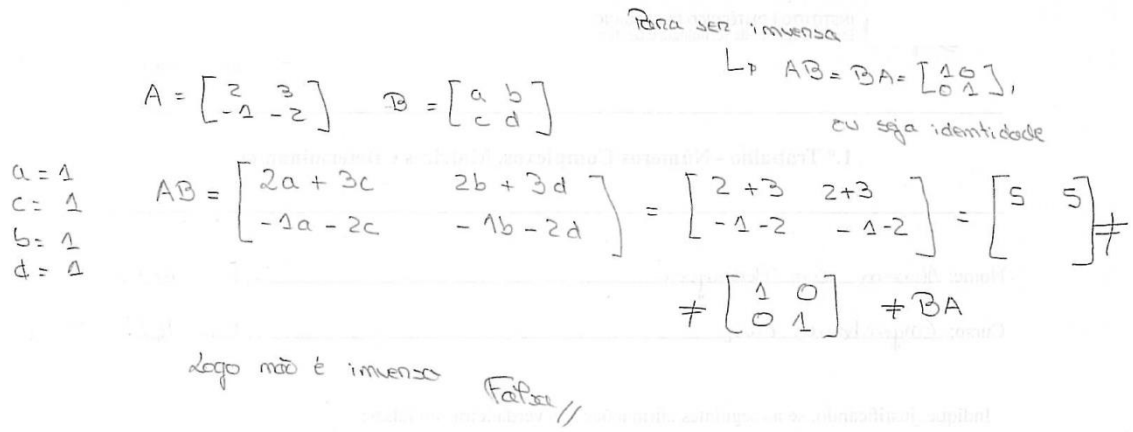


Figura 66. Escolha de uma inversa ao acaso (A50, Versão YC).

4.1.1.5. Questão 5

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas para cada tipo de questão foram:

- Questão do tipo X — Se A e B são matrizes invertíveis, então $A+B$ é uma matriz invertível;
- Questão do tipo Y — Se A e B são matrizes singulares, então $A+B$ é uma matriz singular.

A questão do tipo X engloba as versões B, F e L e a questão do tipo Y engloba as versões C, G e J. As variações que existem dentro de cada versão são apenas de troca de posições das letras A e B.

Esta questão foi respondida por 147 alunos. A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos encontra-se na Tabela 20.

Tabela 20 — Raciocínios dos alunos na questão 5 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios	Tipo de questão		Total
	X	Y	
Válidos (respostas corretas)	13	2	15 (10,2%)
Não válidos	43	43	86 (58,5%)
Sem justificação ou não responde	24	22	46 (31,3%)
Total	80	67	147 (100%)

Os alunos, que responderam corretamente, apresentaram ou fizeram referência a um exemplo concreto que não verificasse a afirmação dada, ou seja, um contraexemplo (11 alunos, Figura 67), ou aludiram à dimensão das matrizes fazendo notar que, se utilizarem matrizes de dimensão diferente, não é possível adicioná-las (3 alunos, Figura 68). No primeiro caso, tem-se como exemplo:

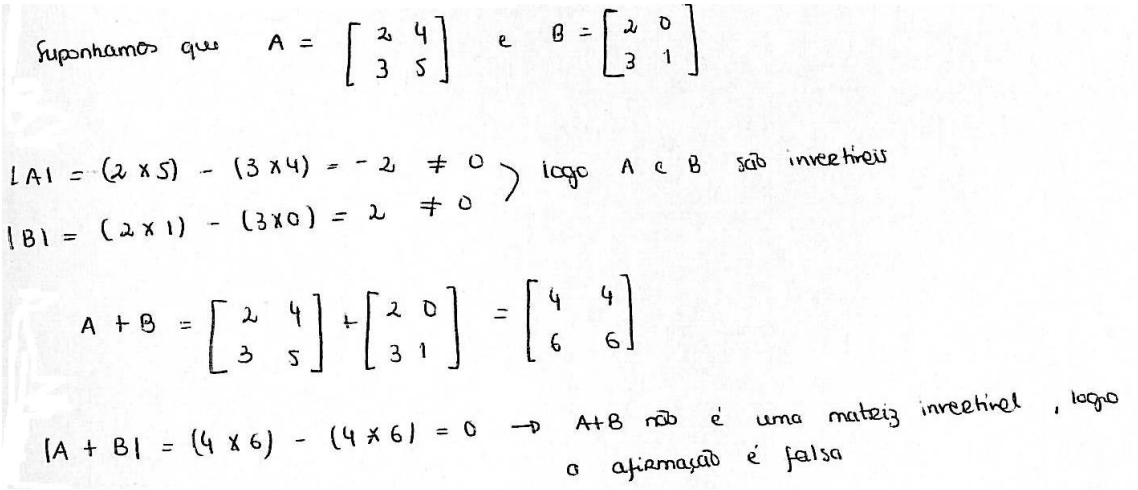


Figura 67. Recurso a um contraexemplo (A220, Versão XB).

Ainda dentro do primeiro caso, mas de uma forma menos concreta, o aluno A215 afirma: "O facto de A e B serem singulares implica que não têm inversa. Supondo que A e B são matrizes singulares por serem matrizes diagonais cujas diagonais principais têm no mínimo um elemento nulo, a soma destas pode inverter isso, isto é, a diagonal principal da matriz resultante pode ter todos os elementos diferentes de zero". (Versão YC).

No segundo caso, por exemplo, o aluno A134 apresentou uma matriz de dimensão dois e outra de dimensão três, concluindo que não era possível adicionar as matrizes.

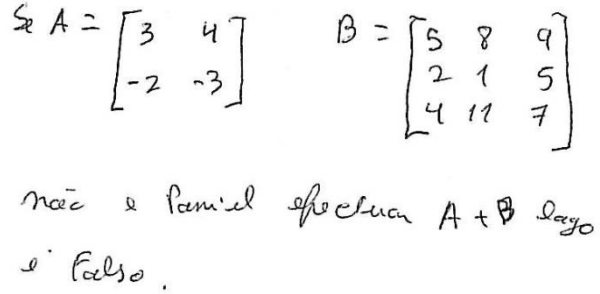


Figura 68. Referência à dimensão das matrizes (A134, Versão XL).

Na categoria *sem justificação ou não responde*, para além da ausência de resposta (25 alunos), integraram-se as respostas dos alunos que classificaram a afirmação como verdadeira

ou falsa (21 alunos), mas sem indicar qualquer justificação ou apenas reescrevendo a afirmação dada ou a sua negação.

Analisaram-se as 86 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 21, com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 21 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 5 sobre Matrizes e determinantes

Raciocínios não válidos	Tipo de questão		Total
	X	Y	
Exemplo que verifica a afirmação	15	7	22 (25,6%)
Incompreensão do conceito de matriz invertível/singular	10	12	22 (25,6%)
Recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação	6	6	12 (13,9%)
Influência do zero na diagonal principal	3	8	11 (12,8%)
Recurso a propriedades não válidas	5	5	10 (11,6%)
Exemplo que não verifica a hipótese	1	4	5 (5,8%)
Análise incompleta	1	—	1 (1,2%)
Dificuldades na determinação da matriz inversa	1	—	1 (1,2%)
Outros	1	1	2 (2,3%)

No raciocínio *exemplo que verifica a afirmação*, os alunos partem de duas matrizes que obedecem à hipótese, mas que geram um exemplo para o qual a afirmação dada é válida, pelo que concluem que a afirmação é verdadeira (Figura 69).

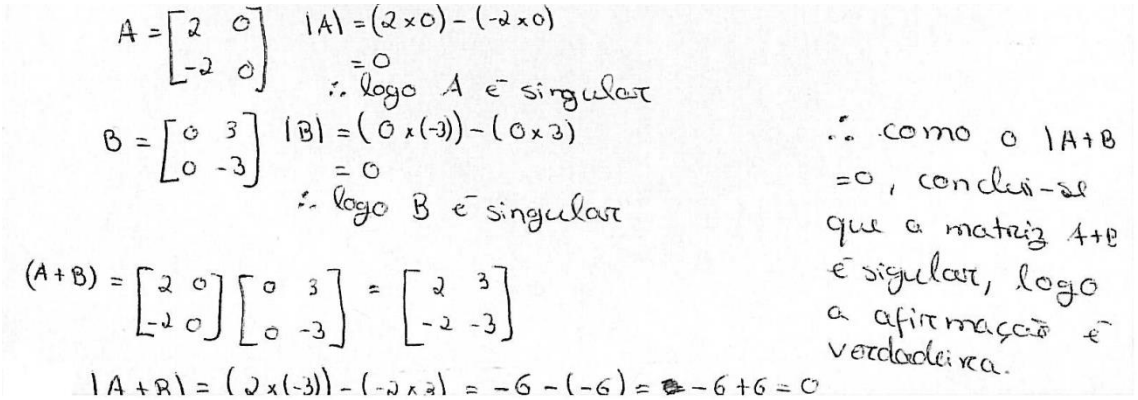


Figura 69. Exemplo que verifica a afirmação (A159, Versão YC).

Nestes casos, está subjacente a ideia de que basta um exemplo para validar uma afirmação geral, pelo que se conclui que alguns alunos têm dificuldades em aspetos de lógica.

No raciocínio *incompreensão do conceito de matriz invertível/singular* incluíram-se os raciocínios dos alunos que mostram, de forma explícita ou implícita, não ter ideia do que é uma

matriz singular/invertível, na medida em que apresentam como exemplos matrizes singulares/invertíveis que o não são ou classificam incorretamente a matriz soma que obtêm.

Por exemplo, o aluno A225 (Figura 70), na sua justificação, recorre a matrizes de ordem dois que aparentemente considera singulares, mas que são invertíveis, e considera também a matriz soma como matriz singular, pelo que o seu raciocínio denota incompreensão do significado de matriz singular.

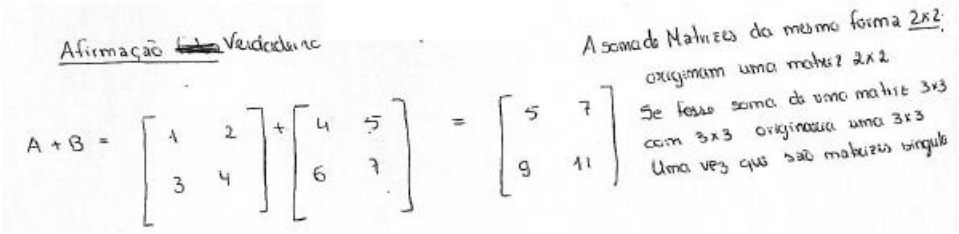


Figura 70. Classificação incorreta das matrizes como singulares (A225, Versão YC).

Já o aluno A173 (Figura 71), embora inicialmente demonstre ter a perceção do significado de inversa de uma matriz, não aplica devidamente esse conceito para a matriz soma que obtém, o que denota ainda alguma incompreensão do conceito de matriz invertível.

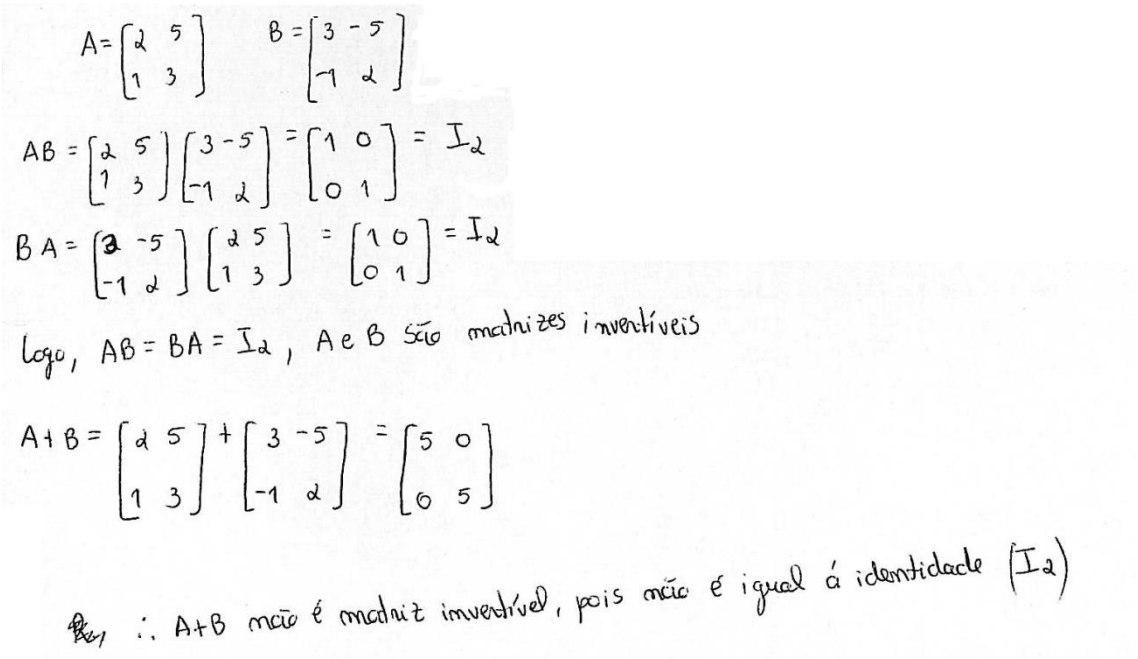


Figura 71. Classificação incorreta da matriz soma (A 173, Versão XB).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação* consideraram-se as respostas dos alunos que enunciam propriedades ou apresentam resoluções que, embora corretas, não são relevantes para justificar a resposta ou não são aplicados pelos alunos à questão em causa. Por exemplo, "A soma de matrizes goza da propriedade comutativa"

(A92, Versão XL); "Não, pois para ser invertível AB tinha de ser igual a BA e esta por sua vez igual à identidade ou seja $AB = BA = I_n$" (A290, Versão XF) ou "Se A e B forem matrizes do mesmo tipo, então a soma $A + B$ é uma matriz do mesmo tipo. Só é possível adicionar matrizes do mesmo tipo" (A171, Versão YC). Neste último caso, também pode haver alguma confusão com o significado de tipo de matrizes, na medida que o aluno parece considerar que a matriz singular é o tipo de matrizes no sentido desta definição.

No raciocínio Influência do zero na diagonal principal consideraram-se as respostas dos alunos que partem do pressuposto de que se a matriz tiver zeros na diagonal principal é singular (questão do tipo Y): "Falso. $B + A$ pode não ser uma matriz singular pois com a soma podemos ficar sem zeros na diagonal principal" (A238, Versão YG); ou que, de modo similar, consideram que para uma matriz ser invertível não pode ter zeros na diagonal principal (questão do tipo X, Figura 72).

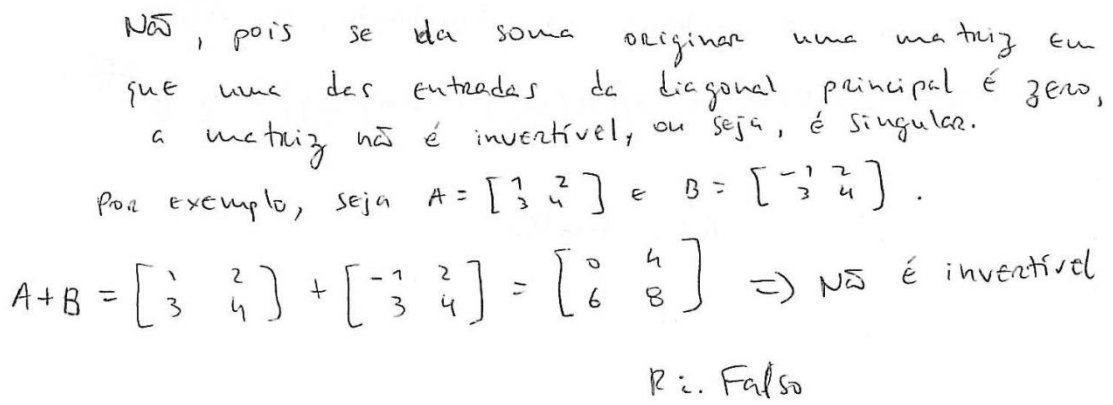


Figura 72. A matriz não é invertível quando tem zeros na diagonal principal (A137, Versão XL).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas* consideraram-se as respostas dos alunos que baseiam a sua justificação em propriedades que não são verdadeiras e que não estão incluídas em qualquer das outras categorias, mencionando-as diretamente ou que estão implícitas nos exemplos que apresentam. Assim, há seis alunos que consideram como propriedade válida: o determinante da soma igual à soma dos determinantes (Figura 73).

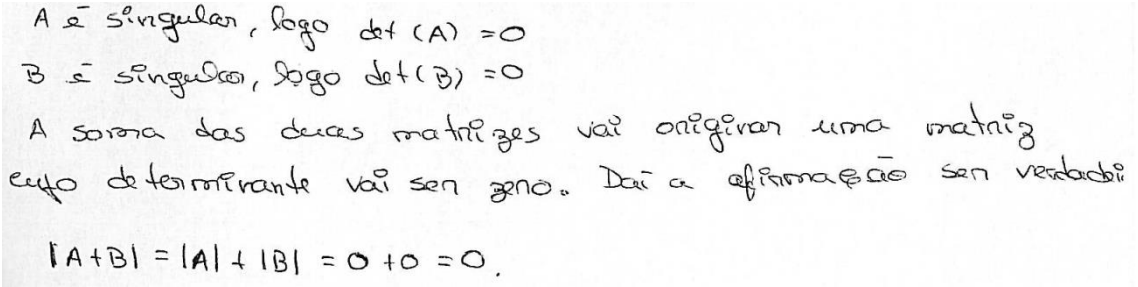


Figura 73. Determinante da soma como soma dos determinantes (A194, Versão YC).

Os outros quatro alunos fazem referência a falsas propriedades no contexto da invertibilidade das matrizes, por exemplo: "Se B não for inversa de A então $A+B$ não é singular" (A148, Versão YJ).

No raciocínio *exemplo que não verifica a hipótese*, os alunos partem de um exemplo de matrizes que não verificam a hipótese e tiram a conclusão de que a afirmação é falsa, que é a conclusão correta. Deste modo, estes alunos não provam a falsidade da afirmação pretendida, pois, se se considerar p o antecedente e q o consequente da implicação que representa a afirmação dada, os alunos, em vez de provarem que $p \Rightarrow q$ é falsa, provam que $\neg p \Rightarrow q$ é falsa (Figura 74).

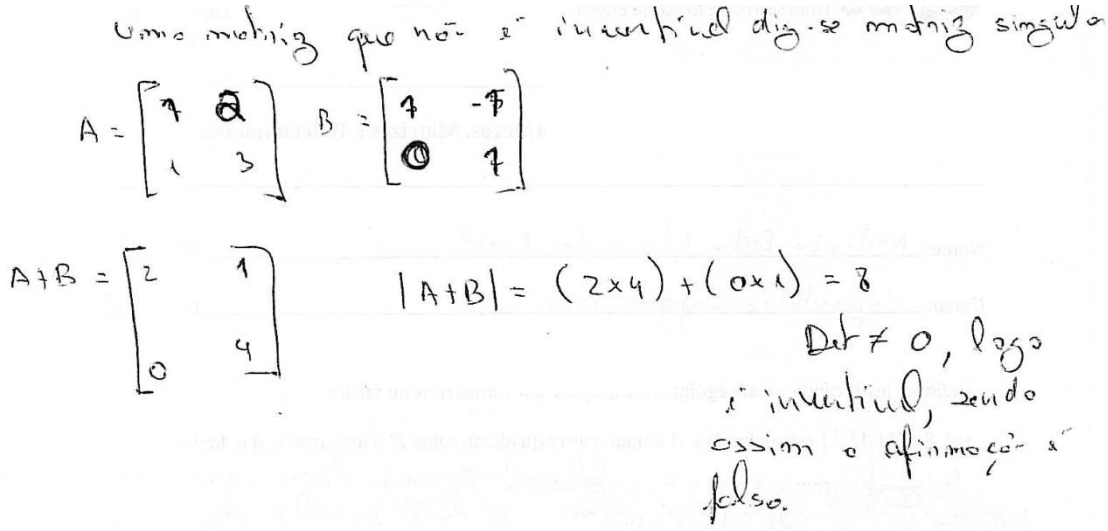


Figura 74. Matrizes que não verificam a hipótese (A242, Versão YG).

Como se pode verificar pelo exemplo, o aluno A242 parte de duas matrizes que não são singulares, em vez de partir de matrizes singulares, e chega à conclusão correta que a matriz soma resultante é invertível. A conclusão de que a afirmação é falsa deve provir apenas do facto da matriz resultante não verificar o consequente. Assim, neste caso, o aluno provou a falsidade da afirmação "Se A e B são matrizes não singulares, então $A+B$ é uma matriz singular", que não é equivalente à afirmação dada.

No raciocínio *análise incompleta* considerou-se a justificação de um aluno que apresenta argumentos válidos e aplicáveis à situação, mas que não explicita totalmente: "Falsa. A e B podem ser matrizes invertíveis, com o determinante diferente de 0. E $A+B$ pode ser uma matriz não invertível, tendo o determinante igual a 0" (A65, Versão XB).

No raciocínio *dificuldades na determinação da matriz inversa*, o aluno calcula a inversa da matriz dada considerando o inverso de cada uma das suas entradas (Figura 75).

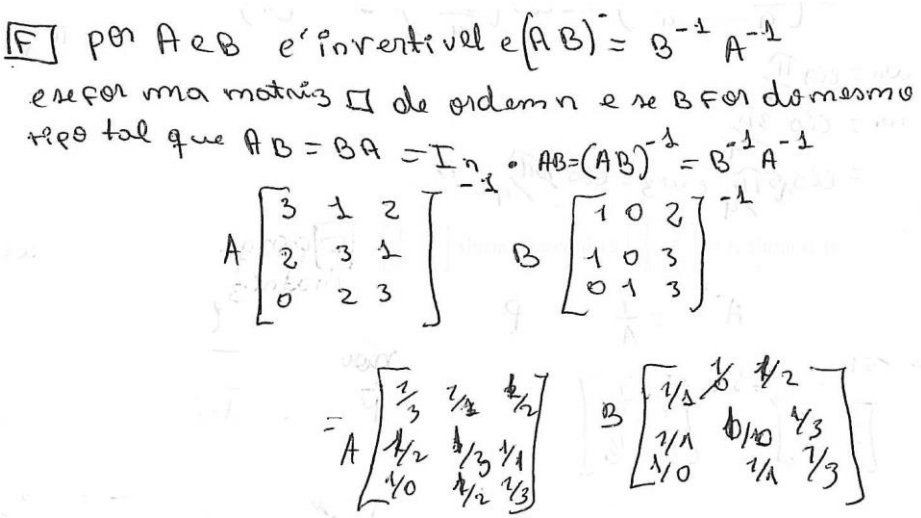


Figura 75. Calcular a matriz inversa como o inverso de cada uma das entradas (A69, Versão XB).

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.1.2. Sistemas de equações lineares – Análise das respostas e raciocínios dos alunos

O trabalho sobre o tema Sistemas de equações lineares foi realizado por 242 alunos. Este contempla duas questões, uma delas com duas alíneas, havendo quatro versões diferentes: A, B, C e D (Anexo III), tendo cada aluno respondido apenas a uma das versões. Face a esse facto, a ordem das questões a seguir apresentada pode ser, em alguns casos, diferente da que consta do enunciado fornecido aos alunos.

4.1.2.1. Questão 1

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas para cada versão foram: Versão A — Um sistema com 2 equações lineares e 3 incógnitas pode ter exatamente três soluções; Versão B — Um sistema com 3 equações lineares e 3 incógnitas pode ter exatamente três soluções; Versão C — Um sistema com 3 equações lineares e 2 incógnitas pode ter exatamente três soluções; Versão D — Existem sistemas de equações lineares com exatamente três soluções.

Na Tabela 22 apresenta-se a distribuição dos raciocínios dos alunos nas respostas da questão 1 segundo a classificação em válidos e não válidos.

Tabela 22 — Raciocínios dos alunos na questão 1 sobre Sistemas

Raciocínios	Versão				Total
	A	B	C	D	
Válidos (respostas corretas)	10	15	6	18	49 (20,3%)
Não válidos	42	38	48	30	158 (65,3%)
Sem justificação ou não responde	7	8	5	15	35 (14,4%)
Total	59	61	59	63	242 (100%)

Os alunos que apresentaram *raciocínios válidos* enunciaram o tipo de soluções que poderiam obter nas condições dadas, relacionando (ou não) com a respetiva classificação de sistemas. Por exemplo, "Não. Apenas existem sistemas sem solução, com uma solução, ou com um número infinito de soluções, ou seja, não existe nenhum sistema de equações lineares com 3 soluções (Falsa)" (A190, versão D) ou "Falso. Um sistema pode ser possível e determinado se tiver uma e só uma solução, pode ser possível e indeterminado se tiver infinitas soluções e pode ser impossível se não tiver nenhuma solução, como tal não é possível um sistema, seja qual for o número de equações e o número de incógnitas, ter exatamente três soluções" (A194, Versão B).

Na categoria *sem justificação ou não responde*, integraram-se, para além da ausência de resposta (19 alunos), as respostas dos alunos que apenas mencionaram se a afirmação era verdadeira ou falsa, sem indicar qualquer justificação (16 alunos).

Seguidamente analisaram-se os 158 raciocínios não válidos e realizou-se a respetiva categorização, que se apresenta na Tabela 23.

Tabela 23 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 1 sobre Sistemas

Raciocínios não válidos	Versão				Total
	A	B	C	D	
Assumir um determinado tipo de sistema	23	9	15	8	55 (34,8%)
Confusão de solução com valores das variáveis	2	20	14	11	47 (29,8%)
Associação do número de soluções com o número de equações	11	1	7	1	20 (12,7%)
Incompreensão do conceito de infinidade de soluções	2	3	4	4	13 (8,2%)
Confusão entre solução e tipo de sistema	1	2	4	3	10 (6,3%)
Incompreensão do significado de sistema homogéneo	2	–	1	–	3 (1,9%)
Conceções que envolvem o conceito de determinante	1	–	–	–	1 (0,6%)
Análise incompleta	–	–	–	1	1 (0,6%)
Outros	–	3	3	2	8 (5,1%)

Na categoria *assumir um determinado tipo de sistema*, os alunos baseiam a sua resposta num tipo de sistema específico, apresentando, por vezes, um exemplo concreto, pelo que não analisam todas as hipóteses possíveis. Assim, há alunos que assumem que o sistema é possível e determinado, como o aluno A236: "Falso. Um sistema com o mesmo número de equações e de incógnitas só pode ter uma solução porque é um sistema possível e determinado" (Versão B), enquanto o aluno A223 apresenta o exemplo da Figura 76.

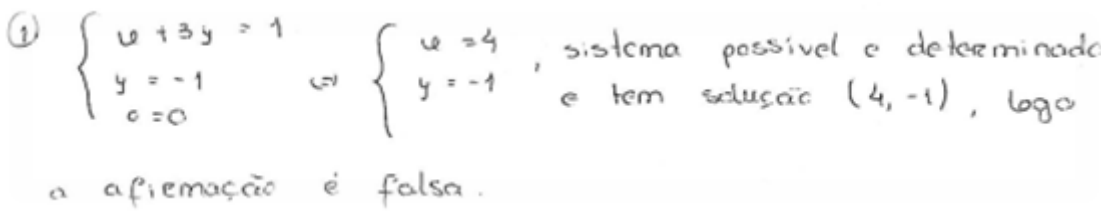


Figura 76. Apresentação de um exemplo de sistema possível e determinado (A223, Versão C).

Há também alunos que afirmam que o sistema é impossível, como aconteceu com o aluno A137: "Não. Como o número de equações é maior que o número de incógnitas, o sistema é impossível, logo não tem solução. Falso" (Versão C). E outros consideram que o sistema é possível e indeterminado, como aconteceu com o aluno A101 (Figura 77).

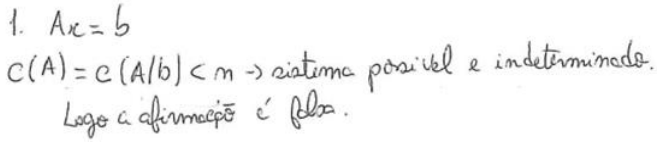


Figura 77. Referência a uma classe de exemplos de sistemas possíveis e indeterminados (A101, Versão A).

Algumas respostas dos alunos traduzem também conceções incorretas da relação entre o número de equações e incógnitas dos sistemas e as suas soluções, na medida em que consideram que um sistema com mais equações do que incógnitas é impossível (ver resposta do aluno A137) e um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas tem de ser possível e determinado (ver resposta do aluno A236). Inclusivamente, um aluno afirma que "só podemos resolver sistemas em que temos o número de equações igual ao número de incógnitas" (A213, Versão A).

No raciocínio *confusão de solução com valores das variáveis*, os alunos consideram o valor de cada variável como uma solução do sistema. Por exemplo, dão como resposta: "Falso. Pois um sistema tendo só 2 incógnitas só pode ter exatamente 2 soluções, tendo 3 equações lineares" (A210, Versão C) ou fazem a correspondência do número de soluções com o número de incógnitas concretizando o sistema (Figura 78 e Figura 79).

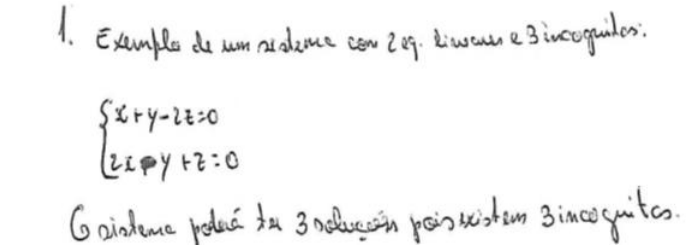


Figura 78. Recurso a um exemplo para considerar três soluções para o sistema (A127, Versão A).

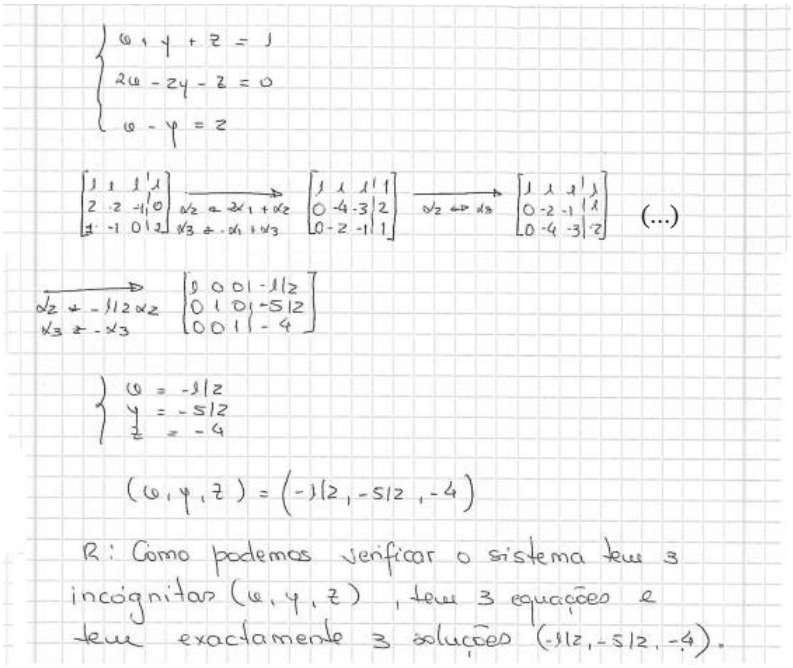


Figura 79. Recurso a um exemplo para considerar três soluções para o sistema (A44, Versão B).

No raciocínio *associação do número de soluções com o número de equações do sistema*, os alunos consideram que o número de soluções do sistema é (ou pode ser) igual ao número equações. Por exemplo, "Falso, porque um sistema com 2 equações lineares e 3 incógnitas terá 2 soluções" (A113, Versão A). Considerou-se também incluído neste raciocínio a resposta de um aluno que apresenta a representação gráfica e considera que as soluções correspondem aos pontos de interseção das retas duas a duas (Figura 80).

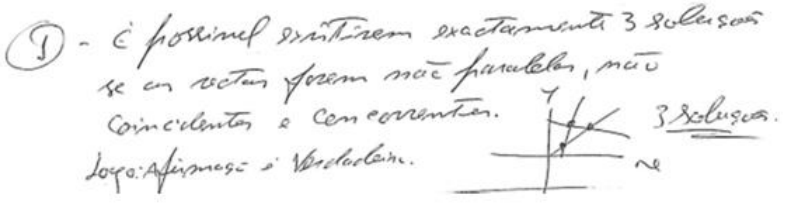


Figura 80. Soluções definidas pelos pontos de interseção das retas duas a duas (A158, Versão C).

No raciocínio *incompreensão do conceito de infinidade de soluções*, os alunos consideram que há equivalência entre o significado "sistema possível e indeterminado" (com uma infinidade de soluções) com o significado "sistema com exatamente 3 soluções", o que traduz alguma

incompreensão do que significa infinidade de soluções. Por exemplo: "A afirmação é verdadeira, pois um sistema de equações lineares, pode ter exatamente 3 soluções, se for um sistema possível e indeterminado, isto é, tem uma infinidade de soluções (neste caso podem ser só 3 soluções)." (A200, Versão D).

No raciocínio *confusão entre solução e tipo de sistema*, os alunos consideram que as três soluções correspondem à classificação de sistemas: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. Por exemplo: "Falso. Um sistema com 3 equações lineares e 2 incógnitas só pode ter 3 tipos de soluções: o sistema ser impossível; pode ser possível determinado (ter apenas uma solução) e ser possível indeterminado (ter uma infinidade de soluções)." (A109, Versão C).

No raciocínio *incompreensão do significado de sistema homogéneo*, os alunos inventam um sistema homogéneo que obedeça às condições dadas, mas consideram que a única solução possível é a solução nula, mesmo quando está patente que o sistema é possível e indeterminado (Figura 81).

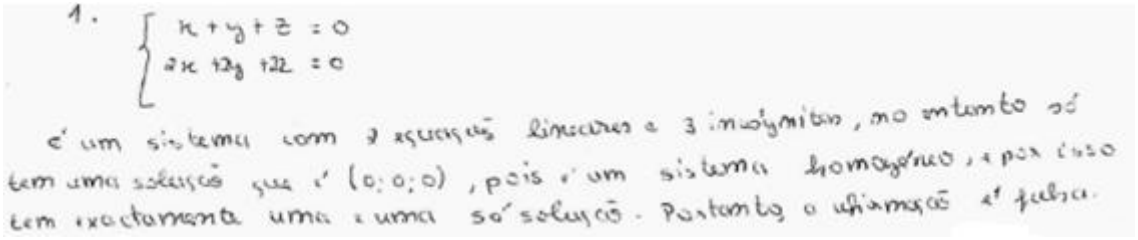


Figura 81. Sistema homogéneo como podendo ter somente a solução nula (A180, Versão A).

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de determinante*, os alunos inventam um sistema que obedece às condições dadas, calculando o valor do determinante quando a matriz dos coeficientes não é quadrada (Figura 82).

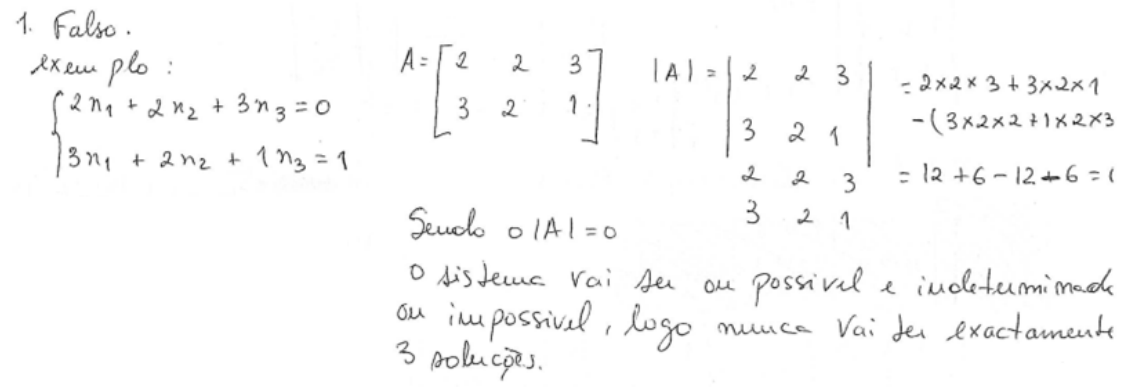


Figura 82. Falsas fórmulas no cálculo do determinante (A202, Versão A).

No raciocínio *análise incompleta*, o aluno, embora faça uma afirmação que poderia justificar o facto de não existirem sistemas com exatamente três soluções, não a desenvolve no sentido de dar uma explicação mais explícita, pois apenas afirma: "Falso, pois nenhum sistema de equações lineares pode ter expoente nas incógnitas superior a 1" (A152, Versão D).

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.1.2.2. Questão 2a)

Nesta questão, pretendia-se que os alunos averiguassem se um vetor dado era ou não solução do sistema de equações lineares homogéneo, cujos dados eram apresentados na forma de matriz dos coeficientes (Anexo III).

Na Tabela 24 apresenta-se a distribuição dos raciocínios dos alunos nas respostas da questão 2a), segundo a classificação em válidos e não válidos.

Tabela 24 — Raciocínios dos alunos na questão 2a) sobre Sistemas

Raciocínios	Versão				Total
	A	B	C	D	
Válidos (respostas corretas)	19	16	5	27	67 (27,7%)
Não válidos	28	30	43	28	129 (53,3%)
Sem justificação ou não responde	12	15	11	8	46 (19,0%)
Total	59	61	59	63	242 (100%)

As respostas corretas, baseadas em raciocínios válidos, resultaram de três tipos de raciocínios:

- Substituição das incógnitas pela solução proposta e verificação da obtenção ou não de proposições verdadeiras (36 alunos, Figura 83);
- Resolução do sistema pelo método da substituição (17 alunos, Figura 84);
- Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (14 alunos, Figura 85).

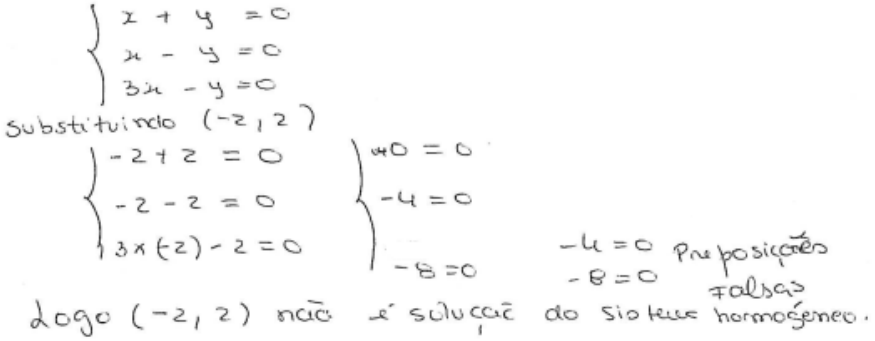


Figura 83. Substituição das incógnitas pela solução proposta (A212, Versão D).

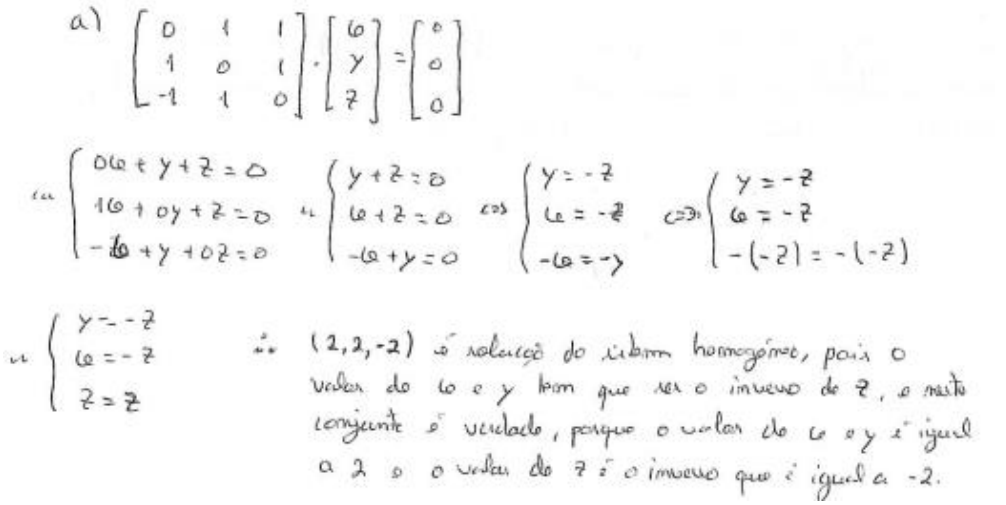


Figura 84. Resolução do sistema pelo método da substituição (A103, Versão A).

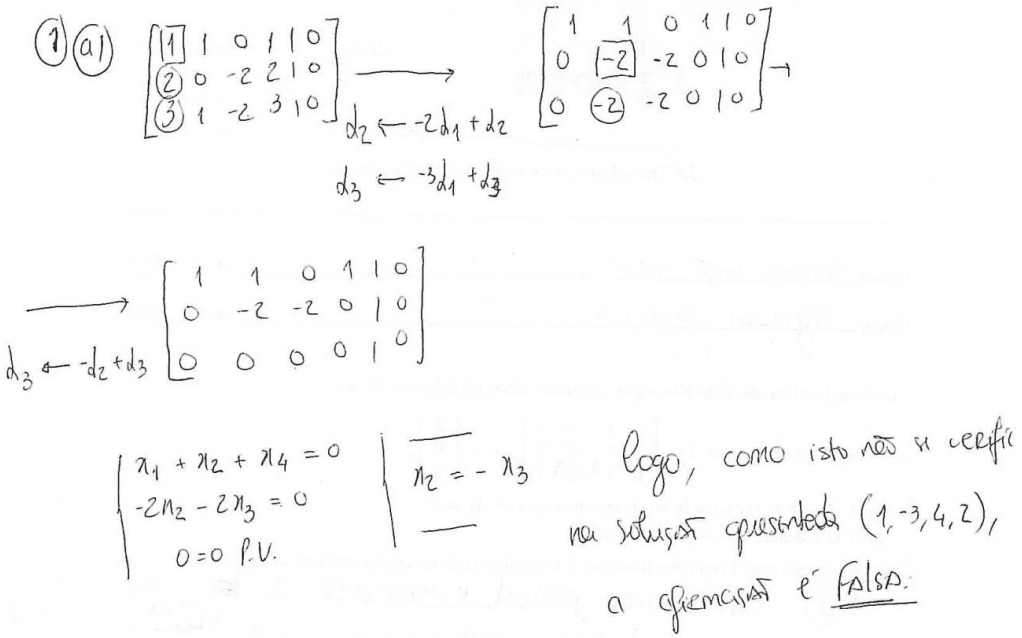


Figura 85. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (A110, Versão B).

Nestas respostas incluíram-se também os casos em que foram cometidos erros de cálculo pontuais (erros de adição, troca de sinais,...) que não afetaram a qualidade do raciocínio apresentado.

De notar que a substituição das incógnitas pela solução proposta não foi efetuada de forma correta por qualquer aluno que tenha respondido à versão C e mesmo os alunos que responderam corretamente não indicaram o conjunto-solução do sistema, limitando-se a resolvê-lo e a indicar que afirmação era falsa. Depreende-se, assim, que, na versão C, as maiores dificuldades dos alunos foram influenciadas pelo facto de as possíveis soluções estarem descritas por uma expressão algébrica envolvendo variáveis.

É de realçar também o número significativo de alunos (31) que resolveu o sistema em vez de substituir diretamente a possível solução, o que denota uma compreensão pouco abrangente do conceito de solução.

Na categoria *sem justificação ou não responde*, para além da ausência de resposta (26 alunos), integraram-se as respostas dos alunos que responderam apenas verdadeiro ou falso, sem indicar qualquer justificação (17 alunos), ou apresentaram a matriz ampliada do sistema, sem qualquer outra resolução ou conclusão (3 alunos).

Seguidamente, analisaram-se as 129 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabelecendo-se várias categorias, apresentadas na Tabela 25, com o propósito de caraterizar os principais erros cometidos.

Tabela 25 — Categorização dos raciocínios não válidos da questão 2a) sobre Sistemas

Raciocínios não válidos	Versão				Total
	A	B	C	D	
Incompreensão do significado de sistema homogéneo	6	12	6	11	35 (27,1%)
Interpretação incorreta do resultado obtido	4	1	12	2	19 (14,7%)
Comparação do número de incógnitas com o número de equações	–	7	1	6	14 (10,9%)
Solução dada como vetor dos termos independentes	9	–	4	–	13 (10,1%)
Dificuldades na resolução do sistema	4	3	5	1	13 (10,1%)
Conceções que envolvem o conceito de determinante	3	1	5	2	11 (8,5%)
Recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação	–	1	5	2	8 (6,2%)
Conceções que envolvem o conceito de característica	–	2	1	–	3 (2,3%)
Erro na interpretação da notação matricial	–	1	1	–	2 (1,5)
Verificação da solução apenas numa das equações	–	–	–	1	1 (0,8%)
Recurso a propriedades não válidas	–	1	–	–	1 (0,8%)
Outros	2	1	3	3	9 (7,0%)

No raciocínio *incompreensão do significado de sistema homogéneo*, alguns alunos substituíram as soluções no sistema $Ax = b$ (Figura 86) ou resolveram este sistema em vez do sistema homogéneo $Ax = 0$. Nos casos em que não é concretizado no enunciado o vetor dos termos independentes (Versões A e C), os alunos inventam um.

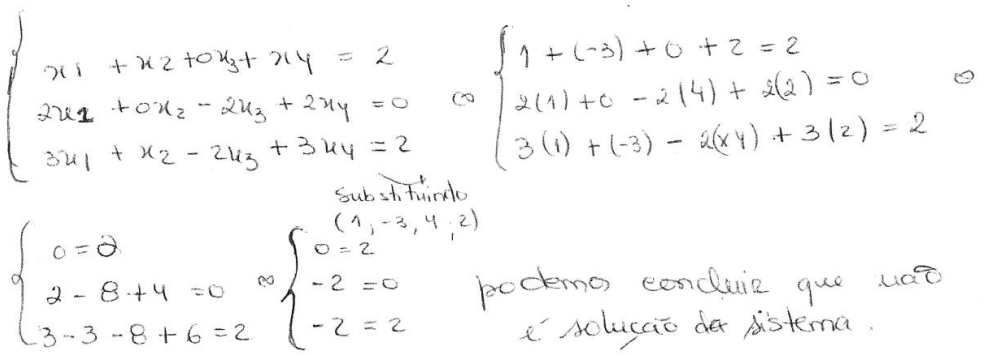


Figura 86. Substituição em $Ax = b$ (A216, Versão B).

Ainda se consideraram, neste raciocínio, as respostas dos alunos em que está implícita ou explícita a ideia de que o sistema só pode ter a solução nula ou alguma incompreensão do que significa solução nula. Obtiveram-se, por exemplo, respostas como: "Falso, um sistema do tipo $Ax = 0$ é um sistema homogéneo. Concluímos, assim, que a solução deste sistema vai dar soluções nulas se o resolvermos" (A135, Versão A); "Falsa, pois sendo um sistema homogéneo tem pelo menos uma solução nula e $(1,-3,4,2)$ não tem nenhum elemento nulo" (A215, Versão B). Nestes exemplos, é visível ainda uma tendência para considerar cada coordenada como uma solução.

Há também dois alunos que generalizam uma resolução que apenas é válida se a matriz dos coeficientes for invertível (Figura 87), o que não acontece nas versões A e C a que responderam. Este raciocínio pode também evidenciar que os alunos interiorizaram a conceção de que a única solução possível é a solução nula, tentando assim expor esse facto sem refletir sobre a não invertibilidade da matriz.

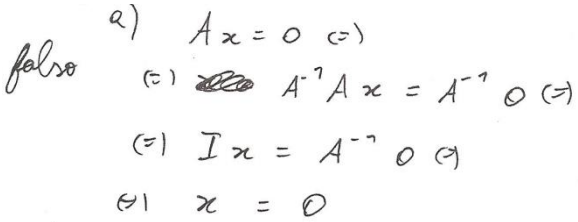


Figura 87. Resolução baseada na matriz inversa quando esta não existe (A281, Versão C).

No raciocínio *interpretação incorreta do resultado obtido* incluíram-se as respostas dos alunos que resolveram (na totalidade ou quase) de forma mais ou menos adequada o sistema pelo método de eliminação de Gauss (13 alunos, Figura 88), pelo método da substituição (5 alunos, Figura 89 e Figura 90) ou substituíram as incógnitas pela solução proposta (1 aluno, Figura 91), mas não interpretaram corretamente o resultado obtido ou não mencionaram qualquer resposta referente à veracidade da afirmação feita.

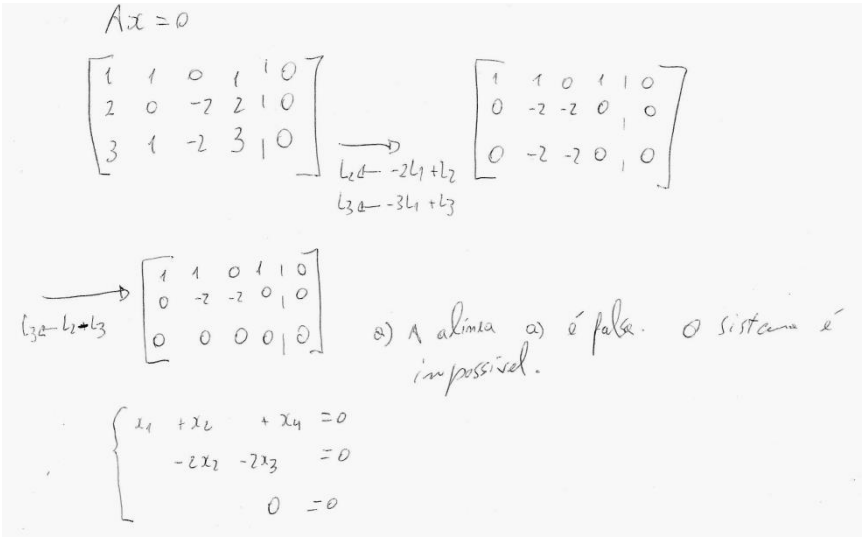


Figura 88. Interpretação incorreta do resultado – Método de eliminação de Gauss (A6, Versão B).

De realçar que, neste caso, o aluno A6 considera o sistema impossível eventualmente por obter $0 = 0$ na terceira equação do sistema.

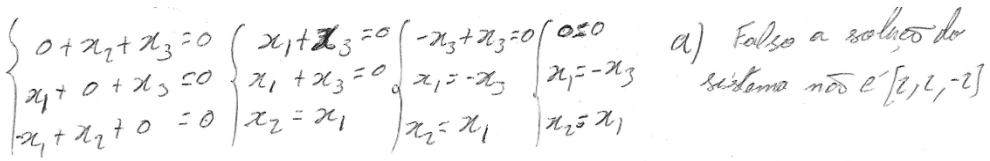


Figura 89. Interpretação incorreta do resultado – Método da substituição (A89, Versão A).

O aluno A89 considera que $(2,2,-2)$ não é solução por não ser esse o resultado final que obtém diretamente; já o aluno A168, para indicar a segunda coordenada, exprime x_2 em função de x_1.

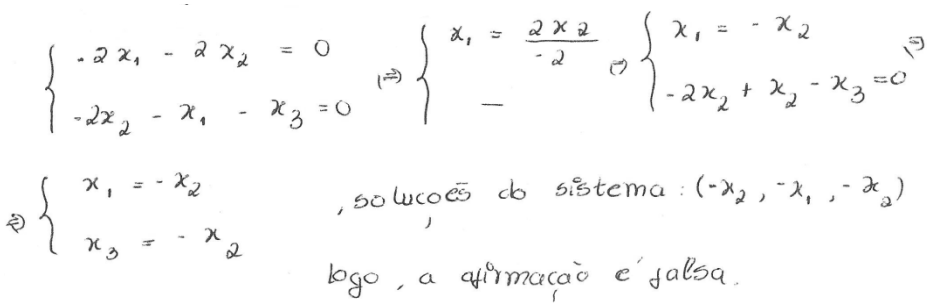


Figura 90. Interpretação incorreta do resultado – Método da substituição (A168, Versão C).

O aluno A278 (Figura 91), embora substitua de forma correta as variáveis pela solução proposta, não interpreta o resultado obtido, pois, de acordo com o resultado a que chegou, a afirmação só seria verdadeira se o vetor solução dado fosse o vetor nulo.

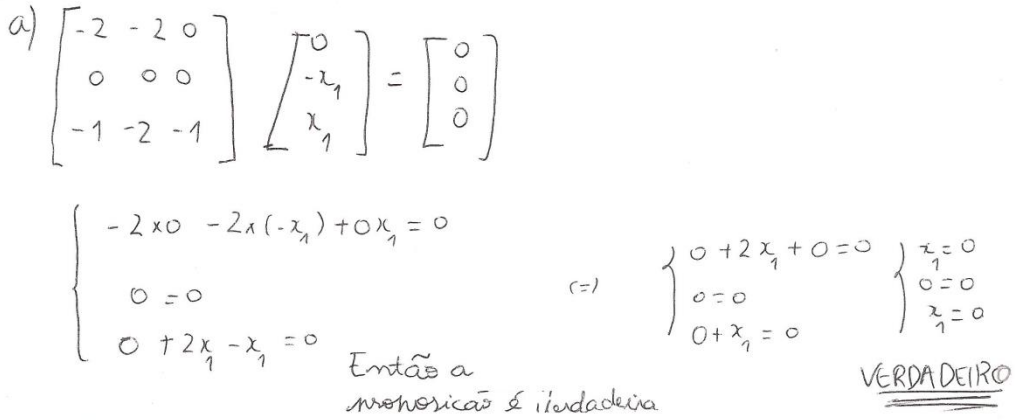


Figura 91. Interpretação incorreta do resultado – Substituição das incógnitas pela solução (A278, Versão C).

Em termos gerais, neste tipo de respostas, é evidente a existência de dificuldades na interpretação dos valores obtidos e não propriamente nos procedimentos de cálculo.

No raciocínio *comparação do número de incógnitas com o número de equações*, os alunos consideram que para ser solução ou para poder resolver o sistema o número de variáveis tem de ser igual ao número de equações. Assim, perante um sistema com três equações lineares, mencionam que a solução do sistema tem de pertencer a IR^3: "Como o sistema é composto por três equações só pode ter soluções do tipo (x,y,z), ou seja, com uma solução para cada equação. Como $(1,-3,4,2)$ é do tipo (x,y,z,w), tem quatro soluções para três equações, logo é falso" (A146, Versão B); ou traduzem esse facto ao representar o vetor das incógnitas com dimensão 3×1, quando escrevem o sistema na forma matricial (Figura 92). De realçar que no caso da resposta do aluno A146 se evidencia novamente (ver raciocínios da questão 1) a conceção de que o valor de cada variável corresponde a uma solução do sistema.

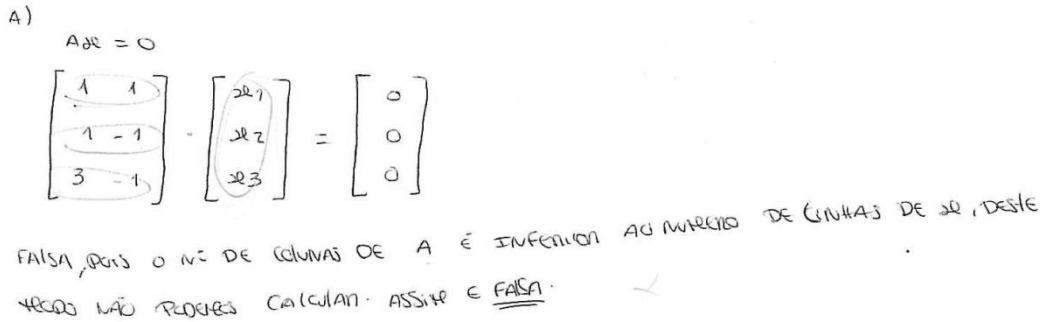


Figura 92. Escrita do sistema na forma matricial (A80, Versão D).

No raciocínio *solução dada como vetor dos termos independentes,* os alunos resolvem o sistema $Ax = vetor\ solução$, demonstrando assim uma incompreensão do significado de solução (Figura 93) e também do conceito de sistema homogéneo.

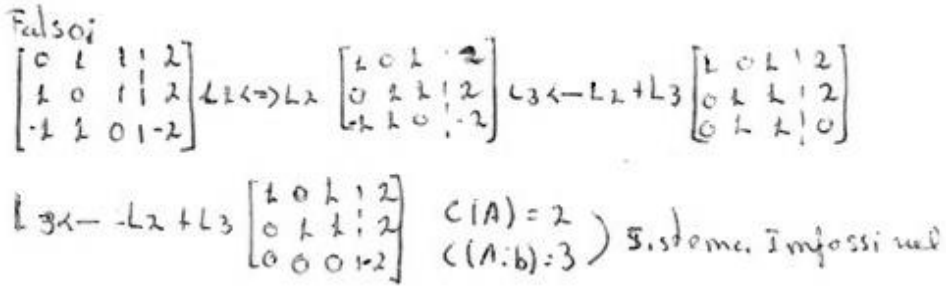


Figura 93. Solução na coluna dos termos independentes (A57, Versão A).

No raciocínio *dificuldades na resolução do sistema,* os alunos apresentam dificuldades aquando da aplicação do método de eliminação de Gauss (10 alunos) ou da substituição (3 alunos). Por exemplo, na aplicação do método de eliminação de Gauss cometem erros de cálculo ao efetuar as operações sobre as linhas; não efetuam os cálculos sobre todas as entradas da linha a alterar; utilizam operações que não são válidas, como adicionar um número a uma linha; realizam as operações elementares sem critério (andando, por vezes, em círculos); multiplicam uma linha por zero antes de adicionar à que querem alterar pelo que não originam qualquer modificação; não consideram a matriz ampliada mas apenas a matriz dos coeficientes. Nestes três últimos casos, os alunos acabam por abandonar o processo.

No caso do aluno A127 (Figura 94), ele parece efetuar as operações sem uma estratégia coordenada, cometendo um erro de cálculo no primeiro passo e aplicando uma operação que não é válida no terceiro, isto é, adiciona um à linha três, mas apenas nas entradas em que lhe interessa obter zero. Para além disso, na continuidade do processo não tem em conta que $0x_1$ é igual a zero quando passa para a forma habitual de sistema.

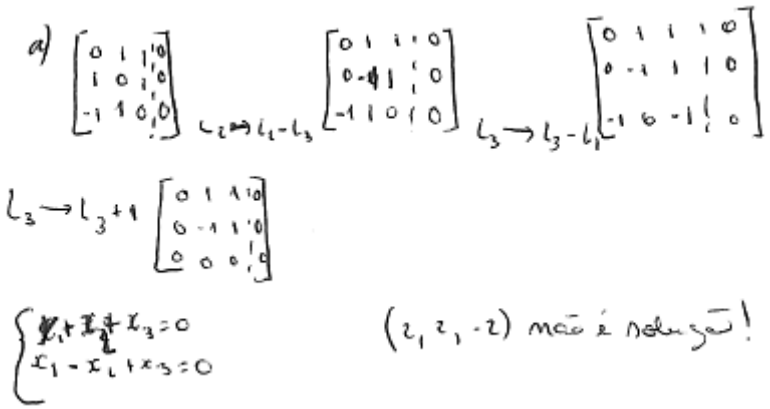


Figura 94. Operações elementares incorretas (A127, Versão A).

Na resolução pelo método da substituição, os alunos cometem erros de cálculo ao tentarem determinar uma incógnita em função das outras, assumem que, quando não conseguem determinar uma das incógnitas (sistema indeterminado), o seu valor é zero, ou

substituem uma das incógnitas sem terem completado o processo para determinar o seu valor (Figura 95).

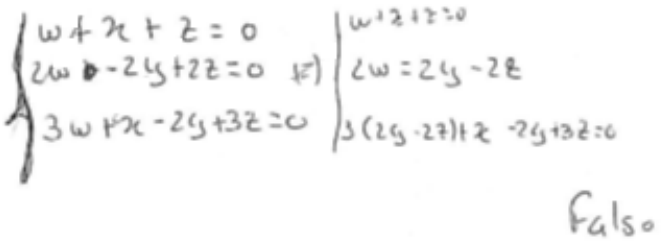


Figura 95. Incorreção na substituição de uma das incógnitas (A238, Versão B).

O aluno A238 não acaba de resolver a segunda equação, mas substitui a incógnita w na terceira equação do sistema. Também não acaba a resolução eventualmente por dificuldades na conclusão do processo.

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de determinante*, os alunos interpretaram de forma incorreta o resultado do determinante que obtêm, nos casos em que é possível calculá-lo, considerando que o sistema é impossível quando o determinante é zero: "O determinante é zero, logo o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. Logo é falso" (A50, Versão A); "$\det(A)=0$ [com base na existência de uma linha nula]. Logo não tem A^{-1}, logo é singular. Logo, o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. A afirmação é falsa" (A170, Versão C). Noutros casos inventam falsas fórmulas para calcular o determinante da matriz dos coeficientes quando esta não é uma matriz quadrada (Figura 96).

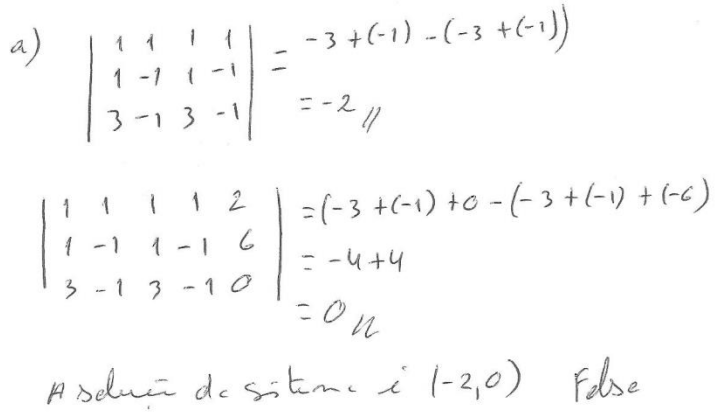


Figura 96. Cálculo incorreto do determinante (A118, Versão D).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação*, os alunos recorrem a justificações onde mencionam eventuais procedimentos ou conceitos teóricos, sem, no entanto, apresentarem qualquer resolução neles baseada. Por exemplo, "Utilizando o método de Gauss-Jordan e metendo as matrizes em escada é impossível ser $(-2,2)$ a solução" (A144,

Versão D) e "Um sistema homogéneo é sempre possível, logo pode ter duas classificações, sendo essas possível e determinado (uma única solução) e possível indeterminado (infinitas soluções), assim a afirmação é verdadeira" (A294, Versão C).

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de característica*, os alunos determinam a característica das matrizes dos coeficientes e ampliada sem fazer previamente a sua transformação numa matriz em escada por linhas (Figura 97).

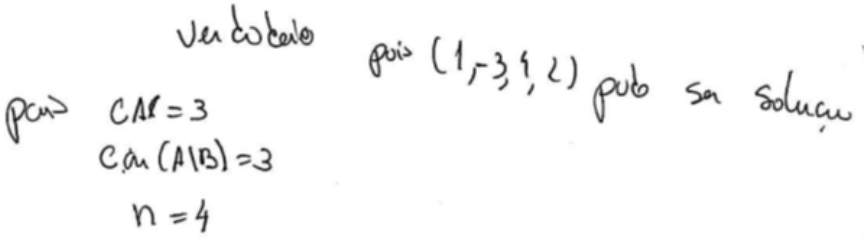


Figura 97. Determinação da característica sem a matriz estar em escada por linhas (A116, Versão B).

O aluno A116 para além de considerar, incorretamente, que as características das matrizes dos coeficientes e ampliada são iguais, conclui que o vetor dado pode ser solução do sistema aparentemente apenas baseado no facto do sistema ser possível.

No raciocínio *erro de interpretação da notação matricial*, os alunos passam de forma incorreta o sistema da forma matricial para a forma habitual (Figura 98 e Figura 99).

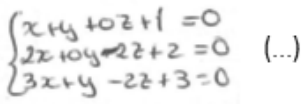


Figura 98. Considerar apenas três incógnitas (A72, Versão B).

O aluno A72 não considera quatro incógnitas, parecendo assumir a coluna correspondente à quarta incógnita como sendo uma coluna de termos independentes. Já o aluno A233, embora comece por considerar corretamente o vetor das incógnitas como o vetor solução que é dado no enunciado, na passagem para a notação habitual de sistema, multiplica a matriz dos coeficientes e do vetor solução de forma incorreta, parecendo ter efetuado a multiplicação da primeira linha da matriz dos coeficientes pela primeira linha do vetor solução, numa espécie de distributividade.



Figura 99. Multiplicação incorreta (A233, Versão C).

No raciocínio *verificar a solução apenas para uma das equações*, o aluno substitui as incógnitas pela solução proposta apenas na primeira equação, concluindo que o vetor dado é solução porque a proposição resultante é verdadeira (Figura 100).

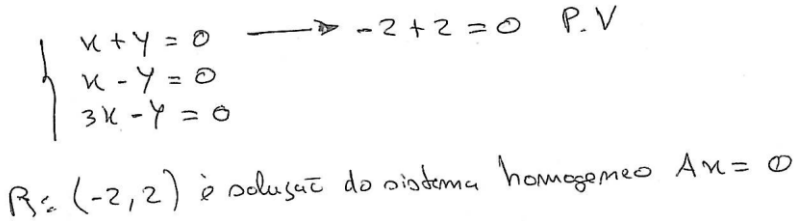


Figura 100. Substituição da solução apenas na primeira equação (A55, Versão D).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas*, o aluno faz referência à dependência das linhas da matriz ampliada do sistema, concluindo, por esse facto, que o sistema é impossível (Figura 101).

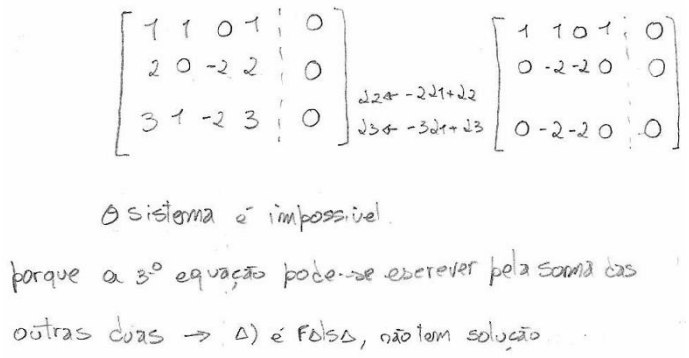


Figura 101. Análise da dependência das linhas (A60, Versão B).

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.1.2.3. Questão 2b)

Nesta questão, pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se dada a matriz A e o vetor b (com valores concretos ou não, dependendo da versão) o sistema $Ax = b$ era impossível (Versões B, C, D) ou possível (Versão A) (Anexo III).

A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos encontra-se na Tabela 26.

Tabela 26 – Raciocínios dos alunos na questão 2b) sobre Sistemas

	Versão				Total
Raciocínios	A	B	C	D	
Válidos (respostas corretas)	8	8	10	21	47 (19,4%)
Não válidos	33	43	30	34	140 (57,9%)
Sem justificação ou não responde	18	10	19	8	55 (22,7%)
Total	59	61	59	63	242 (100%)

As respostas corretas, baseadas em raciocínios válidos, resultaram de vários procedimentos. O mais frequente foi a resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (27 alunos) e discussão (nuns casos mais completa e noutros apenas apresentando valores que permitiam contrariar a afirmação feita) sobre os valores que tornavam o sistema impossível/possível tomando, a maioria dos alunos, como base de justificação, a relação entre a característica das matrizes simples e ampliada e do número de incógnitas (Figura 102 e Figura 103).

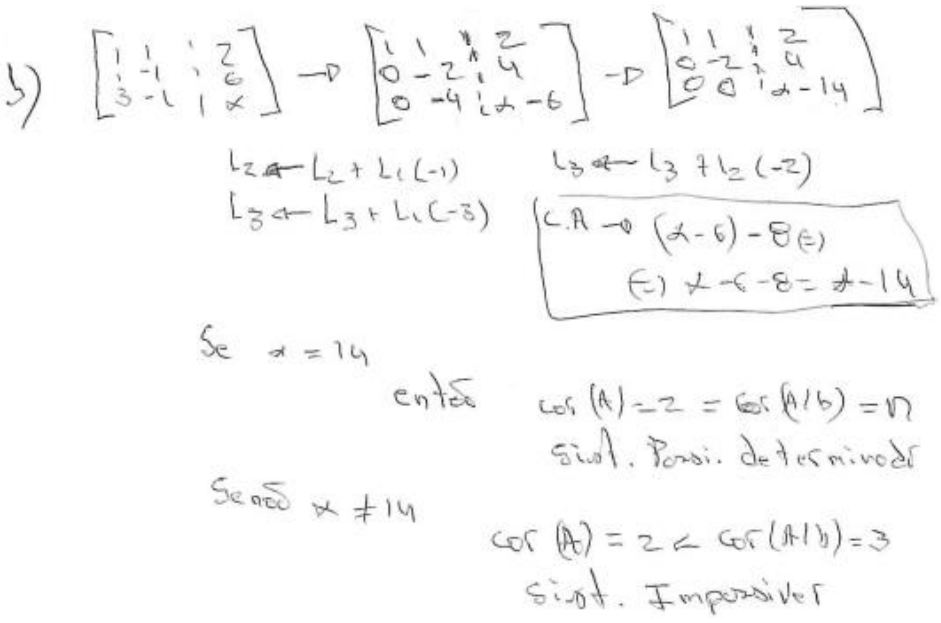


Figura 102. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss e classificação com base nas características (A154, Versão D).

Embora a resposta do aluno A57 (Figura 103) esteja correta, este poderia ter optado por uma análise mais global considerando que para $-b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$ o sistema era impossível, sendo possível e indeterminado no caso contrário.

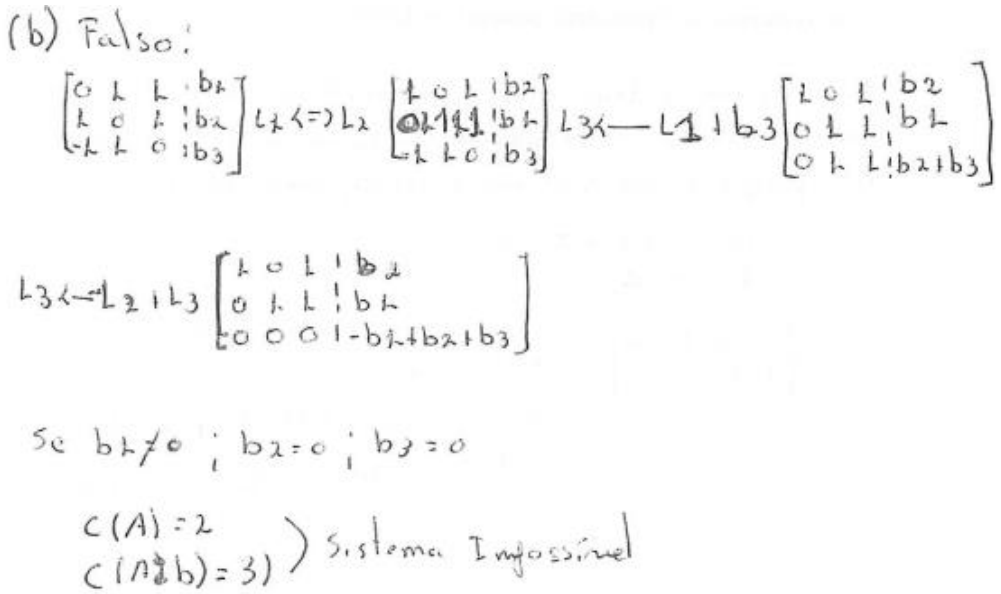


Figura 103. Utilização do método de eliminação de Gauss (A57, Versão A).

Houve também nove alunos (apenas na Versão D) que resolveram o sistema pelo método da substituição (Figura 104).

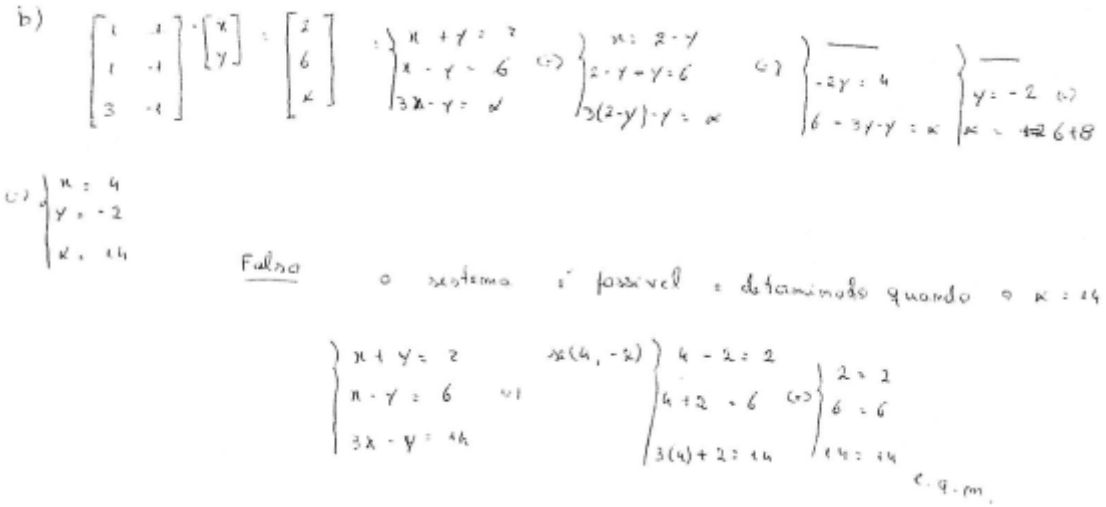


Figura 104. Método da substituição (A283, Versão D).

Outro raciocínio válido foi a concretização do vetor dos termos independentes (Versões A e C), em que os alunos apresentaram um exemplo de vetor dos termos independentes que torna o sistema impossível (1 aluno, Versão A) ou possível (8 alunos, Versão C). No caso deste último, o mais frequente foi considerar *b* como o vetor nulo (6 alunos), escolha que terá implícito o facto do sistema homogéneo ser sempre possível (Figura 105).

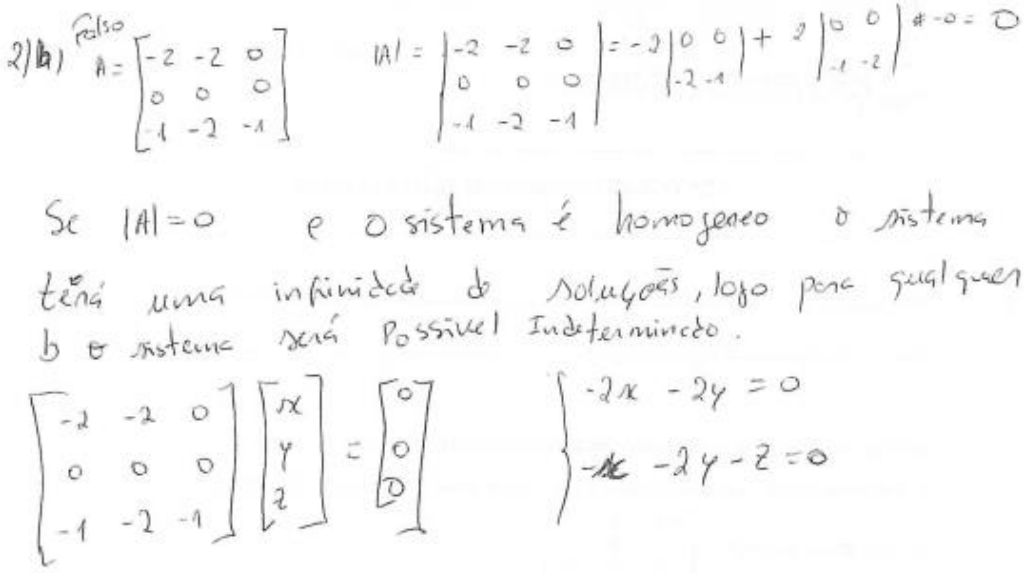


Figura 105. Concretização de *b* como vetor nulo (A17, Versão C).

Por fim, os raciocínios válidos menos frequentes consistiram em classificar o sistema no caso em que a segunda coordenada do vetor dos termos independentes é zero ou diferente de zero (1 aluno, Versão C, Figura 106), raciocínio que terá presente o facto da segunda linha da matriz dos coeficientes ter uma linha de zeros; e considerar que o vetor dos termos independentes pertence ao subespaço gerado pelas colunas da matriz dos coeficientes (1 aluno, Versão B, Figura 107).

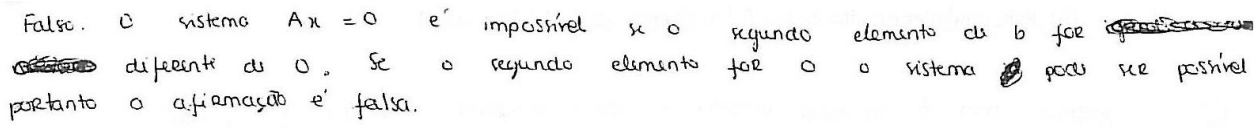


Figura 106. Analisar o sistema para o caso em que a segunda componente do vetor dos termos independentes é zero (A220, Versão C).

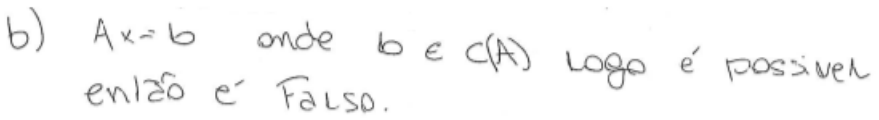


Figura 107. Indicar que o vetor dos termos independentes pertence ao subespaço gerado pelas colunas da matriz dos coeficientes (A304, Versão B).

Embora o aluno A304 não apresente qualquer justificação para a sua afirmação, como, por exemplo, escrever o vetor dos termos independentes como combinação linear dos vetores coluna da matriz dos coeficientes, essa relação é óbvia, pois o vetor dos termos independentes é o dobro do segundo vetor coluna dessa matriz.

Nas respostas que se consideraram corretas, incluíram-se também os casos em que foram cometidos erros de cálculo pontuais (erros de adição, troca de sinais), que aparentavam

ser lapsos e não pareciam traduzir incompreensão na aplicação do método, e que não afetaram o tipo de resposta.

Na categoria *sem justificação ou não responde* integraram-se os alunos que:

– Não deram qualquer resposta (29 alunos);

– Responderam somente verdadeiro/falso sem indicar qualquer justificação (19 alunos) ou acrescentaram apenas que a afirmação era falsa (Versões B e D) porque o sistema era possível (2 alunos);

– Apresentaram a matriz ampliada do sistema, o sistema na notação usual ou na forma matricial sem qualquer outra resolução (5 alunos).

Analisadas as 140 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 27, com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 27 – Categorização dos raciocínios não válidos da questão 2b) sobre Sistemas

Raciocínios não válidos	Versão				Total
	A	B	C	D	
Dificuldades na resolução do sistema	8	15	6	9	38 (27,2%)
Conceções que envolvem o conceito de determinante	4	9	6	3	22 (15,7%)
Conceções que envolvem o conceito de característica	4	3	4	9	20 (14,3%)
Interpretação incorreta do resultado obtido	5	5	1	6	17 (12,1%)
Recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação	3	4	4	2	13 (9,3%)
Exemplo que verifica a afirmação	5	–	5	1	11 (7,9%)
Comparação do número de incógnitas com o número de equações	–	4	1	2	7 (5,0%)
Erro na interpretação da notação matricial	–	1	–	–	1 (0,7%)
Confusão solução termos independentes	1	–	–	–	1 (0,7%)
Outros	3	2	3	2	10 (7,1%)

No raciocínio *dificuldades na resolução do sistema,* os alunos tentam resolver o sistema dado com recurso à inversa da matriz dos coeficientes (1 aluno, Figura 110), ao método da substituição (2 alunos) ou ao método de eliminação de Gauss (35 alunos), mas cometem erros na sua resolução ou não concluem o processo. Por exemplo, ao aplicar o método de eliminação de Gauss, cometem incorreções como: multiplicar linhas, não aplicar as operações aos termos independentes, aplicar as operações elementares sem critério, usar como pivot uma entrada que não é adequada e não modificar todas as entradas da linha em mudança, não chegando por vezes a terminar a resolução (Figura 108 e Figura 109).

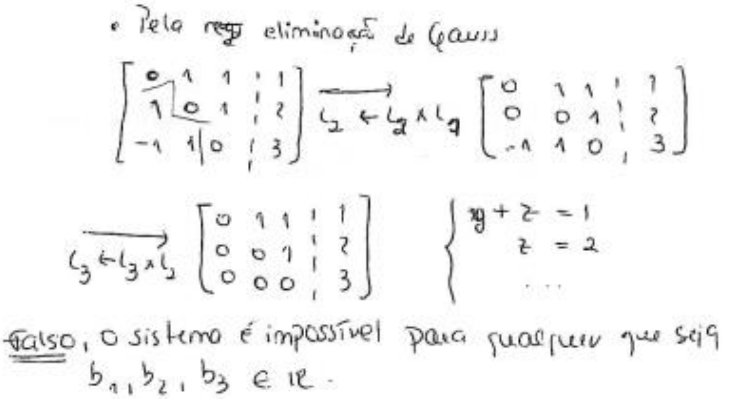


Figura 108. Multiplicação de linhas (A182, Versão A).

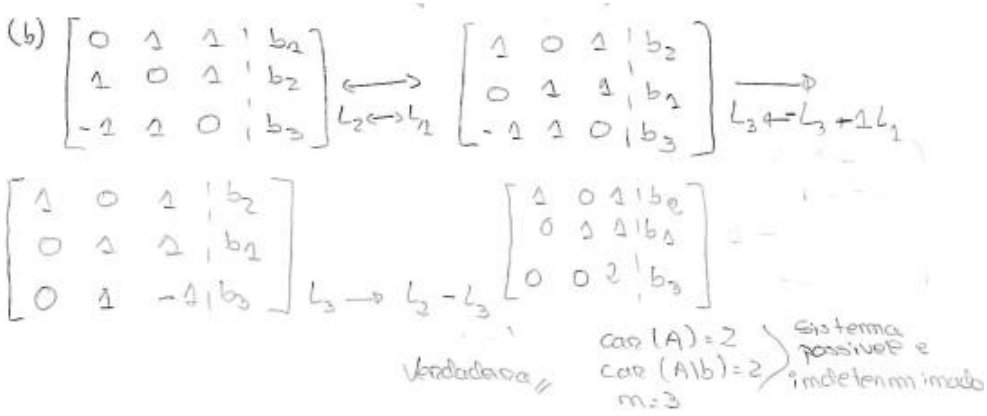


Figura 109. Não aplica as operações aos termos independentes (A50, Versão A).

O aluno A66 (Figura 110), que recorre à resolução com base na matriz inversa, não se apercebeu que o processo não se podia aplicar, pois a matriz dos coeficientes não é invertível.

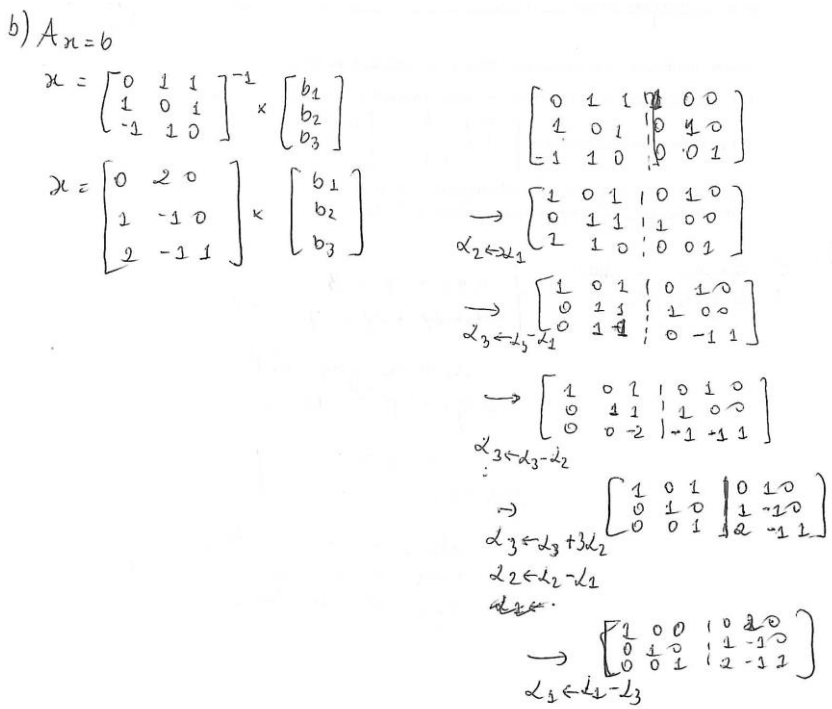


Figura 110. Recurso à inversa da matriz dos coeficientes (A66, Versão A).

Porém, como ao calcular a inversa da matriz dada, na primeira operação elementar que realiza (troca de linhas) se esquece do sinal do número um correspondente à entrada da linha três coluna um, transforma a matriz dada numa matriz invertível. Após isso, aplica corretamente as operações elementares para colocar zeros abaixo da diagonal principal da matriz dos coeficientes. No entanto, comete erros ao colocar zeros acima da diagonal principal, como não realizar as operações sobre todas as entradas da linha ou escolher mal o pivot. Também não finaliza o processo que consiste em multiplicar a suposta inversa pelo vetor dos termos independentes, eventualmente por as componentes deste não terem valores numéricos.

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de determinante* consideraram-se os raciocínios dos alunos que recorrem aos determinantes para dar uma resposta à questão. Assim, nos casos em que é possível calcular o determinante (Versões A e C), os alunos determinam o seu valor, que é zero, mas consideram que o sistema não pode ser possível (10 alunos, Figura 111 e Figura 112), a maioria salientando também o facto da matriz dos coeficientes não ter inversa. É de realçar que um aluno (Versão A) considera que o determinante da matriz dos coeficientes é zero porque tem zeros na diagonal principal

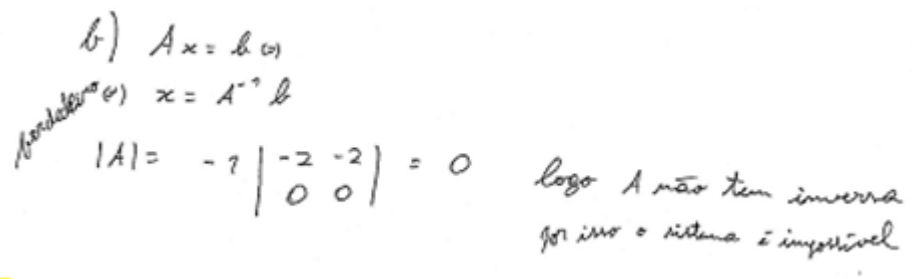


Figura 111. Cálculo do determinante e recurso ao método da inversa (A281, Versão C)

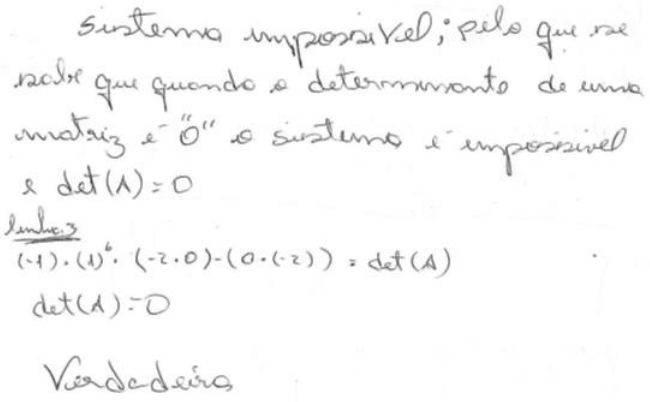


Figura 112. Determinante zero implica sistema impossível (A132, Versão C)

Nos casos em que não tem sentido calcular o determinante (Versões B e D), os alunos:

– Inventam falsas fórmulas para calcular o determinante da matriz dos coeficientes ou adaptam as propriedades que aprenderam para as matrizes quadradas (5 alunos, Figura 113 e Figura 114);

– Consideram, adequadamente, que é impossível calcular o determinante pelo facto da matriz dos coeficientes não ser quadrada, mas isso leva-os a concluir que o sistema é impossível (6 alunos, Figura 115).

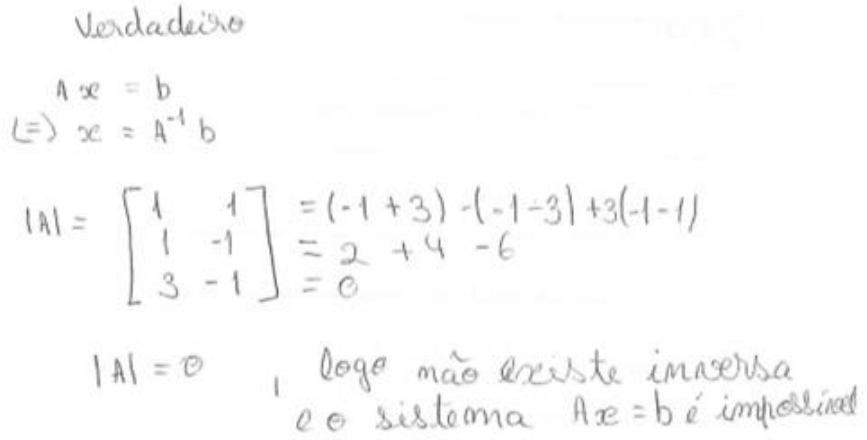


Figura 113. Aplicação de falsas fórmulas (A21, Versão D).

O aluno A21 aplica uma versão adaptada do teorema de Laplace seguindo a primeira coluna, mas eliminando apenas a linha correspondente (em vez da linha e coluna) quando calcula os cofatores. Já o aluno A141 considera que, como a primeira e a quarta coluna são iguais, o determinante é zero, não se apercebendo que essa é uma regra válida apenas para matrizes quadradas.

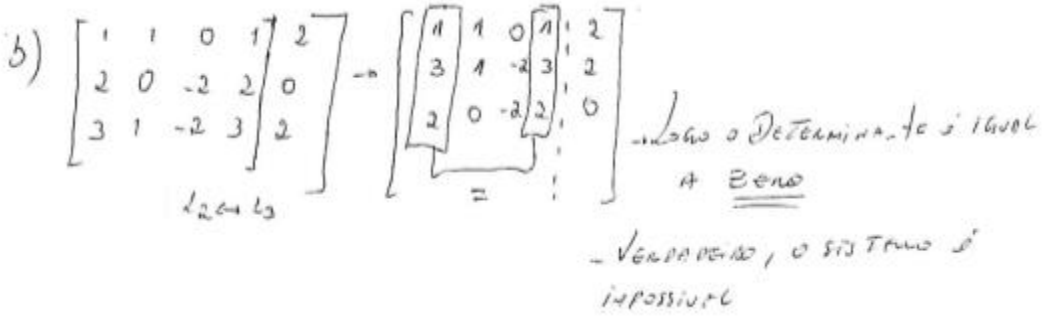


Figura 114. Generalização das propriedades para matrizes não quadradas (A141, Versão B).

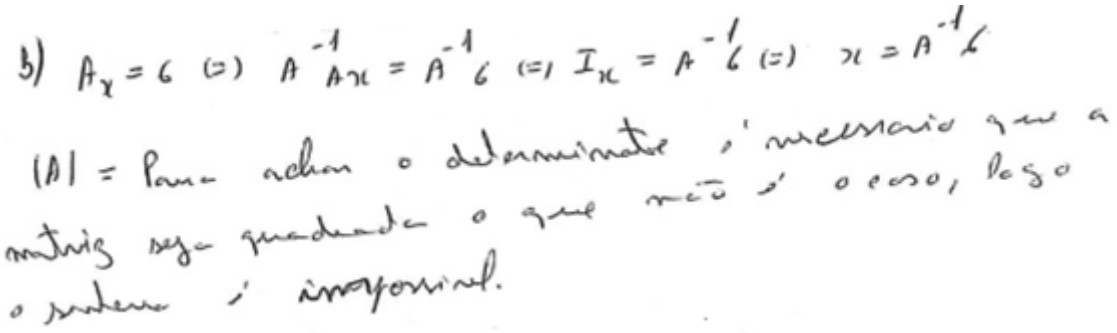


Figura 115. Sistema impossível devido à matriz não ser quadrada (A84, Versão B).

Verifica-se que em muitas resoluções está presente, de forma mais ou menos direta, o recurso à matriz inversa para resolver o sistema. Assim, alguns alunos consideram que, pelo facto de o determinante ser zero ou não ser possível calculá-lo, isso implica que a matriz dos coeficientes não tem inversa e, por conseguinte, o sistema é impossível.

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de característica*, os alunos analisam a possibilidade/impossibilidade de resolução do sistema com base na comparação da característica da matriz dos coeficientes, da característica da matriz ampliada do sistema e do número de incógnitas (ou de apenas dois deles), mas não transformam previamente a matriz ampliada numa matriz em escada por linhas (Figura 116) ou não concluem esse processo até ao fim (Figura 117). Assim, para além da não assimilação do conceito de característica, também pode estar presente a dificuldade em analisar quando é que uma matriz já está em escada por linhas.

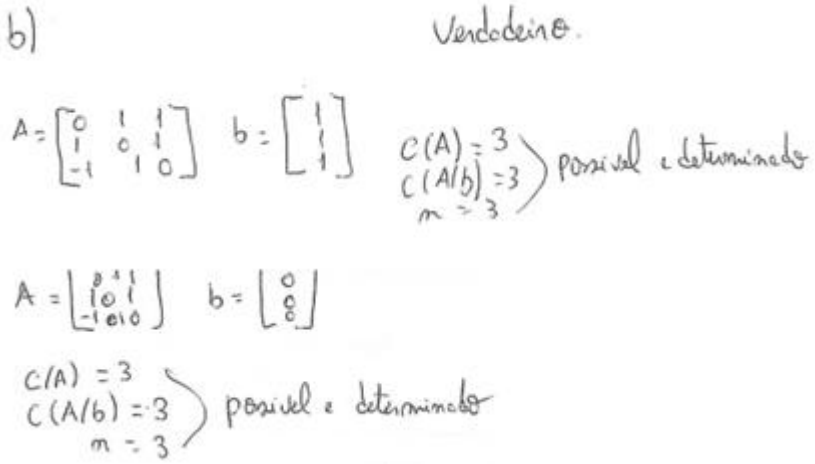


Figura 116. Determinação da característica sem qualquer tentativa de transformar previamente a matriz numa matriz em escada por linhas (A101, Versão A).

O aluno A101, para além de não fazer qualquer tentativa para transformar a matriz numa matriz em escada por linhas, concretiza o vetor dos termos independentes (apresenta duas hipóteses) considerando que a afirmação é verdadeira com base apenas nos dois casos que

apresenta, pelo que também está um pouco presente a conceção de poder validar a universalidade de uma proposição com base em apenas alguns exemplos concretos.

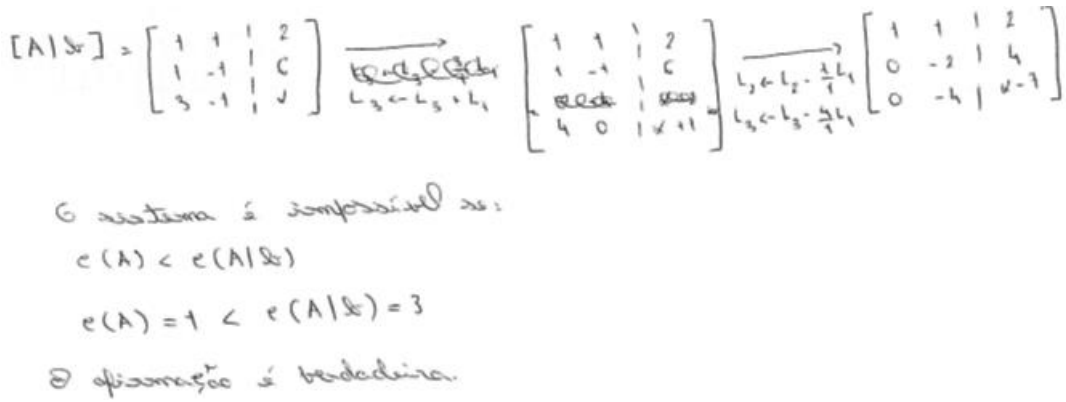


Figura 117. Processo de transformação em escada por linhas não concluído (A206, Versão D).

Já o aluno A206 (Figura 117) começa por utilizar operações elementares para transformar a matriz ampliada numa matriz em escada por linhas, mas não acaba o processo. Para além disso, ao indicar a característica, parece ter tido em conta, no caso da matriz dos coeficientes, apenas as linhas que não tinham qualquer zero.

No raciocínio *interpretação incorreta do resultado obtido* incluíram-se os raciocínios dos alunos que não apresentam dificuldades nos procedimentos de cálculo que utilizam para responder à questão, mas uns não interpretam e outros tiram conclusões que não estão de acordo com os procedimentos efetuados ou com os resultados obtidos. Por exemplo, há alunos que, ao discutirem o sistema, não atribuem ao(s) parâmetro(s) valores significativos que lhes permitam fazer uma classificação completa e adequada (Figura 118 e Figura 119).

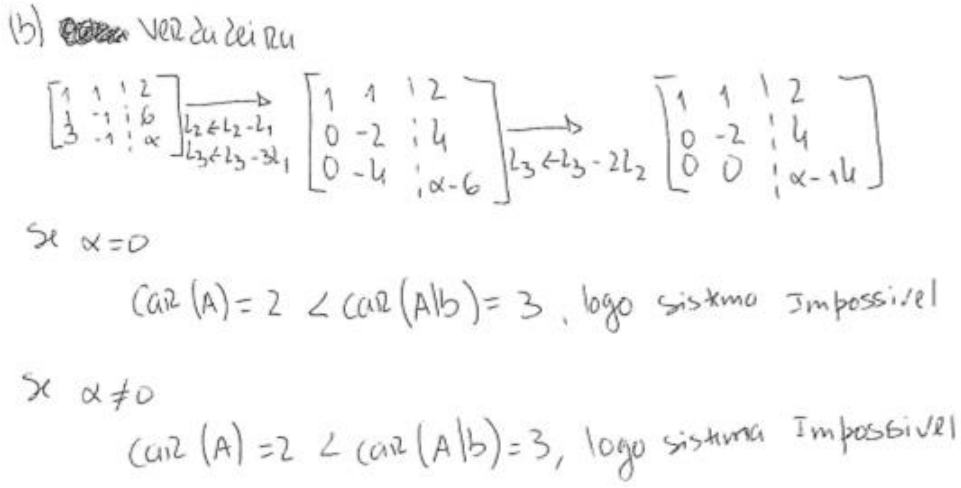


Figura 118. Escolha de um valor não significativo para o parâmetro alfa (A265, Versão D).

O aluno A265 (Figura 118) parte de um valor de α que não é significativo para o estudo do sistema. De notar que $\alpha \neq 0$ engloba $\alpha = 14$, obtendo-se para este valor um sistema

possível e determinado, pelo que a classificação apresentada por A265 não está correta. Já o aluno A203 (Figura 119) conclui que o sistema é possível e determinado qualquer que seja o valor de alfa, não se apercebendo que isso só ocorre se $\alpha = 14$.

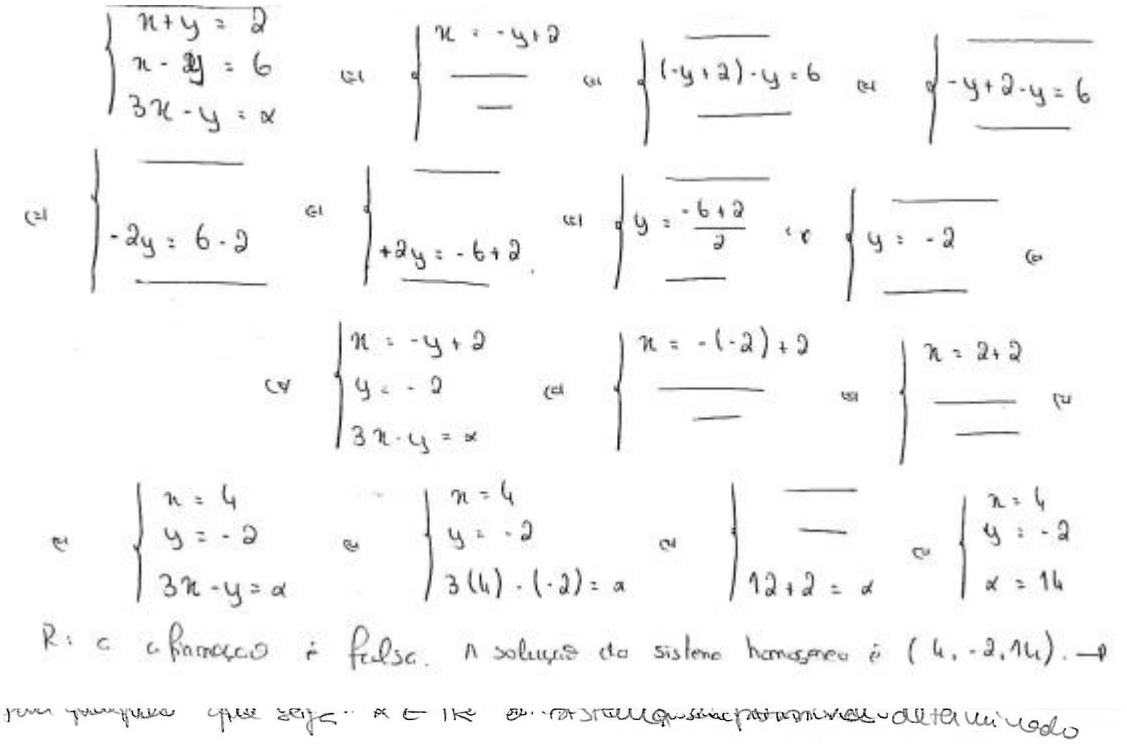


Figura 119. Interpretação incorreta dos valores obtidos pelo método da substituição (A203, Versão D).

Outros alunos, mesmo não tendo parâmetros para analisar (responderam à versão B ou concretizaram o vetor dos termos independentes), classificam incorretamente o sistema obtido (Figura 120); havendo, ainda, os que atribuem valores ao termo independente e à solução, obtendo a sua resposta a partir da análise deste caso particular (Figura 121).

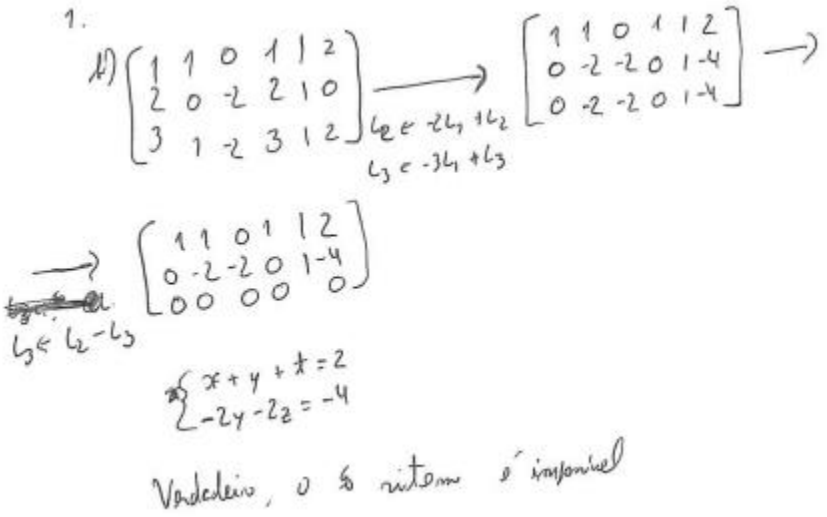


Figura 120. Classificação incorreta do sistema (A120, Versão B).

O aluno A120 (Figura 120) classifica como impossível um sistema que é possível e indeterminado, eventualmente por estar em presença de um sistema de duas equações com quatro incógnitas.

Já o aluno A195 (Figura 121) concretiza o vetor dos termos independentes e a solução de maneira a obter um sistema impossível. Conclui, assim, que o sistema é impossível, não se apercebendo que o que verificou foi que o vetor em causa não é solução do sistema, o que demonstra também alguma incompreensão do conceito de solução.

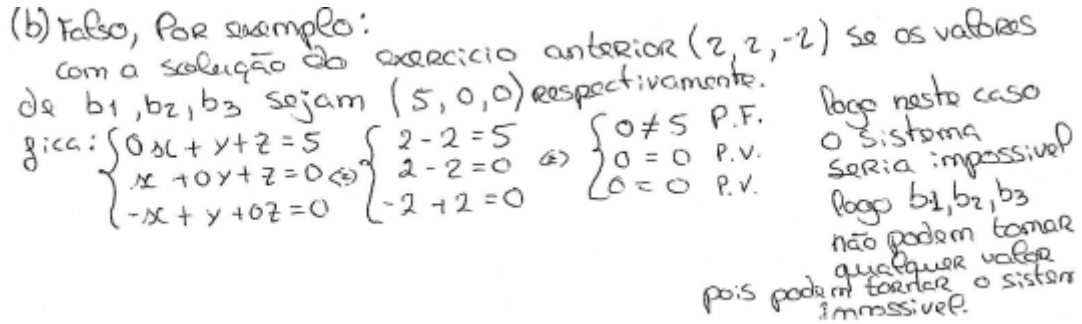


Figura 121. Concretização da solução e do vetor dos termos independentes (A195, Versão A).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação*, os alunos apresentam argumentos que são válidos, mas que não contribuem para responder à questão (3 alunos) ou enunciam conceitos ou procedimentos sem, no entanto, apresentar qualquer resolução/explicação explícita neles baseada (10 alunos). No primeiro caso, tem-se, por exemplo, respostas como as do aluno A81 (Figura 122), que apenas apresenta a definição de sistema de equações.

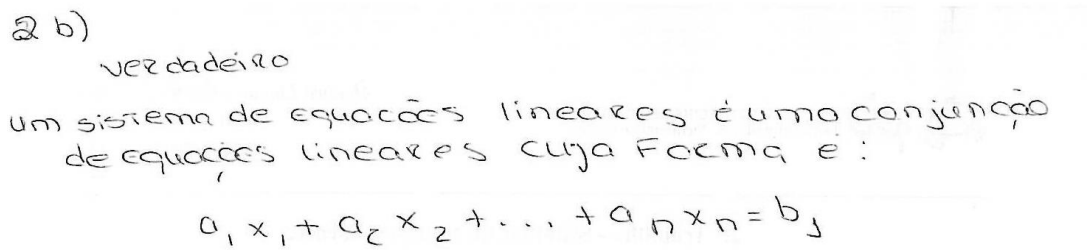


Figura 122. Definição de sistema de equações lineares (A81, Versão C).

No segundo caso, os comentários dos alunos poderiam contribuir para responder à questão se os aplicassem à situação em causa. Como exemplo, tem-se a resposta do aluno A204: "$Ax = b$, se a matriz dos coeficientes, A, for invertível então prova-se que o sistema é possível e determinado." (VB) ou do aluno A226 (Figura 123).

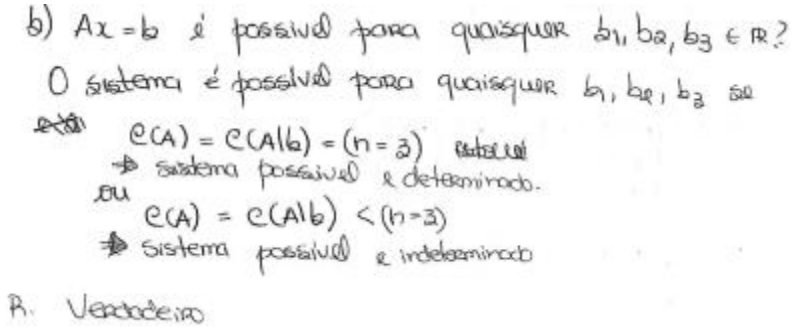


Figura 123. Enunciado de conceitos teóricos relativos à relação entre as características e o tipo de sistema (A226, Versão A).

No raciocínio *exemplo que verifica a afirmação*, os alunos atribuem valores concretos ao vetor dos termos independentes (Versões A e C) ou à terceira componente desse vetor (Versão D) concluindo, com base num exemplo, que a afirmação dada é verdadeira (Figura 124).

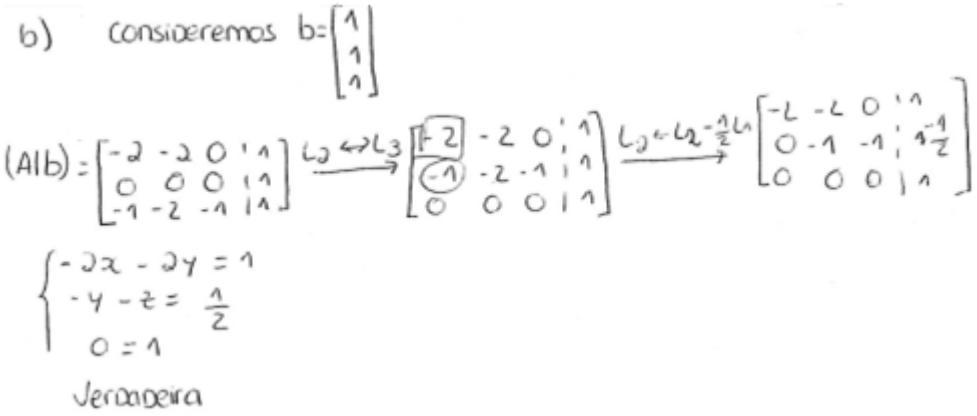


Figura 124. Escolha de um vetor de termos independentes que verifica a afirmação (A188, Versão C).

No raciocínio *comparação do número de incógnitas com o número de equações*, os alunos consideram implícita ou explicitamente que o número de variáveis tem de ser igual ao número de equações para que o sistema seja possível. Por exemplo, o aluno A138 afirma que: "Se $m < n$ [m- número de equações, n- número de incógnitas] então o sistema é impossível" (Versão B) e o aluno A49 dá uma resposta semelhante, baseando-se mais diretamente no sistema dado (Figura 125).

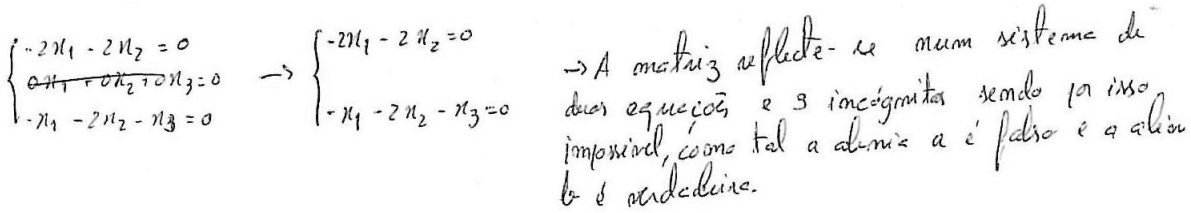


Figura 125. Considerar impossível um sistema baseado no facto de ter mais incógnitas do que equações (A49, Versão C).

No raciocínio *erro de interpretação da notação matricial*, o aluno considera os coeficientes da quarta incógnita como termos independentes, não fazendo uma passagem correta da forma matricial para a notação usual de sistema.

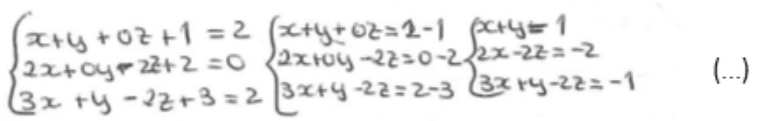


Figura 126. Passagem incorreta da forma matricial para a notação usual (A72, Versão B).

No raciocínio *confusão da solução com os termos independentes*, o aluno baseia a sua resposta na alínea anterior, considerando a solução como vetor dos termos independentes (Figura 127).

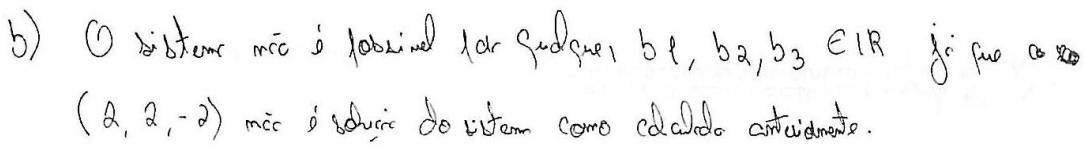


Figura 127. Referência ao vetor dos termos independentes como vetor solução (A263, Versão A).

No raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis ou descontextualizadas face à pergunta formulada.

4.2. O ensino da Álgebra Linear do ponto de vista dos professores

Nesta secção apresentam-se os resultados relativos à 2.ª fase da primeira parte do estudo que se desenvolveu no sentido de dar resposta à questão de investigação: *Quais as características do ensino de álgebra linear no ensino superior politécnico segundo os professores?* Para além de se pretender perceber, em termos estruturais, como funcionam as unidades curriculares (UCs) que se centram em conteúdos de Álgebra Linear (AL), tem-se como objetivos principais: identificar as práticas dos professores no que se refere à preparação e concretização das atividades letivas bem como os procedimentos utilizados na avaliação, conhecer as suas perceções relativas às dificuldades dos alunos e as recomendações didáticas que propõem visando a melhoria do ensino da AL.

Nesta perspetiva, conforme já foi descrito no Capítulo III – Método de investigação, aplicou-se um questionário *online* aos professores do ensino superior politécnico que lecionavam no ano letivo 2011/2012 a UC de AL ou similar, tendo-se assim adotado uma metodologia fundamentalmente quantitativa e com características descritivas.

O questionário foi enviado a 97 docentes de 16 institutos politécnicos ou escolas integradas no subsistema de ensino superior politécnico público, onde foi identificada a existência de cursos com UCs em que predominavam conteúdos de AL. No final do processo, depois de se ter enviado oito lembretes, consideraram-se válidas as respostas de 60 docentes, que estavam a afetos a 14 das instituições contactadas, obtendo-se a taxa de retorno de 62%.

A apresentação dos resultados está organizada a partir das várias dimensões do questionário: dados pessoais, UC de Álgebra Linear e o curso, preparação das aulas, implementação das aulas, avaliação das aprendizagens dos alunos e dificuldades dos alunos.

4.2.1. Dados pessoais

Dos professores respondentes, a maioria é do sexo feminino (68,3%), a sua média de idades é 41,9 anos, a moda 33 e 43 anos, sendo a idade mínima 26 anos e a máxima 62 anos. Considerando a distribuição por grupos etários (Tabela 28) verifica-se que a classe mais representativa é [35, 45[anos e a menos representativa [55, 65[anos.

Tabela 28 – Idade dos professores

Idade (anos)	% de professores
[25, 35[	20,0
[35, 45[	48,3
[45, 55[	18,3
[55, 65[	11,7
Não responde	1,7

Quanto às habilitações dos professores respondentes, verifica-se que, se se atender à habilitação mais elevada, a habilitação mais frequente é o mestrado (46,7%), havendo também um considerável número de doutorados (38,3%), na totalidade 85% dos professores possui mestrado ou doutoramento (Tabela 29).

Tabela 29 – Habilitação académica mais elevada dos professores

Habilitação	% de professores
Licenciatura	11,7
Mestrado	46,7
Doutoramento	38,3
Pós-graduação/especialização	3,3

Recorrendo aos dados não agrupados, o valor mínimo de anos de docência dos professores no ensino superior é dois e o máximo é 36, sendo a moda 12 e a média 15,6 anos, o que nos remete para professores com uma considerável experiência de ensino. Já no que se

refere à docência da UC de AL, ou similar, o valor mínimo de anos de docência é um e o máximo é 33, sendo a moda 10 e a média 9,5 anos.

Agrupando-se os dados relativos ao número de anos de docência dos professores, tendo em atenção as fases de carreira dos docentes do ensino secundário estabelecidas por Huberman (1992), constata-se que [7,25[é a classe mais representativa, quer em termos do número de anos de docência no ensino superior (75,0%) quer no que se refere à docência de AL (51,7%), ou seja, em ambos os casos a maioria dos professores está na fase de diversificação. Nesta fase, "as pessoas lançam-se, então numa pequena série de experiências pessoais, diversificando o material didático, os modos de avaliação, a forma de agrupar os alunos, as sequências do programa, etc." (Huberman, 1992, p. 41).

Tabela 30 – Distribuição dos professores atendendo aos anos de docência no ensino superior e no ensino da UC de AL

	% de professores	
N.º de anos de docência	No ensino superior	Da unidade curricular AL
[1, 4[	5,0	20,0
[4, 7[	5,0	20,0
[7, 25[	75,0	51,7
[25, 35[	13,3	5,0
[35, 40[	1,7	–
Não responde	–	3,3

Quanto ao número de cursos diferentes em que já lecionaram a UC de AL ou similar, verifica-se que 38,3% dos professores inquiridos já a lecionaram em mais do que cinco cursos diferentes (Tabela 31). Este aspeto pode ser pouco significativo se os temas abordados forem basicamente os mesmos, como sejam cursos dentro do âmbito das engenharias. No entanto, mesmo neste caso, os docentes poderão ter alargado o leque da sua experiência pois, para além de eventualmente ter havido uma preocupação em preparar exemplos de tarefas mais adequadas a cada curso, permitiu que os docentes contactassem com alunos com diferentes interesses e diversificados níveis de dificuldade na área de matemática.

Tabela 31 – Número de cursos diferentes em que os professores já lecionaram a UC

Número de cursos	% de professores
1	11,7
2	11,7
3	6,7
4	16,7
5	13,3
6	11,7
Mais de 6	26,6
Não responde	1,7

4.2.2. UC de Álgebra Linear e o curso

A maioria dos professores (91,7%) lecionou no ano letivo 2011/2012 em cursos de licenciatura em engenharia, como engenharia mecânica, civil, informática e biomédica. Os restantes professores (8,3%) apenas lecionaram em cursos de licenciatura de outras áreas, como, por exemplo, gestão informática, gestão hoteleira e gestão da distribuição e logística (Figura 128).

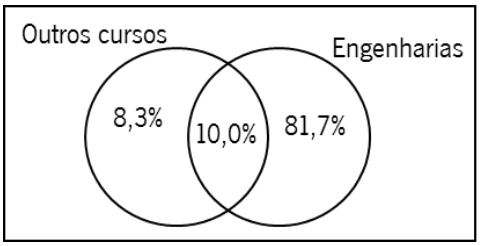


Figura 128. Distribuição dos professores de acordo com o tipo de curso em que lecionaram a UC.

Nos cursos de engenharia, a UC é normalmente designada, por ordem decrescente de incidência, por Álgebra Linear e Geometria Analítica, Álgebra Linear ou apenas Álgebra. Já nos outros cursos, para além das designações anteriores, também aparecem nomes mais gerais como Matemática I, Métodos Matemáticos ou Métodos Quantitativos.

Em todos os cursos da área de engenharia lecionados pelos professores respondentes, a UC em análise funciona no 1.º ano. Nas restantes áreas também é na globalidade lecionada no 1.º ano, sendo a exceção três cursos, pertencentes a duas instituições distintas, em que a UC funciona no 2.º ano.

Na generalidade dos cursos referidos pelos professores, a UC funciona no 1.º semestre. No entanto, pelas indicações dos professores de seis instituições distintas, verifica-se que também há cursos, tanto na área de engenharia como noutras áreas, em que a UC funciona no 2.º semestre, sendo que apenas numa instituição é indicado um curso que funciona no 2.º ano, 2.º semestre. Conclui-se, assim, que os conteúdos de AL são basicamente abordados logo no início do curso.

Quanto ao tempo semanal presencial em horas da UC, verifica-se que, nos cursos lecionados pelos professores, o número de horas da UC varia entre três e seis horas de aulas por semana, sendo quatro o número de horas mais frequente. Se se fizer uma separação por tipo de aulas, pode-se observar a seguinte variação:

– teórico-práticas: entre 1h e 4,5h;

– teóricas: entre 1,5h e 2h;

– práticas e laboratoriais: entre 1h e 4h;

– trabalho de campo: 1h;

– orientação tutorial: entre 0,5h e 4h.

A modalidade de aulas teórico-práticas, exclusiva ou conjugada com outros tipos de aulas, está presente praticamente em todos os cursos indicados pelos professores, à exceção de dois, afetos a duas instituições distintas, em que num deles se combina aulas teóricas com práticas laboratoriais e noutro apenas existem aulas práticas laboratoriais. A associação de aulas mais comum é a de teórico-práticas com teóricas, havendo também, em cursos de duas instituições, a combinação destas com uma terceira modalidade, isto é, ou com aulas de trabalho de campo ou com aulas de orientação tutorial.

Face à predominância de aulas teórico-práticas nos cursos, é perfeitamente plausível que quase todos os professores (91,7%) tenham, no ano letivo 2011/2012, sido responsáveis pela lecionação de aulas teórico-práticas (Figura 129). Constata-se ainda que 51,7% lecionaram pelo menos aulas de duas modalidades distintas e somente um número muito reduzido de docentes lecionou apenas aulas teóricas (3,3%).

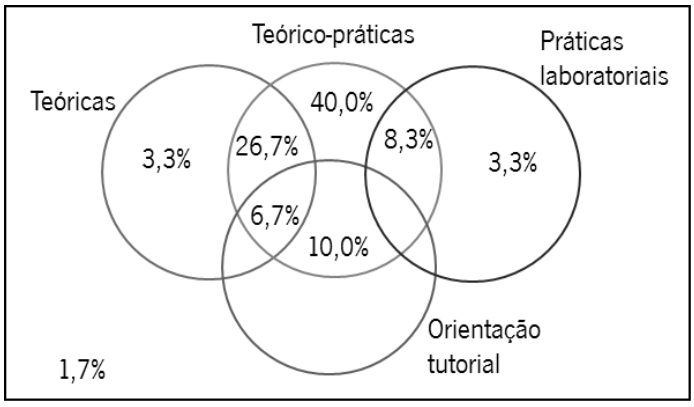


Figura 129 – Tipo de aulas que os professores lecionaram no ano letivo 2011/2012.

Em termos gerais, os temas incluídos nas UCs no âmbito da AL que os professores lecionaram são: Números complexos, Matrizes, Determinantes, Sistemas de equações lineares, Espaços vetoriais, Transformações lineares, Valores e vetores próprios, Geometria analítica, Estruturas algébricas, Cálculo vetorial e espaços euclidianos e hermíticos.

Os temas Matrizes e Determinantes são os únicos que são comuns nas UCs lecionadas pelos professores (Tabela 32). No entanto, se se considerar as respostas dos professores que apenas lecionaram em cursos de engenharia, verifica-se que aos dois temas anteriores se junta Espaços vetoriais, passando a existir três temas comuns. Sistemas de equações lineares e Valores e vetores próprios são também dos temas mais lecionados.

A ordem pela qual os temas são abordados não é homogénea, havendo bastante diversidade, embora o mais comum seja iniciar com as Matrizes. De notar que Geometria é um dos temas com mais oscilações e que o tema Números complexos, quando integrado nos conteúdos programáticos, é basicamente lecionado no início do semestre.

Tabela 32 – Temas que fazem parte do programa de AL e ordem pela qual são abordados

	Ordem de abordagem (% de professores)										
Temas	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	Total
Matrizes	50,0	40,0	6,7	3,3	–	–	–	–	–	–	100,0
Números complexos	21,7	1,7	1,7	–	–	–	–	–	–	–	25,1
Sistemas de equações lineares	10,0	25,0	45,0	8,3	3,3	1,7	3,3	–	–	–	96,6
Geometria analítica	8,3	1,7	3,3	3,3	13,3	10,0	18,3	3,3	3,3	–	64,8
Espaços vetoriais	3,3	5,0	11,7	36,7	25,0	10,0	1,7	–	–	–	93,4
Determinantes	–	26,6	31,7	30,0	11,7	–	–	–	–	–	100,0
Transformações lineares	–	–	–	5,0	18,3	13,3	18,3	1,7	–	–	56,6
Valores e vetores próprios	–	–	–	5,0	10,0	41,7	11,7	11,7	–	–	80,1
Estruturas algébricas	3,3	–	–	1,7	3,3	–	–	1,7	–	–	10,0
Cálculo vetorial	3,3	–	–	1,7	8,3	–	–	–	–	–	13,3
Outro	–	–	–	1,7	–	–	–	–	1,7	1,7	5,1

4.2.3. Preparação das aulas

No que diz respeito à preparação de aulas, particularmente no que se refere à preparação individual ou com outros professores, quase todos os professores inquiridos (96,7%) preparam as aulas sozinhos muitas vezes ou sempre, havendo também alguns professores (26,7%) que preparam muitas vezes as aulas com outros professores que lecionam a UC (Tabela 33).

Tabela 33 – Intervenção na preparação das aulas

	% de professores				
	N	PV	MV	S	NR
Sozinho	–	3,3	60,0	36,7	–
Com outros professores que lecionam a UC	5,0	46,7	26,7	–	21,6

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Já quanto à periodicidade com que preparam as aulas, verifica-se que o mais habitual é preparar as aulas semanalmente, pois a maior parte dos professores (76,7%) prepara as aulas semanalmente muitas vezes ou sempre (Tabela 34).

Tabela 34 – Periodicidade da preparação das aulas

	% de professores				
	N	PV	MV	S	NR
Diariamente	38,3	36,7	18,3	6,7	–
Semanalmente	5,0	10,0	40,0	36,7	8,3
Mensalmente	31,7	16,7	15,0	6,7	30,0
Semestralmente	23,3	16,7	10,0	20,0	30,0

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

No que se refere aos recursos utilizados na preparação de aulas (Tabela 35), verifica-se que o recurso mais frequentemente utilizado é a documentação da UC utilizada em anos anteriores (86,7% utilizam-na muitas vezes ou sempre). De salientar que os professores recorrem com menos frequência a textos de investigação sobre o ensino e aprendizagem da AL (75% utilizam-nos nunca ou poucas vezes) e a computadores ou calculadoras (56,7% utilizam-nos nunca ou poucas vezes). Há ainda professores que referem outros recursos. Um deles diz recorrer a "pesquisas rápidas na internet e vídeos de aulas de outros professores", embora poucas vezes, e outro menciona que recorre muitas vezes a "slides e folhas de exercícios".

Tabela 35 – Recursos usados na preparação de aulas

	% de professores				
	N	PV	MV	S	NR
Livros de texto	1,7	20,0	53,3	25,0	–
Apontamentos (tipo sebentas)	1,7	23,3	51,7	23,3	–
Documentação da UC utilizada em anos anteriores	5,0	8,3	65,0	21,7	–
Textos de investigação sobre o ensino e aprendizagem da AL	31,7	43,3	21,7	3,3	–
Computadores ou calculadoras	26,7	30,0	40,0	3,3	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Na preparação das aulas, 80% dos professores utilizam muitas vezes ou sempre os livros de texto com a finalidade de preparar a componente teórica da UC e 70% utilizam-nos muitas vezes ou sempre para selecionar exercícios e problemas para as aulas, havendo menos professores (58,4%) a utilizar este recurso muitas vezes ou sempre para selecionar questões para os testes ou exames (Tabela 36). Há também um professor que acrescenta que, embora poucas vezes, também usa os livros de texto para "ver exemplos de aplicação da matéria lecionada".

Tabela 36 – Finalidades do uso dos livros de texto

	% de professores				
	N	PV	MV	S	NR
Preparar a componente teórica da UC	3,3	13,3	60,0	20,0	3,3
Selecionar exercícios e problemas para as aulas	3,3	23,3	58,3	11,7	3,3
Selecionar questões para os testes/exames	6,7	26,7	46,6	11,7	8,3

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Já o recurso a computadores (Tabela 37) é mais frequente ter como finalidade a elaboração de materiais de apoio (90% utilizam-nos muitas vezes ou sempre) e a disponibilização de materiais aos alunos na plataforma da UC (86,7% utilizam-nos muitas vezes ou sempre). Há também dois professores que indicam recorrer muitas vezes ao computador com outras finalidades, um deles para dar aulas práticas laboratoriais e o outro para pesquisar na internet sugestões para testes/exames, visualizar vídeos de resolução de exercícios, que depois disponibiliza aos estudantes, e criar testes online.

Tabela 37 – Finalidades do uso dos computadores pelos professores na preparação das aulas

	% de professores				
	N	PV	MV	S	NR
Elaborar os materiais de apoio (diapositivos, fichas de trabalho, ...)	5,0	3,3	26,7	63,3	1,7
Disponibilizar materiais aos alunos na plataforma da UC	3,3	8,3	21,7	65,0	1,7
Confirmar as soluções dos exercícios ou problemas propostos	11,7	20,0	51,7	13,3	3,3
Pesquisar na internet sugestões para as aulas	10,0	36,7	38,3	10,0	5,0
Estudar as potencialidades do *software* a utilizar nas aulas	25,0	26,7	35,0	6,7	6,7

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

A maior parte dos professores prepara muitas vezes ou sempre tarefas para as aulas que enfatizam (Tabela 38): a aplicação direta de conceitos e procedimentos (93,3%); a articulação entre os conceitos (90%); as aprendizagens de conceitos teóricos da UC (88,4%); a discussão sobre os erros e dificuldades dos alunos (71,6%); a descoberta de propriedades dos conceitos (70%) e a exploração de diferentes representações dos conceitos (68,4%). A menor ênfase é dada à resolução de problemas da realidade (45%).

Tabela 38 – Aspetos enfatizados nas tarefas preparadas para as aulas

	% de professores				
	N	PV	MV	S	NR
As aprendizagens de conceitos teóricos da UC	–	8,3	66,7	21,7	3,3
A aplicação direta de conceitos e procedimentos	–	3,3	70,0	23,3	3,3
A descoberta de propriedades dos conceitos	–	26,7	55,0	15,0	3,3
A resolução de problemas da realidade	5,0	46,7	41,7	3,3	3,3
A discussão sobre os erros e dificuldades dos alunos	6,7	18,3	63,3	8,3	3,3
A exploração de diferentes representações (algébrica, geométrica, ...) dos conceitos	1,7	26,7	56,7	11,7	3,3
A articulação entre os conceitos	–	6,7	68,3	21,7	3,3

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Quando questionados sobre os livros de texto a que recorrem na UC e que consideram mais importantes, os professores que responderam (70%) apontam uma diversidade de obras e autores, alguns abrangendo praticamente todos os temas lecionados e outros apenas temas específicos, havendo também referência a algumas sebentas produzidas nas próprias instituições. As oito obras mais citadas, não tendo em conta a data de edição, encontram-se na Tabela 39.

Tabela 39 – Livros de texto recomendados pelos professores

Título	Autores	Nº de instituições diferentes	% de professores
Álgebra linear com aplicações	H. Anton e C. Rorres	6	30,0
Álgebra linear e geometria analítica – Problemas e exercícios	A. Monteiro, G. Pinto e C. Marques	5	13,3
Curso de álgebra linear e geometria analítica	E. Giraldes, V. H. Fernandes e M. P. M. Smith	5	10,0
Álgebra linear: exercícios e aplicações	C. S. Ribeiro, L. Reis e S. S. Reis	3	10,0
Álgebra linear como introdução à matemática aplicada	L. T. Magalhães	5	8,3
Introdução à álgebra linear e geometria analítica	F. R. D. Agudo	4	6,7
Álgebra linear- teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos com resolução	I. Cabral, C. Perdigão e C. Saiago	4	6,7
Linear algebra and its applications	G. Strang	4	6,7
Não indica qualquer livro	–	–	30,0

De entre os livros indicados, verifica-se que há alguns que fazem referência às aplicações dos conteúdos de AL em contextos da realidade, como *Linear algebra and its applications*, de Strang (1988), e *Álgebra linear com aplicações*, de Anton e Rorres (2001). Neste último é dado algum destaque aos recursos computacionais, pois inclui exercícios, no final dos capítulos, para

os quais é recomendada a utilização do *Matlab, Mathematica*, *Maple* ou calculadoras com funcionalidade de AL, proposta que, de acordo com os autores, resultou do aperfeiçoamento da edição anterior com vista a atender às necessidades de uma nova geração de alunos.

Há também livros que exploram alguns dos conceitos do ponto de vista geométrico, como por exemplo *Álgebra Linear como introdução à matemática aplicada* de Magalhães (1992). Este autor, no prefácio do seu livro, realça inclusivamente a importância que atribui a esse aspeto:

> Entendo que a geometria desempenha um papel de importância fundamental na aprendizagem da matemática e contribui, frequentemente, para uma melhor compreensão de conceitos e técnicas de outras áreas. De acordo com este ponto de vista, noções fundamentais como as de produto interno, projeção ortogonal produto externo, determinante, valor próprio e vetor próprio são introduzidos depois de motivadas por considerações de caráter geométrico. Também nesta linha, a resolução de sistemas de equações lineares e os conceitos de espaço linear, base, dimensão, transformação linear e outros são relacionados com aspetos geométricos que lhes estão associados. (Magalhães, 1992, pp. x - xi).

Existe alguma diversidade na sequência de abordagem dos temas nos vários livros, mas, excetuando os livros *Curso de Álgebra Linear e Geometria*, de Giraldes et al. (1997), e *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, de Agudo (1996), pelo menos um dos temas Matrizes, Sistemas de equações lineares ou Determinantes consta sempre dos capítulos iniciais, antes da referência a Espaços vetoriais. Por exemplo, o livro de Anton e Rorres (2001), que é o mais recomendado pelos professores, apresenta a seguinte sequência: Sistemas de equações lineares e matrizes, Determinantes, Vetores nos espaços bi e tridimensionais, Espaços vetoriais euclidianos, Espaços vetoriais arbitrários, Espaços vetoriais com produto interno, Valores e vetores próprios, Transformações lineares, Tópicos adicionais, Espaços vetoriais complexos e Aplicações da Álgebra Linear.

Apenas 38,3% dos professores referiram a designação do *software* a que recorrem na UC, tendo 15% indicado dois. Assim, verifica-se que o *software* mais utilizado é o *Matlab*, logo seguido do *Scientific WorkPlace* e do *Octave* (Tabela 40). Os professores nem sempre utilizam o mesmo *software* para os mesmos temas, mas juntando as diversas propostas, obtém-se os vários assuntos em que cada *software* pode ser aproveitado (Tabela 40). Assim, verifica-se que o *Matlab*, o *Octave* e o *Scientific WorkPlace* são os que têm um espetro mais alargado, na medida em que são recomendados para todos os temas.

Tabela 40 – Designação do *software* usado na UC de AL e temas onde é utilizado

Software	% de professores	Temas onde é usado
Matlab	10,0	Todos
Scientific WorkPlace	8,3	Todos, e acetatos, testes e exames
Octave	6,7	Todos
GeoGebra	5,0	Geometria analítica, sistemas, transformações lineares
Maple	5,0	Todos
Scilab	5,0	Números complexos, matrizes, determinantes, sistemas, valores próprios
Microsoft Mathematics	3,3	Sistemas de equações lineares, determinantes
WinMat	1,7	Matrizes, determinantes, sistemas
Maxima	1,7	Sistemas de equações lineares, determinantes
Calculadora de AL	1,7	Apenas para conhecimento dos alunos, não é usada nas aulas
Sites online	1,7	Geometria
PowerPoint	1,7	Preparação/apresentação das aulas
Folha de cálculo	1,7	Determinantes
Não indicam qualquer *software*	61,7	

4.2.4. Implementação das aulas

No que concerne às metodologias de trabalho (Tabela 41), nas aulas de caráter mais teórico, as mais utilizadas são a exposição de conteúdos pelo professor (85% utilizam esta metodologia muitas vezes ou sempre) e a resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor (81,7% utilizam esta metodologia muitas vezes ou sempre). Já nas aulas de caráter mais prático, para além desta última, utilizada muitas vezes ou sempre por 65% dos docentes, também se destacam a resolução individual de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos (83,4% utilizam-na muitas vezes ou sempre) e a discussão em grande grupo (58,3% utilizam-na muitas vezes ou sempre).

Constata-se que a apresentação de trabalhos realizados pelos alunos e a realização de tarefas com recurso a computadores ou calculadoras ainda são metodologias de trabalho pouco utilizadas, mesmo nas aulas de caráter mais prático, pois apenas 16,7% e 21,6% dos docentes, respetivamente, as utilizam muitas vezes ou sempre.

Tabela 41 – Metodologias de trabalho usadas nas aulas

	% de professores				
Aulas de caráter mais teórico	N	PV	MV	S	NR
Exposição dos conteúdos pelo professor	1,7	–	51,7	33,3	13,3
Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor	1,7	3,3	70,0	11,7	13,3
Resolução individual de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	6,7	28,3	48,3	3,3	13,3
Resolução em grupo de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	25,0	53,3	8,3	–	13,3
Discussão em grande grupo (alunos e professor)	10,0	33,3	36,7	6,7	13,3
Apresentação de trabalhos realizados pelos alunos	48,3	36,7	–	–	15,0
Realização de tarefas com recurso a computadores ou calculadoras	51,7	18,3	15,0	–	15,0
Exploração de conceitos sob o ponto de vista geométrico	10,0	30,0	45,0	–	15,0
Aulas de caráter mais prático	N	PV	MV	S	NR
Exposição dos conteúdos pelo professor	1,7	43,3	31,7	15,0	8,3
Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor	1,7	25,0	56,7	8,3	8,3
Resolução individual de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	–	8,3	71,7	11,7	8,3
Resolução em grupo de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	11,7	38,3	36,7	3,3	10,0
Discussão em grande grupo (alunos e professor)	3,3	28,3	50,0	8,3	10,0
Apresentação de trabalhos realizados pelos alunos	43,3	30,0	15,0	1,7	10,0
Realização de tarefas com recurso a computadores ou calculadoras	45,0	23,3	18,3	3,3	10,0
Exploração de conceitos sob o ponto de vista geométrico	11,7	36,7	40,0	–	11,7

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Um dos professores que não respondeu à questão, quando estavam em causa as aulas de caráter mais teórico, esclareceu que a sua não resposta se deveu a nunca ter dado aulas teóricas da UC, justificação que apresenta em todas as questões que se relacionam com a componente teórica.

Nas aulas de caráter mais teórico, os computadores e as calculadoras são utilizados principalmente pelo professor. Já nas aulas de caráter mais prático, a frequência de utilização é idêntica para professores e alunos (Tabela 42). Contudo, em qualquer dos casos, estas tecnologias ainda são pouco usadas.

Tabela 42 – Uso do computador e da calculadora pelo professor e alunos nas aulas

	% de professores				
Aulas de caráter mais teórico	N	PV	MV	S	NR
Professor	40,0	16,7	16,7	8,3	18,3
Alunos	46,7	30,0	1,7	–	21,7
Aulas de caráter mais prático	N	PV	MV	S	NR
Professor	36,7	30,0	13,3	5,0	15,0
Alunos	35,0	30,0	13,3	5,0	16,7

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Nas finalidades do uso do computador e da calculadora, nas aulas de caráter mais teórico, salienta-se introduzir conteúdos (26,6% utilizam-nos muitas vezes ou sempre) e efetuar representações gráficas (25,0% utilizam-nos muitas vezes) (Tabela 43).

Tabela 43 – Finalidades do uso do computador e da calculadora nas aulas

	% de professores				
Aulas de caráter mais teórico	N	PV	MV	S	NR
Introduzir conteúdos	38,3	10,0	13,3	13,3	25,0
Apresentar a resolução dos exercícios/problemas propostos	36,7	16,7	18,3	3,3	25,0
Realizar tarefas utilizando *software* específico	40,0	16,7	18,3	–	25,0
Efetuar cálculos	41,7	20,0	13,3	–	25,0
Explorar exemplos	43,3	13,3	18,3	–	25,0
Efetuar representações gráficas	38,3	11,7	25,0	–	25,0
Aulas de caráter mais prático	N	PV	MV	S	NR
Introduzir conteúdos	45,0	20,0	10,0	5,0	20,0
Apresentar a resolução dos exercícios/problemas propostos	36,7	21,7	21,7	–	20,0
Realizar tarefas utilizando *software* específico	41,7	15,0	21,7	1,7	20,0
Efetuar cálculos	36,7	15,0	25,0	3,3	20,0
Explorar exemplos	35,0	18,3	23,3	1,7	21,7
Efetuar representações gráficas	35,0	23,3	20,0	–	21,7

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Nas aulas de caráter mais prático, os computadores e as calculadoras são usados muitas vezes ou sempre, principalmente para efetuar cálculos (28,3%) e explorar exemplos (25%) (Tabela 43). Um dos professores, que responde nunca em todos os itens relativos às aulas de caráter mais teórico e nunca ou poucas vezes nos itens das aulas de caráter mais prático, esclarece que só usa o computador para apresentar *slides* e que os exercícios costumam ser resolvidos no quadro à mão.

4.2.5. Avaliação das aprendizagens dos alunos

No que diz respeito à avaliação, há uma grande predominância dos métodos tradicionais de exames e testes, já que 85% e 90% dos professores, respetivamente, recorre a estes instrumentos para avaliar os alunos. De salientar que o trabalho de grupo é o método de avaliação menos utilizado (Tabela 44).

Tabela 44 – Modalidades de avaliação utilizadas pelos professores

Métodos de avaliação	% de professores
Exame final	85,0
Testes	90,0
Trabalhos individuais	21,7
Trabalhos de grupo	8,3
Participação nas aulas	10,0
Assiduidade às aulas	10,0
Trabalhos de casa	11,7
Não responde	3,3

Fazendo uma análise da diversidade de metodologias de avaliação que cada professor utiliza habitualmente (Figura 130), verifica-se que a maioria dos professores (68,3%) recorre exclusivamente a testes ou ao exame final. De notar que, embora a percentagem não seja muito significativa, há ainda docentes (3,3%) que avaliam apenas pelo exame final. Porém, um pouco mais de um quarto (28,3%) utiliza também outros métodos de avaliação, como assiduidade, participação nas aulas ou trabalhos de diferentes tipos. Entre estes, os mais referidos são os trabalhos individuais (21,7%), mas há professores (5%) que, para além deste tipo de trabalhos, recorrem igualmente a trabalhos de casa e de grupo.

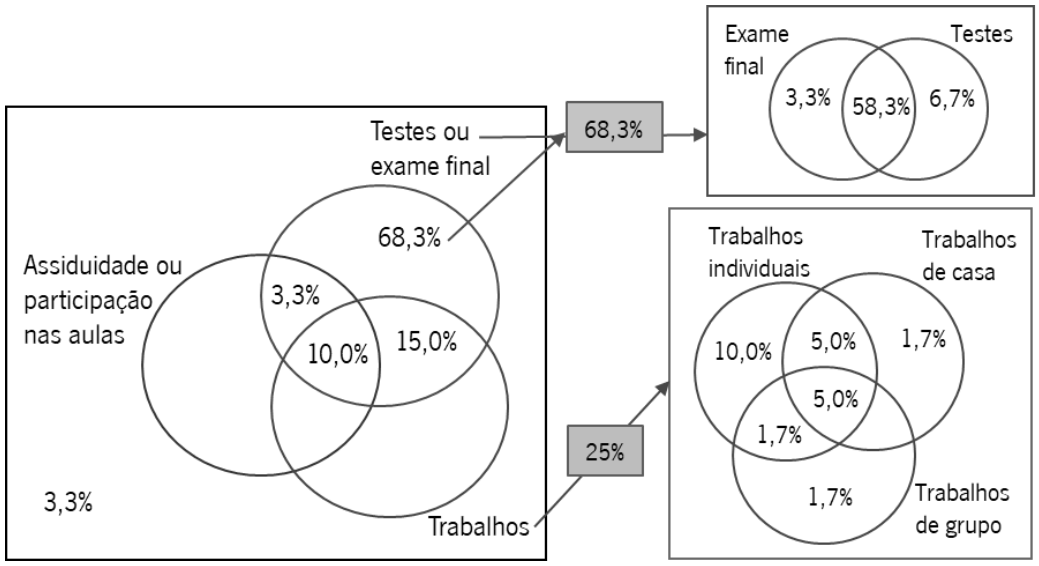


Figura 130. Diversidade dos métodos de avaliação utilizados.

No que concerne às ponderações atribuídas na valorização de cada tipo de avaliação, no caso do exame final a ponderação de 100% é a situação mais frequente (56,6% dos professores), sendo neste caso considerado por 51,6% dos professores como uma alternativa aos outros tipos de avaliação. Há ainda professores (15,2%) que, em termos de classificação, atribuem ao exame final um papel complementar dos outros métodos de avaliação, distribuindo assim as ponderações pelos diversos métodos que utilizam. No entanto, mesmo neste caso, o exame nunca tem uma ponderação inferior aos outros tipos de avaliação.

De realçar que há professores que, embora recorram a vários tipos de avaliação, não conferem a todos eles (nomeadamente trabalhos, assiduidade ou participação nas aulas) um poder sumativo, na medida em que não lhes atribuem uma ponderação em termos de classificação final.

Tabela 45 – Valorização dos métodos de avaliação em termos de ponderação

Métodos de avaliação	Relação métodos	Variação da ponderação	% professores
Só exame final ou só testes	Método exclusivo	Exame/Testes: 100%	10,0
Apenas exame final e testes	Complementares	Exame: 50% a 80%; Testes: 20% a 50%	6,7
	Em alternativa (Exame 100%)	Testes: 100% divididos de acordo com o n.º e tipo de teste	43,3
Exame e trabalhos	Complementares	Exame: 100%; TI: 5%	1,7
Testes e trabalhos	Complementares	Testes:90%; TI: 10% Testes: 80%; TG: 20%	3,3
Exame final, testes e um ou vários dos outros métodos	Complementares	Exame: 70%; Testes: 20%; A:10% Exame: 95%; Testes: 95%; TC: 5% Exame: 50%; Testes: 40%; TI: 10% Exame: 50%; Testes: 25%; TI: 15%; TC: 10%	6,7
	Em alternativa (Exame 100%)	Testes: 50%; TI: 20%; TG:30% Testes: 60%; TI: 40% Testes: 90%; TI: 5%; PA:3 %; A: 2% Testes: 90%; TI: 4%; PA: 3%; TC: 3% Testes: 90%; PA: 10%	8,3
Não indicam percentagens			20,0

TI – Trabalhos individuais; TG – Trabalhos de grupo; TC – Trabalhos de casa; A – Assiduidade; PA – Participação nas aulas

4.2.6. Dificuldades dos alunos

De entre os temas que lecionam, os professores consideram que os alunos sentem mais dificuldades nos espaços vetoriais. Contabilizando até à terceira escolha, pode-se considerar que o segundo tema que gera mais dificuldades é o de transformações lineares (53,3%) logo seguido dos valores e vetores próprios (45%). De notar que praticamente todos os temas são indicados, com menor ou maior percentagem, nas três primeiras escolhas (Tabela 46).

Tabela 46 – Temas em que os alunos sentem dificuldades

	Ordem do grau de dificuldade (% de professores)									
Temas	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	Total
Matrizes	1,7	–	1,7	3,3	8,3	23,3	20,0	5,0	1,7	65,0
Números complexos	3,3	1,7	3,3	3,3	5,0	3,3	1,7	–	–	21,6
Sistemas de equações lineares	1,7	1,7	10,0	8,3	18,3	11,7	6,7	3,3	–	61,7
Geometria analítica	6,7	10,0	8,3	16,7	6,7	–	–	–	–	48,4
Espaços vetoriais	58,3	18,3	6,7	–	–	–	–	–	–	83,3
Determinantes	–	–	5,0	13,3	18,3	10,0	6,7	5,0	3,3	61,6
Transformações lineares	8,3	28,3	16,7	3,3	–	–	–	–	–	56,6
Valores e vetores próprios	–	23,3	21,7	13,3	6,7	1,7	1,7	–	–	68,4
Estruturas algébricas	10,0	1,7	–	–	–	1,7	–	–	–	13,4
Cálculo vetorial	–	1,7	3,3	5,0	–	1,7	–	–	–	11,7
Não responde										10,0

Considerando que os alunos sentem dificuldades, as razões apontadas pela maioria dos professores para a sua existência são o facto dos alunos não terem hábitos de estudo regular e contínuo (86,7%), terem dificuldades em compreender conceitos abstratos (83,3%), terem uma formação matemática anterior deficiente (78,3%) e assumirem um papel passivo na sua aprendizagem (63,3%). Já no que diz respeito a razões que se prendem com o próprio ensino, são menos os professores que as apontam como geradoras de dificuldades. No entanto, há ainda professores que consideram que as dificuldades se devem ao facto do ensino se basear em recursos tradicionais (51,7%), fundamentalmente materiais escritos, e ao ensino ser muito expositivo e centrado no professor (40%) (Tabela 47).

Tabela 47 – Razões das dificuldades dos alunos

Em geral, os alunos	% de professores
Têm uma formação matemática anterior deficiente	78,3
Não têm hábitos de estudo regular e contínuo	86,7
Não atribuem significado ao que aprendem	41,7
Estão pouco motivados para a aprendizagem em geral	45,0
Têm dificuldades em compreender conceitos abstratos	83,3
Assumem um papel passivo na sua aprendizagem	63,3
São pouco assíduos às aulas	30,0
Não seleciona qualquer uma das opções	6,7
Em geral, o ensino	**% de professores**
Baseia-se em recursos tradicionais, fundamentalmente materiais escritos	51,7
É muito expositivo e centrado no professor	40,0
Promove pouco a compreensão dos conceitos	20,0
Fornece pouca orientação para o estudo dos alunos	13,3
Não é adequado aos conhecimentos prévios dos alunos	31,7
É muito teórico	5,0
Nenhuma das anteriores se aplica)	1,7
Não seleciona qualquer uma das opções	23,3

Quando questionados sobre o que poderia ser feito para melhorar a aprendizagem dos alunos em AL, 41,7% dos professores apresentaram uma ou mais sugestões, abarcando várias das dimensões implicadas no ensino (Tabela 48).

Tabela 48 – Sugestões para melhorar a aprendizagem dos alunos em Álgebra Linear

Aspetos em que é sugerida alguma intervenção	% de professores
Utilização de tecnologias	15,0
Tarefas e o seu contexto	13,3
Conhecimentos anteriores dos alunos	11,7
Programa e logística da UC de AL	10,0
Hábitos de estudo dos alunos e atitudes face à aprendizagem	8,3
Métodos de trabalho	8,3
Metodologias de avaliação	6,7
Não apresentam qualquer sugestão	58,3

No que reporta às tecnologias, quase todos os professores que lhe fazem referência consideram importante aumentar ou introduzir a realização de tarefas com recurso ao computador, tanto pelo seu efeito motivador, como para melhorar a compreensão dos conceitos ou pelo facto de permitir realizar tarefas com cálculos mais complexos:

> Penso que a introdução de computadores e, em particular, de *software* matemático poderá melhorar a compreensão de alguns tópicos do programa e permitir a introdução de exemplos mais realistas que envolvem cálculos mais complexos. (P24)

> Penso que a utilização de *software* no apoio às aulas (por exemplo, o *Matlab*) pode contribuir para uma maior motivação dos alunos e ajudar na compreensão das matérias. (P55)

Porém, as opiniões não são todas consentâneas, pois um dos professores alerta para a importância de

> não exagerar no uso de tecnologias [já desde o 1.º ciclo do ensino básico], pois também é necessário fazer coisas à 'moda antiga'. Por vezes os alunos chegam ao ensino superior sem saber 'pensar'. (...) sem uma máquina de calcular, por vezes, não conseguem fazer contas tão simples como 2×2. (P23)

Os professores que propõem uma intervenção ao nível das tarefas e do seu contexto (13,3%) advogam que se deviam promover tarefas motivadoras para os alunos, fazer sempre que possível a ligação da teoria à prática, propor tarefas com aplicações à realidade ou ao respetivo curso ou trabalhar as representações geométrica e analítica, como se pode constatar por algumas das sugestões dadas:

> Explorar a relação entre a parte geométrica dos problemas e a parte analítica. Propor atividades motivadoras para alunos desmotivados (tarefa hercúlea). (P9)

> Criar nos alunos a perceção da utilidade dos conceitos/métodos lecionados para resolver problemas inerentes às áreas específicas do curso em que se inserem. (P13)

> Insistir na preparação de exemplos simples, mas com alguma proximidade a exemplos do mundo real, de forma a aumentar o interesse pela aprendizagem. (P53)

Há igualmente professores que enfatizam a necessidade de garantir que os alunos possuam os conhecimentos anteriores necessários para compreender os conceitos da UC (11,7%), tanto a nível do conhecimento matemático, como de desenvolvimento de raciocínio, de cálculo mental e de interpretação e escrita de textos quando frequentam a UC. Embora alguns sugiram que a intervenção deveria ser feita ao longo do ensino básico e secundário, eventualmente através de mudanças curriculares e de métodos de trabalho, outros apresentam também sugestões de intervenção no ensino superior, como a criação de UCs prévias à UC de AL para consolidação de conhecimentos e a consciencialização dos docentes da necessidade de irem esclarecendo nas aulas de AL mesmo as dúvidas mais básicas dos alunos.

> Realização de um exame diagnóstico ao aluno antes de se inscrever na disciplina para apurar o nível real dos seus conhecimentos matemáticos. Caso não obtenha uma nota mínima, o aluno deveria ser obrigado a frequentar e obter aprovação numa disciplina de conhecimentos matemáticos mais básicos, essenciais para realizar com sucesso a disciplina de ALGA, antes de poder inscrever-se à disciplina de Álgebra Linear. (P21)

> Para um ataque sério a este problema, julgo imprescindível a oferta pelas universidades e politécnicos de disciplinas preparatórias que façam a ponte para as disciplinas curriculares de Matemática nos cursos superiores. (P41)

> Para além de melhorar a qualidade do ensino da primária ao secundário, pode-se explicar claramente os conceitos, trabalhá-los muito, aproveitar todas as dúvidas (mesmo as mais absurdas) para ir ensinando o que já deviam saber. (P44)

Os professores que se referem ao programa de AL ou à sua logística (10%) fazem sugestões diretamente ligadas aos conteúdos programáticos, recomendam o aumento da carga letiva semanal ou a redução do número de alunos por turma.

> Especificamente na Álgebra Linear acho completamente fundamental centrar a unidade curricular em matrizes, dado que tudo pode ser dado em função disso, o que reforça a coerência interna do programa. (P50)

> Mantendo os conteúdos, aumentar o número de horas semanais ou mantendo o número de horas semanais, reduzir nos conteúdos. (P 8)

> Reduzir o número de alunos por turma de modo a possibilitar outras abordagens que não a mera aula expositiva. (P14)

Alguns professores (8,3%) também consideram que melhorar os hábitos de estudo dos alunos e a sua atitude face à aprendizagem é um dos fatores que pode contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos em AL, dando algumas sugestões para alcançar essa finalidade.

> Desenvolver mecanismos para aumentar a assiduidade dos alunos às aulas da UC, nomeadamente às aulas teóricas; incentivar os alunos para estes assumirem um papel mais ativo na sua aprendizagem, privilegiando o estudo, o trabalho e a auto-motivação individuais (combatendo a tendência para desistir à primeira dificuldade...); incentivar os alunos para estes acompanharem (semanalmente ou até diariamente, de preferência) o desenvolvimento das matérias que vão sendo lecionadas na UC ao longo do semestre, recorrendo aos horários de atendimento dos professores sempre que precisarem de algum esclarecimento. (P27)

> (...) explicar-lhes como estudar e, se possível, mostrar que apesar das dificuldades e do trabalho que dá, aprender e saber é útil e compensador. (P44)

Outros professores (8,3%) referem a importância de intervir nos métodos de trabalho, propondo um ensino menos expositivo e mais centrado no aluno.

> O ensino da Álgebra Linear deve utilizar estratégias metodológicas diferentes das tradicionais e pouco motivadoras, tendo como objetivo estimular a participação dos alunos. (P56)

> A introdução de trabalhos individuais ou em grupo sobre tópicos da matéria permite aos alunos investigar e construir o seu próprio conhecimento. No entanto, esta opção pode ser muito exigente em horas de trabalho do professor se a UC tiver muitos alunos, nomeadamente no que diz respeito a horários de atendimento e a correção dos trabalhos. (P24)

Há ainda quem dê sugestões baseadas em experiências realizadas com resultados positivos.

> São fornecidos textos de apoio que vão sendo distribuídos por capítulos ao longo do semestre, para evitar a noção de 'sebenta' que fica muito arrumada em casa e não é utilizada. Também são fornecidas folhas de exercícios sempre com alguma renovação relativamente ao ano anterior e que incluem exercícios de escolha múltipla, de resposta aberta e de resposta semi-aberta, de acordo com os objetivos de aprendizagem a que se propõem. (P50)

Em termos de metodologias de avaliação, os professores que se referem a este aspeto (6,7%) consideram que as mudanças devem ser no sentido de incentivar o estudo, sugerindo avaliações mais frequentes ao longo do semestre.

> Implementar um método de avaliação que obrigue alunos a estudar com mais frequência" (P38)

> Talvez uma mudança na avaliação, dando mais valor aos que se esforçam e estudam, avaliando trabalhos ou fazendo testes mais frequentes ajude ao sucesso desta disciplina. (P29)

> Insistir nos testes de escolha múltipla ao longo do semestre, que parece incutir um maior sentido de responsabilidade e um aumento dos hábitos de estudo regular. (P53)

4.3. Síntese

Tendo em atenção as questões de investigação, a primeira parte deste estudo dividiu-se em duas fases. A 1.ª fase do estudo, cujo intuito é identificar erros e dificuldades dos alunos em tarefas de AL, centra-se na análise das respostas e dos raciocínios apresentados pelos alunos, que frequentavam a UC de ALGA, em questões alusivas aos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares.

As respostas corretas variam entre 10,2% e 46,2%, no caso das questões alusivas a Matrizes e determinantes, e entre 19,4% e 27,7%, no caso das questões relativas a Sistemas de equações lineares. Verifica-se ainda uma elevada taxa de não respondentes ou de alunos que respondem apenas verdadeiro ou falso sem apresentar qualquer justificação. Esta situação revela que os alunos tiveram uma dificuldade considerável em resolver as tarefas propostas.

Mesmo quando responderam corretamente, nem sempre utilizaram os procedimentos mais diretos para responder à questão. Assim, há alunos que calculam a matriz inversa quando necessitam de verificar se duas matrizes são inversas uma da outra ou se uma dada matriz é inversa de si própria, outros sentem necessidade de resolver o sistema para verificar se este tem como solução um vetor dado. Há também alunos que continuam a preferir usar o método da substituição para resolver os sistemas em detrimento dos novos métodos aprendidos na UC.

Os raciocínios não válidos permitiram identificar diversos tipos de erros, em alguns casos transversais a várias questões. De notar que alguns dos erros relacionados com Matrizes e determinantes foram também cometidos nas questões relativas aos Sistemas de equações

lineares, já que os temas estão relacionados, necessitando, por vezes, os alunos de recorrer a conhecimentos do primeiro tema para dar resposta às perguntas do segundo.

Na Tabela 49 apresenta-se uma síntese dos erros cometidos ou das dificuldades sentidas pelos alunos.

Tabela 49 – Síntese dos erros cometidos e dificuldades evidenciadas nas respostas às questões

Matrizes e determinantes	
Operações com matrizes	Multiplicação: - Falsas regras; - Não reconhecer as condições em que é possível efetuar o produto; - Dedução incorreta da dimensão da matriz produto. Potenciação: - Potência de cada uma das entradas da matriz. Matriz inversa: - Erros diversificados (no cálculo da matriz adjunta, dos cofatores,...); - Dificuldades em calcular pela definição e pelo método de Gauss-Jordan; - Inverso de cada uma das entradas da matriz.
Cálculo de determinantes	Teorema de Laplace: - Aplicar apenas a uma das entradas da linha escolhida; - Não calcular corretamente os cofatores; - Não acabar o processo. Propriedades dos determinantes: - Não afetar o determinante de sinal contrário quando se trocam linhas; - Não acabar o processo; - Considerar como sendo zero o determinante de matrizes não quadradas com duas colunas iguais. Regra de Sarrus: - Considerar a diferença entre a soma do produto das entradas das diagonais secundárias pela soma do produto das entradas das diagonais principais; Regras não aplicáveis ao determinante em causa: - Aplicar a regra de Sarrus para determinantes de ordem 4; - Multiplicar os elementos da diagonal principal em matrizes não triangulares; - Calcular apenas a diferença entre o produto das entradas da diagonal principal e secundária em determinantes de ordem superior a dois. Calcular determinantes de matrizes não quadradas através de falsas fórmulas.
Conceitos	Transposta: associar apenas a matrizes quadradas. Matrizes com a mesma dimensão: restringir este conceito às matrizes quadradas. Matrizes quadradas: restringir este conceito às matrizes de ordem dois, não identificar como quadradas matrizes que o são. Matriz singular: confundir com matriz triangular, diagonal, simétrica ou ortogonal. Matriz invertível: confundir com matriz ortogonal, simétrica para a adição, considerar que o produto da matriz e da sua inversa tem de ser a matriz nula ou que a soma tem de ser a identidade, classificar como invertíveis matrizes não quadradas.

Matrizes e determinantes	
Propriedades não válidas	Utilizar a distributividade da multiplicação em relação à adição em casos não adequados. A matriz inversa é igual à matriz transposta (mesmo sem a matriz ser ortogonal). Comutatividade da multiplicação de matrizes. Se a matriz tem zeros na diagonal principal, então é singular/determinante é zero. O determinante da soma de matrizes igual à soma dos determinantes das matrizes. Se o determinante de uma matriz é igual ao determinante da transposta, estas são inversas uma da outra. A matriz A é inversa de B se estas comutam. Se B não for inversa de A então A+B não é singular. Se o determinante não dá 1 nem -1, a matriz não é invertível (confusão com matriz ortogonal).
Sistemas de equações lineares	
Tradução entre notações	Erro de interpretação da notação matricial.
Resolução de sistemas	Método de eliminação de Gauss: - Operações elementares sem critério; - Operações que não são válidas: adicionar um número a uma linha, multiplicar linhas; - Não aplicar as operações aos termos independentes; - Não modificar todas as entradas da linha a alterar; - Não considerar a matriz ampliada.
Classificação de sistemas	Não atribuir aos parâmetros valores significativos. Classificar incorretamente.
Determinação da característica	Indicar a característica sem transformar previamente a matriz em escada por linhas. Dificuldade em analisar quando uma matriz está em escada por linhas.
Conceitos	Solução: - Considerar como solução cada um dos valores das variáveis; - Associar o número de soluções com o número de equações do sistema; - Confundir entre solução e tipo de sistema; - Confundir solução com o vetor dos termos independentes; - Verificar se um vetor é solução apenas numa das equações do sistema. Infinidade de soluções: exatamente três soluções é o mesmo que infinidade de soluções. Sistema homogéneo: não reconhecer quando é que um sistema é homogéneo
Propriedades não válidas	A única solução possível num sistema homogéneo é a solução nula. Se a matriz dos coeficientes não tem inversa, o sistema é impossível. Se as linhas da matriz são linearmente dependentes, o sistema é impossível. Se não for possível calcular o determinante, o sistema é impossível. Se o determinante é zero, o sistema é impossível. Um sistema com mais equações do que incógnitas é impossível. Quando uma equação do sistema é 0=0 o sistema é impossível. Só se podem resolver sistemas com o mesmo número de equações e de incógnitas. Para que o sistema seja possível o número de equações tem de ser igual ao número de incógnitas. Um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas é possível e determinado.

Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares	
Argumentação	Enunciar conceitos ou procedimentos válidos: - Irrelevantes para responder à questão; - Relevantes, mas não aplicados à questão em estudo. Não fazer uma análise completa: - Não completar o raciocínio iniciado; - Não explicitar com o devido pormenor o seu raciocínio; - Não analisar o leque de todas as hipóteses possíveis: assumir um determinado tipo de sistema, centrando-se nesse para dar a resposta. Não interpretar corretamente o resultado obtido – várias conceções erradas. Conhecimentos de lógica: - Exemplo que verifica a afirmação; - Prova da falsidade do recíproco; - Exemplo que não verifica a hipótese.

Na 2.ª fase da primeira parte do estudo, pretendeu-se caraterizar o ensino de AL no ensino superior politécnico a partir da opinião dos professores que lecionavam a UC. Nesse sentido, analisaram-se as respostas de 60 professores, do ensino superior politécnico, que responderam a um questionário *online* envolvendo as dimensões: dados pessoais, UC de AL e o curso, preparação das aulas, implementação das aulas, avaliação das aprendizagens dos alunos e dificuldades dos alunos. Os principais resultados obtidos encontram-se sintetizados na Tabela 49.

Tabela 50 — Síntese dos resultados obtidos no questionário

Dados pessoais	
Média das idades dos professores: 41,9 anos Classe etária mais representativa: [35, 45[Anos de docência no ensino superior: média 15,6 anos Anos de docência da UC AL: média 9,5 anos 85% dos docentes possui mestrado ou doutoramento	
UC de AL e o curso	
UC predominantemente no início do curso Modalidade de aulas mais comum: teórico-práticas exclusivamente ou conjugação destas com outro tipo de aulas Temas da UC comuns aos cursos de engenharia lecionados pelos professores: Matrizes, Determinantes e Espaços vetoriais Outros dos temas mais lecionados: Sistemas de equações lineares e Valores e vetores próprios	
Preparação das aulas	
É mais frequente o professor	Preparar aulas sozinho Preparar aulas semanalmente Utilizar como recurso a documentação da UC utilizada em anos anteriores
É menos frequente o professor	Recorrer a texto de investigação sobre o ensino e aprendizagem da AL Recorrer a computadores ou calculadoras
Principais finalidades dos livros de texto	Preparar a componente teórica da UC Selecionar exercícios e problemas para as aulas

Principais finalidades dos computadores		Elaborar materiais de apoio para a UC Disponibilizar materiais aos alunos na plataforma da UC
Aspetos mais enfatizados nas tarefas		Aplicação direta de conceitos e procedimentos Articulação entre os conceitos Aprendizagem de conceitos teóricos da UC
Aspetos menos enfatizados nas tarefas		Resolução de problemas da realidade
Implementação das aulas		
Principais metodologias de trabalho	Aulas mais teóricas	Exposição de conteúdos pelo professor Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor
	Aulas mais práticas	Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos Discussão em grande grupo (alunos e professor)
Utilização de calculadoras e computadores		Aulas mais teóricas – principalmente pelo professor Aulas mais práticas – frequência idêntica para professores e alunos
Principais finalidades do uso de computadores e calculadoras	Aulas mais teóricas	Introduzir conteúdos Efetuar representações gráficas
	Aulas mais práticas	Efetuar cálculos Explorar exemplos
Avaliação das aprendizagens		
Predominância dos métodos tradicionais: testes e exames Outros métodos como trabalhos (de grupo, de casa, individuais), assiduidade, participação: usados por menos de 22% dos professores		
Dificuldades dos alunos		
Tema que gera mais dificuldades: Espaços vetoriais		
Principais razões das dificuldades	Os alunos	Têm uma formação matemática anterior deficiente Não têm hábitos de estudo regular e contínuo Têm dificuldades em compreender conceitos abstratos
	O ensino	Baseia-se em recursos tradicionais, fundamentalmente materiais escritos É muito expositivo e centrado no professor
Sugestões dos professores para melhorar a aprendizagem dos alunos em AL		Realizar tarefas com recurso ao computador Criar unidades curriculares prévias à UC para recuperação e consolidação de conhecimentos Implementar avaliações mais frequentes ao longo do semestre Realizar trabalhos individuais ou em grupo Incentivar os alunos a assumirem um papel mais ativo na sua aprendizagem Explorar a relação entre a parte geométrica e analítica Trabalhar tarefas com aplicações à realidade ou ao respetivo curso Reduzir o número de alunos por turma Aumentar a carga horária semanal da UC

CAPÍTULO V

INTERVENÇÃO DE ENSINO

Neste capítulo apresentam-se os resultados relativos à segunda parte do estudo, que pretende dar resposta à questão de investigação: *Qual a influência de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades dos alunos e na utilização de software na aprendizagem dos estudantes em álgebra linear?* Mais especificamente, pretende-se analisar:

- Quais as vantagens e inconvenientes de um ensino centrado na exploração de erros e dificuldades dos alunos?
- Quais as vantagens e inconvenientes do *software* utilizado na resolução das tarefas propostas?
- De que forma o *software* contribuiu para colmatar as dificuldades?
- Em que medida a metodologia de trabalho implementada permitiu que os alunos assumissem um papel mais ativo no seu processo de aprendizagem?
- Quais as vantagens e inconvenientes das estratégias utilizadas para a aprendizagem dos alunos?

A intervenção de ensino foi realizada numa turma de 28 alunos do curso de Licenciatura em Engenharia Química e Biológica que frequentavam, no ano letivo 2013/2014, a unidade curricular (UC) de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA) e focou-se nos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, do programa da UC. Através desta intervenção, para além de se pretender promover um ensino centrado nos alunos, visava-se a utilização de estratégias que permitissem a discussão e reflexão sobre os erros por eles cometidos, levando-os a participar ativamente na superação das suas dificuldades. A consecução deste objetivo, coadjuvada com as opiniões dos professores sobre como melhorar a aprendizagem em AL, recolhidas na 2.ª fase da primeira parte do estudo, conduziu à seleção das seguintes estratégias para as aulas da UC:

- Realização de um teste diagnóstico e debate em grande grupo sobre a correção das respostas apresentadas pelos alunos;
- Proposta de tarefas incluindo questões baseadas em conceitos/procedimentos identificados como geradores de erros e dificuldades ou apresentando "resoluções" de outros alunos, essencialmente as efetuadas pelos participantes na 1.ª fase da primeira

parte do estudo, em que era pedida a análise da sua correção e a identificação dos erros cometidos;

– Trabalho em pequeno grupo, com posterior discussão em grande grupo envolvendo a análise das resoluções efetuadas;
– Avaliação com uma componente formativa: revisão dos minitestes, com a ajuda do *feedback* dado pelo professor, e oportunidade de reformular os trabalhos de grupo após o debate em grande grupo e com base nos comentários do professor;
– Utilização do *software Microsoft Mathematics* que, para além de facilitar a resolução de algumas tarefas, pode constituir um auxílio relevante na deteção de erros.

Para obter o *feedback* dos alunos sobre a intervenção realizada, aplicou-se um questionário e, posteriormente, efetuou-se uma entrevista, que permitiu complementar os dados do primeiro.

Descrevem-se seguidamente as aulas da intervenção de ensino, começando na avaliação diagnóstica, continuando com o ensino dos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares e concluindo com alguns aspetos da realização e revisão dos minitestes. Apresenta-se, ainda, a avaliação que os alunos efetuaram sobre esta experiência de ensino e uma síntese dos aspetos principais deste capítulo.

5.1. As aulas da intervenção de ensino

Na Tabela 51 apresenta-se, de forma resumida, a calendarização e os conteúdos das principais tarefas propostas nos tópicos Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares.

Tabela 51 – Calendarização da intervenção de ensino de acordo com as tarefas propostas

Dia da aula	Temas abordados	Tarefas propostas
25/09	------	Teste diagnóstico
	Matrizes e determinantes	
7/10	Conhecimentos anteriores	Teste diagnóstico (debate grande grupo)
9/10, 14/10 e 16/10	Conceito de matriz Operações com matrizes	Ficha de trabalho n.º 1
16/10 e 21/10	Propriedades das operações com matrizes	Ficha de trabalho n.º 2
21/10 e 23/10	Matrizes especiais	Ficha de trabalho n.º 3
23/10 e 28/10	Matriz simétrica e algumas propriedades Interpretação do significado das entradas e diagonal da matriz num dado contexto	Ficha de trabalho n.º 4

Dia da aula	Temas abordados	Tarefas propostas
28/10 e 30/10	Operações com matrizes Inversa de uma matriz	Ficha de trabalho n.º 5
30/10 e 04/11	Matrizes em escada por linhas Característica de uma matriz	Ficha de trabalho n.º 6
4/11 e 06/11	Determinantes, Teorema de Laplace Propriedades dos determinantes Adjunta de uma matriz Cálculo da inversa a partir da adjunta	Exercícios em *PowerPoint*
11/11 e 13/11	Determinantes	Ficha de trabalho n.º 7
20/11	Conteúdos do tema	Miniteste
27/11	Conteúdos do tema	Revisão do miniteste
	Sistemas de equações lineares	
13/11 e 18/11	Sistemas Classificação de sistemas Métodos de resolução de sistemas	Teste diagnóstico (debate grande grupo)
20/11 e 25/11	Conceito de solução Classificação de sistemas Relação sistemas-representação gráfica de equações	Ficha de trabalho n.º 8
25/11 e 27/11	Relação entre invertibilidade da matriz dos coeficientes e soluções do sistema Métodos de resolução de sistemas	Ficha de trabalho n.º 9
27/11 e 02/12	Discussão de sistemas	Ficha de trabalho n.º 10
12/12	Conteúdos do tema	Miniteste
19/12	Conteúdos do tema	Revisão do miniteste

Esta calendarização não corresponde propriamente à intervenção de ensino idealizada, na medida em que se pretendia discutir as tarefas na própria aula em que eram realizadas. No entanto, como os grupos, para além de serem heterogéneos em termos de conhecimentos, revelaram algumas dificuldades, tanto em trabalhar de forma autónoma como na resolução das tarefas, isso não foi possível em geral. Outro dos fatores que tornou esta estratégia inviável foi o facto de os alunos não prestarem atenção à resolução apresentada pelos colegas enquanto não tivessem completado todas as tarefas propostas. Assim, deixou-se que cada grupo seguisse ao seu ritmo, sugerindo-se aos grupos que se adiantavam nas tarefas que continuassem a resolução dos restantes exercícios. Por essa razão e porque se concluiu que, face às dificuldades demonstradas por alguns alunos, não se dispunha de tempo nas aulas para resolver todas as situações, alterou-se, sempre que conveniente, a ordem dos exercícios propostos de acordo com o que se considerou ser mais importante que os alunos trabalhassem na aula com o apoio da professora. Não se considerou pertinente reduzir o número de exercícios das fichas de trabalho na medida em que abarcavam questões diferenciadas, sendo, por conseguinte, importante que os alunos refletissem sobre elas. Para além disso, isso permitia aos grupos mais rápidos terem

outras tarefas para resolver. Aos grupos que não conseguiam completar as tarefas era-lhes sugerido que as acabassem em ambiente extra-aula. Face a esta situação, sempre que necessário, na aula seguinte eram dados alguns minutos para os alunos acertarem ideias relativamente a alguma das tarefas anteriores.

Nas secções que se seguem, a referência a cada um dos alunos que participou na experiência é designada por Ai , com $1 \leq i \leq 28$.

5.1.1. Avaliação diagnóstica

De seguida, analisam-se e descrevem-se os raciocínios dos alunos na resolução do teste diagnóstico, salientando-se os raciocínios que conduziram a respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas em cada uma das questões, usando-se a segunda categoria apenas quando o tipo de respostas o justifica. Relembra-se (ver Capítulo III – Método de investigação) que o teste diagnóstico foi apenas resolvido por 23 alunos e não por todos os alunos que participaram na experiência.

5.1.1.1. Questão 1

Resolva os seguintes sistemas de equações lineares e escreva para cada caso o conjunto-solução.

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Na Tabela 52 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos, classificadas como *corretas*, *parcialmente corretas*, *incorretas* e *não responde* para as três alíneas da questão 1. Nesta questão, como não houve respostas que incluíssem o conjunto-solução corretamente escrito, classificou-se a resposta como correta sempre que o aluno resolveu corretamente o sistema, mesmo que não tenha indicado ou tenha indicado de forma incorreta o conjunto-solução.

Tabela 52 – Respostas dos alunos nas alíneas a), b) e c) da questão 1

	Alínea		
Respostas	a)	b)	c)
Corretas	14 (60,9%)	1 (4,3%%)	3 (13,1%)
Parcialmente corretas	1(4,3%)	9 (39,2%)	1 (4,3%)
Incorretas	8 (34,8%)	12 (52,2%)	15 (65,2%)
Não responde	–	1 (4,3%)	4 (17,4%)

No caso da alínea a), as respostas corretas resultaram da resolução do sistema pelo método da substituição (14 alunos, Figura 131) ou pelo método de eliminação de Gauss (1 aluno).

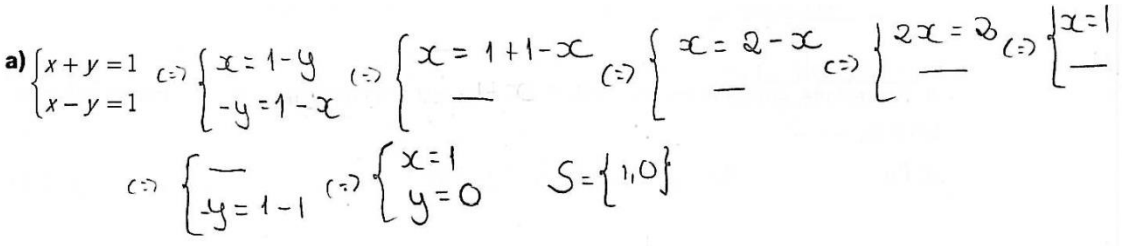


Figura 131. Resolução do sistema pelo método da substituição (A17).

Destes alunos, 10 não indicaram o conjunto-solução e cinco escreveram-no de forma incorreta como um conjunto de números e não como conjunto de pontos de $I\!R^2$. Isto é, em vez de escreverem o conjunto-solução como $\{(1,0)\}$, escreveram $\{1,0\}$ ou $\{0,1\}$ (Figura 131).

Nas respostas que se consideraram parcialmente corretas, os alunos aplicaram bem o método da substituição na resolução do sistema mas consideraram erradamente que a divisão obtida na última equação que resolveram era impossível (1 aluno, Figura 132).

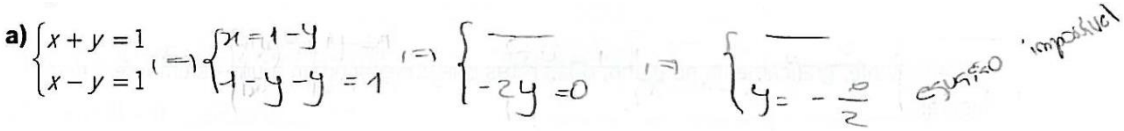


Figura 132. Considerar incorretamente que a divisão é impossível (A6).

As respostas incorretas resultaram, essencialmente, de erros cometidos na resolução de equações do primeiro grau (Figura 133 e Figura 134).

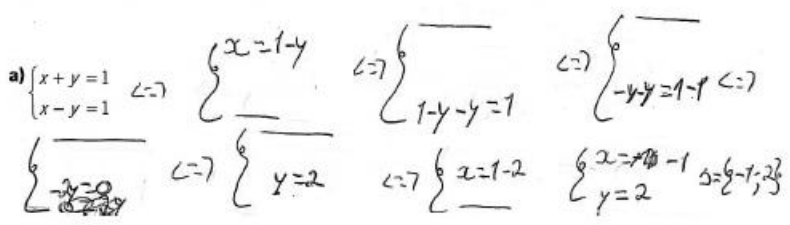


Figura 133. Resolução incorreta da equação $-2y=0$ (A16).

O aluno A16 (Figura 133) resolve incorretamente a equação $-2y=0$, pois considera que ela é equivalente à equação $y=2$. Deste modo, na sua resolução parece recorrer à operação inversa da adição, como se estivesse a resolver a equação $-2+y=0$, em vez de utilizar a operação inversa da multiplicação, cometendo assim o erro de não aplicar a operação inversa adequada. Para além disso, não escreve corretamente o conjunto-solução.

De forma similar, o aluno A4 (Figura 134) começa por resolver mal a equação $x + y = 1$, agindo como se estivesse perante a equação $xy = 1$ mas ao mesmo tempo, como houve mudança de membro, troca o sinal, ou seja, parece voltar a pensar no primeiro membro como uma adição. Para além disso, este aluno, quando passa para o terceiro passo, simplifica automaticamente o y do numerador com o do denominador sem ter em conta que no numerador da fração está presente a operação subtração e não a multiplicação.

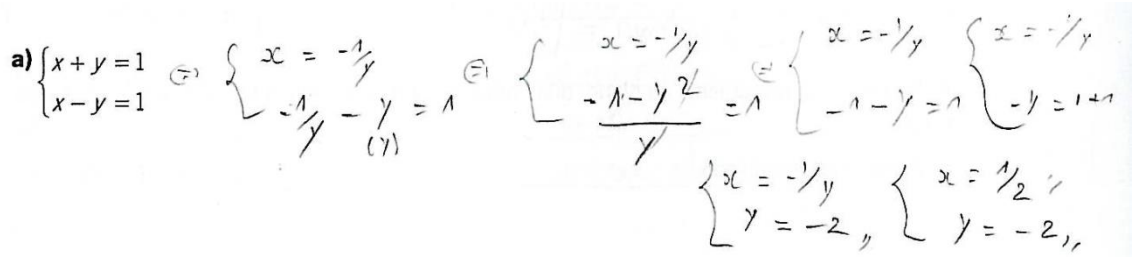


Figura 134. Resolução incorreta da equação $x + y = 1$ (A4).

No caso da alínea b), consideraram-se corretas as respostas em que o aluno aplicou bem um dos algoritmos de resolução do sistema e classificou o sistema como possível e indeterminado, mesmo não tendo apresentado o conjunto-solução. Tendo em atenção este facto apenas se pode considerar uma resposta correta, aquela em que o aluno resolveu o sistema pelo método de eliminação de Gauss (1 aluno, Figura 135).

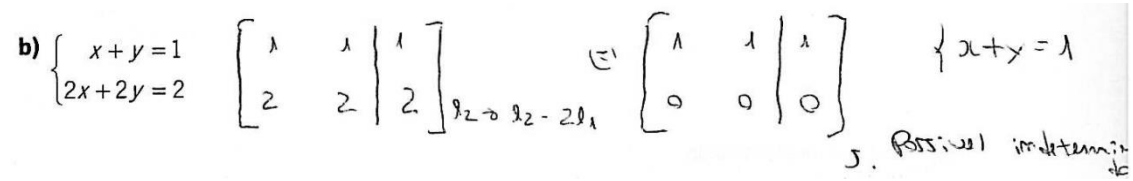


Figura 135. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (A20).

As respostas em que os alunos aplicaram corretamente um algoritmo de resolução do sistema, mas não interpretaram devidamente o resultado consideraram-se parcialmente corretas. Assim, incluíram-se neste caso nove alunos, cinco dos quais não acrescentaram qualquer conclusão e quatro que concluem incorretamente que o sistema é impossível (Figura 136), parecendo associar esta classificação ao facto de terem obtido a equação $0x = 0$ ou $0 = 0$.

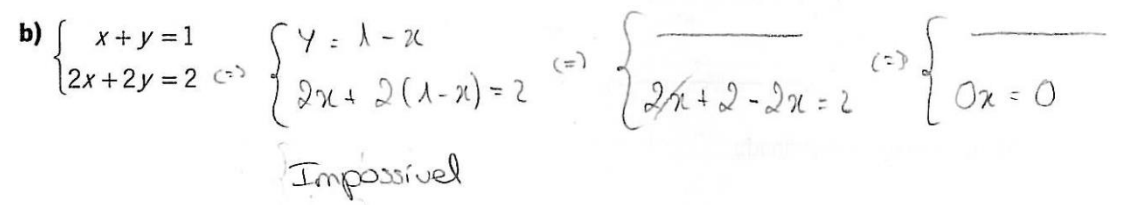


Figura 136. Interpretação incorreta do resultado obtido (A15).

Quanto às respostas incorretas, para além de tentativas de resolução não acabadas e erros de cálculo na adição, continua a haver dificuldades na resolução de equações do primeiro grau, destacando-se os erros nos sinais aquando da mudança de termos de um membro da equação para o outro e os erros relacionados com a identificação da operação inversa adequada (Figura 137).

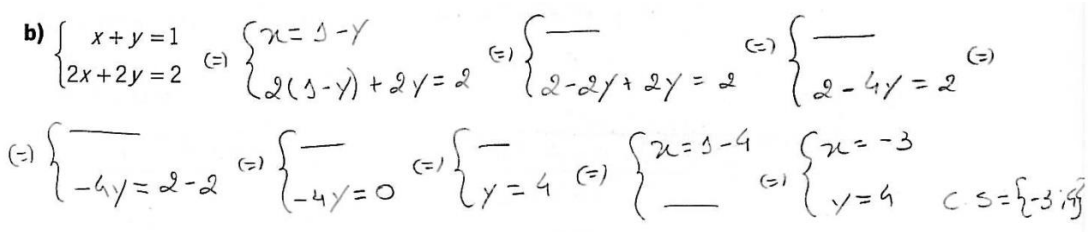


Figura 137. Resolução incorreta da equação $-4y = 0$ (A2).

De notar que o aluno A2 considera a equação $-4y = 0$ equivalente à equação $y = 4$, parecendo considerar a passagem do -4 para o segundo membro como se de uma adição algébrica, ou seja, não aplica a operação inversa adequada; erro também já detetado na alínea a).

Como se pode observar pela Tabela 52, a alínea c) foi aquela em que os alunos revelaram mais dificuldades, eventualmente por ser a única que envolve um sistema de três equações lineares a três incógnitas. Esta dificuldade também foi acrescida porque praticamente todos os alunos que responderam tentaram resolver o sistema em vez de constatarem pela observação das suas equações que havia duas que eram incompatíveis.

Na alínea c), as respostas que se consideraram corretas resultaram da resolução do sistema pelo método da substituição (2 alunos, Figura 138), pelo método de eliminação de Gauss (1 aluno, Figura 139) ou referindo apenas de forma simbólica a não compatibilidade de duas das equações (Figura 140). Só se consideraram corretas as respostas em que os alunos classificaram o sistema como impossível. Assim, considerou-se parcialmente correta a resposta de um aluno que aplicou corretamente o algoritmo do método da substituição, mas não tirou qualquer conclusão quanto ao tipo de sistema. De modo similar ao que se passou nas outras alíneas, nenhum destes alunos indicou o conjunto-solução conforme era solicitado, que, face ao sistema em causa, é o conjunto vazio.

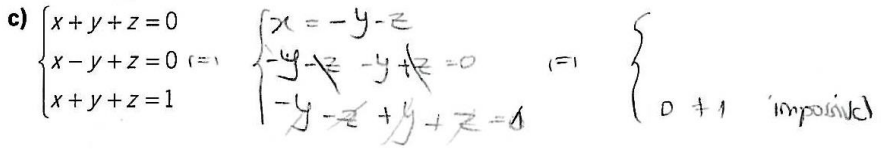


Figura 138. Resolução pelo método da substituição (A6).

De notar que, embora a resposta do aluno A6 tenha sido incluída nas respostas corretas, a formalização apresentada não é a mais adequada, pois deveria considerar $0 = 1$ na equação que escreveu e considerar a proposição falsa em vez de considerar $0 \neq 1$.

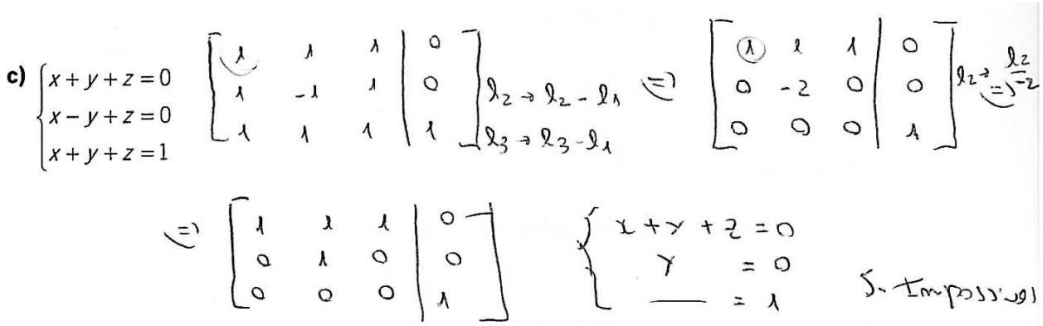


Figura 139. Resolução pelo método de eliminação de Gauss (A20).

Os alunos A6 e A20 resolveram o sistema e chegaram à conclusão que este era impossível. No entanto, o aluno A19 optou igualmente por um procedimento que seria mais rápido e se considerou correto, por estar implícito um raciocínio válido, embora não tivesse usado a formalização mais adequada. Presume-se que a ideia do aluno era indicar que a primeira e a terceira equações eram incompatíveis embora tenha confundido o sinal da disjunção com o da conjunção.

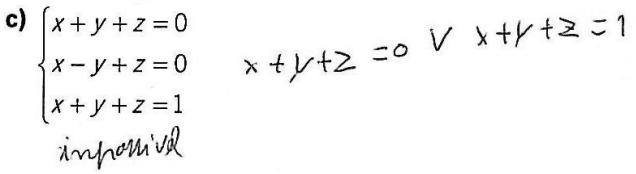


Figura 140. Conclusão pela observação das equações do sistema (A19).

As respostas incorretas desta alínea resultam da tentativa de resolução do sistema, em que os alunos não terminam as operações envolvidas, embora esteja correta a parte efetuada (Figura 141), ou de erros cometidos na resolução de equações do primeiro grau, evidenciando-se a dificuldade na identificação da operação inversa adequada (Figura 142), como também já foi observado em outras alíneas. Neste caso, há igualmente alunos que não terminam a resolução.

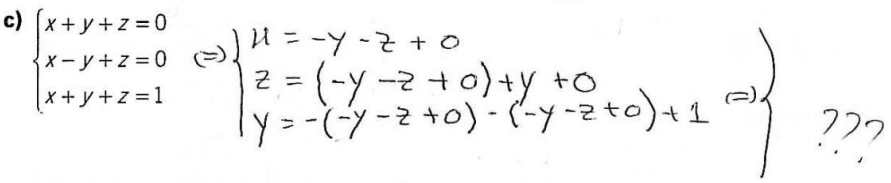


Figura 141. Tentativa de resolução (A24).

O aluno A24 (Figura 141) embora tenha resolvido bem o primeiro passo não continua a resolução, talvez por considerar que esta se está a tornar confusa.

Já o aluno A25 (Figura 142), para além de não acabar de resolver o sistema, resolve a equação $x + y = 1 - z$ como se estivesse perante uma equação do tipo $xy = 1 - z$.

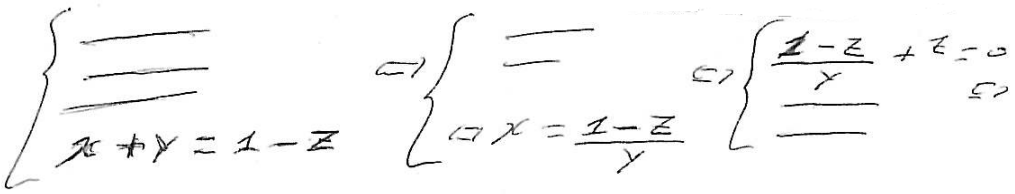


Figura 142. Resolução incorreta da equação $x + y = 1 - z$ (A25).

Na Tabela 53 faz-se uma síntese dos erros cometidos pelos alunos e da sua frequência nas várias alíneas da questão 1. De notar que há alunos que cometeram mais do que um tipo de erro e há outros que, embora tenham resolvido corretamente o sistema, falham na interpretação do resultado obtido. De salientar que na tabela não estão contempladas as tentativas inacabadas de resolução em que não houve erros cometidos (1 resposta na alínea b) e 7 na alínea c)).

Tabela 53 — Síntese dos erros cometidos pelos alunos nas alíneas da questão 1

	Alínea		
Erros	a)	b)	c)
Não aplicar a operação inversa adequada Ex: $x + y = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{y}$; $-2y = 0 \Leftrightarrow y = 2$	5 (21,7%)	6 (26,1%)	4 (17,4%)
Transposição incorreta de termos[1] Ex: $x + y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y$	1 (4,3%)	3 (13,0%)	1 (4,3%)
Erros na eliminação dos denominadores Ex: $x + \frac{2-2x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x + 2 - 2x = 1$; $\frac{-1-y^2}{y} = 1 \Leftrightarrow -1 - y = 1$	1 (4,3%)	2 (8,7%)	– (0,0%)
Erros de cálculo na adição Ex: $2y - 2 + 2y = 2 \Leftrightarrow 2 - 0y = 2$; $x - y - x - y = 0 \Leftrightarrow 2y = 0$	1 (4,3%)	3 (13,0%)	1 (4,3%)
Erros ao desembaraçar de parêntesis Ex: $z = 1 - (0 - z) \Leftrightarrow z = 0 + z$	1 (4,3%)	– (0,0%)	1 (4,3%)
Classificar como impossível um sistema em que, após a resolução, uma das equações é do tipo $0 = 0$, $0x = 0$ ou $y = -\frac{0}{2}$	1 (4,3%)	4 (17,4%)	1 (4,3%)
Erro ao substituir as incógnitas Ex: Sendo $x = 0 - y - z$, na substituição usar apenas $x = 0 - y$	– (0,0%)	– (0,0%)	1 (4,3%)
Conjunto-solução como conjunto de números reais Ex: $\{1,0\}$ em vez de $\{(1,0)\}$	8 (34,8%)	2 (8,7%)	1 (4,3%)

[1] Termo usado por Ponte, Branco e Matos (2009) baseado na expressão *switching addends* de Kieran (1992).

Observando a Tabela 53 verifica-se que não aplicar a operação inversa adequada é o erro que mais se destaca (15 ocorrências), logo seguido da indicação incorreta do conjunto-solução (11 ocorrências).

5.1.1.2. Questão 2

> Numa turma há 9 alunos. Sabe-se também que o número de rapazes é o dobro do número de raparigas. Quantos rapazes e quantas raparigas há na turma?
> Escreva um sistema que traduza a situação enunciada. Não resolva o sistema.

Na Tabela 54 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 2, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Tabela 54 — Respostas dos alunos na questão 2

Respostas	Total
Corretas	4 (17,4%)
Parcialmente corretas	3 (13,1%)
Incorretas	9 (39,1%)
Não responde	7 (30,4%)

Esta foi uma questão em que os alunos manifestaram bastantes dificuldades, já que apenas 17,4% deram uma resposta correta. Neste caso, os alunos apresentaram o sistema de equações lineares que correspondia à tradução correta do enunciado dado (Figura 143 e Figura 144).

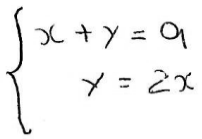


Figura 143. Tradução correta do enunciado (A20).

O aluno A20 considerou que *x* representava o número de raparigas e *y* o número de rapazes (Figura 143). Já o aluno A28 considerou que *x* representava o número de rapazes e *y* o número de raparigas (Figura 144).

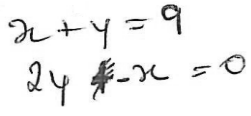


Figura 144. Tradução correta do enunciado (A28).

Nas respostas que se consideraram parcialmente corretas, os alunos traduziram corretamente parte do enunciado na medida em que definiram adequadamente a primeira equação do sistema (Figura 145).

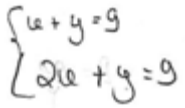


Figura 145. Definição correta da primeira equação do sistema (A22).

As respostas incorretas resultaram de aspetos distintos, tais como: resolução do problema sem responder ao que era pedido (3 alunos, Figura 146); confundir o valor das variáveis com os coeficientes (1 aluno, Figura 147); utilizar a mesma variável com significados distintos (1 aluno, Figura 148); dificuldades em termos de formalização (1 aluno, Figura 149) e utilizar o dobro ou a metade sem significado aparente (3 alunos, Figura 150). Analisam-se, em seguida, com mais detalhe, as respostas dos alunos para cada uma das situações enunciadas.

O aluno A4 não apresenta o sistema correspondente ao problema dado, escrevendo a solução do problema, ou seja, que há seis rapazes e três raparigas (Figura 146).



Figura 146. Indicação apenas da solução (A4).

Já o aluno A10 escreve uma única equação do sistema, em que os coeficientes das incógnitas são os próprios valores dessas incógnitas que satisfazem ao problema pois, como já foi referido, se x representar o número de rapazes e y o número de raparigas, $x = 6$ e $y = 3$.

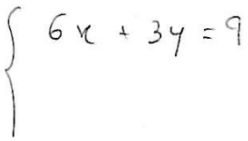


Figura 147. Confusão entre coeficientes das incógnitas e o valor destas (A10).

O aluno A26 (Figura 148) utiliza a mesma variável com dois significados distintos. Ou seja, na primeira equação utiliza x para representar o número de rapazes, o que corresponde à designação que apresenta das variáveis. Porém, na segunda equação, traduz exatamente o mesmo que na primeira se se considerar que x representa o número de raparigas. De realçar que a primeira equação, com a correspondente indicação do significado das variáveis, corresponderia ao enunciado se o objetivo fosse escrever uma equação e não um sistema.

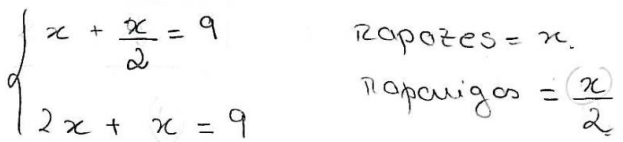


Figura 148. Utilização da variável x com dois significados distintos (A26).

O aluno A14 (Figura 149) apresenta apenas uma resposta que poderá ser baseada num raciocínio válido mas que indicia dificuldades em aspetos ligados à formalização. Eventualmente o aluno quereria transmitir que $y = 2x$ e $2x + x = 9$ (de notar que considera $2x$ correspondendo aos rapazes (Rz) e x a raparigas (Rg)), o que é uma ideia correta em termos das equações do sistema no caso em que a segunda equação já estaria numa fase de resolução.

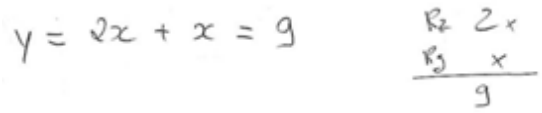


Figura 149. Dificuldades na formalização (A14).

O aluno A15 (Figura 150) tem a noção que deve apresentar o dobro ou a metade de algo, mas fá-lo sem significado aparente.

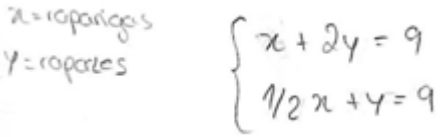


Figura 150. Equações sem significado aparente (A15).

5.1.1.3. Questão 3

Verifique se (3,0,1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + y = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

Na Tabela 55 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*, relativamente à questão 3.

Tabela 55 — Respostas dos alunos na questão 3

Respostas	Total
Corretas	9 (39,1%)
Incorretas	8 (34,8%)
Não responde	6 (26,1%)

As respostas corretas resultaram de três tipos de raciocínios: substituição das incógnitas pela solução proposta e verificação da obtenção ou não de proposições verdadeiras (5 alunos, Figura 151); resolução do sistema pelo método da substituição (3 alunos, Figura 152) e resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (1 aluno, Figura 153).

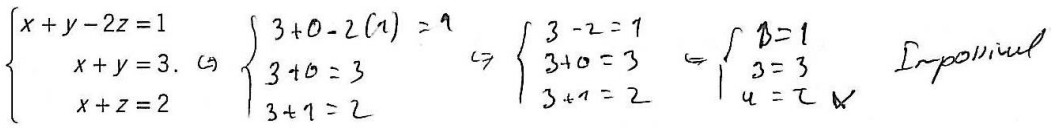


Figura 151. Substituição das incógnitas pela solução proposta (A1).

Como se verifica neste raciocínio, o aluno, depois de substituir as incógnitas pela solução proposta, conclui que não é possível que (3,0,1) seja solução do sistema.



Figura 152. Resolução do sistema pelo método de substituição (A4).

Embora se considerasse válido este raciocínio, o aluno A4 (Figura 152) não escreve corretamente a solução do sistema na medida em que considera que a solução é um conjunto de números reais, ou seja $\{1,2,1\}$, em vez do conjunto formado por um ponto de IR^3, ou seja, $\{(1,2,1)\}$. O mesmo acontece com o aluno A20 (Figura 153), que dá o mesmo tipo de resposta.

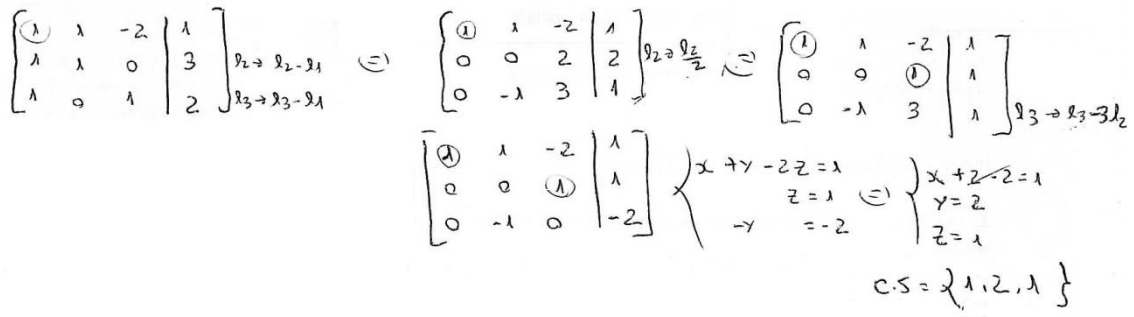


Figura 153. Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (A20).

É de realçar que a maioria dos alunos que respondeu à questão resolveu, ou tentou resolver, o sistema (12 alunos) em vez de substituir diretamente a possível solução em cada uma das equações para verificar se obtinha proposições verdadeiras, o que denota uma compreensão pouco abrangente do conceito de solução. Situação que também já se tinha verificado numa questão semelhante (questão 2a)), incluída na 1.ª fase da primeira parte do estudo.

Consideraram-se incorretas as respostas em que os alunos iniciaram a resolução do sistema pelo método da substituição (8 alunos) mas abandonaram o processo ou cometeram erros ao longo da sua resolução. Neste caso, para além de alguns lapsos ao substituir uma incógnita pela expressão obtida noutra equação, continuam a destacar-se os erros na resolução de equações do primeiro grau. Por exemplo, o aluno A10 resolve de forma incorreta a equação $-2z=-2$, na medida em que a considera equivalente à equação $z=-2+2$ (Figura 154).

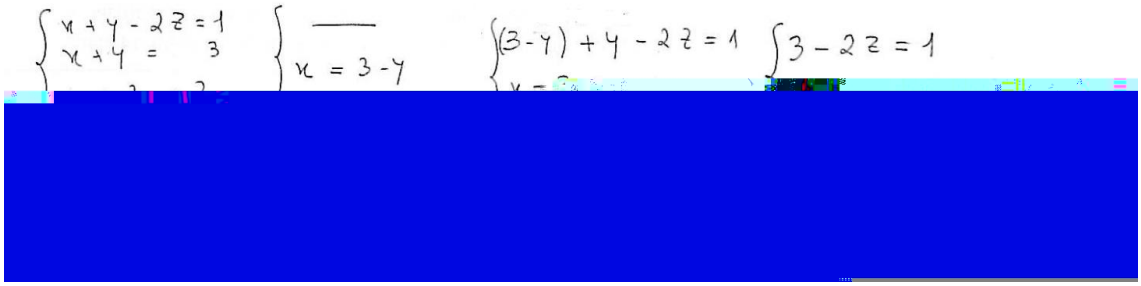


Figura 154. Resolução incorreta da equação $-2z=-2$ (A10).

5.1.1.4. Questão 4

Represente, graficamente no plano, duas retas que correspondam a um sistema de equações lineares:
a) Possível e determinado; b) Possível e indeterminado; c) Impossível.

Na Tabela 56 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 4, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Em qualquer das alíneas desta questão houve uma elevada taxa de alunos que não deram qualquer resposta. Alguns deles justificaram estas não respostas pelo facto de não se lembrarem de como fazer a ligação entre a representação analítica e a gráfica. Comparando os três tipos de sistemas, pode-se constatar que a alínea b), que se referia ao sistema possível e indeterminado, foi a que gerou mais dificuldades pois apenas houve duas respostas corretas.

Tabela 56 – Respostas dos alunos nas alíneas a), b) e c) da questão 4

	Alínea		
Respostas	a)	b)	c)
Corretas	6 (26,1%)	2 (8,7%)	5 (21,7%)
Incorretas	2 (8,7%)	4 (17,4%)	2 (8,7%)
Não responde	15 (65,2%)	17 (73,9%)	16 (69,6%)

Fazendo uma análise dos acertos por agrupamento das alíneas, verifica-se que apenas um aluno acertou em todas (Figura 155), três acertaram nas alíneas a) e c) e um nas alíneas a) e b).

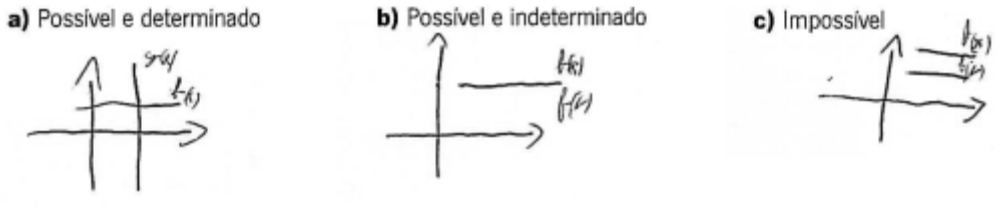


Figura 155. Apresentação de um exemplo correto para cada caso (A19).

Uma análise mais detalhada, para cada alínea, do tipo de representação gráfica que foi realizada no caso das respostas incorretas é apresentada na Tabela 57.

Tabela 57 — Respostas incorretas dos alunos nas alíneas a), b) e c) da questão 4

	Alínea		
Respostas	a)	b)	c)
Retas concorrentes	–	2 (8,7%)	–
Retas estritamente paralelas	1 (4,3%)	–	–
Retas coincidentes	–	–	2 (8,7%)
Parábola	1 (4,3%)	2 (8,7%)	–

Pode-se assim concluir que os alunos ou traçaram retas cuja posição relativa não correspondia ao que era pedido ou apresentaram exemplos com parábolas (Figura 156), não reconhecendo que nesse caso o gráfico não representaria um sistema de equações lineares.

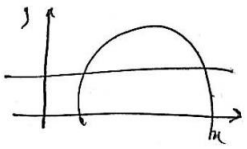
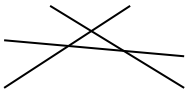


Figura 156. Apresentação de um exemplo referente a uma equação não linear (A1).

Ao escolher este exemplo (Figura 156), que pretendia representar um sistema possível e indeterminado, presume-se que os alunos tentaram realizar a representação de um sistema que tivesse mais do que uma solução. No entanto, não refletiram que seria um sistema possível e determinado com duas soluções, o que acontece pelo facto do sistema não ser linear.

5.1.1.5. Questão 5

A figura seguinte representa 3 retas no plano. Considerando que a cada reta corresponde uma equação linear, indique, justificando, qual o conjunto-solução do sistema formado pelas três equações lineares.



Na Tabela 58 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 5, classificadas como corretas, incorretas e não responde.

Tabela 58 – Respostas dos alunos na questão 5

Respostas	Total
Corretas	1 (4,3%)
Incorretas	2 (8,7%)
Não responde	20 (87,0%)

É de destacar que a maioria dos alunos (87,0%) não apresentou qualquer resposta. O único aluno que apresentou uma resposta válida indicou como conjunto-solução o conjunto vazio. Dos dois alunos que deram respostas incorretas, um apresenta como resposta "$x = 0$" e o outro "$CS = \{IR\}$", respostas que se referem apenas a uma dimensão, o que leva a concluir que os alunos não se consciencializaram que estão a trabalhar em duas dimensões.

5.1.1.6. Questão 6

> Em anos anteriores estudou algumas propriedades das operações de adição e multiplicação, designadamente: propriedade comutativa, propriedade associativa, existência de elemento neutro, existência de elemento absorvente, existência de simétrico, existência de inverso e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
> Identifique as propriedades das operações de adição ou multiplicação utilizadas em cada caso:
>
> a) $6 \times 1 = 6$; b) $3 \times 5 = 5 \times 3$; c) $0 \times 9 = 0$; d) $4 + 0 = 4$; e) $3 \times \frac{1}{3} = 1$;
>
> f) $3 \times (2 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 4$; g) $5 + (-5) = 0$; h) $5 + (1 + 3) = (5 + 1) + 3$.

Na Tabela 59 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 6, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Tabela 59 – Respostas dos alunos nas alíneas da questão 6

	Alínea							
Respostas	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Corretas	5 (21,7%)	9 (39,1%)	7 (30,4%)	10 (43,5%)	11 (47,8%)	15 (65,2%)	14 (60,9%)	5 (21,7%)
Incorretas	9 (39,1%)	11 (47,8%)	14 (60,9%)	6 (26,1)	7 (30,4%)	6 (26,1%)	5 (21,7%)	13 (56,5%)
Não responde	9 (39,1%)	3 (13,0%)	2 (8,7%)	7 (30,4%)	5 (21,7%)	2 (8,7%)	4 (17,4%)	5 (21,7%)

Observando os dados da Tabela 59, verifica-se que a percentagem de respostas corretas varia entre 21,7% e 65,2%, o que leva a concluir que os alunos tiveram uma considerável

dificuldade em responder a esta questão, eventualmente por já não se lembrarem das propriedades das operações. Mais de metade dos alunos identificou corretamente as propriedades "distributiva da multiplicação em relação à adição" e a "existência de simétrico na adição". Nas restantes propriedades, foram menos de metade os alunos que as identificaram corretamente, revelando-se mais difíceis as propriedades "1 como elemento neutro da multiplicação" e "associativa da adição", onde apenas cerca de um aluno em cada cinco as identificou corretamente.

5.1.1.7. Questão 7

Resolva a equação $(x+1)(x-7)=0$.

Na Tabela 60 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 7, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Todos os alunos mostraram que tinham algum tipo de conhecimento para responder a esta questão na medida em que nenhum deixou de responder, embora mais de metade tenha dado uma resposta incorreta.

Tabela 60 — Respostas dos alunos na questão 7

Respostas	Total
Corretas	10 (43,5%)
Incorretas	13 (56,5%)
Não responde	—

Os alunos que responderam corretamente utilizaram a lei do anulamento do produto (2 alunos, Figura 157) ou efetuaram primeiro a multiplicação dos fatores, obtendo uma equação do segundo grau, cujas raízes determinaram pela fórmula resolvente (8 alunos, Figura 158).

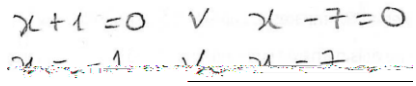


Figura 157. Resolução pela lei do anulamento do produto (A21).

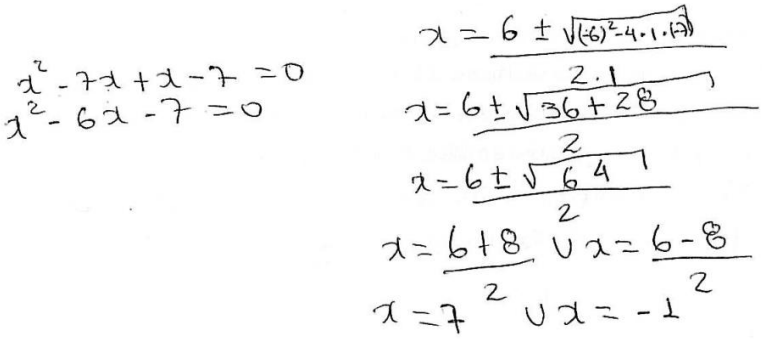


Figura 158. Resolução pela fórmula resolvente (A18).

As respostas incorretas resultaram dos alunos efetuarem cálculos incorretos quando tentavam obter a equação do segundo grau (2 alunos) ou quando aplicavam a fórmula resolvente (8 alunos, Figura 159), de não aplicarem a fórmula corretamente (2 alunos, Figura 160) e de não darem continuidade à resolução depois de efetuar o produto para obter a equação de segundo grau (1 aluno), eventualmente por não se recordarem da fórmula.

Por exemplo, o aluno A20 (Figura 159) não obtém o resultado esperado porque comete o erro de não considerar que o produto de dois números negativos é um número positivo, erro que foi cometido por mais quatro alunos.

Figura 159. Erro no sinal do produto (A20).

Já o aluno A16 (Figura 160) não enuncia corretamente a fórmula resolvente ao resolver a equação.

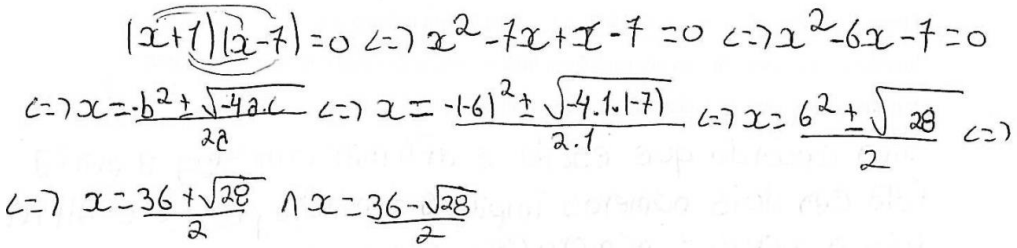


Figura 160. Fórmula resolvente incorreta (A16).

Se não se der demasiado realce aos erros de cálculo cometidos, pode-se concluir que não foi uma questão em que os alunos tivessem muitas dificuldades quanto à forma de a resolver. É, porém, evidente que o raciocínio adotado pela maioria dos alunos não foi o mais adequado face à situação apresentada, pois poderiam ter optado pela lei do anulamento do produto, que permitiria resolver a equação mais rapidamente e sem correr tantos riscos de enganos nos cálculos. A preferência pelo uso da propriedade distributiva, aplicando depois os métodos de resolução de equações lineares, em detrimento da utilização da lei do anulamento do produto, foi também sinalizada nos estudos de Ochoviet e Oktaç (2009) e de Pochulu, Abrate, Gabetta e Sierra (2012) com estudantes do ensino não superior.

5.1.1.8. Questão 8

Determine o produto escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, dos vetores $\vec{u} = (2,4,6)$ e $\vec{v} = (3,0,5)$.

Na Tabela 61 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 8, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Tabela 61 — Respostas dos alunos na questão 8

Respostas	Total
Corretas	—
Incorretas	11 (47,8%)
Não responde	12 (52,2%)

Como se pode constatar pela Tabela 61, os alunos ou não responderam ou deram uma resposta incorreta, pelo que não houve qualquer aluno que tenha calculado corretamente o produto escalar, mesmo os que tinham frequentado a UC no ano anterior. Analisando as respostas incorretas, verifica-se que a maior parte dos alunos tem alguma ideia do algoritmo utilizado no cálculo, pois efetuam devidamente o produto entre as componentes homólogas dos vetores dados. Contudo, falham quando consideram que o resultado é um vetor e não o escalar resultante da soma dos produtos obtidos (Figura 161), mesmo quando inicialmente representam essa soma (Figura 162).

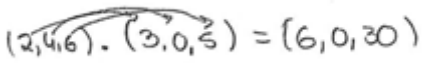


Figura 161. Produto escalar como vetor (A17).

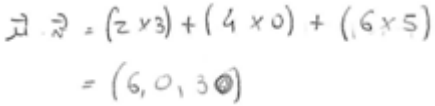


Figura 162. Produto escalar como vetor (A6).

Eventualmente, nestes casos, os alunos podem estar a confundir os conceitos de produto escalar e produto vetorial, uma vez que nesta última operação o resultado é um vetor.

5.1.1.9. Questão 9

> Para provar que a afirmação "A soma de dois números pares é um número par" é verdadeira, o João apresentou o seguinte raciocínio:
> "Como 2 e 4 são números pares e $2+4=6$ também é um número par, logo, posso concluir que a afirmação é verdadeira."
> Indique, justificando, se considera válido o raciocínio do João.

Na Tabela 62 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 9, classificadas como *corretas*, *parcialmente corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Tabela 62 – Respostas dos alunos na questão 9

Respostas	Total
Corretas	–
Parcialmente corretas	1 (4,3%)
Incorretas	20 (87,0%)
Não responde	2 (8,7%)

Nesta questão não houve respostas corretas. Os alunos centraram a sua resposta no conhecimento da veracidade da afirmação "a soma de dois números pares é um número par", aceitando como válido o raciocínio do João e acabando por não responder ao que era pedido. O facto de ser frequente os alunos considerarem uma afirmação válida com base apenas em alguns exemplos (empirismo ingénuo de Balachef, 2000), situação que também se verificou na 1.ª fase da primeira parte do estudo, poderá ter igualmente contribuído para este tipo de resposta. Assim, as respostas incorretas evidenciam dois tipos de raciocínios: um em que os alunos reafirmam a validade da afirmação (11 alunos) e outro em que os alunos, para além disso, acrescentam também um ou mais exemplos para enfatizar a sua veracidade (9 alunos, Figura 163).



Figura 163. Apresentação de um exemplo (A2).

Há, porém, uma resposta, que se considerou parcialmente correta, e que se destaca das outras na medida em que o aluno tenta demonstrar a propriedade para o caso geral (Figura 164). Contudo, este é um tipo de resposta ainda bastante limitado pois considera os dois números pares iguais e não apresenta qualquer conclusão ou explicação sobre o facto de 4n ser par.



Figura 164. Tentativa de prova da propriedade (A19).

5.1.1.10. Questão 10

Considere a propriedade: A soma de dois números ímpares é um número par.
Maria e Alfredo reescreveram esta propriedade da seguinte forma:
Maria: – Se dois números são ímpares, a sua soma é um número par.
Alfredo: – Se a soma de dois números é um número par, esses dois números são ímpares.
Indique, justificando, se a Maria e o Alfredo estão a afirmar o mesmo.

Na Tabela 63 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 10, classificadas como *corretas*, *incorretas* e *não responde*.

Tabela 63 – Respostas dos alunos na questão 10

Respostas	Total
Corretas	10 (43,5%)
Incorretas	11 (47,8%)
Não responde	2 (8,7%)

Os alunos que apresentaram respostas corretas contestam a veracidade da afirmação recíproca através de contraexemplos (Figura 165) ou citando propriedades gerais (Figura 166). Concluem, assim, que, como a primeira implicação é verdadeira e a sua recíproca é falsa, as afirmações não traduzem a mesma informação.

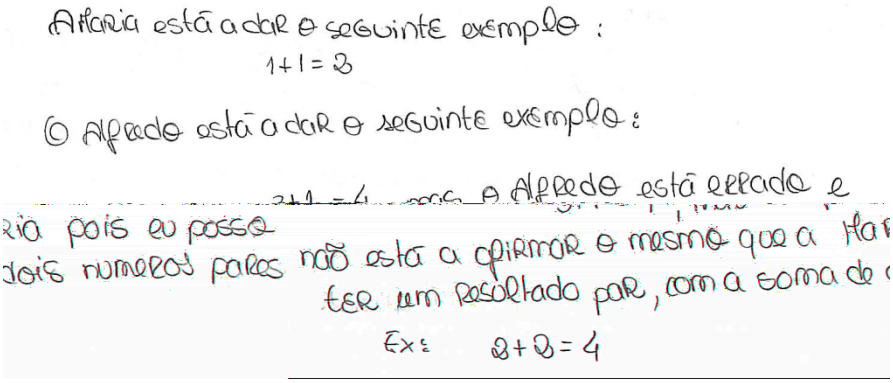


Figura 165. Apresentação de um contraexemplo (A17).

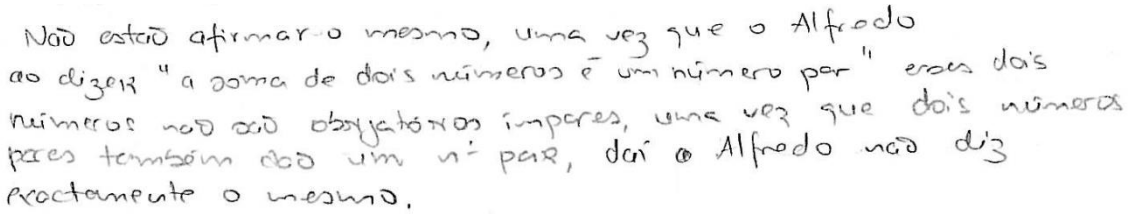


Figura 166. Utilização de propriedades gerais (A14).

Os alunos que respondem de forma incorreta apresentam um exemplo que verifica ambas as afirmações, a implicação e a sua recíproca, ou um exemplo diferente para cada afirmação

(Figura 167), concluindo, com base nos exemplos apresentados, que as duas afirmações traduzem a mesma informação.

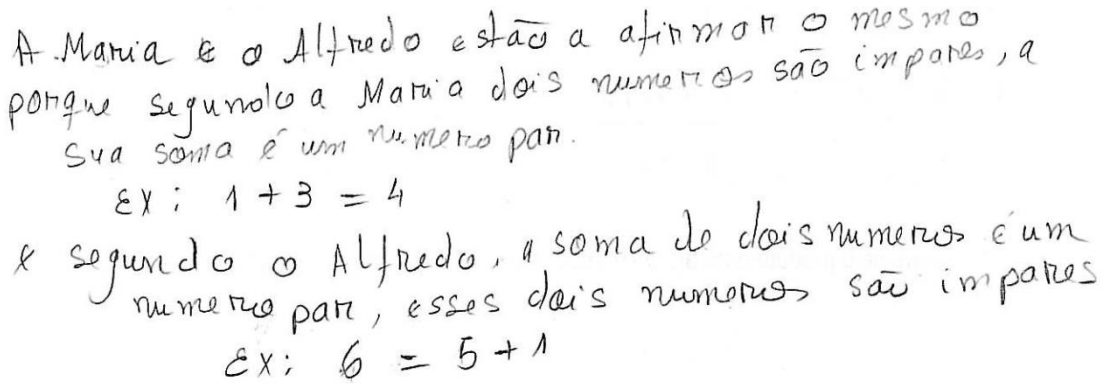


Figura 167. Exemplos diferentes para verificar cada uma das afirmações (A4).

5.1.1.11. Grau de dificuldade do teste diagnóstico

No final do teste diagnóstico também era solicitado que os alunos se manifestassem quanto ao seu grau de dificuldade. Como se conclui pela Tabela 64, que retrata as opiniões dos alunos, a maioria (73,9%) considerou que o teste não era fácil nem difícil.

Tabela 64 — Respostas dos alunos quanto ao grau de dificuldade do teste

Respostas	Total
Fácil	1 (4,3%)
Nem fácil nem difícil	17 (73,9%)
Difícil	2 (8,7%)
Muito difícil	2 (8,7%)
Não responde	1 (4,3%)

Face às dificuldades que os alunos manifestaram no teste diagnóstico, verifica-se que há um considerável desfasamento entre o que responderam e aquilo que pensam relativamente ao grau de dificuldade, revelando que têm uma visão muito positiva sobre o seu desempenho.

O teste diagnóstico é constituído por 10 questões, tendo algumas delas alíneas, o que perfaz um total de 21 perguntas. Analisando em termos globais o desempenho dos alunos nestas 21 perguntas, constata-se que não houve qualquer aluno que tivesse respondido corretamente a todas, nem que as tivesse errado na totalidade. O número de perguntas resolvidas de forma correta varia entre dois e 16, tendo apenas quatro alunos (8,7%) acertado em 10 ou mais. É também de realçar que mais de metade dos alunos (65,2%) só apresentou uma resposta correta para menos de sete perguntas (Tabela 65).

Se se comparar os alunos que frequentam a UC pela primeira vez (10 alunos) com os que já a tinham frequentado em anos anteriores (13 alunos), verifica-se que o aluno que acertou em mais perguntas, isto é 16, pertence a este segundo grupo. Porém, quase metade dos alunos que já frequentaram a UC resolveram incorretamente de 10 a 15 perguntas, enquanto apenas 20% dos alunos que frequentaram a UC pela primeira vez se incluem nesta categoria.

Tabela 65 — Relação entre o n.º de vezes que os alunos frequentaram a UC e o n.º de alíneas resolvidas de forma correta/parcialmente correta/incorreta/não respondidas

Respostas	Frequência das aulas de AL	N.º de alíneas do teste						
		0	1 a 3	4 a 6	7 a 9	10 a 12	13 a 15	16
Corretas	1.ª vez	—	3	4	1	2	—	—
	2.ª ou mais	—	3	5	3	1	—	1
	Total	—	6 (26,1%)	9 (39,1%)	4 (17,4%)	3 (13,0%)	—	1 (4,3%)
Parcialmente corretas	1.ª vez	5	5	—	—	—	—	—
	2.ª ou mais	5	8	—	—	—	—	—
	Total	10 (43,5%)	13 (56,5%)	—	—	—	—	—
Incorretas	1.ª vez	—	—	3	5	1	1	—
	2.ª ou mais	—	2	2	3	5	1	—
	Total	—	2 (8,7%)	5 (21,7%)	8 (34,8%)	6 (26,1%)	2 (8,7%)	—
Não responde	1.ª vez	—	2	3	3	2	—	—
	2.ª ou mais	—	3	7	1	2	—	—
	Total	—	5 (21,7%)	10 (43,5%)	4 (17,4%)	4 (17,4%)	—	—

5.1.2. O ensino dos temas

Nesta secção descreve-se a resolução de algumas das tarefas pelos alunos, principalmente aquelas que foram discutidas pelos grupos nas aulas, e evidenciam-se os episódios de aula mais relevantes, que expõem as dificuldades ou conflitos que emergiram e a riqueza do debate no seio do grupo e em grande grupo. Sempre que pertinente refere-se ainda o papel do *software Microsoft Mathematics* na resolução das tarefas propostas.

À exceção de um aluno que não pôde comparecer a todas as aulas, os restantes 27 foram agrupados em nove grupos, designados por Gi, com $1 \leq i \leq 9$. Destes, três grupos (G1, G2 e G3) foram escolhidos para gravar as suas interações. O grupo G1 era apenas constituído por alunos que já tinham frequentado a UC em anos anteriores, o grupo G2 por alunos que estavam a frequentar a UC pela primeira a vez e o grupo G3 por alunos em ambas as situações.

5.1.2.1. O ensino do tema Matrizes e determinantes

O tema Matrizes e determinantes foi introduzido com a discussão em grande grupo acerca das respostas às questões 6, 7, 8, 9 e 10 do teste diagnóstico (Anexo VI). No caso da questão 6, debateu-se qual a propriedade adequada para cada caso e nas restantes discutiu-se a correção de algumas das respostas dadas pelos alunos aquando da resolução do teste diagnóstico. Assim, relembraram-se as propriedades das operações, o conceito de produto escalar e a lei do anulamento do produto. Relativamente à questão 9, a maior parte dos alunos presentes manifestou que continuava a concordar com o raciocínio do João (Anexo VI). Assim, pediu-se aos alunos que não consideravam válido o raciocínio que tentassem explicar o seu ponto de vista:

> A14: A soma de dois ímpares também vai dar par.
> Um aluno: Não é isso que está em questão.
> P: O comentário é pertinente, se forem dois ímpares a soma também é par. Mas a situação não é propriamente essa, não é? Quem é que quer acrescentar mais alguma justificação? [Sem resposta]
> P: (...) Não estamos a analisar se a afirmação é ou não verdadeira. O que o João está a dizer também é verdade. O que nós estamos a tentar ver é se o que o João está a dizer prova ou não aquela afirmação.
> A27: Claro que não está a pensar na situação de todos os números possíveis, isso não é possível, mas é um caso.
> P: E será que um caso prova?
> A27: Um caso não prova, mas...
> P: Se eu apresentar só um caso, usando o 2 e o 4 estou a provar para este caso...
> A26: Específico. Então só provo para esse.
> P: Quando eu estou a dar exemplos estou a provar que é verdade para todos os pares?
> A27: Está a provar para esses casos.

Após este diálogo, os alunos aparentemente teriam percebido melhor porque é que as respostas dadas pelos colegas não estavam corretas. Partindo de uma das respostas parcialmente correta (Figura 164, questão 9 do teste diagnóstico), e questionando os alunos sobre os passos a seguir, fez-se a prova, no quadro, para o caso geral. Embora no fim da discussão parecesse haver concordância sobre o facto de um exemplo não provar que a propriedade era válida, verificou-se, em tarefas realizadas posteriormente e que exigiam o mesmo tipo de raciocínio, que este não foi interiorizado por todos os alunos.

Na discussão da questão 10 também se pediu a opinião dos alunos, que acabaram por se focar na análise da veracidade das afirmações e não nas respostas dadas no teste diagnóstico.

> Algumas vozes: Não estão a dizer a mesma coisa.
> P: Porque é que não estão a dizer a mesma coisa?

A18: No caso do Alfredo, pelo facto da soma dos dois números ser par não quer dizer que os números sejam necessariamente ímpares, porque podem ser pares.
P: Por exemplo...
A18: 2+2
P: 2+2 é par, exato, e 2 não é ímpar. Então não estão a afirmar o mesmo.

Neste diálogo verifica-se que a professora ajuda a concluir que esta resposta se baseia na distinção entre uma implicação e a sua recíproca, isto é, que num caso se tem a implica b e no outro b implica a.

Com a ficha de trabalho n.º 1 – Operações com matrizes – pretendia-se que os alunos se familiarizassem com as notações relativas a matrizes e trabalhassem as respetivas operações. Antes de qualquer introdução teórica sobre o assunto, os alunos resolveram, em grupo, as questões 1 e 2 (Anexo VII). Na resolução, os alunos mantiveram a representação em tabelas, apresentaram resoluções parcelares (Figura 168) para cada situação ou recorreram à representação na forma matricial (Figura 169). De realçar que, neste último caso (dois grupos na questão 1 e quatro na questão 2), nenhum dos alunos do grupo estava a frequentar as aulas pela primeira vez.

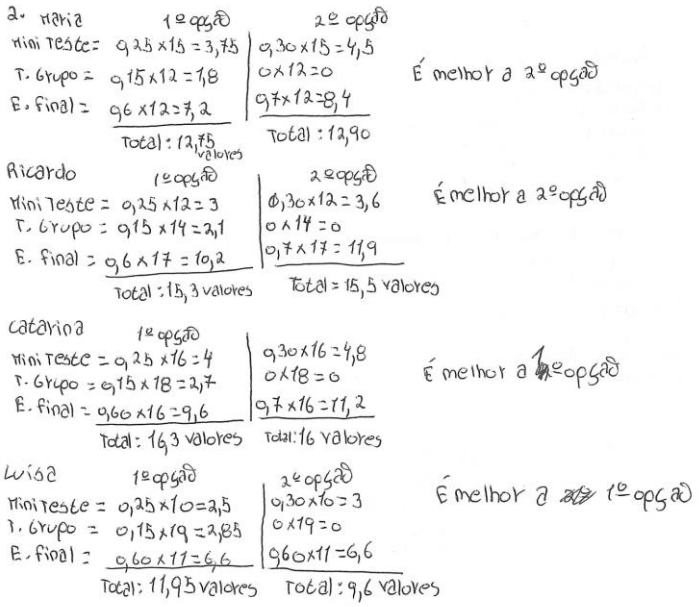


Figura 168. Resposta do grupo G2 à questão 2 da ficha 1.

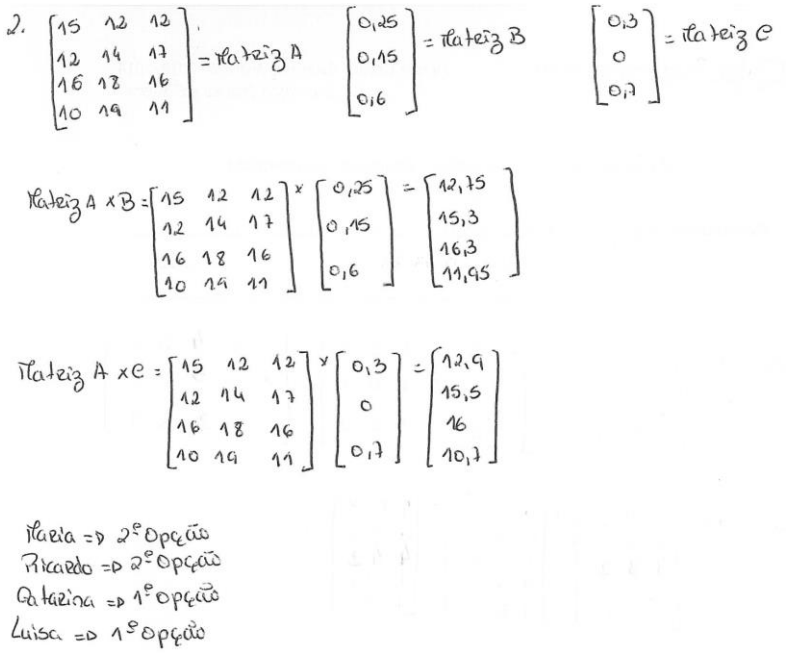


Figura 169. Resposta do grupo G7 à questão 2 da ficha 1.

As resoluções apresentadas pelos grupos que usaram notação matricial tornaram-se o ponto de partida para a introdução do conceito de matriz e conceitos relacionados, assim como para as operações de adição, transposição e multiplicação de matrizes. As questões 3 e 4 da ficha de trabalho foram resolvidas após esta discussão.

Na questão 3, que envolvia operações com matrizes, surgiram mais dificuldades na multiplicação e na potenciação. Por exemplo, houve alunos que em algumas situações efetuavam bem o produto, contudo, quando a dimensão das matrizes era alterada, voltavam a ter dificuldades (Figura 170). Algumas destas dificuldades foram ultrapassadas aquando da discussão nos grupos e com o apoio da professora, mas houve erros que só foram retificados no momento da discussão em grande grupo.

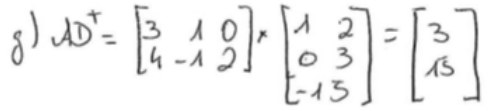


Figura 170. Resposta incorreta do grupo G5 à questão 3g) da ficha 1.

No debate em grande grupo, analisando esta resposta (Figura 170), os alunos concluíram que a transposta da matriz D estava correta mas que o produto estava mal calculado, explicando a aluna A6 que "A matriz resultante devia ser uma matriz 2×2 e esta é uma matriz 2×1". Com a ajuda da professora e dos colegas, os alunos do grupo G5 concluíram que tinham multiplicado a primeira linha pela primeira coluna e a segunda linha pela segunda coluna, faltando completar o processo.

Na potenciação o erro mais comum foi a determinação da matriz C^2 elevando ao quadrado cada uma das suas entradas (Figura 171), erro já identificado na 1.ª fase da primeira parte do estudo. Houve alunos que só se aperceberam que estavam a resolver de forma incorreta quando a professora solicitou que refletissem sobre a resposta dada (por exemplo, comentário Figura 171) ou na discussão em grande grupo.

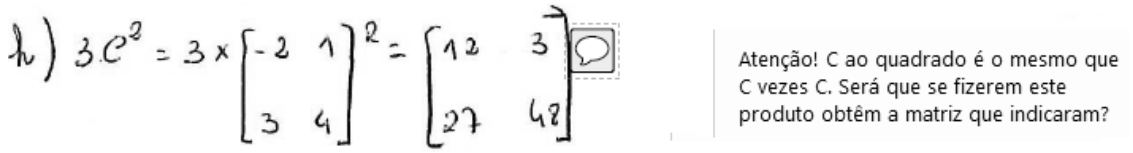


Figura 171. Resposta incorreta do grupo G7 à questão 3h) da ficha 1 e comentário da professora.

No debate em grande grupo, pediu-se aos alunos para averiguarem a correção de duas das respostas dadas (uma correta e a da Figura 171). Um aluno do grupo G7 tentou explicar o que fez, conseguindo depois chegar ao raciocínio correto:

> A5: Fiz menos dois ao quadrado, que dá 4 e fiz 3 vezes 4, que dá 12. E está mal, tem de dar 9.
> P: E porque é que tem de dar 9?
> A5: Porque se fizermos aqui dá 9.
> P: Vamos analisar, no primeiro caso, fizeram cada entrada ao quadrado e depois multiplicaram por 3 (Figura 171). No segundo, fizeram $C \times C$ e depois multiplicaram por 3. Porque é que não dá igual?
> A5: Já percebi. O que tinha de fazer era multiplicar linha por coluna e depois multiplicar por 3, C^2 era para multiplicar linha por coluna, era $C \times C$.

A questão 4, pelo facto de não serem apresentadas matrizes concretas, levantou inicialmente alguns problemas de interpretação. Mesmo com os esclarecimentos por parte da professora, alguns grupos não apresentaram inicialmente uma resposta correta (Tabela 66).

Tabela 66 – Classificação das respostas dos grupos à questão 4 da ficha de trabalho n.º 1

Respostas	4a)	4b)	4c)	4d)
Corretas	4	3	5	2
Parcialmente corretas	1	2	1	1
Incorretas	3	3	2	4
Não responde	1	1	1	2

Na discussão em grande grupo pediu-se aos alunos que comentassem as respostas dadas pelos grupos à alínea a), que se encontravam expostas em diapositivos.

> A17: Eu acho que a que está correta é "Não dá para multiplicar porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A". Estou a ver aqui pelo comentário da stora que [a nossa] está mal.

P: O seu grupo que resposta deu?
A17: A última [do diapositivo] "Não dá porque o número de linhas de B não corresponde ao número de colunas de A".
P: E porque é que está mal?
A17: A stora [nos comentários ao trabalho] disse para não nos esquecermos que tínhamos BA e não AB.
P: Isso quer dizer que vocês viram...
A17: Ao contrário.
P: E será que AB é o mesmo que BA?
A13: Dá na mesma...
P: Será que dá? Já vamos investigar a seguir. Voltando à nossa questão, o que é que vocês comparam para ver se se pode multiplicar?
A17: Neste caso, as colunas de B com as linhas de A. Nós vimos as outras.
P: E a primeira resposta "A matriz BA tem dimensão 4 por 5" está correta?
Alguns alunos: Não.
P: Porquê?
A5: Não, porque o número de colunas de B é 5 e o número de linhas de A é 4.
P: Então é verdade que as matrizes não se podem multiplicar como dizem alguns colegas?
Alguns alunos: É.

Após este esclarecimento, a correção das respostas dadas às restantes alíneas que envolviam a operação de multiplicação tornou-se mais fácil.

Sempre que pertinente, foram igualmente aproveitadas resoluções específicas para chamar a atenção para a reflexão sobre a validade ou não de determinadas propriedades utilizadas ou afirmações feitas pelos alunos. Por exemplo, dois dos grupos, que apresentaram uma resposta correta na alínea 4c), recorreram à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de matrizes, pelo que se confrontaram várias abordagens de resolução, concluindo-se que a apresentada por esses alunos também era válida. Da mesma forma, face ao comentário do aluno A17, que, ao discutir a resolução da alínea 4a), conclui, generalizando, que duas matrizes com a mesma dimensão nunca se podem multiplicar, a professora incentivou o debate para que os alunos se apercebessem de que essa afirmação não era válida.

P: Temos aqui uma situação a discutir. A A17 tinha dito que duas matrizes com a mesma dimensão nunca se podem multiplicar. O que é que vocês pensam sobre o assunto?
Alguns alunos: Pode.
P: Então tentem justificar o vosso ponto de vista. Arranjem, por exemplo, duas matrizes com a mesma dimensão que se possam multiplicar.
A14: A mesma dimensão refere-se a quê?
P: Significa que a matriz A e a B têm o mesmo número de...
A2: O mesmo número de linhas e de colunas.
A28: Ambas 4 por 4 [apresenta um exemplo concreto].

P: Então neste caso podemos ou não multiplicar?
Alguns alunos: Podemos.
P: Então pode-se concluir que a afirmação da A17 é?
Alguns alunos: Falsa.

Com a ficha de trabalho n.º 2 – Propriedades das operações com matrizes – pretendia-se que os alunos investigassem algumas propriedades das operações com matrizes. Na exploração desta ficha, os alunos puderam utilizar o *software Microsoft Mathematics*, tendo alguns recorrido também a pesquisas na internet ou a apontamentos de anos anteriores. Como se tratava de uma questão genérica, inicialmente, alguns alunos não perceberam muito bem o objetivo da tarefa. Forneceu-se, ainda, uma lista com as propriedades válidas no conjunto dos números reais, sugerindo que averiguassem quais as propriedades que se mantinham nas operações com matrizes e solicitando que tentassem dar uma justificação quando considerassem que a propriedade era válida e apresentassem um contraexemplo no caso contrário. Face à questão: "Será que a multiplicação de matrizes verifica a propriedade comutativa?", que surgiu aquando da resolução da ficha de trabalho anterior, foi-lhes sugerido que começassem a investigação por aí, embora nem todos os grupos tivessem seguido essa indicação.

Ao averiguar se a multiplicação gozava da propriedade comutativa, o grupo G2 confundiu a propriedade com o facto da multiplicação das matrizes estar definida (Figura 172) e o grupo G4 teve dificuldade em arranjar um contraexemplo, porque estava apenas a utilizar matrizes simétricas de ordem dois em que os elementos da diagonal principal eram iguais (Figura 173).

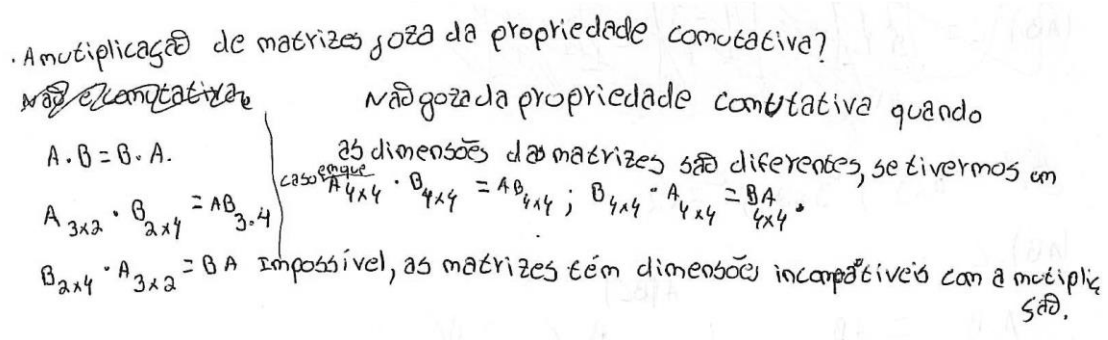


Figura 172. Resposta do grupo G2 à questão 1 da ficha 2.

Os alunos do grupo G2, através da consulta da *Wikipedia*, concluíram que a multiplicação de matrizes não verifica a propriedade comutativa e tentaram justificar esta conclusão a partir da possibilidade de efetuar o produto (Figura 172). Assim, não se apercebem de que matrizes com a mesma dimensão podem não comutar, pois na sua pesquisa usaram duas matrizes de ordem quatro comutáveis.

No grupo G4, os alunos tinham efetuado a multiplicação de várias matrizes de ordem dois, mas todas elas simétricas e com elementos iguais na diagonal principal, pelo que estavam quase a concluir que a operação em causa era comutativa, quando a professora os fez refletir sobre a particularidade dos exemplos que estavam a utilizar, sugerindo-lhes que experimentassem com matrizes mais diversificadas. A resposta final do grupo, embora em termos de linguagem não esteja expressa da forma mais adequada (ainda não tinha sido abordado o conceito de matriz simétrica), revela alguma compreensão sobre a não validade da propriedade comutativa da multiplicação no contexto das matrizes (Figura 173).

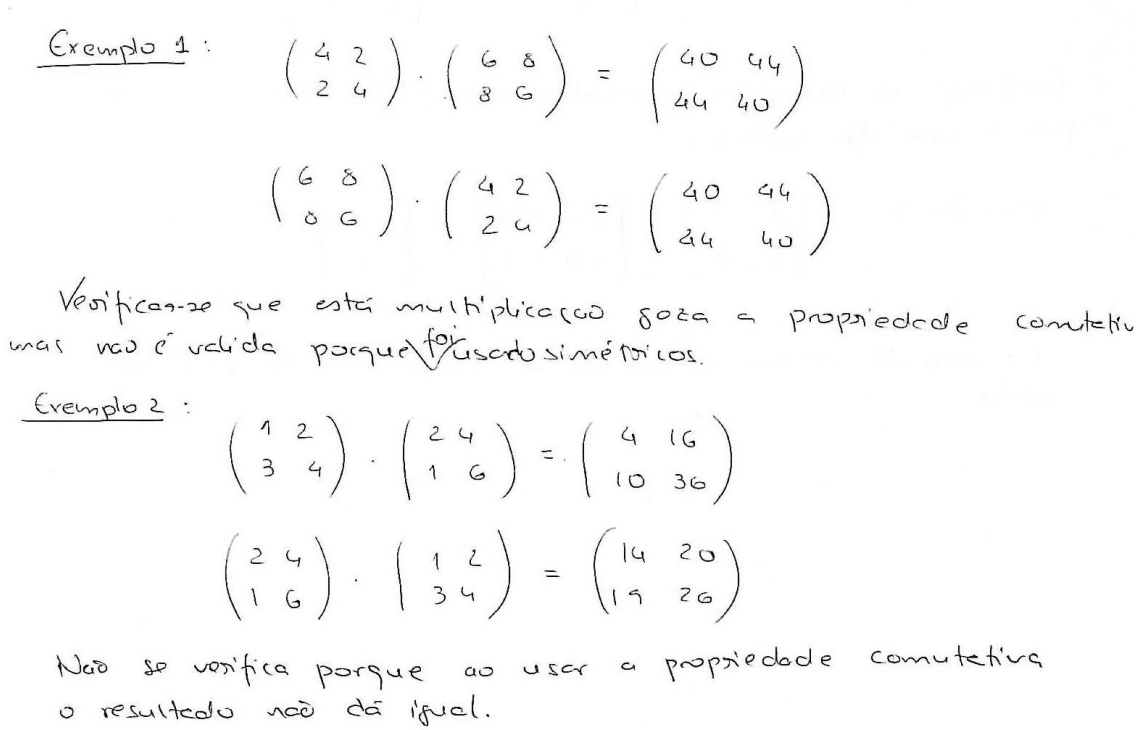


Figura 173. Resposta do grupo G4 à questão 1 da ficha 2.

Tanto a resposta do grupo G2 como a do G4 foram debatidas em grande grupo. No caso da resposta do grupo G2 (Figura 172), aproveitou-se para discutir a validade da sua generalização:

> A16: [Explicando o que fizeram] Nós vimos que a propriedade comutativa só é válida quando as matrizes têm dimensões iguais.
> P: Vocês consideraram uma matriz de dimensão 3 por 2 e outra 2 por 4. Observaram que num caso dava para multiplicar e no outro...
> A16: Não dava para multiplicar.
> P: E porquê?
> A16: As colunas de B não eram iguais às linhas de A.
> P: Exato. O número de colunas de B não era igual ao número de linhas de A.
> A6: E depois vimos que se as matrizes tivessem a mesma dimensão já podiam.
> P: E o produto dá uma matriz igual?

A2: Não.
P: Consegue justificar a sua opinião? [Silêncio]
Um aluno: Vai dar a mesma dimensão.
P: Sabemos que se as matrizes A e B forem de ordem 4, AB e BA também são matrizes de ordem 4, vão ter a mesma dimensão. Mas será que AB e BA são sempre iguais?
Alguns alunos: Não.
P: Podem tentar arranjar exemplos para perceberem melhor. Se considerarem mais fácil podem pensar em matrizes de ordem 2 que a situação é idêntica.
A18: Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
P: O que é que acontece com estas?
A18: É comutativa.

Os alunos sugerem exemplos em que uma matriz é a identidade ou a matriz nula. Embora essas matrizes não contribuam para o esclarecimento da falsidade da afirmação em análise, aproveitou-se para debater o que acontece quando na multiplicação um dos fatores é uma dessas matrizes.

P: Mas a intenção era que não verificassem a propriedade. Mas vamos aproveitar este exemplo. Lembram-se que matriz é esta?
Alguns alunos: A identidade.
P: Se se puder multiplicar uma matriz pela matriz identidade, qual é a matriz que vamos obter?
Alguns alunos: A outra matriz.
P: Então a matriz identidade tem um papel semelhante ao elemento neutro da multiplicação. (...) O exemplo que A18 deu é um caso especial que verifica a comutatividade. Mas queríamos encontrar um exemplo que mostrava...
A18: Que não era.
A26: Se uma delas for a matriz nula, já não vai dar a mesma coisa.
P: Então, com a matriz nula o que é que vai dar?
A18: Vai dar nula.
P: Então as matrizes resultantes vão ser na mesma iguais, certo. Ou seja, é outro caso especial: se eu multiplicar duas matrizes com a mesma dimensão e uma delas for a matriz nula, o resultado vai dar sempre a matriz nula.

Retomando a problemática inicial de encontrar duas matrizes com a mesma dimensão que não comutem, aproveitou-se a resposta de A18 que reformula a segunda matriz do seu exemplo:

A18: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
P: Verifiquem lá o que dá com este novo exemplo.
[A professora faz os cálculos no quadro com a ajuda dos alunos, que vão indicando as operações a efetuar, e dá indicações aos que trouxeram computador para confirmarem.]

P: Então dá num caso $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 23 \end{bmatrix}$ e no outro $\begin{bmatrix} 16 & 22 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$. Estas matrizes são iguais?

Alunos: Não.

P: Quer dizer que não podemos generalizar. (...) Sugiro que tentem investigar em que casos é que se verifica a comutatividade. Mas concluímos aqui que não basta que a dimensão das matrizes seja a mesma. (...) De qualquer maneira, ficamos a saber que a multiplicação não verifica a propriedade comutativa.

Na sequência deste diálogo, passou-se à análise da resposta do grupo G4 (Figura 173), que se aproveitou para particularizar casos de matrizes que comutam.

P: O que é que têm de especial as matrizes que elas escolheram?
A18: As diagonais têm os mesmos números.
P: E para além disso, podemos dizer que são matrizes...
G4: Simétricas.
P: E são matrizes simétricas porquê?
A14: Ao fazer ao contrário dá a outra.
P: Ou seja, se fizermos a transposta de $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dá exatamente a mesma matriz. Então chamamos a esta matriz uma matriz simétrica. Mas, para ser simétrica, os números na diagonal principal não têm de ser obrigatoriamente iguais, o exemplo delas é ainda mais específico. O trabalho das vossas colegas levanta aqui uma questão: Será que se tivermos duas matrizes daquele tipo, elas comutam sempre? Como é que nós investigamos isso?

Após este diálogo, partindo de um exemplo geral, sugerido pelos alunos: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$, calculou-se AB e BA [no quadro e recorrendo ao *software*], constatando-se que se obtinham matrizes iguais. Como não houve oportunidade, por falta de tempo, para continuar a investigação na aula, sugeriu-se aos alunos que, extra-aula, verificassem o que acontece se os elementos da diagonal principal não forem iguais, assim como se recomendou que tentassem descobrir outros casos em que as matrizes comutem.

Discutiram-se, também com base nas respostas dos grupos, outras propriedades, salientando-se sempre que um exemplo não prova que a propriedade é válida. Assim, tentou-se provar algumas propriedades, de forma mais intuitiva, recorrendo às propriedades conhecidas no conjunto dos reais. Para que trabalhassem melhor este aspeto, recomendou-se aos alunos, como trabalho de casa, que realizassem uma demonstração mais formal de algumas propriedades, tendo sido indicado um livro de álgebra que poderiam consultar se não conseguissem estruturar a prova sozinhos.

Na questão 2, pretendia-se que os alunos verificassem se a lei do anulamento do produto é válida para matrizes. Ao clarificar para toda a turma o que se pretendia com a questão, como houve alunos que consideraram que não se verificava a propriedade, a professora sugeriu que tentassem encontrar duas matrizes cujo produto fosse a matriz nula sem nenhuma delas ser a matriz nula.

Dos sete grupos que responderam na fase inicial a esta questão (dois grupos continuaram a investigação das propriedades, acabando por não responder), três (G1, G6 e G7) responderam corretamente, tendo conseguido encontrar duas matrizes cujo produto era a matriz nula (Figura 174), outro fez várias tentativas (G4) mas não alcançou esse objetivo e os restantes três grupos (G2, G5, G8) consideraram que uma das matrizes tinha de ser a matriz nula (Figura 175), embora tivessem feito previamente alguma tentativa.

Os alunos do grupo G1 tiveram inicialmente dificuldades, mas, depois de várias tentativas, conseguiram encontrar as matrizes pretendidas (Figura 174), embora a sua explicação tenha alguns lapsos em termos de correção matemática.

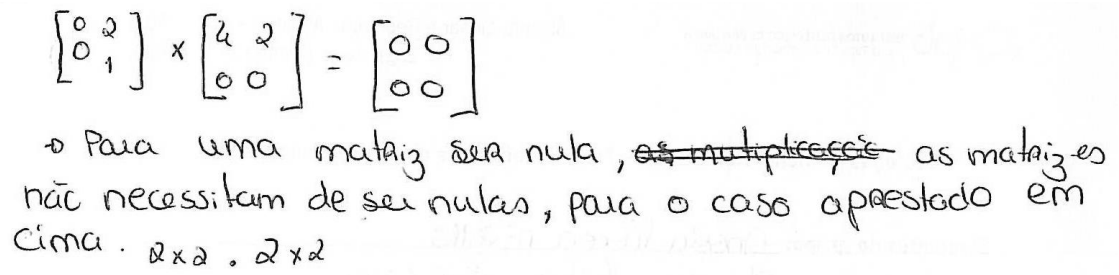
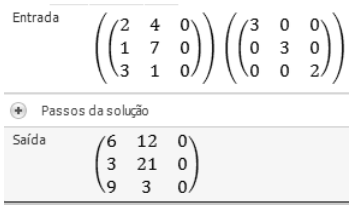


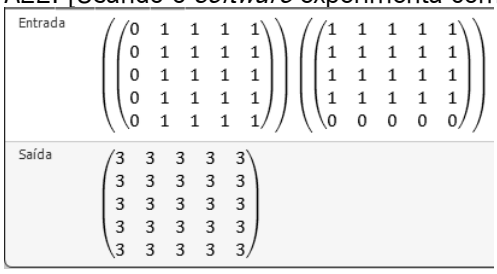
Figura 174. Resposta do grupo G1 à questão 2 da ficha 2.

Antes de chegar a esta conclusão, o grupo G1 partiu do pressuposto que bastava arranjar uma matriz com uma coluna/linha de zeros, mas verificou que isso não era válido. De seguida, escolhendo uma matriz com uma coluna de zeros e outra com uma linha de zeros, o grupo consegue arranjar um exemplo com matrizes de ordem dois (Figura 174) que lhe permite concluir que a lei do anulamento do produto não é válida para matrizes. Querendo ir um pouco mais além, o grupo tentou aplicar o mesmo princípio para matrizes de ordem superior e conclui que não funcionava:

A20: Nas matrizes basta ter uma linha toda com zeros ou uma coluna com zeros.
A22: Não, não dá só zero [confirma no *software*].



A20 [admirado]: Então não vai dar zero?!
(...)
A20: Das duas matrizes nenhuma precisa de ser nula.
A17: Não precisa necessariamente de ser nula, apenas...
A22: Espera aí...
A17: Mas para as matrizes quadradas de 2 por 2, porque se for diferente até pode ser quadrada 5 por 5, não acontece.
A20: É igual.
A17: Não, não é. Para todas as matrizes 2 por 2 dá. Mas para uma matriz quadrada,... põe lá uma matriz quadrada 6 por 6 ou 5 por 5.
A22: [Usando o *software* experimenta com matrizes de ordem 4 e 5]



A22: Então, mas nós já temos uma matriz quadrada.
A17: Sim, mas outra matriz quadrada. Só dá para as matrizes de 2 por 2.

De realçar que nesta questão o *software* foi bastante útil, pois permitiu uma pesquisa rápida com vários exemplos e facilitou a execução de cálculos com matrizes de maiores dimensões, como aconteceu com a pequena investigação realizada pelo grupo G1, que poderia não ter sido efetuada se não tivessem tido acesso ao *software*.

Já o grupo G2 (Figura 175) concluiu que para o produto ser uma matriz nula pelo menos uma das matrizes teria de ser também nula.

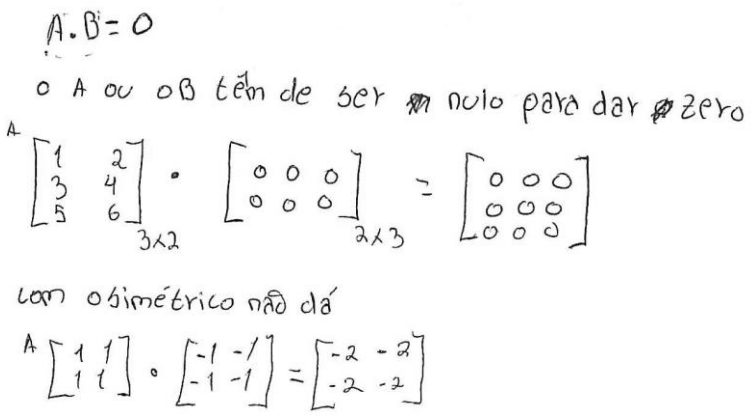


Figura 175. Resposta do grupo G2 à questão 2 da ficha 2.

As dificuldades do grupo G2 estão patentes no diálogo ocorrido aquando da interação no grupo, pois embora experimentem com uma matriz e a sua simétrica, acabam por desistir de procurar e optar pela matriz nula.

A8: Se puseres uma com tudo zeros, vai dar.
A16: Não pode ser assim, mas não percebi muito bem o que é que a stora disse.
P: Se tiver $AB = 0$, será que é obrigatório que A seja a matriz nula ou B seja a matriz nula?
A16: Não professora, porque se um deles for zero vai dar zero.
P: Isso é verdade, mas será obrigatório que uma das matrizes seja a matriz nula para o produto dar a matriz nula?
A21: Não é obrigatório, mas...
P: Será que conseguem arranjar duas matrizes...
A16: Só se for uma delas $-B$.
A21: Só se for o simétrico aqui.
P: Experimentem, e depois, se não der, vão mudando as entradas das matrizes.
A21: Experimenta aí com o A e o simétrico de A. A stora quer que estas duas matrizes multiplicadas deem zero, mas que nenhuma delas seja zero.
A8: Mas isso não dá, porque para dar zero uma delas pelo menos tem de ser zero.
A21: Qual é o simétrico disto?
A8: -1, -1,...
A16: Não vai dar zero. Tem que ser um deles nulo.
A8: O A ou B o têm de ser zero.
A21: Assim não pode ser. Tem de se anular não é, tem de ser A igual a zero ou B igual a zero.
A16: Vamos fazer aí um exemplo 3 por 2.
A21: A multiplicar por quê?
A16: 2 por 3.
A21: E isto dá. Mas assim uma delas é nula.

Na discussão em grande grupo analisaram-se algumas das respostas dadas, sendo sugerido, no caso das respostas incorretas, que os alunos modificassem as entradas das matrizes até conseguirem responder corretamente à questão:

A14: Eles multiplicaram por uma nula [Figura 175].
P: Se multiplicaram por uma nula, aquele exemplo...
Alguns alunos: Não dá.
P: Também fizeram uma boa tentativa, depois é que não continuaram, tentaram utilizar...
A18: O simétrico.
P: Pode ser bom para primeira tentativa, mas depois talvez tentar trocar uns sinais...
A14: Mas tinha que ser na multiplicação.
P: Eles estão a multiplicar. Se na segunda linha da primeira matriz fossem ambas as entradas -1, já dava a matriz nula [verifica-se com a ajuda dos alunos a alternativa]. Quando vocês têm um exemplo, com mais um bocadinho de tempo conseguem

rearranjá-lo. O G4 também estava a tentar procurar formas de conseguir chegar ali à matriz nula, não é? Talvez se tentarem pôr os zeros em sítios específicos...
A18: Oh, professora, eu tentei, mas não dá.
P: Já vimos que dá. Mas querem ver mais provas? Está ali a prova que dá [diapositivo com respostas de outros grupos].
Alguns alunos: Pois.
P: Os grupos que não chegaram a uma resposta correta tentem fazer novamente com matrizes diferentes dos vossos colegas, podem até experimentar matrizes de ordem 3. Quem tentou várias matrizes tente rearranjá-las de forma a obter o que pretende.

Com a ficha de trabalho n.º 3 – Matrizes especiais – pretendia-se, com base nas definições dadas, que os alunos escrevessem uma matriz que as verificasse. Surgiram algumas dúvidas iniciais: "Ó professora, não percebi" (A14); "Como é que vamos arranjar um exemplo para cada caso se nem sequer sabemos o que é isto, triangular superior..." (A8); "Não sei se está bem porque não estou a perceber o que é que se pretende" (A20), que podem traduzir o facto de os alunos não estarem habituados a interpretar definições.

Praticamente todos os grupos tiveram dificuldade em encontrar exemplos de matriz ortogonal, hermítica e hemi-hermítica, facto facilmente explicável pela maior complexidade dos conceitos, pois o primeiro caso envolve o conceito de matriz inversa e o segundo e terceiro casos números complexos. Mesmo assim, alguns deles conseguiram encontrar uma resposta correta durante a aula (Tabela 67).

Tabela 67 — Classificação das respostas dos grupos à ficha de trabalho n.º 3

	Respostas		
Tipo de matrizes	Corretas	Incorretas	Não responde
Triangular superior	9	0	0
Triangular inferior	8	1	0
Diagonal	9	0	0
Escalar	7	2	0
Ortogonal	5	1	3
Simétrica	9	0	0
Antissimétrica	7	2	2
Hermítica	3	2	4
Hemi-hermítica	2	2	5

Nas matrizes escalares houve alunos que não atenderam ao facto de estas também serem diagonais. Embora alguns grupos se tenham apercebido da sua incorreção com a intervenção da professora, aquando da discussão no grupo, ainda houve dois grupos que deram como resposta matrizes cujas entradas fora da diagonal principal não eram todas zero (Figura 176). Os alunos conseguiram corrigir este erro com base nos comentários da professora ao

trabalho efetuado, pelo que, na discussão em grande grupo, o erro foi facilmente identificado e os alunos reformularam a resposta dada.

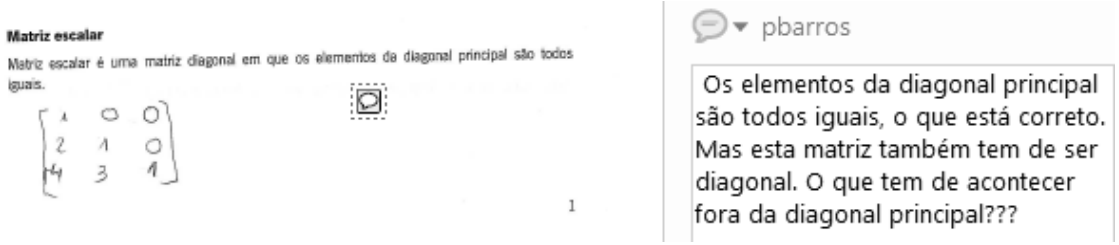


Figura 176. Resposta do grupo G8 à questão da ficha 3 e comentário da professora.

As matrizes antissimétricas também trouxeram alguns conflitos iniciais pelo facto de os alunos partirem de matrizes com números apenas positivos/negativos, ou não considerarem a diagonal principal zero. E também por, numa primeira reação, associarem as matrizes a números reais, como se pode deduzir pelo raciocínio do grupo G1:

A20: Esta é impossível.
A22: Porque é que é impossível?
A20: Porque uma coisa positiva não pode ser igual a uma coisa negativa. E aqui é igual.
A22: Esta aqui, professora. Esta dá impossível? Nós temos uma coisa positiva a dar uma negativa.
P: Têm que pensar em matrizes em que $A^T = -A$.
A22: Olha, eu não consigo fazer a transposta. Não entendo.
A17: A transposta é trocar linhas por colunas.
A22: Se eu puser tudo negativo, todos os números... Mas assim $-A$ não é negativa.
P: E se puserem negativos e positivos?
A22: Pois já fiz, vai dar isto.
P: E qual é o vosso problema? É a diagonal principal?
A22: É, stora, dá tudo negativo.
P: E qual é o número da diagonal principal que podem usar que não traz problemas?
A22: Zero.

Já no grupo G2, o facto de abandonarem a matriz de partida, escolhendo outros exemplos sem grande reflexão, levou a que demorassem mais tempo a chegar a uma conclusão:

A21 e A16: Fizemos a transposta de $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ e fica igual.
P. E fizeram $-A$? O que é que acontece?
A21: Passa tudo a positivo.
P: Então pode não ser boa ideia terem essas duas entradas ambas negativas.
A16: Se for tudo positivo $-A$ vai dar tudo negativo.
[Depois de várias tentativas com matrizes de ordem dois, continuam num impasse.]
A16: Eu não desisto porque temos de fazer isto.
A21: Temos $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

P: Vou fazer uma sugestão, se numa entrada colocarem 2 em vez de -2, o que é que acontece?
A8: Ficar só com um -2?
P: Só com um e agora vejam o que dá $-A$ e A^T.
A21: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
A16: $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Fica -1, não é igual.
P: Então têm de pensar na diagonal principal. Qual é o número que é sempre o mesmo se tiver antes sinal negativo ou positivo?
A21: O zero. Vês? Primeiro tínhamos zero. Se tivéssemos deixado o primeiro já tínhamos isto feito.
A16: Pronto, aleluia, conseguimos!

No caso das matrizes ortogonais, como todos os grupos estavam com dificuldades, alguns dos quais partindo de matrizes ao acaso, calculando a sua inversa e comparando com a transposta, a professora tentou induzi-los a refletir sobre o que pretendiam obter e a verificar pela definição de inversa.

P: Como é que nós sabemos se uma dada matriz é a inversa de outra? Multiplicamos a matriz pela candidata a inversa e temos de obter o quê?
Alguns alunos: A identidade.
P: Então o produto de A pela sua inversa tem de dar a matriz identidade. E qual é a nossa candidata a inversa? [Sem resposta]
P: Para a matriz ser ortogonal qual é a inversa da nossa matriz?
A18: A transposta.
P: Exatamente. Ou seja, temos de encontrar uma matriz que multiplicada pela sua transposta dê a matriz identidade. Isso significa que a inversa é a transposta.

No grupo G1 originou-se um conflito com o conceito de inversa, visto que os alunos assumiram que a inversa se obtinha determinando o inverso de cada uma das entradas. Contudo, através do *software*, os alunos verificaram que a matriz que consideraram não era invertível.

A22: Tem de ser tudo com uns.
A20: 1 a dividir por 1 é 1.
A17: É 1 sobre 1, é a inversa.
P: Já encontraram um exemplo de matriz ortogonal?
A17: A inversa não é esta $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?
P: Verifiquem lá no *software* se a inversa dá esta matriz.
(...)
A17: É a inversa, inversa.
A22: Espera aí [calcula no *software*].

A17: Não é invertível! Então a nossa matriz não é invertível!
A20: Ah, então... Faz a inversa desta, mas com zeros aqui.
A22: Zeros na diagonal?
A20: 2 por 2.
A17: 1, em baixo zero...
A20: E a transposta dá igual.
A22: E a inversa vai dar $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então assim já fica certo.
A20: Já.

Embora o grupo G1 tenha chegado a uma conclusão correta, parece não ter clarificado devidamente a dificuldade no cálculo da matriz inversa. Da mesma forma que o grupo G1, os outros quatro grupos também indicaram a matriz identidade como exemplo de uma matriz ortogonal. No debate em grande grupo foi discutida a existência ou não de matrizes ortogonais diferentes da matriz identidade.

P: Será que só a matriz identidade é que é uma matriz ortogonal?
A19: Não, e tenho aqui a prova. Vou lá escrever [ao quadro]: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. [Multiplica pela transposta e mostra que o resultado dá a matriz identidade].
P: Então concluímos que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ também é uma matriz ortogonal.
A14: Stora, pode explicar outra vez?

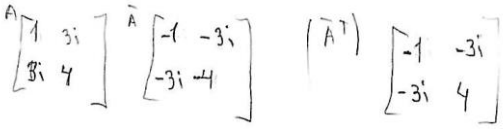
A principal dificuldade dos alunos foi não entenderem a forma de verificação usada, pois pensavam que se deveria determinar a matriz inversa. Depois de uma nova explicação, a professora sugeriu aos alunos uma forma de encontrar matrizes ortogonais de ordem dois. Assim, considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e resolvendo, com a ajuda dos alunos, a equação $AA^T = I$, incentivou-os a descobrirem outros exemplos de matrizes ortogonais de ordem dois.

No caso das matrizes hermíticas e hemi-hermíticas houve necessidade de um esclarecimento prévio para a turma, no sentido de recordar o conceito de conjugada de uma matriz.

No debate em grande grupo, com base nos exemplos apresentados pelos alunos, discutiu-se quais deles obedeciam à definição de matriz hermítica, conseguindo alguns alunos identificar prontamente os erros nas respostas do próprio grupo.

P: As matrizes que apresentaram são todas hermíticas?

A16: A nossa não é.



P: E não é porquê?
A16: Porque não dá igual.
P: Ou seja, fazendo a transposta da conjugada não dá igual à matriz dada.
Alguns alunos: Aquela $\begin{bmatrix} 2i & i \\ 4 & 3i \end{bmatrix}$ também não é.
P: Então o que é que tem de acontecer?
A16: Nós fizemos com zeros também.
P: O que é que temos de ter na diagonal principal de uma matriz que seja hermítica?
A18: Zeros.
P: Será que é obrigatório ter zeros?
A18: Não.
A19: Podem ser números reais.
P: Pode ser qualquer número real, exatamente. Vão fazer o conjugado de cada entrada e o conjugado de um número real é o próprio número.

No caso das matrizes hemi-hermíticas, analisaram-se, igualmente, os exemplos apresentados pelos alunos, discutindo-se os que não estavam corretos e porquê. Partindo de uma das respostas incorretas, modificou-se a matriz de forma a obter uma matriz hemi-hermítica.

P: Vamos analisar a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3-i \\ 3+i & 0 \end{bmatrix}$. Se determinarmos a matriz conjugada, que matriz obtemos?
A19: $\begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & 0 \end{bmatrix}$.
P: Muito bem. E agora a transposta da conjugada.
A19: $\begin{bmatrix} 0 & 3-i \\ 3+i & 0 \end{bmatrix}$.
P: Então esta tinha de ser igual a menos a matriz inicial e...
A19: Não é.
P: Mas é igual à matriz inicial.
A19: É. Arranjamos uma matriz que servia para o caso anterior.
P: O que é que podemos mudar nesta matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3-i \\ 3+i & 0 \end{bmatrix}$ para que seja hemi-hermítica?
A22: Podemos pôr o 3 negativo.
P: Qual?
A22: Os dois.
A17: Assim vai ficar igual.
P: E se tirarmos o 3?

A19: Assim já dá.

Sugeriu-se aos grupos que responderam de forma incorreta ou que não responderam que, extra-aula, fizessem as alterações necessárias para que as suas matrizes estivessem nas condições pedidas, ou que arranjassem exemplos diferentes, reformulando assim o trabalho efetuado, o que foi feito pela maioria dos grupos.

Com a ficha de trabalho n.º 4 – Matrizes – Parte I, pretendia-se que os alunos se apercebessem do significado das entradas da diagonal de uma matriz num dado contexto, usassem os conhecimentos sobre as operações e suas propriedades para provar afirmações envolvendo o conceito de matriz simétrica. Os alunos tiveram mais dificuldades nas questões que envolviam alguma interpretação (questão 1a) e parte da questão1b)) ou uma prova em que tinham de utilizar propriedades (questão 1d)).

Por exemplo, na questão 1a) os alunos tiveram inicialmente alguma dificuldade de interpretação, como é referido por A16 do grupo G2: "Eu estava com dúvidas era aqui nisto. O nosso problema é não saber o que nos está a pedir, pois eu estava a ler e... isto não me está a dizer nada". Essas dúvidas foram, no geral, ultrapassadas com a ajuda da professora, mas também com o contributo do diálogo estabelecido no seio do grupo e entre grupos. No primeiro caso tem-se, por exemplo, a conversa que se estabeleceu no grupo G1

A22: E como é que sabemos?
A17: Está aqui a dizer. E depois tens de transformar isto numa matriz. Aqui diz-te se E1 falar aquela língua pões 1 e se não falar pões 0.
A22: Sim.
A17: Então, aqui [linhas] pões os estudantes e aqui em cima [colunas] pões as línguas. Agora não me perguntes porquê.
[Mas como não entende esta disposição resolve perguntar ao outro colega do grupo]
A17: Porque é que aqui puseste as línguas e aqui os estudantes?
A20: Aqui está a_{rs}, r é para as linhas e s é para as colunas, r é estudante...
A17: Pois, o r aqui é do estudante.
A22: Já estou a entender.

O aluno A17 partilha também essa explicação com A26, do grupo G3, que manifesta não estar a entender a pergunta, confrontando depois os resultados obtidos nos seus grupos.

A26: Não percebo nada disto.
A17: Fazes uma tabelinha, pões os estudantes e pões as línguas que cada um fala. Depois vai dar uma matriz de 5 linhas e 4 colunas. E depois, se o estudante fala L1 pões 1, se não fala..., por exemplo, o estudante E3 não fala L1, pões 0.

Na questão 1b), o que gerou mais dúvidas foi interpretar o significado de cada entrada da matriz e dos elementos da diagonal principal. No entanto, bastaram algumas questões da professora para fazer refletir os alunos que pediram esclarecimentos, como no grupo G2:

P: O que é que é este 3? [linha 1, coluna 1 da matriz C]
A16: E1 fala 3 línguas, ah!
A21: Ah, pois é!
A16: São as línguas que falam.

A questão 1d) foi de todas a que levantou mais dificuldades, tendo apenas o grupo G2 apresentado uma resposta correta. Os outros grupos ou não responderam ou apresentaram um exemplo que verificava a afirmação, como é visível na resposta do grupo G1 (Figura 177).

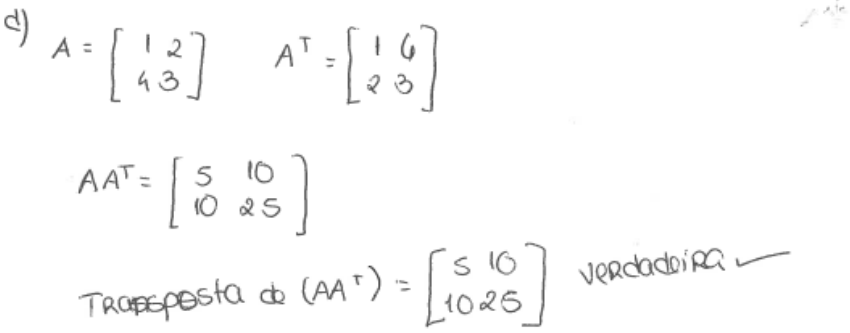


Figura 177. Resposta do grupo G1 à questão 1d) da ficha 4.

O facto de no grupo G2 não haver concordância imediata entre os elementos quanto à veracidade da afirmação, pois o aluno A16 considerou que o exemplo encontrado não servia para provar, fez com que repensassem a situação.

A21: É verdade, porque se estas [referente à matriz C] são iguais.
A16: Não. Essa pode ser uma exceção.
A8: Pois...
A21: Mas segundo o exemplo de trás é verdade.
A16: Mas não podemos ir por esse exemplo, temos de arranjar outro para contrapor. Podemos arranjar exemplos no programa e ver se são ou não são.

O grupo G2 acabou por só concluir extra-aula o seu raciocínio, e, seguindo algumas sugestões da professora, conseguiu apresentar uma resposta correta (Figura 178).



Figura 178. Resposta do grupo G2 à questão 1d) da ficha 4.

No debate em grande grupo, começou-se por analisar as respostas dos grupos que apresentaram exemplos. Ao explicar o seu raciocínio, o grupo G1 chegou à conclusão que não provaram o que se pretendia.

A17: Era para qualquer matriz e nós fizemos para um caso específico.
A22: Mas nós tentamos com várias...
P: E isso prova?
A22: Não.

Passa-se então à discussão sobre se a afirmação era verdadeira ou falsa e de como se efetuava a prova se se verificasse o primeiro caso.

A17: Pode não ser verdadeira. Neste caso temos de arranjar um exemplo que prove o contrário da afirmação?
P: Podemos também pensar se a afirmação é verdadeira ou falsa.
A17: Nós experimentámos vários casos e deu-nos sempre verdade. Mas pode haver outros em que não seja verdade, nós tentámos muitos e deu sempre verdade. Optámos foi por este exemplo.
P: Vocês experimentaram vários casos que verificavam a afirmação. E os outros grupos experimentaram também com outros exemplos?
Vários alunos: Sim.
P: Então podemos ser conduzidos a pensar, que a afirmação é mesmo...
Alguns alunos: Verdadeira.
P: Ou seja, vocês não arranjaram nenhum caso que mostrasse que era falsa. Então, qual é o passo a seguir? Arranjar mais exemplos ou o que é que devemos fazer?
A19: Fazer o caso geral.
P: Exatamente A19. E como é que fazemos isso?
A19: Tem de se pôr incógnitas a disfarçar a situação e não pôr diretamente números. Tipo x, y, z...
A26: Usar letras.

A professora chama a atenção que em vez de se usar essa notação se poderia usar a notação habitual para as entradas da matriz como a_{11}, a_{12},... a_{1n},... No entanto, também se discute que, embora esta abordagem esteja correta, será uma forma de provar que dá um certo trabalho comparativamente à resposta do grupo G2, que é mais simples. Este grupo, como não tinha entregue previamente a resolução, foi escrever no quadro a sua resposta (Figura 178), que se passou a analisar:

A16: Fizemos através das propriedades.
P: Das propriedades da...
A16: Da transposta.
P: E o que é que pretendíamos obter?
A16: AA^T.

P: Exatamente isso, A16. Através das propriedades quiseram obter exatamente aquela matriz que tinham inicialmente. E porque é que estamos a fazer isto, porque é que estamos a calcular a $\left(AA^T\right)^T$ e ver se ela é igual a AA^T ?
[Ninguém responde]
P: Qual é a definição de matriz simétrica? A transposta é...
A18: Igual à própria matriz.
P: Muito bem, A18, a transposta é igual à própria matriz. Então temos de verificar se a transposta desta é igual à própria matriz, que é esta. Isto é o que nós queremos saber se é verdade [a professora coloca um ponto de interrogação na igualdade].
P: Que propriedade aplicaram daqui para a aqui? [1.º passo]
A16: Fomos às propriedades e há uma que diz que a transposta de A vezes A^T é a transposta da transposta vezes A^T .
P: Então fez a transposta de que operação?
A16: Do produto. A transposta do produto é o produto das transpostas por ordem inversa. (...) E depois, nas propriedades, também diz que a transposta da transposta de A é igual a A , e obtemos o que queríamos.

Com a Ficha de trabalho n.º 5 – Matrizes – Parte II, pretendia-se que os alunos trabalhassem alguns conceitos abordados, refletissem, no caso das questões 1 e 3, sobre a correção dos raciocínios apresentados e identificassem os erros (Anexo VII).

Na questão 1, todos os grupos concluíram que o raciocínio da Florbela não era adequado. No entanto, apenas os grupos G4 e G8 assinalaram os dois erros cometidos (Figura 179), tendo os outros referido ou o facto de não se poder aplicar a propriedade distributiva ou de não haver garantia que a matriz A fosse ortogonal.

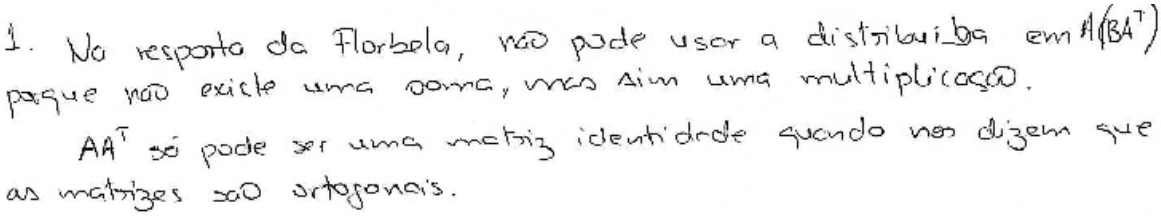

1. No resposta da Florbela, não pode usar a distribuição em $A(BA^T)$ porque não existe uma soma, mas sim uma multiplicação.
AA^T só pode ser uma matriz identidade quando nos dizem que as matrizes são ortogonais.

Figura 179. Resposta do grupo G4 à questão 1, referente ao raciocínio da Florbela, da ficha 5.

De realçar, porém, que o grupo G1 embora não tenha focado na resposta o facto de AA^T nem sempre ser a matriz identidade, debateu-o no grupo.

A22: Isto não é a identidade. AA^T não é a identidade.
P: E em que matrizes é que isso se passa?
A17: Não sei agora, mas...
P: Estivemos a ver há bocado, as matrizes que são...
A17: Ortogonais.

A resposta da Maria já não gerou tanto consenso, pois embora a maior parte dos grupos considerasse que ela não provou a afirmação – "A Maria arranjou um exemplo específico, o que

não serve de generalização. Deste modo não pode concluir que a afirmação é verdadeira" (G3), ainda houve três grupos (G2, G4, G8) que consideraram que a Maria provou que a afirmação é verdadeira – "Na resposta da Maria o seu exemplo é válido. Ao usar sempre matrizes quadradas a sua resolução é possível sempre" (G4).

O grupo G1, inicialmente, também teve algumas dúvidas quanto à validade do raciocínio da Maria, principalmente porque se estava a focar no facto de esta ter efetuado bem os cálculos e não na adequação do raciocínio para responder à questão. Essas dúvidas foram ultrapassadas no diálogo mantido com a professora sobre o que descobriram.

> A22: Não. Aqui a questão é que podemos dizer que a matriz nem sempre é quadrada, se dissermos isso...
> P: E o que a Maria fez está certo?
> A17: Está.
> A22: Os cálculos da Maria estão certos. Só que, por outro lado, não está certa porque as matrizes não têm de ser sempre quadradas.
> P: Vocês até já arranjaram um exemplo.
> A22: Certo.
> P: Então qual é que está certa, é a vossa ou a da Maria?
> A17: É a nossa.
> A22: As duas.
> P: E que conclusão é que vocês tiram da vossa?
> A22: É que podem ser quadradas ou não.
> P: Então tiram a conclusão que a afirmação é verdadeira ou falsa?
> A17 e A22: É falsa.
> P: Então vocês chegam à conclusão que ela é falsa. E ela tirou a conclusão que é verdadeira. O que é que ela fez? Ela diz que é verdadeira com base num...
> A22: Num exemplo.
> P: É possível dizer que a afirmação é verdadeira por causa de um exemplo?
> A22: Não. Nós somos mesmo potentes quando queremos.

Como o aluno A20, do mesmo grupo, não estava a entender a conclusão, embora o contraexemplo fosse da sua autoria, A22 explica, ainda: "Consideraste A uma matriz 3 por 2 e B uma matriz 2 por 2, não é quadrada e deu para fazer a conta, estás a perceber? Eles dizem que as duas têm de ser necessariamente quadradas e é mentira".

A resposta da Luísa foi a que os alunos tiveram mais dificuldade em analisar, tendo alguns grupos considerado que seria uma resposta adequada, essencialmente pelo facto de concordarem que não se podiam multiplicar as matrizes apresentadas e não tanto pela interpretação do raciocínio como resposta à questão (Figura 180).

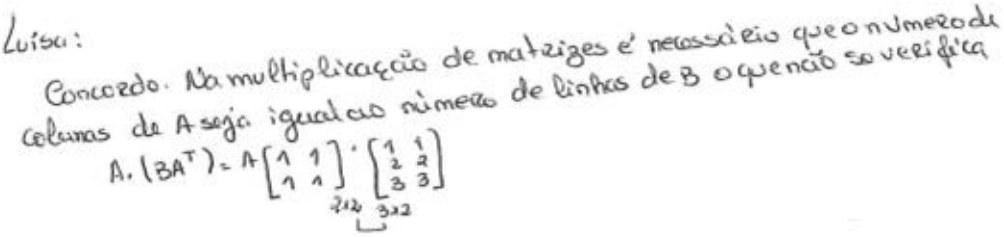


Figura 180. Resposta do grupo G7 à questão 1, referente ao raciocínio da Luísa, da ficha 5.

No grupo G1, o aluno A17 teve dúvidas quanto às situações em que se podem multiplicar matrizes, sendo esclarecido pelos outros elementos do grupo.

> A17: Eu tenho a minha dúvida. Os das pontas dizem se se podem multiplicar e o do meio diz qual é a dimensão da matriz?
> A22: Não, é ao contrário. Não, este 2 por 2 vai-te dizer qual é a dimensão da matriz, que vai ficar.
> A17: Aqui, se não for igual não dá para multiplicar?
> A22: Sim, se não for igual não dá para multiplicar.
> A20: Tinha de ser igual aqui.

Assim, concluem que as matrizes da resposta da Luísa não são as adequadas (Figura 181).

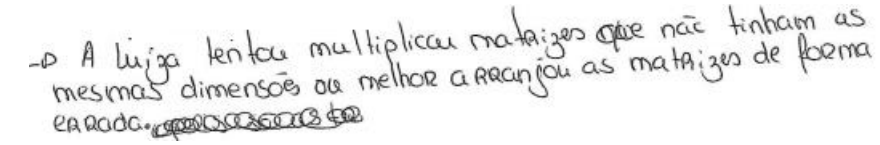


Figura 181. Resposta do grupo G1 à questão 1, referente ao raciocínio da Luísa, da ficha 5.

No debate em grande grupo, pediu-se aos alunos para comentarem cada um dos raciocínios com base no que tinham discutido no grupo.

No que se refere à resposta da Florbela, a partilha das respostas permitiu focar os dois erros. Permitiu também relembrar a não comutatividade da multiplicação das matrizes.

> P: Podemos considerar que temos aqui A vezes A^T ? Podemos trocar o B com A^T ?
> Alguns alunos: Não.
> P: Porquê?
> A17: Nas matrizes não é a mesma coisa termos A vezes B ou B vezes A .
> P: Exato, a multiplicação de matrizes não é comutativa, por isso não podemos trocar. Muito bem.

No caso da resposta da Maria, a professora começou por informar que uns grupos concluíram que a resposta estava correta e outros não, solicitando aos grupos que tinham respondido incorretamente que explicassem o seu raciocínio. O grupo G2, porém, já tinha reformulado a sua resposta e apresentou outra opinião:

A16: Só provou que era verdadeira para esse caso. Porque se tivermos uma matriz A de 3 por 2...
P: Talvez seja mais fácil explicar se for ao quadro colocar a sua resposta.
P: Ou seja, o que a A16 estava a dizer é que a Maria arranjou um caso particular, mas que pode não se verificar para todos os casos.
A16: Sim.
A5: Era o que eu estava a dizer, que é um caso particular.

Analisa-se então a resposta que o grupo G2 colocou no quadro, que é correspondente à que fez na reformulação do trabalho (Figura 182), e no geral os alunos concordaram que a afirmação era falsa e que a resposta da Maria não estava correta.

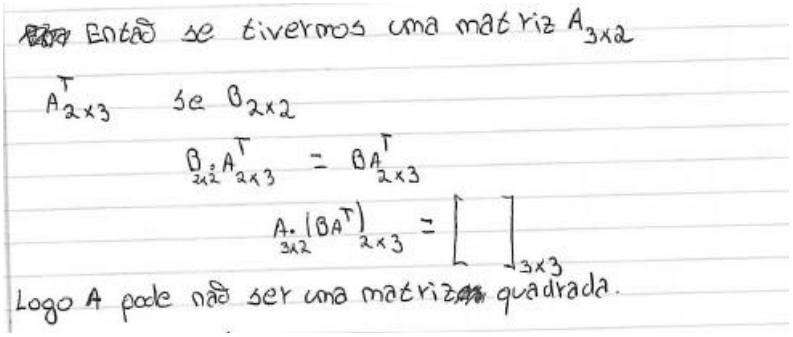


Figura 182. Resposta do grupo G2 à questão 1, referente ao raciocínio da Maria, da ficha 5 após a reformulação.

Após este diálogo, os alunos parecem ter compreendido que a afirmação era falsa e como o justificar. No caso da resposta da Luísa, os alunos reconheceram que, ao nível do cálculo, os procedimentos estão corretos, mas não souberam explicar porque é que o exemplo apresentado não permite concluir que a afirmação é verdadeira. Assim, a professora, realçando a analogia com o raciocínio da Maria, explicou que neste caso a Luísa apresentou um exemplo que confirmava o contarrecíproco. No entanto, como os alunos não se manifestaram, ficou a dúvida se conseguiram compreender a explicação dada.

Na questão 2, a principal dificuldade foi determinar as matrizes A e B, sendo a tendência preponderante efetuar tentativas. Porém, houve ainda grupos que ponderaram a hipótese de recorrer à aplicação direta de casos notáveis, nem sempre traduzidos de forma correta. Por exemplo, o grupo G1 embora comece por considerar que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, com o questionamento da professora e a reflexão conjunta no grupo, conclui que no contexto da questão essa igualdade não é válida.

A22: Multiplicá-las.
P: Se multiplicarmos $A+B$ por $A-B$ o que é que dá?
A22: Vai dar este.
P: De certeza?

A17: Não, não dá.
P: Porquê?
A17: Porque se fica A vezes A mais...
A22: AB .
A20: É. Dá isto.
A17: Então $A^2 - AB + BA - B^2$. Estes dois [os do meio] simplificam e fica $A^2 - B^2$.
P: E AB é sempre igual a BA ?
A22: Ah! Pois não!
A17: Pode não ser a mesma coisa.
P: E se experimentarem adicionar $A + B$ com $A - B$, o que é que conseguem obter?

Já no grupo G2, o facto de um dos elementos estar ciente de que $(A-B)^2$ não é o mesmo que $A^2 - B^2$ evitou que aplicassem incorretamente essa ideia:

A16: Então é fácil. Metemos este ao quadrado, já nos dá isto ao quadrado.
A21: Mas isto não é igual a teres $(A-B)^2$. Não ouviste o que a professora de cálculo disse?
A16: Não.
A21: Ela disse que isto é diferente disto.
A16: Então como é que fazemos?
A21: Pois, não sabemos.

De seguida, ponderam a hipótese de recorrer a tentativas, mas abandonam-na por considerarem que seria um método pouco prático: "Todas as hipóteses? Estás tola!" (A21).

Os três grupos (G3, G7, G8) que chegaram a uma resposta correta encontraram as matrizes A e B calculando a soma e a diferença de $A+B$ com $A-B$ (Figura 183) ou considerando A e B como incógnitas de um sistema de equações (Figura 184).

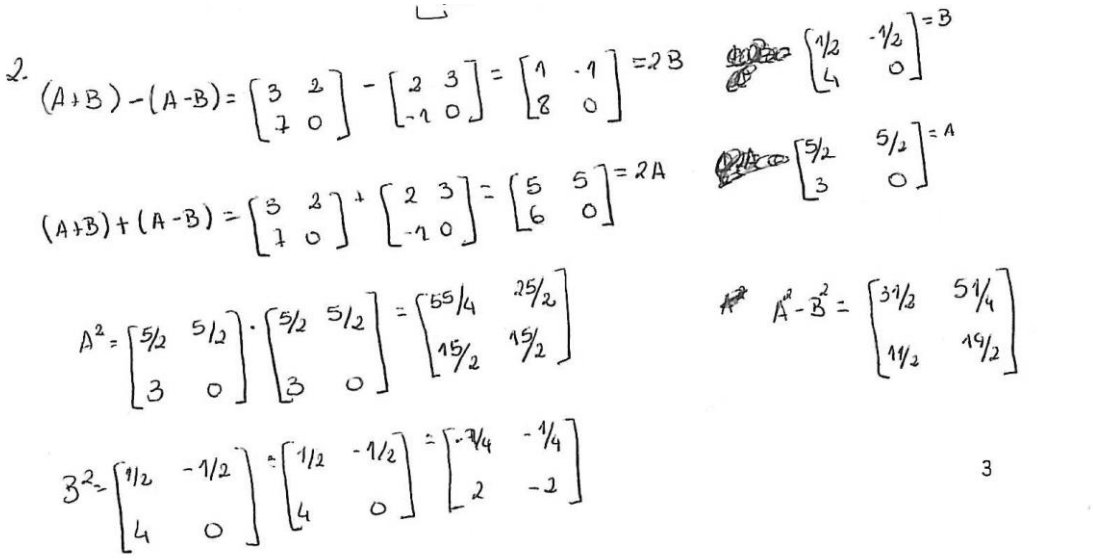


Figura 183. Resposta do grupo G7 à questão 2 da ficha 5.

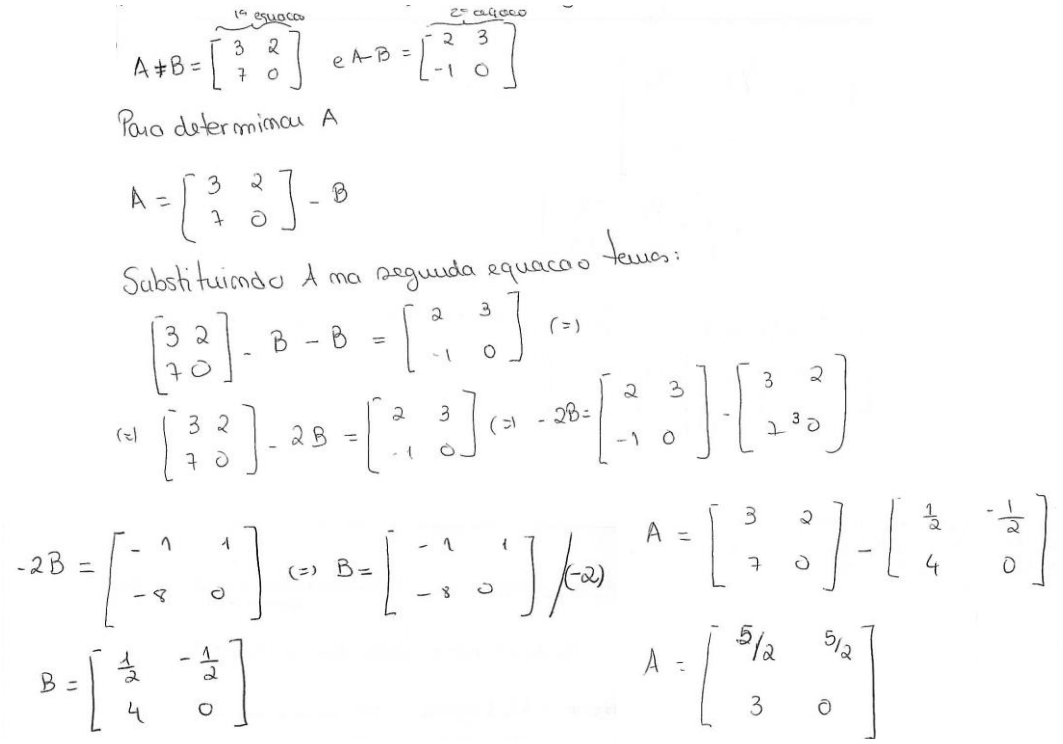


Figura 184. Parte inicial da resposta do grupo G3 à questão 2 da ficha 5.

No debate em grande grupo, começou-se por analisar porque é que a igualdade $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ não é válida no contexto das matrizes.

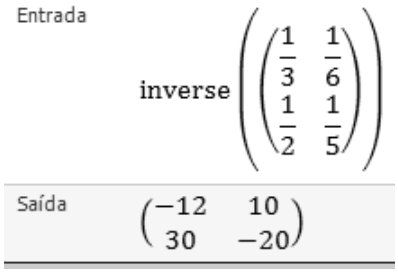
> P: Posso dizer que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$?
> Alguns alunos: Não.
> P: Porquê? Bastava cortar AB com BA.
> A21: Porque AB é diferente de BA.
> Vários alunos: Não é comutativa.
> P: Isso, a multiplicação de matrizes não verifica a propriedade comutativa, então isto pode não ser a matriz nula.

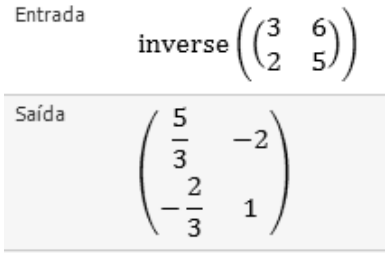
As respostas diferentes foram apresentadas nos diapositivos e os alunos explicaram aos colegas os seus raciocínios. Os grupos que não fizeram ou não completaram a questão foram convidados a entregar posteriormente as suas reformulações.

Ao resolver a questão 3, alguns alunos ficaram um pouco confusos porque a primeira tendência foi considerarem a afirmação verdadeira, mas, ao utilizarem o *software* para calcular a matriz inversa, verificaram que esta era diferente da matriz dada.

O grupo G1 partiu da ideia de que a matriz inversa seria o inverso de cada uma das entradas, não analisando as outras respostas antes de tirar a sua conclusão. Como obtiveram uma matriz inversa diferente com o *software*, ficaram confusos, mas conseguiram ultrapassar esse impasse com a ajuda da professora.

A17: 1 sobre 3; 1 sobre 2 e 1 sobre 4, não é assim? Esta é a inversa desta. A inversa é sempre o número de cima a dividir pelo número que lá está, não é? Não dá?
A22: [confirma com o *software* para ambas as matrizes e chega à conclusão que não dá a matriz dada]





Stora, estamos com uma dúvida. Ele [o *software*] não nos dá aquela inversa.
P: Não dá aquela inversa porquê?
A17: Porque está mal.
P: Porque está mal, exato. Quer dizer que esta matriz não é a inversa daquela.
A17: Mas a inversa de uma matriz não é sempre o 1 a dividir pelo valor que lá está (...)?
P: Será?
A17: Não é assim a inversa?! Pronto, já não digo nada.
P: Isso não será o inverso de cada uma das entradas? Como é que eu determino a inversa de uma matriz?
A22: A única que ainda tem um bocadinho de razão é esta aqui [resposta da Raquel].
P: O que é que a Raquel está a fazer? A determinar a inversa pela...
A22: Pela definição.
P: Está à procura de quê, de uma matriz que multiplicada por aquela dê a...
A17: A identidade, é isso.

O grupo G2 também começou por calcular a inversa recorrendo ao elemento inverso de cada uma das entradas da matriz:

A21: A inversa de 3 é $\frac{1}{3}$, não é?
A16: Sim.
A21: A inversa de 6 é $\frac{1}{6}$, a inversa de 2 é $\frac{1}{2}$.
A16: Como é que se faz as inversas?
A21: A inversa de uma constante é isto, então fica sob a forma de fração.
A16: Então está correto.
A21: Esta [afirmação] está bem.

Depois analisaram as respostas dadas e os três concordaram com a resposta da Clotilde, que está de acordo com o raciocínio que acabam de fazer, passando a analisar a resposta do Cláudio:

A21: Ah, é diferente da matriz identidade? Pois deve ser. Porque é que ele obteve isto?
A16: Não concordamos, pois não?
A21: Não, não concordamos com isto.
A16: Não interessa porque já vimos que em cima era verdadeira.

A21: Mas tem que dar. Esta não está bem porque tem que dar isto. Tem que dar $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
A16: E dá.
A21: Não, não dá.

O facto de verificarem que o produto não dava a matriz identidade, não os fez questionar sobre se as matrizes seriam inversas uma da outra, pois ainda estavam presos ao raciocínio anterior, em que tratavam as matrizes como números reais. Porém, com a ajuda do *software*, o raciocínio da Raquel vai despoletar a dúvida sobre a forma de calcular a inversa:

A16: Esta é a inversa desta?
A21: Não.
A16 e A21: Aqui devia ser $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.
A8: Eu não concordo.
A16: Pois não.
A21: Esta [a inversa que obtém a Raquel] é diferente desta [inversa dada].
A16: Tens a certeza que a inversa se calcula assim?
A21: Sim. O que ela fez aqui está bem, foi o que a professora fez ali [no quadro].
A16: Vai ao programa para ver se dá para fazer a inversa.
A21: A inversa é $\begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 30 & -1 \end{bmatrix}$.
A16: [Com alguma dúvida] O programa não se costuma enganar. Faz a inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.
A21: $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$.
A16: Como é que pode ser?!
A8: Então não é desta maneira [resposta da Clotilde], é desta [resposta da Raquel].
A21: O que a Raquel está a dizer aqui é verdadeiro. E diz que a afirmação é falsa.
A16: Então a da Clotilde é falsa. Pelo programa isto não é a inversa disto, não é?!
A21: Pelo programa não é. Não, mas nós estamos a fazer mal, a inversa de $\frac{1}{3}$ não dá menos, pois não? Aqui diz que a inversa é $\begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 30 & -1 \end{bmatrix}$.
A16: Pois, mas como é que se calcula a inversa assim?
A21: Tem que ser por aqui, por estes c, b e a's ... e não sei quantos.

Como há um conflito entre as ideias prévias e a nova informação, os alunos solicitam a ajuda da professora:

A16: Então com o programa dá-nos isto, mas não sei...
P: Como é que eu verifico se duas matrizes são inversas uma da outra? Multiplicando...
A16: As duas.
P: Têm de obter o quê?
A16 e A21: A identidade.
P: E multiplicando as matrizes dá a matriz identidade?
A21: Não, não deve dar.
P: Ou então determino a inversa. Se descobriram que a inversa é esta, pode ser também aquela? Existe mais do que uma inversa?
A21: Não, só existe uma.
P: Então, não é. Será que a resposta da Raquel indica um processo correto para determinar a inversa?
A21: Sim, este é.
P: Então será que esta resolução está certa?
A21: Está.
A16: Ó professora, mas a resposta do Cláudio também está bem?
A21: Não, está mal.
A16: Porque ele multiplicou as duas para ver se dava a identidade.
P: E deu?
A16: Não, por isso é que ele diz que é falsa.
P: E já multiplicaram esta matriz por esta? Dá aquilo?
A21: Não, não deve dar.
A16: Ah, mas vamos ver.

Como a professora não ouviu a conversa prévia dos alunos, não focou a sua intervenção no erro do grupo. De qualquer modo, os alunos conseguiram identificar os erros nas respostas e aperceber-se que o seu procedimento de cálculo da inversa estava incorreto.

O grupo G3, como recorreu primeiro ao *software*, descobriu logo que a inversa não estava correta. Mesmo assim, consideraram estranho o resultado obtido pelo que solicitam a confirmação da professora:

A6: Isto está bem?! Ó professora, pode chegar aqui se faz favor? Aqui diz que isto é a inversa desta.
A26: Mas não é, stora. Nós fizemos no programa e não dá isso. Aqui diz que é verdadeira e está mal.
P: Mas o que é que a Clotilde fez aqui? Está a calcular a inversa através do inverso de quê? De cada uma das...
A26: Das entradas.
P: E isso pode-se fazer?
A26: Não. Eu até pensei que sim, que ela tinha razão, mas então está mal.
P: E o produto realizado pelo Cláudio está correto?
A26: Não dá a matriz identidade.

P: Mas o resultado é esse?
A26: 2 por 2 dá 2 por 2. Mas nós ainda não fizemos.

Na resposta do Cláudio, começaram por considerar correto multiplicarem entrada por entrada, mas a aluna A26, num momento de reflexão, relembra que se multiplica linha por coluna e confirmam o cálculo no *software*:

A26: O que a Clotilde indica é o inverso de cada entrada da matriz. Mas isto não é correto porque o inverso não se calcula assim.
A6: Porque a inversa não se calcula dessa forma.
A26: O Cláudio diz que a afirmação é falsa e deixa ver se isto dá isto, já agora... Mas a professora disse para ver se isto está bem. Mas isto pode-se multiplicar.
A6: Mas não se sabe se está bem.
A26: Ah! Exato. Dá, A6?
A6: Porque corta, corta.
A26: Não dá não, porque é $\frac{1}{3}$ vezes 3 mais $\frac{1}{6}$ vezes dois...
A6: Então o que é que vamos dizer?
A26: Ó A23, faz esta conta.

Embora, no geral, os grupos tenham chegado a conclusões corretas, a discussão em grande grupo permitiu completar as justificações dadas e explicar melhor o procedimento de cálculo da inversa pela definição.

A maior parte dos grupos não teve tempo para resolver a questão 4 na aula, pelo que se sugeriu que acabassem em casa. Os três grupos (G2, G4, G8), que ainda responderam na aula à questão 4a), concluíram que a matriz X era a matriz $0_{2\times3}$. Porém, os dois grupos (G2, G4), que responderam à questão 4b), concluíram que era impossível calcular X, porque colocaram a inversa de A do lado direito, olvidando que a multiplicação de matrizes não é comutativa (Figura 185).

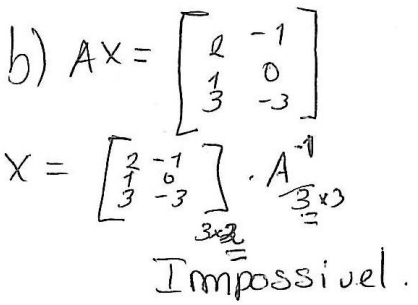


Figura 185. Resposta do grupo G2 à questão 4b) da ficha 5.

Na discussão em grande grupo, começou-se por pedir a colaboração dos alunos para explicarem no quadro para os colegas o que tinham feito em casa, o que foi aceite por A22, que reproduziu o que escreveu na resolução (Figura 186).

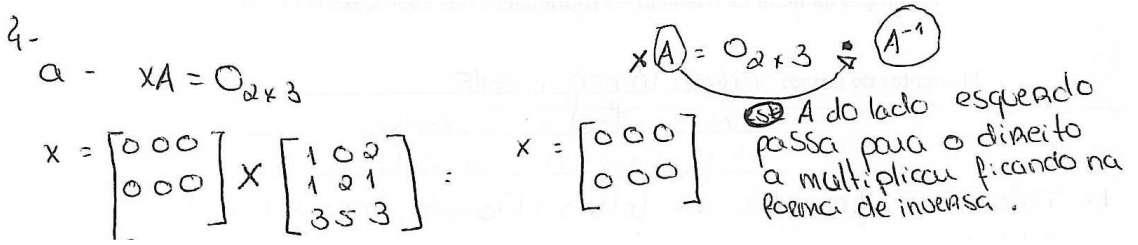


Figura 186. Resposta do grupo G1 à questão 4a) da ficha 5.

Face a esta resolução, surgiu uma questão:

A14: Não tem que passar a dividir?
P: O que é que é passar a dividir no caso das matrizes?
Alguns alunos: É fazer o inverso.

O aluno A17, do mesmo grupo, apresentou, em seguida, a resolução da questão 4b) (Figura 187):

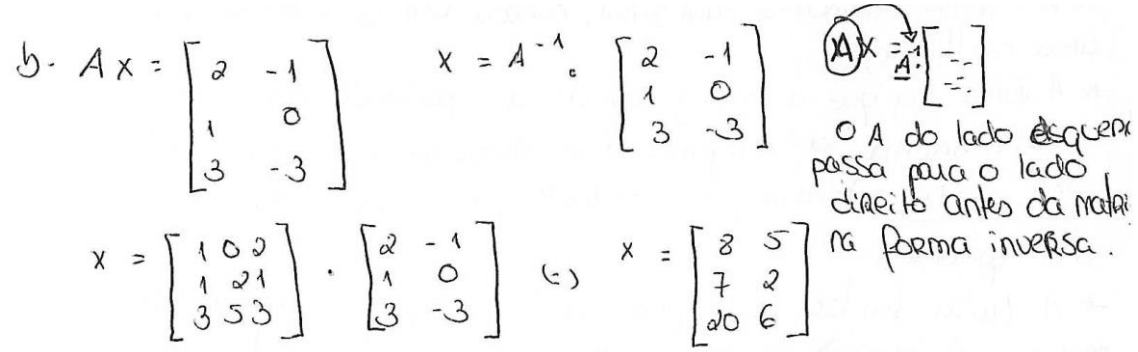


Figura 187. Resposta do grupo G1 à questão 4b) da ficha 5.

Como havia alunos que não estavam a entender, A17 explicou, parecendo não ter assimilado a razão pela qual resolveu dessa forma, embora tenha uma ideia intuitiva:

A17: Como nós queremos o X, passamos o A para este lado e fica a inversa. Se vem em primeiro lugar aqui, ali também tem de vir em primeiro lugar.
P: Porquê?
A17: Não sei.
P: Então, é porque a multiplicação de matrizes não verifica...
Alguns alunos: A propriedade comutativa.
P: Então $A^{-1}X$ pode não ser o mesmo que XA^{-1}.
A17: É como ali naquela [Figura 186]. Aqui o A vem em segundo lugar, daquele lado também tem de vir em segundo lugar.

Com a ficha de trabalho n.º 6 – Característica de uma matriz – pretendia-se trabalhar as operações elementares sobre as linhas de uma matriz e aplicar o conceito de característica de uma matriz. Antes de iniciarem a ficha de trabalho, abordou-se o conceito de matriz em escada por linhas. Depois de lida a definição, e partindo de várias matrizes, debateu-se com os alunos quais estavam ou não em escada por linhas e porquê. Utilizando uma das matrizes que não estava em escada por linhas, explicou-se quais as operações elementares (mencionadas na ficha de trabalho) que se poderiam usar para transformar essa matriz numa matriz em escada por linhas, pedindo a contribuição dos alunos. Embora alguns alunos parecessem estar já mais familiarizados com este tipo de tarefa, havia outros que continuaram com dúvidas. Por exemplo, os alunos do grupo G2 tinham uma ideia do que pretendiam, pois conseguiram concluir pelo *software* que a característica da matriz era dois. Porém, embora discutissem no grupo alguns procedimentos corretos, não conseguiram chegar ao resultado pretendido:

A8: Trocas a linha 1 com a linha 4.
A16: Porque é que vais trocar a linha 4?
A21: Porque é a única que tem um zero.
A16: Mas não vai dar efeito nenhum.
A21: Pois não, tinha que estar aqui nesta.
(...)
A8: Não dá a matriz em escada.
A21: [Usando o *software*] Olha, A16, estás a ver? Vamos ter duas linhas, a característica vai ser igual a dois.
A16: O quê?
A21: Igual a 2.
A8: Aqui é 1, debaixo do 1 tem de ficar zero, certo?
(...)
A21: Dá -1 mais 1, zero.
A8: Então tens de meter esta linha aqui debaixo desta.
A21: Então vamos trocar a linha 2 pela linha 4.
(...)
A21: Multiplicas por -1 e depois somas 1.
A16: Não é -1, é 1, porque se multiplicares aqui por -1 não dá.
A21: Ah, pois é. Então tem de se multiplicar a linha 1 por 1.

Obtiveram a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, mas não conseguiram continuar o processo. Embora tenham identificado corretamente o primeiro elemento não nulo da segunda linha e soubessem

que por baixo têm de colocar um zero, não se lembravam que devem começar por colocar zero na entrada anterior dessa linha.

A16: E agora qual é o elemento não nulo do segundo?
A21: É o dois.
(...)
A21: Então tu queres pôr zero onde?
A16: Aqui no 4 [entrada a_{32}].
(...)
A16: Tu queres mudar na linha 3 para dar debaixo do 2 zero. Então vais fazer com a linha 3 e com a linha 2.
[Depois de várias tentativas]
A16: Se for -2 vezes 2 dá -4.
A21: -4+4 dá zero. Então é este... Já percebi.
A16: Mas temos que substituir todos, não é só ali. -2 vezes 0...
A21: Falta um zero, não é?
A16: Estou enrascada.
(...)
A16: Faltam zeros ainda e tínhamos que ter duas linhas de zeros. Estamos a fazer alguma coisa mal.

Como havia outros grupos com dificuldades – "Professora, nós fizemos trocas e trocas. O problema aqui é que nós não conseguimos perceber o que é mais importante nestes casos" (A26), a questão acabou por ser corrigida no quadro, antes dos alunos concluírem a resolução da ficha de trabalho, promovendo-se a discussão em grande grupo sobre os passos a seguir.

Na questão 1b), apenas dois grupos (G4 e G5) deram uma resposta totalmente correta (Figura 188).

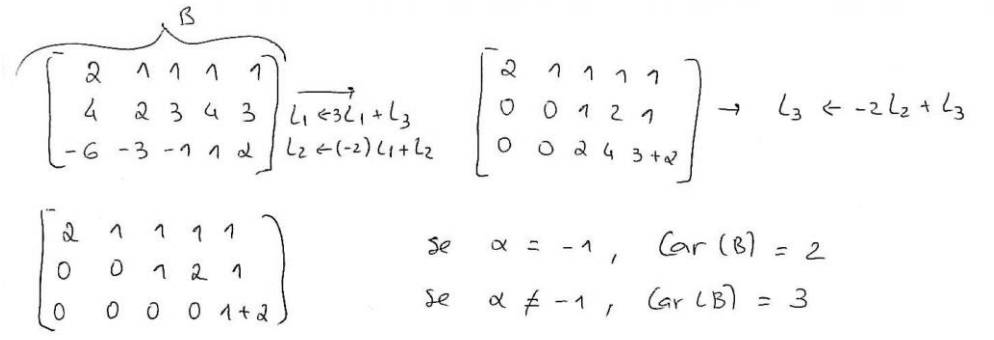


Figura 188. Resposta do grupo G4 à questão 1b) da ficha 6.

Quanto aos outros grupos, G1 e G3 cometeram erros de cálculo ao colocar a matriz em escada por linhas, mas, em função da matriz que obtiveram, indicaram corretamente a característica; G6 e G2 não acabaram de colocar a matriz em escada por linhas, pois ao efetuarem uma troca de linhas, que não era a mais adequada, complicaram a situação e

desistiram; e os restantes não indicaram a característica (G7 e G9) ou indicaram-na sem ter em atenção o valor de α (G8).

O grupo G2 começou por utilizar o *software*, no entanto, face à matriz obtida, não teve em atenção o valor de α (que representa por x) e conclui que a característica da matriz é três. Com a ajuda da professora, conseguiram oralmente avaliar a característica da matriz em função do valor de α.

A21: A não tem nenhuma linha nula. Tem de ser característica de A igual a 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

A16: Pergunta à stora se está certo.
A21: Isto nunca vai ser nulo.
A16: Tem de ser assim a escada?
A21: Sim.
(...)
A21: Olha para este ser zero, tem que se multiplicar por -2
P: Este vai depender de alfa, certo?
A21: O α nunca vai ser nulo, pois não, professora? Dá $\alpha+1$.
P: Não quer dizer que a vossa matriz seja exatamente a que dá no *software*, mas a característica é a mesma. Então vai ou não depender do valor de x? Se o x for igual a...
A21: -1
P: Nesse caso, isto dá uma linha de zeros. Então a característica é...
A21: Igual a 2.
P: Exato. Mas se o x for diferente de...
A21: -1.
P: Então a característica é...
A16: 3.
P: Então estão a ver que isso vai depender do valor de x. Acabem lá de colocar em escada por linhas.

Se bem que, após este diálogo, pareçam ter percebido o que se pretendia, os alunos acabaram por não completar a sua resposta, pois não conseguiram concluir a transformação da matriz numa matriz em escada por linhas (Figura 189).

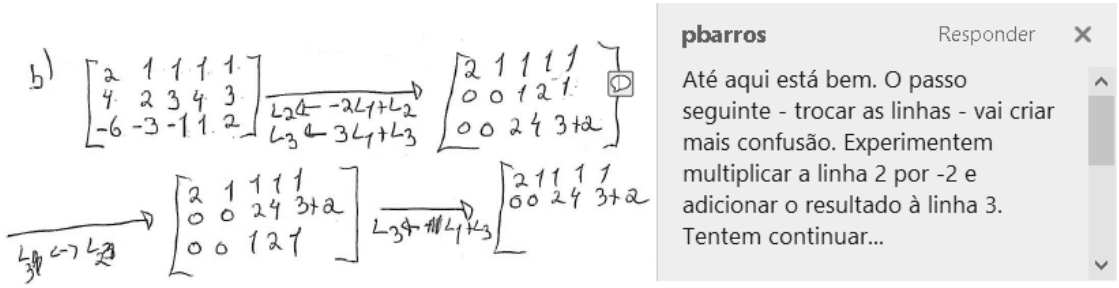


Figura 189. Resposta do grupo G2 à questão 1b) da ficha 6 e comentário da professora.

Já o grupo G8, conquanto transforme corretamente a matiz numa matriz em escada por linhas, não analisa a característica em função do valor de α (Figura 190).

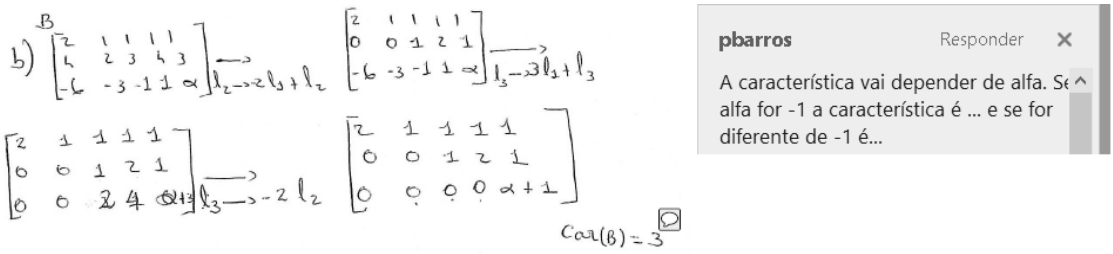


Figura 190. Resposta do grupo G8 à questão 1b) da ficha 6 e comentário da professora.

Na discussão em grande grupo, ao analisar as respostas dadas, tentou-se que os alunos identificassem os erros cometidos. Como a professora tinha feito comentários nos trabalhos, os alunos conseguiram identificar mais facilmente os próprios erros. Por exemplo, o grupo G2 comentando a sua resposta para a turma:

> A16: Está mal.
> P: O que é que está mal?
> A16: Ali não precisávamos de ter trocado as linhas, continuávamos era a substituir.
> P: Trocar as linhas está mal ou está bem? É uma operação incorreta?
> A5: Não, pode-se fazer.
> P: Então, se calhar, o que quer dizer é que aqui complicou a situação. Trocar a linha 2 com a linha 3 complicou-vos mais a situação do que ficar aqui com o 3 mais alfa.
> A16: Certo.
> P: E depois não conseguiram continuar provavelmente por causa disso.

Um dos conflitos que surgiu foi o facto de, ao utilizar o *reduce* no *software*, não aparecer uma linha de zeros, o que levou alguns alunos a considerar logo que a característica era 3, não reparando que dependia do valor de alfa, como sobressai no diálogo com a turma ao discutir a correção da resposta do grupo G8.

> P: E esta está correta [Figura 190]? (...) Este grupo chegou à conclusão que a característica de B era igual a 3. O que é que vocês acham?
> A16: Não.
> P: A característica da matriz B é 3? A17, é ou não?

A17: Acho que sim. Para a professora estar a fazer essa pergunta, não é.
P: Vocês é que têm de saber se é ou não.
A17: Mas nós também pusemos característica 3.
A6: Nós também.
P: Nem toda a gente respondeu que a característica era 3.
A14: Se α for igual a -1, a característica de B é 2. Se for diferente de -1, é 3.
A16: Mas a stora disse que podíamos ir ao programa e o programa dá 3.
Outro aluno: Pois dá.
P: Mas deve dar $\alpha+1$.
A16: Sim, mas dá característica 3. Nós na altura em vez de pôr α pusemos x.
P: Porque é que depende do α? Se o α for -1, o que é que dá $\alpha+1$?
Vários alunos: Zero.
P: Então qual é a característica se aqui der zero?
Alguns alunos: 2.
P: A6, está a entender?
A6: Agora entendi.
A16: Mas isso está bem stora?
P: Está bem a característica de B igual a 3, ou seja se o alfa for -1, isto vai dar
Alguns alunos: Zero.
P: Zero. Então a característica é ...
Alguns alunos: 2.
A17: Pois, eu não estou a perceber porque é que é 2.
P: O que é que é a característica de uma matriz? É o número de linhas não...
Alguns alunos: Nulas.
P: Depois da matriz estar em escada por...
Alguns alunos: Linhas
P: A matriz está em escada por linhas ou não?
A17: Está.
P: Então se o α for -1, isto tem uma linha de zeros. Então quantas linhas não nulas tem?
A17: Duas.
P: Se o α for diferente de -1 quantas linhas não nulas tem?
A13: Zero, aí, não nulas tem 3.
P: Então a característica vais depender de alfa.

Para confrontar os alunos com uma situação diferente da anterior, aproveitando o facto do grupo G3 ter cometido erros de cálculo e ter chegado a uma matriz cuja característica não dependia do valor de α, propôs-se aos alunos que analisassem a resposta do grupo G3 (Figura 191), dando mais destaque ao estudo da característica da matriz que tinham obtido.

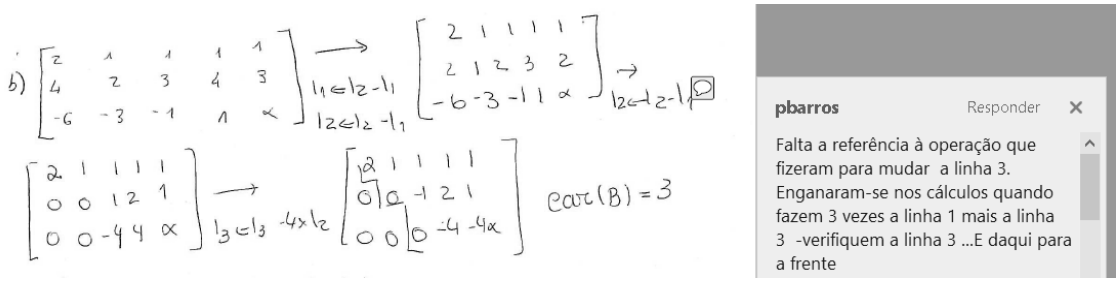


Figura 191. Resposta do grupo G3 à questão 1b) da ficha 6 e comentário da professora.

P: Qual foi o problema aqui? Porque é que aqui terá dado -4α ?
A26: Enganámo-nos nas contas.
P: Mas vamos analisar, se a matriz final fosse esta, a característica de B seria 3 ou depende de α também?
A16: Não depende de α .
P: Não depende de α porquê?
A16: Porque ali mesmo que α fosse 0, ali não iria dar zero.
P: Está a dizer que como temos -4 antes, mesmo que a seguir isto fosse zero, nunca teríamos uma linha...
A16: Nula.
P: Então se os cálculos deste grupo estivessem corretos, a característica era mesmo...
A16: 3.

Como alguns erros de cálculo eram particulares de cada grupo, não envolvendo casos especiais, nem todos foram analisados com pormenor em grande grupo. Assim, sugeriu-se aos alunos que quando fizessem a reformulação do trabalho, tentassem corrigir o que tinham incorreto, tendo como base os comentários que a professora tinha escrito na resolução do grupo e os aspetos que tinham sido focados no debate.

Na questão 2, três grupos não responderam (G2, G5, G6), eventualmente por falta de tempo na aula, e um respondeu de forma incorreta (G3) porque não obedeceu às condições do enunciado, na medida em que apresentou um exemplo de uma matriz com elementos nulos. Os exemplos indicados pelos outros grupos foram todos o mesmo (Figura 192):

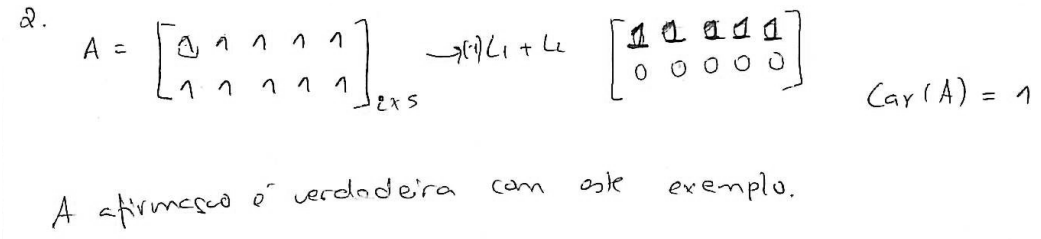
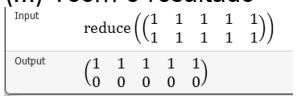


Figura 192. Resposta do grupo G4 à questão 2 da ficha 6.

No grupo G1, a primeira impressão foi considerar que não havia uma matriz nas condições pedidas, no entanto, a discussão entre os elementos do grupo e o apoio do *software* permitiu que chegassem a uma resposta correta:

A17: Então, sem elementos nulos, não dá.
A22: Dá, dá.
A17: Não. Tens de ter abaixo zeros.
A22: Pois é.
A17: Então imagina. Tens aqui zero [1.ª entrada da 2.ª linha]. Aqui já não. Já não tens nada para fazer escada. A escada acaba aqui. Mas a característica é 2, não é?
A20: Nessa, a característica é 2.
A17: Mas não tem de ter zero em baixo?
A20: Aqui tem.
A17: Mas aqui diz sem elementos nulos.
A20: Mas lá está. Podemos pôr uma matriz antes de fazer as contas.
(...)
A20: É verdadeira.
A17: Ah?
A20: Existe uma matriz desta dimensão cuja característica é igual a 1. Eu lembro-me de no ano passado haver. Agora o exemplo é que é mais complicado.
(...)
A22: 2 linhas e 5 colunas [no *software*].
A17: E agora colocas um 1.
A22: Esqueci-me do *reduce* [no *software*], espera aí. Mas isso é para sabermos a característica.
A17: Mas nós também queremos saber a característica. Põe tudo 1.
(...) Veem o resultado



A17: Dá zeros na mesma.
A22: Mas dá 1, porque...
A17: Tem característica 1.
A22:Tem característica 1, não é?
A17: É.
A20: Sim.
A20: A matriz final tem de ter sempre zeros, isto [não ter zeros] é para o início.
A17: Aqui diz sem elementos nulos no início, mas depois podem vir à vontade.
A20: É isso.
A22: Esta cena do *reduce* é fixe. Já sabes o que vai dar.

Na discussão em grande grupo concluiu-se que a resposta do tipo da Figura 192 estava correta e constatou-se que não era obrigatório que os números da primeira linha fossem todos iguais, bastando que houvesse alguma relação entre a primeira e a segunda linha. Assim, sugeriu-se aos grupos, que não tinham resolvido a questão ou que tinham errado, que exemplificassem com uma matriz diferente. Recomendação que, no geral, foi seguida, mesmo por alguns grupos que tinham resolvido bem a questão. Por exemplo, o grupo G3 apresentou, na reformulação do trabalho, a seguinte resposta (Figura 193):

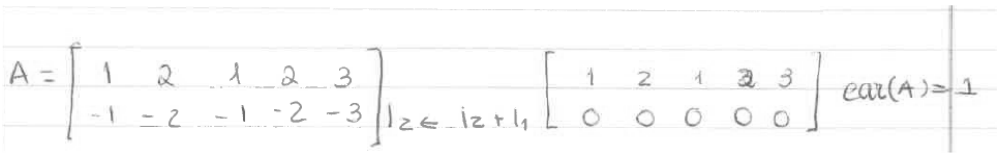


Figura 193. Resposta do grupo G3, após a reformulação, à questão 2 da ficha 6.

Com a ficha de trabalho n.º 7 – Matrizes e determinantes – pretendia-se que os alunos trabalhassem alguns dos conceitos abordados e que explorassem outros. Antes da ficha ser proposta, os conceitos de determinante, cálculo de determinantes usando propriedades, operações elementares e o teorema de Laplace, assim como o cálculo da matriz inversa com recurso à adjunta de uma matriz, já tinham sido abordados nas aulas, tendo inclusivamente sido discutidas algumas tarefas (exercícios do *PowerPoint*) em grupo e em grande grupo no sentido de promover a compreensão e apropriação dos conceitos por parte dos alunos.

Na questão 1 da ficha de trabalho, a primeira abordagem dos alunos foi arranjar uma matriz, calcular a inversa, e verificar se o determinante dava quatro, como se pode comprovar pela explicação de A17 a A26, de outro grupo:

> Aqui diz que a matriz A é uma matriz quadrada, dois por dois, duas linhas duas colunas. E depois diz-te que o determinante da inversa dá 4. Tens de arranjar uma matriz A que ao inverter essa matriz o determinante dela dê 4, tens que ir tentando... O problema é teres de arranjar uma matriz A ...

Como os alunos estavam num impasse, faziam tentativas, mas não conseguiam atingir o objetivo e estavam a ficar desanimados, julgou-se pertinente gerar alguma discussão em grande grupo para os encaminhar para tentativas mais promissoras:

> P: Vocês estão à procura de quê?
> A16 e A21: Da matriz A .
> P: E o que é que sabem sobre a matriz A ?
> A16 e A21: É uma matriz quadrada.
> A21 [Acrescenta]: De ordem 2.
> P: Como sabem que é uma matriz quadrada?
> A16: Por causa da inversa.
> P: Tem razão A16, então A é também uma matriz quadrada de ordem 2. O que é que sabem mais?
> A18: Que o determinante da inversa é 4.
> P: Se o determinante da inversa é 4, o que é que sabem sobre o determinante de A ?
> A16: É 4 também.
> P: Toda a gente concorda?
> A19: Não.
> P: O A19 está a dizer que não...
> A16: É 1 sobre o determinante.
> P: Então qual é o determinante de A ?

A19: $\frac{1}{4}$.

P: Então, o que é que vocês querem?

A21: Determinar a matriz.

P: Exato, determinar a matriz cujo determinante seja $\frac{1}{4}$. Há só uma hipótese?

A16: Não, deve haver várias.

Após este diálogo, os alunos perceberam o objetivo e tentaram encontrar uma matriz nas condições pedidas, recorrendo para isso ao auxílio do *software*. Todos os grupos responderam corretamente a esta questão (Figura 194).

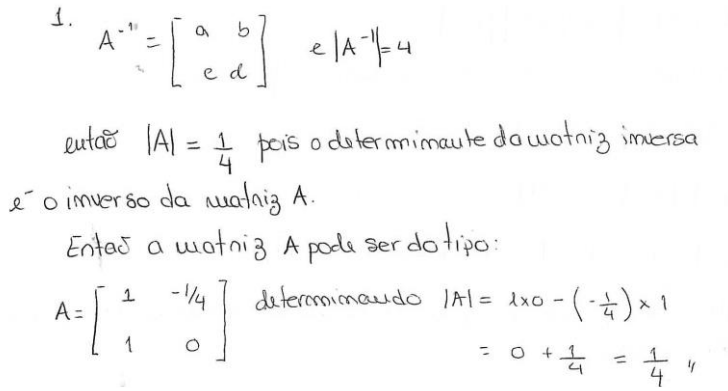


Figura 194. Resposta do grupo G3 à questão 1 da ficha 7.

Na discussão em grande grupo, os alunos foram confrontados com os vários exemplos apresentados, concluindo-se que todos estavam corretos. Alertou-se também para a diferença entre a notação de matriz e determinante, que alguns grupos utilizaram de forma indistinta (Figura 195).

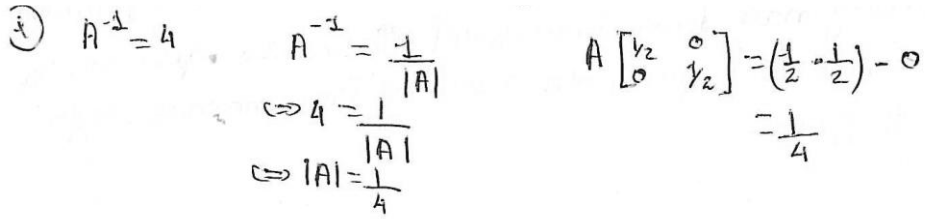


Figura 195. Resposta do grupo G8 à questão 1 da ficha 7.

Trabalhou-se também com os alunos a forma de descobrir o caso geral para as matrizes nas condições dadas, chegando-se à conclusão que partindo da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma das possibilidades seria $ad = \frac{1}{4} + bc$.

Na questão 2.1.a) pretendia-se que os alunos averiguassem se o determinante da soma era igual à soma dos determinantes. Sete grupos consideraram que a afirmação era falsa, no entanto, apenas cinco (G1, G4, G6, G7 e G9) apresentaram uma justificação válida, baseada num contraexemplo, apresentando os outros dois uma justificação um pouco vaga: "encontramos casos em que não se verificava" (G5). Os dois grupos (G2, G3) que apresentaram uma resposta incorreta confundiram determinante com módulo ou calcularam mal o determinante da soma (Figura 197).

No grupo G1, os alunos, ao encontrarem um exemplo que verificava a afirmação e outro que não verificava, ficaram confusos e sem saber que conclusão tirar.

A20: Arranjei uma que é verdadeira, para a primeira.
A17: Então?
A20: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
A22: Sim, se a matriz for feita de zeros, também é verdadeira.
A17: Eu arranjei uma que dava e o A20 arranjou uma que não dava. E agora, como é que fazemos? É falsa?
A17: A mim dá-me falsa a primeira.
A20: E a mim dá-me verdadeira.

Como não resolveram o dilema, pediram apoio à professora:

A17: Na primeira, a mim deu-me falsa e ao A20 deu verdadeira.
P: A um deu falso e ao outro verdadeira, porquê?
A17, A20 e A22: Porque arranjamos matrizes diferentes.
P: E que conclusão é que tiram?
A22: Pode ser as duas coisas.
P: O princípio da não contradição diz que uma afirmação não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Têm que decidir. Mas o A20 arranjou um exemplo que verifica. A A17 arranjou um exemplo que não verifica. Que conclusão é que nós tiramos, um verifica, outro não verifica. É válido para todos?
A17 e A20: Não.
P: Então a afirmação é verdadeira ou falsa?
A17, A20 e A22: É falsa.
P: Sim, é falsa porque não é válida para todos os casos.

Com a clarificação da professora, o grupo G1 acabou por dar uma resposta correta, em que apresentou um contraexemplo (Figura 196).

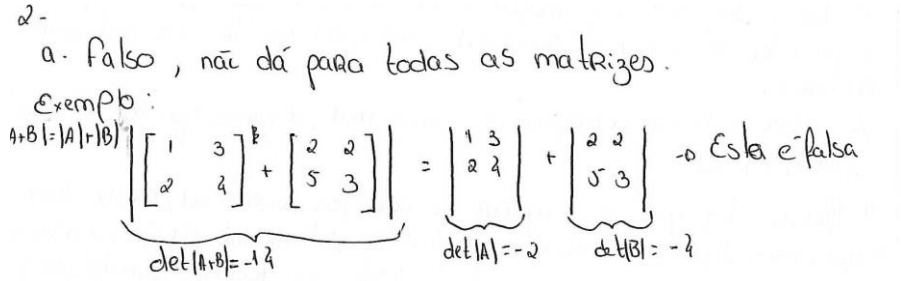


Figura 196. Resposta do grupo G1 à questão 2.1a) da ficha 7.

O facto de a afirmação a investigar não constar das propriedades dos determinantes da documentação fornecida pela professora levou o grupo G2 a concluir que seria falsa.

A16: Essa é falsa.
P: E porquê?
A16: Porque aqui tinha de estar a multiplicar [mostra as propriedades].
P: Bem, isso não é resposta, a propriedade diz que o determinante do produto é o produto dos determinantes, mas não diz nada sobre a soma.

Decidiram então verificar com base em exemplos. No entanto, no exemplo que arranjaram, determinaram incorretamente o determinante da soma, pois utilizaram o resultado da própria afirmação para o calcular, concluindo que esta é verdadeira (Figura 197). Usaram também indistintamente a notação de matriz e determinante.

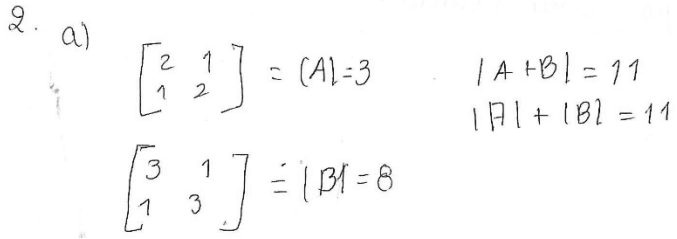


Figura 197. Resposta do grupo G2 à questão 2a) da ficha 7.

No debate em grande grupo, analisaram-se as respostas dadas e tentou-se que os alunos clarificassem algumas delas, assim como identificassem os erros cometidos. Por exemplo, analisando a resposta do grupo G2 (Figura 197):

P: A16, vocês calcularam o determinante de A, que é 3, o determinante de B, que é 8, e depois disseram que o determinante de $A+B$ era 11. Porquê?
A16: Então, o determinante de $A+B$ pelas propriedades é determinante de A mais determinante de B.
A26: Usando o determinante de A e o do B e depois dá o mesmo.
P: Mas assim estão a usar a afirmação que querem verificar. E isso está correto?
A26 e alguns alunos: Não.
P: Como é que se calcula o determinante de $A+B$?
A16: É o determinante de A mais o determinante de B.
P: Isso é o que nós estamos a ver se é verdade...

A26: Não, stora. É a soma da matriz A com a matriz B e depois calculamos o determinante.
A21: Mas dá 11 na mesma.
P: Dará 11 na mesma?
Alguns alunos: Não.
P: Somem lá as matrizes A e B do grupo G2, calculem o determinante e verifiquem se dá o mesmo. (...) [A professora resolveu no quadro, com a ajuda dos alunos, e verificaram que o determinante da soma dá 21]. Então, neste caso, concluímos que determinante de $A+B$ é diferente ou igual a determinante de A mais determinante de B?
Alguns alunos: É diferente.
P: Então a afirmação é verdadeira ou falsa?
Algumas vezes: É falsa.

Com este diálogo, os alunos aperceberam-se que a afirmação era falsa, sendo mais fácil analisar as outras respostas. Por exemplo, o grupo G8, que apenas tinha respondido que "é falsa porque o determinante da soma é igual à soma dos determinantes", apercebe-se que lhe falta justificar e afirma: "depois enviamos-lhes a justificação na reformulação". E o aluno A26, do grupo G3, comenta: "Confundimos módulo com determinante, stora. E também fizemos determinante de $A+B$ como se fosse determinante de A mais determinante de B".

Na questão 2.1b) apenas um grupo (G6) tentou provar com recurso às propriedades que a afirmação era válida, ainda que com bastantes falhas (Figura 198).

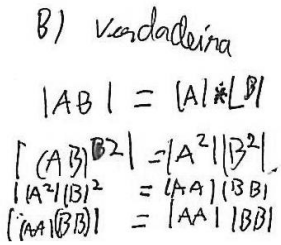


Figura 198. Resposta do grupo G6 à questão 2.1b) da ficha 7.

Dos outros grupos, três (G4, G5 e G8) responderam que a afirmação era verdadeira sem qualquer outra justificação, três (G9, G7, G1) apresentaram um exemplo para confirmar a veracidade da afirmação e dois (G2, G3) partiram igualmente de um exemplo, mas calcularam primeiro o determinante e depois elevaram ao quadrado o resultado (Figura 199). Embora tenham utilizado uma propriedade válida, esse raciocínio não parece provir de uma dedução por eles concretizada, mas de uma interpretação inapropriada da afirmação.

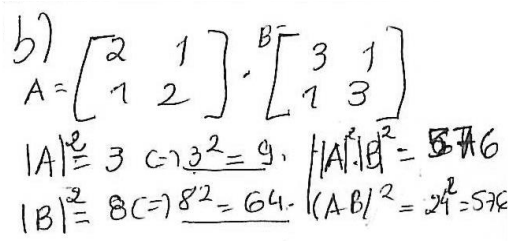


Figura 199. Resposta do grupo G2 à questão 2.1b) da ficha 7.

No grupo G1, os alunos começaram por partir de um exemplo concreto calculando A^2 como sendo o quadrado de cada uma das entradas. Questionados pela professora e com a ajuda do *software* concluíram que o seu procedimento estava incorreto.

A17: A matriz A, peguei na mesma matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ao quadrado, então coloquei as entradas ao quadrado, certo? Deu-me $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$.

P: Será que A^2 se calcula determinando o quadrado de cada uma das entradas?
A17: Eu fazia assim.
A20: Não, é a matriz vezes a matriz.
A17: Mas não é a mesma coisa?
P: Será a mesma coisa?
(...)
A17: A22, põe aí [no *software*].
A17: É $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Isso, ao quadrado.
A22: [Calcula no *software*].
A17: Não dá nada disto. A20 não é entrada a entrada.
A20: O quê?
A17: A matriz B que é esta $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.
A20: Tens de fazer esta [matriz B] vezes esta [matriz B] outra vez.
A17: É esta vezes esta.
A20: Dá 4...
A17: Não dá. Olha ali [para o *software*]. A multiplicação não é entrada a entrada.
A20: Se forem da mesma ordem é.

Face à descoberta efetuada, o aluno A17 partilha-a com o grupo G3. Porém, surge-lhe a dúvida de como proceder para efetuar a multiplicação, eventualmente influenciado pelo comentário de A20. Assim, é com a ajuda de A26, do grupo G3, e de A22, do próprio grupo, que se apoiou nos passos da solução fornecidos pelo *software*, que relembram o algoritmo da multiplicação.

A17: [Explica para o G3] Escuta. A matriz ao quadrado não é a entrada ao quadrado. Para teres uma matriz ao quadrado, é matriz vezes matriz. Mas se tu multiplicares a matriz vezes a própria matriz, não é entrada a entrada a multiplicação também?
A26: É linha vezes coluna.
A17: Não é, A20, vês.
A26: Isso é soma, a multiplicação eu também fazia assim como vós. A multiplicação é linha 1 coluna 1 respetivamente, linha 2 coluna 2 e assim...
A20: Olha que não sei se é.
A22: O computador já nos disse que não estava bem e eu fui ver os passos da solução, por isso...
A17: Não é entrada a entrada porque não dá.
A26: [Mostra um exemplo do caderno] Olha aqui um exemplo, não te lembras?
A17: Linha 1 coluna 1, é esta...
A26: É a mesma coisa. Linha 1 coluna 2, linha 2 coluna 1, linha 2 coluna 2, para cada entrada.

Embora o grupo G1 tivesse percebido como se efetuava a multiplicação, não respondeu corretamente, pois não pôs em causa o facto de um exemplo não provar a afirmação (Figura 200).

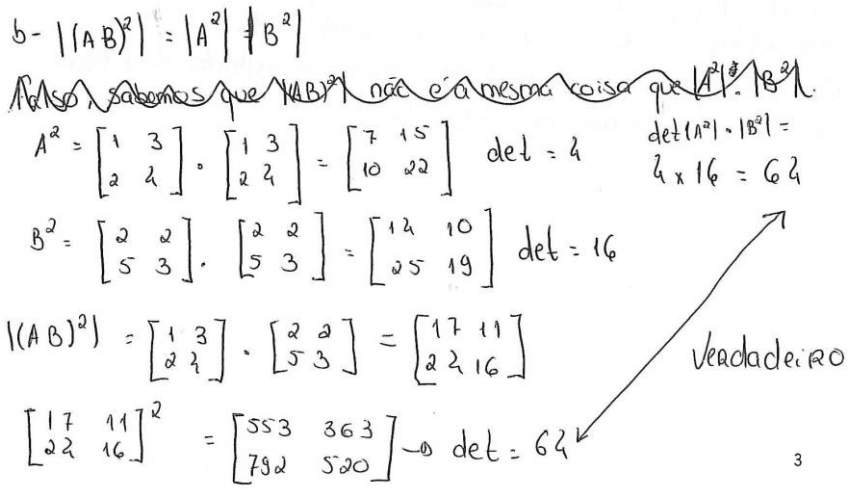


Figura 200. Resposta do grupo G1 à questão 2.1b) da ficha 7.

No debate em grande grupo, confrontaram-se os alunos com as respostas dadas, realçando-se o facto de um exemplo não provar a veracidade da afirmação dada.

P: O grupo G1 (Figura 200) também tem outro exemplo. Posso dizer que a afirmação é verdadeira?
A17: Outra vez não, porque estamos a provar para aquele caso.
P: Alguém encontrou um caso em que não desse o mesmo resultado?
Alguns alunos: Não.
P: Então vamos tentar perceber o que fez o G6, que tentou provar que a afirmação era verdadeira.

Como o grupo G6 tinha esboçado uma tentativa de prova (Figura 198), o aluno A19, desse grupo, foi ao quadro tentar explicar o seu raciocínio.

A19: Usei a propriedade que está em cima porque está nas propriedades.
P: Ou seja, o determinante de AB é o determinante de A vezes o determinante de B.
A19: Certo. Depois separei.
P: E o que é que aplicou de $\left|(AB)^2\right|$ para $\left|A^2B^2\right|$?
A19: É um salto.
P: Explique do primeiro para o último, veja se consegue explicar melhor.
A19: Como o quadrado está aplicado ao A e ao B, é como A vezes A e B vezes B. E os determinantes, ao multiplicar fica igual.
A17: Mas ali o quadrado não devia ser fora?
P: Aqui [lado direito] colocou A vezes A que é o A ao quadrado, B ao quadrado é B vezes B, certíssimo. E AB ao quadrado é diretamente $AABB$?
A27: Não.
P: Não, porque a multiplicação das matrizes não é...
A27, A19 e outros alunos: Comutativa.

Com a ajuda da professora, que foi pedindo a colaboração dos restantes alunos, o aluno A19 faz no quadro a prova, agora de forma correta, concluindo-se assim que a afirmação é verdadeira.

Na questão 2.2, quatro grupos (G1, G4, G6, G8) responderam corretamente, apresentando um contraexemplo de forma a concluírem que a afirmação é falsa (Figura 201).

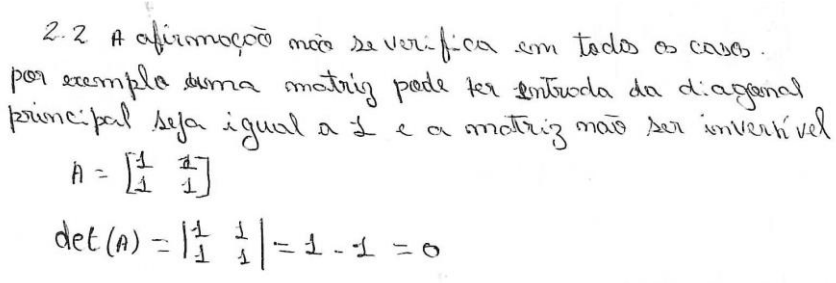


Figura 201. Resposta do grupo G8 à questão 2.2 da ficha 7.

Em alguns grupos não se chegou à resposta correta sem antes ter havido um conflito de ideias. Por exemplo, no grupo G1, o aluno A22, depois de várias tentativas, encontrou um contraexemplo, mas A17 presume que tem de arranjar um exemplo que confirme a afirmação.

A22: Esta também é falsa. Acabei de arranjar uma matriz que não é invertível. Diz aqui [no *software*] "a matriz não é invertível".
A17: São todas [as entradas] 1.
A22: A afirmação é falsa.
A17: Não, A22, aqui diz "então A é invertível". Essa não é invertível, então tens de arranjar outra.
A22: Sim, podemos dizer que é falsa porque arranjamos uma que não é invertível.

A17: E tem as entradas da diagonal principal 1.
A22: Exatamente.

Pela resposta dada pelo grupo –"Falso, se todos os números forem 1, então A não é invertível" [apresentando a matriz A de ordem dois], confirma-se que A17 acabou por aceitar a opinião de A22.

Porém, não questionar a validade de uma afirmação, quando encontram um ou mais exemplos que a verificam, continua a ser uma ideia recorrente, como se pode constatar pelas respostas de quatro grupos (G2, G5, G7, G9) que apresentaram uma matriz nas condições do enunciado, de forma a confirmar a afirmação dada (Figura 202).

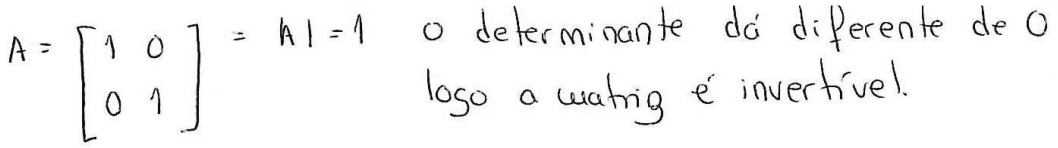


Figura 202. Resposta do grupo G9 à questão 2.2 da ficha 7.

Já outro grupo (G3) apresentou um exemplo que confirma e outro que não confirma a afirmação, não indicando se esta era verdadeira ou falsa (Figura 203).

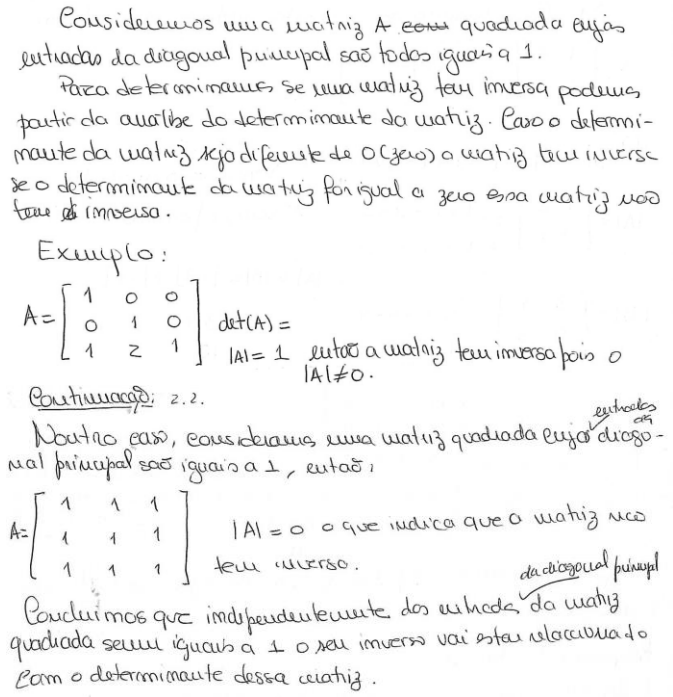


Figura 203. Resposta do grupo G3 à questão 2.2 da ficha 7.

Inicialmente, o debate no seio do grupo G3 serviu para clarificar o conceito de matriz quadrada:

A23: Quadrada não é só duas linhas e duas colunas? Isto é uma matriz quadrada?

A26: Matriz quadrada tem de ter duas linhas, duas colunas, três linhas, três colunas,... Se o número de linhas for igual ao número de colunas, é uma matriz quadrada, A23.

Posteriormente, depois de tentar calcular as inversas de algumas matrizes de ordem três, com uns na diagonal principal, o grupo conclui que estas são sempre invertíveis. Os alunos consideraram, porém, que era melhor clarificarem com a professora antes de tomar uma decisão. Para além disso, a inversa das matrizes que calcularam no *software* não correspondia ao que estariam à espera, pois estavam a considerar a inversa como o inverso de cada uma das entradas.

A26: Nós tínhamos, por exemplo, esta matriz, calculámos a inversa e deu-nos. E o nosso problema é que esta também tem, e esta...
P: Conseguem ou não arranjar uma matriz com uns na diagonal principal que não seja invertível?
A26: Pois, não sei. Mas a nossa dúvida não é essa. Esta aqui $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, por exemplo, tem inversa que é 1 sobre 1, 0 sobre 0,... A nossa dúvida é porque é que aqui [entrada a_{31} da inversa calculada no *software*] é -1.
P: Não se esqueçam que a matriz inversa não corresponde à matriz correspondente ao inverso de cada uma das entradas. A inversa desta matriz é aquela que multiplicada por ela dá a matriz identidade.
A26: Isso eu sei.
(...)
P: Mas também podem recorrer ao determinante.
A26, A23: Não sei.
P: Uma matriz é invertível quando o determinante é...
A26: Diferente de zero. Nós temos ali muitas matrizes em que o determinante é igual a zero, então não têm inversa.
P: Mas não se esqueçam que tem de ter 1's na diagonal principal.
(...)
A26: Ó stora já está, já tínhamos feito antes. Encontramos uma em que o determinante fosse zero.
P: Então esta serve para mostrar que esta afirmação é...
A26: Falsa.
A23: Vamos arranjar um caso verdadeiro e um caso falso.

Através do diálogo com a professora, os alunos esclareceram algumas das suas dúvidas, tendo o *software* tido um papel preponderante no caso da inversa, na medida em que alertou os alunos para o erro, mesmo que não soubessem a sua causa. Porém, mesmo parecendo que compreenderam o que se pretendia, a sua resposta final é um pouco ambígua, não se chegando a entender se perceberam ou não que a afirmação é falsa (Figura 203).

Na discussão em grande grupo, começou-se por analisar as respostas dos alunos que apresentaram um exemplo que confirmava a afirmação, tentando-se rebater a conceção, ainda aceite por alguns alunos, de que basta um exemplo para provar que uma afirmação é válida num certo universo.

> P: O grupo G5 apresentou uma matriz que tem 1's na diagonal principal, mas não escreveu mais nada. A que conclusão chegaram?
> A25: O determinante dá diferente de zero.
> P: Então, se o determinante dá diferente de zero a matriz é?
> A25: Invertível.
> P: O grupo G2 também apresentou um exemplo de uma matriz que confirmava a afirmação. Será que através destes exemplos posso concluir que uma matriz com uns na diagonal principal vai ser sempre invertível?
> Algumas vozes: Não.
> P: Porquê, A21?
> [A21 não responde]
> P: Porque é um exemplo, ...
> A21: Um caso concreto.
> P: Voltamos sempre ao mesmo, um exemplo não mostra que a afirmação é sempre verdadeira. E no grupo G3 arranjaram um exemplo que verifica a afirmação e outro que não verifica. Que conclusão tiraram?
> A26: Concluímos que o determinante estava sempre associado ao inverso.
> P: Estava associado a uma matriz ser ou não invertível. Então, se o determinante for zero, a matriz ...
> A26: Não tem inversa.
> P: E se for diferente de zero?
> Alguns alunos: Tem inversa.
> P: Então, que conclusão é que tiraram? A afirmação é verdadeira ou falsa?
> Alguns alunos: É falsa.
> P: Arranjaram um exemplo em que as entradas eram todas iguais a 1 e o determinante era zero, logo a matriz não é invertível.
> A17: Nós fomos logo diretos.

Na questão 3, todos os grupos chegaram à conclusão que a matriz dada era invertível. Para além do grupo G6, que se limitou a uma resposta bastante sintética (Figura 204), todos os outros realizaram uma análise individualizada, em maior ou menor profundidade, de cada um dos raciocínios apresentados. Por exemplo, no caso da resposta do Luís, a maioria dos grupos argumentou de forma semelhante ao grupo G7: "Ter zeros na diagonal principal não obriga que a matriz seja singular", acrescentando o grupo G8 que "seria verdade se a matriz fosse uma matriz triangular". Contudo, o grupo G5 demonstrou estar em conflito com a evidência da matriz ser invertível e o facto de considerarem válida a resposta do Luís pois, embora tenham referido que "os raciocínios apresentados são falsos porque a matriz é invertível", consideraram que "A

resposta do Luís podia estar certa porque a matriz singular tem elementos nulos na diagonal principal".

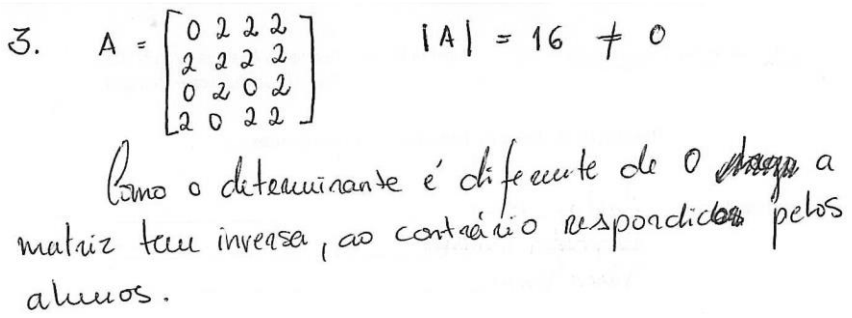


Figura 204. Resposta do grupo G6 à questão 3 da ficha 7.

Relativamente à resposta da Júlia, que também consideraram incorreta, a maior parte dos grupos referiu o facto do algoritmo utilizado só se aplicar a matrizes de ordem três (Figura 205). No entanto, o grupo G3 tentou fazer uma adaptação da regra de Sarrus para determinantes de ordem quatro (Figura 206), mas não teve em conta que assim continua a não contemplar todos os produtos elementares possíveis. Houve ainda grupos que se focaram apenas no valor do determinante ou na conclusão da Júlia, referindo: "Calculou mal o determinante pois é igual a 16 e diz que a matriz não é invertível, o que está errado" (G2).

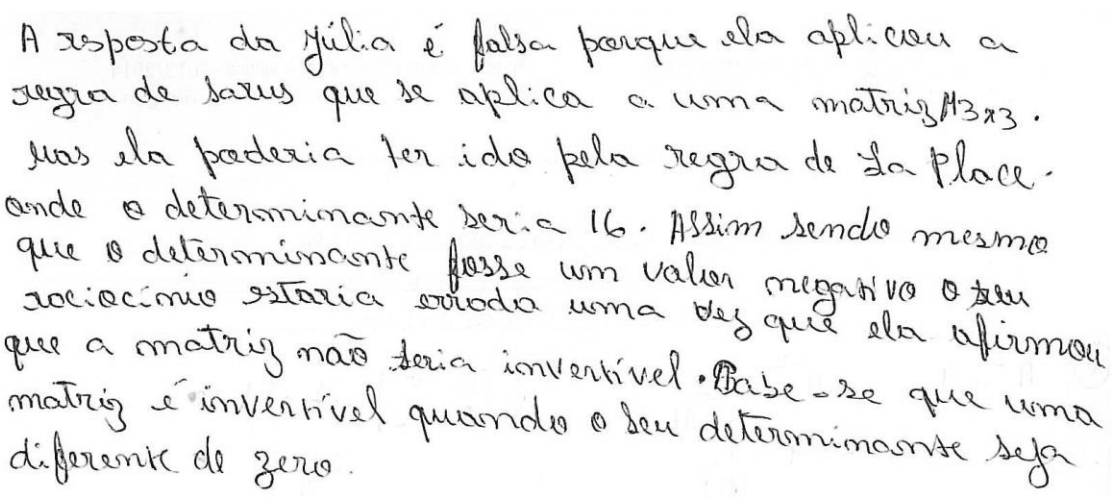


Figura 205. Resposta do grupo G8 à questão 3, referente ao raciocínio da Júlia, da ficha 7.

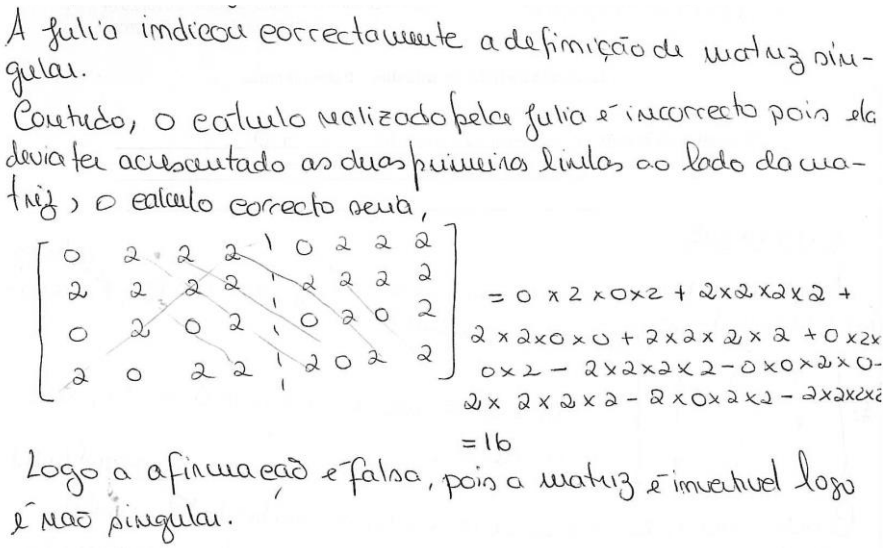


Figura 206. Resposta do grupo G3 à questão 3, referente ao raciocínio da Júlia, da ficha 7.

No caso da resposta de Maria, a maior parte dos grupos conseguiu concluir que ela se enganou no cálculo do determinante e apontaram, essencialmente, o facto de não ter chegado a uma matriz triangular para poder calcular o determinante pelo produto dos elementos da diagonal principal (Figura 207). Contudo, não se aperceberam que também não trocou o sinal do determinante das duas vezes que trocou linhas.

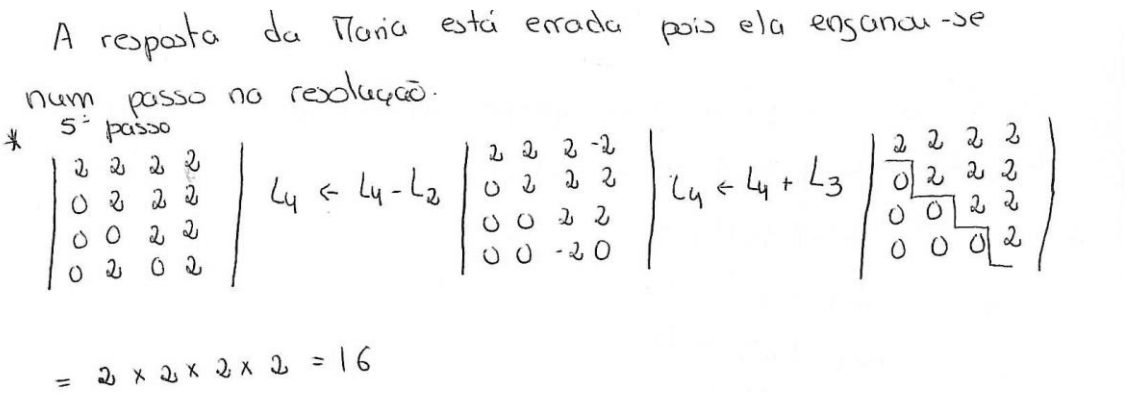


Figura 207. Resposta do grupo G9 à questão 3, referente ao raciocínio da Maria, da ficha 7.

Relativamente à resposta da Cristina, todos os grupos tiveram a perceção de que no seu procedimento havia algo incorreto, pois sabiam que a matriz era invertível. Assim, alguns grupos apenas referiram esse facto: "Diz que a matriz não é invertível, o que está errado" (G2), e outros grupos identificaram o método utilizado: "aplicou o teorema de Laplace, mas não continuou o teorema" (G7), não completando nenhum deles a resolução. Esta situação pode dever-se a dificuldades na aplicação do próprio teorema, como se pode constatar pelo diálogo no grupo G2:

A21: Podes fazer pelos cofatores, havia três formas de fazer.
A16: Sinceramente não me lembro.
A22: E podemos calcular com os cofatores?

A21: Com os cofatores podes calcular determinantes.
A16: Podes, já vimos no acetato.
A22: Pois, mas tínhamos de ir buscar o que estava na linha e depois era só... mas aqui não fica... [Alguma tentativa de interpretação do teorema de Laplace.]
A21: Calcular o determinante pelo teorema de Laplace é mais fácil. Tu tens de escolher... tu não podes escolher um assim do nada. Só tens que fixar uma das coisas, ou fixas uma coluna e mudas as linhas ou fixas as colunas e mudas as linhas. É assim uma coisa...
A22: É sim.

No debate em grande grupo complementaram-se, com a ajuda dos alunos, as respostas dadas e, no caso da resposta da Cristina, terminou-se a resolução pelo teorema de Laplace.

5.1.2.2. O ensino do tema Sistemas de equações lineares

As aulas relativas ao tema Sistemas de equações lineares iniciaram-se pela discussão em grande grupo sobre as respostas às questões 1, 2, 3, 4 e 5 do teste diagnóstico (Anexo).

Começou-se a análise das respostas do teste diagnóstico pela questão 2, interrogando-se os alunos sobre se algum dos sistemas seria a tradução do enunciado. O aluno A17 indicou que considerava que a resposta $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ estava correta, mas o A5, embora concordasse com essa indicação, acrescentou que o sistema $\begin{cases} x+y=9 \\ y=2x \end{cases}$ também estava correto. Então a professora perguntou se os sistemas eram equivalentes, recordando este conceito.

P: Os dois sistemas $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=9 \\ y=2x \end{cases}$ são equivalentes?
A5: Não. Não são.
P: O que significa dois sistemas serem equivalentes?
A17: São iguais, iguaizinhos.
A5: As equações serem iguais.
Alguns alunos: Não.
P: Quando resolvem um sistema, costumam colocar um sinal de equivalente entre as várias etapas da resolução. O que é que significa isso, porque é que colocam o sinal de equivalente?
[Os alunos não respondem]
P: Os sistemas equivalentes têm a mesma...
Alguns alunos: Solução.
P: Se os sistemas tiveram a mesma solução são equivalentes. Então será que os sistemas são equivalentes?
A5: Já sei. No último, dá 3 raparigas e 6 rapazes.
Alguns alunos: Sim, dá isso.
P: E este [apontando para o primeiro]?
Alguns alunos: $x=0$ e $y=9$.

P: Então podem concluir que os sistemas são equivalentes?
Alguns alunos: Não.

A professora sugeriu, ainda, que os alunos, utilizando o *Microsoft Mathematics*, representassem graficamente as equações dos sistemas, de modo a verificarem que ambos dão origem a retas concorrentes, mas que se intersetam em pontos diferentes. Compararam também graficamente o mesmo sistema em etapas diferentes de resolução, por exemplo $\begin{cases} x+y=9 \\ y=2x \end{cases}$ e $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$, concluindo que obtêm o mesmo ponto de interseção. Voltando ao enunciado, recomendou-se que os alunos identificassem o que representava o x e o y e fez-se a leitura comparando-a com as equações escritas, chegando assim os alunos à escolha da resposta correta.

Aproveitando as respostas de A20 às questões 1 e 3, que resolveu os sistemas recorrendo ao método de eliminação de Gauss, introduziu-se a notação de sistema na forma matricial e a resolução de sistemas por este método. Com base no sistema da questão 3, questionou-se se haveria outra forma de o resolver para além do método da substituição e do método de eliminação de Gauss, já utilizados pelos alunos, e observou-se como o resolver recorrendo à matriz inversa, por analogia com a resolução de equações. Sugeriu-se também aos alunos que representassem graficamente as equações dos sistemas, tanto da questão 1 como da 3, usando o *Microsoft Mathematics* de forma a confrontar a posição relativa das retas/planos com o tipo de sistema.

Na questão 3, um dos conflitos que surgiu foi se não seria mais adequado resolver o sistema em vez de substituir a solução, concluindo-se pelo diálogo estabelecido que ambos os métodos estavam corretos, mas que este último seria mais eficiente.

A5: Eu não consigo perceber. Não sei o que fizeram aí.
A2: Substituiu-se o x, y e z por 3, 0 e 1.
P: Toda a gente percebeu a explicação de A2?
Alguns alunos: Sim.
P: Mas isto está bem ou está mal?
Alguns alunos: Está mal.
P: Está mal porquê?
A22: Porque devia ter feito as contas, não era substituir, substituiu mas...
Outro aluno: Não era assim.
A22: Pois, não era assim.
P: Acha que é mais correto resolver o sistema?
A22 e outros alunos: Sim.

P: Então estará mais correto resolver do que substituir diretamente, toda a gente concorda?
A1: Não. Porque substituíram diretamente. Ali temos uma igualdade, supostamente o da parte da esquerda é igual ao da direita.
A14: Eu concordo.
P: A1, explique melhor para ver se consegue convencer os outros.
A1: Por exemplo, aquele $x + y - 2z$, se substituir aquilo é verdadeiro a parte da esquerda é igual à da direita.
P: O que é que quer verificar?
A1: Se substituindo aquilo dá 1, se a outra dá 3 e a outra 2.
P: Ou seja, se é solução.
A1: Exato.
P: O que A1 está a dizer é que foi substituir os valores e viu se era verdade ou não, em cada uma das situações. E chegou à conclusão que ...
A1: A de baixo não é, porque o 4 não é igual a 2.
P: Então, que conclusão é que tiram, que é ou não solução do sistema?
A1: Que não é solução.
P: E será que alguém mais está convencido?
(...)
P: A22, o que é que pensa agora depois da explicação de A1?
A22: Há bocado estava enganada porque não tinha visto que era dado o (3,0,1).
P: Qual é a questão? Aqui não diz resolva o sistema, diz verifique se é solução. A primeira [resolução pelo método de substituição] está mal?
Alguns alunos: Não.
P: O que é que fizeram? Resolveram o sistema. Não quer dizer que esteja mal. E a segunda, A5?
A5: Está bem, já percebi.
(...)
P: Qual é mais rápido, resolver o sistema ou substituir diretamente?
Alguns alunos: Substituir diretamente.
P: Estão ambas corretas e não é preciso resolver o sistema.

A notação usada na representação do conjunto-solução também foi um dos assuntos discutidos, em virtude de A20 ter escrito $\{1,2,1\}$ como conjunto-solução do sistema da questão 3.

A2: Não está bem representado.
P. Porquê? O que é que falta?
A19: Parêntesis.
P: Parêntesis onde?
A19: Antes do primeiro 1 e ao acabar no 1.
P: Exato, tente explicar.
A19: Porque assim dava tudo números e não um vetor.

Na questão 1, analisaram-se as respostas dadas, e os alunos foram assinalando alguns dos erros, discutindo-se a sua correção. Por exemplo, na questão 1b) um aluno tinha chegado à

conclusão de que o sistema era impossível, porque obteve $0 = 0$ numa das equações e outro, resolvendo pelo método de Gauss, concluiu que o sistema era possível e indeterminado.

A22: Eu acho que a primeira está bem, só que...
Posso concluir que o sistema é impossível?
A1 e outros alunos: Possível indeterminado.
P: Porquê?
A22: Tem solução, dá para resolver, mas não dá para concluirmos nada. Porque a equação de cima não dá para fazer através da de baixo. Logo não dá para concluir.
A19: Não temos uma solução única.
P: Quem fez a representação gráfica obteve o quê?
A19: Uma reta.

Os alunos chegaram, ainda, à conclusão que a resolução pelo método de Gauss estava igualmente correta e, com a colaboração deles, a professora escreveu o conjunto-solução no quadro. Para além disso, aproveitou-se o exercício para explicar como é que se pode classificar o sistema comparando as características da matriz dos coeficientes com a matriz ampliada e o número de incógnitas.

Na questão 2 confrontam-se os alunos com as várias representações gráficas convidando-os a escolher as opções corretas, aproveitando-se ainda para clarificar o conceito de equação linear, na medida em que algumas das representações eram parábolas e não retas. Utilizaram-se igualmente algumas intervenções que expressavam ideias incorretas para clarificar conceitos. Por exemplo, o aluno A5 começou por considerar que as interseções das retas com os eixos podem ser consideradas soluções do sistema; todavia, face ao questionamento da professora, parece conseguir ultrapassar a dificuldade.

A5: O primeiro não é impossível [retas paralelas atravessando ambos os eixos].
P: Porquê?
A5: Porque ele marca aí 4 pontos.
P. Estes aqui [aponta para a interseção com os eixos]?
A5: Sim.
P: Mas são interseção das retas com o quê, A5?
A5: Ah! Pois com os eixos.
P: A interseção com os eixos conta como solução?
A5: Não. Então, esse é verdadeiro porque as retas nunca se vão tocar.

Com a Ficha de trabalho número 8 – Sistemas de equações lineares – Parte I, pretendia-se que os alunos trabalhassem o conceito de solução (questões 1, 2 e 5), averiguassem, variando o número de equações e de incógnitas, o tipo de sistemas que poderiam obter (questão 3) e relacionassem o tipo de sistema com a sua representação gráfica (questão 4).

Na questão 1, a dificuldade inicial dos alunos foi novamente saber o que eram sistemas de equações equivalentes, pelo que se promoveu um pequeno debate em grande grupo para clarificar o conceito.

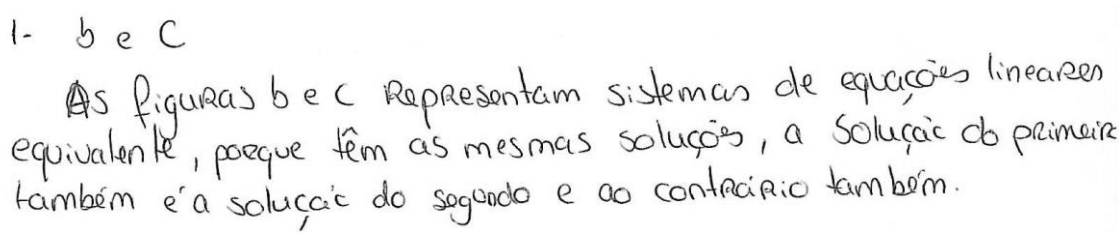
A6: O que é isso, stora?
P: Falamos no assunto há bocado. Então o que é que são sistemas de equações lineares equivalentes?
A18: Serem iguais.
P: E que significa isso?
A18: Não sei explicar.
A6: Intersetam-se no mesmo ponto?
A5: Tem a ver com um exercício que resolvemos.
A15: É totalmente igual.
P: O que é que é totalmente igual?
A15: Tem de se intersetar no mesmo ponto.
P: Quando falam na interseção no mesmo ponto estão a referir-se à solução.
A5: A solução de um sistema é igual à do outro.
P: Isso mesmo, A5. Dois sistemas são equivalentes quando têm ambos exatamente o mesmo conjunto-solução.
A23: Mas eles intersetam-se todos num ponto.
P: Em todas as figuras? E quando se intersetam, o ponto é sempre o mesmo?

Embora se clarificasse o conceito, alguns alunos continuaram a não perceber o objetivo da questão, mas com a explicação da professora aos grupos, indicando o que tinham de procurar nos gráficos, essas dúvidas pareceram no geral ter sido ultrapassadas. Consequentemente, à exceção dos grupos G1 e G7 que apenas indicaram duas figuras, todos os outros grupos apontaram corretamente as três figuras que representavam sistemas de equações lineares equivalentes.

O grupo G1 não abarcou todas as situações, em parte porque não se gerou a devida discussão com o alerta do aluno A22 sobre a figura d).

A20: Pelo que a professora disse, têm de ter a mesma solução, b) e c) têm a mesma solução.
A22: Mas olha, a d) também tem.
A20: Mas só são duas retas, não são três.
A22: Ah, pois não.
A17: [Lê aos colegas uma definição que consultou] Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando têm as mesmas soluções, ou seja, toda a solução do primeiro é também solução do segundo. Reciprocamente, cada solução do segundo é também solução do primeiro.

É assim, com base nesta definição, que aproveitam para justificar a sua escolha para os sistemas equivalentes. Como A22 não contestou a resposta de A20, acabaram por só considerar duas das situações (Figura 208).


1- b e c

As figuras b e c representam sistemas de equações lineares equivalente, porque têm as mesmas soluções, a solução do primeiro também é a solução do segundo e ao contrário também.

Figura 208. Resposta do grupo G1 à questão 1 da ficha 8.

No debate em grande grupo, ao analisarem as várias respostas, os alunos completaram as respostas dos colegas e as suas justificações.

Pelos comentário dos alunos, na questão 2, houve algumas dúvidas iniciais – "Eu não faço a mínima ideia" (A16), "Eu não sei fazer isso" (A8) e "Não percebo nada disto" (A6), pois não parecia ser um tipo de exercício que estivessem habituados a resolver. Porém, com as explicações da professora e, em alguns casos, os conhecimentos de outros elementos do grupo, a maioria dos grupos (7 grupos) apresentou uma resposta correta. Uns conseguiram ser mais rápidos, outros após várias tentativas conseguiram chegar ao sistema pretendido, às vezes com o apoio do *software*.

Explicitando, no grupo G3, embora o aluno A6 inicialmente não estivesse a compreender o objetivo da questão, após a explicação dos colegas, acabou por encontrar um exemplo. Mesmo assim, tiveram necessidade da aprovação da professora para confirmar a correção da sua resposta.

A6: Não percebo nada disto.
A23: x tem de dar 2 e y tem de dar 1. Temos de dar um exemplo.
A6: Exato, que dê isto. Podemos fazer uma coisa simples. 4 a dividir por 2 dá 2. Então mete aqui $2x = 4$, certo. E agora y ... pode-se meter $3y = 3$, não é?
(...)
A6: Mesmo assim pode estar mal.
(...)
A6: Nós fizemos assim, não sei se está bem.
P: Apenas têm de confirmar se o vosso sistema tem como única solução (2,1).
A6: É, porque $x = \frac{4}{2}$ fica igual a 2 . E $y = \frac{3}{3}$ dá 1.
P: Então está correto.
A23: Às vezes nós é que complicamos as coisas.

Na discussão em grande grupo, confrontados com os sistemas dos vários grupos, os alunos identificaram facilmente os que não obedeciam à condição dada. Por exemplo, a resposta do grupo G8 (Figura 209) começou a ser comentada pelos elementos de outro grupo, tendo os argumentos sido aceites pelos elementos do grupo que errou.

A22: O primeiro está mal (Figura 209).
P: Porquê?
A22: A resolução não dá (2,1).
A17: Não dá esse ponto.
P: E porque é que não dá?
A22: Porque fiz os cálculos.
P: Que cálculos fez?
A20: Ali, se pusermos 2 no x, fica 2 vezes 4 dá 8 -1 dá 7.
P: Ou seja, se substituirmos o x por 2 ali dá 8 e se substituirmos o y por 1 dá 8-1, logo a segunda é uma proposição falsa. Então, o que acontece aqui, A18 [elemento do G8], na primeira equação, ao substituir torna-se uma proposição verdadeira?
A18: Sim.
P: E a segunda?
A18: Não.
P: Então quer dizer que o (2,1)...
A18: Não é solução.
P: Então, para (2,1) ser solução o que é que tem de acontecer?
A26: Tínhamos de ter $4x - y = 7$.
A18: Podíamos ter $2x - y = 3$?
P: Têm de verificar se a solução é única pois podem escolher a segunda equação de forma a que dê uma infinidade de soluções.

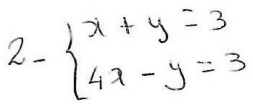


Figura 209. Resposta do grupo G8 à questão 2 da ficha 8.

Após este diálogo, o grupo G5 afirma que a sua resposta está igualmente incorreta, indicando que não dá a solução pretendida e, com a ajuda da turma, reformula as suas equações.

Na questão 3, em que se pretendia que os alunos indicassem um exemplo de sistema para cada uma das situações dadas, sugeriu-se que também representassem graficamente as equações do sistema. Na Tabela 18 apresentam-se as frequências de alunos em cada um dos tipos de resposta, bem como de não respostas.

Os alunos tiveram mais dificuldade em apresentar uma resposta correta no caso do sistema possível e determinado e do sistema impossível, quando estão em causa sistemas de

duas equações lineares a três incógnitas (alínea c)), pois apenas um grupo apresentou um exemplo correto de sistema impossível e somente três indicaram que não existiam sistemas possíveis e determinados nas condições dadas. Neste último caso, o erro pode dever-se ao facto de os alunos considerarem que teriam de apresentar sempre um sistema, embora a professora tivesse alertado para a possibilidade de algum deles não existir. Outra das hipóteses é que se tenham enganado na representação gráfica no *software*, utilizando a opção 2D em vez de 3D, como transparece à frente no debate em grande grupo.

Tabela 68 — Respostas dos oito[1] grupos à questão 3 da ficha de trabalho n.º 8.

Respostas	3a)			3b)			3c)			3d)		
	PD	PI	I	PD	PI	I	PD	PI	I	PD	PI	I
Corretas	8	6	6	7	5	6	3	8	1	6	5	7
Incorretas	—	1	1	—	1	1	3	—	6	—	2	1
Não responde	1	2	2	3	3	2	3	1	2	3	2	1

PD — Possível e determinado; PI — Possível indeterminado; I — Impossível. [1]O grupo G8 não realizou esta ficha de trabalho.

No debate em grande grupo, confrontaram-se os alunos com os exemplos apresentados pelos grupos, solicitando-se que se manifestassem sobre a sua correção e sobre a relação entre a posição relativa das retas/planos em cada situação.

Em alguns casos, o próprio grupo conseguiu apontar o seu erro. Por exemplo, o G6, que na alínea 3a) tinha indicado um sistema possível e determinado em vez de indeterminado, referiu que errou, mencionando o tipo de sistema que indicou.

A19: Está mal [$\begin{cases} x = y \\ y = 4 \end{cases}$, sistema que tinha indicado].
P: Porque é que está mal?
A19: O y vai ser igual a 4.
P: Qual é o conjunto-solução?
A19: (4,4).
P: Então, o sistema não é possível indeterminado?
A19: É possível e determinado. Temos de mudar.

Na questão 3c), para o caso do sistema possível e determinado, a professora começou por interrogar os alunos sobre as respostas contraditórias dadas pelos grupos, para provocar um conflito e fazê-los refletir sobre a situação.

P: Há grupos a dizer que não é possível arranjar um sistema e há grupos que indicam aqueles sistemas. Então, foram eles que não procuraram bem e não conseguiram encontrar?
A22: Não dá mesmo para arranjar.
P: Mas há ali alguns exemplos.
A17: Ah pois há.

A1: Arranjamos uma equação de 3 incógnitas em que o resultado da direita fosse igual ao da esquerda. Imagine que substitui o x por 0, o y por 1 e o z por -3, e aquilo dava dois.
P: Sim, então podemos dizer que ao substituir na primeira equação obtemos uma proposição verdadeira. E o sistema é ou não possível e determinado?
A17: Não é.
P: Analisem lá a situação.
A1: Tinha de ser o dobro, a de baixo ou a de cima.
P: Se a equação de baixo fosse o dobro da de cima, que tipo de sistema tínhamos?
Alguns alunos: Possível e indeterminado.
P: Estamos à procura do determinado. Mas vamos tentar resolver o sistema do grupo G4 [A professora, com base nas sugestões dos alunos, parte da matriz ampliada do sistema $\begin{cases} x+5y+z=2 \\ x+10y+z=4 \end{cases}$ e coloca-a em escada por linhas]. Que tipo de sistema tenho? Já conseguem responder?
A18: Possível e determinado.
P: Toda a gente concorda?
Alguns alunos: Não.
P: Quem é que não concorda? A19, diga lá porquê é que não é possível e determinado.
A19: $Car(A)=2$, $Car(A \mid b)=2$ e o número de variáveis é 3.
P: Então...
A18: É possível e indeterminado.
P: Isso mesmo A18. Ou seja, este é um bom exemplo para o possível e indeterminado.

Analisaram-se os outros sistemas e constatou-se que nenhum deles era possível e determinado. Então, a professora tentou que os alunos tirassem uma conclusão e que a justificassem, aproveitando também para relacionar o tipo de sistema com as suas soluções e as respetivas representações gráficas.

P: Então, é possível ou não arranjar o determinado?
A22: Não é.
P: Porquê?
A18: O número de incógnitas vai ser sempre maior do que...
P: Exato, se nós só temos 2 equações, o número de incógnitas vai ser sempre maior, pois é sempre 3; então, não conseguimos ter um sistema possível e determinado. Além disso, que tipo de planos podemos ter? Se tivermos dois planos concorrentes, qual é a interseção?
A19: Uma reta.
P: Se é uma reta é uma infinidade de pontos ou é só um ponto?
Alguns alunos: Uma infinidade.
P: Se é uma infinidade, o sistema é sempre indeterminado. Quais são as outras duas hipóteses?
A26: Coincidentes.
P: E, nesse caso, qual é a interseção?
A19: O plano.
P: E quanto às soluções?

A26: Infinitas.
A1: Mas nos concorrentes também é indeterminado.
P: Sim, então temos duas hipóteses, se os dois planos forem concorrentes, o sistema é possível e indeterminado, pois temos uma reta. Se forem coincidentes, também é possível e indeterminado, mas graficamente a solução é um plano, certo. Qual é a posição dos dois planos se o sistema for impossível?
A18: Paralelos.
P: Isso mesmo, A18.

Após este diálogo, aproveitou-se para averiguar a correção das respostas dadas no caso do sistema impossível, também para duas equações a três incógnitas, que foi a resposta que originou mais erros. Um dos sistemas que não envolvia equações lineares foi imediatamente descartado, aproveitando-se o erro para relembrar esse conceito.

P: Toda a gente a ajudar. Serão todos impossíveis estes sistemas?
A16: Aquelas não são equações lineares [refere o sistema $\begin{cases} xy + z = 230 \\ zy = x \end{cases}$ do grupo G5].
P: A16 estava a dizer que este não são equações lineares...
A16: Por causa do *zy*, é um produto.
A18: É isso.
P: Não temos equações lineares. Para ser linear tem de ser uma equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ [escreve no quadro], ou seja, neste caso teríamos de ter o correspondente à equação de um plano, cuja equação geral vocês costumam representar por $Ax + By + Cz + D = 0$ [escreve no quadro]. Então, este está eliminado, não serve para o nosso caso. E agora os outros? Verifiquem se algum deles é impossível. Quem tiver aí computador pode experimentar efetuar a representação gráfica. Já vimos que os planos impossíveis têm de ser paralelos.

Esta sugestão ajudou alguns grupos a concluir que o sistema que apresentaram não era impossível. O facto de se terem esquecido de mudar a representação gráfica para 3D fez com que um dos grupos respondesse de forma incorreta, eventualmente porque também não se apercebeu que na representação em 2D o *software* assumia z como parâmetro. Embora não se tivesse aprofundado este aspeto, esse equívoco na escolha, aquando da representação, pode estar na origem de mais algumas respostas incorretas.

A26: O nosso não é impossível. Deu-me dois planos concorrentes.
P: Então é possível e indeterminado. Este está eliminado. Quem é que descobre agora os outros?
A14 e A22: O nosso está mal, nós não tínhamos feito em 3D.
P: Sim, tinham de ver em 3D, e dá planos concorrentes?
A14 e A22: Sim.
P: E o grupo G7, o que é que acontece com o vosso?
A9: Está errado, também dá dois planos concorrentes.

Detetados os exemplos incorretos, procurou-se que o grupo G1 explicasse, através da relação entre as equações, uma forma de verificar que o seu sistema era impossível.

P: A17, o vosso dá ou não? [Sistema apresentado $\begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$]

17: Sim.

P: E porque é que se consegue ver logo pelas equações que o sistema do grupo G1 dá impossível?

A17: Porque é a dobrar assim.

P: Sim. A segunda equação é o dobro da primeira, menos aqui no termo independente. Se este também fosse o dobro, significava que os planos iam ser coincidentes.

Na questão 4, face ao facto de alguns grupos se terem atrasado na resolução da ficha, sugeriu-se que indicassem todas as hipóteses que descobrissem, usando inclusivamente a pesquisa que tinham feito na alínea anterior, mas que não perdessem demasiado tempo pois na discussão em grande grupo, com a contribuição dos vários grupos e caso pensassem em outras hipóteses extra-aula, se poderiam completar as respostas. No geral, os grupos foram indicando possíveis representações e o tipo de sistema em causa, principalmente os casos mais habituais. As respostas, no caso dos planos, foram menos frequentes, não tendo qualquer grupo mencionado todas as possibilidades nos sistemas de três equações a três incógnitas.

No debate em grande grupo, a partir das respostas dos grupos, das representações que tinham sido discutidas no caso da questão anterior e outras reflexões dos alunos, completaram-se as respostas dadas, indicando todas as situações possíveis.

A questão 5 gerou bastantes dificuldades, provavelmente porque os alunos ainda não detêm uma compreensão relacional (Skemp, 1987) do conceito de solução de um sistema.

Numa fase inicial, nenhum grupo apresentou uma resposta totalmente correta, embora alguns grupos, ao analisar os raciocínios apresentados na questão, tenham expressado ideias adequadas.

Nas suas justificações, os alunos analisaram a situação globalmente ou centraram-se em alguns raciocínios, pelo que nem sempre os analisaram todos, atitude que foi preponderante quando concordavam imediatamente com a primeira opção.

O raciocínio da Joana foi aquele que mais grupos (grupos G2, G3 e G7) conseguiram explicar, de forma clara, porque é que não estava correto, eventualmente porque também se basearam na resolução das questões anteriores. Por exemplo, o grupo G2 argumenta (Figura 210):

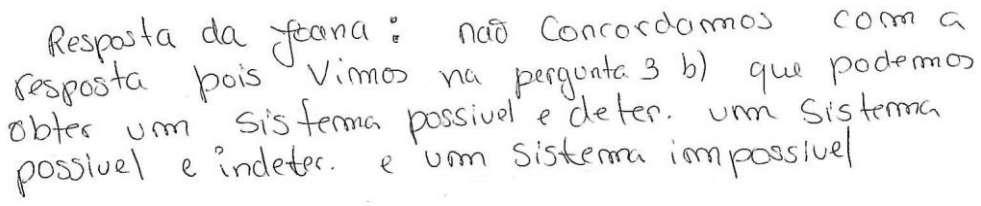


Figura 210. Resposta do grupo G2, referente ao raciocínio da Joana, na questão 5 da ficha 8.

Outros grupos (G8, G4 e G6) concordaram com o raciocínio da Joana, porque centraram a sua análise na veracidade do facto dos sistemas de equações lineares possíveis e determinados terem apenas uma solução, e não sobre se o raciocínio permitia responder à questão (Figura 211).

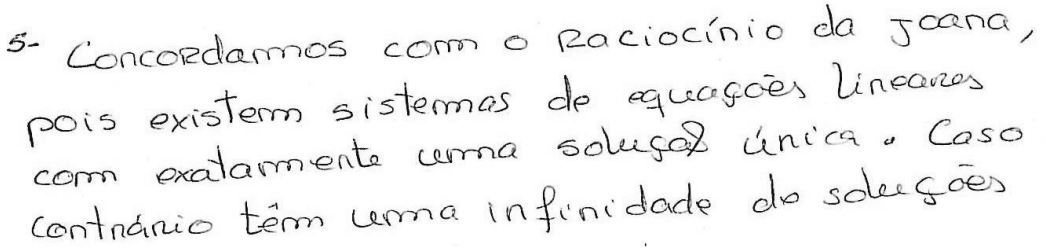


Figura 211. Resposta do grupo G6, referente ao raciocínio da Joana, na questão 5 da ficha 8.

No caso do raciocínio do Manuel e do Joel, apenas o grupo G7 apresentou um argumento válido para os contestar (Figura 212).

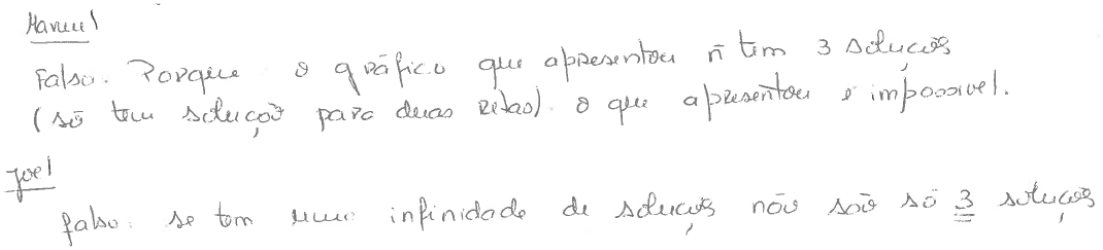


Figura 212. Resposta do grupo G7, referente aos raciocínios do Manuel e do Joel, na questão 5 da ficha 8.

Relativamente à resposta da Flávia, houve três grupos (G1, G2 e G7) que manifestaram a sua concordância com o raciocínio apresentado, que retrata o facto de confundir as coordenadas do vetor solução com o número de soluções (raciocínio não válido que foi identificado na 1.ª fase da primeira parte do estudo). Por exemplo, o grupo G1, embora tenha identificado corretamente os tipos de sistemas que existem, aceita que o sistema possível e determinado possa ter três soluções que correspondem às incógnitas, não questionando a validade deste raciocínio (Figura 213).

P: Existem sistemas de equações lineares com exatamente três soluções ou não?
A22: Existem.
A17: Existem!... Não, A22, é melhor pensarmos melhor.

P: Face a tudo que vocês analisaram até agora, o que é que pensam?
A22: Existe e não existe. Se for possível, existe, se não for possível, não existe.
P: Será que conseguem arranjar um sistema de equações lineares que tenha exatamente três soluções?
A17: Sim.
P: Tentem analisar as respostas que têm aí. Pode ser que vos ajudem.
A22: A afirmação é falsa.
A17: Qual?
A22: Estou a falar da afirmação. Existem sistemas de equações lineares com exatamente três soluções, mas também não existem, entendes, porque se for um sistema impossível ou possível indeterminado, deixa de existir.

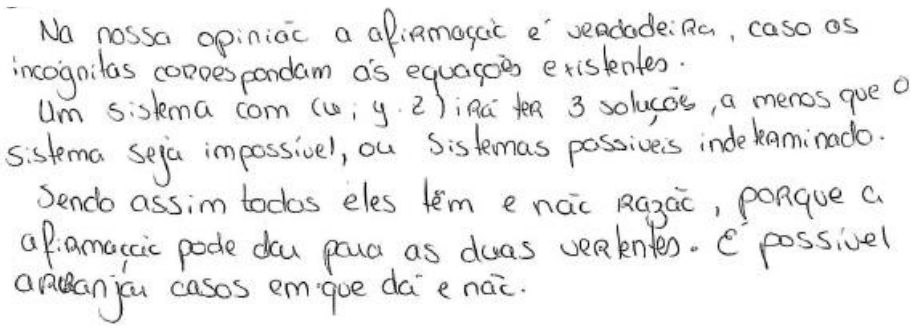

Na nossa opiniãc a afirmaçaic é verdadeira, caso os incógnitas correspondam ás equações existentes.
Um sistema com (x; y; z) irá ter 3 soluções, a menos que o sistema seja impossível, ou Sistemas possiveis indeterminado.
Sendo assim todos eles têm e naic razaic, porque a afirmaçaic pode dar para as duas verentes. É possivel arranjar casos em que dai e naic.

Figura 213. Resposta do grupo G1 à questão 5 da ficha 8.

No debate em grande grupo, analisou-se cada um dos raciocínios apresentados no enunciado, confrontando em simultâneo algumas respostas dadas pelos grupos. Todavia houve alunos que já tinham mudado de opinião e outros que se manifestaram sobre raciocínios sobre os quais não tinham apresentado qualquer observação, situação para a qual pode ter contribuído uma nova reflexão sobre o assunto, possivelmente motivada pelos comentários da professora ao trabalho ou pelo esclarecimento de algumas dúvidas aquando da correção dos exercícios anteriores.

P: Podemos começar por analisar o raciocínio da Joana [Lê o diapositivo]. O grupo G6 diz que concorda com este raciocínio e os grupos G2 e G3 dizem que não concordam. O que é que vocês pensam agora?
A26: Mas ela aí não trata todos os tipos de casos.
P: Que outros tipos é que existem?
A26: Falta o impossível e o possível indeterminado.
P: Ou seja, o A26 está a dizer que um sistema com o mesmo número de equações e de incógnitas pode ser possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível? Toda a gente concorda?
Alguns alunos: Sim.
A19 (do grupo G6): Já percebemos.

No caso do raciocínio do Manuel, já se tinha analisado uma situação semelhante aquando da correção do exercício quatro, referente às representações gráficas, pelo que a discussão foi relativamente rápida.

> P: Vamos analisar o raciocínio do Manuel [Lê o diapositivo]. Aqui também há respostas diferentes. A23, A26 e A6 continuam a concordar que o sistema que o Manuel representou tem três soluções?
> A26: Não, stora, assim o sistema é impossível. Ele diz que as retas não são paralelas, mas não diz que o sistema não era possível.
> P: Ele diz que tem três soluções, que são estas. Concordam que aqui tenho uma solução, aqui outra e aqui outra?
> A26: Sim, professora, são soluções se considerarmos de cada vez duas retas.
> P: E para as três em simultâneo?
> A26 e outros alunos: Não.
> P: Então este sistema não tem três soluções, é impossível.

Passando à análise do raciocínio do Joel, a professora tentou esclarecer com os alunos a diferença entre infinidade de soluções e três soluções. Face à questão que se levantou de alguns alunos considerarem três soluções as incógnitas x, y e z, discutiu-se também o raciocínio da Flávia em simultâneo.

> P: Uns dizem que está correta outros não...
> A19: Nós discordamos do Joel.
> P: Discordam do Joel porquê?
> A19: Porque ter uma infinidade de soluções não é ter exatamente três, ou tem uma ou tem muitas.
> P: Quem é que concorda com o A19?
> A1: Ter três soluções é ter uma de *x*, uma de *y*, outra de *z*.
> P: E isso significa ter três soluções?
> A13: Três soluções é ter três pontos que sejam referentes a essas retas. Mas é um caso impossível ter três soluções.
> P: Ou seja, ou obtemos uma infinidade, que não é o mesmo que três, pois uma infinidade são muitas, ou temos uma ou não temos nenhuma, por isso quer dizer que a afirmação é falsa. Agora a dúvida do A1 tem a ver com a resposta da Flávia, que arranja um sistema com três equações a três incógnitas, resolve e diz que tem três soluções. O que é que ela considera solução? O valor de *x* é uma solução, o de *y* é outra e o de *z* outra. Isso é verdade?
> Alguns alunos: Não.
> A2: Isso é uma única solução.
> P: Isso mesmo, A2, (x, y, z) é um ponto, logo é só uma solução.

Com a Ficha de trabalho número 9 – Sistemas de equações lineares – Parte II, pretendia-se que os alunos aplicassem os sistemas na resolução de um caso ligado à química (questão 1), discutissem se um sistema homogéneo pode ser impossível (questão 2a)), relacionassem a

invertibilidade da matriz com o tipo de sistema (questões 2b) e 3) e praticassem a resolução de sistemas pelos vários métodos estudados.

Os alunos tiveram dificuldades na interpretação da questão 1, pelo que a passagem para a forma de sistema foi realizada em grande grupo com a ajuda da professora, ficando os alunos de resolver extra-aula o sistema respetivo.

As questões 2 e 3 foram discutidas com mais detalhe nas aulas, tanto no grupo como em grande grupo. Face à dificuldade inicial demonstrada pelos alunos na interpretação das questões, optou-se por uma leitura e interpretação conjunta que motivou a clarificação, com a contribuição dos alunos, dos termos e procedimentos envolvidos, como o conceito de sistema homogéneo ou a forma de confirmar se uma dada matriz é invertível.

Na questão 2a), todos os grupos concluíram que a afirmação era falsa, ou seja, que não era possível encontrar um sistema homogéneo que fosse impossível. A justificação já gerou mais dificuldades, pois um grupo não justificou (G6) e três (G1, G4, G7) remeteram para o facto de os termos independentes serem zero. Os outros grupos mencionaram a existência da solução nula (Figura 214).

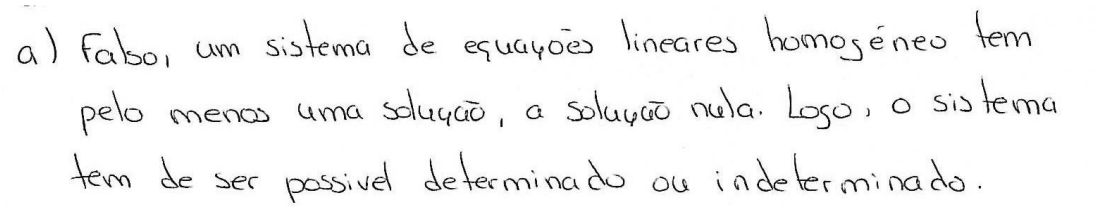


Figura 214. Resposta do grupo G9 à questão 2a) da ficha 9.

Embora essa ideia esteja correta, a justificação não foi plenamente conseguida em alguns grupos (G2, G3, G8) porque limitaram a sua resposta ao caso de retas no plano. Por exemplo, o grupo G3, pela discussão que se realizou no seio do grupo, demonstra ter uma ideia intuitiva, baseada em aspetos debatidos noutras questões, de que o sistema homogéneo não pode ser impossível, mas não soube como justificar e pediu ajuda à professora.

> P: Pensem... Se os termos independentes forem zero, vocês conseguirão arranjar um sistema impossível ou não?
> A26: Eu acho que não, stora.
> P: Porquê?
> A26: Porque, por exemplo, nos outros casos tínhamos que ter sempre o dobro ou o triplo de uma das equações, ou seja, os termos independentes também eram sempre o dobro ou o triplo para não ...
> P: E aqui?
> A26: Fica sempre no mesmo ponto, o zero. Logo já não há hipótese de ser impossível.
> P: Qual é a solução que tem sempre um sistema homogéneo?

A26: Zero. Então, por isso mesmo, se existe sempre não pode ser impossível.

Aparentemente, o G3 tem uma perceção correta da resposta, no entanto na justificação escrita incide apenas no caso de duas retas no plano (Figura 215).

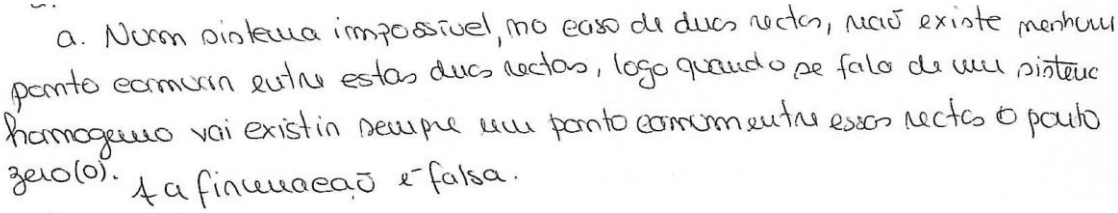


Figura 215. Resposta do grupo G3 à questão 2a) da ficha 9.

No debate em grande grupo, confrontaram-se os alunos com as respostas dadas e todos acabaram por concordar que a solução nula é sempre solução e, como consequência, o sistema nunca é impossível, pelo que não se gerou grande discussão. Apenas se comentou que os grupos que tinham dado uma justificação baseada no plano deviam tentar generalizar a sua resposta para que abarcasse todos as situações.

Na questão 2b), todos os grupos consideraram, corretamente, a afirmação falsa. A maioria dos grupos (G1, G3, G7, G8, G9) justificou a sua resposta com base num exemplo concreto de um sistema cuja matriz dos coeficientes era invertível (Figura 216) e um grupo (G5) referiu o procedimento de cálculo do vetor x com recurso à matriz inversa, embora tenha cometido algumas imprecisões a nível de linguagem (Figura 217).

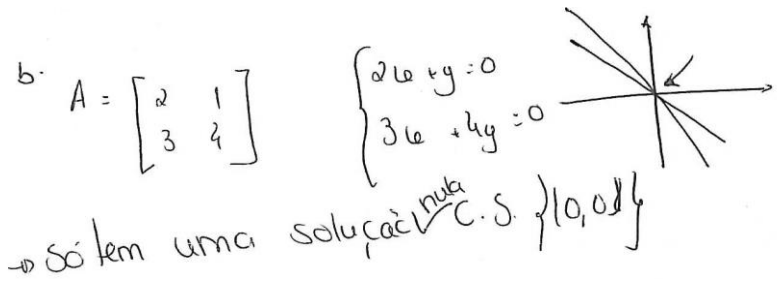


Figura 216. Resposta do grupo G1 à questão 2b) da ficha 9.

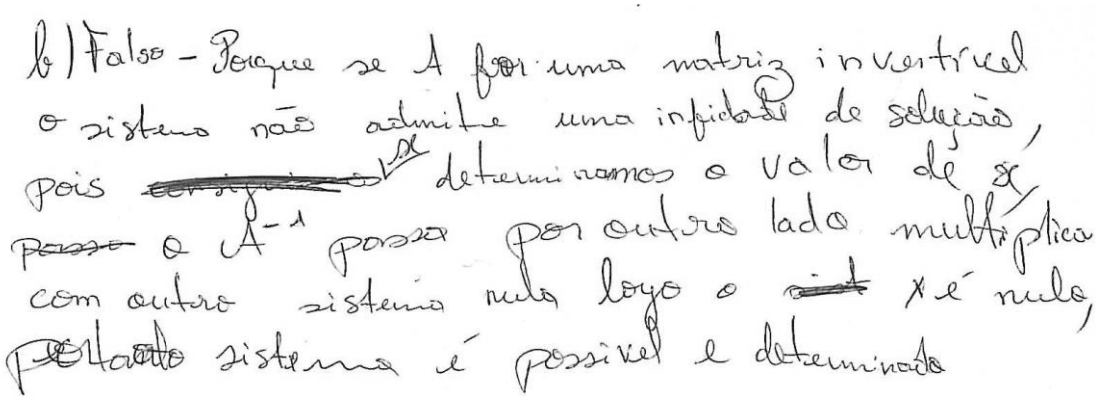


Figura 217. Resposta do grupo G5 à questão 2b) da ficha 9.

Todavia, ainda houve um grupo (G6) que não apresentou qualquer justificação; outro deve ter confundido o conceito de sistema possível e determinado com indeterminado, já que refere: "Falso, porque admite um sistema possível e indeterminado" (G4); e outro grupo (G7) apresentou uma justificação incoerente, na medida em que deu um exemplo de uma matriz que permite concluir que o sistema pode ser possível e determinado, mas o que escreveu na sua resposta não é coerente com esse exemplo (Figura 218).

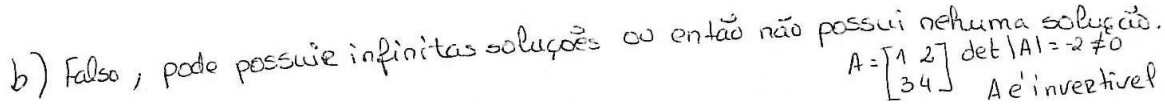


Figura 218. Resposta do grupo G7 à questão 2b) da ficha 9.

O *Microsoft Mathematics*, para além de permitir a verificação dos cálculos e efetuar rapidamente a ligação com a representação gráfica, possibilitou igualmente a experimentação de exemplos variados.

O grupo G2 encontrou facilmente uma matriz que era invertível, porém, como o determinante era negativo, resolveu procurar uma matriz com determinante positivo. Como os casos que experimentaram no *software* continuavam a dar um determinante negativo, os alunos refletiram sobre o algoritmo que estava em causa e conseguiram atingir o seu objetivo.

A21: $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ O determinante é diferente de zero, não importa ser negativo. Mas vamos fazer outro $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.
A16: Não sei se vai dar.
A8: Vai dar outra vez negativo.
A21: -4, -2...
A8: Agora também não ponhas tudo negativo.
A21: 2 e 7, determinante...
A8: Oh, fogo!
A21: Não quereis ficar com um negativo?
A16: Quero um determinante positivo.
A8: Mete todos negativos.
A21: $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$.
A16: Dá -15, olha não percebo...
[Fazem outras tentativas]
A21: Esta multiplicação [diagonal principal] tem de ser maior que aquela [diagonal secundária], de certeza.
A16: Então pões aqui 4 vezes 1,...
A21 Aqueles dois [diagonal principal] maiores.
A16: Pões aqui 4, 2, ...

Tiago: 3...
A16: Então, 3 vezes 2 seis. Ah, sim.
A21: Acho que já dá este $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Já dá 14.
A8: Então, esta é invertível.

Depois de encontrar a matriz pretendida, os alunos consideraram a matriz ampliada do sistema e resolveram o sistema pelo método de eliminação de Gauss, concluindo que este tinha como única solução a solução nula.

No caso do grupo G1, para além do apoio do *software* e da colaboração entre os elementos do grupo, também a partilha de informação com o grupo G3 contribuiu para encontrar uma resposta correta.

A17: Se A for uma matriz invertível, isso significa que o determinante dá diferente de zero.
A22: Sim.
A17: Então tens de arranjar...
A20: Põe aí [no software] $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
A22: Pronto. Esta dá para inverter, certo? Até aí tudo bem.
A17: O determinante dá diferente de zero. 2 vezes 4 é 8, menos 3, dá 5. Dá determinante 5.
A22: Agora temos de passar isto para sistema.
A20: $2x + y = 4\,;\ 3x + 4y = 0$.
[Fazem cálculos e um aluno acompanha no *software]*
A22: Eu acho que assim vai dar: $2x + y = 2\,;\ 3x + 4y = 6$.
A17: Mas porque é que queres tirar a fração afinal? Não estou a entender.
A22 Pois. Nem eu.

A22 procurou encontrar um sistema em que os valores das incógnitas fossem números inteiros, embora sem qualquer objetivo aparente, distraindo-se do foco da questão. Porém, só se aperceberam que não estavam a considerar um sistema nas condições pedidas quando trocaram ideias com o grupo G3.

A17: A26, já fizeste a b)?
A26: Já. Só tens de arranjar uma matriz com inversa.
A17: Determinante diferente de zero. Já está.
A26: Depois arranjas duas equações, por exemplo, $x - y = 0$, ... Tem de ser as duas iguais a zero. Metes no computador e vês se vai dar duas retas. Essas duas retas encontram-se num único ponto, que é o ponto zero. Vai dar para toda a gente igual no ponto zero. Logo a afirmação é falsa.
A22: Pois é, aquilo tinha de ser igual a zero.

Após estes esclarecimento, reformularam as suas equações e, com o apoio do *software*, concluíram que o sistema tinha uma única solução (Figura 216).

A22: Não devias ir aí. Podes ir já ao outro para fazer já o gráfico.
A17: Eu quero ver qual é o ponto de interseção.
A22: Por isso mesmo, é no gráfico.
A17: É igual
A22: $2x + y = 0$, e agora $3x + 4y = 0$.
A17: [Faz o gráfico] Ponto (0,0). Está.
(...)
A22: Mas admite ou não admite uma infinidade de soluções? Não admite.
A17: O quê?
A22: Não admite. Então, só se cruzam num ponto, não é?
A20: Só tens ali uma solução, que é zero.

Como habitualmente, no debate em grande grupo, confrontaram-se os alunos com as respostas dadas. Começando por comentar a resposta do grupo G7 (Figura 218), os alunos contestaram-na, referindo que responderam de outra forma. De realçar que na discussão da alínea anterior já se tinha concluído que um sistema homogéneo nunca é impossível, o que facilitou a abordagem na situação em análise.

A26: Tem sempre uma solução.
P: Certo, não se esqueçam que acabamos de ver que um sistema homogéneo só pode ser...
Alguns alunos: Determinado ou indeterminado.
P: [Questionando o grupo G7] Vocês conseguiram arranjar um sistema possível indeterminado ou impossível em que a matriz dos coeficientes fosse invertível?
G7: Não. [Mas não acrescentam qualquer justificação]
A17: Nós pusemos uma opinião diferente [do G7].
P: Tentem explicar o que fizeram em termos gerais para ver se convencem o G7.
A22: Encontrámos uma matriz e invertemos a matriz. Depois verificámos que o nosso não tinha uma infinidade de pontos.
P: Ou seja, mostraram que existe um sistema cuja matriz dos coeficientes é invertível e que tem uma única solução?
A22: Sim.
P: O G7 talvez não tenha interpretado devidamente, pois se resolverem o sistema homogéneo correspondente à matriz dos coeficientes que indicaram também vão obter um sistema possível e determinado. Verifiquem lá. (...) Então podemos dizer que um sistema nas condições dadas admite sempre uma infinidade de soluções?
Alguns alunos: Não.
P: Então, podemos concluir que a afirmação é falsa, aproveitando os exemplos que o G1 e outros grupos apresentaram.

Como o grupo G7 tinha escrito que o sistema podia ter uma infinidade de soluções, aproveitou-se para clarificar esse assunto e chamar a atenção para a resposta do grupo G5

(Figura 217), que ajuda a complementar a resposta à questão e a concluir que se vai ter sempre um sistema possível e determinado.

P: Será que um sistema nestas condições também pode ser possível e indeterminado?
A26: Quando as retas são sobrepostas não dá só o ponto (0,0).
P: E nesse caso a matriz dos coeficientes é invertível?
A26: Boa pergunta!
P: Pensem lá, a questão é se a matriz dos coeficientes for invertível, eu posso ter um sistema homogéneo possível e indeterminado?
A26: É impossível.
P. Tente justificar.
A26: Arranjar um sistema possível e indeterminado em que a matriz A seja invertível... É tudo impossível.
P. Vamos ver se a resposta do G5 ajuda a justificar.
A25 (do G5): (lê a resposta da Figura 217).
P: Tente explicar melhor. Se A é invertível, o que é que o A25 pode fazer para obter o valor de X?
A25: Passar para o outro lado.
P: E passa como?
A25: Com a inversa.
P: E de que lado do vetor nulo coloca a matriz inversa?
A25: Do lado direito.
P: Pense lá melhor, não se esqueça que a multiplicação não verifica a propriedade comutativa. De que lado de X está a matriz A?
A16: Esquerdo.
P: Então para que lado da matriz nula passa a inversa de A?
A16 e A25: Para a esquerda.
P: E qual vai ser sempre a nossa resposta? [A professora formaliza no quadro essa resolução]
A15: Zero.
P: O vetor nulo. Então, o sistema é sempre possível e determinado.

A questão 3 exigia que os alunos fossem capazes de relacionar a invertibilidade da matriz com o número de soluções do sistema, requerendo uma compreensão relacional dos conceitos (Skemp, 1987). Embora a questão 2 pudesse ter sido um indicador dos aspetos a analisar na questão 3, como aquela só foi discutida após a resolução desta, ela não cumpriu na íntegra esse papel. Assim, a questão 3 gerou bastantes dificuldades, não tendo qualquer grupo conseguido dar uma resposta que envolvesse uma análise completa e alguns grupos não responderam, facto para o qual pode ter contribuído a falta de tempo para investigar todas as situações, já que foi a última questão que alguns grupos analisaram na aula.

Os dois grupos (G2, G9) que apresentaram respostas coerentes e com argumentos válidos, embora incompletas, indicaram exemplos de sistemas, partindo de matrizes dos coeficientes invertíveis e não invertíveis, classificando-os (Figura 219 e Figura 220).

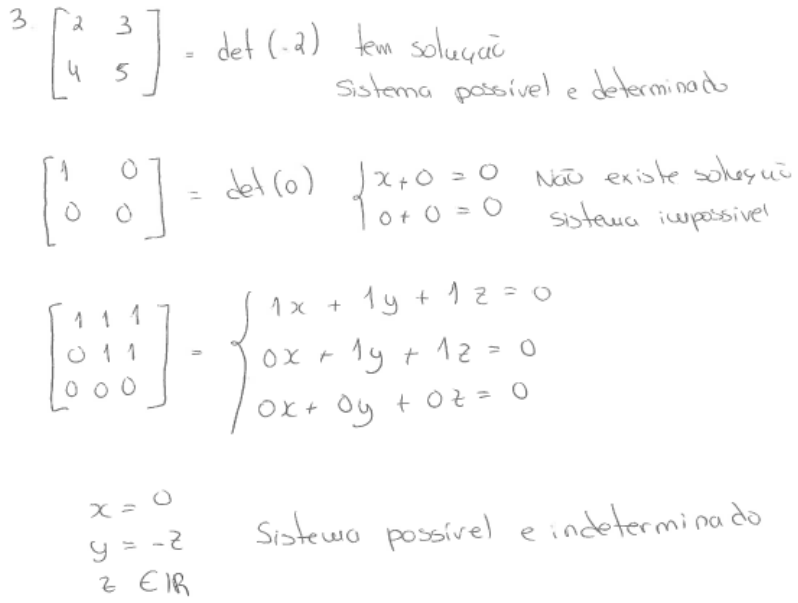


Figura 219. Resposta do grupo G9 à questão 3 da ficha 9.

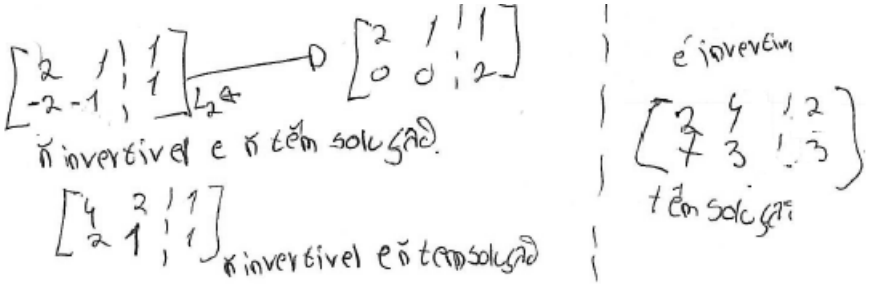


Figura 220. Resposta do grupo G2 à questão 3 da ficha 9.

O grupo G9, embora no primeiro caso não o indique, considerou sempre sistemas homogéneos e apresentou um exemplo para cada tipo de sistema (Figura 219). Não classificou de forma correta o segundo sistema que indicou, parecendo considerar que o facto de obter 0=0 torna o sistema impossível, o que poderá ser um lapso porque no terceiro caso já não comete o mesmo erro. Isso mostra que os alunos não refletiram sobre a resposta dada, pois na questão 2a) tinham concluído que o sistema homogéneo não podia ser impossível. O grupo G2 também partiu de exemplos, mas já diversifica os termos independentes, esquecendo-se porém da situação em que o sistema é possível e indeterminado (Figura 220).

No grupo G2 a partilha de ideias permitiu relembrar que o valor de cada incógnita não é uma solução, e o *software* ajudou a comprovar a solução de alguns sistemas, assim como permitiu investigar mais exemplos rapidamente.

> A16: Investigue a relação que existe entre a invertibilidade da matriz A e o número de soluções do sistema. Então é tipo como em cima.
> A21: Mas o b já não precisa de ser zero.

A16: Não, mas se ela for invertível... Temos que pôr, se ela for invertível, quais são as soluções que temos. Se ela não for, quais são... Se for aquele exemplo...
A21: Aquele do zero.
A16: Do 2, -1, vai ter duas soluções.
A21: Uma solução.
A16: Não, x=2 e y=1.
A21: Isso é uma solução, isso é um conjunto-solução. Não ouviste o que a professora disse?
A16: Sim, tens razão, vai ter uma só solução, certo?
A21: Sim.
A16: E a matriz não é invertível.
A21: Sim, não é invertível.
(...)
A21: Mesmo não sendo invertível, também tem solução na mesma.
A16: Tem solução na mesma? Mas espera, aí temos um conjunto-solução vazio. Mete lá e vamos ver. Mete aí $2x + y = 1$ e $-2x - y = 1$.
A21: Espera aí. [lê a resposta do *software*] "A equação ou o sistema de equações atuais não tem nenhuma solução".
A16: Vês, não é invertível e ...
A21: Então, se não for invertível, não tem solução.
A16: Vamos fazer outro que não seja invertível. Aí, aquela de há bocado que deu zero...

Os alunos exploraram outros exemplos, mas, como não consideram em qualquer deles os termos independentes nulos, o sistema continuou a dar-lhes impossível. Passaram então a investigar o caso em que a matriz é invertível.

A16: Vamos ver outra que seja invertível, sem ser este exemplo.
A21: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$.
A8: Tem inversa.
A21: Tem determinante negativo, mas tem inversa na mesma.
A16: Está, vai ao solucionador, vai $2x + 4y = 2$ e $7x + 3y = 3$. Tem solução.

No debate em grande grupo, para além de se confrontarem os alunos com as respostas dadas, pediu-se-lhes que, com base nas outras questões que se tinham analisado, refletissem melhor na resposta a dar à questão.

P: Com tudo o que já vimos até aqui deve ser mais fácil agora analisar a questão. Temos $Ax = b$, mas podemos usar as ideias anteriores. Temos duas hipóteses: ou A é invertível ou não é. Podemos ver que conclusões conseguimos tirar num caso e noutro. Quem não fez vai pensando que resposta vai dar [A professora escreve no quadro as duas hipóteses: A é invertível, A não é invertível]. Podem também ver as respostas dos vossos colegas e ver se concordam com alguma.
A13 (Grupo 9): No primeiro caso, as nossas equações do sistema eram $2x + 3y = 0$ e $4x + 5y = 0$.

P: Sim, tinham-se esquecido de indicar o sistema. E já agora, vocês aqui querem indicar que o determinante é -2 ou calcular o determinante de -2?
G9: O determinante é -2.
P: Têm de ter cuidado com a notação ao escrever. Então que tipo de sistema têm? Que tipo de sistema é aquele?
A12: Possível determinado.
P: Então, temos que A é uma matriz invertível e nesse caso já conseguimos um exemplo de sistema possível e determinado. Agora a questão é saber se há outras hipóteses ou não. Se o A for invertível, como é que vocês podem resolver esta equação? Assim em termos gerais? Mesmo que os termos independentes não sejam zero.
[Ninguém responde]
P: Ainda há pouco fizemos algo semelhante.
A25: $x = b \times A^{-1}$.
P: Sim, podemos mudar o A para o outro membro como inversa. Mas de que lado é a inversa A25?
A18: Do lado esquerdo.
A25: É $A^{-1} \times b$.
P: Eu tenho uma matriz a multiplicar pela matriz dos termos independentes, quantas soluções vou ter?
Alguns alunos: Só uma.
P: E quando A é invertível temos mais alguma hipótese?
A17: Não.
P: Porquê?
A22: Porque se fosse indeterminado teria mais soluções.
P: Se fosse indeterminado, tinha mais soluções. Mas porque é que com base nesta resolução conseguimos dizer que o sistema só pode ser determinado? O que é que estão a multiplicar aqui? Uma matriz, que é a matriz dos coeficientes certo? E isto é o vetor dos termos independentes, quantas soluções vai dar este produto?
Alguns alunos: Uma.
P: Isso mesmo, vai dar um vetor só. Então, temos uma única solução. Aqui, no exemplo do grupo G2, têm uma situação similar. (...) Não se esqueçam que desta forma estamos a resolver o sistema recorrendo à matriz inversa.

A professora orientou então os alunos para analisarem o caso em que a matriz dos coeficientes é invertível, focando ainda o caso particular do sistema ser homogéneo. No geral os alunos foram dando o seu contributo para o debate.

P: E se A não for invertível, que hipótese é que temos? Olhem para os exemplos do grupo G1, arranjaram sistemas que eram impossíveis. Estão de acordo com o que eles escreveram?
Alguns alunos: Sim.
P: E quando a matriz não é invertível, também podemos ter um sistema possível e indeterminado? Pensem lá na matriz ampliada do sistema...
A26 e A19: As retas podem ser uma por cima da outra.
P: Se forem retas no plano, têm de ser coincidentes exato. Então, arranjem-me um exemplo de um sistema indeterminado. Vocês já fizeram isso.
A26: $2x + 4y = 2$ e $4x + 8y = 4$.

P: Todos concordam que este é indeterminado?
Alguns alunos: Sim.
P: E o que é que dá o determinante da matriz dos coeficientes?
A18: Dá zero.
P: A matriz não é invertível e vocês encontraram um sistema possível e indeterminado, então também temos essa hipótese. Resumindo, se A for uma matriz invertível, temos sempre um sistema...
Um aluno: Determinado.
P: Sim, possível e determinado. Se A não for invertível, podemos ter um sistema...
A18: Impossível.
P: Sim, ou possível e indeterminado. E se o sistema for homogéneo, continuamos a ter estas duas hipóteses no caso da matriz não ser invertível?
A22: Não, não temos o impossível.
P: Exatamente A22.

A resolução da questão 4, que implicava a resolução de sistemas pelos métodos estudados, foi essencialmente resolvida em contexto extra-aula. Embora nem todos os grupos a tivessem resolvido, a maioria deles (7 grupos) teve essa preocupação.

Como os erros e as dificuldades eram particulares, e não se dispunha de tempo suficiente para analisar as suas respostas nas aulas, a professora fez comentários individuais a cada grupo no sentido de ajudar à reformulação e apenas debateu em grande grupo casos pontuais, quando eram erros comuns a alguns grupos. Por exemplo, quando o sistema tinha três equações e duas incógnitas, houve grupos que na matriz ampliada começaram por acrescentar uma coluna de zeros. Discutindo este aspeto em grande grupo, percebeu-se que os alunos pretendiam que a matriz dos coeficientes fosse quadrada, porque era uma situação que consideravam mais de acordo com o habitual e que permitia tentar aplicar mais métodos.

Com a ficha de trabalho número 10 – Sistemas de equações lineares Parte III – pretendia-se que os alunos praticassem, essencialmente, a discussão de sistemas com parâmetros (questões 1b), 2, 3a) e 4), dando-se também algum realce ao conceito de solução (questões 1a) e 3b)).

Apenas as questões 2 e 4 foram discutidas em grande grupo, tendo as resoluções das outras duas sido objeto de comentários por parte da professora, com sugestões de reformulação quando necessário.

A questão 1 foi realizada em contexto extra-aula, tendo apenas quatro dos grupos (G1, G4, G7 e G9) entregue a respetiva resolução. Analisando as respostas dadas, constata-se que na alínea a) os grupos apresentaram procedimentos de cálculo corretos, contudo é visível em dois deles (G4, G9) alguma dificuldade na interpretação dos resultados obtidos. Por exemplo, o grupo

G4 resolveu o sistema pelo método da substituição e relacionou a matriz com o seu determinante, concluindo que o sistema era possível indeterminado, porém, não apresenta o conjunto-solução nem dá propriamente uma resposta quanto ao valor lógico da afirmação (Figura 221). Os outros grupos resolveram corretamente o sistema pelo método de eliminação de Gauss, mas um deles (G9) não apresentou o conjunto-solução, acabando por não referir se considerava a afirmação verdadeira ou falsa.

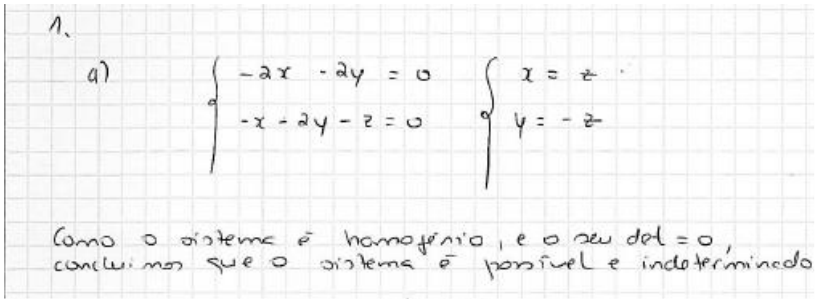


Figura 221. Resposta do grupo G4 à questão 1 da ficha 10.

Na alínea b) não houve, no geral, dificuldades, tendo os quatro grupos concluído que a afirmação era falsa, em resultado de na alínea a) terem constatado que o sistema era possível e indeterminado quando o b é o vetor nulo ou resolvendo novamente o sistema.

Durante a aula, antes de os alunos realizarem a ficha de trabalho, efetuou-se, em grande grupo, a discussão de um sistema. De seguida, propôs-se aos grupos que começassem pela resolução do exercício 2, que tinha diretamente a ver com a discussão de sistemas, sugerindo-se também que fizessem a respetiva representação gráfica no *Microsoft Mathematics* e observassem a posição relativa das duas retas, em função da variação do parâmetro a.

O grupo G3 pareceu ter entendido facilmente, através da representação gráfica, a forma de estabelecer a relação entre a variação do parâmetro a e o número de soluções do sistema, donde optou por dar uma resposta baseada nessa perceção. Porém, como não estavam a contemplar todos os valores de a que traduziam alterações, quando mostraram as suas descobertas à professora, foi-lhes sugerido que experimentassem mais valores para a e que fizessem a ponte com resolução analítica do sistema.

> P: Vocês podem variar os valores do *a*.
> A26: Exato, nós fizemos assim, stora. Metemos para zero, metemos para um, elas deixam de ser concorrentes e passaram a ser coincidentes.
> P: Sim, mas tem de tentar cobrir todas as situações.
> A26: Para valores negativos já experimentámos e dá na mesma concorrentes. Vimos para igual a zero, para maiores que zero e também para valores negativos.
> P: No caso, por exemplo, dos negativos não há nenhum valor específico que provoque alguma alteração?

A26: Já experimentámos outros. Nunca vai dar diferente, stora.
P: E se considerarem $a = -1$, o que é que acontece?
A26 e A6: [Experimentam no *software*] Dá diferente! Dão paralelas.
P: Experimentem também resolver de forma analítica, para fazer a comparação e perceberem como se faz dessa forma.
A26: Como é que nós resolvemos de forma analítica?
P: Então, têm de começar por colocar a matriz em escada por linhas...

O *Microsoft Mathematics* revelou-se um precioso auxiliar para o grupo G3 conseguir efetuar uma discussão adequada do sistema. No entanto, os alunos, quando tentaram realizar, de acordo com a sugestão da professora, um estudo analítico da situação, acabaram por não ser coerentes com a resposta dada anteriormente (Figura 222).

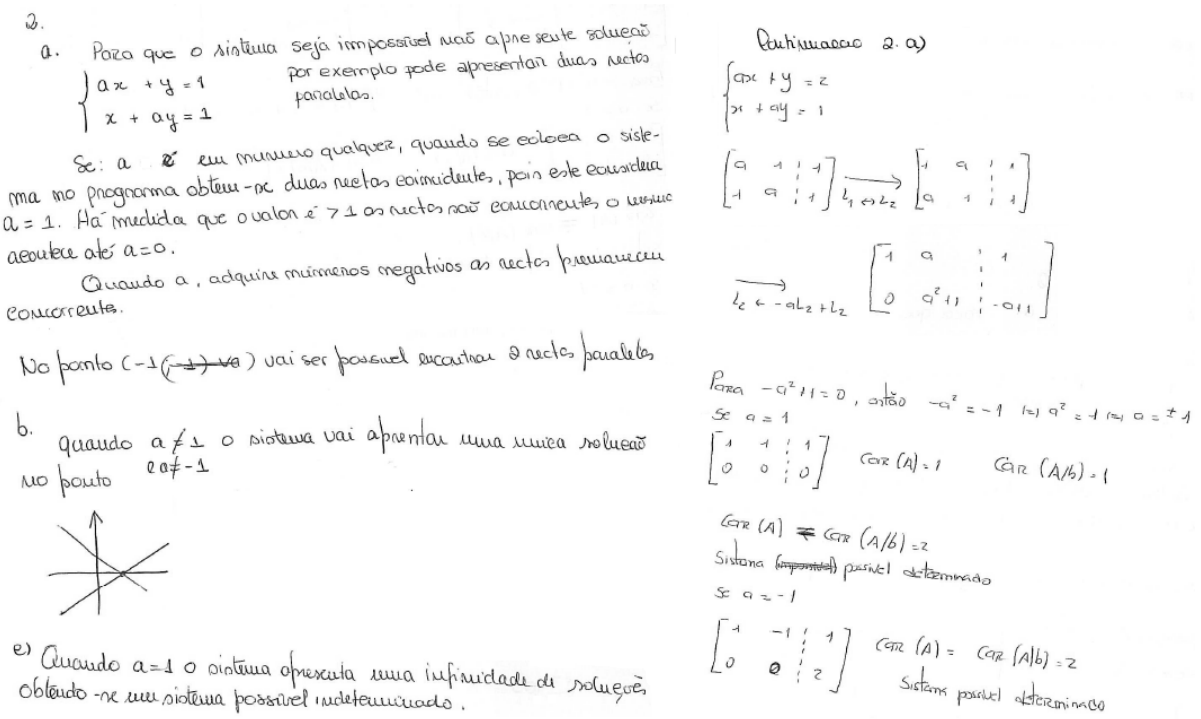


Figura 222. Resposta do grupo G3 à questão 2 da ficha 10.

No grupo G1 trocaram as linhas da matriz ampliada, atribuíram primeiro valores ao parâmetro, colocando depois a matriz ampliada daí decorrente em escada por linhas. No entanto, este processo por tentativas fez com que não contemplassem todo o leque de valores possíveis. Quando tiram dúvidas com a professora, ela esclarece que estavam no bom caminho, mas que tinham de encontrar todas as possibilidades.

A17: Arranjamos para cada uma um exemplo.
P: Sim, mas têm de encontrar todos os valores possíveis nessas condições.
A17: Os valores todos, stora?

P: [Lê a questão para os alunos] Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, ou seja, não é um valor de a, são todas as hipóteses. É como estudar aquele sistema.
A17: Não estou a apanhar nada. Não chega bem dizer...
A22: O que nós estamos a fazer está certo.
P: A17, eu só referi que devem procurar todas as hipóteses.
A17: Está mal. Vês. Nós estamos a fazer se $a = 0$ ...
P: Não quer dizer que esteja mal. Eu estou a perguntar é se têm todas as hipóteses possíveis?
A17: Como é que vamos saber todas as hipóteses possíveis, stora?
P: Quem fizer a representação gráfica no computador pode verificar que, mudando o valor do parâmetro, as retas mudam de posição. Analiticamente podem colocar a matriz em escada por linhas.
A17: Já pusemos. Foi a primeira coisa que nós fizemos.
P: Então pronto.
A17: [Mostra o que fizeram para $a = 0$] Aqui está o sistema. Passamos para uma matriz ampliada e colocamos em escada. Não está bem?
P: Para esse valor está. E o que acontece se a for diferente de zero, continua em escada?

Mesmo com a dica da professora, os alunos continuaram a atribuir valores ao parâmetro e embora tenham tentado uma abordagem diferente quando procuraram respostas para a alínea c) tiveram alguma dificuldade em interpretar esse raciocínio. Para tal situação pode ter contribuído o facto de não terem simplificado $\sqrt{1}$ (Figura 223).

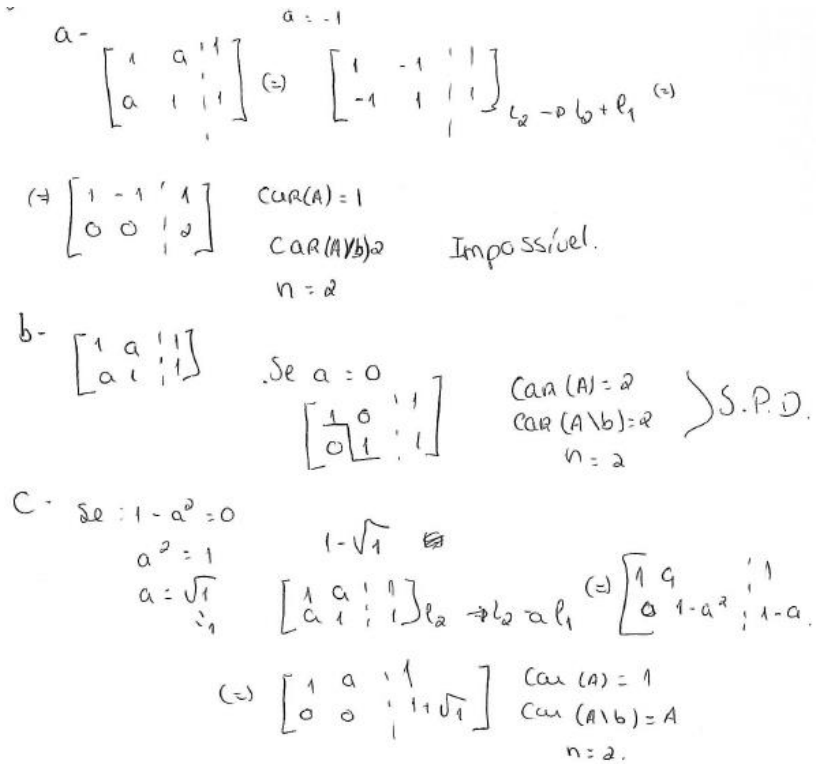


Figura 223. Resposta do grupo G1 à questão 2 da ficha 10.

O grupo G2 começou por atribuir o valor zero a a, classificando bem o sistema nessa situação. Quando consideraram o caso $a \neq 0$, manifestaram inicialmente alguma dificuldade em colocar a matriz em escada por linhas, mas conseguiram concretizar esse objetivo com alguma orientação da professora.

P: Será que a única hipótese é o a ser zero?
A21: Não.
A16: E se for diferente de zero também é.
P: E as características são estas [característica 3] quando a é diferente de zero?
A16: Porque aqui não vai ter zero nenhum, por isso...
P: E, nesse caso, a matriz está em escada?
A16: Pois, é isso, não está.
P: Então têm de colocar em escada.
A16: E como é que vamos fazer? Trocamos linhas e depois?
P: E se multiplicarem o 1 por $-a$?
A16: E como é que é...Ah! Por exemplo a linha 1 multiplica por $-a$ e somamos à dois.
A8: Sim.
P: Agora é só continuar...

Com o apoio de mais algumas sugestões discutidas em grande grupo (excerto do diálogo a seguir), o grupo G2 acaba por conseguir dar uma resposta correta em que abarca todas as situações (Figura 224).

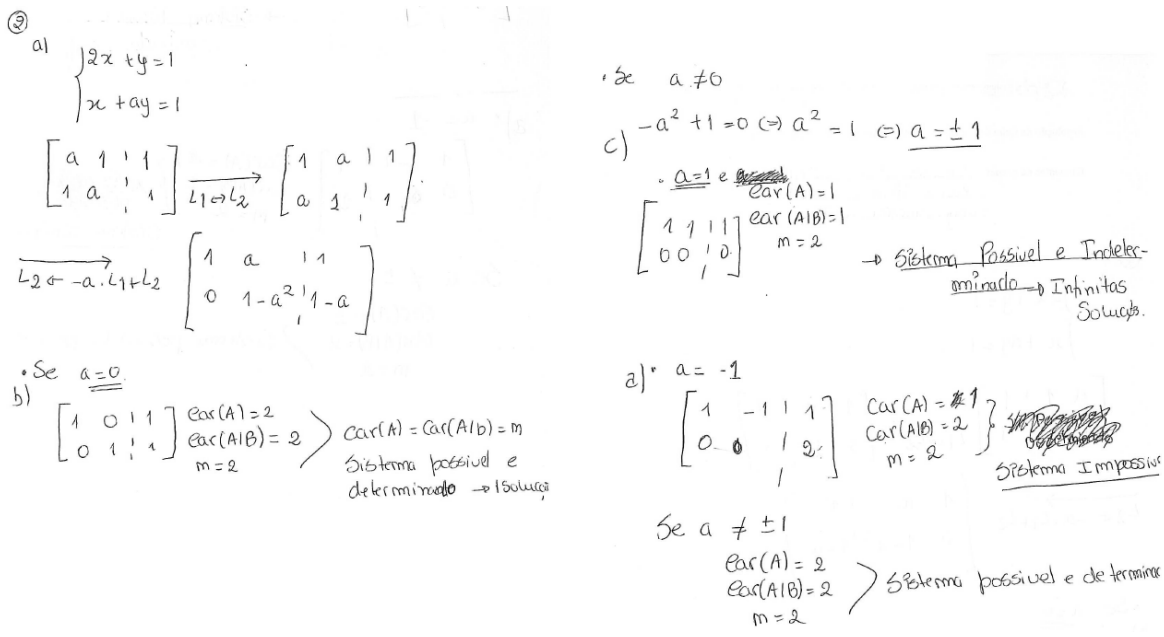


Figura 224. Resposta do grupo G2 à questão 2 da ficha 10.

Como na turma havia vários grupos com dúvidas sobre a forma de colocar a matriz em escada por linhas, por causa do parâmetro a, a professora resolveu pedir aos alunos que fizessem uma paragem na resolução para discutir o assunto em grande grupo.

P: Como é que eu escrevo a matriz ampliada do meu sistema?
Alguns alunos: a,1,1,1. Agora temos que a pôr em escada por linhas.
A16: Trocamos as linhas.
P: A linha 1 troca com a linha 2, que dá mais jeito.
A16: E depois a vezes a linha 1 mais a linha 2.

A professora vai fazendo no quadro de acordo com as sugestões que os alunos foram apresentando. Depois sugere que estudem os valores do parâmetro a que alteram a característica. Alguns alunos acabaram por comentar logo a situação, considerando que $1-a^2$ nunca se anula, pelo que a professora aproveita para questionar os alunos no sentido de perceber as suas dificuldades e encaminhá-los para a resolução adequada.

A16: Nunca na vida nos vai dar uma linha nula.
P: Não? Tem a certeza?
A16: Tenho.
P: Quais são os valores de a que anulam $1-a^2$?
Alguns alunos: Não há.
P: Têm a certeza?
A19: 1
A18: -1.
P: 1 e -1 dizem os vossos colegas. O que é que pensam os outros?
A21: Mas 1 não anula porque vai ficar positivo. Quando é um número ao quadrado fica positivo.
A16: O 1 passa para o outro lado.
P [A professora escreve no quadro $1-a^2=0$]. Quando é que a ao quadrado é igual a 1?
A16: Mais 1 e menos 1.
P: Então, agora pensem quais são os casos que têm de considerar.

Quando se debateu o resto da resolução em grande grupo, confrontaram-se os alunos com extratos das respostas dadas, no sentido de analisar a sua correção. Assim, começou-se por pedir aos alunos que comentassem as respostas do grupo G3 (parte analítica, Figura 222) e do grupo G6 (Figura 225).

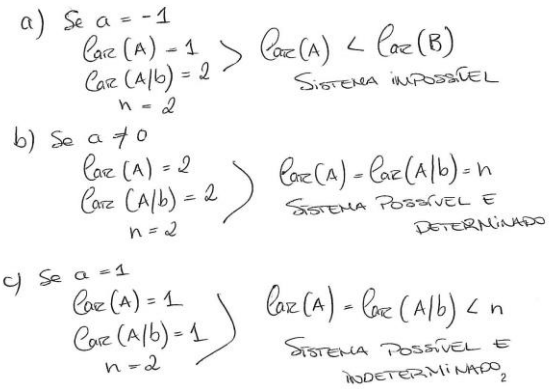


Figura 225. Resposta do grupo G6 à questão 2 da ficha 10.

P: Olhem para estas resoluções e comentem o que é podemos aproveitar, o que é que está bem, o que é que está mal?
A18: Aqui $car(A)=1$, $car(A \mid b)=1$ e $n=2$.
A14: Ó stora, isso está bem?
P: Eu não estou a dizer que está bem. Estou a dizer que está aqui para nós discutirmos o que está bem e o que está mal.
A1: É possível e indeterminado.
P: Podemos começar pelo início. Isto aqui tínhamos discutido na última aula [matriz em escada por linhas]. Não há dúvidas nesta parte?
Alguns alunos: Não.
P: Agora, temos aqui esta hipótese (Figura 222), quando o $a=-1$ será que a característica de A é 1 e a da ampliada é 2? O que é que vos parece?
[Não há resposta]
P: Temos aqui a outra hipótese. É a que diz que se $a=-1$, as características da matriz dos coeficientes e da ampliada são ambas iguais a 2. Os dois grupos não dizem a mesma coisa, não é? Aqui diz que o sistema é possível e determinado, ali diz que o sistema é impossível. Qual delas é que estará correta?
A18 e A14: A primeira (Figura 225).
P: O A18 e o A14 dizem que é a primeira, ou seja, a que considera o sistema impossível. Os outros concordam?
Alguns alunos: Nós também achamos.
A18: Professora, ali está que $car(A)=2$, mas a característica de A não é 1?
P: Pois, provavelmente está mal. Todos concordam que a característica de A é 1?
Alguns alunos: Sim
P: Têm razão, só temos uma linha não nula, portanto a característica é um. E a característica da ampliada, está bem?
A18: Sim, é dois.
P: Temos aqui então um sistema impossível, não é?
Alguns alunos: Sim.

Corrige-se de forma semelhante o caso $a=1$, em que os alunos identificaram facilmente os erros na resposta do grupo G3. Promoveu-se ainda a análise do caso $a \neq 0$, referido pelo grupo G6 (Figura 225), sendo um elemento do próprio grupo a concluir que há, ainda, outros valores de a a excluir para que esteja correto o que escreveram.

P: E agora este caso. Se a for diferente de zero, isto acontece sempre?
A19: Sim, tirando aqueles dois pontos o -1 e o 1.
P: Então se para esses valores é diferente, é porque não acontece sempre. Por isso têm de ter cuidado com os valores que escolhem para não abarcar situações que não querem incluir.
A14: Tem de ser diferente de -1 e 1.
P: Porquê é que é diferente de -1 e 1?
A21: Porque o sistema é possível e determinado.
P: Sim, isso é a resposta que obtivemos, mas porque é que fomos ver este caso?
A18: Para ver se dá diferente de igual a 1 e igual a -1.

A professora, quando pertinente, tinha escrito comentários nos trabalhos dos alunos, no sentido de os ajudar a procurar a resposta correta, pelo que não se considerou necessário debater todas as respostas em grande grupo.

A questão 3 também foi resolvida extra-aula, tendo sido realizada por sete dos grupos. A professora optou por não debater a questão em grande grupo e fazer apenas comentários nos trabalhos em que havia necessidade de efetuar alguma reformulação.

Na alínea a) a maior parte dos grupos, com alguns esclarecimentos que foram solicitando, conseguiu colocar a matriz ampliada do sistema em escada por linhas. Na discussão do sistema, a maior dificuldade foi selecionar os valores dos parâmetros mais adequados, principalmente quando é necessário considerar que o parâmetro é diferente de determinados valores.

Na alínea b), no geral, os alunos não tiveram dificuldades em resolver o sistema; no entanto manifestam alguns problemas em representar o conjunto-solução.

Na questão 4, os alunos conseguiram indicar alguns dos valores a atribuir aos parâmetros, mas ainda manifestaram muitas dificuldades em articular todos os valores essenciais à discussão. Alguns dos erros mais típicos foram indicar a característica da matriz sem esta estar em escada por linhas, substituir simultaneamente o parâmetro *a* por dois valores distintos e não ter em consideração todos os valores possíveis que alteram a característica, o que os levou, por vezes, a não se aperceberem que, quando consideram o parâmetro diferente de um determinado valor, ainda estão a englobar alguns casos especiais com características diferentes.

No debate em grande grupo analisaram-se extratos de algumas resoluções dos alunos, que foram selecionados para permitir debater algumas das dificuldades evidenciadas (Figura 226, Figura 227 e Figura 228).

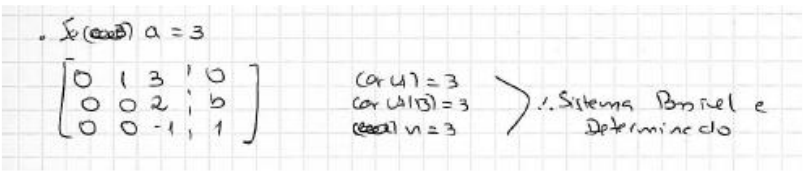


Figura 226. Extrato da resposta do grupo G4 à questão 4 da ficha 10.

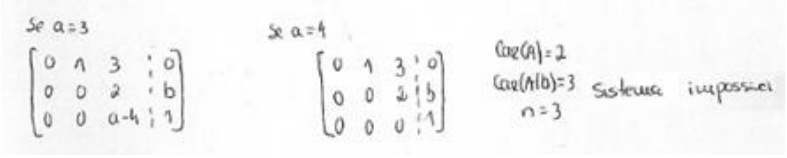


Figura 227. Extrato da resposta do grupo G7 à questão 4 da ficha 10.

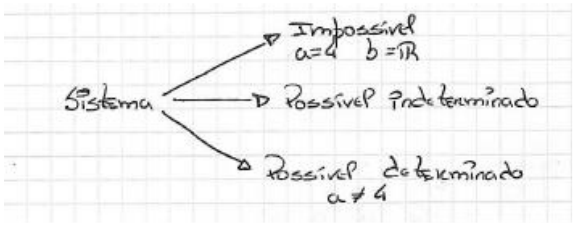


Figura 228. Resposta do grupo G6 à questão 4 da ficha 10.

Durante o debate, para além da análise dos extratos, tentou-se abordar a melhor forma de discutir o sistema e aproveitaram-se também algumas dúvidas que foram ocorrendo para clarificar conceitos.

A16: Tem de se ir primeiro aos do outro lado [refere o lado que tem o parâmetro a].
P: Então, vamos primeiro olhar para o a e ver que valores podem provocar alterações na característica. Esta resposta aqui (Figura 226), o que é que vos parece? Acham que começar por estudar $a = 3$ é uma boa hipótese ou não?
Alguns alunos: É.
P: Considerando $a = 3$, temos esta matriz. A característica da matriz dos coeficientes está bem determinada?
Alguns alunos: Não.
P: Porquê?
A16: Está bem, está.
A18: Não, não está.
P: A18 diz que não está e A16 diz que sim. Quem é que...
A5: Porque isso ainda não está acabado.
A4: Porque o n é 2 ali, não é?
A16: Ó stora, o n é 2, não é 3.
P: Quantas incógnitas temos aqui A16?
A16: O a e o b.
P: Mas o a e o b são incógnitas? Quais são as nossas incógnitas, A16?
A16: x, y e z.
P: Então, quantas incógnitas temos?
A16: Temos 3.
P: Três, exatamente, temos aqui 3 colunas, toda a gente concorda?
Alguns alunos: Sim.
P: Então o n está certo, verdade? O a e o b são parâmetros do sistema.
A16: As características estão mal porquê?
P: Isso foi o que eu perguntei, vocês é que disseram que estavam mal.
A13: Se $a = 3$, a característica de A é igual a 3.
A5: Isso não dá para ver a característica.
A13: Dá.
A5: Não dá.
A5: Isso não está em escada por linhas.
P: A5 diz que não está em escada por linhas, o que pensam vocês?
A5: Se não está em escada por linhas é possível tirar a característica?
A18: Não.
A5: Então isso está mal. Agora é só fazer uma operação elementar, não é stora?
P: Sim, queremos colocar aqui um zero. O que temos de fazer? A5, diga lá.

Com a ajuda das sugestões dos alunos, a professora continuou o processo de transformação da matriz numa matriz em escada por linhas. Quando acabou, os alunos começaram logo a dar sugestões, porque se aperceberam que a característica da matriz dos coeficientes afinal não era três.

A16: E agora a característica de A é dois.
P: E o que é que fazemos a seguir?
A5: Agora temos de ver o b.
P: Resumindo, consideramos $a = 3$, A16 diz que a característica de A é 2 e o A5 estava a dizer que temos de ver os valores que damos a b.Conseguimos já dizer qual é a característica da matriz ampliada?
Vários alunos: Depende de b.
P: Então concordamos com A5, temos de ver que valores damos a b. Verifiquem lá quando é que isto se anula.

Os alunos fizeram os cálculos, concluindo que $b = -2$, analisando-se assim o que acontece quando $b = -2$ e $b \neq -2$. Antes de prosseguir o estudo do sistema, a professora sugeriu que comentassem a parte da resolução do grupo G7, o que acabou por ser feito por um dos elementos do grupo.

A5: Foi o nosso grupo que fez isso, eu explico rápido: $3 - 3$ dá zero, $4 - 4$ dá zero.
P: Ou seja, substituíram ao mesmo tempo o a por 3 e por 4, não foi?
A5: Foi mais rápido, para despachar
Prof: E será que o a pode ser 3 e 4 ao mesmo tempo?
A5: Pois, não tem sentido.

Com base nas sugestões dos alunos, continuou-se o estudo do sistema, agora analisando o caso em que $a = 4$.

A16: Agora temos de ver se o a é diferente de 3.
P: Então, agora A16 estava a dizer que tínhamos de ver para o caso em que a é diferente de 3. Mas esse caso engloba outra situação importante.
A18: $a = 4$.
P: Certo, A18. E o $a = 4$ não provoca aqui uma mudança?
A18: Provoca, dá zero.
A16: Então temos de ver...
P: Temos de ver o que acontece se o a for...
Vários alunos: 4.
P: Exatamente, convém ver primeiro o que é que acontece se $a = 4$. Então, quando $a = 4$, o que é que acontece aqui?
A18: A característica de A é 2.
P: E agora b interfere aqui na característica?
Alguns alunos: Não.
P: Então, neste caso, qual é a característica da matriz ampliada?
Alguns alunos: 3

P: Então o sistema é...
A16: Impossível.
P: O sistema é impossível. Estão a entender até agora?
A16: E agora ainda temos de ver para diferente de 3 e diferente de 4.

Fez-se uma pequena paragem no raciocínio para comentar a resposta do grupo exposta no quadro (Figura 228), que menciona separadamente $a \neq 4$.

P: Exatamente, A16. Agora vimos para igual a 3 e igual a 4. Qual é o problema desta resolução?
A26 e A6: Só viram para $a = 4$ e para $a \neq 4$.
P: Já vimos que no caso $a = 4$, o sistema é impossível. Mas terá sentido analisar $a \neq 4$ separadamente?
A18: Não, porque aí a pode ser 3.
P: Isso mesmo, este abrange o $a = 3$ e, para não o incluir, eu tenho de acrescentar o quê?
Alguns alunos: O diferente de 3.
P: E para a diferente de 3...
A16: A característica de A vai ser 3, a da ampliada 3, n é 3, isto é possível determinado.
P: Já perceberam melhor o exercício?
A16: Já, stora. Não nos podemos esquecer que para determinar as características tem de estar em escada por linhas.

Embora não se tivessem discutido as resoluções de todos os grupos na aula, fizeram-se, como habitualmente, comentários escritos nos vários trabalhos no sentido de ajudar os alunos a refletir sobre os erros e melhorar as suas resoluções.

5.1.3. Os minitestes e a sua revisão

Conforme já foi referido no Capítulo III – Método de investigação, os alunos realizaram dois minitestes sobre os temas em análise e efetuaram posteriormente a revisão de cada um deles, em horário previamente combinado. Ambos eram constituídos por duas questões, cada uma delas com duas alíneas, sendo as perguntas todas de resposta fechada (Anexo VIII). No geral, as questões invocavam conceitos ou procedimentos que, na 1.ª fase da primeira parte do estudo e durante as aulas na segunda parte do estudo, foram identificados como geradores de dificuldades. Caso estas não tivessem sido ultrapassadas, a revisão dos minitestes tinha por intuito que os alunos identificassem os seus erros, refletissem novamente sobre os conteúdos envolvidos e tentassem superar as dificuldades, constituindo-se como uma nova etapa de aprendizagem e cumprindo assim o seu papel formativo.

Aquando da realização dos minitestes, os alunos puderam usar, como apoio, o *software Microsoft Mathematics*, assim como um formulário previamente fornecido.

No que diz respeito à revisão dos minitestes, antes da sua realização, os alunos tiveram acesso ao enunciado e, no próprio dia, foi-lhes fornecida a resolução que tinham efetuado da primeira vez, com notas da professora que indicavam se a resposta estava ou não correta. Neste último caso, eram dadas pistas para que o aluno identificasse o erro e tentasse corrigi-lo, pesquisando informação adicional se necessário. Na revisão podiam ainda consultar todo o material que necessitassem, assim como trocar impressões com os colegas.

5.1.3.1. O miniteste de Matrizes e determinantes e a sua revisão

O miniteste sobre Matrizes e determinantes (Anexo VIII) foi resolvido por 26 alunos, assim como a respetiva revisão. Para analisar o desempenho dos alunos recorreu-se à pontuação obtida aquando da correção do miniteste, classificando-se assim as respostas em *corretas* (cotação total na questão), *parcialmente corretas* (com pontuação inferior/superior ou igual a metade da cotação total da questão, mas inferior à cotação total), *incorretas* (com cotação zero) e *não responde* (Tabela 69).

Tabela 69 — Desempenho dos 26 alunos no miniteste de Matrizes e determinantes

		Tipo de resposta (% de alunos)				
		C	PC		I	NR
Questão	Objetivos		≥1/2p	<1/2p		
1a)	Resolver uma equação matricial Reconhecer que a multiplicação não goza da propriedade comutativa	—	—	80,8	11,5	7,7
1b)	Determinar a característica de uma matriz 4×3	7,7	15,4	46,2	26,9	3,8
2a)	Identificar uma matriz singular Reconhecer que a soma de matrizes singulares pode não ser singular	7,7	3,8	53,9	26,9	7,7
2b)	Aplicar o conceito de matriz simétrica Aplicar propriedades da transposição de matrizes	3,8	—	42,3	38,5	15,4

C – Respostas corretas; PC – Respostas parcialmente corretas: <1/2p – pontuação inferior a metade da cotação da questão, ≥1/2p – pontuação superior ou igual a metade da cotação da questão; I – Respostas incorretas; NR – Não responde.

Como se pode constatar pela Tabela 69, os alunos tiveram dificuldades consideráveis em praticamente todas as questões, pois as respostas totalmente corretas variam entre 0% (alínea 1a)) e 7,7% (alíneas 1b) e 2a)). Também não houve qualquer aluno que tivesse respondido de forma totalmente correta a todas as questões. Há, no entanto, algum empenho em responder às

questões, já que a percentagem de não respostas não ultrapassa os 15,4%, e não há qualquer aluno que tenha deixado todas as questões por resolver.

Na revisão do miniteste pretendia-se que os alunos identificassem os erros cometidos e refizessem os seus raciocínios, o que foi concretizado por diversos alunos, pois a percentagem de respostas totalmente corretas na pergunta 1a) passou para 88,5%, na 1b) para 42,3%; na 2a) para 53,8% e na 2b) para 23%. De realçar que esta última envolvia uma prova usando propriedades da transposição, o que a tornou uma questão complicada para a maior parte dos alunos.

Por exemplo, no caso da questão 1a), um dos erros comuns foi não terem em atenção a não comutatividade da operação de multiplicação de matrizes. O aluno A14, quando resolveu o miniteste pela primeira vez, cometeu esse erro (Figura 229), mas na revisão, face aos comentários da professora (caixa de texto – Figura 229), focou-se na não comutatividade da multiplicação de matrizes e resolveu novamente a equação, agora de forma correta (Figura 230).

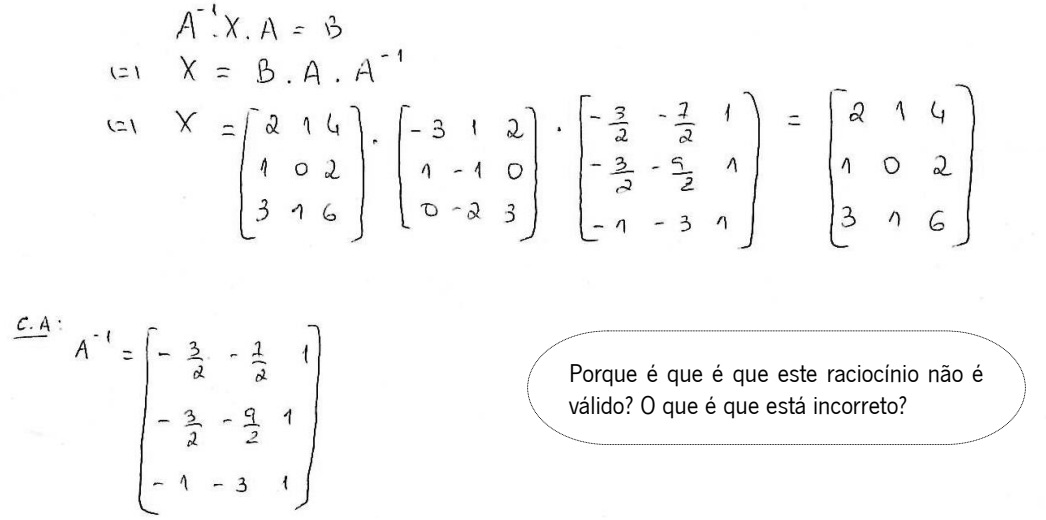


Figura 229. Resposta do aluno A14 à questão 1a) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

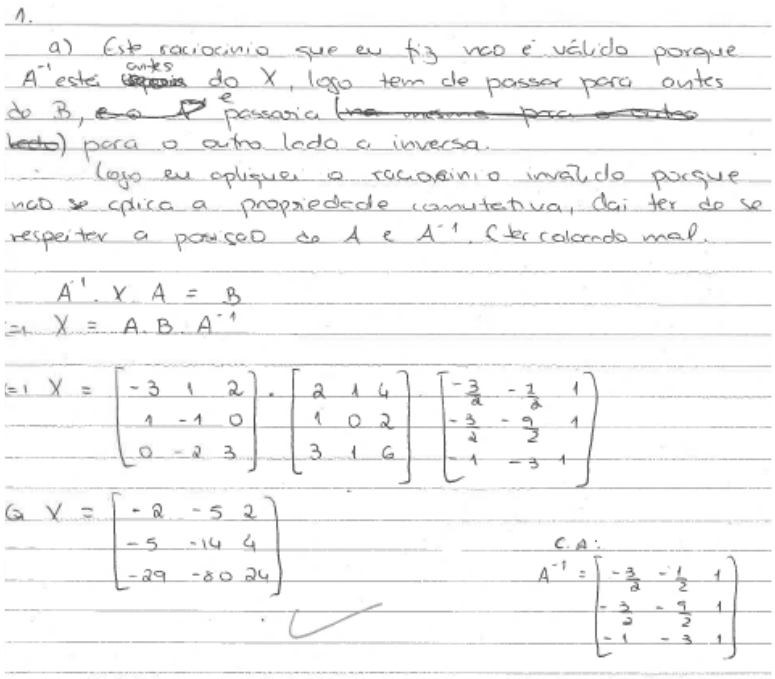


Figura 230. Resposta do aluno A14 à questão 1a) na revisão do miniteste de Matrizes e deteminantes.

No caso da questão 1b), alguns alunos aplicaram as operações elementares sem uma estratégia específica, cometendo erros de cálculo ou aplicando mesmo operações elementares que não são possíveis, como a multiplicação de linhas (Figura 231).

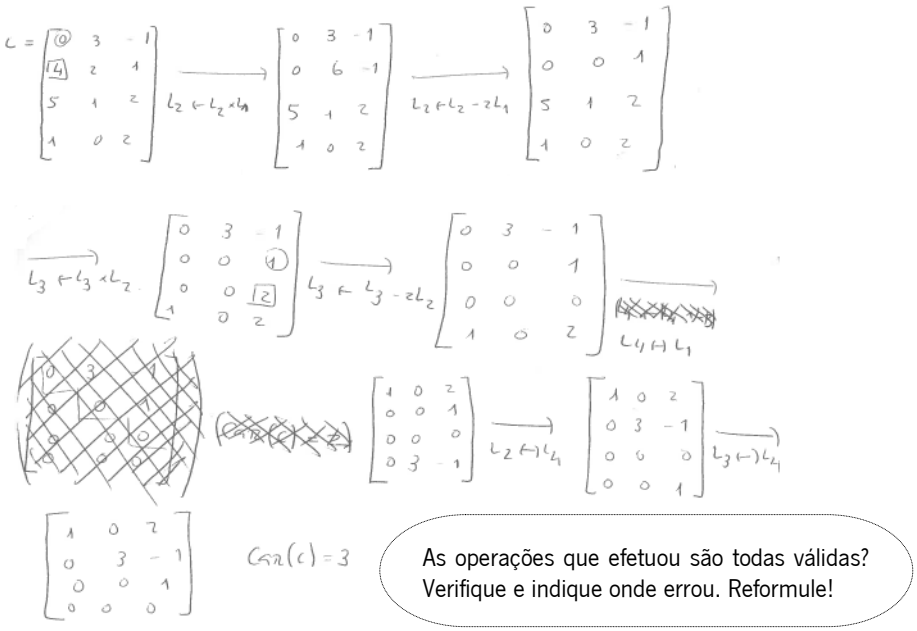


Figura 231. Resposta do aluno A6 à questão 1b) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, A6 consegue identificar os seus erros e resolver a questão de forma correta (Figura 232), embora a sequência das operações elementares que aplica não seja a que conduz a uma resolução mais eficiente.

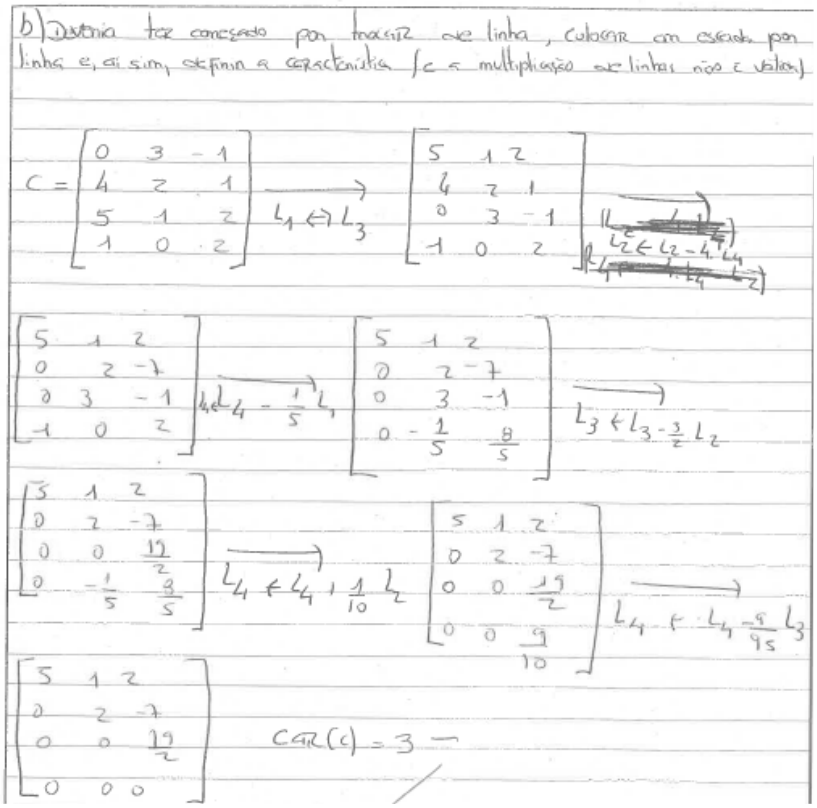
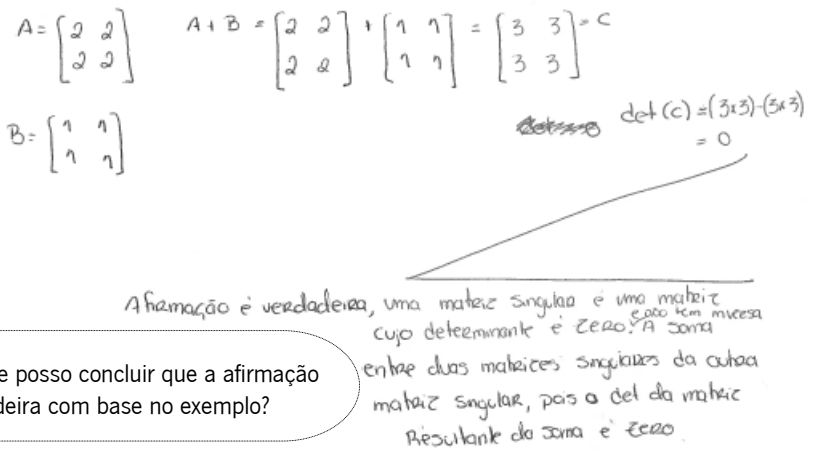


Figura 232. Resposta do aluno A6 à questão 1b) na revisão do ministeste de Matrizes e determinantes.

Na questão 2a), os dois erros mais frequentes foram apresentar um exemplo que verifica a afirmação (Figura 233) e escolher matrizes que não são singulares (Figura 234).



Será que posso concluir que a afirmação é verdadeira com base no exemplo?

Figura 233. Resposta do aluno A12 à questão 2a) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

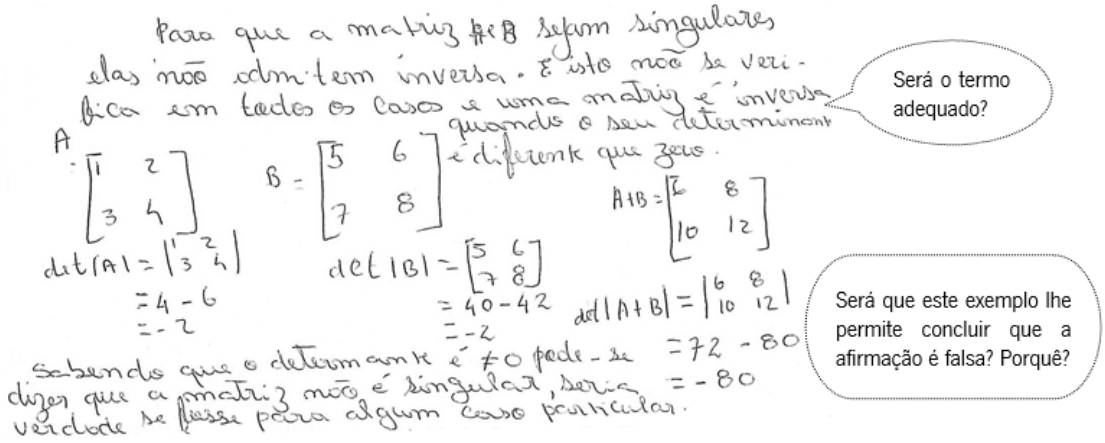


Figura 234. Resposta do aluno A18 à questão 2a) do ministeste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, o aluno A12 admite que o seu exemplo não prova que a afirmação é válida e recorre a um contraexemplo para concluir que a firmação é falsa (Figura 235).

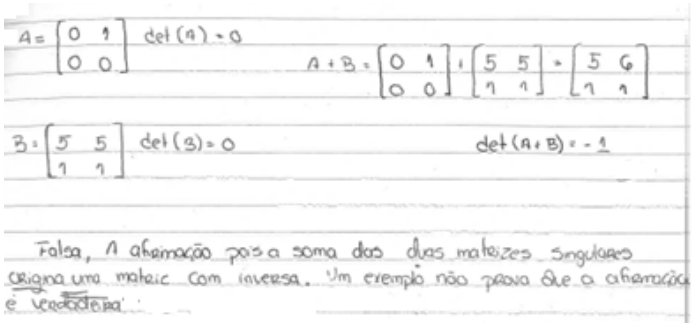


Figura 235. Resposta do aluno A12 à questão 2a) na revisão do miniteste de Matrizes e determinantes.

Da mesma forma, o aluno A18 reconhece que partiu incorretamente de duas matrizes não singulares e reformula a sua resposta, partindo agora de duas matrizes singulares, concluindo que a afirmação é falsa (Figura 236).

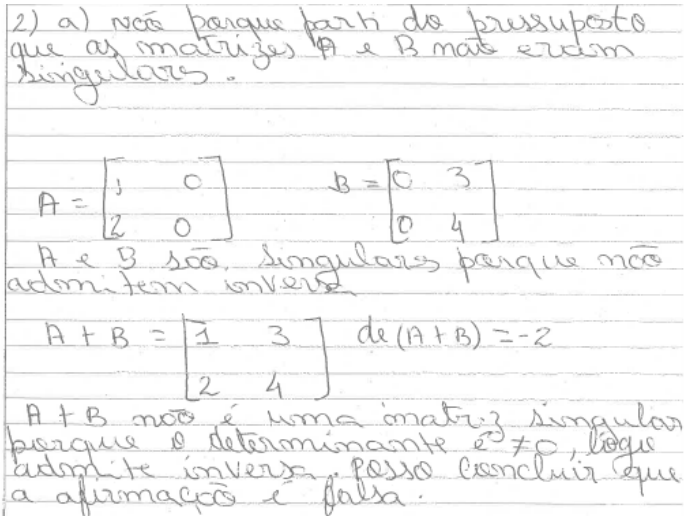


Figura 236. Resposta do aluno A18 à questão 2a) na revisão do miniteste de Matrizes e determinantes.

Na questão 2b), o erro mais comum foi partir de um exemplo concreto para provar que a afirmação é verdadeira (Figura 237), tendo ainda havido alguns alunos que não selecionaram uma matriz *A* que fosse simétrica. Há igualmente alunos que, embora apresentem um exemplo concreto, parecem ter a perceção de que a sua resposta não é a adequada, pois acrescentam ao seu raciocínio: "Verdadeiro, sendo este um caso particular o que não prova para o caso geral" (A5).

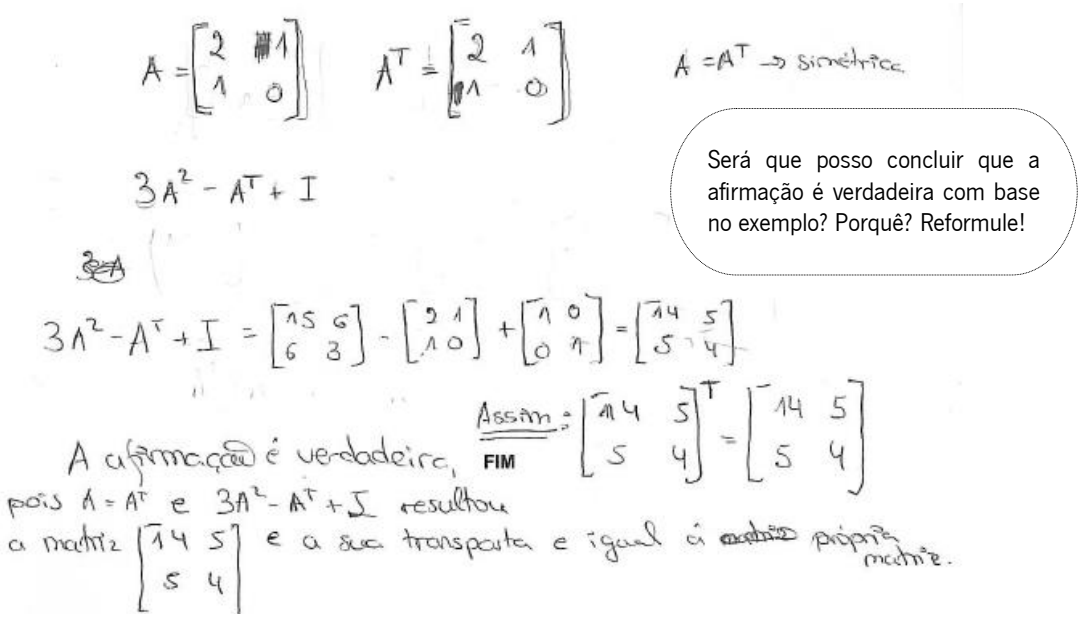


Figura 237. Resposta do aluno A15 à questão 2b) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

Neste caso, o aluno A15 conseguiu reformular o seu raciocínio na revisão do miniteste, embora tenha cometido um lapso ao mencionar que vai aplicar as propriedades dos determinantes em vez das de transposição (Figura 238).

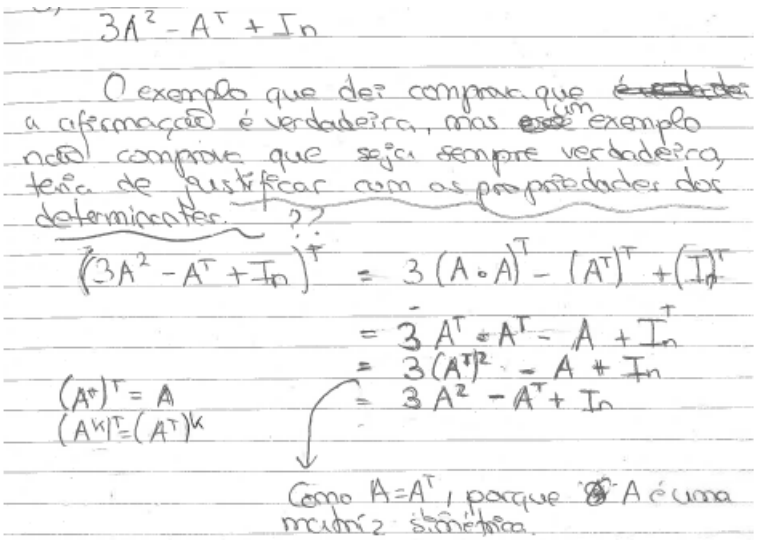


Figura 238. Resposta do aluno A15 à questão 2b) na revisão do ministeste de Matrizes e determinantes.

Há, no entanto, situações em que, embora haja uma evolução no seu raciocínio, os alunos continuam a não resolver as questões de forma totalmente correta, mesmo quando identificaram os erros. Por exemplo, o aluno A26 conclui, na revisão do miniteste, que errou ao aplicar a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes e está consciente que, por causa dessa propriedade não ser válida, deve ter cuidado com a ordem das matrizes ao efetuar a sua passagem para o outro membro. Porém, acaba por não resolver corretamente a equação matricial, pois esquece-se que, como tem um produto, é como inversa que a matriz passa para o outro membro. (Figura 239 e Figura 240).

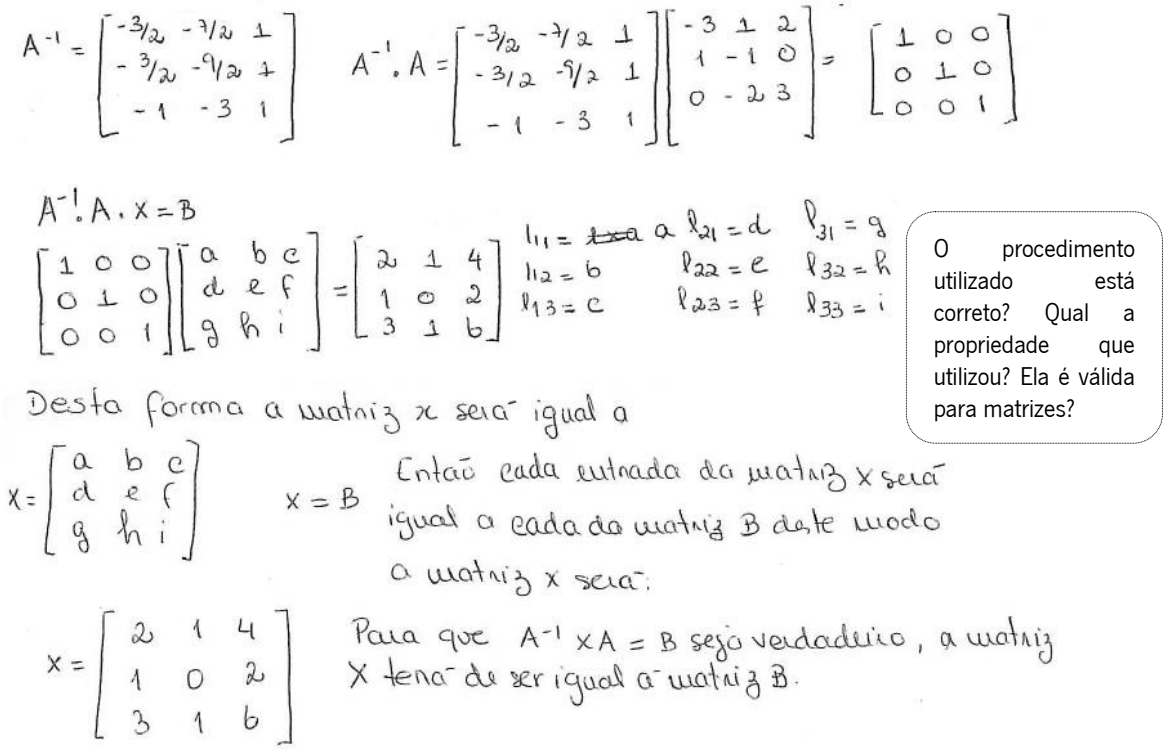


Figura 239. Resposta do aluno A26 à questão 1a) do miniteste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

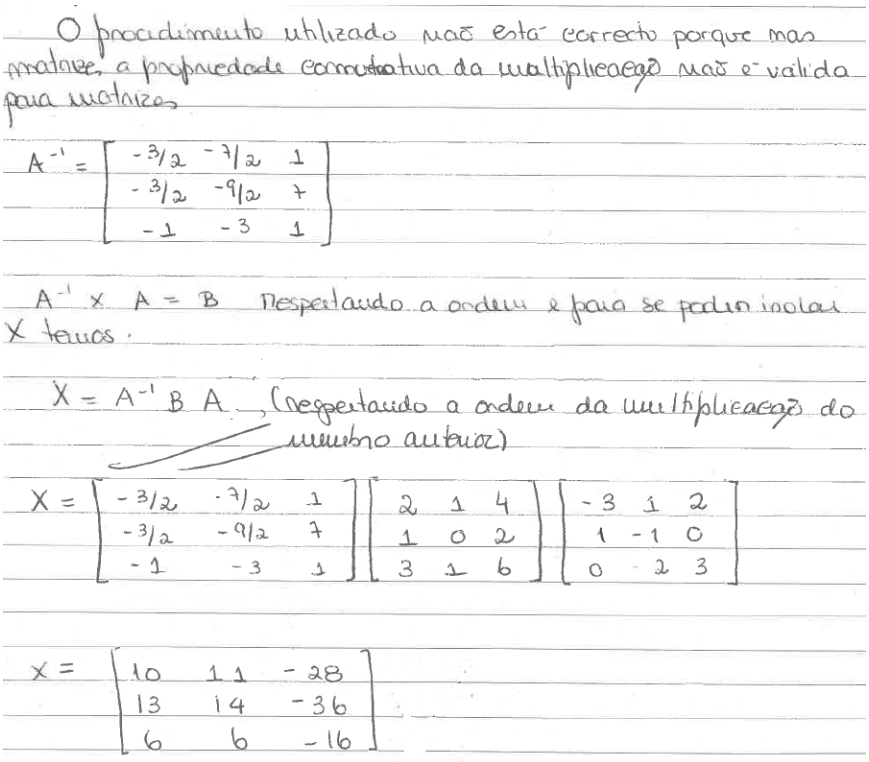


Figura 240. Resposta do aluno A26 à questão 1a) na revisão do miniteste de Matrizes e determinantes.

Já o aluno A16 conseguiu perceber que a multiplicação de linhas não é uma operação permitida, mas comete outros erros quando reformula a sua resposta (Figura 241 e Figura 242).

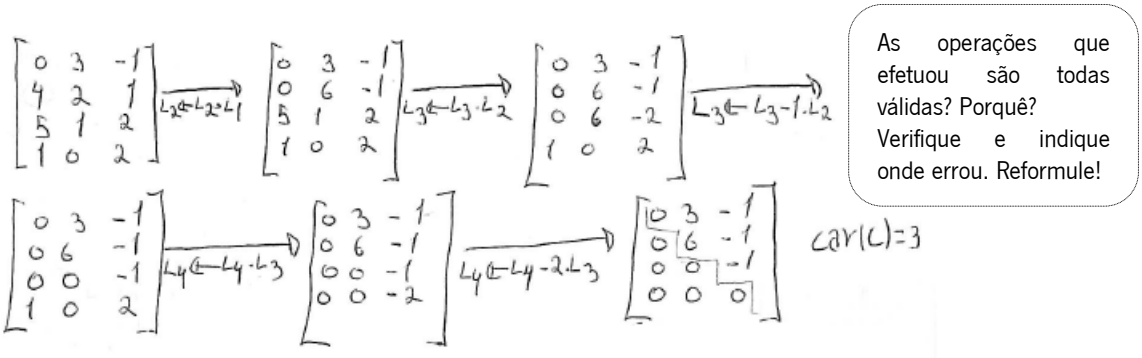


Figura 241. Resposta do aluno A16 à questão 1b) do ministeste de Matrizes e determinantes e comentários da professora.

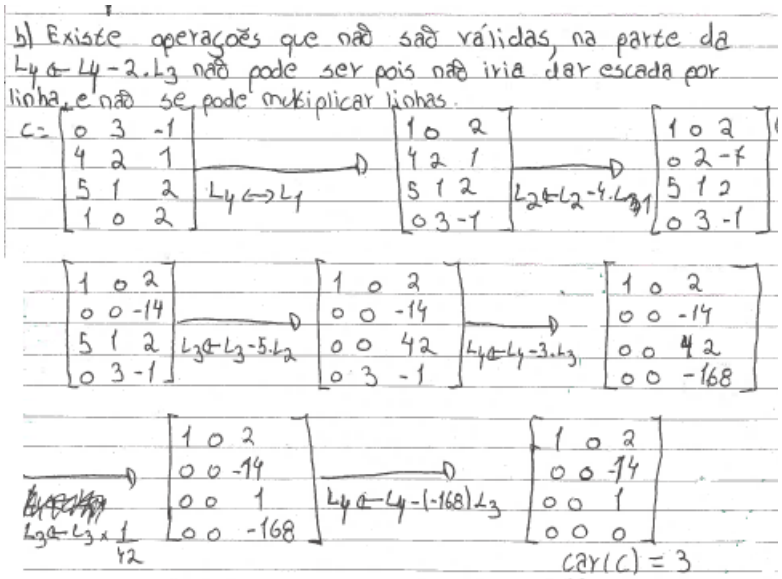


Figura 242. Resposta do aluno A16 à questão 1b) na revisão do ministeste de Matrizes e determinantes.

5.1.3.2. O miniteste de Sistemas de equações lineares e a sua revisão

O miniteste sobre Sistemas de equações lineares (Anexo VIII) foi resolvido por 28 alunos e a sua revisão foi efetuada por 27. Da mesma forma que no miniteste anterior, o desempenho dos alunos, traduzido na Tabela 70, tem como base a pontuação obtida por estes aquando da correção do miniteste, que originou uma classificação das respostas em *corretas* (cotação total na questão), *parcialmente corretas* (com pontuação inferior/superior ou igual a metade da cotação total da questão, mas inferior à cotação total), *incorretas* (com cotação zero) e *não responde*.

Tabela 70 — Desempenho dos 28 alunos no miniteste de Sistemas de equações lineares

		Tipo de resposta (% de alunos)				
		C	PC		I	NR
Questão	Objetivos		≥1/2p	<1/2p		
1a)	Verificar se um dado vetor é solução de um SEL	14,3	28,6	32,1	17,9	7,1
1b)	Identificar quando é que um SEL com um parâmetro é impossível	—	46,4	21,4	14,3	17,9
2 a)	Relacionar a invertibilidade da matriz dos coeficientes com o tipo de sistema	10,7	7,1	53,6	21,4	7,1
2 b)	Relacionar o conjunto-solução de um SEL com a representação gráfica das equações	—	14,3	21,4	42,9	21,4

C – Respostas corretas; PC – Respostas parcialmente corretas: <1/2p – pontuação inferior a metade da cotação da questão, ≥1/2p – pontuação superior ou igual a metade da cotação da questão; I – Respostas incorretas; NR – Não responde.

Como se pode constatar pela Tabela 70, os alunos tiveram bastantes dificuldades em todas as questões, já que as respostas totalmente corretas nas quatro perguntas variam entre 0% (alíneas 1b) e 2b)) e 14,3% (alínea 1a)). Porém, se se considerar conjuntamente as respostas

corretas e as parcialmente corretas, com cotação superior ou igual a metade da cotação da questão, que serão as mais próximas das corretas, verifica-se que essa percentagem sobe consideravelmente, já que a variação passa a ser de 14,3% (alínea 2b)) a 46,4% (alínea 1b)). Isto permite ainda concluir que a questão que originou mais dificuldades foi a 2b), em que é necessário relacionar a representação analítica com a representação gráfica.

Não houve qualquer aluno que tivesse respondido de forma totalmente correta a todas as questões. Como no miniteste anterior, é evidente que existe algum empenho dos alunos em responder às questões pois a taxa de não respostas varia de 7,1% a 21,4%, não havendo qualquer aluno que tenha deixado todas as questões por resolver.

A revisão dos minitestes cumpriu no geral o seu papel, na medida em que fez com que muitos dos alunos refletissem sobre as suas respostas e as reformulassem de forma correta ou pelo menos com maior correção do que da primeira vez, assim como levou, em algumas situações, a que os alunos procurassem uma forma de dar resposta a questões que não tinham resolvido. Deste modo, a percentagem de respostas totalmente corretas, tendo como base os 27 alunos que efetuaram a revisão do miniteste, passou a ser 85,2% na questão 1a), 55,6% na questão 1b), 85,2% na questão 2a) e 77,8% na 2b).

Na questão 1, tanto na alínea a) como na b), destaca-se a dificuldade na aplicação das operações elementares, quando transformam a matriz ampliada numa matriz em escada por linhas, quer devido à utilização de operações não permitidas – multiplicar linhas, adicionar um número a uma linha e dividir as entradas de uma linha por elas próprias – quer pelo facto de cometerem erros aquando da utilização das operações elementares – não aplicar a operação a todas as entradas da linha a alterar e erros de cálculo em algumas entradas. Verificou-se, ainda, que alguns alunos tiveram dificuldade na indicação formal das operações que estavam a efetuar.

Por exemplo, o aluno A13 (Figura 243) comete erros nas operações elementares ao não aplicar a operação indicada a todas as entradas da linha e ao multiplicar linhas. Para além disso, aquando do estudo do sistema, apresenta uma subdivisão dos valores de α que não é a mais adequada, determinando também a característica da matriz sem esta estar em escada por linhas.

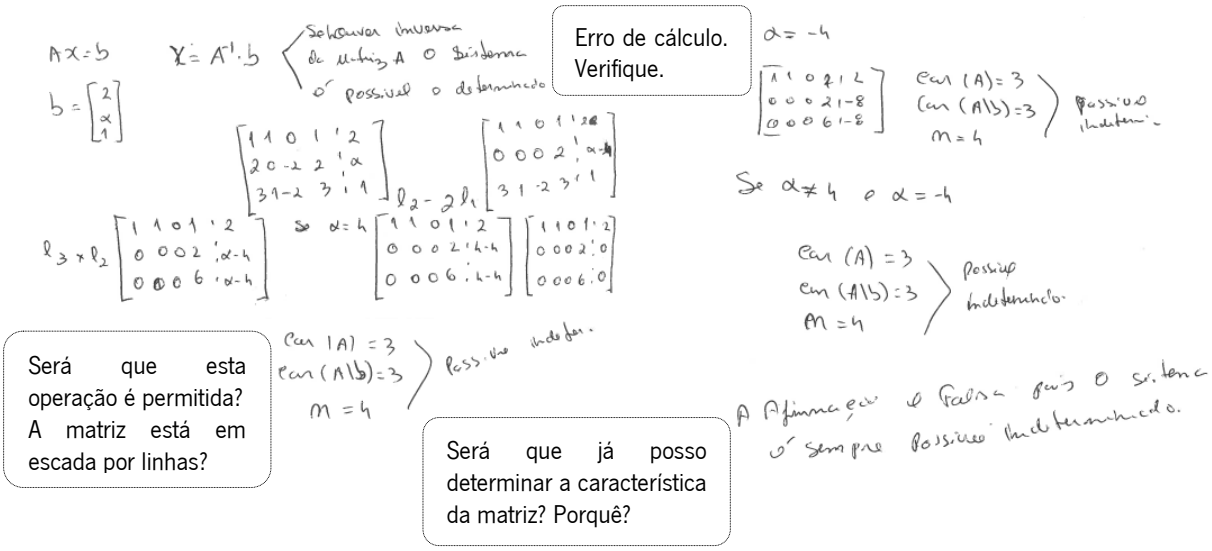


Figura 243. Resposta do aluno A13 na questão 1b) do miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, o aluno A13 (Figura 244) tentou justificar porque é que a sua resposta não era adequada e reformulou-a, realizando agora de forma correta as operações elementares (embora se esqueça de manter o sinal – no número 2 da segunda linha, terceira coluna) até transformar a matriz ampliada numa matriz em escada por linhas. Reestruturou também o estudo do sistema, agora de forma correta, e embora se cinja aos valores de α importantes para a sua análise, ainda tem necessidade de no caso $\alpha \neq -1$ concretizar o seu valor para analisar o tipo de sistema que obtém.

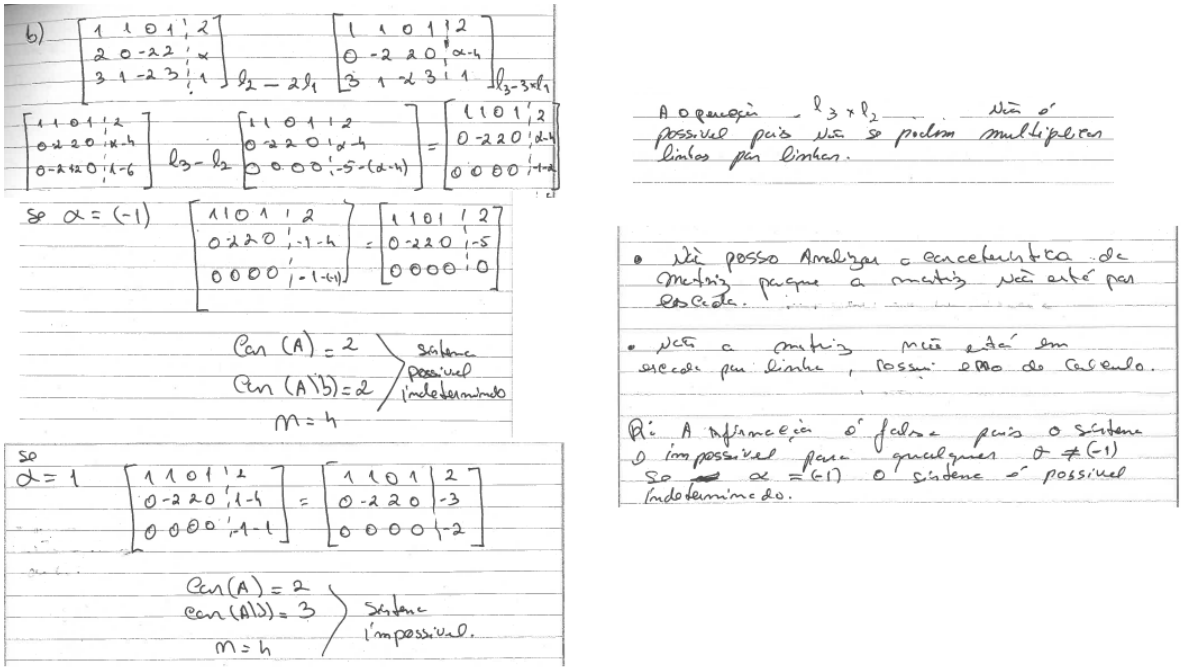


Figura 244. Resposta do aluno A13 à questão 1b) na revisão do ministeste de Sistemas de equações lineares.

Tal como o aluno A13, também houve outros alunos que na questão 1b) mostraram dificuldades em determinar as características ou em selecionar os valores de α adequados para estudar o sistema, sugerindo, em alguns casos, uma resolução por tentativa e erro, visto que começaram por indicar os valores de α e só depois colocaram a matriz em escada por linhas (Figura 245).

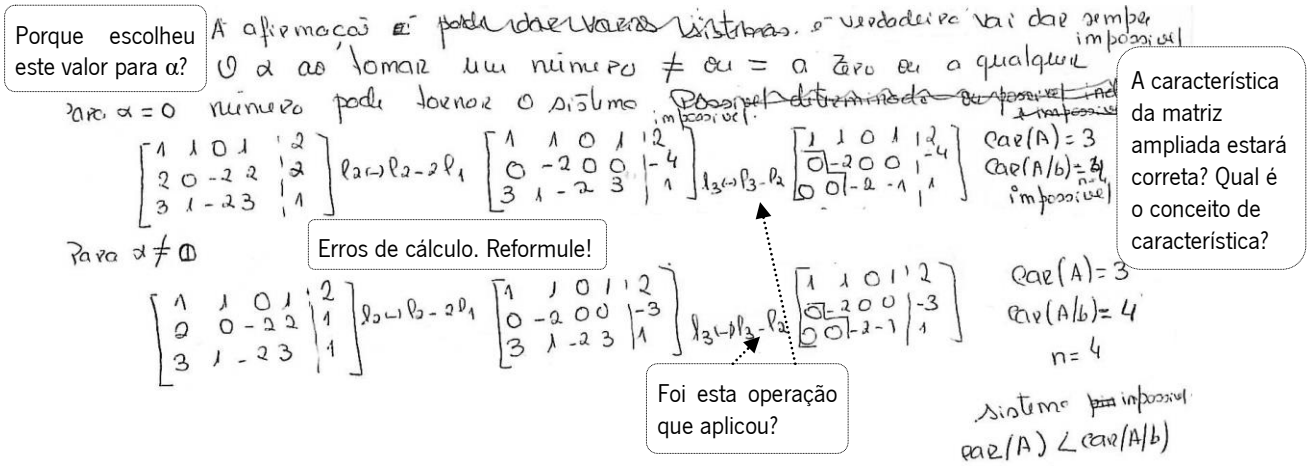


Figura 245. Resposta do aluno A10 à questão 1b) no miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, o aluno A10, apesar de não ter respondido às interrogações da professora, conseguiu corrigir a maior parte dos seus erros, essencialmente no que se refere a colocar a matriz em escada por linhas e a determinar a característica da matriz ampliada, embora ainda tenha cometido um pequeno erro de cálculo no primeiro caso. Contudo ainda não efetuou um estudo do sistema de forma concisa, pois continua a ter dificuldade em escolher os valores mais adequados para o parâmetro α (Figura 246).

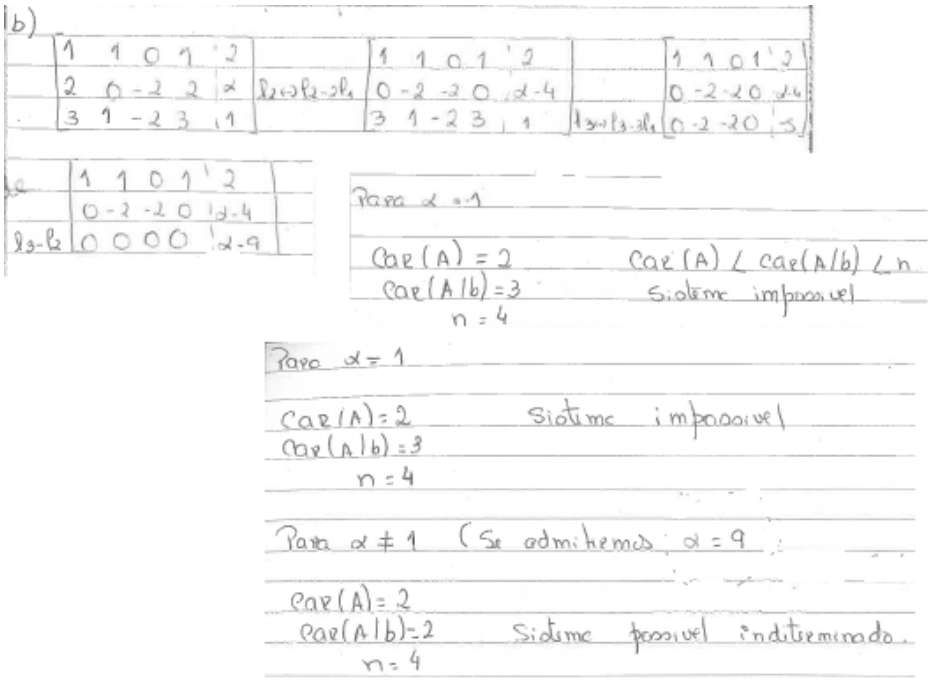


Figura 246. Resposta do aluno A10 à questão 1b) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares.

Para além das dificuldades na aplicação das operações elementares, na questão 1a) sobressaiu igualmente a dificuldade na interpretação do resultado obtido para dar resposta à questão, mesmo quando o resultado se baseou num procedimento adequado, situação que no geral foi ultrapassada aquando da revisão. Por exemplo, o aluno A2 (Figura 247) embora tenha utilizado um procedimento correto ao efetuar o produto da matriz dos coeficientes pelo suposto vetor solução não baseia a sua resposta final no resultado obtido, mas numa afirmação que, embora válida, é desfasada do contexto.

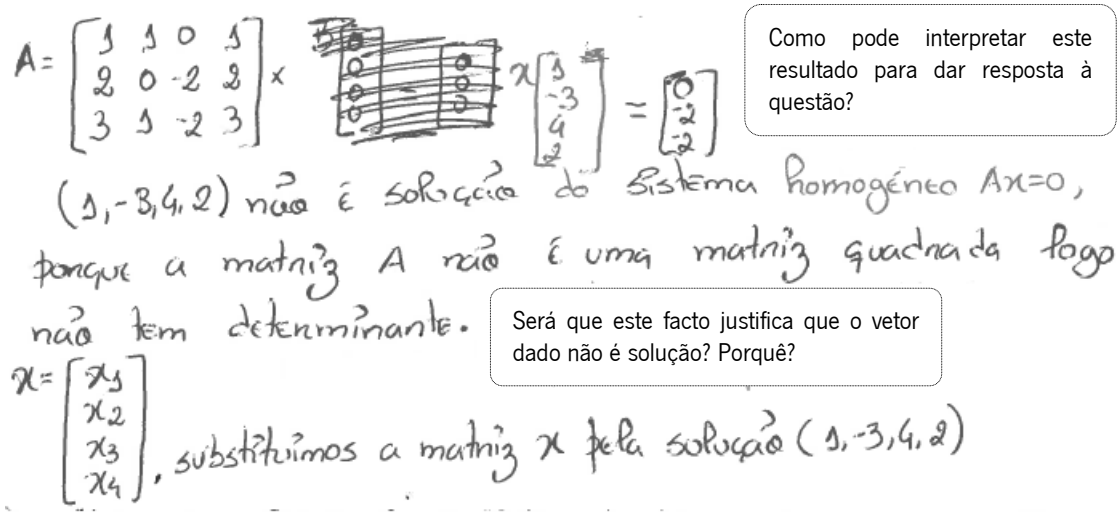


Figura 247. Resposta do aluno A2 à questão 1a) no miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, o aluno A2 apresentou uma resposta correta (Figura 248), mas alterou o seu raciocínio, não dando qualquer resposta aos comentários da professora, pelo que se depreende que terá considerado mais óbvia a interpretação do resultado ao substituir as incógnitas pelo candidato a vetor solução.

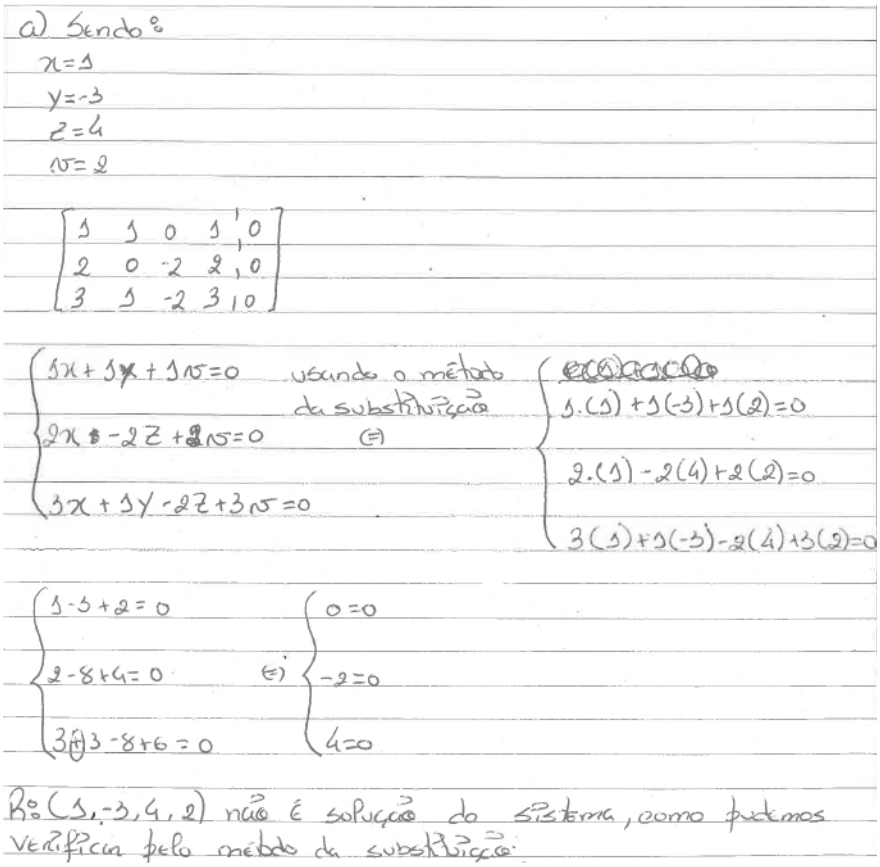


Figura 248. Resposta do aluno A2 à questão 1a) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares.

É igualmente de salientar que, para responder à questão 1a) no miniteste, a maioria dos alunos optou por usar o método de eliminação de Gauss, tendo apenas quatro recorrido à substituição direta no sistema, após a sua passagem para a notação usual, e dois (um dos quais o aluno A2 referido) realizado a verificação efetuando as operações na forma matricial. Já na revisão do miniteste, estes dois últimos métodos tiveram um aumento de adeptos, para nove e três alunos, respetivamente, porque os alunos ou não tinham respondido à questão ou reformularam a resposta dada.

Provavelmente, a opção pelo método de Gauss poderá dever-se ao facto de os alunos terem abordado o seu algoritmo recentemente nas aulas e pensarem que a professora estaria à espera que aplicassem esses conhecimentos, ou pode ter acontecido que alguns alunos não tenham ultrapassado a conceção de que o mais adequado é resolver o sistema. Esta ideia

também surgiu no debate em grande grupo, aquando da análise da correção das resoluções da questão 3 do teste diagnóstico, e a professora tentou combatê-la com o confronto e exploração de abordagens baseadas na substituição direta. De notar que na 1.ª fase da primeira parte do estudo também foi significativo o número de alunos que optou por resolver o sistema numa questão semelhante (questão 2a) do trabalho sobre Sistemas de equações lineares).

Na questão 2a), o erro mais frequente foi apresentar um exemplo que verificava a afirmação dada. Este erro, como se pode constatar, está presente na resposta do aluno A6 (Figura 249) quando resolveu o miniteste pela primeira vez, pois respondeu que a afirmação era verdadeira, indicando um exemplo que a verificava, não tendo presente que poderia haver exemplos de sistemas para os quais a afirmação não fosse válida.

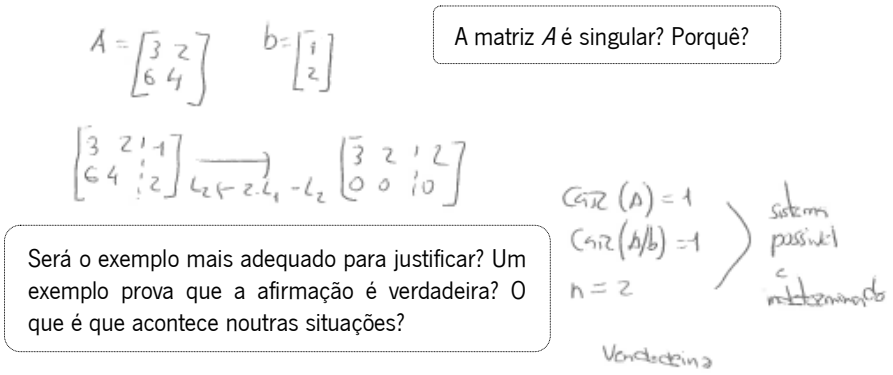


Figura 249. Resposta do aluno A6 à questão 2a) do miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, o aluno A6 reformulou a sua resposta, alterando o vetor dos termos independentes e apresentando, assim, como exemplo, um sistema que não verificava a afirmação, concluindo que ela era falsa (Figura 250).

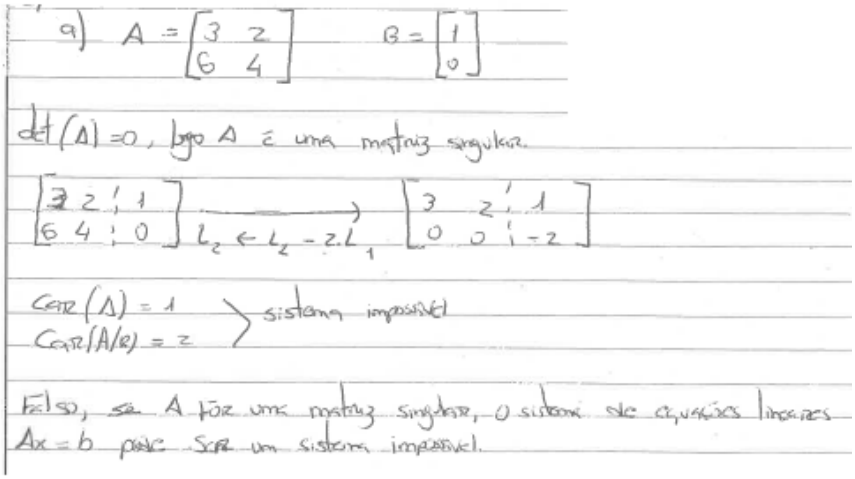


Figura 250. Resposta do aluno A6 à questão 2a) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares.

Na questão 2b) um dos erros mais cometido foi inventar um sistema cujo conjunto-solução não correspondia ao do enunciado, mas em que os planos eram concorrentes, e o outro foi afirmar diretamente que os planos se intersetavam num ponto, havendo em alguns casos a associação destes dois factos, na medida em que o sistema que apresentaram era possível e determinado.

Por exemplo, o aluno A21 (Figura 251) apresentou um sistema cujo conjunto-solução corresponde graficamente ao ponto (0,0,0), não tendo em atenção que este é apenas um dos elementos do conjunto-solução.

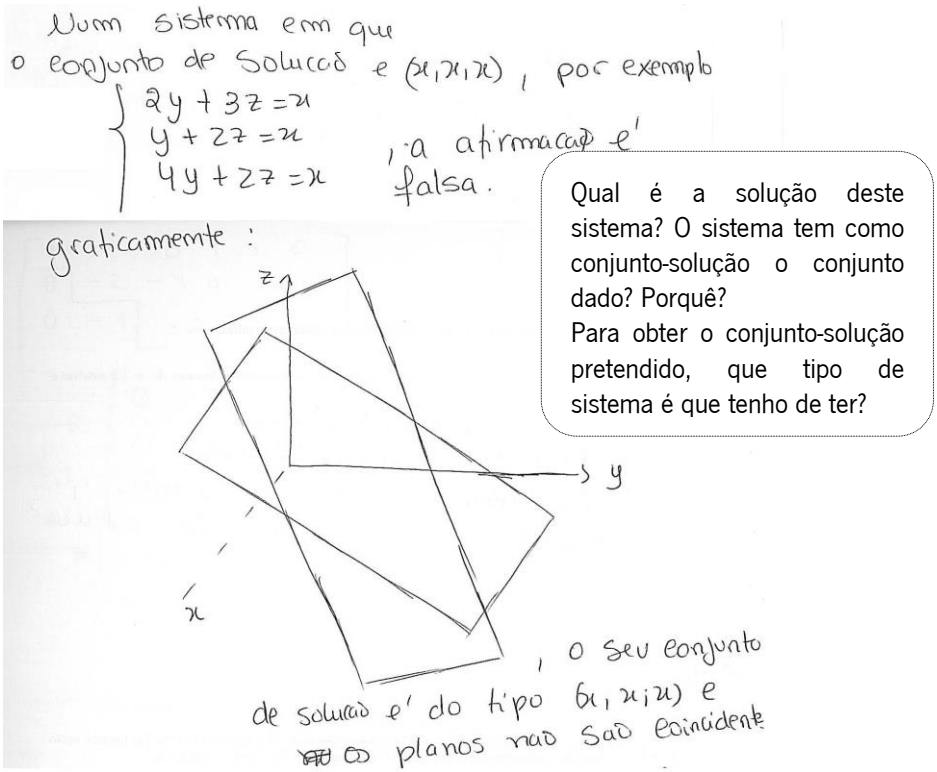


Figura 251. Resposta do aluno A21 à questão 2b) do miniteste de Sistemas de equações lineares e comentários da professora.

Na revisão do miniteste, o aluno A21 conseguiu concluir que a sua resposta não representava o conjunto-solução dado, mas apenas um vetor desse conjunto, reformulando-a com a ajuda do *software Microsoft Mathematics* (Figura 252).

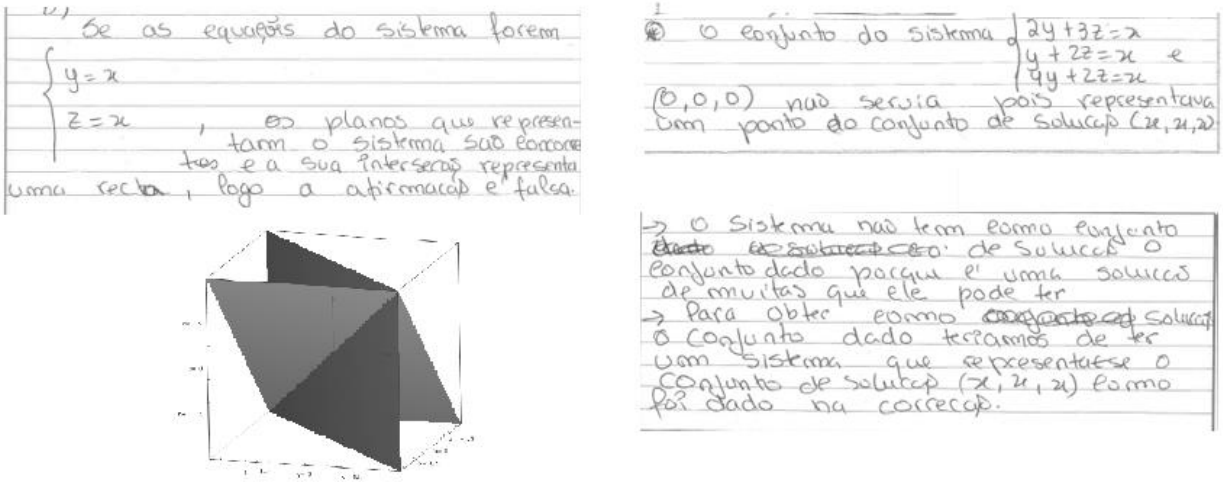


Figura 252. Resposta do aluno A21 à questão 2b) na revisão do miniteste de Sistemas de equações lineares.

5.2. Avaliação da intervenção de ensino – O ponto de vista dos alunos

Relembra-se que para obter o *feedback* dos alunos sobre a intervenção realizada, estes responderam a um questionário na última aula do semestre e, posteriormente, a uma entrevista individual, em horário previamente combinado. Todos os alunos que participaram na experiência acederam em dar o seu contributo para esse processo.

A apresentação de resultados dessa avaliação está organizada de acordo com as três dimensões em que está estruturado o questionário: informações gerais, opinião sobre o *software Microsoft Mathematics* e opinião sobre as aulas. Em cada uma das partes, quando se considera pertinente, também se complementa a informação com os resultados decorrentes das entrevistas que se realizaram aos alunos. A análise destas originou que, em casos pontuais, se acrescentassem subcategorias que não estavam contempladas no questionário.

5.2.1. Informações gerais

A maioria dos estudantes (64,3%) estava a frequentar a UC pela segunda ou terceira vez, sendo apenas 35,7% os que a frequentavam pela primeira vez. No que diz respeito à assiduidade, a generalidade dos estudantes assistiu de 80 a 100% das aulas (Tabela 71).

Tabela 71 — Percentagem de aulas a que os estudantes assistiram

% de vezes	% de estudantes
[20, 50[	7,1
[50, 80[	14,4
[80, 100[	71,4
Todas	7,1

Os alunos que não assistiram a pelo menos 80% das aulas apontaram como justificação motivos intrínsecos, nomeadamente preguiça, razões pessoais e falta de motivação, ou extrínsecos, como o facto de ser trabalhador-estudante, a sobreposição de aulas ou a necessidade de trabalhar/estudar para outras unidades curriculares (UCs). Por exemplo, o aluno A23 refere: "Faltei mais na segunda parte da matéria, não percebia tão bem e desmotivei-me mais um bocado. Também um pouco de preguiça à mistura".

Quanto à comparência aos minitestes, como já foi referido anteriormente, apenas dois alunos faltaram ao primeiro miniteste e à respetiva revisão e um deles também não compareceu à revisão do segundo, invocando os dois falta de preparação em termos de conhecimentos dos conteúdos.

No que diz respeito ao contributo para os trabalhos de grupo, houve maior colaboração entre os elementos do grupo nos trabalhos realizados nas aulas do que nos trabalhos realizados extra-aula (Tabela 72).

Tabela 72 – Contributo dos estudantes para os trabalhos em grupo realizados nas aulas e fora das aulas

	% de estudantes				
	N	PV	MV	S	NR
Nas aulas	–	7,1	46,4	46,4	–
Fora das aulas	3,6	25,0	39,3	32,1	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Nas entrevistas, os alunos explicaram que a sua não colaboração no caso dos trabalhos da aula deveu-se essencialmente ao facto de não estarem presentes em algumas das aulas em que esse trabalho foi desenvolvido. Já no que diz respeito aos trabalhos fora das aulas, a razão invocada pela maioria dos alunos foi a dificuldade em reunir os elementos do grupo, por incompatibilidades de horário ou falta de tempo. Relembra-se que os alunos não estavam todos pela primeira vez no primeiro ano, pelo que tinham horários diferentes de acordo com as UCs que frequentavam. Houve alunos que esclareceram ainda que tinham o hábito de dividir o trabalho ou concentrá-lo mais num colega que noutro e depois trocavam, pelo que nem todos resolviam as mesmas questões: "Mas nós dividíamos, como elas eram de cidades diferentes, não ficavam cá, nós dividíamos: uma pergunta faz um, outra..., era nesse sentido. (...) depois juntávamos tudo" (A21).

Para alguns alunos, a não compreensão dos conteúdos abordados também fez com que participassem menos nos trabalhos tanto nas aulas como fora, principalmente se havia algum colega que entendia melhor o assunto: "Às vezes havia matérias do trabalho que não entendia,

ficava sem contribuir para os trabalhos [na aula]. (...) Fora da aula havia um elemento do grupo que entendia melhor a matéria e explicava, fazia melhor as coisas e nós participávamos menos" (A4). Quanto aos hábitos de trabalho em grupo ao longo do percurso escolar, verifica-se que a maioria dos estudantes tem trabalhado em grupo muitas vezes ou sempre nas aulas (89,3%) e fora das aulas (67,8%), sendo assim mais habitual o trabalho em grupo dentro da sala de aula (Tabela 73).

Tabela 73 – Frequência com que os estudantes têm trabalhado em grupo ao longo do seu percurso escolar

	% de estudantes				
	N	PV	MV	S	NR
Nas aulas	–	10,7	64,3	25,0	–
Extra-aula	3,6	28,6	60,7	7,1	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Aquando das entrevistas questionaram-se os alunos sobre os seus hábitos de estudo, tendo-se concluído que a maioria (75%) não tem hábitos de estudo regular e contínuo. Assim, optam por estudar essencialmente na altura dos testes ou exames, como se pode constatar pelos comentários: "É mais uma semana ou duas antes. Mas não tenho por hábito levar o estudo seguido" (A13). No entanto, alguns destes alunos acrescentaram que mudam a sua atitude para as UCs de que gostam mais ou que envolvem uma avaliação mais contínua:

> Mais para os exames. Disciplinas que gosto estudo mais frequentemente. (A4)

> Estudo mais contínuo só se tivermos, por exemplo, trabalhos ou qualquer coisa. (A21)

> Para os trabalhos aplico-me porque até gosto de fazer. Se tiver um miniteste, se calhar estudo dois ou três dias antes e sei que se estudasse uma semana ia ter melhor nota. (A12)

Há, porém, alunos (25%) que afirmam fazer um esforço para ir estudando ao longo do tempo: "Tardes livres, sala de estudo. Tento ter tudo já feito com alguma antecedência senão depois é um colapso" (A5).

Quanto à relação com a matemática no ensino secundário, a maior parte dos alunos (53,6%) referiu que gostava de matemática (Tabela 74). Há, no entanto, um número considerável (35,7%) que considera ter tido bastantes dificuldades na disciplina, mencionando, por exemplo, razões como problemas na compreensão dos conteúdos, má relação com a matemática ou falta de estudo: "Eu gostava de matemática, só que para entender as matérias e

os conteúdos era um pouco difícil" (A25); "Aquilo era horrível para mim. Não estudava. Não gostava das aulas, não gostava do professor, não estudava" (A17).

Tabela 74 – Relação dos alunos com a matemática no ensino secundário

	% de estudantes			
	Gostava	Não gostava	Mais ou menos	Total
Tinha bastantes dificuldades	10,7%	17,9%	7,1%	35,7%
Tinha algumas ou não tinha dificuldades	42,9%	14,3%	7,1%	64,3%
Total	53,6%	32,2%	14,2%	100%

Os alunos que manifestaram apenas ter tido algumas dificuldades referiram-se, por vezes, a um ano de escolaridade específico, essencialmente ao 12º ano, ou à falta de hábitos de estudo: "Dei-me bem com a matemática no 11º ano, no 12º ano tive mais dificuldades" (A23); "Não era que tivesse dificuldades. Eu era e sou preguiçosa para estudar. Quando digo: 'vou fazer isto e vou estudar', consigo e estou atenta. Só que até que me decida, ando e deixo andar" (A24).

5.2.2. Opinião sobre o *software Microsoft Mathematics*

Somente duas alunas já tinham trabalhado com o *software Microsoft Mathematics* no ensino secundário, uma delas para efetuar representações gráficas e outra fora das aulas, apenas por curiosidade, por recomendação do professor.

Quando questionados sobre a frequência com que utilizaram o *Microsoft Mathematics* para determinadas tarefas (Tabela 75), verifica-se que mais de metade dos alunos o usou muitas vezes ou sempre na generalidade das tarefas das aulas ou de avaliação. De realçar que 42,9% utilizaram sempre o programa para resolver os minitestes e que a revisão destes é das tarefas em que os alunos menos utilizaram o *software* (39,3% nunca ou poucas vezes o utilizaram).

Tabela 75 – Frequência com que os estudantes utilizaram o *Microsoft Mathematics* em determinadas situações

Situações	% de estudantes				
	N	PV	MV	S	NR
Resolver as tarefas de grupo nas aulas	3,6	3,6	75,0	17,9	–
Realizar as tarefas de grupo extra-aula	10,7	17,9	60,7	10,7	–
Apoiar o estudo fora da aula	7,1	21,4	64,3	7,1	–
Resolver os minitestes	10,7	17,9	28,6	42,9	–
Fazer a revisão dos minitestes	3,6	35,7	35,7	25,0	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Haver habitualmente apenas um computador por grupo parece ter sido um fator que levou alguns alunos a não aprenderem a trabalhar com o *software*, não se apercebendo, assim, das suas potencialidades. Este aspeto influenciou tanto o seu uso no apoio ao estudo como na realização das tarefas de grupo extra-aula e dos minitestes, como em seguida se verifica por algumas respostas dadas nas entrevistas.

Os alunos que nunca usaram ou usaram poucas vezes o *software* nas tarefas extra-aula explicam que se limitavam a observar o que os outros faziam ou, como havia colegas que sabiam fazer manualmente, apenas usavam o *software* para confirmar algum cálculo, às vezes até posteriormente: "No início era outra colega que trazia o computador e eu ia vendo" (A3); "As poucas vezes que nos conseguimos juntar não usamos [o *software*] porque não precisávamos, porque lá fazíamos à mão e depois um de nós chegava a casa e confirmava" (A24).

Embora a maioria dos alunos tenha utilizado o *software* para apoiar o estudo fora da aula muitas vezes ou sempre (71,4%), apenas dois alunos afirmaram tê-lo utilizado na análise dos "passos da solução", que incluía a apresentação de alguns procedimentos de cálculo: "Antes dos testes, como o *software* era mais rápido, pelo menos nas matrizes e em contas, usávamos para estudar. Ah, sim, e os passos [procedimentos]" (A21). Os outros aproveitaram o *software* essencialmente para verificar os cálculos efetuados, efetuar cálculos diretamente ou fazer representações gráficas: "Era só mesmo verificar. Preferia fazer à mão porque assim era uma coisa que me ficava sempre na cabeça. Era para ver se tinha certo." (A5).

Houve também alunos que nunca ou poucas vezes usaram o *software* para apoiar o estudo fora da aula porque não se aperceberam das suas potencialidades, já que, quando resolviam as tarefas na aula, havia um elemento que trabalhava mais com o computador, porque estudavam pouco ou porque preferiam resolver os cálculos com papel e lápis. Os comentários nas entrevistas comprovam essas atitudes.

> Sim, quase nunca usei. Também era quase sempre o A13 que levava o computador e era quase sempre ele que trabalhava. Nunca trabalhei muito. Só quando começou a vir a fase dos exames e dos sistemas é que comecei a trabalhar e depois... realmente isto é mesmo bom. (A12)

Os alunos que nunca ou poucas vezes utilizaram o *Microsoft Mathematics* para resolver os minitestes invocaram razões como a preferência por realizar os cálculos manualmente, terem dificuldades em usar o *software* ou em responder às questões.

> Poupa tempo no exame, por exemplo, mas gosto mais de fazer à mão. (A20)

> Nas aulas eu resolvia sempre os exercícios com o software, mas chegava ao teste e não conseguia utilizar o *software* devidamente, não sei porquê. Então... preferia fazer o teste com a minha perceção, o que é que eu percebi da matéria. (A23)

Já os alunos que dizem ter utilizado poucas vezes o *software* aquando da revisão do miniteste justificaram a sua atitude alegando aspetos como o menor empenho na realização da revisão, por não terem tido um bom desempenho no miniteste, o facto de poderem trocar impressões com os colegas ou terem resolvido previamente o miniteste em casa.

> Já não precisei de verificar, já não me puxou depois para ir ver e fiquei por ali, o entusiasmo já era menor [porque tinha tirado má nota]. (A24)

> Para a revisão não olhava porque tinha o colega do lado para trocar ideias. (A17)

> Nós juntávamo-nos e fazíamos a correção do teste. Por isso é que não se justificava levar o programa [para a revisão]. (A21)

A maioria dos estudantes concordou que o *software* foi útil num variado leque de situações (Tabela 76). De salientar que mais de 90% dos alunos considera que muitas vezes ou sempre tornou as aulas mais motivantes, ajudou-os a resolver as tarefas com maior rapidez e permitiu-lhes centrarem-se menos nos aspetos de cálculo.

Tabela 76 – Utilidade do *software* no apoio à aprendizagem

O *software*	% de estudantes				
	N	PV	MV	S	NR
Tornou as aulas mais motivantes	–	7,1	64,3	28,6	–
Ajudou-me a compreender melhor os conteúdos	3,6	17,9	57,1	21,4	–
Permitiu-me identificar os erros cometidos	–	21,4	42,9	35,7	–
Permitiu-me corrigir os erros cometidos	3,6	10,7	60,7	25,0	–
Ajudou-me a ultrapassar algumas dificuldades	3,6	14,3	64,3	17,9	–
Contribuiu para entender a relação entre as representações gráfica e algébrica	3,6	21,4	53,6	21,4	–
Permitiu-me resolver as tarefas com mais rapidez	–	3,6	39,3	57,1	–
Permitiu-me centrar menos nos aspetos de cálculo	–	3,6	50,0	46,4	–
Permitiu-me centrar mais nos aspetos de interpretação	–	21,4	57,1	21,4	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Nas entrevistas, referindo-se ao facto de tornar as aulas mais motivantes, alguns alunos explicitaram a sua opinião:

> Acho que motiva mais porque, mesmo que não usemos o *software* para resolver os exercícios, se queres fazer à mão dá-te muito jeito para ver as soluções em vez de estar sempre a perguntar 'Ó professora, isto está bem ou mal?' E, mesmo que sejam muitos exercícios, não vais estar a fazer todos à mão. Há uns que são mais complicados e mais demorados e então preferes fazer no *software*, que poupa tempo. (A23)

Ainda houve 25% dos alunos que consideraram que o *software* nunca ou poucas vezes contribuiu para que entendessem a relação entre as representações gráfica e algébrica. Alguns alunos aludem ao facto de não terem explorado essa componente no *software*, porque outra pessoa do grupo é que trabalhava no computador: "Porque não fiz gráficos no *software*" (A3); "Se calhar por não ser eu a usar. No nosso grupo estávamos todos a pensar no exercício, mas acho que quem fazia mais era o A19" (A28).

Nas entrevistas, esclarecendo o facto de o *software* poucas vezes lhe ter permitido identificar erros cometidos, o aluno A16 referiu que tinha mais o hábito de trocar ideias com os colegas: "E, quando tinha erros, preferia apanhar nas aulas os colegas... mesmo nos trabalhos e tudo, ou perguntar, do que ir ao *software* ver. Nunca recorri ao *software* para ver se tinha mal ou se tinha bem" (A16).

Alguns alunos alegaram que o *software* poucas vezes os ajudou a ultrapassar dificuldades, porque davam preferência à resolução com papel e lápis ou porque tinham dificuldades na resolução dos exercícios, fundamentalmente quando envolviam gráficos.

> Eu não usava muitas vezes o *software* para fazer matrizes, fazia à mão. Só ia mesmo para confirmar, não ia resolver nada em concreto ali. (A24)

> Quando respondi isso foi mesmo por causa do gráfico. No teste não fiz. Achei que o *software* também não me ajudou muito a fazer. (A14)

No geral, os alunos tiveram poucas dificuldades em utilizar o *software* (Tabela 77). Efetuar representações gráficas (25% muitas vezes ou sempre) e resolver sistemas (17,9% muitas vezes) são as dificuldades mais apontadas. Situação que pode ter alguma explicação baseada na interface do próprio *software*, já que são mais visíveis e imediatos os comandos para efetuar cálculos com matrizes e determinantes, na medida em que se encontram numa "calculadora". No caso das representações gráficas há mais opções para selecionar, como a dimensão, o tipo de gráfico, ... e na resolução analítica de sistemas tem de se recorrer ao comando "solucionador de equações", que se encontra noutro local da interface. Falando das suas dificuldades, o aluno A2 refere:

> Essa parte [representações gráficas] acho que nunca percebi muito bem. Não sabia muito bem como usar aquilo [o *software*]. Porque no início, quando era com matrizes, também tive aquela dificuldade não é, como toda a gente teve, mas, depois de muitas vezes experimentar, uma pessoa conseguia fazer. Agora nos gráficos tinha muita dificuldade e aquilo baralhava-me um bocadinho.

Há, no entanto, alunos que responderam que tiveram dificuldades porque não tinham usado o *software* para resolver sistemas, pelo que não aprenderam como se fazia: "Não procurei saber [como é que se fazia]. Nas aulas eu não usava" (A3).

Tabela 77 – Aspetos em que os estudantes tiveram dificuldades quando utilizaram o *Microsoft Mathematics*

Dificuldades em	% de estudantes				
	N	PV	MV	S	NR
Realizar operações com matrizes	57,1	39,3	3,6	–	–
Calcular determinantes	57,1	39,3	3,6	–	–
Efetuar as representações gráficas em IR^2	7,1	64,3	21,4	3,6	3,6
Efetuar as representações gráficas em IR^3	7,1	64,3	21,4	3,6	3,6
Resolver sistemas	28,6	53,6	17,9	–	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Quanto à interpretação dos resultados obtidos, as dificuldades também foram superiores nos temas referentes a Sistemas de equações lineares, com algum destaque para a interpretação da resolução gráfica de sistemas em IR^3, já que 39,3% dos alunos teve muitas vezes ou sempre dificuldades (Tabela 78). Acresce também o facto de alguns alunos terem mais dificuldade em estabelecer a relação entre a representação gráfica e analítica dos sistemas, pelo que tomaram em consideração esse facto aquando da resposta à questão.

Tabela 78 – Aspetos em que os estudantes tiveram dificuldades em interpretar os resultados obtidos quando utilizaram o *Microsoft Mathematics*

Dificuldades	% de estudantes				
	N	PV	MV	S	NR
Nas operações com matrizes e determinantes	39,3	60,7	–	–	–
Na resolução gráfica de sistemas em IR^2	7,1	57,1	28,6	3,6	3,6
Na resolução gráfica de sistemas em IR^3	7,1	50,0	35,7	3,6	3,6
Na resolução analítica de sistemas	14,3	57,1	25,0	3,6	–

N – Nunca; PV – Poucas vezes; MV – Muitas vezes; S – Sempre; NR – Não responde.

Nas entrevistas, referindo-se às dificuldades de interpretação na resolução gráfica de sistemas, alguns alunos esclareceram:

> Às vezes, apresentava-me o gráfico e eu não conseguia interpretar bem aquele gráfico, o que representava. E não conseguia entender... E em IR^3 ainda complicava mais. (A8)

> Também era eu que não sabia mexer tão bem naquilo. Porque virava a imagem e ela aparecia-me sempre da mesma maneira [em IR^3]. Mas, dos gráficos já vem do secundário, não fazia, não percebia. Mesmo tendo a vantagem de ver melhor no *software*, para mim era a mesma coisa, não se percebia. Não sei, se é por ser gráficos, ter de imaginar as coisas. (A14)

Na resolução analítica, algumas dificuldades surgiram da interpretação da mensagem ou da solução apresentada pelo solucionador de equações, quando resolviam sistemas em que o número de equações não era igual ao número de incógnitas ou sistemas possíveis e indeterminados: "Se eu estava a fazer alguma coisa mal ou se era mesmo aquilo que dava, tipo um sistema impossível ou algo do género. Às vezes [no *software*] dizia que faltava uma incógnita. Às vezes tinha dificuldade na interpretação do conjunto-solução [nos sistemas indeterminados]" (A8). Há também alunos que indicaram ter tido muitas vezes dificuldades porque não praticaram: "Não. Eu no *software* não aproveitei muito para fazer essas coisas. Utilizei poucas vezes [o *software* nos sistemas]" (A25).

Quanto às principais vantagens da utilização do *software* (Tabela 79), a rapidez é a mais mencionada pelos alunos (71,4%), seguida da facilidade na resolução de determinados exercícios e do facto de permitir identificar erros (25%) ou evitar que se cometam (25%).

Tabela 79 – Vantagens da utilização do *Microsoft Mathematics*

Vantagens	% de estudantes
Maior rapidez	71,4
Facilita a resolução de determinados exercícios	25,0
Ajuda em termos de cálculo	17,9
Permite visualizar/representar gráficos em diferentes dimensões	14,3
Permite identificar ou evitar erros	25,0
Ajuda a compreender melhor os conteúdos	3,6
Permite verificar a possibilidade de efetuar determinadas operações matriciais	3,6
Permite verificar se está correto, quando não se faz no *software*	3,6
É mais motivante	3,6
Fica logo disponível em termos digitais	3,6
Não responde	–

Nas entrevistas, alguns alunos tentaram explicitar melhor as vantagens que indicaram e acrescentaram outras, como o facto de a língua utilizada ser o português:

> Foi mais rápido tirar dúvidas. Uma pessoa podia fazer no papel, chegava lá, dava um erro, pronto, está mal. E era divertido, puxava. Dava para ver aqueles desenhitos todos, enquanto no papel era mais complicado. (A2)

> Acho que a vantagem que eu vejo é uma pessoa não estar a perder tempo a fazer a soma de duas matrizes, ou a multiplicação... e isso tudo, ou a inversa, a transposta. E o facto de estar em português. Ainda agora me faz falta para algumas cadeiras. (A17)

Da mesma forma que o aluno A17, há também outros estudantes que dão realce à utilidade do *software* para outras aplicações: "Achei aquilo um espetáculo, professora. Até para

outras disciplinas, não só para álgebra aquele programa é espetacular. Experimentei somatórios, experimentei os gráficos que precisava para Análise de Processos, se não me engano. E depois diz a maneira de resolução" (A22).

No que diz respeito às desvantagens, a mais apontada (10,7%) foi que o *software* poderia provocar esquecimento dos procedimentos de cálculo (Tabela 80). De realçar que a maioria dos alunos (75%) refere não haver desvantagens ou não apresenta qualquer resposta. Esta ausência de resposta é também devida a não terem desvantagens a apresentar, como clarificaram os alunos nas entrevistas.

Tabela 80 – Desvantagens da utilização do *Microsoft Mathematics*

Desvantagens	% de estudantes
Provoca esquecimento dos procedimentos de cálculo	10,7
Os exercícios são mais elaborados	3,6
Saber inserir os dados corretamente	3,6
Torna-se incómodo carregar o portátil	3,6
Grau de dificuldade dos testes é maior	3,6
O *software* devia ser mais avançado	3,6
Não há desvantagens	28,6
Não responde	46,4

Nas entrevistas, focando o facto de se esquecerem dos procedimentos de cálculo, os alunos comentaram:

> Sim, sentia mais quando já estava mais habituada a trabalhar com ele e depois, quando não tinha e estava a resolver sem o computador, sentia essa dificuldade, ficava ali meio enferrujada que já nem sabia bem como é que aquilo se fazia. Mesmo assim é útil. Ajuda-nos e tira-nos um bocadinho de trabalho, facilita-nos. (A8)

> Esquecemo-nos de determinar os métodos ensinados, como calcular inversas, determinantes. (A16)

Por outro lado, alguns alunos afirmaram que, se cmpreenderem bem os procedimentos, conseguem reproduzi-los, mesmo sem o apoio do *software*.

> Se fixar bem, não se esquece assim, ... quando se aprende uma coisa é difícil de esquecer. (A7)

> Se vir outra vez como é que se faz, provavelmente sei fazer outra vez, mas dá para esquecer um bocado. Mas, mesmo assim, consegue-se fazer à mão. O que percebi sei fazer outra vez. [O *software*] foi mesmo só uma ajuda para ser muito mais rápido. (A14)

A aluna que considerou que o *software* devia ser mais avançado, na entrevista explicou o seu ponto de vista: "Devia ser mais evoluído na resolução de sistemas, por exemplo, porque havia coisas que não funcionavam exatamente. Para outros cálculos era importante também" (A26). No entanto, quando questionada sobre qual o *software* que consideraria recomendável, não indicou nenhum e, confrontada com a possibilidade de utilizar o *Matlab*, que é um *software* com que aprendem a trabalhar na UC de Informática, também no primeiro ano do primeiro semestre, não tem propriamente uma opinião formada: "Se calhar, provavelmente. Não faço a mínima ideia" (A26).

Face a esta situação, considerou-se pertinente questionar, nas entrevistas, os outros alunos sobre a possibilidade de utilizar o *Matlab* como alternativa ao *Microsoft Mathematics*, já que era um *software* mais avançado que todos os alunos conheciam. Conclui-se que quase todos os alunos manifestaram preferência pelo *Microsoft Mathematics* em detrimento do *Matlab*, pelo facto de este último não ser tão intuitivo, ser mais complicado e exigir mais tempo em termos de aprendizagem.

> Álgebra com o *Matlab* seria mais complicado. Porque muitas vezes está em inglês, os comandos já são diferentes. Já não se pode abrir uma matriz e preencher, tem de se por um espacinho, linhas... E lá [no *Microsoft Mathematics*] é só preencher basicamente. Então, para uma fase inicial de álgebra, para mim, serve. (A19)

5.2.3. Opinião sobre as aulas

No que concerne às dificuldades relativas a Matrizes e determinantes (Tabela 81), pelo menos metade dos alunos considera ter algumas ou muitas dificuldades em: escrever uma matriz na forma de escada por linhas (53,6%), aplicar as propriedades dos determinantes (50,0%), entender e aplicar o conceito de matriz ortogonal (64,3%) e entender e aplicar os conceitos de matriz simétrica e antissimétrica (71,5%).

Tabela 81 – Dificuldades dos estudantes relativamente aos conteúdos abordados sobre Matrizes e determinantes

Dificuldades em	% de estudantes				
	N	P	A	M	NR
Realizar operações com matrizes	10,7	50,0	39,3	–	–
Perceber a definição de inversa de uma matriz	21,4	35,7	42,9	–	–
Calcular a inversa de uma matriz	14,3	53,6	32,1	–	–
Calcular a matriz adjunta de uma matriz	10,7	42,9	35,7	10,7	–
Escrever uma matriz na forma de escada por linhas	10,7	35,7	50,0	3,6	–
Determinar a característica de uma matriz	17,9	50,0	25,0	7,1	–
Calcular determinantes	17,9	60,7	21,4	–	–
Aplicar as propriedades dos determinantes	7,1	42,9	46,4	3,6	–
Entender e aplicar o conceito de matriz ortogonal	3,6	32,1	50,0	14,3	–
Entender e aplicar os conceitos de matriz simétrica e antissimétrica	3,6	25,0	53,6	17,9	–

N – Não tive dificuldades; P – Tive poucas dificuldades; A – Tive algumas dificuldades; M – Tive muitas dificuldades; NR – Não responde.

Nas entrevistas, muitos alunos não conseguiram explicar porque é que tinham tido dificuldades em determinados conteúdos, alguns porque já não se lembravam e outros porque, ao estudar posteriormente para o exame, deixaram de ter essas dificuldades. Houve, no entanto, alunos que ainda conseguiram expor o seu ponto de vista. Assim, referindo-se ao facto de ter tido algumas dificuldades nas operações com matrizes, o aluno A15 referiu: "O que me meteu mais confusão era a multiplicação, não estávamos habituados. Mas depois, com o ritmo, já comecei a...". Outra aluna considerou que teve mais dificuldades na transposição: "Não sei, é porque é a primeira linha... tenho que andar sempre ali com os dedos e depois confirmar. A pessoa até se pode distrair um bocadinho e já pode trocar ali uma linha ou uma coluna e..." (A24). Os alunos A16 e A22 comentaram o facto de terem tido algumas dificuldades em escrever uma matriz na forma de escada por linhas: "Então, quando inventávamos regras novas, aí é que era. No início, eu confesso que às vezes inventava regras para lá colocar zeros" (A16); "Era o 000, não era? No início sim, mas depois, na altura do exame, eu já sabia fazer" (A22).

As dificuldades com os conceitos de matriz ortogonal, simétrica e antissimétrica são também associadas às dificuldades na resolução de uma ficha de trabalho em que, dadas as definições, eram pedidos exemplos de matrizes. Por exemplo, o aluno A16 fez referência direta a essa ficha de trabalho:

> Eu bem olhava, eu fui à internet pesquisar e tudo porque não tinha a noção destes conceitos. Depois, porque a professora foi explicando um a um, aí é que começou a entrar. (...). Nós, às vezes, até conseguíamos chegar a um exemplo, mas não estava de acordo com as coisas. O problema era chegar a um exemplo. (A16)

Já alguns alunos focaram-se especificamente no conceito de matriz ortogonal: "Às vezes os nomes assustam mais do que o que parece. É [uma definição] mais teórica. Uma matriz ortogonal se calhar não se ouve tanto" (A10). Neste caso, o aluno também teve algumas dificuldades no conceito de inversa e no seu cálculo: "Eu pensava que a inversa era uma coisa [o inverso de cada entrada da matriz] e afinal fazia-se de outra maneira" (A10).

No tema Sistemas de equações lineares metade ou mais alunos teve algumas ou muitas dificuldades em (Tabela 82): verificar possíveis soluções de um sistema de equações lineares (53,6%), resolver sistemas pelo método de eliminação de Gauss-Jordan (57,2%), resolver sistemas pelo método da inversa (50%), relacionar a representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema (67,9%) e realizar a discussão de sistemas com parâmetros (60,8%). De realçar que, centrando a análise na opção "muitas dificuldades", relacionar a representação gráfica com o tipo de sistema é a dificuldade que abarca maior percentagem de alunos (25%).

Tabela 82 – Dificuldades dos estudantes relativamente aos conteúdos abordados sobre Sistemas de equações lineares

Dificuldades em	% de estudantes				
	N	P	A	M	NR
Reconhecer sistemas de equações lineares	28,6	32,1	35,7	3,6	–
Escrever um sistema na forma matricial	35,7	35,7	28,6	–	–
Verificar possíveis soluções de um sistema de equações lineares	21,4	25,0	39,3	14,3	–
Resolver sistemas pelo método de eliminação de Gauss	25,0	32,1	32,1	10,7	–
Resolver sistemas pelo método de eliminação de Gauss-Jordan	14,3	28,6	39,3	17,9	–
Resolver sistemas pelo método da matriz inversa	14,3	35,7	39,3	10,7	–
Resolver sistemas pela Regra de Cramer	7,1	46,4	35,7	10,7	–
Escrever o conjunto-solução de um dado sistema	14,3	39,3	35,7	10,7	–
Relacionar a representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema	10,7	21,4	42,9	25,0	–
Realizar a discussão de sistemas com parâmetros	3,6	35,7	42,9	17,9	–

N – Não tive dificuldades; P – Tive poucas dificuldades; A – Tive algumas dificuldades; M – Tive muitas dificuldades; NR – Não responde.

No que diz respeito à relação da representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema, há alunos que analisaram as suas dificuldades tendo presente as que sentiram ao resolver uma ficha de trabalho em que tinham de estabelecer essa relação, como se pode verificar pelos seus comentários.

> Tive algumas dificuldades. Andar sempre a tentar vários sistemas para ver se aquilo dava ou não. Era mais em termos de inventar... havia uma que estava quase perto de ser paralela, púnhamos o número próximo e, mesmo assim, não dava. Mas depois conseguimos. (A14)

Os alunos tiveram mais dificuldade em resolver os sistemas pelo método de eliminação de Gauss-Jordan do que pelo método de eliminação de Gauss, sendo o problema principal o procedimento a seguir para colocar zeros acima da diagonal principal:

> Para baixo sabia como é que se fazia. O problema era para cima, chegava a meio, mas nunca consegui acabar. (A15)

> Ao fazermos, púnhamos de cima a zeros e voltávamos a colocar os de baixo com números. Então aquilo nunca saía do sítio. Chegava a um ponto que também cansava. (A14)

As dificuldades com o método da matriz inversa prenderam-se, por vezes, com a não comutatividade da multiplicação de matrizes, já que os alunos não sabiam qual o lado adequado para o qual deveriam passar a inversa da matriz, como se pode confirmar pelo comentário do aluno A10: "Talvez o próprio método fosse mais complicado. Acho que tinha a ver... não saber para onde passar a matriz [de que lado multiplicar]".

Explicando o facto de ter tido muitas dificuldades em realizar a discussão de sistemas com parâmetros, a aluna A5 refere:

> Eu achava que sabia fazer, nem tinha dúvidas. Às vezes calhava e dava. Na altura que uma colega perguntou [à professora] é que eu associei que aquilo que estive a fazer nunca esteve bem. (...) Ia sempre atribuindo o daqui [matriz dos coeficientes], mas havia uns casos que também tinha aqui deste lado [matriz dos termos independentes] e eu nunca tinha associado essas coisas. Eu não sabia que se "a" fosse diferente... era isso que me fazia confusão. O igual ainda vá que não vá, agora os diferentes baralhavam-me um bocadinho.

Considerando globalmente os temas em análise, os alunos tiveram mais dificuldade em acompanhar as aulas sobre os Sistemas de equações lineares, já que 42,9% dos estudantes concorda ou concorda totalmente que teve dificuldades em acompanhar as aulas sobre este tema, enquanto nos outros temas apenas 10,7% dos alunos concorda ter tido dificuldades (Tabela 83). Há alunos que atribuem esse facto à maior abstração dos sistemas: "Por causa mesmo dos gráficos e tudo lá. Porque matrizes e determinantes era aquilo, era resolver e está a andar. Agora sistemas era um bocadinho mais abstrato" (A16).

Tabela 83 – Temas em que os alunos tiveram dificuldade em acompanhar as aulas

Tema	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Matrizes	32,1	57,1	10,7	–	–
Determinantes	21,4	67,9	10,7	–	–
Sistemas de Equações Lineares	28,6	28,6	39,3	3,6	–

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Verifica-se também que 17,9% dos alunos discordam totalmente que tenham tido dificuldade em acompanhar as aulas de qualquer um dos temas em análise, subindo essa percentagem para 57,1%, se considerarmos os alunos que responderam "discordo ou discordo totalmente".

A razão mais apontada para as dificuldades em acompanhar as aulas é a falta de estudo e aplicação (50%), logo seguida da falta de pré-requisitos do ensino secundário e de concentração nas aulas (ambas com 42,9%) (Tabela 84). Os não respondentes (17,9%) correspondem aos alunos que discordam totalmente ter tido dificuldades nos temas em análise.

Tabela 84 – Razões a que se devem as dificuldades que os estudantes tiveram

Origem das dificuldades	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Falta de pré-requisitos do ensino secundário	21,4	17,9	39,3	3,6	17,9
Falta de motivação para a matemática	25,0	28,6	28,6	–	17,9
Falta de concentração nas aulas	14,3	25,0	39,3	3,6	17,9
Dificuldade em compreender as explicações da professora	21,4	53,6	3,6	3,6	17,9
Excessiva abstração dos conteúdos	21,4	35,7	21,4	3,6	17,9
Não gostar de trabalhar em grupo	21,4	42,9	17,9	–	17,9
Ter receio/não sentir à-vontade para colocar dúvidas	28,6	35,7	14,3	3,6	17,9
Não ter escolhido os colegas certos para o trabalho de grupo	42,9	28,6	7,1	3,6	17,9
Falta de estudo e aplicação	3,6	28,6	42,9	7,1	17,9
Pouca assiduidade às aulas	28,6	42,9	7,1	3,6	17,9
Não compreender as explicações dos colegas	14,3	46,4	21,4	–	17,9
Não saber utilizar o *software Microsoft Mathematics*	39,3	35,7	3,6	3,6	17,9

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Nas entrevistas, alguns alunos explicaram porque é que a falta de pré-requisitos do ensino secundário era uma das razões das suas dificuldades em acompanhar as aulas:

> No meu secundário, a parte da matemática foi muito má e eu acho que em alguns conceitos se sente a necessidade de alguma coisa que devia ter vindo de trás. Sim, o secundário, sem dúvida, interfere agora um bocado com o meu presente. Aquela parte que não foi bem cimentada e precisamos. Eu sinto que vim mal preparada. (A8)

A *falta de motivação para a matemática* advém da falta de empenho ou de um esforço infrutífero:

> Não estava muito empenhada. Foi mesmo começar mal e desistir logo. Se fosse hoje não desistia. (A2)

> Eu sei que tenho capacidades para fazer, eu sei que consigo, mas, se calhar, quando vou fazer não sai como eu quero. Então, de certa forma, às vezes uma pessoa se desilude um bocadinho. Porque é assim, sei que consigo e faço, mas depois tenho tudo ao contrário ou tenho mal e depois desisto. (A10)

Quanto à *falta de concentração nas aulas*, os alunos atribuem-na a aspetos distintos como, por exemplo, a falta de motivação para a matemática, a indecisão quanto à permanência no curso e ao facto de se distraírem com facilidade.

> Eu, quando não gosto de uma coisa, perco o interesse, quando gosto da disciplina ou da matéria foco mais. Mas devia ser ao contrário, devia concentrar-me mais no que não gosto e que tenho mais dificuldades em aprender. (A4)

> Eu sou mesmo uma pessoa distraída, e, como estava hesitante entre mudar e não mudar de curso, não me conseguia concentrar nada mesmo. (A23)

A referência à abstração dos conteúdos reporta-se essencialmente às definições de determinados tipos de matrizes: "Aqueles conceitos de matriz ortogonal, simétrica..., esses com nomes assim mais estranhos. A pessoa não lida tantas vezes e parece que está a ver uma coisa de outro mundo" (A10).

O não gostar de trabalhar em grupo ou não ter escolhido os colegas certos para trabalhar em grupo deveu-se, essencialmente, às incompatibilidades a nível de horários, no pouco à vontade para trabalhar com os colegas ou ao facto de todos os elementos terem dificuldades.

> Não é que eu não goste de trabalhar em grupo. Só que aqui tornou-se complicado pelo facto de não termos horários compatíveis. (A24)

> Se calhar podia ter escolhido outros colegas com quem estava muito mais à-vontade para trabalhar em grupo. Como eu disse, nunca tinha trabalhado com a A16 e tinha pouca afinidade com a A8 em trabalho de grupo. Foi mais por isso. Se calhar prejudicou a minha parte no grupo, colaborei menos, mas não o desempenho total. (A21)

> Não gostei muito de trabalhar no meu grupo. Éramos, por assim dizer, dois e tínhamos dificuldades. (A3)

O não ter à-vontade para colocar dúvidas também influenciou alguns alunos:

> Às vezes posso estar com uma dúvida, mas prefiro ir para casa e batalhar contra isto do que no meio da aula perguntar à professora. Acho que deve ser pela reação dos colegas, porque pode haver comentários. (A16)

> Às vezes a vergonha na sala de aula por causa de não estar a perceber. Acho que é uma pequena dúvida e o que vou dizer pode ser uma asneira. (A4)

Os alunos que aludem à falta de estudo e aplicação como razão das suas dificuldades pensam que um maior empenho da sua parte poderia contribuir para que aquelas diminuíssem: "Acho que devia rever mais ao chegar a casa depois das aulas em vez de deixar acumular mais tempo. Depois não me recordava tanto das coisas" (A11). Em alguns casos, aliada à falta de

estudo, aparece também a falta de assiduidade: "No início ainda estava a perceber, mas depois, quando faltei aquela semana, perdi muita matéria. E depois, como não estudei, não fui acompanhando a matéria. Quando voltei, muitas vezes não percebia o que é que eles estavam a fazer" (A28).

O facto de a turma ser heterogénea em termos de conhecimentos e de, por vezes, os alunos não estarem cientes dos conteúdos abordados, levou alguns a concordarem que "não compreender as explicações dos colegas" era uma das razões para as dificuldades em acompanhar as aulas.

> Muitas vezes elas explicavam-me, e eu acho que foi melhor do que se só estivesse num grupo do primeiro ano. Pelo menos as poucas coisas que consegui reter foram mesmo elas que me explicaram. Mas houve outros em que elas estavam mais avançadas e eu não entendia. (A23)

> A desvantagem é que também não estava assim dentro das coisas e das respostas dos outros... era muito difícil acompanhar o que eles estavam a dizer. (A25)

Durante a lecionação dos temas em análise, os alunos realizaram várias tarefas em grupo. Assim, um dos aspetos que se considerou pertinente foi saber a sua opinião sobre o funcionamento do grupo e o trabalho desenvolvido no seu seio (Tabela 85).

Tabela 85 – Opinião dos estudantes sobre o grupo e o trabalho desenvolvido

No trabalho de grupo	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Houve coordenação entre os elementos do meu grupo	10,7	14,3	57,1	14,3	3,6
Participei ativamente nas discussões do grupo	–	14,3	46,4	35,7	3,6
Foi mais motivante resolver as tarefas com os meus colegas do que resolvê-las individualmente	–	14,3	46,4	35,7	3,6
Foi mais motivante resolver as tarefas em grupo do que apenas passar do quadro as resoluções efetuadas pela professora	–	17,9	46,4	32,1	3,6
Ter de entregar o trabalho realizado no final da aula fez com que me aplicasse mais na resolução das tarefas	3,6	3,6	60,6	28,6	3,6
Tínhamos quase sempre dificuldade em iniciar a resolução das tarefas	–	25,0	64,3	7,1	3,6
Progredimos pouco na resolução das tarefas enquanto a professora não ajudava a tirar dúvidas	14,3	28,6	46,4	7,1	3,6
Foi complicado acabar o trabalho de grupo extra-aula porque tivemos dificuldade na resolução das tarefas	3,6	35,7	46,4	10,7	3,6
Foi complicado acabar o trabalho de grupo extra-aula porque não conseguimos reunir os elementos do grupo	7,1	25,0	35,7	28,6	3,6

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Os alunos (14,3%) que discordaram ter participado ativamente nas discussões do grupo apontaram diferentes razões. Enquanto uns alegaram que não estiveram presentes em todas as

aulas, outros referiram aspetos como a timidez, a falta de conhecimentos sobre os conteúdos, o facto de os colegas de grupo estarem mais dentro dos assuntos ou a falta de vontade de trabalhar. Por exemplo, referindo-se ao facto de ser tímida, a aluna A10 comenta: "Como eu sou assim um bocadinho mais reservada... se calhar podia ter comentado mais". Já a aluna A24 alega falta de conhecimentos pelo facto de faltar várias vezes: "Como faltei muitas vezes, não tinha aquelas bases para poder participar. O A19, como ia mais vezes, sabia mais aquilo que estava a dizer, que estava a fazer". A aluna A17, para além de referir a confiança no trabalho dos outros elementos do grupo, foca a falta de vontade para colaborar nas tarefas: "Às vezes, quando me perguntavam se estava bem, respondia: 'Não sei, faz lá como quiseres. Eu acredito em ti.' Era mais preguiça que outra coisa. Às vezes também fazíamos os três. Mas outras vezes pegava um". No entanto, esta aluna considerava que a aprendizagem só era efetiva quando se empenhava no trabalho: "Quando era eu que fazia, tudo o que eu escrevia ou tudo o que a professora dizia ficava, agora quando eram os outros a fazer..." (A17).

A maioria dos estudantes concorda que foi mais motivante resolver as tarefas com os colegas do que resolvê-las individualmente (82,1% concorda ou concorda totalmente). Os seus argumentos realçam o papel da partilha que este tipo de metodologia permite:

> Porque também há aquela de partilhar a informação. Não guardar a informação só para nós, estamos ao mesmo tempo a aprender e a ensinar. Para mim, são os dois métodos: receber e dar. Obriga-nos a pensar também. (A19)

> Há mais incentivo para fazer os trabalhos. Sozinha, se não entendia, largava o trabalho; em grupo tiras dúvidas com os colegas. (A4)

Todavia, também há alunos (14,3%) que discordam que tenha sido mais motivante resolver as tarefas com os colegas porque preferem trabalhar sozinhos ou porque o grupo não funcionou muito bem:

> É muito esforço, muito trabalho, muita dedicação. E, se calhar, nem toda a gente está disponível na mesma hora, no mesmo dia. Se fosse individual, uma pessoa fazia quando tinha disponibilidade. As dúvidas de uns não são as dúvidas dos outros e nem sempre a maneira de explicar a uma pessoa é a maneira de outra pessoa perceber. Eu acho que individualmente uma pessoa trabalha muito melhor. (A26)

> Se forem duas pessoas atinadas até resulta. Mas, quando está alguém tipo 'não estou preocupada' e leva as coisas na boa, acho que não resulta. Nunca gostei de grupos. Gosto de estudar sozinha, pois acho que tenho muito mais concentração do que quando estou com alguém. (A14)

Há alunos (78,5% concorda ou concorda totalmente) que consideram que foi mais motivante resolver as tarefas em grupo do que apenas passar do quadro as resoluções efetuadas pela professora:

> Há mais troca de... não é só estar ali a olhar. Obriga-nos a entender também. Nos anos anteriores passava-se e pouco se fazia. Porque não tínhamos tempo para raciocinar, pensar, porque a professora dizia o exercício e era logo passar, porque ela começava logo a resolver. Não nos obrigava a pensar. (A19)

> Ao fazer trabalho de grupo, somos nós que estamos a fazer. E ao estar a passar pela professora é uma coisa que já lá está feita. E só estamos a passar. (A10)

No entanto, há outros alunos que discordam (17,9%), argumentando que poderiam perceber melhor os conceitos se fosse a professora a resolver e a explicar simultaneamente. Por exemplo: "Às vezes tornava-se mais complicado nós estarmos a resolver todos juntos e conseguirmos os três perceber o que é que estávamos a fazer do que a professora estar no quadro a explicar o que estava a fazer" (A8).

Pelas entrevistas, verifica-se que a dificuldade em iniciar a resolução das tarefas deveu-se tanto a fatores intrínsecos como extrínsecos à própria tarefa. Assim, no primeiro caso, houve alunos que tiveram dificuldade na compreensão do enunciado ou na resolução da própria tarefa: "Porque para nós era matéria nova, nunca tivemos álgebra e para nós era um bocadinho complicado perceber a pergunta, saber o que é que tínhamos que fazer. Como é que se tinha de iniciar. Mas depois conseguíamos" (A15). Já os fatores extrínsecos apontam, essencialmente, para a falta de predisposição para iniciar a realização das tarefas: "Às vezes até podíamos perceber o que lá estava. Estávamos ali 15 minutos, quem começa e quem é que não começa... E depois: 'Vamos lá começar isto.' Lá começava alguém. É mesmo a 'preguicite'" (A17).

A não progressão nas tarefas, enquanto a professora não ajudava a tirar dúvidas, para além das dificuldades inerentes à própria tarefa, que impediam a continuidade da sua resolução, deveu-se igualmente ao facto dos alunos não se decidirem avançar para a questão seguinte, que poderiam saber resolver: "Não estamos a perceber isto, mas a stora já vem, vamos lá descansar um bocadinho. E estávamos à espera que a stora aparecesse. (...) É claro que assim nunca mais acabávamos de fazer o trabalho" (A17). Houve também dificuldades que tiveram a ver com a discussão desenvolvida no seio do grupo, quando não conseguiam chegar a acordo:

> Nos trabalhos de grupo, por vezes, tinha a certeza do que estava a dizer, mas eles diziam: 'Não, é desta forma.' E estávamos ali e às vezes nem começávamos, nem fazíamos e depois acabava por passar o tempo. Não estou a dizer que eu sabia, nem que os outros não sabiam, mas tínhamos que nos respeitar, não chegávamos

> a um consenso. Enquanto a professora não chegava ali e dizia: 'É para começar assim.' (A16)

Os alunos que consideraram ter sido complicado acabar o trabalho extra-aula, porque tinham dificuldades na resolução das tarefas, referiram que, por vezes, ficavam com dúvidas na aula e não iam esclarecê-las com a professora: "Às vezes uma pessoa sai com dúvidas, em parte podíamos ir tirá-las. Então ficamos com elas e não conseguimos terminar" (A10); ou, como por vezes faltavam às aulas, não sabiam o que haviam de fazer, aspeto que já se prende mais com a falta de coordenação do grupo.

> Lembro-me de uma situação em que A19 foi à aula e eu e a A2 não sabíamos que a professora tinha mandado um trabalho para casa, porque como não nos tínhamos cruzado a semana toda, porque não tínhamos aulas em conjunto, ele também não nos disse nada. Então caímos na aula ali um bocado de paraquedas. (A24)

Para a maioria dos alunos (64,3% concorda ou concorda totalmente) foi complicado acabar o trabalho extra-aula porque não conseguiram reunir os elementos do grupo. Segundo os alunos, isso deveu-se a incompatibilidades de horário, pelo facto de os elementos do grupo frequentarem UCs distintas, e, por conseguinte, terem horários distintos, por estarem ocupados com trabalhos para outras UCs, mas também pela dificuldade em abdicar de atividades pessoais em favor do grupo. Por exemplo: "Ser difícil reunir porque às vezes nem toda a gente pode. Eu tenho isto para fazer, eu tenho aquilo, eu tenho aquilo. Amanhã tenho eu, depois eu e depois nunca dá" (A22).

Embora tivesse havido alguma descoordenação dos grupos quando tinham de realizar o trabalho extra-aula, os alunos (25% discorda ou discorda totalmente) que se referem à não coordenação entre os elementos do grupo focam essencialmente o que se passou na sala de aula. Assim, essa descoordenação tinha a ver com o facto de alguns elementos faltarem às aulas ou não se interessarem por colaborar nas atividades do grupo.

> Acho que era assim um grupo um bocadinho disfuncional, no sentido de que muitas vezes só ia eu, depois se eu não ia, ia outro elemento, raras foram as vezes em que estávamos as três. E eu não gostava disso porque tive de procurar outras pessoas para perceber certas coisas, aquela coisa de trocar ideias. As pessoas não vêm à disciplina e depois acaba por se ser mais prejudicada. Assim como eu prejudiquei outras pessoas quando faltei. (A6)

> Havia sempre uma pessoa que não trabalhava, que não se importava minimamente. Estar a trabalhar em grupo e ser só eu a fazer não me está a

> beneficiar só a mim, também está a beneficiar os outros. Não acho justo que isso aconteça, se é trabalho de grupo tem de se trabalhar. (A26)

Quanto à opinião dos estudantes sobre as tarefas propostas, a maioria considerou-as motivadoras e discordou que fossem difíceis (Tabela 86). De destacar, no entanto, que 32,2% dos alunos ainda as considera difíceis. O aluno A8 explica: "Nós os três conseguíamos fazer, mas, se eu estivesse sozinha, por exemplo em casa, eu achava que não ia conseguir fazer". Outro aluno considera as tarefas difíceis, não propriamente pelo próprio grau de dificuldade, mas porque como às vezes faltava às aulas isso afetava o seu desempenho: "Às vezes faltava, não ia às aulas. Chegava lá na semana a seguir, já tinha a matéria dada e a ficha... depois, claro, uma pessoa, se não apanha a matéria, olha para a ficha e não sabe como lhe pegar" (A13).

Tabela 86 – Opinião dos estudantes sobre as tarefas propostas

Opinião sobre as tarefas	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Achei-as difíceis	7,1	60,7	28,6	3,6	–
Achei-as motivadoras	–	10,7	82,1	7,1	–
Permitiram-me discutir diferentes abordagens dos conteúdos	–	3,6	89,3	7,1	–
Fizeram-me refletir sobre vários conceitos/procedimentos em que tinha dificuldades	–	7,1	82,1	10,7	–

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Os alunos que consideraram as tarefas motivadoras basearam, essencialmente, a sua apreciação no desafio que as tarefas lhes suscitavam.

> Às vezes púnhamo-nos ao desafio para ver quem conseguia fazer o exercício primeiro. Era mais desafiante. (A22)

> Era um desafio para nós. Eu podia não conseguir, mas obrigava-me a ir para casa e ir atrás ver as coisas e estudar. (A8)

> Dá-nos luta para trabalhar. Porque se calhar, se a professora não nos desse essas fichas, muita gente ia para casa, encostava lá os livros até à próxima aula e, sabendo que tinham que entregar isto e que ia contar para nota, lá se agarravam a fazer. Acho que é aí que nos dá força para continuar e mesmo para aprender o que estivemos a dar na aula. (A16)

Há, no entanto, alguns alunos que consideraram que eram motivadoras pelo facto de serem feitas em grupo ou de se poder usar *software*.

> Uma coisa é estar a trabalhar sozinha, outra é estar a trabalhar em grupo. Se é um grupo que está a trabalhar mesmo, puxamos umas pelas outras. (A23)

> Ter o *software* também ajudava. Assim era mais motivador. Também as aulas eram dadas de maneira diferente e no meu caso ajudou. (A14)

A maior parte dos estudantes considerou que as tarefas lhes permitiram discutir diferentes abordagens dos conteúdos (96,4% concorda ou concorda totalmente) e que os fizeram refletir sobre vários conceitos/procedimentos em que tinham dificuldades (92,8% concorda ou concorda totalmente). Os alunos que discordaram deste último aspeto consideraram não ter tido dificuldades nesses temas ou venceram as dificuldades pelo facto de trabalharem em grupo e os outros elementos explicarem, pelo que não chegavam a refletir sobre elas.

> Foi mais por isso, já sabia [os conceitos e procedimentos]. E já não tinha muitas dificuldades nessa parte. (A19)

> Eu acho que, como nós estávamos a trabalhar em grupo, a A16 podia explicar e então recebia a explicação dela e não tinha aquele momento de reflexão. Como nós estávamos e nos ajudávamos uns aos outros, era mais por aí. (A21)

Durante as aulas, os alunos resolveram tarefas em que tinham de analisar as resoluções realizados por outros alunos sobre as mesmas questões. No questionário, manifestando-se sobre o contributo dessas tarefas para a sua aprendizagem, a maior parte considerou que estas lhes permitiram aprender a questionar a validade das resoluções (92,9% concorda ou concorda totalmente), desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos (96,4% concorda ou concorda totalmente), reconhecer erros que costumam cometer (96,4% concorda ou concorda totalmente), debater com os colegas alguns erros que também costumam cometer (92,9% concorda ou concorda totalmente), refletir sobre a solidez dos seus conhecimentos (92,9% concorda ou concorda totalmente) e clarificar alguns conceitos/procedimentos (89,2% concorda ou concorda totalmente) (Tabela 87). No entanto, 32,1% dos alunos considerou ter tido mais dificuldades em responder às questões.

Tabela 87 – Contributos das tarefas de grupo em que tinham de analisar as resoluções realizadas por outros alunos

Analisar resoluções permitiu	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Aprender a questionar a validade das resoluções	–	7,1	75,0	17,9	–
Desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos	–	3,6	82,1	14,3	–
Reconhecer erros que costumo cometer	–	3,6	82,1	14,3	–
Debater, com os meus colegas, alguns erros que também costumo cometer	–	7,1	78,6	14,3	–
Refletir sobre a solidez dos meus conhecimentos	–	7,1	89,3	3,6	–
Clarificar alguns conceitos/procedimentos	–	10,7	82,1	7,1	–
Ter mais dificuldade em responder à questão	17,9	50,0	32,1	–	–

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Nas entrevistas, os alunos que concordaram ter tido mais dificuldades em responder à questão, explicaram que tinham dificuldades em conseguir identificar a resposta correta, por vezes devido a não terem presentes os conceitos envolvidos.

> Em parte, até têm a sua lógica e são interessantes. Agora a mim custa-me compreendê-las. Olhar para aquilo e dizer por onde é que lhe vou pegar. Esses conceitos [envolvidos na questão] uma pessoa também não os tem presentes e depois acho que ainda se torna mais complicado. (A10)

A forma como organizaram o trabalho em grupo, em alguns casos, fez com que também não houvesse propriamente um debate de erros com os colegas: "Nas aulas, como estávamos em grupo, cada um fazia a sua pergunta e depois acabávamos por juntar tudo. Não havia: 'olha deves fazer assim ou, se calhar, se fizesses assim...'" (A12).

Nas entrevistas, falando sobre as vantagens deste tipo de tarefas, há estudantes que referiram que este género de questões lhes agradou, pois tinham um ponto de partida por onde começar a resolução, porque os envolviam mais na tarefa, fazendo-os estudar os conceitos/procedimentos aprendidos e ajudando-os a evitar determinado tipo de erros.

> Estas eram interessantes. Eu conseguia perceber o que estava mal e o que estava bem. Porque tinha respostas, tinha exemplos e conseguia. Mas também tínhamos de saber muitos conceitos, tínhamos que perceber os conceitos. Isto fazia com que estudássemos, que voltássemos atrás para ver a definição, o conceito, para ver o que realmente está mal. (A2)

> Foi melhor assim. Se calhar podíamos também adotar o método que eles adotaram e podíamos estar errados. E, assim, víamos onde é que os outros falharam e evitava que nós também falhássemos um pouco. (A1)

Quanto à interação e discussão que se estabeleceu no seio do grupo, os alunos reconheceram que há vários aspetos positivos, dando maior ênfase à partilha e construção conjunta de novo conhecimento (92,8% concorda ou concorda totalmente), ao facto de conseguirem ultrapassar algumas das suas dificuldades (89,3% concorda ou concorda totalmente) e à vantagem de evitar que cometessem erros que provavelmente fariam se resolvessem individualmente as tarefas (89,2% concorda ou concorda totalmente). No entanto, é de realçar que quase um quarto dos alunos não concorda que essa interação tenha contribuído para desenvolver a sua capacidade de argumentação (21,4% discorda) ou a sua autonomia (21,4% discorda ou discorda totalmente) (Tabela 88).

Tabela 88 – Aspetos para os quais contribuiu a interação e discussão estabelecida no seio do grupo

A interação permitiu	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
A partilha e a construção conjunta de novo conhecimento	–	3,6	71,4	21,4	3,6
Ultrapassar algumas das minhas dificuldades	–	7,1	75,0	14,3	3,6
Evitar que cometesse erros que provavelmente faria se resolvesse individualmente as tarefas	–	7,1	82,1	7,1	3,6
Desenvolver a minha autonomia na medida em que me permitiu resolver as tarefas sem estar sempre à espera das resoluções da professora	3,6	17,8	60,7	14,3	3,6
Desenvolver a minha capacidade de argumentação	–	21,4	60,7	14,3	3,6
Sentir mais confiança nas minhas capacidades	–	10,7	71,4	14,3	3,6

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Nas entrevistas, alguns alunos tentaram clarificar estes aspetos, referindo-se implicitamente à falta de confiança nos seus conhecimentos para expor a sua opinião ou para resolverem sozinhos as tarefas.

> Eu estava calada, não participava. Estava calada a ouvir e a ver. Como às vezes não tinha estado na aula anterior, não me sentia com capacidade de estar ali a expor a minha opinião. Também sei que sou bastante tímida. Quando não sei, quando não tenho a certeza, calo-me, ouço, vejo, mas não sou muito de participar. (A24)

Outros alunos explicaram porque é que a interação no grupo lhes permitiu desenvolver a capacidade de argumentação: "Nós discutíamos bastante no grupo. Acho que sim, que contribuiu bastante." (A21); ou a sua autonomia: "Como tínhamos que ser nós a resolver e porque era para entregar até ao fim da aula, então, sim, fazia com que nós tentássemos fazer." (A14). Outros focaram, ainda, a ajuda na interiorização dos conceitos: "Acho que isso nos ajuda mesmo a ficar com aquilo na cabeça. Porque há uma discussão, há umas ideias e a pessoa vai ficando com aquilo mais clarificado" (A5); ou a vantagem da interação no aspeto afetivo: "A interação com os outros colegas ajuda sempre. Em termos de haver pessoas que têm mais vergonha e ajudar a descontrair na aula..." (A10).

Os dois alunos que discordaram que a interação no seio do grupo lhes permitiu evitar erros que provavelmente fariam se resolvessem individualmente as tarefas, apresentaram perspetivas diferentes para essa discordância, embora ambas baseadas nos conhecimentos do grupo. Assim, um deles considera que, pelo facto de os conhecimentos dos colegas serem inferiores aos seus, a discussão não evitou que cometesse menos erros do que os que cometeria individualmente: "Também havia vários patamares de conhecimento. Eu, por acaso, sabia..." (A19); e o outro porque todos os elementos do grupo tinham dificuldades: "Por vezes, achávamos os dois a mesma coisa errada." (A3).

Este aspeto dos conhecimentos do grupo é também referido por outra aluna que, embora considere, no geral, positiva a interação que se desenvolveu, declara que, eventualmente, poderia ter sido preferível trabalhar com um grupo que não tivesse conhecimentos anteriores.

> Sim [seria melhor trabalhar com alunos a frequentar pela primeira vez] porque eles já tinham tido esta disciplina e, por algum motivo, também não a conseguiram fazer. E às vezes eles discutiam muito e o que diziam não era o que estava certo. Como era a minha primeira vez, havia coisas que eu pensava, que podiam estar certas, mas não dizia porque achava que eles deviam saber mais do que eu. Se tivesse trabalhado com um grupo que começasse do zero, se calhar era um bocadinho diferente. (A2)

Em algumas aulas houve debate em grande grupo, tendo os alunos sido confrontados com as diferentes resoluções que apresentaram para as tarefas propostas. Expressando a sua opinião sobre esse confronto, quase todos os alunos concordaram ou concordaram totalmente com as doze afirmações que estabelecem uma visão favorável desse processo para a aprendizagem (Tabela 89).

Tabela 89 – Contributos da discussão das diferentes resoluções das tarefas

A discussão contribuiu para	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Conhecer outras formas de responder às questões	–	–	82,1	17,9	–
Identificar os erros que cometi	–	10,7	71,4	17,9	–
Desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos	–	7,1	82,1	10,7	–
Aprender a questionar a validade das resoluções	–	3,6	89,3	7,1	–
Perceber a importância de utilizar os nossos próprios erros como meio de aprendizagem	–	3,6	78,6	17,9	–
Aprender a refletir melhor sobre as minhas respostas	–	3,6	89,3	7,1	–
Clarificar alguns conceitos/procedimentos	–	3,6	85,7	10,7	–
Melhorar a minha capacidade de argumentar	–	3,6	85,7	10,7	–
Melhorar a minha capacidade de comunicar matematicamente	–	3,6	89,3	7,1	–
Ultrapassar algumas das minhas dificuldades	–	3,6	85,7	10,7	–
Participar ativamente nas aulas	–	14,3	71,4	14,3	–
Aumentar a confiança nas minhas resoluções	–	7,1	78,6	14,3	–

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Nas entrevistas, falando livremente sobre este processo, alguns alunos esclareceram porque é que o consideram vantajoso, focando alguns dos aspetos já referenciados na tabela anterior. Assim, há alunos que comentam a vantagem do confronto lhes permitir conhecer diferentes formas de responder às questões ou identificar/corrigir erros.

> Sim, foi vantajoso, porque havia várias maneiras de responder às questões. Então, sabíamos que a nossa estava certa, mas a de outros colegas também estava. Então ajudava-nos a ter outras maneiras de fazer exercícios. Agora, quando estava mal,

> apercebíamo-nos logo que era a nossa [resolução] que estava ali. Isso já era para nós vermos que não fizemos correto. (A14)

> Beneficiou sim, porque o confronto geral sempre nos leva a pensar de forma diferente. Por exemplo, onde é que nós erramos, porque é que erramos, o que é que fizemos de errado. (A18)

Há também quem foque o aspeto desse confronto "obrigar" a uma participação mais ativa nas aulas ou constituir uma mais-valia para desenvolver a capacidade de argumentação: "Como aparecia ali o nosso nome, e se alguém tivesse alguma dúvida, nós tínhamos que nos defender e mostrar como é que fizemos aquilo. E isso obrigava-nos a participar de forma ativa, a discutir e argumentar" (A1).

Há, ainda, quem foque o aspeto motivacional pelo facto de acertarem na resposta ou porque veem o erro como um incentivo para melhorarem o seu desempenho.

> Quando fazíamos certo, ficávamos todas felizes, é um ganho saber nem todos conseguiam resolver e nós tivemos esse privilégio. Quando estava errado, ficávamos desanimadas. (...) Mas ajudou, porque assim podíamos ver onde é que tínhamos errado e corrigir e dizer: 'Para a próxima não vai ser assim, vamos conseguir'. (A18)

Terem faltado a algumas aulas, não terem participado ativamente nas discussões do grupo, em que se resolveram as tarefas, ou terem dificuldade em entender os conteúdos, foram razões apresentadas para não desenvolveram algumas das competências que se pretendia alcançar com a discussão em grande grupo. Por exemplo, os alunos A24 e A23, explicando porque é que discordam que o confronto lhes permitiu identificar os erros que cometeram ou participar ativamente nas aulas, comentam:

> Se eu não vinha às aulas e não participava, também não me sentia segura para dar a minha opinião sobre aquele exercício. (A24)

> Às vezes era um trabalho em que não tinha assim tanto domínio sobre a matéria. Se a professora me perguntasse, já não sabia muito bem o que é que havia de responder. (A23)

O receio de errar fez com que uma aluna discordasse que o confronto lhe permitiu participar ativamente nas aulas: "Prefiro estar calada do que dizer barbaridades. Às vezes não respondia e era mesmo a resposta que eu pensava. Outras vezes, quando dizia alguma coisa, estava mal. Então é melhor estar calada. Se não tenho a certeza, hesito um bocado e fico calada" (A17).

As resoluções dos trabalhos foram objeto de apreciação por parte da professora, sendo por vezes devolvidas com sugestões para reformular ou completar as respostas. A maior parte dos alunos concordou ou concordou totalmente com as afirmações que estabelecem uma apreciação favorável deste processo. Porém, é de realçar que 28,6% dos alunos consideraram que a reformulação era um trabalho acrescido, pelo que nem sempre realizaram as correções solicitadas (Tabela 90). Referindo-se nas entrevistas a este aspeto, alguns alunos alegaram que não se empenharam no estudo, que havia falta de predisposição dos elementos de grupo para se juntarem ou falta de tempo.

> Não fazíamos por causa da preguiça. Não nos apetecia fazer, porque há tempo para tudo, que é mesmo assim. (...) Nós é que: 'deixamos para amanhã'. É a preguiça, falta de vontade. (A17)

> Havia alturas que tinha mais coisas para fazer. E quando foi perto das frequências, da entrega de relatórios. Essas coisas às vezes acontecem porque fica sempre alguma coisa para trás. (A10)

Tabela 90 – Contributos do processo de revisão/reformulação das resoluções dos trabalhos

O processo de reformulação	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Permitiu-me obter um *feedback* importante sobre o trabalho realizado	–	–	67,9	28,6	3,6
Ajudou-me a identificar os erros cometidos	–	–	71,4	25,0	3,6
Permitiu-me tomar consciência das minhas dificuldades	–	3,6	64,3	28,6	3,6
Fez-me rever alguns conceitos que ainda não tinha compreendido	–	10,7	67,9	17,9	3,6
Contribuiu para eu ultrapassar algumas dificuldades	–	7,1	64,3	25,0	3,6
Contribuiu para que estivesse mais atento às discussões em grande grupo realizadas na aula, pois podia reformular o que entreguei	–	10,7	67,9	17,9	3,6
Era um trabalho acrescido pelo que nem sempre realizei as correções solicitadas	32,1	35,7	28,6	–	3,6

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Nas entrevistas, comentando as vantagens da reformulação dos trabalhos, os alunos referiram-se ao facto de terem *feedback* sobre a correção das suas resoluções, à possibilidade de corrigir o erro, aprender com essa correção, evitar a repetição do erro e terem um incentivo para o estudo: "É muito importante porque vemos onde estão os erros, corrigimos e, tantas vezes insistimos, que até já entra. (...) E permite-nos também ter uma ideia daquilo que fizemos. E rever e estudar, porque, ao fim e ao cabo, estudamos outra vez" (A26).

Mesmo os alunos que não fizeram todas as reformulações dos trabalhos pensam que o processo tem vantagens para a sua aprendizagem, pois consideram que o *feedback* dado era

importante: “Esse trabalho também nos ajudou a ver que erramos. Nós pensávamos que estava bem. Acho que desta forma nos ensina a pensar e a saber onde é que fizemos o erro” (A10).

Durante o semestre, os alunos realizaram dois minitestes sobre os temas em análise, ou seja, um sobre Matrizes e determinantes e outro sobre Sistemas de equações lineares. Após a correção, foi-lhes dada a oportunidade de tentar explicar o que tinham errado e de reformular as suas respostas (revisão dos minitestes). Tendo em atenção a opinião dos estudantes sobre essa revisão (Tabela 91), contata-se que este processo trouxe vantagens para a sua aprendizagem, pois mais de 85% dos alunos concorda ou concorda totalmente com as seis afirmações que retratam uma avaliação positiva desse processo de revisão.

Tabela 91 – Opinião dos estudantes sobre a revisão dos minitestes

Na revisão	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
O confronto com os meus próprios erros contribuiu para que tomasse consciência das minhas dificuldades	–	3,6	64,3	28,6	3,6
Saber que podia recuperar uma parte da pontuação perdida foi um incentivo para que estudasse um pouco mais	–	–	50,0	46,4	3,6
Explicar qual a causa dos meus erros contribuiu para que tomasse consciência de quais os procedimentos/propriedades que não são válidos	–	10,7	60,7	25,0	3,6
Este processo tornou-me mais autónomo na resolução das tarefas	–	7,1	75,0	14,3	3,6
Este processo estimulou-me a refletir sobre o meu raciocínio	–	3,6	75,0	17,9	3,6
As questões/sugestões da professora ajudaram-me a refletir sobre o trabalho realizado	–	3,6	67,9	25,0	3,6

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Nas entrevistas, os alunos enfatizaram as vantagens da revisão dos minitestes, focando a recuperação da pontuação, a motivação para o estudo e a apropriação dos procedimentos corretos de resolução.

> Uma pessoa fazia o miniteste e nem corria assim tão bem. Mas ia para casa, fazia os exercícios ou depois acabava por os resolver lá na aula. Fazia um esforço para resolver bem, para ter mais aqueles pontinhos extra. É uma motivação. (A12)

> Vantajoso é. Para além de nos poder melhorar a nota, também vemos onde é que erramos e, pronto, arranjamos outro método, outra forma de resolução. (A1)

No entanto, nem todos os alunos aproveitaram na totalidade as potencialidades dessa revisão pois, embora pudessem ter resolvido novamente os minitestes em casa, para posteriormente terem mais facilidade na respetiva revisão, apenas 10 estudantes o fizeram para os dois minitestes, tendo seis alunos tomado essa decisão somente no caso do segundo miniteste.

A maior parte dos alunos que não tentou resolver novamente os minitestes considerou que essa atitude se deveu a alguma autoconfiança na correção das suas respostas aquando da sua realização.

> Se tivesse resolvido em casa, chegava à reformulação e conseguia subir a minha nota. Neste caso isso não aconteceu. Mas muitas vezes ia para lá com a ideia de que aquilo ia estar certo. Eu pensava que ia ter boa nota. E lá está, também me permitiu ver o meu erro. (A26)

Outros alunos alegaram falta de tempo, desmotivação, falta de reflexão sobre o assunto ou pouca vontade de trabalhar.

> Não resolvi. Passou de parte, falta de tempo. (A4)

> Lá está a desmotivação também vem. É errado, uma pessoa não deve desmotivar assim. (...) Se fosse hoje, já pensava de maneira diferente, já viria aqui [ao gabinete] mais vezes tirar dúvidas. (A24)

> Tempo tivemos. Acho que nem sequer raciocinamos, na altura nem pensamos que poderia ser importante. (A22)

> Agora vou-me dar ao trabalho. Chego lá e faço lá isto. (...) Chego lá e vejo o que está bem e o que está mal. Logo vejo por um colega, ou assim. (A17)

Os alunos que mudaram de atitude simplesmente aquando da revisão do segundo miniteste, tomando a decisão de o resolver novamente para preparar a respetiva retificação, reconheceram que da primeira vez não tinham refletido sobre as vantagens da situação ou não se tinham inteirado sobre os procedimentos.

> O primeiro não resolvi nada [em casa]. Se calhar nem nós nos lembrámos de poder já levar as coisas feitas. E o segundo já resolvi. Já tinha visto. (A10)

> No primeiro não, que eu não sabia que se podia levar. Mas depois sim. Eram dois estudos: eu fiz o teste, tive dúvidas, chegava a casa ia fazer a correção, já tirava as dúvidas. Porque quando estou a estudar pela primeira vez não sei o que é que vai sair, não é? E depois via as minhas dúvidas e já as clarificava. (A5)

A maioria dos alunos aprovou que a revisão dos minitestes tivesse sido realizada presencialmente. Na sua opinião se a revisão fosse efetuada "em casa" não seria tão profícua, por não haver garantias que fossem eles a resolver, porque não se organizariam para fazer a revisão atempadamente ou porque poderiam ter mais dificuldades, como se pode constatar pelos seus comentários nas entrevistas.

> Foi melhor. Se levássemos para casa, se calhar não íamos fazer por nós, juntávamo-nos todos e há sempre alguém que faz mais do que nós. (A2)

> Depois, uma pessoa em casa iria dizer: 'Faço hoje, faço amanhã, faço passado' e no dia não temos nada feito. E, se for na aula, já não se vai sair de lá sem fazer ou tentar fazer. (A10)

> Se tínhamos alguma dúvida, podíamos perguntar à professora ou comentar com os colegas. Se se estiver em casa sozinha, não se tem certezas, nem é a mesma coisa. (A15)

Há, porém, alunos que preferiam ter realizado a revisão "em casa". Um deles alega que teria mais material de apoio: "Se fizesse em casa, tinha ali material de apoio e via no caderno e via isto e aquilo e talvez fizesse bem. Na aula, como também não ia tão preparada, chegar ali e fazer, não tinha tantas coisas para me apoiar. Se calhar fazer em casa era mais fácil" (A1). Outro invoca o facto de ser problemático, face ao horário, comparecer nas revisões: "Tínhamos de vir para aqui de manhã. Às vezes, uma desvantagem também pode ser a falta de tempo, porque nós já temos um horário muito preenchido" (A6).

As questões/sugestões escritas nos minitestes pela professora aquando da primeira correção, com o intuito de ajudar os alunos na identificação dos erros e na procura da resposta correta, não tiveram o mesmo impacto para todos os alunos. Para muitos deles essas indicações foram uma mais-valia para detetarem os erros e os corrigirem: "Ajudou porque, às vezes, a pessoa vê que está ali mal, mas não consegue, logo de imediato, descobrir e avançar dali para a frente. Então, com essas notas, era mais fácil, já sabíamos o que procurar em concreto" (A8). Porém, houve alunos que não deram grande importância a essas anotações, limitando-se a resolver novamente as questões, muitas vezes sem as interligar com o percurso anteriormente efetuado.

> Eu liguei [às notas], só que algumas frases deixavam ali muito em aberto. E eu, sinceramente, já não conseguia. Faltava ali qualquer coisa que me fizesse..., faltava um clique. (...). Como é isto afinal? Está errado, agora porquê? (A19)

> Eu limitei-me mais a resolver. Às vezes ia ver o que é que a professora punha lá, porque também gosto de saber, mas não tentei. (A24)

Desta forma, é perfeitamente natural que estes alunos discordassem que explicar qual a causa dos seus erros tivesse contribuído para que tomassem consciência de quais os procedimentos/propriedades que não eram válidos.

Quando questionados sobre a importância das estratégias utilizadas na UC, a maioria dos alunos concordou ou concordou totalmente que todas elas foram relevantes (Tabela 92). No entanto, é de realçar que o trabalho de grupo extra-aula foi a estratégia em que mais alunos

(25%) discordaram que tenha sido importante para a sua aprendizagem. Explicando este facto, os alunos alegaram razões essencialmente relacionadas com o funcionamento do grupo, como a falta de disponibilidade ou de vontade para reunir, aspetos também já evidenciados quando os alunos deram a sua opinião sobre a forma como decorreu o trabalho de grupo.

> Eu falo pelo meu grupo, como lhe disse, nós éramos de longe e nunca tínhamos muita disponibilidade para nos juntar e tínhamos o trabalho repartido. (A21)

> Fora da aula, fazemos os exercícios para despachar porque temos de ir às nossas vidas. Para mim, aprender é na aula, só isso. (A20)

Tabela 92 – Importância das estratégias utilizadas para a aprendizagem dos alunos

Estratégias	% de estudantes				
	DT	D	C	CT	NR
Uso do *Microsoft Mathematics* nas aulas	3,6	7,1	42,9	46,4	–
Uso do *Microsoft Mathematics* nos minitestes	3,6	10,7	39,3	42,9	3,6
Discussão em grande grupo (alunos e professora)	–	–	78,6	21,4	–
Resolução de algumas tarefas no quadro pela professora	–	–	75,0	25,0	–
Exposição de conteúdos pela professora	–	3,6	82,1	14,3	–
Trabalho em grupo nas aulas	–	3,6	67,9	28,6	–
Trabalho em grupo extra-aula	–	25,0	57,1	17,9	–
Reformulação das resoluções resultantes do trabalho de grupo	–	3,6	71,4	25,0	–
Realização de minitestes no fim de cada tema	–	7,1	42,9	46,4	3,6
Revisão dos minitestes	–	3,6	46,4	46,4	3,6
Utilização de formas diversificadas de avaliação	–	7,1	57,1	35,7	–

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente; NR – Não responde.

Como se pode verificar, a exposição de conteúdos pela professora é uma estratégia que quase todos os alunos (96,4%) concordam ou concordam totalmente que é importante para a sua aprendizagem. Nas entrevistas, verificou-se que o único aluno que discordou que essa estratégia era importante considerou que nas aulas deveria ter havido mais tempo dedicado à exposição de conteúdos: "Devia haver uma maior introdução, pelo menos. Dar um exemplozinho, não começar logo do zero. Não há acompanhamento [da nossa parte]. É logo um salto assim de gigante" (A19). Este apelo à maior exposição de conteúdos ou ao aumento do número de tarefas resolvidas no quadro pela professora foi também focado por outros alunos.

> Mesmo que a professora seguisse com isto dos trabalhos de grupo, preferia que desse mais matéria no quadro. (...) Se a professora estiver a explicar e eu estiver atenta, percebo mais assim do que se estiver a fazer um exercício com a minha colega do lado. Não sei porquê. Se calhar é o hábito. (...) É bom estar ali sentada, a stora a resolver e nós a passar. (A17)

Os alunos que não consideraram que a realização dos minitestes ou a sua revisão tenha sido importante para sua aprendizagem basearam-se no facto de não terem sentido benefícios

em termos de classificação: "Não [foi importante a revisão] porque não ajudou muito na nota" (A3). Para além disso, consideram que não foi importante haver formas diversificadas de avaliação porque estão mais habituados a fazer apenas testes: "Eu preferia fazer os testes. É uma questão de hábito" (A3).

O aluno que discordou que a estratégia de trabalho de grupo nas aulas tenha sido importante alegou que isso se deveu à descoordenação do grupo: "Acho que não foi uma estratégia importante porque o meu grupo na aula não resultou" (A6).

Quanto ao uso do *Microsoft Mathematics* nas aulas ou nos minitestes, os alunos que discordaram ou discordaram totalmente que tenha sido importante para a sua aprendizagem justificaram o seu ponto de vista referindo que gostam mais de fazer à mão ou de não se terem apercebido das suas potencialidades: "Gosto mais de fazer à mão" (A24, A20); "Nunca usei nos minitestes. (...) Como não trabalhei, não via as vantagens" (A12).

Ainda nas entrevistas, fazendo comentários globais sobre as estratégias utilizadas, alguns alunos focaram as vantagens do trabalho de grupo em relação a um método mais centrado no professor:

> Achei mais fácil assim, mais acessível do que as aulas normais de quadro que tive durante dois anos. E há alunos que têm medo de perguntar, de levantar o dedo e tirar uma dúvida. E assim, em grupo, pergunta-me a mim, pergunta à do lado. Mesmo que não saibamos responder, vamos perguntar e, às vezes, na aula [mais expositiva], não é assim que funciona com o professor. (A5)

> Nos outros anos, eu chegava ao fim e não percebia nada: podia estudar, mas era só praticamente resolver os exercícios e quase os copiava do caderno. Este ano não, eu sentava-me e tentava resolver os exercícios e ia estudando. (A12)

> Menos exercícios, mas mais rentável a aula. Demos a matéria toda e eu percebia-a e, no outro ano, demos a matéria toda, fizemos muitos mais exercícios e eu não entendia. (A5)

Na última questão do questionário, pedia-se que os alunos, centrando-se nas aulas sobre Matrizes, Determinantes e Sistemas de equações lineares, fizessem comentários que considerassem importantes. Dos sete alunos que responderam, uns consideram ter sido vantajoso haver várias estratégias tanto de ensino como de avaliação.

> Dado o meu conhecimento do que foram os anos anteriores, acho que este ano foi muito mais produtivo devido à variedade de métodos para explicar a matéria. Isto faz com que os alunos estejam mais motivados e deem algo de si para estudar mais e de melhor forma. Para além disso, acho que os alunos têm possibilidades de tirar melhor proveito em termos de notas finais. (A27)

> Há três anos que frequento esta cadeira, (...) [este] foi o ano que mais contribuiu para uma melhor e rápida aprendizagem. O uso do *software* foi uma ideia muito inteligente, ajudou bastante. Os minitestes, os trabalhos de grupo e as suas correções contribuíram sem dúvida para o esclarecimento de dúvidas e erros cometidos, fazendo com que ficassem até memorizados, e assim não havia necessidade de chegar a casa e ainda ter de rever a matéria. (A5)

Outros focaram-se apenas num ou dois aspetos mais particulares, como a utilização do *software Microsoft Mathematics*, o tipo de avaliação efetuada ou os trabalhos em grupo.

> Gostei da maneira de avaliar e gostei pela capacidade da professora tentar estar disponível para tirar dúvidas e explicar a matéria fora das aulas. (A16)

> Sabendo o raciocínio para poder dar os passos importantes para a resolução dos itens, o auxílio do *Microsoft Mathematics* tornou o processo de executar as tarefas mais fácil. (A18)

> Os trabalhos em grupo foram bons para a aprendizagem e ao nível de exercícios eram razoáveis. (A20)

Há, ainda, alunos que apontaram algumas desvantagens: "(...) os trabalhos de grupo nem sempre foram realizados em grupo, o que nem sempre foi bom para todos os elementos" (A26); "Podíamos ter feito mais exercícios com o acompanhamento da professora" (A21).

Alguns alunos, que não tinham feito comentários na última questão do questionário, resolveram fazê-lo durante as entrevistas, incidindo na vantagem do ensino centrado no aluno e na questão motivacional.

> O método usado este ano em álgebra exige mais trabalho da nossa parte, porque se não tivermos métodos de estudo, como é o meu caso, somos obrigados a ganhá-los, mais que não seja na aula, em vez de estar à espera que as pessoas façam e copiar. (A6)

> Eu acho que este ano álgebra foi mais fácil. Também me apliquei mais um bocadinho. (...) Há mais espaço para pensar mais um bocadinho porque sempre tinha o programa que ajudava a fazer as coisas mais rápido. Acho que este ano foi mais motivante. (A12)

Nas entrevistas, pediu-se também aos alunos que indicassem o aspeto da UC que consideraram mais positivo assim como o mais negativo (Tabela 93 e Tabela 94). No primeiro caso, o mais apontado foi o facto de poderem utilizar o *software Microsoft Mathematics* (28,6%), logo seguido da metodologia de trabalho e da avaliação utilizada durante a UC (21,4%).

Tabela 93 — Aspetos mais positivos da unidade curricular segundo os alunos

Aspetos positivos	% de estudantes
Utilizar o *software Microsoft Mathematics*	28,6
Metodologia de trabalho e de avaliação utilizada durante a unidade curricular	21,4
Revisão dos minitestes	10,7
Realização de minitestes	7,1
Forma como foi organizada a avaliação	7,1
Haver fichas de trabalho para resolver quase todas as aulas	7,1
Debate em grande grupo	7,1
Durante a aula ter mais tempo para pensar/raciocinar	3,6
Não ser só a professora a falar, haver também troca de ideias	3,6
Sem opinião	3,6

Os aspetos que os alunos consideraram mais negativos foram o barulho que se gerou na sala de aula devido ao trabalho em grupo (14,3%) e o modo de funcionamento do grupo (14,3%).

Tabela 94 — Aspetos mais negativos da unidade curricular segundo os alunos

Aspetos negativos	% de estudantes
Barulho devido ao trabalho em grupo	14,3
Funcionamento do grupo	14,3
Haver muitos trabalhos de grupo	7,1
Haver trabalho de grupo extra-aula	3,6
Os trabalhos serem realizados na aula, pelo tempo que se perde	3,6
Trabalho que dava demonstrar quando se tinha de usar as definições	3,6
Tempo que se demorou a realizar/discutir as tarefas	3,6
Usar o *Microsoft Mathematics*	3,6
Ter de esperar para tirar dúvidas quando fazia trabalho em grupo	3,6
Quererem todos tirar dúvidas ao mesmo tempo	3,6
Excesso de trabalho no fim do semestre	3,6
Fazia falta a professora resolver mais exercícios no quadro	10,7
Hora dos minitestes ser de manhã	3,6
Testes/exames complicados	3,6
Sem opinião/Não sabe	10,7
Não teve aspetos negativos	7,1

Para efeitos do estudo, considerou-se que os alunos reprovaram à UC se não tiveram aprovação no final das épocas normal, de recurso e de dirigente associativo de março. Integrou-se também esta última época por ter decorrido relativamente próximo do fim do semestre. Relembra-se que, para terem oportunidade de ficar aprovados à UC de ALGA, os alunos tinham de comparecer pelo menos a um exame (época normal ou de recurso), já que a ponderação

deste era 60% da nota final. De realçar que quatro alunos optaram por não realizar qualquer exame e alguns dos alunos que reprovaram na época normal de exames não compareceram ao exame na época de recurso. Referindo-se a este facto, os alunos comentam que perderam a motivação: "Desisti, pronto. Não vou conseguir fazer" (A2); "Faltei ao recurso porque fiquei desmotivada" (A6).

Neste contexto, dos 28 alunos, 13 ficaram aprovados à UC, o que corresponde a uma taxa de aprovação de 46,4%. Se se tiver como base apenas os alunos que compareceram a todos os momentos de avaliação que eram imprescindíveis para a sua aprovação, isto é, 24 alunos, essa taxa sobe ligeiramente para 54,2%. Embora a percentagem de aprovação alcançada não seja de todo satisfatória, é superior à taxa de aprovação a ALGA no curso em qualquer dos três anos letivos anteriores, pois em nenhum deles se ultrapassou os 28,6%.

Nas entrevistas, indagaram-se os 15 alunos que não obtiveram aprovação sobre os principais motivos a que atribuíam a sua reprovação à UC, concluindo-se que a razão mais apontada foi a falta de estudo (Tabela 95).

Tabela 95 — Motivos que segundo os alunos levaram à sua reprovação na unidade curricular ALGA

Motivos	% de estudantes
Falta de estudo/empenho	73,3%
Ter de estudar para outras unidades curriculares	33,3%
Dificuldades na compreensão dos conteúdos	20,0%
Razões externas à unidade curricular	20,0%
Desmotivação	20,0%
Excessiva autoconfiança nos seus conhecimentos	13,3%
Dificuldade em se expressar por escrito	6,7%

Os comentários avançados pelos alunos clarificam algumas das razões apontadas:

> A álgebra não é que fosse complicado e eu até gostava da matéria. Se calhar foi falta de estudo. Não me empenhei tanto. Foi mesmo isso. (A1)

> Um bocadinho falta também de estudo. (...) Achava que sabia mais do que aquilo que sabia. (A11)

> Eu comecei a estudar e a tentar esclarecer dúvidas. Mas depois, com a matéria, fiquei um bocado baralhado e não compreendia quase nada durante as aulas, ficava um bocadinho difícil. (...) Nós, que somos do 1.º ano, ficamos com um bocadinho de dificuldades em entender a matéria. (A25)

> Porque fiquei desmotivada. Ao ver que tinha estes valores todos [nas outras componentes de avaliação] e não consegui fazer [na época normal], desmotivei por aí. Depois já não vim ao recurso. (A6)

> Raciocínio ainda vou tendo, mas falta-me expressar-me por escrito. Não consigo. (A19)

O facto de terem de estudar para outras UCs e considerarem que não conseguiriam acompanhar todas a que estavam inscritos, ou por os exames serem em dias próximos, fez com que os alunos fizessem algumas opções, muitas vezes em detrimento da UC de ALGA: "Eu tive três exames seguidos e nas outras queria passar. (...) Não estudei tanto [para ALGA] como para qualquer uma das outras" (A26); "Mas foi uma questão de escolha. Escolhi logo como opção Cálculo" (A8).

As razões externas à UC têm a ver com problemas pessoais, que levaram a alguma falta de concentração, o facto de ser trabalhador, o que também contribuiu para que não se assistisse a todas as aulas, e a opção de mudar de curso, fazendo com que o aluno perdesse o interesse pela UC: "Como estou a trabalhar, vou fazendo aos pouquinhos. Este semestre acabei por não ir a nenhum exame" (A28); "E a partir do momento em que eu disse 'Sim, eu vou mudar de curso', comecei a abandonar e a deixar os estudos todos. Foi mais perto do fim do semestre" (A21).

Alguns alunos, que tiveram aproveitamento à UC, comentaram a razão do seu sucesso, apontando, para além do estudo, vantagens de ter havido, ao longo do semestre, componentes de avaliação que os incentivaram a acompanhar a UC.

> Também me dediquei a estudar. Os trabalhos também ajudaram e os minitestes. Ao ter os minitestes exigia que nós estudássemos. Para exame, já era diferente, já só íamos estudar, por exemplo, três semanas antes, já não era a mesma coisa, iam surgir mais dúvidas. (A15)

> O facto de haver minitestes e voltarmos a fazer a correção deles também ajudou muito. Depois basicamente foi só resolver tudo outra vez. (A14)

5.3. Síntese e comentários

Esta parte do estudo tem como objetivo principal conhecer a influência de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades dos alunos e na utilização de *software* na aprendizagem dos estudantes em AL, especialmente nos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. Nesse sentido, foi realizada uma intervenção de ensino durante as aulas dos temas em análise que se avaliou com recurso a um questionário e uma entrevista aos alunos.

Os participantes nesta parte do estudo foram 28 alunos de uma turma da Licenciatura em Engenharia Química e Biológica, que frequentavam a UC de ALGA, estando a maioria dos estudantes (64,3%) a frequentá-la pela segunda ou terceira vez.

Sendo um dos objetivos da intervenção de ensino o confronto dos alunos com os próprios erros, com o intuito de provocar uma reflexão sobre eles e tentar que os alunos tivessem uma participação ativa na sua superação, a metodologia de trabalho nas aulas orientou-se nesse sentido: tarefas resolvidas em pequeno grupo e debate em grande grupo.

Assim, ao longo do capítulo descrevem-se alguns episódios de aulas, enriquecidos com resoluções dos alunos e, quando pertinente, com relatos de diálogos estabelecidos no seio de três grupos, escolhidos para as gravações, e dos debates em grande grupo. Verificou-se que, muitas vezes, as discussões no seio do grupo e, por vezes, paralelamente entre grupos, ajudaram a clarificar alguns conceitos e procedimentos, embora continuasse a haver uma grande dependência do apoio e aprovação da professora. Ao nível da dificuldade na resolução das tarefas, não se detetou uma diferença significativa entre os grupos que só eram constituídos por alunos que frequentavam pela primeira vez a UC e os que só tinham alunos que já a tinham frequentado.

De acordo com a opinião dos alunos, as suas maiores dificuldades (50% ou mais responderam ter algumas ou muitas dificuldades), no caso do tema Matrizes e determinantes, foram: escrever uma matriz na forma de escada por linhas, aplicar as propriedades dos determinantes e entender e aplicar os conceitos de matriz ortogonal, simétrica e antissimétrica. Já no que se refere aos Sistemas de equações lineares, 50% ou mais alunos referiram que tiveram dificuldades em verificar possíveis soluções de um sistema de equações lineares, resolver sistemas pelo método de eliminação de Gauss-Jordan ou da matriz inversa, relacionar a representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema e realizar a discussão de um sistema com parâmetros. Algumas destas dificuldades são visíveis aquando da resolução das tarefas na aula, acrescentando-se também a dificuldade na formalização, na realização de provas e na interpretação e resolução de questões que envolvam a relação de conceitos.

Em termos globais, os alunos consideraram que tiveram mais dificuldade em acompanhar as aulas do tema Sistemas de equações lineares (42,9% concorda ou concorda totalmente) do que de Matrizes (10,7% concorda) ou Determinantes (10,7% concorda). As razões que apontam para a sua dificuldade em acompanhar as aulas prendem-se essencialmente com falta de pré-requisitos do ensino secundário, falta de concentração nas aulas e falta de estudo ou aplicação.

Quanto às tarefas propostas, a maioria dos alunos considerou que eram motivadoras pelo desafio que lhes proporcionava, por serem exploradas em grupo ou poderem usar *software*. Para além disso, mais de 92% dos alunos concorda ou concorda totalmente que estas lhes permitiram discutir diferentes abordagens dos conteúdos e refletir sobre conceitos/procedimentos em que tinham dificuldades. Particularmente, as tarefas em que os alunos tiveram de analisar resoluções realizadas por outros alunos permitiram-lhes, entre outros aspetos, desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos (96,4% concorda ou concorda totalmente) e reconhecer erros que costumam cometer (96,4% concorda ou concorda totalmente).

O trabalho em grupo e o debate em grande grupo foram, no geral, metodologias que os alunos consideraram favoráveis para a sua aprendizagem (Figura 253) e que permitiram uma participação mais ativa nas aulas. Porém, as dificuldades dos alunos em começar a resolver as tarefas e a existência de alguma dependência dos esclarecimentos da professora, fez com que, por vezes, parte do trabalho tivesse de ser resolvido extra-aula. Os alunos consideraram esta situação menos profícua pela existência de dúvidas na resolução ou pela dificuldade em reunir o grupo.

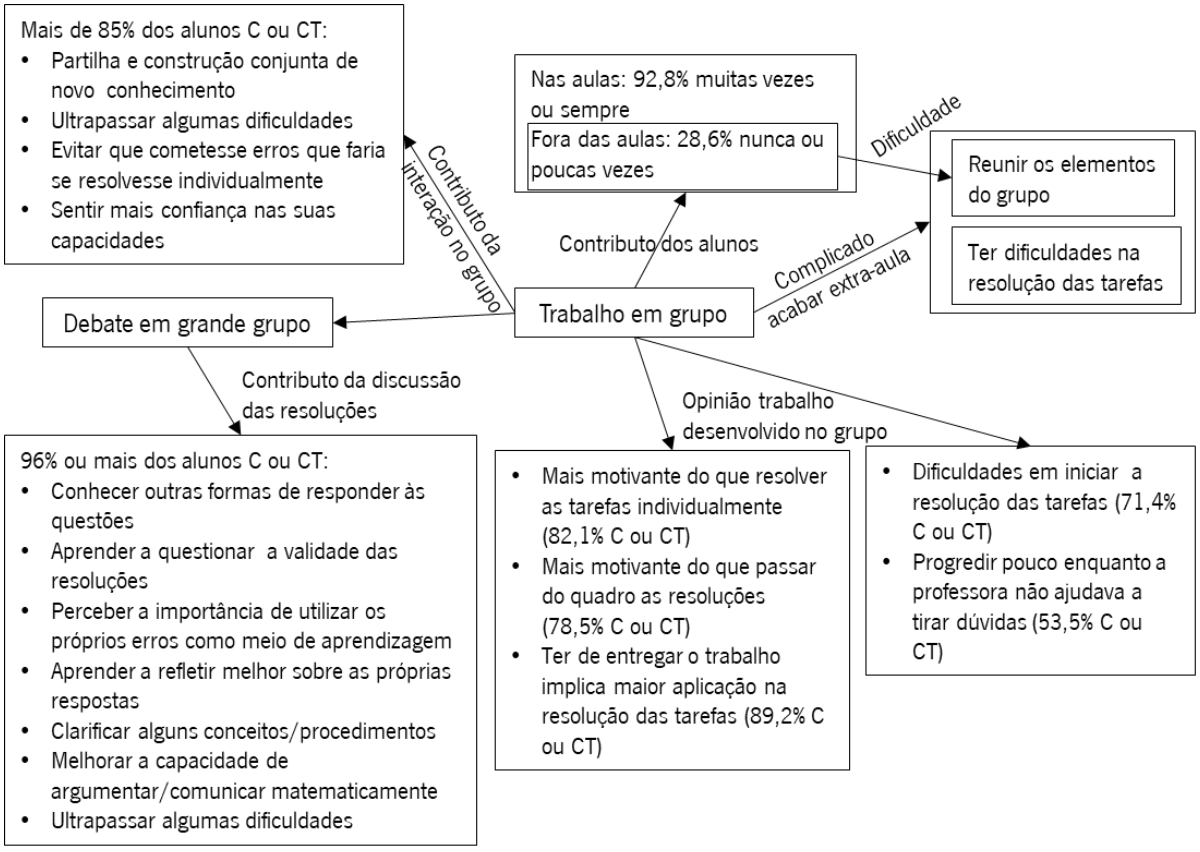


Figura 253. Aspetos principais da opinião dos alunos sobre o trabalho de grupo e em grande grupo.

O *Microsoft Mathematics* foi o *software* usado durante as aulas e teve um importante papel na resolução de algumas tarefas, permitindo, como se constatou em alguns episódios de aula, fazer pequenas investigações e levar os alunos a refletir sobre a correção de algumas das suas resoluções. No geral, os alunos também fizeram uma apreciação positiva da sua utilização, embora alguns tenham referido ter dificuldades em o utilizar ou em interpretar os seus resultados aquando da resolução de algumas tarefas, e de não se terem apercebido de todas as suas potencialidades (Figura 254).

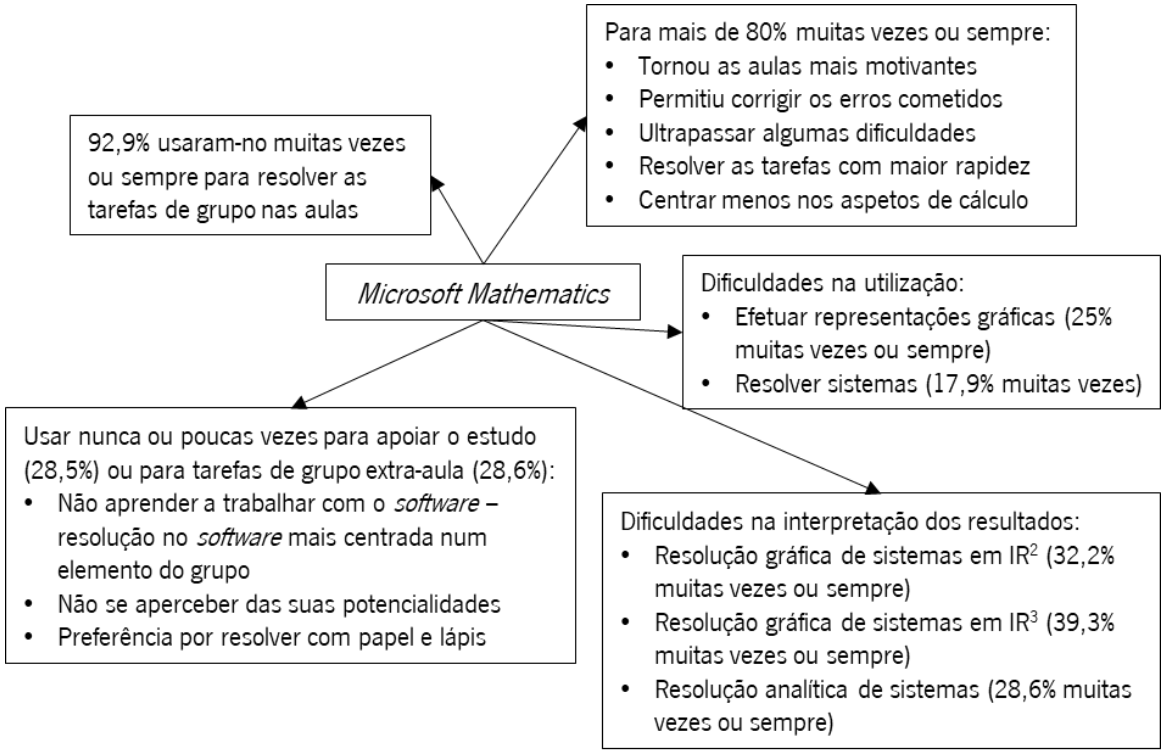


Figura 254. Opinião dos alunos sobre o *Microsoft Mathematics*.

Visando a integração da avaliação também na perspetiva de reflexão sobre os erros e sua superação, esta, para além da componente sumativa, integrou igualmente uma componente diagnóstica e formativa, neste último caso a reformulação dos trabalhos e a revisão dos minitestes (Figura 255).

Com a avaliação diagnóstica, constatou-se que os alunos manifestaram bastantes dificuldades nos conteúdos propedêuticos à AL, nem sempre tendo consciência dessas dificuldades. As resoluções dos alunos constituíram objeto de debate em grande grupo, promovendo-se uma reflexão sobre os erros no sentido de clarificar conceitos. Algumas resoluções efetuadas por alunos que já tinham frequentado a UC, nomeadamente a resolução de sistemas pelo método de eliminação de Gauss, também se aproveitaram para introduzir conceitos.

A revisão dos minitestes e a reformulação dos trabalhos teve, no geral, um efeito positivo sobre a motivação dos alunos e sobre a sua aprendizagem, como se constatou pelas opiniões dadas no questionário e nas entrevistas (Figura 255 – o ponto de vista dos alunos). No entanto, o facto da reformulação ser realizada extra-aula reduziu um pouco esse efeito, na medida em que a disponibilidade e empenho dos alunos para essa tarefa diminuiu.

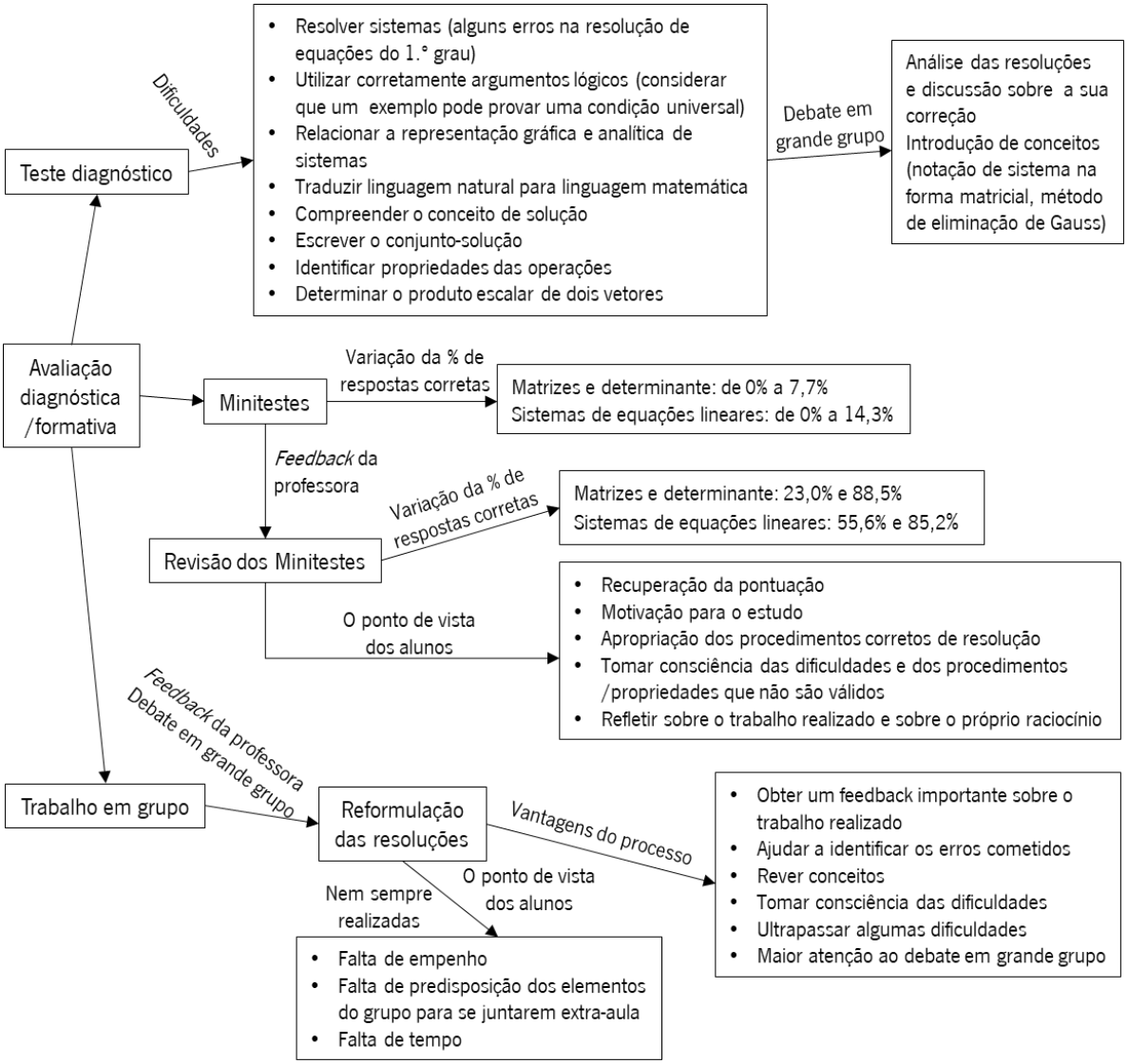


Figura 255. Esquema-síntese dos aspetos mais relevantes da componente diagnóstica e formativa da avaliação efetuada durante a intervenção de ensino.

Numa perspetiva global, do ponto de vista dos alunos, praticamente todas as estratégias utilizadas nas aulas (uso do *Microsoft Mathematics*, discussão em grande grupo, trabalho em grupo nas aulas, revisão de minitestes, reformulação das resoluções, exposição de conteúdos pela professora,...) foram importantes para a sua aprendizagem, tendo sido o trabalho de grupo extra-aula aquela que mais alunos (25%) consideraram não ter sido pertinente.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste capítulo, começa-se por fazer um breve resumo da investigação realizada, relembrando as questões que a orientaram e a metodologia utilizada. De seguida, apresentam-se as conclusões relativas à investigação desenvolvida, mencionam-se as limitações que se consideram relevantes e, finalmente, tecem-se algumas recomendações didáticas e apresentam-se sugestões para futuras investigações.

6.1. Síntese do estudo

O estudo efetuado insere-se no contexto do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear (AL) no ensino superior politécnico e, através dele, procurou-se responder às seguintes questões de investigação:

1. Quais os erros cometidos e as dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?
2. Quais as características do ensino de álgebra linear no ensino superior politécnico segundo os professores?
3. Qual a influência de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades dos alunos e na utilização de *software* sobre a aprendizagem dos estudantes em álgebra linear?

No sentido de dar resposta às questões indicadas, o estudo organizou-se em duas partes que se interligam. A primeira parte desenvolveu-se durante o ano letivo 2011/2012 e, através dela, procurou-se dar resposta às duas primeiras questões de investigação. Visto que se pretendia identificar as dificuldades dos alunos em AL e conhecer o ponto de vista dos professores sobre o seu ensino, esta parte do estudo desenvolveu-se em duas fases. Na 1.ª fase, participaram 310 alunos, inscritos em vários cursos de licenciatura em engenharia, que se encontravam a frequentar a unidade curricular (UC) de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA) numa instituição do ensino superior politécnico. A esses alunos foi pedido para resolverem algumas questões sobre os temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, após estes terem sido lecionados. As respostas dos alunos foram classificadas com base na utilização de raciocínios válidos (respostas corretas), raciocínios não válidos e sem

justificação ou não responde. No caso dos raciocínios não válidos, definiram-se ainda categorias de erros, estabelecidas *a posteriori* (Gall, Gall & Borg, 2003). Em ambos os casos, a frequência dos vários tipos de raciocínio foi quantificada e apresentada em tabelas de frequências.

Na 2.ª fase da primeira parte do estudo, participaram professores que lecionaram, no ano letivo de 2011/2012, no ensino superior politécnico, pelo menos, uma UC de AL ou similar. As opiniões dos professores sobre a AL e o seu ensino foram recolhidas através de um questionário *online* que foi enviado a 97 docentes de várias instituições do país, tendo-se considerado válidas 60 respostas no final do processo. Na análise de dados do questionário foram utilizadas técnicas de estatística descritiva.

Assim, a primeira parte do estudo permitiu identificar alguns erros e dificuldades que os alunos sentem na resolução de tarefas de AL, recolher dados sobre as práticas efetivas dos professores e obter sugestões destes para melhorar a aprendizagem dos alunos em AL. Estes elementos e a revisão da literatura efetuada tiveram um importante papel na programação da intervenção de ensino realizada na segunda parte do estudo, cujo objetivo era procurar dar resposta à terceira questão de investigação.

A intervenção de ensino realizou-se no ano letivo 2013/2014 e nela participaram 28 alunos de uma turma do 1.º ano do curso de Licenciatura em Engenharia Química e Biológica, que frequentavam a UC de ALGA. Nesta intervenção, para além de se promover um ensino centrado no aluno, tentou-se usar estratégias que propiciassem a discussão sobre os erros e levassem os alunos a participar ativamente na sua superação (Cury, 2004; Engler et al. 2004; Pochulu, 2004; Vásquez, Cañibano & D'Andrea, 2014). Assim, seguindo este princípio e tendo como alicerce a primeira parte do estudo, as principais metodologias de ensino seguidas foram:

- Realização de um teste diagnóstico e debate em grande grupo sobre as resoluções dos alunos, pretendendo-se que estes se apercebessem das suas dificuldades e as tentassem superar;
- Resolução de tarefas em pequeno grupo com posterior debate em grande grupo, tendo os alunos a hipótese de, após essa discussão, reformular o trabalho efetuado;
- Utilização do *software Microsoft Mathematics* na resolução das tarefas, pretendendo-se que este fosse um apoio na identificação e correção de erros, para além de facilitar o cálculo e permitir efetuar representações gráficas;
- Revisão dos minitestes, para que os alunos refletissem sobre os próprios erros e procurassem identificar os procedimentos ou conceitos adequados para os corrigir.

Embora seguindo a sequência programática, muitas das tarefas propostas exploravam situações que se revelaram como geradoras de dificuldades na 1.ª fase da primeira parte do estudo, pretendendo-se assim provocar conflitos, que levassem os alunos a refletir sobre os seus erros e a tentar ultrapassar as dificuldades com a ajuda dos seus pares. No mesmo sentido, foram propostas algumas tarefas com resoluções, na sua maioria respostas dos participantes na 1.ª fase da primeira parte do estudo, para que os alunos analisassem a sua correção e identificassem os possíveis erros cometidos.

Durante a intervenção de ensino, recolheram-se as produções dos alunos e gravaram-se os debates em grande grupo e as interações em três dos grupos. Os alunos deram ainda a sua opinião sobre a intervenção efetuada através de um questionário escrito e de uma entrevista.

Seguidamente, na Figura 256, descreve-se resumidamente o estudo realizado.

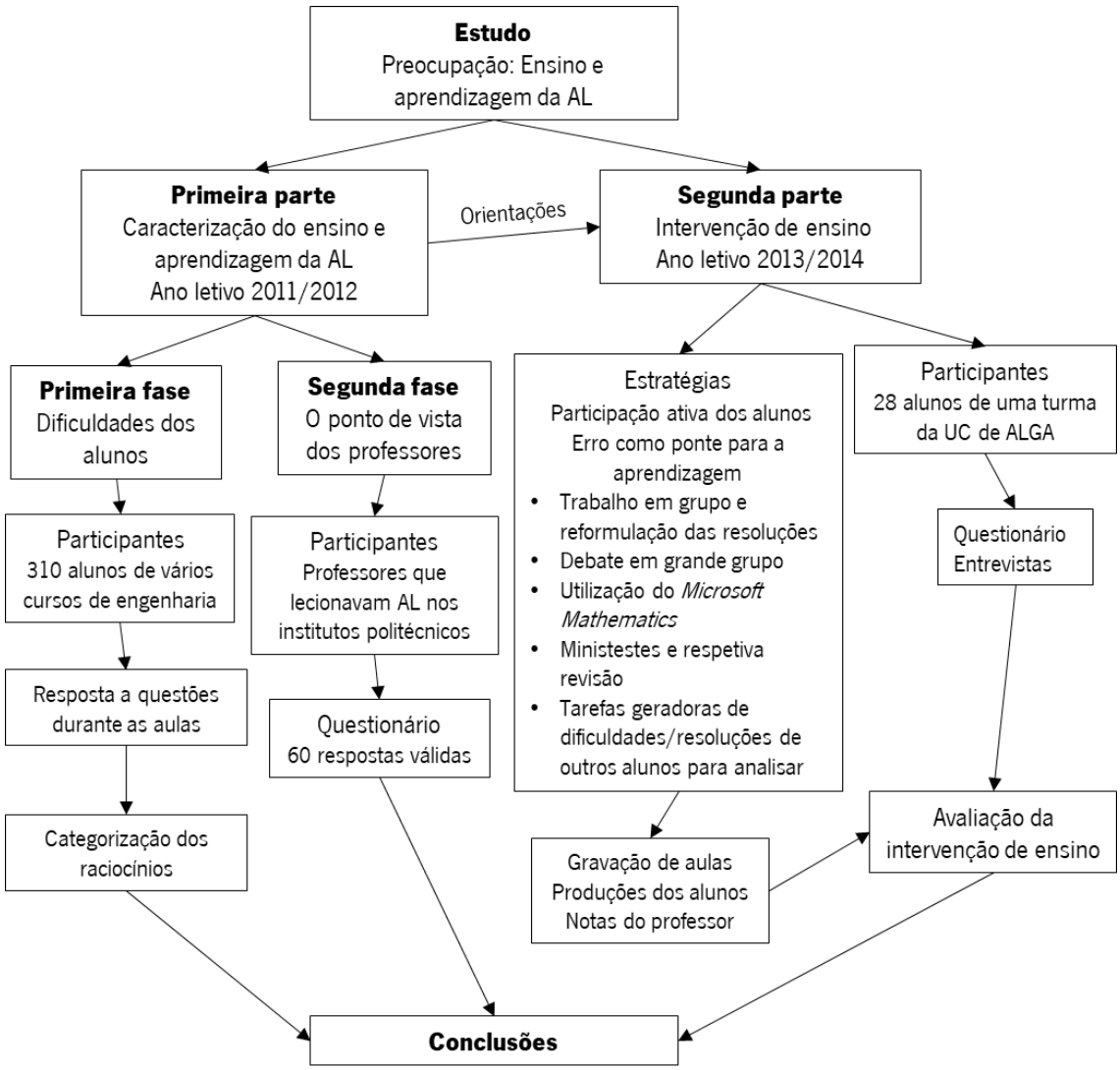


Figura 256. Caracterização sumária do estudo realizado.

6.2. Principais conclusões do estudo

As conclusões que a seguir se apresentam foram elaboradas a partir da análise dos resultados obtidos nas duas partes do estudo e procuram dar resposta às questões de investigação formuladas. Sempre que possível, são também indicadas referências provenientes de investigações em âmbitos similares.

6.2.1. Erros e dificuldades dos alunos

Mesmo tendo sido já lecionados os conteúdos e podendo consultar os apontamentos das aulas, os alunos que participaram na 1.ª fase da primeira parte do estudo tiveram bastantes dificuldades na resolução das tarefas propostas, como se pode constatar pela percentagem de respostas corretas obtida: entre 10,2% e 46,2% nas questões sobre Matrizes e determinantes e entre 19,4% e 27,7% nas questões referentes a Sistemas de equações lineares (Figura 257). Em algumas questões, verifica-se, ainda, uma taxa superior a 20% de não respondentes ou de alunos que responderam apenas verdadeiro ou falso sem apresentar qualquer justificação (Figura 257). Dificuldades em conteúdos relacionados com estes temas são também apontadas por diversos autores como, por exemplo, Aygor e Ozdag (2012), Ferro (2011), Hurman (2007), no caso de Matrizes e determinantes, e Bozzalla e Garcia (2015), Souza e Simmer (2014) e Zandieh e Andrews-Larson (2015), no caso dos Sistemas de equações lineares.

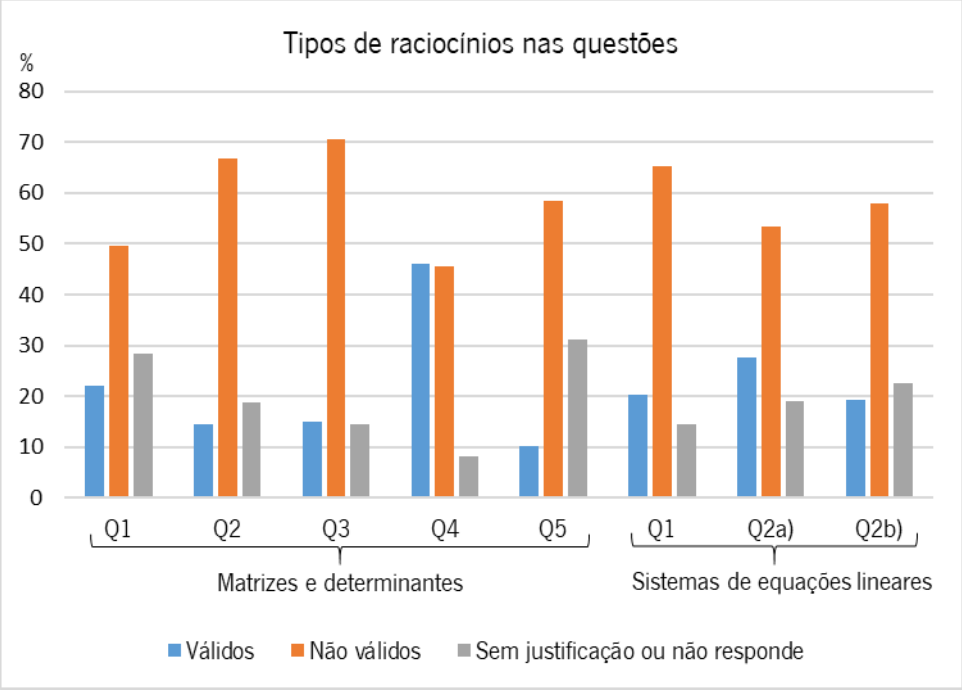


Figura 257. Categorização das respostas dos alunos nas questões sobre os temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares.

Salienta-se igualmente que os alunos, mesmo quando apresentaram raciocínios válidos, nem sempre utilizaram os procedimentos mais diretos para resolver as questões. Assim, há alunos que calcularam a matriz inversa para verificar se duas matrizes são inversas uma da outra ou se uma dada matriz é inversa de si própria (29,4% das respostas corretas) e outros resolveram o sistema para verificar se este tinha uma dada solução (46,3% das respostas corretas). A falta de sensibilidade na análise das situações, partindo logo para uma abordagem algorítmica sem refletir sobre os dados fornecidos ou obtidos noutras questões, foi também observada por Lorenzo et al. (2012) e De Vries e Arnon (2004).

Há, ainda, alunos que continuam a preferir usar o método da substituição para resolver os sistemas em detrimento dos novos métodos aprendidos na UC, o que revela a prevalência das suas experiências prévias.

Os raciocínios não válidos permitiram identificar diversos tipos de erros, em alguns casos transversais a várias questões ou temas.

Diretamente ligadas com o cálculo matricial, destacam-se as dificuldades relacionadas com a multiplicação de matrizes (31,5%, 17,6% e 16,4% dos raciocínios não válidos das questões 1, 2 e 4, respetivamente). Por exemplo, há alunos que utilizam falsas regras para efetuar a multiplicação de duas matrizes, como o recurso ao produto de Hadamard, outros deduzem incorretamente a dimensão da matriz produto, nas justificações baseadas na dimensão das matrizes, e outros não reconhecem as condições necessárias para que esteja definida a multiplicação. Em estreita relação com esta operação, realçam-se também as dificuldades na potenciação, pois há alunos (29,4% dos raciocínios não válidos da questão 2) que calculam o quadrado de uma matriz elevando ao quadrado cada uma das suas entradas. Erros semelhantes, tanto na multiplicação como na potenciação, foram também identificados por Aygor e Burhanzade (2014) e Cardoso et al. (2013).

Estas dificuldades são explicáveis porque o algoritmo da multiplicação de matrizes é novo para os alunos e diferencia-se da habitual multiplicação de números reais e o algoritmo da potenciação está diretamente ligado ao da multiplicação.

O conceito de matriz inversa e o seu cálculo foi igualmente uma fonte de dificuldades para diversos alunos quando resolveram as questões 3, 4 e 5 sobre Matrizes e determinantes (Figura 258).

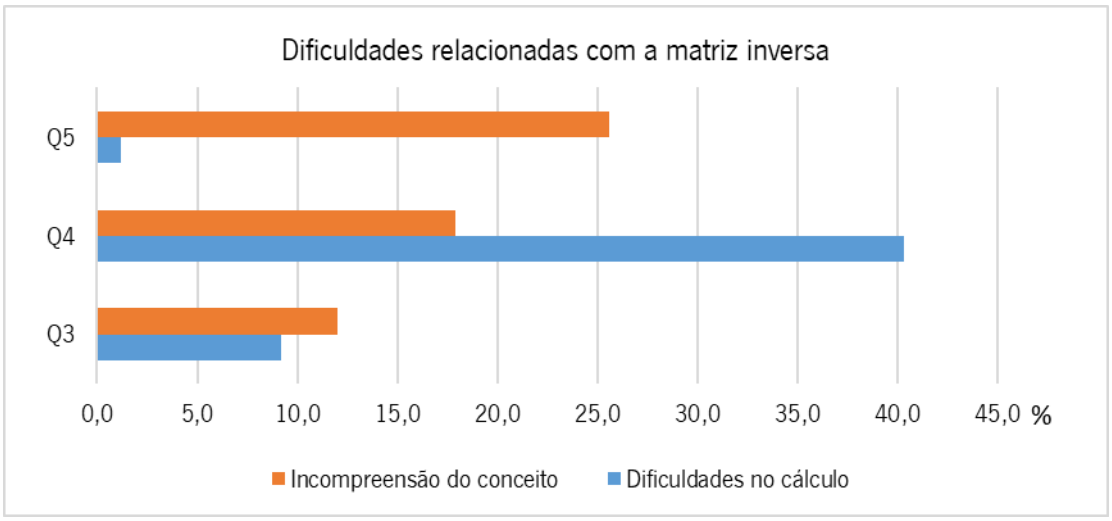


Figura 258. Percentagem de alunos que revelaram raciocínios não válidos que remetem para dificuldades no cálculo ou na compreensão do conceito de inversa de uma matriz.

Embora não fosse necessário o cálculo da matriz inversa para responder às questões, houve alunos que recorreram a ele para as resolver. Porém, nesse processo, muitos deles (9,2%, 40,3% e 1,2% dos raciocínios não válidos das questões 3, 4 e 5, respetivamente) não acabaram o seu raciocínio ou cometeram erros como:

– Considerar a matriz adjunta igual à transposta da matriz dada ou à matriz dos cofatores;

– Calcular incorretamente os cofatores;

– Considerar que a matriz inversa é a matriz dos cofatores ou a matriz adjunta;

– Calcular a matriz inversa recorrendo ao inverso de cada uma das entradas da matriz.

Há outros raciocínios que remetem para alguma incompreensão relacionada com os conceitos de matriz invertível/singular ou a definição de matriz inversa (12,0%, 17,9% e 25,6% dos raciocínios não válidos das questões 3, 4 e 5, respetivamente). Por exemplo, há alunos que:

– Confundem o conceito de matriz singular com o de matriz triangular, diagonal ou simétrica;

– Apresentam exemplos de matrizes singulares/invertíveis que não são válidos;

– Consideram que a matriz é singular se a matriz transposta não for a sua inversa;

– Confundem a noção de inverso na multiplicação com inverso na adição (simétrico);

– Consideram que o resultado do produto da matriz pela sua inversa é a matriz nula.

Dificuldades na compreensão do conceito de matriz inversa e de propriedades que lhe estão subjacentes foram também identificadas nas investigações de Stewart & Thomas (2003, 2004), com alunos do ensino superior da Nova Zelândia.

Embora em menor número (6,1% dos raciocínios não válidos da questão 1 sobre Matrizes e determinantes), há ainda alunos que demonstram não ter ideias muito claras sobre outros

conceitos ligados às Matrizes, como sejam o de transposta de uma matriz, de matriz quadrada ou de dimensão de uma matriz, pois:

– Associam a transposta apenas a matrizes quadradas;

– Restringem o conceito de matrizes quadradas apenas às matrizes de ordem dois;

– Consideram como não quadradas matrizes quadradas;

– Consideram que as matrizes só têm a mesma dimensão se forem quadradas.

Estes casos alertam para a necessidade de o professor estar atento à classe de exemplos que propõe na sala de aula, pois, se forem demasiado particulares, podem levar os alunos a sobrevalorizarem atributos que não são fundamentais para a delimitação dos conceitos.

O recurso a propriedades não válidas foi também uma constante nas questões referentes a Matrizes e determinantes (10,7%, 22,5%, 26,9%, 16,4% e 24,4% dos raciocínios não válidos das questões 1, 2, 3, 4 e 5, respetivamente). Neste caso destaca-se a utilização da comutatividade na multiplicação de matrizes (18,6% dos raciocínios não válidos da questão 2) (Hurman, 2007), a ideia de que uma matriz invertível não pode ter zeros na diagonal principal, sendo singular quando isso acontece (25,0% e 12,8% dos raciocínios não válidos das questões 3 e 5, respetivamente), e o facto de considerarem o determinante da soma igual à soma dos determinantes (7,0% dos raciocínios não válidos da questão 5) (Figura 259).

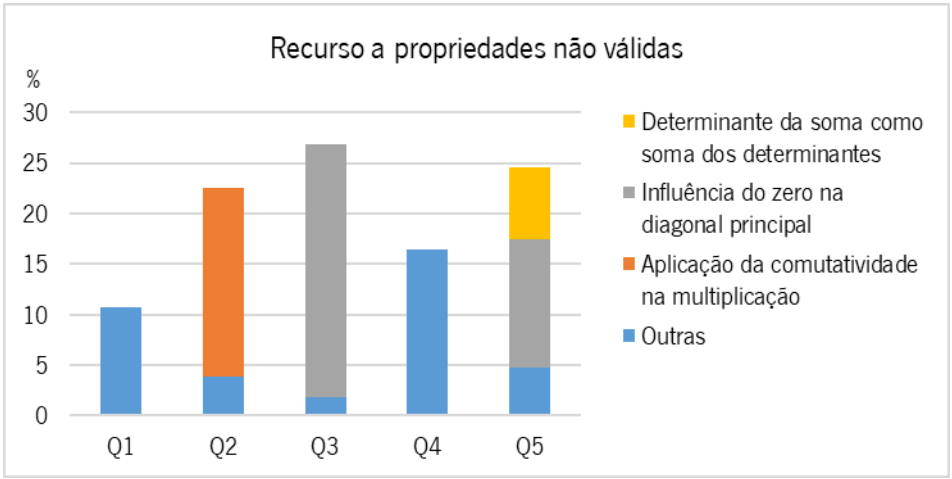


Figura 259. Percentagem de alunos que recorreram a propriedades não válidas nas questões sobre Matrizes e determinantes.

As dificuldades no cálculo dos determinantes são essencialmente visíveis no caso da questão 3 (32,4% dos raciocínios não válidos), cuja resolução mais direta envolvia o cálculo do determinante de uma matriz de ordem quatro. Concretamente, podem-se salientar:

– Dificuldades na aplicação do teorema de Laplace (considerar apenas uma das entradas da linha escolhida, calcular incorretamente os cofatores);

– Dificuldades na aplicação das propriedades dos determinantes (não afetarem o determinante de sinal contrário ao trocar linhas, multiplicar os elementos da diagonal principal sem o determinante ter zeros abaixo desta);
– Incorreção na aplicação da regra de Sarrus para determinantes de ordem três;
– Utilização de regras não aplicáveis ao determinante em causa (por exemplo: usar uma adaptação da regra de Sarrus ou calcular a diferença do produto da diagonal principal pela diagonal secundária para matrizes de ordem quatro).

Alguns dos erros cometidos e dificuldades sentidas na resolução de questões sobre Matrizes e determinantes estendem-se à resolução de questões sobre Sistemas de equações lineares, já que os temas estão relacionados na medida em que, por vezes, os alunos têm de recorrer a conhecimentos do primeiro tema para dar resposta às questões do segundo.

Por exemplo, nas questões sobre o tema Sistemas de equações lineares, há também alunos que recorrem aos determinantes, mas baseando-se em procedimentos ou conceções erradas (0,6%, 8,5% e 15,7% dos raciocínios não válidos das questões 1, 2a) e 2b), respetivamente). Nestes casos, calculam o determinante da matriz quando esta não é quadrada (recurso a falsas fórmulas) ou consideram que, se o determinante é zero ou não é possível calculá-lo (no caso da matriz não quadrada), o sistema é impossível.

Também cometem erros relacionados com os conceitos matriciais quando determinam as características das matrizes dos coeficientes e ampliada como se estas estivessem em escada por linhas (2,3% e 14,3% dos raciocínios não válidos nas questões 2a) e 2b), respetivamente). Em algumas situações, há alunos que fazem uma tentativa de começar a transformar a matriz numa matriz em escada por linhas, mas não concluem o processo, o que se poderá dever também à dificuldade em reconhecer quando é que uma matriz está em escada por linhas (Birinci, Delice & Aydin, 2014).

No que concerne às questões que se relacionam mais especificamente com o tema Sistemas de equações lineares, verifica-se que há alguma dificuldade na resolução de sistemas (10,1% e 27,2% dos raciocínios não válidos das questões 2a) e 2b), respetivamente) mas a maioria dos raciocínios não válidos tem, essencialmente, a ver com fatores ligados à interpretação (Andreoli, 2005; Pantoja, 2008), que envolvem alguma incompreensão dos conceitos, conceções erradas que os alunos foram desenvolvendo ou dificuldades de argumentação.

Na resolução de sistemas, para além dos erros habituais de cálculo, as dificuldades mais frequentes verificaram-se na aplicação das operações elementares no método de eliminação de Gauss, como:

- Utilizar transformações que não são válidas: multiplicar linhas; adicionar um número a uma linha;
- Não aplicar as operações aos termos independentes ou não modificar todas as entradas da linha a alterar;
- Aplicar as transformações elementares sem critério (Pantoja, 2008).

Embora a verificação de soluções de um sistema seja já objeto de estudo no ensino não superior, os alunos continuam a manifestar dificuldades consideráveis na compreensão do conceito de solução e a basear a sua existência em associações incorretas com outros elementos do sistema. Assim, um dos erros frequente (29,8% das respostas da questão 1 sobre Sistemas de equações lineares) é considerar o valor de cada uma das incógnitas como uma solução distinta do sistema. De forma similar, Bozzalla e Garcia (2015) também concluíram que os alunos percebem a solução de um sistema como um valor para x e outro para y, e não a interpretam como um ponto de coordenadas (x, y). Embora com menor frequência (menos de 15% dos alunos), também subsistem raciocínios não válidos, tais como:

- Considerar que o número de soluções de um sistema é igual ao número de equações;
- Considerar que a solução não pode ter mais coordenadas que o número de equações do sistema ou que este é impossível se o número de variáveis for inferior ao número de equações;
- Considerar que um sistema com o mesmo número de equações e de incógnitas é possível e determinado, pelo que só pode ter uma solução;
- Não compreender a expressão "infinidade de soluções", na medida em que consideram que pode significar o mesmo que ter três soluções;
- Considerar a solução como correspondente ao vetor dos termos independentes (De Vries & Arnon, 2004);
- Não verificar a solução em todas as equações do sistema.

Há ainda um número significativo de alunos que demonstram ter dificuldades relacionadas com o conceito de sistema homogéneo (1,9% e 27,1% dos raciocínios não válidos das questões 1 e 2a), respetivamente), pois ou não consideram que os termos independentes são todos nulos quando vão verificar se um dado vetor é ou não solução de um sistema

homogéneo, ou consideram que a única solução possível de um sistema homogéneo é a solução nula.

Também se evidenciam dificuldades que se relacionam mais especificamente com processos de prova e conhecimentos de lógica clássica (Figura 260, Alvarado & González, 2009a; Epp, 2003). De notar que muitos dos alunos (26,2%, 17,6% e 25,6% dos raciocínios não válidos das questões 1, 2 e 5, respetivamente, sobre Matrizes e determinantes; 7,9% dos raciocínios não válidos da questão 2b) sobre Sistemas de equações lineares) consideram que basta um exemplo que verifique a afirmação, ou a sua contrarrecíproca, para demonstrar a sua veracidade (D' Andrea et al., 2014; Sastre & D'Andrea, 2013; Stavrou, 2014) e outros (4,0% dos raciocínios não válidos da questão 1 de Matrizes e determinantes) consideram que mostrar que uma implicação é falsa é equivalente a provar a falsidade da recíproca. Há ainda alunos (5,8% dos raciocínios não válidos da questão 5 de Matrizes e determinantes) que partem de um exemplo que não verifica a hipótese e raciocinam de forma idêntica ao que fariam se esse exemplo a verificasse.

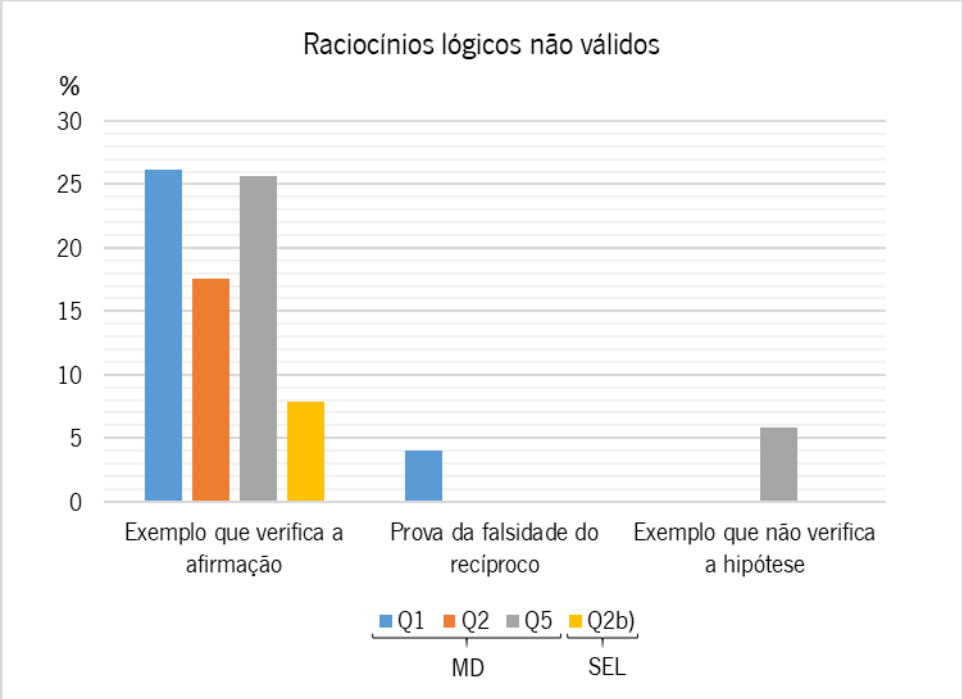


Figura 260. Raciocínios lógicos não válidos utilizados nas questões sobre Matrizes e determinantes (MD) e sobre Sistemas de equações lineares (SEL).

Comum aos dois temas, mas com muito maior expressão nas questões sobre Matrizes e determinantes, foi também o facto de alguns alunos não efetuarem uma análise completa da situação a resolver. Por exemplo, na questão 1 sobre Matrizes e determinantes, em que os alunos tinham de averiguar se para uma dada expressão matricial estar bem definida era

necessário que algumas das matrizes envolvidas obedecessem a determinadas condições, há alunos (13,4% dos raciocínios não válidos) que se centram apenas em parte da expressão, aspeto que também foi observado por Ferro (2011). Esta autora considera que este tipo de erros se encontra frequentemente em problemas onde é preciso fazer cálculos prévios para chegar ao resultado final, já que o aluno se centra na realização desses cálculos, esquecendo-se da meta que tem em vista.

Da mesma forma, na questão 2, onde se pretendia que averiguassem a validade de uma igualdade do género $(CB)^2 = C^2B^2$, para matrizes de ordem adequada, alguns alunos (10,8% dos raciocínios não válidos) efetuam corretamente uma parte dos cálculos mas não completam o raciocínio, eventualmente devido à morosidade dos cálculos com as matrizes escolhidas, o que também remete para a falta de sensibilidade na seleção de exemplos.

Mesmo quando efetuam corretamente os procedimentos necessários para resolver a questão, nem sempre os alunos (1,9% dos raciocínios não válidos da questão 3 sobre Matrizes e determinantes e 14,7% e 12,1% dos raciocínios não válidos das questões 2a) e 2b), respetivamente, sobre Sistemas de equações lineares) interpretam de forma correta o resultado obtido. Assim, há alunos que nem sequer apresentam uma conclusão e outros revelam ter dificuldades de compreensão de alguns conceitos ou propriedades. Por exemplo, consideram que, quando o determinante não é 1 nem -1, a matriz correspondente não tem inversa; não conseguem escrever ou interpretar o conjunto-solução no caso de um sistema possível e determinado; não atribuem aos parâmetros valores significativos aquando da discussão de um sistema ou classificam incorretamente o sistema obtido (Ferro, 2011; Sousa & Simmer, 2014).

O recurso a argumentos válidos, mas irrelevantes para dar resposta à questão ou, embora tendo a ver com a questão, não aplicados diretamente à situação em causa, foi também uma constante (variando de 6,0% a 13,9% os raciocínios não válidos), tanto nas questões alusivas a Matrizes e determinantes como a Sistemas de equações lineares (Figura 261).

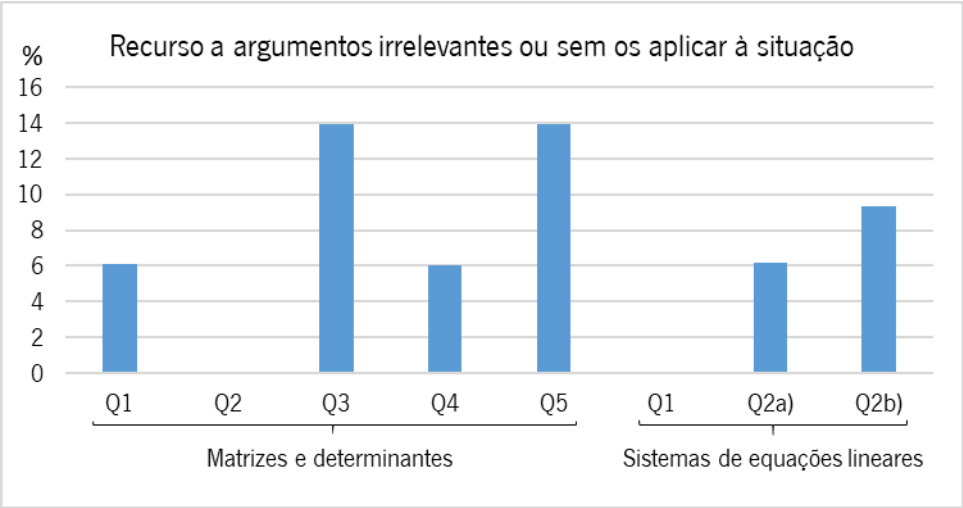


Figura 261. Percentagem de alunos que recorreram a argumentos irrelevantes ou sem os aplicar à situação nas questões sobre Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares.

Concluindo, os alunos apresentaram diversas dificuldades tanto em aspetos de cálculo como de interpretação em qualquer um dos dois temas estudados.

6.2.1.1. Dificuldades em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear

O teste diagnóstico, que foi resolvido por 23 alunos dos 28 que participaram na segunda parte do estudo, também permitiu identificar dificuldades que, não sendo ultrapassadas, podem afetar o desempenho dos alunos em AL. Algumas delas, principalmente aquelas que se baseiam em aspetos de argumentação, são semelhantes às encontradas na 1.ª fase da primeira parte do estudo, pelo que se constata que mesmo o ensino da AL pode não ser suficiente para as ultrapassar.

Os alunos manifestaram bastantes dificuldades em resolver grande parte das questões já que apenas nas questões 1a), 6f) e 6g) houve mais de 50% de respostas corretas ou parcialmente corretas (Figura 262). A percentagem de não respostas também foi bastante elevada, superior a 65% em todas as alíneas da questão 4 e da questão 5, envolvendo ambas a necessidade de relacionar as representações gráfica e analítica de sistemas de equações lineares. Dificuldades com a relação entre a representação gráfica e analítica de sistemas ou a interpretação geométrica de solução estão também patentes nas investigações de Arellano e Oktaç (2009), Badano et al. (2002), Cutz (2005), Parraguez e Botz (2012), Pereira et al. (2013) e Uzuriaga et al. (2010), entre outros.

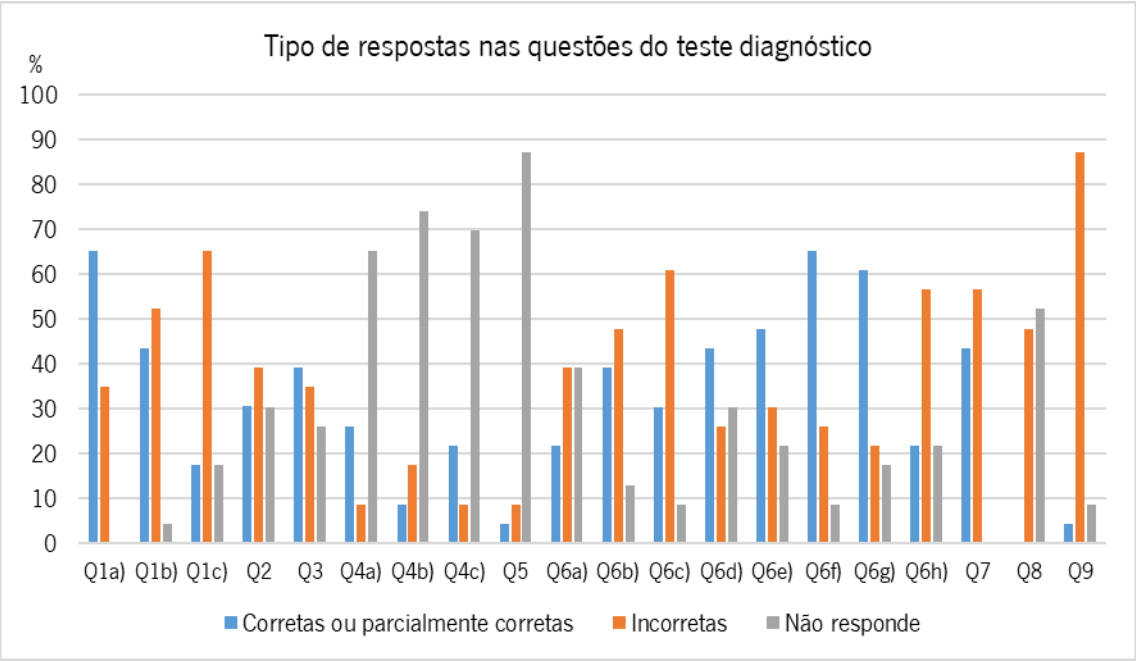


Figura 262. Percentagem de respostas de cada tipo nas questões do teste diagnóstico.

No tema Sistemas de equações lineares (questões de 1 a 5), foi na questão em que os alunos tinham de resolver um sistema possível e determinado com duas equações a duas incógnitas que se verificaram menos dificuldades (60,9% de respostas corretas). Já a questão em que eram dadas três retas no plano, que se intersetavam duas a duas e em que se pedia para indicar o conjunto-solução, foi a que se revelou mais difícil para os alunos (apenas 4,3% de respostas corretas). É de realçar, ainda, que numa questão em que os alunos tinham de averiguar se uma dada sequência era solução de um sistema, 12 alunos, de entre os 17 respondentes à questão, sentiram necessidade de resolver o sistema para fazer essa verificação, em vez de substituir diretamente a possível solução em cada uma das equações do sistema para verificar se obtinham proposições verdadeiras, o que denota uma compreensão limitada do conceito de solução. Este raciocínio também já tinha sido identificado numa questão semelhante da 1.ª fase da primeira parte do estudo.

Nestas questões também se verificou que alguns alunos cometem erros na resolução de equações do primeiro grau – não aplicar a operação inversa adequada, transposição incorreta de termos, erros na eliminação dos denominadores (Hall, 2002; Ponte et al., 2009); não conseguem resolver um sistema, principalmente quando ele envolve três equações a três incógnitas (Delgado et al., 2009); consideram que um sistema é impossível quando uma das suas equações é do tipo 0 = 0; escrevem o conjunto-solução como um conjunto de números reais em vez de um conjunto de vetores ou têm dificuldade em o indicar quando o sistema é

impossível ou possível indeterminado; não traduzem de forma correta um enunciado da linguagem corrente para a linguagem matemática (Herrero, 2004; Neira, 2012; Ramírez et al., 2009); dão exemplos de equações lineares que não o são e têm dificuldade em exemplificar graficamente retas que representam um determinado tipo de sistema, entre outros aspetos.

Das questões que não se relacionam com sistemas (questões de 6 a 10), foi na questão 7, que envolvia a resolução de uma equação de segundo grau, em que bastava aplicar a lei do anulamento do produto para a resolver, que os alunos demonstraram melhor desempenho, tendo as respostas incorretas origem, fundamentalmente, em erros de cálculo. Todavia, dos 10 alunos que apresentaram uma resposta correta, oito começaram por efetuar o produto dos dois binómios e obtiveram uma equação do segundo grau que resolveram através da fórmula resolvente, o que constitui um método mais trabalhoso do que aquele que resulta da aplicação da lei do anulamento do produto. Esta opção dos alunos revela uma atitude pouco crítica, ao não serem capazes de analisar a situação-problema tendo em vista a seleção do método de resolução mais eficiente, o que, por sua vez, pode também explicar os muitos erros de cálculo cometidos pelos alunos. A preferência por este método de resolução foi também detetada nos estudos de Ochoviet e Oktaç (2009) e de Pochulu et al. (2012), com estudantes do ensino não superior.

Nesse grupo de questões, a que gerou mais dificuldades foi aquela em que era pedido o produto escalar de dois vetores de $I\!R^3$ (questão 8), já que não houve qualquer aluno que apresentasse uma resposta correta, sendo um dos erros comuns considerar que o produto escalar de dois vetores é um vetor. Os alunos demonstraram, ainda, bastantes dificuldades em reconhecer as propriedades das operações de multiplicação e adição de números reais.

Quanto às questões mais relacionadas com aspetos de argumentação e que envolvem alguns conhecimentos de lógica, verificou-se que os alunos têm uma visão de prova muito deficiente. Com efeito, numa questão (questão 9), em que tinham de analisar a validade de um raciocínio que recorria a um exemplo para concluir que uma afirmação era verdadeira, quase metade (47,8%) deles limita-se a repetir o que é afirmado no enunciado e muitos outros (39%) validam a propriedade acrescentando um ou mais exemplos que a verificam (empirismo ingénuo de Balachef, 2000). Já noutra questão (questão 10), muitos alunos (47,8%) concluem incorretamente que duas afirmações, que se baseavam numa implicação e na sua recíproca, transmitiam a mesma informação, porque apresentaram exemplos que verificavam ambas.

Em conclusão, os resultados da avaliação diagnóstica mostraram que os alunos não exibiam um nível de prontidão adequado para a aprendizagem de AL, o que pode comprometer as possibilidades de sucesso na UC. Uzuriaga et al. (2010) chegaram a uma conclusão similar num estudo em que, com base numa prova sobre conceitos e conhecimentos prévios para frequentar AL, observaram que 84% dos alunos não a conseguiram superar. Também Celis et al. (2012), no seu trabalho com alunos dos anos iniciais de engenharia de uma universidade da Argentina, observaram dificuldades que revelavam a falta de articulação entre o que os alunos aprenderam no ensino secundário e as exigências da educação superior, em particular na matemática, que na sua opinião requer um domínio adequado dos conhecimentos e habilidades precedentes para os alunos poderem enfrentar com êxito os novos conteúdos.

Constatou-se, ainda, que os alunos nem sempre têm consciência das suas dificuldades, revelando uma visão bastante positiva do seu desempenho, já que a maioria (73,9%) considerou que o teste diagnóstico não era fácil nem difícil.

Também se pode concluir que há dificuldades que persistem, mesmo no caso dos alunos que já tinham frequentado a UC de ALGA em anos anteriores, pois quase metade deles (46,2%) resolveu de forma incorreta de 10 a 15 perguntas. Este desempenho é corroborado pelos resultados obtidos na 1.ª fase da primeira parte do estudo, em que os participantes revelaram dificuldades em conteúdos propedêuticos à AL, não tendo o ensino na UC de ALGA sido suficiente para as ultrapassar.

6.2.2. O ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear na perspetiva dos professores

Como é referido no relatório Matemática 2001 (Precatado et al., 1998) a propósito do ensino básico/secundário, mas que se adequa também ao ensino superior,

> A realização de trabalho colaborativo, formal e informal, é uma condição essencial para a melhoria da prática profissional. É através das trocas de ideias e materiais entre professores com afinidades no plano dos seus interesses e perspetivas, ou com problemas e necessidades comuns, que surgem as ideias para a introdução de novas atividades, novos processos ou novos objetivos de trabalho. (pp. 56-57)

A relevância do trabalho colaborativo para a inovação das práticas dos professores que lecionam unidades curriculares (UCs) da área de matemática no ensino superior é igualmente focada por alguns autores, que destacam, entre outros aspetos, a vantagem do apoio entre pares na conceção e aplicação de tarefas mediadas pelo uso da tecnologia (Figueiredo, Siple, Azevedo & Moro, 2014; Siple et al., 2017). Porém, neste estudo, verificou-se que ainda é pouco

habitual a cooperação entre pares para preparar as UCs, pois somente 26,7% dos professores prepara as aulas muitas vezes com outros professores. Treffert-Thomas e Jaworski (2009), num estudo com 31 professores do departamento de Matemática de uma universidade do Reino Unido, concluíram também que apenas cerca de 50% dos professores estaria interessado em participar em reuniões organizadas especificamente para debater abordagens pedagógicas, embora 90% referissem que já tinham discutido estratégias de ensino com colegas e tivessem considerado isso útil.

Não esquecer, no entanto, que em algumas instituições, o número de professores que lecionam a mesma UC é relativamente baixo e que o facto de haver interesses de investigação diferenciados pode isolar mais os professores dos seus pares.

"A preparação das aulas e das restantes atividades de ensino-aprendizagem pode tirar grande vantagem em se apoiar num amplo conjunto de recursos, hoje disponíveis para os professores" (Precatado et al., 1998, pp. 56-57). Na investigação realizada constatou-se que, na preparação de aulas, existe alguma diversificação dos recursos utilizados pelos professores, embora predominem os tradicionais.

Na preparação de aulas pelo menos três quartos dos professores recorre muitas vezes ou sempre aos livros de texto (78,3%), a apontamentos tipo sebentas (75%) ou à documentação da UC usada em anos anteriores (86,7%). Quando utilizados, os livros de texto têm como finalidade preparar a componente teórica da UC, selecionar exercícios e problemas para as aulas ou selecionar questões para testes e exames (80%, 70% e 58,4%, respetivamente, usam-nos muitas vezes ou sempre). Constituem, assim, à semelhança dos manuais escolares para o ensino não superior, um ponto de partida na preparação de aulas e uma fonte de conhecimentos, tornando-se instrumentos importantes no desempenho das funções didáticas do professor (Flores, 1999).

Todavia, os textos de investigação sobre o ensino e a aprendizagem da AL e os computadores ou calculadoras ainda são recursos pouco utilizados, pois não chega a metade (25% e 43,3%, respetivamente) o número de docentes que os utilizam muitas vezes ou sempre quando preparam as aulas. Quando recorrem ao computador é, essencialmente, com o intuito de elaborar materiais de apoio, disponibilizá-los para os alunos na plataforma da UC ou confirmar as soluções das tarefas propostas (90%, 86,7% e 65%, respetivamente, referem usá-lo com essas finalidades muitas vezes ou sempre).

A utilização de tecnologias é ainda muito reduzida na implementação de aulas, pois a realização de tarefas com recurso a computadores ou calculadoras, mesmo nas aulas de caráter

mais prático, é promovida muitas vezes ou sempre por apenas 21,6% dos professores, não ultrapassando os 15% nas aulas de caráter mais teórico (Figura 263). Quando são utilizadas estas ferramentas na componente teórica, é essencialmente o professor que as usa (25% refere que são usadas muitas vezes ou sempre pelo professor contra 1,7% que refere que são usadas muitas vezes pelos alunos), sendo na componente prática a frequência de utilização semelhante para professores e alunos.

Esses meios tecnológicos, nas aulas de caráter mais teórico, têm, essencialmente, como finalidade introduzir conteúdos (26,6% utilizam-nos muitas vezes ou sempre) ou efetuar representações gráficas (25% utilizam-nos muitas vezes) e, nas aulas de caráter mais prático, efetuar cálculos ou explorar exemplos (28,3% e 25%, respetivamente, utilizam-nos muitas vezes ou sempre). Salienta-se, também, que nestas últimas aulas, alguns professores (23,4% muitas vezes ou sempre) realizam tarefas utilizando *software* específico.

Assim, pode concluir-se que a utilização dos recursos tecnológicos no sentido de promover uma aprendizagem mais ativa ainda é incipiente, o que corrobora os resultados de Gonçalves e Costa (2014), Uzuriaga et al. (2008) e Uzuriaga e Arias (2006).

A apresentação de trabalhos realizados pelos alunos tem também uma expressão muito reduzida (Figura 263), mesmo nas aulas de caráter mais prático, pois nestas somente 16,7% dos professores utiliza essa metodologia muitas vezes ou sempre.

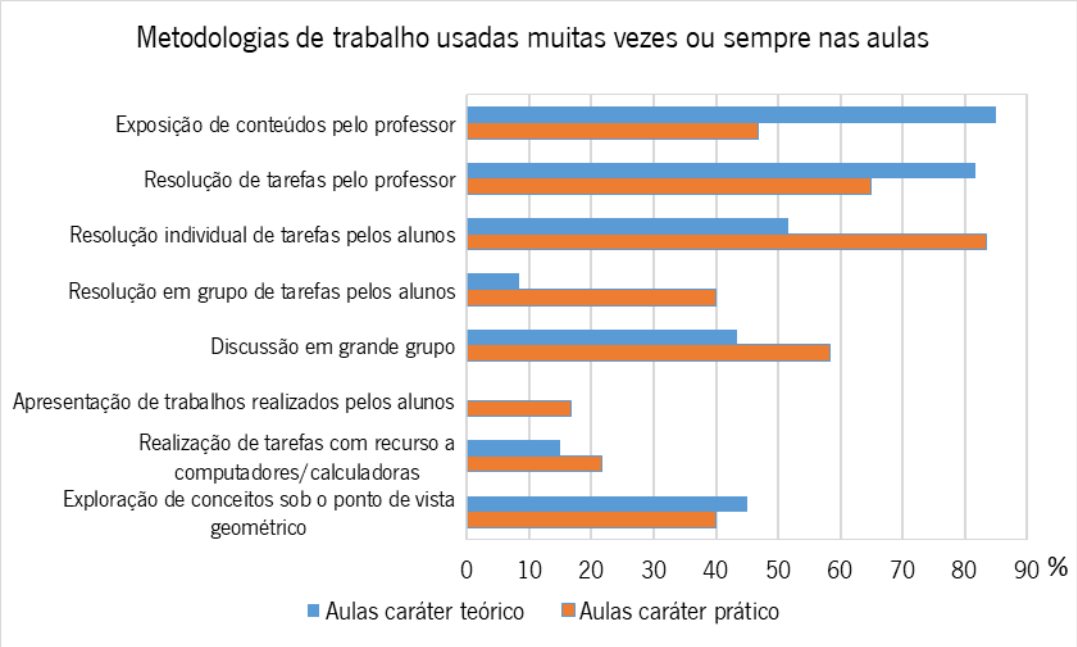


Figura 263. Percentagem de professores que usam muitas vezes ou sempre cada uma das metodologias de trabalho.

É, ainda, de salientar que, embora mais frequente, a resolução de tarefas em grupo pelos alunos nas aulas de caráter mais prático só é usada muitas vezes ou sempre por 40% dos professores.

No que concerne, ainda, às metodologias de trabalho (Figura 263), evidencia-se, nas aulas teóricas, a exposição de conteúdos e a resolução de tarefas pelo professor, o que remete para um ensino mais diretivo. Já nas aulas de caráter mais prático, atenua-se um pouco esta tendência na medida em que, embora a resolução de tarefas pelo professor tenha uma frequência significativa (65% utilizam esta metodologia muitas vezes ou sempre), é a resolução individual de tarefas pelos alunos a metodologia mais utilizada (83,4% utilizam-na muitas vezes ou sempre).

Moro, Viseu e Siple (2016) concluíram também, no seu estudo com 15 professores de uma universidade brasileira com experiência na lecionação de AL, que a metodologia que os professores utilizam é a tradicional, com a exposição do conteúdo alternada com a resolução de exercícios realizada pelo professor. A tendência para um ensino mais expositivo também é realçada por Escalona (2011), Kuehn et al. (2005), Rosa (2015) e Trejo e Camarena (2011).

O ensino mais diretivo está de certa forma associado ao tipo de tarefas que os professores preparam para as aulas, já que mais de 85% dos professores referem que elas muitas vezes ou sempre enfatizam as aprendizagens de conceitos teóricos da UC e a aplicação direta de conceitos ou procedimentos. Há, no entanto, ainda, professores que preparam tarefas que enfatizam a discussão sobre os erros e dificuldades dos alunos (71,6% muitas vezes ou sempre) e a descoberta das propriedades dos conceitos (70,0% muitas vezes ou sempre).

Analisando o ponto de vista da utilização de diferentes representações dos conceitos, destaca-se que, na preparação de aulas, os professores têm, na sua maioria (Figura 264), o cuidado de enfatizar a exploração de diferentes representações dos conceitos (68,4% fazem-no muitas vezes ou sempre) e a articulação entre os conceitos (90% fazem-no muitas vezes ou sempre), sendo a exploração de conceitos sob o ponto de vista geométrico uma metodologia que ainda tem alguma expressão tanto nas aulas de caráter mais prático (40% utilizam-na muitas vezes) como de caráter mais teórico (45% utilizam-na muitas vezes) (Figura 263).

A resolução de problemas da realidade é um dos aspetos menos enfatizado nas tarefas que os professores preparam para os alunos (45% dão-lhe ênfase muitas vezes ou sempre), situação que pode ser explicável pelo facto de estes ainda não terem preparação suficiente para perceber as aplicações que se relacionam com o curso que frequentam, como advogam Nieto et

al. (2007) e Soares (1999). Outra explicação plausível é que, para trabalhar uma matemática contextualizada no âmbito dos vários cursos, será necessário que os professores se envolvam em outras áreas e adquiram os conhecimentos que os problemas a resolver requerem (Brito et al., 2010; Trejo et al., 2013), o que pode não ser fácil se os docentes lecionarem AL em cursos distintos.

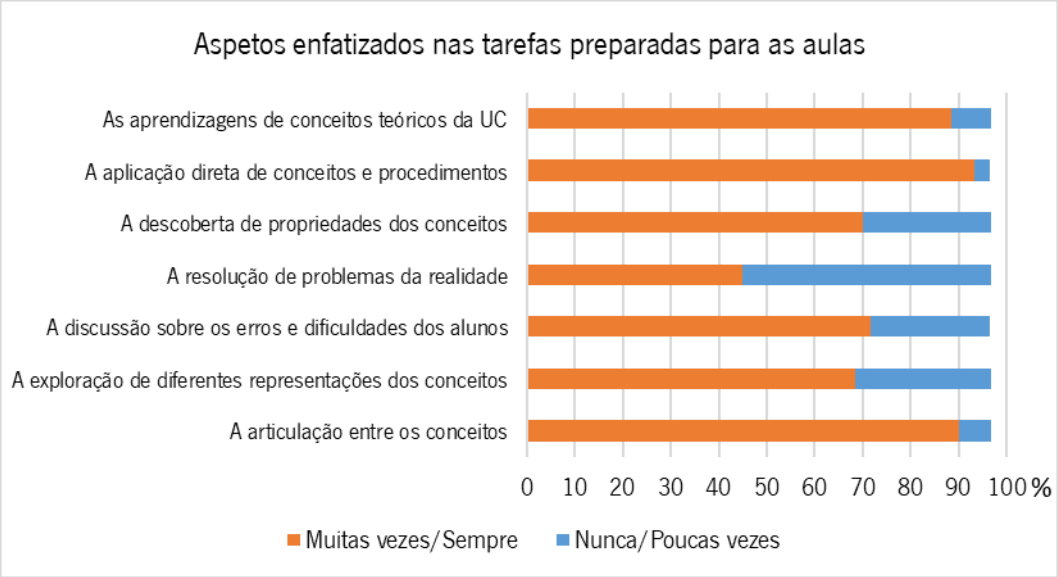


Figura 264. Frequência dos aspetos enfatizados pelos professores nas tarefas preparadas para as aulas.

No que concerne à avaliação, prevalecem os métodos tradicionais (Del Puerto & Seminara, 2011; Nunes & Sebastião, 2004): realização de testes (90%) e exame final (85%), sendo as únicas formas de avaliação a que recorrem 68,3% dos professores. Outros (28,3%) complementam esta avaliação com trabalhos (de casa, individuais ou de grupo), assiduidade ou participação nas aulas. No cálculo da classificação final, os exames/testes têm, no geral, uma ponderação significativamente superior aos outros métodos, pois, à exceção de dois professores, um dos quais atribui 50% aos trabalhos (20% e 30% ao trabalho individual e em grupo, respetivamente) e outro 40% ao trabalho individual, mais nenhum indica uma ponderação superior a 25% nos outros métodos, sendo o mais frequente ela não ultrapassar os 10%.

Tomando como adquirido que os alunos sentem dificuldades em AL (Aygor & Ozdag, 2012; Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000a; Souza & Simmer, 2014), a maioria dos professores aponta, como razões para tal, o facto de os alunos não terem hábitos de estudo regular e contínuo (86,7%) (Isik et al., 2014; Uzuriaga et al., 2010), terem dificuldade em compreender conceitos abstratos (83,3%), terem uma formação matemática anterior deficiente (78,3%) (Herrera & González, 2011; Isik et al., 2014; Uzuriaga et al. 2008; Uzuriaga et al., 2010) e assumirem um papel passivo na sua aprendizagem (63,3%) (Kuhen et al., 2005). O

problema da abstração é também referido por Dorier e Sierpinska (2001), Isik et al. (2014) e Moro et al. (2016), sendo que, neste último estudo, a maioria dos professores realçou que as dificuldades que enfrentam são em como ensinar os conteúdos que são abstratos, de forma a que os alunos possam entendê-los.

No que diz respeito ao próprio ensino, há ainda, uma percentagem significativa de professores que considera que o facto do ensino se basear em recursos tradicionais, fundamentalmente materiais escritos (51,7%), ser muito expositivo e centrado no professor (40%) ou não ser adequado aos conhecimentos prévios dos alunos (31,7%) (Dorier, Robert, Robinet et al., 2000) também pode contribuir para essas dificuldades.

Quando convidados a apresentar sugestões para melhorar a aprendizagem de AL, 41,7% dos docentes deram o seu contributo, apresentando uma ou várias propostas, que não só remetem para orientações metodológicas e logísticas, como também visam a alteração de atitudes do aluno face à aprendizagem ou uma intervenção para melhorar os seus conhecimentos prévios (Tabela 96).

Tabela 96 – Sugestões dos professores para melhorar a aprendizagem da Álgebra Linear

Área de intervenção	Propostas
Metodologias de trabalho e avaliação	Propor um ensino menos expositivo e mais centrado no aluno, utilizando estratégias que estimulem a sua participação (Milevicich & Lois, 2007). Aumentar ou introduzir a realização de tarefas com recurso ao computador (Aydin, 2009; Gonçalves, 2005; Diković, 2007) Promover tarefas motivadoras para os alunos (Laugwitz, 1974). Fazer a ligação da teoria à prática. Propor tarefas com aplicações à realidade ou ao respetivo curso (Fernandes, 1999; Kuehn et al., 2005; Nieto et al., 2007; Trejo et al., 2013). Explorar a relação entre a parte geométrica e analítica (Cutz, 2005; Gonçalves, 2005; Rosso & Barros, 2013). Realizar trabalhos individuais ou em grupo. Efetuar avaliações mais frequentes ao longo do semestre para incentivar o estudo.
Programa e logística da UC	Aumentar a carga letiva semanal. Reduzir o número de alunos por turma.
Conhecimentos anteriores dos alunos	Intervir ao longo do ensino não superior: mudanças curriculares e métodos de trabalho. Criar UCs prévias a AL para consolidação de conhecimentos (Rosa, 2015). Consciencializar os docentes para a necessidade de nas próprias aulas de AL esclarecerem as dúvidas mais básicas (Isik et al., 2014)
Hábitos de estudo dos alunos e atitudes face à aprendizagem	Desenvolver mecanismos para aumentar a assiduidade dos alunos. Incentivar os alunos a ter um papel mais ativo na aprendizagem. Ajudar os alunos a ter métodos de estudo e incentivá-los a esclarecer dúvidas com o professor.

6.2.3. A exploração dos erros e dificuldades e a sua influência na aprendizagem dos alunos

De acordo com o que já foi referido, uma das estratégias principais da intervenção de ensino realizada foi confrontar os alunos com os seus erros e dificuldades, tendo em vista a sua superação, e recorrendo ao *software Microsoft Mathematics* como auxiliar neste processo. A Figura 265 traduz esquematicamente as etapas que estão diretamente relacionadas com essa metodologia e a sua articulação.

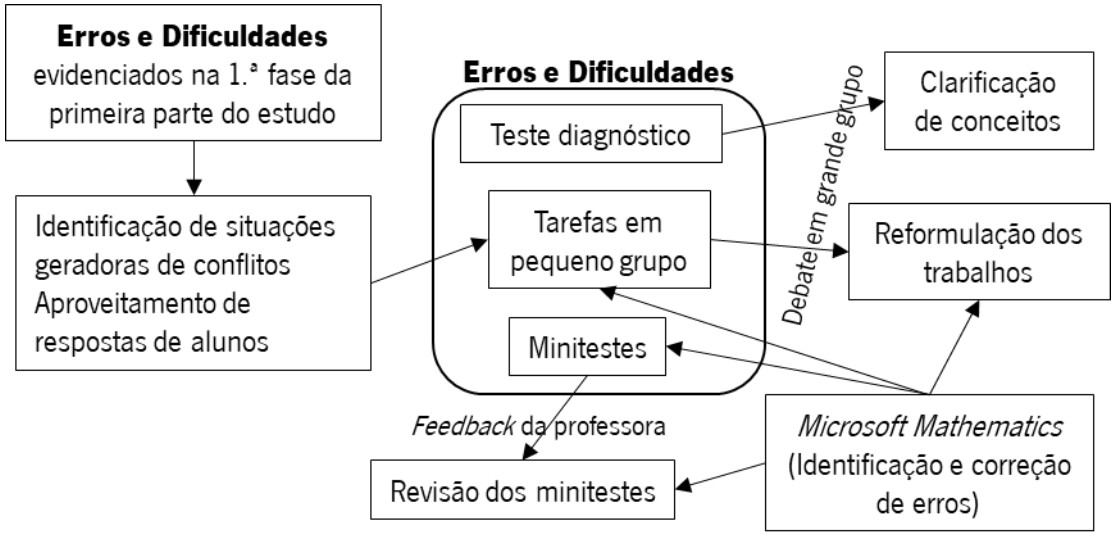


Figura 265. Etapas seguidas no processo de exploração do erro para promover a aprendizagem.

No teste diagnóstico constatou-se que os alunos apresentavam muitas dificuldades em conteúdos propedêuticos à AL, pelo que o confronto com as resoluções realizadas começou por ser a primeira abordagem aos temas, começando-se assim a trabalhar a identificação de erros e a sua correção pelos próprios alunos. Os conhecimentos demonstrados por um aluno, que resolveu corretamente as questões relativas a sistemas através do método de eliminação de Gauss, serviram para estimular a sua participação na aula, explicando aos colegas o seu método de resolução e permitindo também explorar alguns conceitos a partir das resoluções efetuadas.

6.2.3.1. Contributos do trabalho em grupo e do debate em grande grupo

As tarefas propostas cumpriram no geral o seu papel, pois, de acordo com a avaliação dos alunos, elas foram motivadoras (89,2% concorda ou concorda totalmente), permitiram discutir diferentes abordagens dos conteúdos (96,4% concorda ou concorda totalmente) e fizeram-nos refletir sobre vários conceitos/procedimentos em que tinham dificuldades (92,8% concorda ou concorda totalmente).

Nas questões que envolviam resoluções para analisar, os grupos nem sempre conseguiram identificar e comentar todos os erros, aspeto que foi colmatado no debate em

grande grupo; mesmo assim, foram momentos relevantes para a aprendizagem dos estudantes. De realçar que mais de 89% dos alunos concorda ou concorda totalmente que essas tarefas lhes permitiram aprender a questionar a validade das resoluções, desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos, reconhecer erros que costumam cometer e debatê-los com os colegas, refletir sobre a solidez dos seus conhecimentos e clarificar alguns conceitos/procedimentos. Nas entrevistas, para além dos aspetos focados, há alunos que ainda acrescentam que esse tipo de questões lhes agradou porque tinham um ponto de partida para começar a resolução e ajudava-os a evitar alguns erros, referindo também que os obrigava a um maior envolvimento em termos de estudo pelo facto de terem de saber os conceitos/procedimentos incluídos nas respostas dadas para as poderem comentar. E é, essencialmente, a ausência desses conhecimentos que leva a que 32,1% dos alunos concordasse que teve mais dificuldades em responder a questões desse tipo.

No que concerne à interação e discussão estabelecida no seio do grupo, mais de de três quartos dos alunos concorda ou concorda totalmente que elas contribuíram para a partilha e a construção conjunta de novo conhecimento (92,8%), ultrapassar algumas das dificuldades (89,3%), evitar que cometessem erros que provavelmente fariam se resolvessem individualmente as tarefas (89,2%) e sentir mais confiança nas suas capacidades (85,7%). Alguns destes aspetos são visíveis nos diálogos estabelecidos nos grupos, quando os alunos questionam as ideias dos colegas ou explicam conceitos/procedimentos uns aos outros, tendo este último aspeto sido estendido a explicações entre grupos. No entanto, nem sempre os alunos conseguiam chegar a um consenso autonomamente, e, quando o conseguiam, precisavam frequentemente da aprovação da professora (Gonçalves & Costa, 2012). Tal é visível na opinião dos estudantes sobre o trabalho desenvolvido no grupo, na medida em que 53,5% dos alunos concorda ou concorda totalmente que progrediam pouco na resolução das tarefas enquanto a professora não ajudava a tirar dúvidas, havendo ainda 71,4% que concorda ou concorda totalmente que tinham quase sempre dificuldade em iniciar a resolução das tarefas. Porém, nem sempre essas dificuldades se deveram a fatores relacionados com o conhecimento, pois, nas entrevistas, alguns alunos confessam que, por vezes, havia alguma falta de predisposição para começar a trabalhar e, se tinham dúvidas, aproveitavam para fazer uma pausa, em vez de avançar para a questão seguinte, o que também foi confirmado pelas gravações das interações de alguns dos grupos. Este aspeto foi de certo modo atenuado pela obrigatoriedade de entregar o trabalho realizado no final da aula, pois 89,2% dos alunos reconhece que esse facto fez com que se

aplicassem mais na resolução das tarefas. A conjugação deste fator com o facto de haver continuamente trabalho em grupo nas aulas, em que a professora apenas tentava dar pistas para que fossem os alunos a chegar à resposta, também concorreu para que a interação e discussão no seio do grupo tivesse contribuído para desenvolver a autonomia dos alunos (75% concorda ou concorda totalmente).

A realização de trabalho de grupo extra-aula foi o aspeto que levantou mais problemas, tanto pelas dificuldades inerentes à própria tarefa (57,1% concorda ou concorda totalmente) como pelo facto de ser complicado reunir os elementos do grupo (64,3% concorda ou concorda totalmente), situação que fez com que nem todos os grupos realizassem a totalidade das tarefas ou que nem sempre todos os elementos participassem na sua realização. Para este problema concorreu a falta de hábito dos alunos para irem esclarecer dúvidas no horário de atendimento da professora, o que esteve patente essencialmente no primeiro caso, e alguma falta de coordenação e articulação entre os elementos do grupo. O facto de os alunos terem horários diferentes, em virtude de não frequentarem todos as mesmas UCs, e de terem trabalhos a realizar para essas UCs, nem sempre coincidentes com os momentos de maior trabalho dos outros elementos do grupo, são fatores que contribuíram para essa descoordenação. No entanto, há alunos que comentam que o facto de, por vezes, faltarem às aulas, haver elementos que não se interessavam em colaborar nas tarefas e serem incapazes de abdicar das atividades pessoais em favor do grupo também contribuiu para que houvesse falhas.

Mesmo com estas vicissitudes, a opinião dos estudantes relativamente ao trabalho de grupo é bastante favorável, pois mais de 78% dos alunos concorda ou concorda totalmente que participaram ativamente nas discussões do grupo, que foi mais motivante resolver as tarefas com os colegas do que resolvê-las individualmente ou do que apenas passar do quadro as resoluções da professora. Esta opinião é corroborada por Henriques e Ponte (2008) no contexto de atividades de investigação no ensino superior, em que o trabalho de grupo foi reconhecido pelos alunos como muito significativo para a aprendizagem.

A participação mais ativa nas aulas foi também visível no debate em grande grupo, sendo reconhecida pelos alunos (85,7% concorda ou concorda totalmente), e teve um importante papel na identificação, correção e superação dos erros, conseguindo várias vezes os alunos do próprio grupo apontar os erros e corrigi-los, situação para a qual também contribuiu algum *feedback* escrito dado pela professora, sugerindo a reflexão sobre algumas das respostas apresentadas pelos grupos.

Em termos globais, pela análise das aulas, pode-se constatar que o debate em grande grupo, para além de auxiliar os alunos a corrigir e melhorar as suas respostas, permitiu explorar vários aspetos com base nas suas produções, mesmo quando estas se baseavam em argumentos/procedimentos incorretos, aproveitando-se assim também os erros dos alunos como fonte de aprendizagem (Borasi, 1996; De la Torre, 1993). Em suma, o debate em grande grupo permitiu retificar procedimentos de cálculo, clarificar conceitos e notações matemáticas, debater questões de argumentação, ajudar a formalizar algumas provas e corrigir aspetos de linguagem matemática, discutir a validade de generalizações feitas pelos alunos, realizar pequenas investigações baseadas nas produções dos alunos e utilizar os seus erros como ponto de partida para explorar outras situações, ajudar os alunos a reformular os exemplos incorretos de forma a aproveitarem o trabalho já realizado e a refletirem sobre os conceitos, confrontar várias abordagens de resposta às questões e debater, quando pertinente, qual a mais eficiente e discutir formas de iniciar as tarefas, quando os alunos estavam num impasse.

Os alunos também fazem uma apreciação bastante positiva da importância da discussão das diferentes resoluções das tarefas para a sua aprendizagem, já que mais de 95% dos alunos concorda ou concorda totalmente que esse debate contribuiu para conhecer outras formas de responder às questões, aprender a questionar a validade das resoluções, perceber a importância de utilizar os próprios erros como meio de aprendizagem, aprender a refletir melhor sobre as suas respostas, clarificar alguns conceitos/procedimentos, melhorar a capacidade de argumentar ou de comunicar matematicamente e ultrapassar algumas das dificuldades que tinham.

6.2.3.2. Contribuições do uso do *software Microsoft Mathematics*

Em geral, os alunos aderiram à utilização do *Microsoft Matemathics*, pois mais de 60% utilizou-o muitas vezes ou sempre na generalidade das tarefas. A maior frequência de utilização foi para resolver as tarefas de grupo nas aulas (92,9% utilizaram-no muitas vezes ou sempre), sendo menos usado (39,3% nunca ou poucas vezes o utilizaram) na revisão dos minitestes. Neste último caso, isso deveu-se ao menor empenho na realização da revisão em virtude de não terem tido um bom desempenho no miniteste, ao facto de poderem trocar impressões com os colegas ou terem resolvido previamente o miniteste em casa.

O *Microsoft Mathematics* teve um importante papel em diversas tarefas, pois, para além de permitir efetuar cálculos e explorar exemplos mais rapidamente e relacionar as representações gráfica e analítica, que foi essencial no tema de Sistemas de equações lineares,

evitou, em várias situações, que os alunos cometessem erros, obrigando, por vezes, a um confronto com as suas conceções prévias. Por exemplo, ao responder a uma questão que envolvia a inversa de uma matriz, alguns alunos estavam a considerar válido calcular a inversa recorrendo ao inverso de cada uma das entradas. O facto de se aperceberem que o *software* apresentava uma inversa diferente, obrigou-os a repensar os seus procedimentos de cálculo. Numa situação similar, contribuiu para os alunos verificarem que o quadrado de uma matriz não se calcula elevando ao quadrado cada uma das entradas, tendo os passos da solução apresentados pelo *software* ajudado a recordar o algoritmo da multiplicação. O *Microsoft Mathematics* permitiu, ainda, realizar pequenas investigações que seriam mais demoradas ou facilmente abandonadas se não se recorresse ao *software*.

Este impacto positivo do *software* é corroborado pela avaliação dos alunos, já que a maioria concordou que este foi útil num variado leque de situações. De realçar que mais de 90% considera que muitas vezes ou sempre tornou as aulas mais motivantes (Oktayviyanthi & Supriani, 2015), ajudou-os a resolver as tarefas com maior rapidez e permitiu-lhes centrarem-se menos nos aspetos de cálculo.

Quanto aos aspetos relacionados com a superação de erros e dificuldades, na opinião dos alunos, o *software* também teve um contributo significativo na medida em que mais de 75% considera que muitas vezes ou sempre os ajudou a ultrapassar algumas dificuldades (85,7%), a compreender melhor os conteúdos (78,5%) e lhes permitiu identificar os erros cometidos (78,6%), assim como corrigi-los (85,7%). Embora no âmbito de outras UCs da área de matemática do ensino superior, Freire (2013) e Oktayviyanthi e Supriani (2015) também concluíram que a utilização do *Microsoft Mathematics* contribui para uma aprendizagem mais significativa.

Nas entrevistas, há também alunos que dão destaque ao facto de o *software* estar em português e à sua utilidade para apoio a outras UCs – "Até para outras disciplinas (...) aquele programa é espetacular (A17). Essa versatilidade também é destacada por alguns autores (Assum et al., 2014; Gayoso et al., 2011; Getenet & Beswick, 2014) e foi um dos motivos que levou à sua eleição.

Muitas das vantagens citadas são também mencionadas por outros autores (Ortega, 2002; Pires & Marques, 2009; Prugent & Gallese, 2002; Rosales, 2012) que experimentaram outro *software* nas aulas de AL do ensino superior, donde se conclui que o importante é utilizar recursos tecnológicos que se adequem aos conteúdos abordados, aos alunos e ao professor de

modo a que auxiliem na promoção da aprendizagem e não constituam mais um entrave ao progresso do aluno.

A maior parte dos alunos considera que a utilização do *Microsoft Mathematics* não apresenta desvantagens, havendo, no entanto, alunos (10,7%) que referem que o seu uso pode provocar o esquecimento dos procedimentos de cálculo. A diminuição das habilidades e destrezas manuais de cálculo é também apontada por Rosales (2012) e Ortega (2002) quando utilizaram os programas *Scilab* e *Derive*, respetivamente, em temas de AL. Porém, quando questionados sobre esse aspeto nas entrevistas, há alunos que remetem para a forma como os conceitos/procedimentos foram adquiridos na medida em que pensam que se os tiverem compreendido bem conseguem reproduzi-los sem o apoio do *software*, principalmente se consultarem novamente os apontamentos.

Comparando o *Microsoft Mathematics* com o *Matlab*, quase todos os alunos manifestaram preferência pelo primeiro, em virtude de ser mais intuitivo, exigindo menor investimento de tempo para aprender a trabalhar com ele – "O *Matlab* é muito mais difícil, este [*Microsoft Mathematics*] é mais acessível, principalmente para o que estamos a fazer. No meu caso complicava" (A10). De relembrar que não criar barreiras adicionais para a aprendizagem (Ortega, 2002) foi um dos aspetos que levou à escolha do *Microsoft Mathematics* em detrimento de outros.

Assim, como seria expectável, a maior parte dos alunos não teve ou teve poucas dificuldades em trabalhar com o *software*, sendo a realização das representações gráficas (25% teve muitas vezes ou sempre dificuldades) e a resolução de sistemas (17,9% teve muitas vezes dificuldades) os problemas mais apontados. A interpretação dos resultados obtidos no *software* confirma esta tendência de maiores dificuldades na parte dos sistemas, pois mais de um quarto dos alunos afirma que teve muitas vezes ou sempre dificuldade em interpretar os resultados no caso da resolução gráfica de sistemas em IR^2 (32,2%), na resolução gráfica de sistemas em IR^3 (39,3%) e na resolução analítica de sistemas (28,6%).

Esta maior dificuldade na resolução e representação dos sistemas no *software* pode dever-se a não serem tão imediatos os comandos, como no cálculo matricial, e ser necessário selecionar mais opções, como o número de equações, o tipo de gráfico... De qualquer forma, serão aspetos facilmente ultrapassáveis pelos alunos que se empenhem em usar essas potencialidades, facto que nem sempre ocorreu com os que mencionaram ter tido dificuldades, pois nas entrevistas confessaram não ter procurado saber como se efetuava a resolução

analítica ou a representação gráfica, uma vez que, aquando dos trabalhos em grupo, muitas vezes, eram os colegas que levavam o computador, pelo que se limitavam a observar. As dificuldades com os aspetos de interpretação, para além de poderem ser devidas a limitações do *software* ou ao facto dos alunos não o terem usado para as tarefas sobre sistemas, são também devidas a problemas que não têm diretamente a ver com o *software*. Por exemplo, a dificuldade em estabelecer a relação entre a representação gráfica e analítica, já detetada no teste diagnóstico, ou em representar/interpretar o conjunto-solução de um sistema, aspetos que também foram visíveis durante as aulas. De realçar que, de acordo com a avaliação dos alunos, 42,9% concorda ou concorda totalmente ter tido dificuldades em acompanhar as aulas sobre sistemas, sendo a relação entre a representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema uma das dificuldades mais apontadas (67,9% teve algumas ou muitas dificuldades).

Nem todos os alunos levarem os computadores para os trabalhos de grupo parece ter sido um dos fatores que comprometeu a aprendizagem de alguns alunos, pois não aprenderam a trabalhar alguns aspetos com o *software*, como, por exemplo, o caso dos sistemas já referido, não se apercebendo, assim, das suas potencialidades. Este aspeto, terem estudado pouco ou preferirem efetuar cálculos com papel e lápis também levou a que alguns alunos (28,5%) nunca ou poucas vezes tenham usado o *software* para apoiar o estudo fora da aula.

6.2.3.3. A influência da revisão dos minitestes e da reformulação dos trabalhos

Em termos de resultados do estudo, salienta-se o importante contributo da componente formativa da avaliação para a aprendizagem dos alunos, na medida em que tanto a reformulação dos trabalhos como a revisão dos minitestes permitiram que os alunos tomassem consciência das suas dificuldades, identificassem os seus erros, refletissem sobre conceitos e procedimentos que não tinham compreendido e os revissem novamente, nem que fosse pelo confronto das resoluções com os outros colegas, o que os ajudou a ultrapassar algumas das dificuldades.

Para além disso, os alunos consideram que a sua participação na UC foi mais efetiva, visto que a possibilidade de reformulação dos trabalhos concorreu para que estivessem mais atentos aos debates em grande grupo (85,8% concorda ou concorda totalmente) e a revisão dos minitestes contribuiu para que se tornassem mais autónomos na resolução das tarefas (89,3% concorda ou concorda totalmente) e incentivou-os a estudar um pouco mais, pelo facto de poderem recuperar uma parte da pontuação perdida (96,4% concorda ou concorda totalmente).

Os efeitos positivos desta forma de avaliação para a aprendizagem dos alunos do ensino superior são igualmente mencionados por Del Puerto e Seminara (2011) e Cherepinsky (2011), enfatizando também este último o facto da revisão encorajar os alunos a desenvolverem a habilidade para identificar erros e os corrigirem, sem dependerem de uma fonte externa, o que considera que poderá ser útil em diversos contextos.

Todavia, nem todos os alunos aproveitaram integralmente as potencialidades deste tipo de avaliação, já que 28,6% dos alunos concorda que nem sempre realizaram as reformulações dos trabalhos, porque era um trabalho acrescido, e apenas 10 alunos resolveram os dois minitestes "em casa" antes da respetiva revisão, embora mais seis tivessem tomado essa decisão aquando da revisão do segundo miniteste. Esta atitude, de acordo com os alunos, pode atribuir-se a diversos fatores como, por exemplo, o facto de não estarem habituados a estes procedimentos de reformulação (Gomes, 2013; Leal, 1992; Menino, 2004), confiarem que as respostas dadas nos minitestes estavam corretas, (atitude também já identificada aquando da resolução do teste diagnóstico), terem dificuldade em se organizar para fazer trabalho extra-aula (de relembrar que a maioria deles tinha ALGA em atraso e estava a frequentar outros anos) e a falta de hábitos de estudo. Este último aspeto também corrobora o facto da maior parte dos alunos preferir realizar a revisão dos minitestes em contexto de sala de aula, pois estes alegam que, se fosse efetuada "em casa", não haveria garantias que fossem eles a resolver as tarefas, não se organizariam para efetuar atempadamente a revisão ou poderiam ter mais dificuldades.

Porém, mesmo os alunos que não se organizaram no sentido de aproveitar os benefícios das reformulações reconhecem as vantagens desse tipo de avaliação. De notar, por exemplo, que uma das alunas, que não resolveu o miniteste em casa e confessa ter ido à revisão com o intuito de copiar por um colega, assegura que o confronto das resoluções acabou por gerar alguma discussão e, por consequência, uma aprendizagem de que não estava à espera.

> Às vezes falávamos, discutíamos aquilo que ele pensava que eu tinha mal. E eu dizia-lhe: 'Porque é que fizeste isto assim?' 'Então, tens de fazer isto e isto.' (...). Discutíamos mais do que no trabalho em grupo. Por exemplo, nós tínhamos lá uma matriz que o A20 tinha tudo bem, mas fez de outra maneira e eu enganei-me lá num passo (...). Não ia copiar o exercício. E eu disse-lhe 'não consigo ver onde é que está o meu erro'. E ele disse: 'enganaste-te, tens de subtrair aqui nesta linha'. E eu: 'Ah! Pois é.' E depois resolvi tudo direitinho. (A17)

Um dos aspetos que pode constituir uma desvantagem do processo de revisão dos minitestes, e de reformulação dos trabalhos, é o tempo que se gasta na avaliação, implicando também uma maior quantidade de trabalho para o professor, aspetos que são igualmente

referenciados por Menino e Santos (2004) e Cherepinsky (2011), ao descreverem experiências com características similares. Contudo, Cherepinsky considera que o tempo despendido é um investimento tanto para o professor como para o aluno.

6.2.3.4. Considerações sobre o ensino e a aprendizagem baseadas na intervenção de ensino

De acordo com as aulas observadas e as opiniões dos estudantes, pode concluir-se que a metodologia seguida, em que se combinaram várias estratégias de ensino e de avaliação, teve, em termos gerais, efeitos positivos para a aprendizagem dos alunos. Vários autores corroboram esta ideia de que é a combinação de recursos aliada à diversificação de estratégias que promove a melhoria das aprendizagens (Aydin, 2008; Ciancio & Oliva, 2006; Pecuch-Herrero, 2000; Idris, 2005).

Assim, para além de se sentirem mais motivados e da sua participação nas aulas ter sido mais ativa, a maioria dos alunos considera que as estratégias seguidas contribuíram, entre outros aspetos, para que identificassem os seus erros, tomassem consciência das suas dificuldades e ultrapassassem algumas delas, assim como clarificassem conceitos/procedimentos. Ganhos que confirmam as indicações de Pochulu (2004), Cury (2004) e Engler et al. (2004) sobre a importância da utilização de estratégias que conduzam os alunos a participar ativamente na superação dos seus erros.

Embora a maioria dos alunos reconheça que as estratégias utilizadas contribuíram para a sua aprendizagem, atribuem mais destaque (mais de 95% dos alunos concorda ou concorda totalmente com a sua importância) à discussão em grande grupo, à resolução de algumas tarefas no quadro pela professora, à exposição de conteúdos pela professora, ao trabalho de grupo nas aulas e à reformulação das resoluções resultantes do trabalho de grupo. Já o trabalho de grupo extra-aula é a estratégia que os alunos consideram menos relevante para a sua aprendizagem, pois 25% discorda que tenha sido importante.

O apelo à maior exposição de conteúdos ou de resolução de tarefas por parte da professora foi também visível nas entrevistas aos alunos: "preferia que desse mais matéria no quadro" (A17), "uma vez por semana uma das aulas fosse mais teórica, para explicar" (A2), "devia haver uma maior introdução" (A19). Estes aspetos retratam o facto de alguns alunos ainda estarem muito ligados à metodologia expositiva, eventualmente por ser o método de ensino mais frequente ao longo do seu percurso escolar e que também ainda predomina no

ensino superior (dados da 2.ª fase da primeira parte do estudo; Escalona, 2011; Gonçalves, 2008; Trejo & Camarena, 2011).

Embora houvesse grupos de trabalho diferentes, uns constituídos exclusivamente por elementos que estavam a frequentar a UC pela primeira vez, outros por alunos que a estavam a repetir, e outros mistos, não se observaram diferenças que se possam considerar significativas em termos de dificuldades. Apenas na primeira tarefa sobre o tema Matrizes e determinantes, se verificou que alguns grupos, com elementos que já tinham frequentado a UC, recorreram aos conhecimentos sobre matrizes; nas outras tarefas, houve várias dificuldades que foram comuns a todos os tipos de grupos.

Como seria de esperar, os alunos tiveram diversas dificuldades durante as aulas. De acordo com a sua opinião, foi para eles mais complicado acompanhar as aulas de sistemas (42,9% concorda ou concorda totalmente) do que as de matrizes (10,7% concorda ou concorda totalmente) ou determinantes (10,7% concorda ou concorda totalmente). Quanto às razões mais apontadas para essa situação (entre 40% a 50% dos alunos concorda ou concorda totalmente) são a falta de estudo e aplicação, falta de pré-requisitos do ensino secundário ou a falta de concentração nas aulas, o que também vai de encontro à opinião de Rosa (2015), no âmbito da matemática em geral, e dos professores participantes na 2.ª fase da primeira parte do estudo. Já a abstração dos conteúdos, que é um dos aspetos que estes consideram também ter uma influência significativa, assim como outros autores (Dorier & Sierpinska, 2001; Isik et al., 2014; Moro et al., 2016), não é tão referenciada pelos alunos, na medida em que apenas 25% dos alunos concorda ou concorda totalmente que a excessiva abstração dos conteúdos tenha contribuído para as suas dificuldades, sendo a falta de motivação para a matemática ainda ligeiramente mais assinalada (28,6% concorda).

Nos minitestes, os alunos tiveram bastantes dificuldades, mas empenharam-se em responder, na medida em que a percentagem de não respostas não ultrapassou os 21,4% em qualquer das questões dos minitestes e não houve alunos que tivessem deixado todas as questões por resolver. A revisão dos minitestes fez com que muitos dos alunos refletissem sobre as respostas e as reformulassem corretamente, ou pelo menos com maior correção do que da primeira vez, tendo ainda sido um incentivo para procurar uma resposta, nos casos em que não tinham respondido à questão. Há, porém, situações em que os alunos, embora tivessem evoluído no seu raciocínio, pois conseguiram identificar os erros, não conseguiram resolver as

questões de forma correta e ainda outras em que os alunos não conseguiram mesmo ultrapassar as dificuldades.

Como a superação das dificuldades nem sempre foi alcançada por todos os alunos, isso refletiu-se na taxa de aprovação final à UC, que ficou pelos 46,4%, sendo mesmo assim superior à dos três anos anteriores do mesmo curso, em que não se ultrapassou os 28,6% de aprovações. Essa taxa sobe ligeiramente para 54,2% se se limitar o número de avaliados aos que compareceram a pelo menos um exame, que era condição necessária para obter aprovação na UC. Realça-se ainda que, de acordo com o teste diagnóstico, os alunos tinham diversas dificuldades que se prendiam com conteúdos propedêuticos à AL, o que vai de encontro ao facto de alguns alunos (35,7%) referirem que tinham bastantes dificuldades a matemática no ensino secundário, aspeto que foi difícil de colmatar no pouco tempo disponível das aulas. Os alunos que não obtiveram aprovação à UC consideram que os principais motivos são falta de estudo/empenho (73,3%) (Martínez & Gaitán, 2013) e ter de estudar para outras UCs (33,3%). Alguns aludem ainda a dificuldades na compreensão dos conteúdos (20,0%), razões externas à UC (20%), desmotivação (20%), o que levou alguns a não comparecem ao exame, excessiva autoconfiança nos seus conhecimentos (13,3%) e dificuldades em se expressar por escrito (6,7%).

Outras condicionantes também poderão ter afetado ou impedido que, em algumas situações, houvesse uma progressão na aprendizagem. Um aspeto que sobressai está ligado a constrangimentos na organização do grupo, como a falta de coordenação dos alunos para se juntarem fora da aula, para finalizarem as tarefas ou realizarem as reformulações dos trabalhos, ou o facto dos alunos distribuírem as questões a resolver pelos elementos do grupo, levando a que nem sempre todos contribuíssem para a discussão na fase inicial de resolução. Assim, o esforço que os alunos estão dispostos a dispensar para realizar as tarefas é um fator que pode comprometer o processo de ensino/aprendizagem pois, para o acompanhar, é necessário que o estudante esteja envolvido numa aprendizagem significativa (Baggio et al., 2010; Teixeira & Fontenele, 2017; Zerr & Zerr, 2011).

Salienta-se, também, que mesmo os alunos que reprovaram consideram que havia vantagens na metodologia utilizada, como é exemplo o aluno A1:

> Gostei dos processos que nós desenvolvemos durante a aula, as formas de avaliação, tanto os minitestes como a revisão, isso tudo... para mim, até foi dos mais vantajosos e acho que dos melhores. (...) Penso que esteve tudo bem. Acho

que houve muita coisa a nosso favor, poderíamos ter tirado um pouco mais partido disso.

Face à avaliação positiva dos alunos sobre a metodologia seguida nas aulas, à sua maior participação e motivação, à relação mais próxima que estabeleceram com a docente, e à praticamente ausência de abandono dos alunos da UC, dos 29 alunos que começaram a comparecer às aulas no início apenas um deixou de frequentar, pode concluir-se que terá todo o sentido adaptar a intervenção realizada a outras turmas e, eventualmente, até a outras áreas, reformulando os aspetos que foram menos benéficos, como o trabalho extra-aula.

6.3. Limitações do estudo

Na 1.ª fase da primeira parte do estudo, nem todos os alunos responderam às mesmas questões por integrarem turmas em dias/horas diferentes. Esta decisão dificultou a análise e pode ter tornado um pouco mais confusa a sua exposição, na medida em que originou várias versões das questões; todavia, também enriqueceu a variedade de situações estudadas.

No questionário que se realizou aos professores na 2.ª fase da primeira parte do estudo, a taxa de respostas ficou um pouco aquém do que seria desejável, contudo, como se enviaram oito lembretes até desistir da colaboração desses professores, pensa-se que não haveria muito mais a fazer. Um dos aspetos que poderia ter enriquecido esta componente do estudo seria ter feito entrevistas a alguns professores, focando particularmente os aspetos referentes aos temas em análise, Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares. Porém, o tempo disponível para realizar a investigação não permitiu que se enveredasse por esse caminho.

O facto de, na segunda parte do estudo, a investigadora desempenhar simultaneamente o papel de professora teve a vantagem de facilitar o acesso ao "terreno" e de permitir criar uma relação mais próxima dos alunos, o que provavelmente contribuiu para que todos aceitassem responder ao questionário de avaliação da intervenção de ensino, assim como ser entrevistados. Reconhece-se, todavia, que o estatuto de professora implicava que esta circulasse pelos vários grupos para orientar os alunos, o que permitiu a perceção das dificuldades que foram surgindo. Contudo, não possibilitou fazer o registo imediato dos episódios que foram ocorrendo, pelo que, ao serem tomadas notas apenas no final das aulas, podem ter-se perdido aspetos enriquecedores para o trabalho, podendo também haver outras perspetivas que teriam sobressaído se se tivesse apenas o papel de observadora. A gravação das interações de todos os grupos em vez de apenas três poderia ter contribuído para ultrapassar esse aspeto, mas a falta

de meios técnicos e também a dificuldade em, posteriormente, ouvir e transcrever todas as gravações não tornou essa situação exequível.

Houve episódios de aula em que os erros dos alunos poderiam ter conduzido a explorações significativas, tanto na perspetiva da aprendizagem destes como no âmbito do enriquecimento da investigação. No entanto, a limitação temporal das aulas a dedicar aos temas fez com que, várias vezes, se tivesse de abdicar desse caminho, embora se recomendasse aos alunos que averiguassem/investigassem melhor algumas situações.

6.4. Recomendações

6.4.1. Recomendações didáticas

Este estudo revelou que algumas das dificuldades dos alunos são devidas à falta de conhecimentos prévios, tanto em aspetos que se relacionam com conhecimentos de lógica, como a capacidade de formalização matemática, ou conhecimentos mais básicos como a verificação de soluções num sistema, o produto escalar, a resolução de equações do primeiro grau ou de sistemas de equações lineares, ou a relação entre as suas representações geométrica e analítica. Mais preocupante é o facto de muitas dessas limitações continuarem a existir quando os alunos já frequentaram pelo menos uma vez a UC de ALGA. Assim, e corroborando a opinião de alguns professores participantes na 2.ª fase da primeira parte do estudo, pensa-se que seria importante que a nível institucional, após uma análise diagnóstica aos conhecimentos dos alunos ao entrar no ensino superior, se apostasse, antes da frequência da UC de ALGA, numa UC sem programa rigidamente definido, que se centrasse sobre os conhecimentos prévios considerados decisivos na aprendizagem da AL, para que os alunos se consciencializem dos seus conhecimentos limitados, ou mesmo errados, e invistam na sua superação com a ajuda do professor. Outra alternativa seria haver, numa fase inicial, um aumento da carga horária da UC, no sentido de as primeiras aulas poderem ser orientadas para tarefas que se centrassem nas dificuldades evidenciadas pelos alunos, promovendo-se o debate sobre os seus raciocínios e a sua correção.

Os trabalhos em grupo revelaram ser um bom meio para os alunos participarem ativamente na resolução das tarefas e de se sentiram mais motivados para a sua realização. Porém, quando esse trabalho tinha de ser realizado extra-aula, o seu benefício para a aprendizagem ficou aquém do que seria esperado. Também manter o mesmo grupo ao longo das aulas foi vantajoso para a continuidade do trabalho, mas nem sempre se revelou a melhor

estratégia, principalmente em grupos que não se conseguiram organizar em termos colaborativos ou em que havia elementos que faltavam mais vezes às aulas. Uma forma de ultrapassar esta situação poderá passar por não haver grupos previamente definidos, juntando-se os alunos de acordo com as suas preferências e em função de quem está presente na aula. Isso fará com que haja um esforço acrescido por parte do professor no sentido de programar as tarefas de forma a que sejam exequíveis, tanto a sua realização como a discussão no tempo real de aula, o que permitirá resolver também o problema do trabalho de grupo extra-aula, que foi o que originou mais conflitos. Embora desta forma se percam algumas oportunidades de reflexão sobre o trabalho realizado, esta maneira de proceder poderá ter vantagens em turmas frequentadas por alunos de vários anos, em que a presença é mais flutuante, ou em cursos em que os alunos são divididos por turnos e que, devido a sobreposição de horários, não conseguem frequentar sempre o mesmo turno. O facto de alguns grupos resolverem mais rapidamente as tarefas pode ser contornado preparando alguns exercícios complementares, sem a obrigatoriedade da resolução em grupo e entrega no final da aula, de forma a que os outros alunos possam, se quiserem, resolvê-los também extra-aula.

Como era a primeira vez que a investigadora estava a enveredar por uma avaliação que envolvia trabalhos de grupo contínuos, com a respetiva reformulação, e minitestes, com a concernente revisão, esta componente não foi demasiado valorizada, pois não se tinha a certeza da adesão dos alunos e eticamente não se queria que o estudo prejudicasse a sua avaliação final. Nas entrevistas, a maior parte dos alunos mostrou-se de acordo com a ponderação das várias componentes de avaliação. A introduzir alterações, os estudantes recomendam que fosse na cotação dos minitestes, o que poderia constituir uma motivação extrínseca para se empenharem mais – "se os minitestes fossem uns valores que alegrassem os olhos, eu se calhar já estudava mais, mas o exame a valer mais claro" (A17), não estando no geral de acordo que essa cotação fosse aumentada nos trabalhos – "Os trabalhos valerem mais também não era assim muito justo" (A15), "Os trabalhos não podiam valer mais porque nunca se sabe se estás a dar o teu contributo para o trabalho" (A4).

O *software Microsoft Mathematics* revelou-se um poderoso auxiliar na resolução das tarefas e na identificação e correção de erros, mas haver apenas um computador por grupo fez com que nem todos os alunos tirassem vantagens da sua utilização, o que foi mais visível no tema de Sistemas de equações lineares. Talvez uma possível solução seja propor também tarefas individuais que levem os alunos a explorar as distintas potencialidades do *software* que

os ajudem em termos de aprendizagem. Porém, não convém exagerar esta exploração individual, na medida em que ela pode diminuir a qualidade de aprendizagem de AL, principalmente se não for acompanhada de estratégias que promovam o pensamento crítico e aumentem a comunicação entre professores e alunos (Aydin, 2008; Pecuch-Herrero, 2000).

6.4.2. Recomendações para futuras investigações

Este estudo, para além de dar resposta às questões de investigação, desencadeou uma reflexão sobre outras perspetivas que poderão ser objeto de desenvolvimento em futuras investigações.

Como já se referiu, o estudo realizado mostrou a existência de algumas lacunas nos conhecimentos prévios dos estudantes que podem afetar o seu desempenho em UCs de matemática, particularmente as que envolvem conteúdos de AL. Face às dificuldades dos alunos, alguns dos professores que participaram na 2.ª fase da primeira parte do estudo recomendam a existência, já no ensino superior, de uma UC prévia à frequência dessas UCs, o que a investigadora também considera apropriado. Nesta perspetiva, seria pertinente estudar uma forma de implementar uma experiência deste tipo, analisando o melhor processo de a operacionalizar, o tipo de tarefas a propor entre outros aspetos, tendo em vista a superação das dificuldades dos alunos e avaliando, *a posteriori,* o seu impacto na melhoria da aprendizagem em temas de AL.

Problemas com os conhecimentos de lógica surgiram como um dos causadores das dificuldades sentidas pelos alunos, revelando-se, em alguns casos, como no empirismo ingénuo (Balacheff, 2000), difíceis de combater. Desta forma, poderá ser relevante efetuar um estudo mais aprofundado das dificuldades e raciocínios dos alunos ao resolver questões nesse âmbito. Este conhecimento pode contribuir para a construção de tarefas que ajudem os alunos a debater as suas conceções.

A turma em que se aplicou a metodologia de ensino descrita era bastante específica, na medida em que os alunos demonstraram bastantes dificuldades no teste diagnóstico, a maioria já tinha passado por alguma retenção à UC e todos tinham entrado no ensino superior através de concursos especiais, como titulares de um diploma de especialização tecnológica. Assim, pode questionar-se quais seriam as conclusões se a mesma metodologia de ensino fosse aplicada numa turma com características diferentes. Haveria diferenças significativas? O impacto na aprendizagem dos alunos seria similar?

O *Microsoft Mathematics* foi o *software* selecionado para o estudo, por, entre outros aspetos, ser mais intuitivo e não exigir aulas suplementares para aprender a trabalhar com ele. Porém, para o ensino de AL no ensino superior há quem recomende ou tenha realizado experiências com *software* como o *Matlab* (professores da 2.ª fase da primeira parte do estudo; Harel, 2000; Lihong et al., 2011; Nyondo, 1992), *Octave* (professores da 2.ª fase da primeira parte do estudo), *Scilab* (Rosales, 2012; Catarino & Vasco, 2014), *Derive* (Ortega, 2002; Prugent & Gallese, 2002), *Maple* (Mallet, 2007) e *GeoGebra* (Pires & Marques, 2009), entre outros. Assim, teria toda a pertinência efetuar uma análise comparativa detalhada do diverso *software* existente com aplicabilidade em AL, investigando as suas vantagens e inconvenientes, nomeadamente para cada um dos temas, podendo-se ainda construir uma biblioteca de tarefas afetas às potencialidades de cada *software*.

De acordo com os professores que participaram no estudo, os livros de texto funcionaram como coadjuvantes na preparação de aulas, pelo que indiretamente também vão influenciar a aprendizagem dos alunos. Deste modo, seria interessante investigar e caracterizar as tarefas incluídas nestes recursos relativamente aos conteúdos de AL, se abrangem as dificuldades dos alunos identificadas pela investigação, se propõem a exploração de diferentes representações dos conceitos (Duval, 2006), qual a ênfase que dão às tecnologias e aos problemas ligados à realidade e se contribuem para a construção de um conhecimento relacional dos conceitos e não apenas um conhecimento instrumental (Skemp, 1987).

A colaboração entre pares revelou-se pouco habitual entre os professores do estudo, porém, como referem Figueiredo et al. (2014) a formação de grupos de trabalho colaborativo entre professores que lecionam as mesmas UCs ou UCs sequenciais pode revelar-se um ambiente propício para trocar experiências e discutir conexões entre os conteúdos abordados. Assim, projetos que promovam este tipo de colaboração, podem permitir trabalhar aplicações adequadas ao curso dos alunos e estudar o seu impacto do ponto de vista da aprendizagem, assim como analisar as vantagens na perspetiva do desenvolvimento profissional do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agudo, F. R. D. (1996). *Introdução à álgebra linear e geometria analítica*. Lisboa: Escolar Editora.

Almaguel, A., Alvarez, D., Pernía, L. A., Mota, G. J., & Coello, C. (2016). *Software* educativo para el trabajo con matrices. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet*, *16*(2).

Alvarado, A., & González, M. T. (2009a). A study of university student' performance with proof. *Proceedings CIEAEM 61. Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Mathematiche)*, *19*(2), 348-352.

Alvarado, A., & González, M. T. (2009b). La implicación lógica en el processo de demonstración matemática: estúdio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 73-84.

Alvarado, A., & González, M. T. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 37-63.

Andreoli, D. I. (2003). Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad (Segunda fase). *Comunicações Científicas y Tecnológicas 2003.* Universidade Nacional del Nordeste, Argentina. Consultado em janeiro 12, 2012, em http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2003/comunicaciones/09-Educacion/D-034.pdf

Andreoli, D. I. (2005). Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad (Tercera fase). In *Comunicações Científicas y Tecnológicas 2005*. Universidade Nacional del Nordeste, Argentina. Consultado em janeiro 12, 2012, em http://host140.200-45-54.telecom.net.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-004.pdf

Anton, H., & Rorres, C. (2001). *Álgebra linear com aplicações* (8.ª ed., C. Doering, Trans.). Porto Alegre: Bookman.

Aquino, S. I. (2013). *O projeto PmatE e a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro.

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 129-158.

Arellano, F., & Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. In P. Lestón, *Acta Latinoamericaba de Matemática Educativa* (Vol 22, pp. 357-365). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. e Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Arnal, J., Rincón, D., & Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos e metodologia.* Barcelona: Editorial Labor.

Artigue, M., Chartier, G., & Dorier, J.-L. (2000). Presentation of other research works. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 247-271). Kluwer Academic Publishers.

Assum, D., Guil, D., & Malet, O. (2014). El uso de GeoGebra en las aulas del curso de ingresso a la universidade: los porquês de una elección. In *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires, Argentina. Consultado em junho 14, 2015, em http://www.oei.es/historico/congreso2014/32memorias2014.php.

Astolfi, J. P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Sevilha: Díada Editora S.L.

Atencio, D. (2013). Uso de *software* libre en la enseñanza del álgebra lineal para ingenieros. In E. Rodríguez, G. Bermúdez, A. Buquet, S. Peralta, A. Tosetti, & F. Vitabar (Orgs.), *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 7233-7240). Montevídeo, Uruguai.

Aydin, S. (2008). *The role of the computer in the teaching and learning linear algebra*. Consultado em junho 16, 2011, em http://ietc2008.home.anadolu.edu.tr/ietc2008/202.

Aydin, S. (2009). The factors effecting teaching linear álgebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *1*(1), 1549-1553.

Aydin, S. (2013). Some analysis on a first course in linear álgebra. *TOJSAT: The Online Journal of Science and Technology*, *3*(1), 139-144.

Aygor, N., & Burhanzade, H. (2014). The comparative analyzes of the student's performance about matrix in Student Selection Exam (ÖSS) and the Approved Lecture Books of Ministry for the National Education (MEB). *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *136*, 360-369.

Aygor, N., & Ozdag, H. (2012). Misconceptions in linear algebra: the case of undergraduate students. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *46*, 2989-2994.

Bachelard, G. (n.d.). *A formação do espírito científico – Contribuição para uma psicanálise do conhecimento* (E. Abreu, Trans). Edições Contraponto. Consultado em junho 14, 2015, em http://pt.scribd.com/doc/7182651/Bachelard-Gaston-A-Formacao-Do-Espirito-Cientifico

Badano, C. I., Cabana, A. E., Lepera, A. F., & Moriñigo, M. S. (2002). Estudio sobre la visualización y el nivel de asimilación del concepto de dimensión. In C. Crespo, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, pp. 424- 429). Buenos Aires, Argentina: Comité Latino americano de Matemática Educativa.

Baggio, G., Schossler, D., & Dullius, M. M. (2010). Utilizando diferentes metodologias para o ensino de matrizes: uso de Modelagem Matemática e recursos computacionais em dois ambientes escolares. *Revista Destaques Acadêmicos*, *2*(4), 9-15.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alunos de matemáticas*. Bogotá, Universidade dos Andes: Una empresa docente.

Batista, S. C., Barcelos, G. T., & Afonso, F. F. (2005). Tecnologias de informação e comunicação no estudo de temas matemáticos. In *XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada. Consultado em abril 14, 2011, em http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd_xxviii_cnmac/resumos%20estendidos/silvia_batista_SE5.pdf.

Belo, N. T. (2011). Matrizes e determinantes: uma proposta metodológica para o ensino médio. In *Anais da XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil: Comitê Interamericano de Educação Matemática.

Berman, A., & Okubo, K. (2015). Issues surrounding teaching linear álgebra. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceddings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 593-595). Springer Open.

Bianchini, B. L., & Almouloud, S. A. (1996). O erro ligado ao ensino/aprendizagem de sistemas lineares. In R. C. Lins (Ed.), *Anais do IV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 216-223). São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Birinci, D. K., Delice, A., & Aydin, E. (2014). University students' solution processes in systems of linear equation. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *152*, 563-568.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bogomolny, M. (2006). *The role of example-generation tasks in students' understanding of linear algebra*. Tese de doutoramento, Simon Fraser University, Canadá.

Boralho, A. M. A., Lucena, I. C. R., & Brito, M. A. R. B. (2015). *Avaliar para melhorar as aprendizagens matemáticas*. Coleção IV – Educação Matemática na Amazônia (Vol. 7). Belém, Pará: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Bozzalla, A. E., & Garcia, S. A. (2015). Análisis de los errores cometidos en el elemento matemático sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. *Revista Premisa*, *17*(66), 20-33.

Brito, M. L., Rodríguez, M. C., Valle, A., & Fraga, E. (2010). Reflexiones acerca de la enseñanza de las matemáticas en las ciências técnicas. *Pedagogía Universitaria*, *15*(3).

Britton, S., & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 963-974.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117). Louvain la Neuve.

Bryman, A. (1992). Quantitative and qualitative research: further reflections on their integration. In J. Brannen (Ed.), *Mixing methods: qualitative and quantitative research* (pp. 57-78). Aldershot: Avebury.

Caballero, K., & Bolívar, A. (2015). El professorado universitário como docente: hacia una identidade profesional que integre docência e investigacion. *Revista de Docencia Universitaria*, *13*(1), 57-77.

Cabral, I., Perdigão, C., & Saiago, C. (2009). *Álgebra linear – Teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos com soluções*. Lisboa: Escolar Editora.

Callejo, M. L. (2013). Innovación en la enseñanza de las matemáticas en la universidad. *Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas*, *63*, 5-10.

Caputo, S. G., & Macias, D.A. (2006). Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones. In *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas 2006*. Universidade Nacional del Nordeste, Argentina. Consultado em novembro 13, 2014, em http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf

Cardoso, V. C., Kato, L. A., & Oliveira, S. R. (2013). Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes: uma investigação acerca dos invariantes operatórios. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*, 95-116.

Carlson, D., Johson, C. R., Lay, d.C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recomendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da investigação. Guia para a auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Catarino, P. & Vasco, P. (2014). Scilab in linear álgebra. *Applied Mathematical Sciences*, *8*(28), 1391-1399.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de mestrado, Pontíficia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Celis, M. B., Kurdobrin, A. I., Pérez, M. V., Sabatinelli, P. A., & Guzmán, M. E. (2012). Una propuesta para evaluar la comprensión de algunos conceptos básicos del álgebra lineal. In In D. C. Veiga (Ed.), *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 263-267). Buenos Aires: SOAREM – Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Cerutti, R. A., & Andreoli, D. I. (2002). Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad (Primera fase). In *Comunicações Científicas y Tecnológicas 2002.* Universidade Nacional del Nordeste, Argentina. Consultado em janeiro, 14, 2012, em http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-018.pdf

Cherepinsky, V. (2011). Self-reflective grading: getting students to learn from their mistakes. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *21*(3), 294-301.

Ciancio, M. I. & Oliva; E. S. (2006). Aplicación educativa de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de transformaciones lineales. *Premisa*, *29*, 25-34.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem* da *álgebra linear*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Cosme, C. I. R. (2015). Fazer escola em Portugal: *O caso das normas matriciais*. Tese de doutoramento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina, S.A.

Costa, M. C. (2008). *Possibilidade de articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas*. Dissertação de mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Cury, H. N. (1994). *As conceções matemáticas dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese de doutoramento, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Cury, H. N. (1995). Retrospetiva histórica e perspetivas atuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké*, *3*(1), 39-50.

Cury, H. N. (2004). Análise de erros em educação matemática. *Veritati, Salvador*, *3*(4), 95-107.

Cury, H. N., & Bisognin, E. (2009). Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. *Bolema*, *33*, 1-22.

Cury, H. N., & Bortoli, M. F. (2011). Pensamento algébrico e análise de erros: algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, *1*(1), 101-113.

Cutz, B. M. (2005) *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*. Dissertação de mestrado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

D'Andrea, R. E., Cañibano, A., & Sastre, P. (2014). Validación y contraejemplo. In D. C. Veiga (Ed.), *Acta de La X Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 783-789). Buenos Aires: SOAREM – Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Day, J. M., & Kalman, D. (1999). *Teaching linear algebra: what are the questions?* Consultado em julho 4, 2011, em www.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/questions.pdf.

De la Torre, S. (1993). *Aprender de los errores – El tratamento didáctico de los errores como estratégia de innovación*. Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

Delgado, O. T., Mendoza, H. J., & Castañeda, A. M. (2009). Implicação da base orientação das ações e direção do processo de estudo na aprendizagem dos alunos na atividade de situações problema em sistema de equações lineares. *VIII Congresso Norte e Nordeste de Educação em Ciência e Matemática*. Boa Vista: Universidade Estadual de Roraima. Consultado em fevereiro 21, 2011, em http://www.dmat.ufrr.br/~hector/Artigo3.pdf.

Del Puerto, S. M., Minnard, C. L., & Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *38*(4).

Del Puerto, S. M., & Seminara, S. A. (2011). Evaluación: una experiencia innovadora en el aula de matemática. In *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matematica, II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp. 174- 181). Tandil, Argentina: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

De Vries, D. & Arnon, I. (2004). Solution – what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. In *Proceedings* of *the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 55-62). Bergen, Noruega.

Diković, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by web techonologies: some examples. *The Teaching of Mathematics*, *10*(2), 109-116.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no ínicio do superior*. Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Dorier, J.- L. (Ed.) (2000a). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.- L. (2000b). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.- L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 3-81). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.- L. (2002). Teaching linear algebra at university. In Li Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III (Invited lectures), pp.875-884). Beijing: Higher Education Press.

Dorier, J.- L. (2016). Duality between formalism and meaning in the learning of linear algebra. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück. *Didactics of Matematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Kassel: Universitätsbibliothek Kassel. Consultado em agosto 2, 2016, em https://archive-ouverte.unige.ch/unige:85576.

Dorier, J.- L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.- L.; Robert, A., & Sierpinska, A. (2000). Conclusion. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 273-276). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.- L., & Sierpinska (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 255-273). Kluwer Academic Publishers.

Duarte, T. (2009). *A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica)* (CIES e-Working Paper, 60). Lisboa: CIES-ISCTE.

Dundar, S., Gokkurt, B., & Soylu, Y. (2012). The efficiency of visualization through geometry at mathematics education: a theoretical framework. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *46*, 2579-2583.

Duval, R. (2006). A Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, *6*(23), 23-32.

Epp, S. S. (1999). The language of quantification in mathematics instruction. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.). *Developing mathematical reasoning in the grades K-12* (pp. 188-197). Estados Unidos da América: NCTM.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110*(10), 886-899.

Escalona, M. (2011). El perfeccionamiento de la enseñanza de la matemática en la Educación Superior. Su concreción en las carreras de ingeniería en la Universidad de Holguín. *Revista Iberoamericana de Educación*, *56*(4), 1-13.

Esteves, M (2008). Para a excelência Pedagógica do ensino superior. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação*, *7*, 101-110.

Esteves, M. (2012). Do conhecimento científico sobre o ensino superior ao desenvolvimento de competências pedagógicas dos seus docentes. In C. Leite & M. Zabalza (Coord.), *Ensino superior: Inovação e qualidade na docência* (pp. 52-64). Porto: CIIE – Centro de Investigação e Intervenção Educativas.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, *18*, 64-66.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, *39*, 43-55.

Fernandes, R. L. (1999). O ensino da matemática para os cursos de ciências e engenharias. In L. Trabucho, & J. F. Queiró (Eds.), *O ensino da matemática na universidade em Portugal e*

assuntos relacionados (pp. 51-58). Caparide: Centro Internacional de Matemática. Consultado em fevereiro 21, 2011, em http://www.cim.pt/cimE/proceedings/vol014.pdf.

Ferreira, D. H., & Brumatti, R. N. (2009). Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. *Horizontes*, *27*(1), 51-60.

Ferro, P. (2011). *Significado referencial e evaluado de los conceptos de matriz e determinante en estudiantes preuniversitarios. Un estudio a partir de la práctica instruccional*. Tese de doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Figueiredo, E. B., Siple, I. Z., Azevedo, E. B., & Moro, G. (2014). Uma experiencia de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas da matemática nos cursos de engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, *33*(1), 13-23.

Flores, M. A. (1999). (Des)ilusões e paradoxos: a entrada na carreira na perspectiva dos professores neófitos. *Revista Portuguesa de Educação*, *12*(1), 171-204.

Freire, M. A. (2013). *Utilización de la herramienta informática Microsoft Mathematics y el aprendizaje significativo en geometría analítica de los estudiantes del tercer semestre de la carrera de arquitectura de interiores de la Faculdad de Diseño, Arquitectura y Artes de la Universidad Técnica de Ambato*. Trabajo de Investigación Previo a la obtención del Grado Académico de Magíster en Docencia Matemática, Universidad Técnica de Ambato, Ambato, Equador.

Funes, B. A., Macías, A. M., & Jiménez, A. M. (2002). Los errores como objeto de estudio. In C. R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, pp. 289-294). Buenos Aires, Argentina: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gall, M., Gall, J., & Borg, W. (2003). *Educational research: an introduction*. New York: Longman Publishers USA.

Gayoso, M., Queiruga, V., Hernández, A., & Rodríguez, A. (2011). Implantación de los grados: evaluación continua en las asignaturas de matemáticas. In M. J. García & E. Icarán (Coord.), *VIII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria – Retos y oportunidades del desarrolo de los nuevos títulos en educación superior.* Madrid: Universidad Europea de Madrid. Consultado em novembro 17, 2016, em http://universidadeuropea.es/myfiles/pageposts/jiu/jiu2011/index.html

Getenet, S. T., & Beswick, B. (2014). Using ICT in teaching a specific mathematics concept: Graphs of logarithmic functions. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allan (Eds.), Proceedings of the *38th Conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, p. 153-160). Vancouver, Canadá: PME.

Giraldes, E., Fernandes, V. H., & Smith, M. P. M. (1997). *Curso de Álgebra linear e geometria analítica*. Lisboa: McGraw-Hill.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros – Manual para el Estudiante*. Consultado em julho 29, 2011, em http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*, *10*(2), 7-37.

Gomes, A. O. G. (2013). *Novos desafios à aprendizagem e autonomia em matemática. Estudo crítico e comparativo*. Tese de doutoramento, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Lisboa.

Gómez, G. R., Flores, J. G., & Jiménez, E. G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa* (2.ª ed.). Málaga: Ediciones Aljibe, S. L.

Gonçalves, G. M. A. C. (2017). *Aprendizagem de testes de hipóteses por alunos do ensino superior politécnico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Gonçalves, R. J. (2005). *Três estudos sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de subespaço gerado e conjunto de vectores geradores*. Dissertação de mestrado, Universidade do Porto, Porto.

Gonçalves, R., & Costa, C. (2012). A mediação do professor e a exploração de uma atividade de modelação matemática no ensino da álgebra linear. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática – Práticas de ensino da matemática* (pp.187-200). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Gonçalves, R., & Costa, C. (2014). O ensino da álgebra linear em Portugal: padrões no uso da tecnologia em cursos de engenharia. In I. P. García & M. L. Nistal (Eds), *TICAI 2013-2014 – TICs para el aprendizaje de la ingeniería* (pp. 25-34). Vigo: IEEE, Sociedad de Educación.

Gonçalves, S. (2008). Método expositivo. In S. Gonçaves, D. Soeiro & S. Silva (Eds)), *Pedagogia no ensino superior* (pp. 5-22). Escola Superior de Educação de Coimbra.

González, A. (2014). Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal a través de sus relaciones intra e inter matemáticas. In P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 959-967). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. e Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

González, M., Hernández, A. I., & Hernández, A. I. (2007). El constructivismo en la evaluación de los aprendizajes del álgebra lineal. *Educere*, *11*(36), 123-135.

González, Y. B. (2009). *Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior*. Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Gouveia, E. L., Roazzi, A., Moutinho, K., Dias; M. G. B. B., & O'Brien, D. P. (2002). Raciocínio condicional: influências pragmáticas. *Estudos de Psicologia*, *7*(2), 217-225.

Governo do Estado de São Paulo (2012). *Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas tecnologias.* São Paulo: Governo do Estado de São Paulo, Secretaria da Educação. Consultado em agosto 2, 2016, em http://www.educacao.sp.gov.br

Grande, A. L. (2006). *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didácticos de Álgebra Linear*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications*, *379*, 491-501.

Günther, H. (2006). Pesquisa qualitativa *versus* pesquisa quantitativa: Esta é a questão?. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *22*(2), 201-210.

Hall, R. D. G. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of mathematics education jornal*, *15*, 70-79.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence: American Mathematical Society.

Henriques, A. C. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Henriques, A. C., & Ponte, J. P. (2008). Actividades de investigação na aprendizagem de Análise Numérica. *Revista de Educação*, *16*(2), 5-32.

Herrera, M., & González, A. (2011). Dificultades asociadas al aprendizaje del álgebra lineal en entornos mediados tecnológicamente. Experiencia con profesores de matemáticas en formación inicial. In P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 24, pp. 1214-1221). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. e Comité Lationamericano de Matemática Educativa A. C.

Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7*(1), 49-78.

Heyvaert, M., Deleye, M., Saenen, L., Van Dooren, W., & Onghena, P. (2017). How do high school students solve probability problems? A mixed methods study on probabilistic reasoning. *International Journal of Research & Method in Education*. Doi: 10.1080/1743727/X.2017.1279138.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Hill, M. M., & Hill, A. (2000). *Investigação por questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.

Hummes, V. B., & Breda; A. (2013). A representação geométrica das soluções de sistemas de equações lineares através do software geogebra: um estudo de caso com alunos do nono ano do ensino fundamental. In *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 6672-6679). Montevídeo, Uruguai.

Hurman, A. L. (2007). El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. In Ruiz, A. (Productor académico), *Enseñanza del algebra* (N.° 3). Colección digital Eudoxus. Consultado em junho 11, 2013, em: www.cimm.ucr.ac.cr/.../Algebra%20Teaching/.../Hurman,%20A.%20El%20papel%20de%20las%20Aplicaciones%20en%20el%20.

Ibarra, S. E. (2008). *La transposición didáctica del Álgebra en las Ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales*. Tese de doutoramento, Instituto Politécnico Nacional, México.

Idris, I. (2005). Toward a rigth way to teach linear algebra. *International Journal of mathematics Teaching and Learning*. Consultado em março 11, 2011, em http://www.cimt.plymouth.ac.uk/Journal/idris.pdf.

Isik, A., Bas, F., Okur, M., Bekdemir, M., & Ciltas, A. (2014). Linear algebra from students' perspectives. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, *9*, 29-40.

Jordão, A. L. (2011). *Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas de equações lineares 3×3 no 2.º ano do ensino médio*. Dissertação de mestrado profissional, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Jordão, A. L., & Bianchini, B. L. (2012). Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2.º ano do ensino médio. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, *1*(1), 5-17.

Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica* (Tese de doutoramento). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Klapsinou, A., & Gray, E. (1999). The intricate balance between abstract and concrete in linear álgebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3, pp. 153-160). Haifa, Israel: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Konyalioğlu, A. C., Işik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., & Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *15*, 4040-4044.

Kuehn, A., Schwerty, S. L., Silva, V. C., & Valle, J. A. B. (2005). Qual é o papel da matemática nos cursos de engenharia? Reflexões de um professor de matemática. In *Anais do XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE 2005*.

Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 225-231). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Laugwitz, D. (1974). Motivations and linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *5*, 243-254.

Leal, M. L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* (Dissertação de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Lihong, J., Chongrong, B., & Zhao, Y. (2011). Application of Matlab software for linear algebra. In *Circuits, Communications and Systems (PACCS), 2011 Third Pacific-Asia Conference on.*

IEEE Xplore (Digital Libray). Consultado em novembro 19, 2015, em http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5990256&tag=1.

Lorenzo, M., Ferreyra, N., & Parodi, C. (2012). Análisis del grado de algebrización en una tarea de álgebra lineal de la UNLPam. In N. C. Ferreyra & M. E. Ascheri, *IV Reunión Pampeana de Educación Matemática: memorias* (pp. 265- 270). Santa Rosa: Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Lucas, C. O., Bon, C. F., Pérez, J. G., & Casas, J. M. (2014). Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. *Educação Matemática Pesquisa*, *16*(1), 1-24.

Machado, S. D. A. (1996). O universitário principiante x significado dos sistemas de equações. In R. C. Lins (Ed.), *Anais do IV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 241-248). São Paulo: SEBEM.

Machado, S. D. (2004). Educação matemática no ensino superior. In L. Nasser (Coord.), *Mesa redonda: Educação Matemática no ensino superior, Anais do VIII Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp.34-46). Recife: SBEM.

Magalhães, J. M. M. (2016). *Aprendizagem de contéudos matemáticos de cálculo por alunos do 1.º ano de cursos de engenharia: contextos e materiais didáticos.* Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Magalhães, L. T. (1992). *Álgebra linear como introdução à matemática aplicada*. Lisboa: Texto Editora.

Mallet, D. G. (2007). Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system maple. *International Journal of Mathematics Education* , *2*(1), 16-32.

Martínez, F., & Saéz, S. M. (2014). Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato. *Números*, *85*, 41-48.

Martínez, G. A., & Gaitán, M. M. (2013). Sistemas de creencias y rendimiento en matemática en estudiantes de ingeniería. In *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 2800-2811). Montevídeo, Uruguay.

Martinez, R., & Detzel, P. (2010). El lugar del contraejemplo en la enseñanza de la matemática. In M. E. Ascheri, R. A. Pizarro & N. C. Ferreyra (Eds.), *III Reunión Pampeana de Educación Matemática: memorias* (pp. 531- 537). Santa Rosa: Universidad Nacional de La Pampa.

Martins, A., Saporiti, C., Neves, P., Bastos, R., & Trindade, S. (2003). Testes em duas fases: uma experiência. *Educação e Matemática*, *74*, 43-47.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994a). Estudos de caso: considerações sobre o problema da generalização e o papel do investigador. In Comissão organizadora do IV Seminário de Investigação em Educação Matemática, *Actas do IV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 169-191). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994b). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante, 3(1)*, 19-53.

Méndez, J. A. (2004). Impacto del uso de Maple en el proceso de enseñanza del álgebra lineal. *Suma*, *45*, 53-58.

Menino, H. A. L. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases, o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2.º ciclo do Ensino Básico.* (Dissertação de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menino, H., & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: o uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2.º ciclo do ensino básico. In C. Alves, C. M., Morais, C. Martins, M. V. Pires & P. Barros (Orgs.), *Actas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.271-291). Covilhã: Associação de Professores de Matemática.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: a qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass.

Messina, V., Cittadini, G., Pulstilnik, I., Sara, A., & Pano, C. (2012). La generación de preguntas: Una estrategia de enseñanza y de aprendizaje del álgebra lineal. In In D. C. Veiga (Ed.), *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 229-234). Buenos Aires: SOAREM – Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Milevicich, L., & Lois, A. (2007). La motivación y el uso de estratégias de aprendizaje en estudantes universitários. In C. R. C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 20, pp. 359-364). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015), Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín oficial del estado*, núm 3, de 3 de janeiro de 2015.

Ministério da Educação e Ciência (2013a). *Programa e metas curriculares – Matemática A*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2013b). *Programa e metas curriculares – Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Molina, J. G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa*, *10*(2), 241-273.

Monteiro, A. (2001). *Álgebra linear e geometria analítica*. Lisboa: MacGraw- Hill.

Monteiro, A., Pinto, G., & Marques, C. (1998). *Álgebra Linear e geometria analítica – Problemas e exercícios*. Lisboa: McGraw-Hill.

Moore, R. C. (1994). Making the transition for formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 249-266.

Moro, G., Viseu, F. A. V., & Siple, I. Z. (2016). Ensino de álgebra linear: traços de uma pesquisa. In *Anais do II COLBEDUCA - Colóquio Luso-Brasileiro de Educação* (pp. 243-256). Joinville, Brasil: Universidade do Estado de Santa Catarina, Universidade do Minho.

Mosquera, J., & Salcedo, A. (2008). *Didáctica del Álgebra Lineal y la Probabilidad*. Caracas: Universidad Nacional Abierta. Consultado em agosto 24, 2016, em https://unamer34.files.wordpress.com/2009/02/765.pdf

Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidad Católica do Perú, Lima-Perú.

Nieto, S. S., Lopes, C. M. C., & Silva, A. F. (2007). Tensões: uma aplicação de álgebra linear para alunos de engenharia. In *COBENGE – XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. Consultado em março 4, 2011, em http://www.mackenzie.br/fileadmin/Graduacao/EE/Producao/2007cobenge_tensoes_algebra_linear_1_.pdf .

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings – Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nunes, C. C. (2005). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática: Um estudo com alunos do 3.º ciclo do ensino básico* (Dissertação de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nunes, S. M., & Sebastião, J. R. (2004). Insucesso no Ensino Superior. *Educação e Matemática*, *78*, 37-39.

Nyondo, A. C. (1992). Using PC-Matlab in the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical in Science and Technology*, *23*(3), 413-419.

Ochoviet, T. C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Tese de doutoramento, Instituto Politécnico Nacional, Montevideo – Uruguai.

Ochoviet, C., & Oktaç, A. (2009). If A.B=0 then A=0 or B=0?. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(1&2),113-116.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. *Relime*, *13*(4-II), 373-385.

Oktaviyanthi, R., & Supriani, Y. (2015). Experimental design: utilizing Microsoft Mathematics in teaching and learning calculus. *Journal of Education and Practice*, *6*(25), 75-83.

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. Tese de doutoramento, Universidade Complutense de Madrid: Madrid.

Orzech, M., & Hillel, J. (2001). Considering how linear álgebra is taught and lerned. In E. Simmt & B. Davis, *Proceedings 2001 Annual Meeting* (pp. 31-40). Universidade de Alberta: Candian Mathematics Education Study Group/ Groupe Canadien d'Étude en Didactique des Mathématiques.

Ozdag, H., & Aygor, N. (2012). Undergraduate students' performances in linear algebra: factorization of a determinant of n*n dimensional matrices. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46, 125-129.

Panizza, M., & Drouhard, J.-P. (2003). Los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativas. In C. Palou de Maté (Coord.), *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua* (pp. 51-73). Buenos Aires: Grupo Editor Multimedial. Coleção Estudos Universitários.

Pantoja, L. F. (2008). *A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Parraguez, M., & Botz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en IR2 y IR3 desde el punto de vista de los modos de pensamento. *REIEC: Revista Eletrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *7*(1), 49-72.

Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear álgebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(2), 181-186.

Pereira, L. S., Júnior, O. M. A., & Mendoza, H. J. G. (2013). Uma reflexão sobre a atividade de situações problema em sistemas de equações lineares na escola estadual Presidente Tancredo Neves Estado de Roraima. In *Anais do VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Canoas: Universidade Luterana do Brasil.

Pfeiffer, K. (2009). The role of proof validation in student' mathematical learning. In D. Corcoran, T. Dooley, S. Close & R. Ward (Eds.), *Proceedings of Third National Conference on Research in Mathematics Education* (pp. 403-413). Drumcondra, Dublin: St Patrick's College.

Pinho, D. P. V. S. (2010). *Matrizes e aplicações no ensino secundário*. Dissertação de mestrado, Universidade Portucalense, Porto.

Pinto, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar.* Série Prática Pedagógica. Campinas, São Paulo: Papirus.

Pires, M., & Marques, M. (2009). Integrating technologies in Linear Algebra lectures. In A. Méndez-Vilas, A. Solano Martín, J. A. Mesa González & J. Mesa González (Eds.), *Research, Reflections and Innovations in Integrating ICT in Education* (pp. 392-396). Badajoz, Spain: FORMATEX.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matematica en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, *35*(4). Consultado em julho 29, 2011, em http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf.

Pochulu, M., Abrate, R., Gabetta, I., & Sierra, S. (2012). Qué comprenden de ecuaciones algebraicas los alunos al finalizar la escuela secundaria. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 25, pp. 291-299). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. e Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamento de una classe de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 361-394.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007) *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear álgebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2125-2140.

Precatado, A., Lopes, A. V., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Guimarães, H. M., Almiro, J., Ponte, J. P., Reis, L., Serrazina, L., Pires, M. V., Teixeira, P., & Abrantes, P. (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Prieto, A. M., (2014). *El papel del álgebra lineal en el bachillerato y en la universidade*. Máster en formación del professorado de Educación Secundaria, Universidade de Cantabria, Cantabria.

Prugent, N. M. L., & Gallese, E. (2002). Recursos informáticos como facilitadores del aprendizaje del algebra lineal. In C. R. C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, pp. 838-843). Argentina: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Purwanti, D. E., Pustari, M. (2013). The comparison of using Microsoft Mathematics and traditional teaching on students' achievement – Teaching mathematics in senior high school. In *The Proceeding of the Global Summit on Education* (pp. 998-1003). Kuala Lumpur: WorldConferences.net.

Quinzá-Torroja, J. M. S., Escalona, A. S., & Macías, J. A. S. (2004). Los errores como motivacion para la enseñanza y la aprendizaje de las matemáticas. In XII Jornadas de ASEPUMA (pp. 1-11). Asociación Española de Profesores Universitarios de Matematicas aplicadasa la Economia y la Empresa. Consultado em fevereiro 7, 2016, em http://www.um.es/asepuma04/.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*, 16-20.

Ramírez, C., Oktaç, A., & García, C. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. In G. M. Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 19, pp. 413-418). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ramírez, G., Chavarría, J., Barahona, C., & Mora, M. (2009). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-28.

Ramos, A., Delgado, F., Afonso, P., Cruchinho, A., Pereira, P., Sapeta, P., & Ramos, G. (2013). Implementação de novas práticas pedagógicas no ensino superior. *Revista Portuguesa de Educação, 26*(1), pp. 115-141.

Ramos, M. L. P. D. & Curi, E. (2014). O uso do erro como estratégia didática: uma nova perspectiva na reconstrução do conhecimento. *Perspectivas da Educação Matemática – UFMS*, *7*(13), 84-102.

Reichardt, C. S., & Cook, T. D. (1997). Hacia una superacion del enfrentamiento entre los metodos cualitativos y los quantitativos. In T. D. Cook & Reichardt, C. S., *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa* (pp. 25-58). Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 83-99.

Ribeiro, C. S, Reis, L., & Reis, S. S. (1999). *Álgebra linear: Exercícios e aplicações* (2.ª ed.) Lisboa: McGraw-Hill.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. In J. Kilpatrick, L. Rico, P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.

Rodrigues, P., Nunes, C., Devesa, I., & Fera, R. (2012). Aprendizagem, ensino e avaliação da aprendizagem no ensino superior: Teses e dissertações defendidas em Portugal (2006-2011). In C. Leite & M. Zabalza (Coord.), *Ensino superior: Inovação e qualidade na docência* (pp. 997-1011). Porto: CIIE – Centro de Investigação e Intervenção Educativas.

Rosa, S. M. T. (2015). *Matemática e o ensino da matemática na universidade: Conceções de professores do ensino superior*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora, Évora.

Rosales, G. R. (2012). *Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del algebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab*. Tese apresentada como requisito para obter o título de Magister en Enseñanza de las Ciencias, Universidade Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Rosso, A. E., & Barros, J. C. (2013) Entramado de lenguages en algebra lineal. In *Actas do VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1156-1163). Montevídeo, Uruguai: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. & Echeverry, A. (2010). Conditional propositions: problematic performances and didactic strategies. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 129-136). Belo Horizonte: PME.

Sanches, M. H. (2002). *Efeitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Santos, L. (2004) O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: um olhar através da avaliação. In E. Castro & E. De la Torre (Ed.), *Investigación en educación matemática – Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Corunha, SEIEM. Consultado em abril 11, 2015, em http://www.seiem.es/docs/actas/08/VIIISimposio.pdf.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*, 169-187.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp.11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos, S., & Di Blasi, M. (2011). Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros: un enfoque dinámico. In *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática – ICIECyM*, *II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática – II ENEM* (pp. 290-295). Tandil: Universidade Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Sara, A., Scardigli, M., Pustilnik, I., Cittadini, G., & Pano, C. O. (2006). Errores recurrentes en el aprendizaje del álgebra lineal y registros de representación semiótica. In *Memorias de las XIII Jornadas de Investigación y Segundo Encuentro de Investigadores en Psicología del*

Mercosur (pp.320-323). Buenos Aires: Universidade de Buenos Aires, Faculdade de Psicologia.

Sastre, P., & D'Andrea, R. E. (2013). Lenguage matemático y validación en estudantes universitários. In R. Flores, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 167- 174). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. e Comité Latinoamaericano de Matemática Educativa A.C.

Seabra, C. M. (2013). *As redes sociais e a aprendizagem de matemática baseada na resolução de problemas – Um estudo de caso com alunos do ensino superior*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (2012). *Currículo Mínimo 2012 – Matemática*. Rio de Janeiro: Governo do Estado do Rio de Janeiro – Secretaria de Estado de Educação. Consultado em agosto 25, 2016, em http://www.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=759820

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. L., Fonseca; C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2001). *Matemática A — 10º Ano*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. L., Fonseca; C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002). *Matemática A — 11º Ano*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Siple, I. Z., Moro, G. Lima, H. G., Franco, M. D., Aguiar, R., Loureiro, K., & Viseu, F. (2017). Uma interpretação geométrica da multiplicação de matrizes mediada pelo GeoGebra. *Anais do Simpósio Ibero-Americano de Tecnologias Educacionais, 1*(1), 246-255.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *13*(14), pp.66-91.

Soares, C. M. (1999). O ensino da matemática para os cursos de ciências e engenharia. In L. Trabucho, & J. F. Queiró (Eds.), *O ensino da matemática na universidade em Portugal e assuntos relacionados* (pp. 71-73). Caparide: Centro Internacional de Matemática. Consultado em fevereiro 21, 2011, em http://www.cim.pt/cimE/proceedings/vol014.pdf.

Soares, E. S., & Santos, R. H. (2010). *Uso do scilab para o estudo de matrizes e determinantes*. Consultado em abril 14, 2011, em http://connepi.ifal.edu.br/ocs/index.php/connepi/CONNEPI2010/paper/viewFile/1272/811.

Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Editorial Horsori.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. In M. C. Machín, P. F. Martínez, & P. B. Catalán (Orgs.), *Investigación en Education Matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Sousa, A. B. (2005). *Investigação em educação*. Lisboa: Livros Horizonte.

Sousa, J. I., & Araújo, J. T. (n.d.) *Avaliação de qualidade do software Microsoft Mathematics 4.0*. Consultado em fevereiro 3, 2015, em http://www.webartigos.com/artigos/avaliacao-de-qualidade-do-software-microsoft-mathematics-4-0/82709/

Souza, M. A. V. F., & Simmer, L. M. (2014). Sistemas lineares: do ensino médio às engenharias. In P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 551-560). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. e Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Stavrou, S. G. (2014). Common errors and misconceptions in mathematical proving by education undergraduates. In G. Harris, *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal* (Vol 1, Content Knowledge). Consultado em setembro 30, 2016, em www.k-12prep.math.ttu.edu

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2003). Difficulties in the acquisition of linear álgebra concepts. *New Zealand Journal of Mathematics*, *32* (supplementary issue), 207-215.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2004). The learning of linear álgebra concepts: Instrumentation of CAS calculators. In W. Yang, S. Chu, T. Alwis & K. Ang (Eds.), *Proceedings of the 9th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 377-386). Singapura: National Institute of Education.

Strang, G. (1988). *Linear álgebra and its applications*. Florida: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.

Stylianides, A. (2009). Breaking the equation. *Mathematics Teaching*, *213*, 9-14.

Teixeira, K. C. B., & Fontenele, F. C. F. (2017). Metodologia peer instruction no ensino de matrizes: um relato de experiência na disciplina de álgebra linear. *Educação Matemática em Revista*, *1*(18), 57-65.

Torres, G. A., & Anta, J. M. (2006). El perfeccionamiento de la educación superior y su repercusión en la enseñanza de las matemáticas en las carreras técnicas. *Ingeniería Mecânica*, *2*, 55-58.

Treffert-Thomas, S. & Jaworski, B. (2009). Teaching university mathematics: what mathematicians have said. In D. Green, M. Grove & J. Nuttall (Eds.), *CETL – MSOR Conference 2008* (pp. 89-93). Lancaster University: Maths, Stats & OR Network.

Trejo, E., & Camarena, P. (2011). Concepciones de los profesores y su impacto en la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. In P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 1095-1103). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. e Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Trejo, E., Camarena, P., & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11*, 397-424.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*, 1779-1792.

Uzuriaga, V. L., & Arias, J. J. (2006). Uma mirada al álgebra lineal. *Scientia et Technica*, *1*(30), 333-338.

Uzuriaga, V. L., Arias, J. J., & Manco, D. G. (2010). Algunas causas que determinan el bajo rendimento académico en el curso de álgebra lineal. *Scientia et Technica*, *1*(44), 286-291.

Uzuriaga, V. L.; Arias, J. J., & Martinez, A. (2008). Diagnóstico y análisis de algunas causas que dificultan el aprendizaje del algebra lineal en estudiantes de ingenieria. *Sciencia et Technica*, *2*(39), 404-409.

Vásquez, P. S., Cañibano, A., & D'Andrea, R. E. (2014). Errores u obstáculos epistemológicos. In P. Léston (Ed.), *Acta Latinoamericana de matemática educativa* (Vol. 27, pp. 227-233). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. e Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Vaz-Rebelo, P., Pessoa, T., & Barreira, C. (2010). Ser professor universitário: estudo exploratório em torno de conceções e práticas. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, *44*(1), 63-82.

Vergara, G., Avilez, A. & Romero, J. (2016). Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. *Revista del Programa de Matemáticas*, *3*(1), 83-91.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: design and methods* (2.ª ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Zandieh, M., & Andrews-Larson (2015). Solving linear systems: augmented matrices and reconstruction of x. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene & M. Zandieh (Eds), *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1072-1078). Pittsburgh, Pennsylvania: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.

Zerr, J. M., & Zerr, R. J. (2011). Learning from their mistakes: using students' incorrect proofs as a pedagogical tool. *PRIMUS*, *21*(6), 530-544.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 101-119.

ANEXOS

Nas páginas seguintes apresentam-se todos os anexos a que se faz referência ao longo da descrição do estudo.

Anexo I – Conteúdos programáticos da UC de ALGA

1. Números complexos
    - Forma algébrica, forma trigonométrica e forma exponencial.
    - Representação geométrica.
    - Operações com números complexos.
    - Representação no plano de condições envolvendo números complexos.
2. Matrizes e determinantes
    - Definições e notações.
    - Operações com matrizes.
    - Inversa de uma matriz e suas propriedades.
    - Definição de determinante e propriedades fundamentais.
    - Teorema de Laplace.
    - Adjunta de uma matriz.
    - Cálculo da inversa de uma matriz a partir da adjunta.
3. Sistemas de equações lineares
    - Discussão e classificação de sistemas de equações lineares.
    - Métodos da inversa, de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan.
    - Regra de Cramer.
    - Cálculo da matriz inversa através do método de Gauss-Jordan.
4. Geometria analítica no plano e no espaço
    - Retas e planos no espaço tridimensional.
    - Distâncias e ângulos entre retas e planos.
    - Posição relativa de retas e planos.
    - Formas quadráticas e sua classificação.
5. Espaços vetoriais
    - Definições e exemplos.
    - Subespaço vetorial. Subespaço gerado.
    - Combinação linear.
    - Dependência e independência linear.
    - Base e dimensão de um espaço vetorial.
    - Matriz de mudança de base.
    - Vetores ortogonais e ortonormais.
    - Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.
6. Aplicações lineares
    - Definição e exemplos.
    - Núcleo e imagem de uma aplicação linear.
    - Matriz de uma aplicação linear em relação a bases predefinidas.
    - Aplicações lineares invertíveis.
7. Valores e vetores próprios
    - Definições, exemplos e propriedades.
    - Polinómio característico.
    - Subespaço próprio.
    - Diagonalização de matrizes.

Anexo II – Ficha de dados dos alunos participantes na 1.ª fase da primeira parte do estudo

Ficha do aluno

Nome: _____ Idade: _____

Nº: _____Curso: _____

Estudante: ☐ Ordinário ☐ Trabalhador-Estudante

Ano letivo em que entrou no curso que frequenta: _____

Escolheu o curso que frequenta em que opção (1.ª, 2.ª, 3.ª,...)? _____

Entrou no ensino superior através de:

☐ Concurso nacional de acesso

☐ Concursos especiais – Titular de diploma de especialização tecnológica

Designação do CET que frequentou: _____

☐ Concursos especiais – Maiores de 23 anos.

☐ Outro. Qual?_____

Que disciplina de Matemática frequentou pela última vez, antes de entrar no ensino superior?

☐ Matemática A ☐ Matemática B ☐ MACS

☐ Matemática (do CET – nível 5) ☐ Métodos Quantitativos (do CET – nível 5)

☐ Outra. Qual?_____

Qual a classificação final que obteve na disciplina de Matemática que indicou antes? ____

Com que média entrou no ensino superior? _____

Para além deste ano, já tinha frequentado a unidade curricular Álgebra Linear (ou similar)?

☐ Não.

☐ Sim, em anos anteriores.

☐ Sim, noutro curso do [redacted]. Indique o curso: _____

☐ Sim, noutra instituição do ensino superior. Indique qual a instituição e o curso:

Instituição: _____

Curso: _____

Anexo III – Questões resolvidas pelos alunos na 1.ª fase da primeira parte do estudo

Questões relativas ao 1.º trabalho – Matrizes e determinantes

Neste trabalho também estava incluída uma questão sobre números complexos que se omitiu por não ser relevante para este estudo.

Versão A

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se B é uma matriz do tipo $m \times n$ e $A + (BC)$ está definida, então A e C são matrizes com a mesma dimensão.

b) Se B e C são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(CB)^2 = C^2 B^2$.

c) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.

Versão B

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $A(BA)$ está definida, então A e B são matrizes quadradas.

b) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

c) Se A e B são matrizes invertíveis, então $A + B$ é uma matriz invertível.

Versão C

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada, então A é uma matriz quadrada.

b) A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ é inversa de si própria.

c) Se A e B são matrizes singulares, então $A + B$ é uma matriz singular.

Versão D

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ e $(CA)+B$ está definida, então B e C são matrizes com a mesma dimensão.

b) Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(AB)^2 = A^2B^2$.

c) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é singular.

Versão E

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ e $B+(AC)$ está definida, então B e C são matrizes com a mesma dimensão.

b) Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(BA)^2 = B^2A^2$.

c) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.

Versão F

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $B(AB)$ está definida, então A e B são matrizes quadradas.

b) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

c) Se A e B são matrizes invertíveis, então $B+A$ é uma matriz invertível.

Versão G

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $B(AB^T)$ está definida e A é uma matriz quadrada, então B é uma matriz quadrada.

b) A matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ é inversa de si própria.

c) Se A e B são matrizes singulares, então $B+A$ é uma matriz singular.

Versão H

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se C é uma matriz do tipo $m \times n$ e $(DC)+B$ está definida, então B e D são matrizes com a mesma dimensão.

b) Se C e D são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(CD)^2 = C^2D^2$.

c) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é singular.

Versão I

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ e $B+(AC)$ está definida, então B e C são matrizes com a mesma dimensão.

b) Se B e C são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(CB)^2 = C^2B^2$.

c) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.

Versão J

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $B(AB)$ está definida, então A e B são matrizes quadradas.

b) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

c) Se A e B são matrizes singulares, então $A+B$ é uma matriz singular.

Versão K

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se C é uma matriz do tipo $m \times n$ e $(DC)+B$ está definida, então B e D são matrizes com a mesma dimensão.

b) Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então $(AB)^2 = A^2B^2$.

c) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é singular.

Versão L

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada, então A é uma matriz quadrada.

b) A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ é inversa de si própria.

c) Se A e B são matrizes invertíveis, então $A+B$ é uma matriz invertível.

Questões relativas ao 2.º trabalho – Sistemas de equações lineares

Versão A

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

1. Um sistema com 2 equações lineares e 3 incógnitas pode ter exatamente três soluções.
2. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

   a) $(2,2,-2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

   b) O sistema $Ax = b$ é possível para quaisquer $b_1, b_2, b_3 \in IR^3$.

Versão B

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

1. Um sistema com 3 equações lineares e 3 incógnitas pode ter exatamente três soluções.
2. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$.

   a) $(1,-3,4,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax=0$.

   b) O sistema $Ax=b$ é impossível.

Versão C

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

1. Um sistema com 3 equações lineares e 2 incógnitas pode ter exatamente três soluções.
2. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

   a) As soluções do sistema homogéneo $Ax=0$ são os vetores da forma $(0,-x_1,x_1)$, $x_1 \in IR^3$.

   b) Para qualquer escolha de $b \in IR^3$, o sistema $Ax=b$ é impossível.

Versão D

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

1. Existem sistemas de equações lineares com exatamente três soluções.
2. Considere as matrizes reais $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix}2\\6\\\alpha\end{bmatrix}$.

   a) $(-2,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax=0$.

   b) O sistema $Ax=b$ é impossível qualquer que seja $\alpha \in IR$.

Anexo IV – Questionário aplicado aos professores

O questionário *A Álgebra Linear no ensino superior politécnico* foi respondido *online* no *LimeSurvey*.

A Álgebra Linear no ensino superior politécnico

Estimado/a Professor/a

No âmbito da realização de um estudo de investigação sobre Álgebra Linear, que constitui a minha tese de doutoramento em Ciências da Educação, especialidade em Educação Matemática, venho pedir a sua colaboração para responder a um questionário. Especificamente este questionário tem por finalidade principal caracterizar o ensino da Álgebra Linear no ensino superior politécnico.

Em termos da validade dos resultados do estudo, é muito importante que leia cuidadosamente todas as questões e que responda a todas elas com sinceridade e empenho. Pela minha parte, enquanto única pessoa com acesso aos dados, comprometo-me a não divulgar as suas respostas a não ser estritamente para fins do estudo e sempre sob a forma de anonimato.

Muito obrigada pela colaboração.

A investigadora

Paula Maria Pereira de Barros

DADOS PESSOAIS

Instituição em que leciona:

Idade:

Sexo

○ Feminino ○ Masculino

Habilitação académica mais elevada que possui:

☐ Licenciatura
☐ Mestrado
☐ Doutoramento
Outro:

Anos de docência:

No ensino superior
Da unidade curricular de Álgebra Linear (ou similar)

Número de cursos diferentes em que já lecionou a unidade curricular de Álgebra Linear (ou similar):

UC DE ÁLGEBRA LINEAR E O CURSO

Nas suas respostas, a este grupo de questões, refira-se à UC de Álgebra Linear (ou similar) que lecionou no 1.º semestre ou se encontra a lecionar no 2.º semestre do presente ano letivo.

Na tabela seguinte indique o curso ou cursos em que lecionou /leciona a UC, a correspondente designação oficial e o ano/semestre em que é lecionada.

	Nome do curso	Designação da UC	Ano	Semestre
Curso 1				
Curso 2				
Curso 3				
Curso 4				
Curso 5				
Curso 6				

? Caso pretenda pode usar as seguintes abreviaturas para a designação da UC:
ALGA - Álgebra Linear e Geometria Analítica; AL - Álgebra Linear

Indique o tempo semanal presencial (em horas) da UC, de acordo com o tipo de aulas em que está organizada:

	Teórica	Teórico-prática	Prática e laboratorial	Trabalho de campo	Seminário	Orientação tutorial	Outra
Curso 1							
Curso 2							
Curso 3							
Curso 4							
Curso 5							
Curso 6							

? Considere que o curso 1 corresponde ao curso 1 que indicou na questão anterior e assim sucessivamente.

Se assinalou "Outra" na questão anterior, indique qual a designação correspondente.

Indique o tipo de aulas da UC que lecionou/leciona neste ano letivo:
Selecione todas as que se apliquem

☐ Teóricas
☐ Teórico-práticas
☐ Práticas e laboratoriais
☐ Orientação tutorial
☐ Trabalho de campo
☐ Seminário
Outro:

Selecione, na lista abaixo, os temas que fazem parte do programa da UC, indicando a ordem por que são abordados.
Clique num item da lista da esquerda, começando pelo primeiro tema abordado (nº 1), passando para o segundo tema abordado (nº 2), e assim sucessivamente.
Caso lecione cursos cuja ordem dos temas do programa seja diferente, refira-se apenas a um deles e indique as diferenças no retângulo abaixo.

- Primeira escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...

Se escolheu "Outro" na questão anterior, indique qual a designação do tema correspondente.
Pode também acrescentar algum esclarecimento, que considere pertinente, relativo a este grupo de questões.

Observação

Nas restantes questões do questionário tenha em conta a sua experiência de lecionação da UC de Álgebra Linear (ou similar).

PREPARAÇÃO DAS AULAS

Relativamente à preparação das aulas da UC de Álgebra Linear (ou similar), indique com que frequência atende aos seguintes aspetos:

Prepara as aulas:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Sozinho	○	○	○	○
Com outros professores que lecionam a UC	○	○	○	○

Periodicidade com que prepara as aulas:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Diariamente	○	○	○	○
Semanalmente	○	○	○	○
Mensalmente	○	○	○	○
Semestralmente	○	○	○	○

Na preparação das aulas recorre a:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Livros de texto	○	○	○	○
Apontamentos (tipo sebentas)	○	○	○	○
Documentação da UC utilizada em anos anteriores	○	○	○	○
Textos de investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear	○	○	○	○
Computadores ou calculadoras	○	○	○	○
Outros	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outros" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

Recorre a livros de texto para:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Preparar a componente teórica da UC	○	○	○	○
Selecionar exercícios e problemas para as aulas	○	○	○	○
Selecionar questões para os testes/exames	○	○	○	○
Outras	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outras" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

Recorre a computadores para:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Elaborar os materiais de apoio (diapositivos, fichas de trabalho...)	○	○	○	○
Disponibilizar materiais aos alunos na plataforma da UC	○	○	○	○
Confirmar as soluções dos exercícios ou problemas propostos	○	○	○	○
Pesquisar na internet sugestões para as aulas	○	○	○	○
Estudar as potencialidades do software a utilizar nas aulas	○	○	○	○
Outras	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outras" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

As tarefas que prepara para os alunos enfatizam:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
A aprendizagem de conceitos teóricos da UC	○	○	○	○
A aplicação direta de conceitos e procedimentos	○	○	○	○
A descoberta de propriedades dos conceitos	○	○	○	○
A resolução de problemas da realidade	○	○	○	○
A discussão sobre os erros e dificuldades dos alunos	○	○	○	○
A exploração de diferentes representações (algébrica, geométrica...) dos conceitos	○	○	○	○
A articulação entre os conceitos	○	○	○	○
Outras	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outras" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

Se recorre a livros de texto na UC, indique os três títulos mais importantes:

	Título	Autores
Livro 1		
Livro 2		
Livro 3		

Se recorre a software na UC, indique a designação desse software e o tema ou temas em que é usado.

	Designação do software	Temas em que é usado
1.		
2.		
3.		
4.		

IMPLEMENTAÇÃO DAS AULAS

Nas suas aulas de caráter <u>mais teórico</u> com que frequência utiliza as seguintes metodologias de trabalho?

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Exposição dos conteúdos pelo professor	○	○	○	○
Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor	○	○	○	○
Resolução individual de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	○	○	○	○
Resolução em grupo de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	○	○	○	○
Discussão em grande grupo (alunos e professor)	○	○	○	○
Apresentação de trabalhos realizados pelos alunos	○	○	○	○
Realização de tarefas com recurso a computadores ou calculadoras	○	○	○	○
Exploração de conceitos sob o ponto de vista geométrico	○	○	○	○
Outras	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outras" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

Nas suas aulas de caráter <u>mais prático</u> com que frequência utiliza as seguintes metodologias de trabalho?

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Exposição dos conteúdos pelo professor	○	○	○	○
Resolução de tarefas (exercícios e problemas) pelo professor	○	○	○	○
Resolução individual de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	○	○	○	○
Resolução em grupo de tarefas (exercícios e problemas) pelos alunos	○	○	○	○
Discussão em grande grupo (alunos e professor)	○	○	○	○
Apresentação de trabalhos realizados pelos alunos	○	○	○	○
Realização de tarefas com recurso a computadores ou calculadoras	○	○	○	○
Exploração de conceitos sob o ponto de vista geométrico	○	○	○	○
Outras	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outras" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

Se nas suas aulas são utilizados computadores ou calculadoras, de que forma e com que propósito são usados?

Nas suas aulas de <u>caráter mais teórico</u>, os computadores e as calculadoras são usados pelo(s):

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Professor	○	○	○	○
Alunos	○	○	○	○

Nas suas aulas de <u>caráter mais prático</u>, os computadores e as calculadoras são usados pelo(s):

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Professor	○	○	○	○
Alunos	○	○	○	○

Nas suas aulas de caráter mais teórico, os computadores e calculadoras são usados para:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Introduzir conteúdos	○	○	○	○
Apresentar a resolução de exercícios/problemas propostos	○	○	○	○
Realizar tarefas utilizando software específico	○	○	○	○
Efetuar cálculos	○	○	○	○
Explorar exemplos	○	○	○	○
Efetuar representações gráficas	○	○	○	○
Outros	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outros" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

Nas suas aulas de caráter mais prático, os computadores e calculadoras são usados para:

	Nunca	Poucas vezes	Muitas vezes	Sempre
Introduzir conteúdos	○	○	○	○
Apresentar a resolução de exercícios/problemas propostos	○	○	○	○
Resolver tarefas utilizando software específico	○	○	○	○
Efetuar cálculos	○	○	○	○
Explorar exemplos	○	○	○	○
Efetuar representações gráficas	○	○	○	○
Outros	○	○	○	○

Se assinalou uma resposta diferente de "Nunca" na opção "Outros" da questão anterior, indique aqui as respetivas designações.

AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS

Na avaliação das aprendizagens dos alunos, que formas de avaliação utiliza habitualmente e que ponderação costuma atribuir a cada uma delas?
Selecione todas as formas de avaliação que se apliquem e indique à frente a ponderação (em %) que lhes costuma atribuir.

- ☐ Exame final
- ☐ Testes
- ☐ Trabalhos individuais
- ☐ Trabalhos de grupo
- ☐ Participação nas aulas
- ☐ Assiduidade às aulas
- ☐ Trabalhos de casa
- Outro:

DIFICULDADES DOS ALUNOS

Entre os investigadores e professores, é unânime o reconhecimento das grandes dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conteúdos de Álgebra Linear.

De entre os temas que leciona na UC, assinale na lista abaixo aqueles em que os alunos, na sua perceção, sentem dificuldades.
Clique num tema da lista à esquerda, começando com o tema em que os alunos sentem mais dificuldade (nº1), e percorrendo os temas até ao de menor dificuldade (nº 10).

- Primeira escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...
- Próxima escolha: Por favor, selecione...

Se escolheu "Outro" na questão anterior, indique qual a designação do tema correspondente.

Considerando que os alunos sentem dificuldades em Álgebra Linear, na sua opinião, a que se devem essas dificuldades?

Em geral, os alunos:
Selecione todas as que se apliquem

- ☐ Têm uma formação matemática anterior deficiente
- ☐ Não têm hábitos de estudo regular e contínuo
- ☐ Não atribuem significado ao que aprendem
- ☐ Estão pouco motivados para a aprendizagem em geral
- ☐ Têm dificuldades em compreender conceitos abstratos
- ☐ Assumem um papel passivo na sua aprendizagem
- ☐ São pouco assíduos às aulas
- Outro:

Em geral, o ensino:
Selecione todas as que se apliquem

- ☐ Baseia-se em recursos tradicionais, fundamentalmente materiais escritos
- ☐ É muito expositivo e centrado no professor
- ☐ Promove pouco a compreensão dos conceitos
- ☐ Fornece pouca orientação para o estudo dos alunos
- ☐ Não é adequado aos conhecimentos prévios dos alunos
- ☐ É muito teórico
- Outro:

Refira o que, na sua opinião, pode ser feito para melhorar a aprendizagem dos alunos em Álgebra Linear.

Utilize este espaço, caso queira acrescentar alguma observação no sentido de esclarecer algum aspeto que considere pertinente.

Anexo V – Ficha de dados dos alunos participantes na segunda parte do estudo

Ficha do aluno

Nome: _____ Idade: _____

Nº: _____Curso: _____

Estudante: ☐ Ordinário ☐ Trabalhador-Estudante

Ano letivo em que entrou no curso que frequenta: _____

Escolheu o curso que frequenta em que opção (1.ª, 2.ª, 3.ª,...)? _____

Entrou no ensino superior através de:

☐ Concurso nacional de acesso

☐ Concursos especiais – Titular de diploma de especialização tecnológica

Designação do CET que frequentou: _____

☐ Concursos especiais – Maiores de 23 anos.

☐ Outro. Qual?_____

Em que fase do concurso entrou para o ensino superior?

☐ 1ª fase ☐ 2.ª fase ☐ 3.ª fase ☐ Não aplicável

Que disciplina de Matemática frequentou pela última vez, antes de entrar no ensino superior?

☐ Matemática A ☐ Matemática B ☐ MACS

☐ Matemática (do CET – nível 5) ☐ Métodos Quantitativos (do CET – nível 5)

☐ Outra. Qual?_____

Qual a classificação final que obteve na disciplina de Matemática que indicou antes? _____

Com que média entrou no ensino superior? _____

Se entrou no ensino superior porque era detentor de um CET, assinale as opções que se adequam ao seu caso.

Concluiu o 12.º ano? ☐ Sim ☐ Não

Que disciplina de Matemática frequentou no 12.º ano?

☐ Matemática A ☐ Matemática B ☐ MACS ☐ Outra. Qual?_____

Fez exame à disciplina de Matemática que frequentou no 12.º ano? ☐ Sim ☐ Não

Caso tenha feito exame, qual a classificação final que obteve a Matemática? _____

Se não fez exame, com que classificação ficou a Matemática? _____

Para além deste ano, já tinha frequentado a unidade curricular Álgebra Linear (ou similar)?

☐ Não.

☐ Sim, em anos anteriores.

☐ Sim, noutro curso do [redacted]. Indique o curso: _____

☐ Sim, noutra instituição do ensino superior. Indique qual a instituição e o curso:

Instituição: _____

Curso: _____

Se esteve inscrito em Álgebra Linear no ano anterior (2012/2013), assinale as opções que se adequam ao seu caso.

Avaliação a que compareceu:

☐ Teste parcial . ☐ Exame de época normal _____☐ Exame de época de recurso

☐ Exame de época especial (Dirigentes associativos)

☐ Exame de época especial (Trabalhadores)

☐ Exame de época especial (Finalistas)

☐ Outra. Indique qual:_____

Percentagem de aulas que frequentou no ano letivo anterior:

☐ < 20% ☐ ≥ 20% e <50% ☐ ≥ 50% e <80% ☐ ≥ 80%

Se frequentou menos de 80% das aulas, isso deveu-se a que:

☐ Tinha sobreposição de horário com outras unidades curriculares

☐ Tinha dificuldade em compreender os conteúdos abordados nas aulas

☐ Não tinha motivação para frequentar o curso

☐ Não estava motivado para frequentar a unidade curricular

☐ Entrei para o curso numa fase em que já tinham sido lecionadas bastantes aulas

☐ Não gosto de matemática

☐ Não me apetecia ir às aulas

☐ O horário das aulas não me agradava

☐ Outro motivo. Indique qual: _____

Anexo VI – Teste diagnóstico

Teste diagnóstico

Com este teste pretende-se obter informações sobre os seus conhecimentos relativos a alguns conceitos e procedimentos que são importantes para a compreensão dos temas matrizes e determinantes e sistemas de equações lineares, que são objeto de estudo nesta unidade curricular.
Caso não saiba resolver alguma questão, indique, no lugar destinado à resposta, as razões que o impedem de a resolver.

Nome:_____N.º _____

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares e escreva para cada caso o conjunto-solução.

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

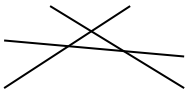
c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

2. Numa turma há 9 alunos. Sabe-se também que o número de rapazes é o dobro do número de raparigas. Quantos rapazes e quantas raparigas há na turma?
Escreva um sistema que traduza a situação enunciada. Não resolva o sistema.

3. Verifique se (3,0,1) é solução do sistema $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+y=3 \\ x+z=2 \end{cases}$.

4. Represente, graficamente no plano, duas retas que correspondam a um sistema de equações lineares:
a) Possível e determinado
b) Possível e indeterminado
c) Impossível

5. A figura seguinte representa 3 retas no plano. Considerando que a cada reta corresponde uma equação linear, indique, justificando, qual o conjunto-solução do sistema formado pelas três equações lineares.



6. Em anos anteriores estudou algumas propriedades das operações de adição e multiplicação, designadamente: propriedade comutativa, propriedade associativa, existência de elemento neutro, existência de elemento absorvente, existência de simétrico, existência de inverso e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
Identifique as propriedades das operações de adição ou multiplicação utilizadas em cada caso:

a) $6\times 1=6$ _____

b) $3\times 5=5\times 3$ _____

c) $0\times 9=0$ _____

d) $4+0=4$ _____

e) $3\times\frac{1}{3}=1$ _____

f) $3\times(2+4)=3\times 2+3\times 4$ _____

g) $5+(-5)=0$ _____

h) $5+(1+3)=(5+1)+3$ _____

7. Resolva a equação $(x+1)(x-7)=0$.

8. Determine o produto escalar, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, dos vetores $\vec{u}=(2,4,6)$ e $\vec{v}=(3,0,5)$.

9. Para provar que a afirmação "A soma de dois números pares é um número par" é verdadeira, o João apresentou o seguinte raciocínio:
"Como 2 e 4 são números pares e $2+4=6$ também é um número par, logo, posso concluir que a afirmação é verdadeira."
Indique, justificando, se considera válido o raciocínio do João.

10. Considere a propriedade: A soma de dois números ímpares é um número par.
Maria e Alfredo reescreveram esta propriedade da seguinte forma:
Maria: – Se dois números são ímpares, a sua soma é um número par.
Alfredo: – Se a soma de dois números é um número par, esses dois números são ímpares.
Indique, justificando, se a Maria e o Alfredo estão a afirmar o mesmo.

Dê agora a sua opinião sobre o teste diagnóstico.
Na minha opinião o teste diagnóstico é (escolha a opção que mais se adequa ao seu caso):

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ nem fácil nem difícil ☐ difícil ☐ muito difícil

Anexo VII – Fichas de trabalho e informativas utilizadas na intervenção de ensino

Ficha de trabalho n.º 1 – Operações com matrizes

1. A Maria, o Ricardo e a Ana são três amigos que frequentam o primeiro ano do curso de Engenharia Química e Biológica. Para controlar as faltas combinaram que em cada mês cada um deles registaria as faltas relativas a todas as unidades curriculares.

A Maria registou as faltas do mês de setembro e outubro:

	Álgebra Linear e GA	Cálculo I	Física I	Informática	Química Geral I
Maria	1	2	0	1	0
Ricardo	0	1	3	0	2
Ana	2	1	1	3	1

O Ricardo registou as faltas do mês de novembro:

	Álgebra Linear e GA	Cálculo I	Física I	Informática	Química Geral I
Maria	3	4	4	5	6
Ricardo	0	1	0	0	1
Ana	0	1	1	0	0

a) Calcule o número de faltas de cada aluno a cada unidade curricular nos meses de setembro, outubro e novembro.

b) Como ainda houve três semanas de aulas no mês de dezembro e uma em janeiro, a Ana encarregou-se da sua contabilização:

	Maria	Ricardo	Ana
Álgebra Linear e GA	0	0	1
Cálculo I	0	1	0
Física I	0	1	0
Informática	1	2	1
Química Geral I	1	0	1

Calcule quantas faltas deu cada aluno no total dos cinco meses a cada unidade curricular.

c) Pelo regulamento da escola cada aluno tem de assistir a pelo menos $\frac{4}{5}$ das aulas dadas para não reprovar à unidade curricular. Sabendo que a tabela representa o número de aulas dadas pelos professores das várias unidades curriculares, determine a quantas aulas de cada unidade curricular cada aluno tem de assistir.

	Álgebra Linear e GA	Cálculo I	Física I	Informática	Química Geral I
Nº de aulas dadas	30	30	25	29	28

d) Verifique se a Maria, o Ricardo e a Ana terão reprovado por faltas a alguma unidade curricular.

2. Na tabela seguinte estão registadas as classificações obtidas pela Maria, pelo Ricardo, pela Catarina e pela Luísa nos vários momentos de avaliação da unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica.

	Minitestes	Trabalho de grupo	Exame final
Maria	15	12	12
Ricardo	12	14	17
Catarina	16	18	16
Luísa	10	19	11

Os alunos podem escolher entre duas hipóteses a ponderação dos parâmetros que lhes é mais favorável:

	1.ª opção	2.ª opção
Minitestes	0,25	0,3
Trabalho de grupo	0,15	0
Exame final	0,6	0,7

Determine a classificação dos alunos na unidade curricular para cada uma das opções apresentadas. Indique, para cada aluno, qual é a opção que lhe permite ter melhor classificação final.

3. Considere as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}5\\ -3\end{bmatrix}.$$

Calcule sempre que possível as seguintes expressões:

a) $-3D$ b) $A+D$ c) $tr(C)$ d) $B+A$

e) CA f) EB g) AD^T h) $3C^2$

4. Suponha que A, B, C, D e E são matrizes reais com dimensões: $A_{4\times5}$, $B_{4\times5}$, $C_{5\times2}$, $D_{4\times2}$ e $E_{5\times4}$. Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas e, para estas, indique a dimensão da matriz resultante.

a) BA b) $AC+D$ c) $E(A+B)$ d) $(A^T+E)D$

Ficha de trabalho n.º 2 – Propriedades das operações com matrizes

Sempre que considere necessário pode usar o *software Microsoft Mathematics*.
Deve justificar sempre as conclusões a que chega, podendo usar para esse efeito cálculos, esquemas, palavras,...

1. Investigue propriedades das várias operações com matrizes.
(Sugestão: pode utilizar como apoio a ficha informativa sobre propriedades das operações no conjunto dos números reais)

2. A lei do anulamento do produto, que é válida para números reais, pode traduzir-se por

$$x\,y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Investigue se esta propriedade também é válida no caso das matrizes.

Ficha Informativa – Propriedades da adição e da multiplicação de números reais

Propriedades da adição em IR

Comutativa : $\forall a,b \in IR \quad a+b=b+a$

Associativa: $\forall a,b,c \in IR \quad (a+b)+c=a+(b+c)$

0 é o elemento neutro: $\forall a \in IR \quad a+0=0+a=a$

$-a$ é o simétrico de a: $-a+a=a+(-a)=0$

Propriedades da multiplicação em IR

Comutativa : $\forall a,b \in IR \quad a\times b=b\times a$

Associativa: $\forall a,b,c \in IR \quad (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

1 é o elemento neutro: $\forall a \in IR \quad a\times 1=1\times a=a$

$\frac{1}{a}$, com $a \neq 0$, é o inverso de a: $\frac{1}{a}\times a=a\times\frac{1}{a}=1$

0 é o elemento absorvente: $\forall a \in IR \quad a\times 0=0\times a=0$

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$\forall a,b,c \in IR \quad c\times(a+b)=(c\times a)+(c\times b)$

$\forall a,b,c \in IR \quad (a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$

Ficha de trabalho n.º 3 – Matrizes especiais

Para cada uma das definições seguintes, apresente um exemplo de uma matriz que a verifique.

Matriz triangular superior

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada. A matriz A é triangular superior se abaixo da diagonal principal só tem zeros, isto é, A é triangular superior se e só se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.

Matriz triangular inferior

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada. A matriz A é triangular inferior se acima da diagonal principal só tem zeros, isto é, A é triangular inferior se e só se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$.

Matriz diagonal

Matriz diagonal é uma matriz quadrada de ordem n que fora da diagonal principal só tem zeros.

Matriz escalar

Matriz escalar é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais.

Matriz ortogonal

Uma matriz quadrada A diz-se ortogonal se $A^{-1} = A^T$.

Matriz simétrica

Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se $A^T = A$.

Matriz antissimétrica

Uma matriz quadrada A diz-se antissimétrica se $A^T = -A$.

Matriz hermítica

Uma matriz quadrada A com entradas complexas diz-se hermítica se $\left(\overline{A}\right)^T = A$.

Notas:

1. $\overline{A}$ designa a matriz conjugada de A, isto é, a matriz que se obtém substituindo cada entrada de A pelo seu conjugado.
2. $\left(\overline{A}\right)^T$ designa-se a transconjugada da matriz A.

Matriz hemi-hermítica

Uma matriz quadrada A com entradas complexas diz-se hemi-hermítica se $\left(\overline{A}\right)^T = -A$.

Ficha de Trabalho n.º 4 – Matrizes (Parte I)

1. Numa festa encontram-se 5 estudantes de Erasmus: E1, E2, E3, E4 e E5, que falam uma ou mais das 4 línguas: inglês (L1), português (L2), alemão (L3) e espanhol (L4).

Sabe-se que E1 fala inglês, português e alemão, E2 fala inglês e espanhol, E3 fala espanhol, E4 fala inglês, português e espanhol e E5 fala alemão.

Considere a matriz em que $a_{rs} = 1$ se E_r fala a língua L_s e $a_{rs} = 0$ no caso contrário.

a) Construa a matriz A que representa a situação.

b) Calcule a matriz $C = AA^T$ e interprete o significado de cada entrada. Interprete o que significam os elementos da diagonal principal.

c) Uma matriz diz-se simétrica se é igual à sua transposta. Mostre que C é uma matriz simétrica.

d) Comente a afirmação: Qualquer que seja a matriz A, o produto AA^T é sempre uma matriz simétrica.

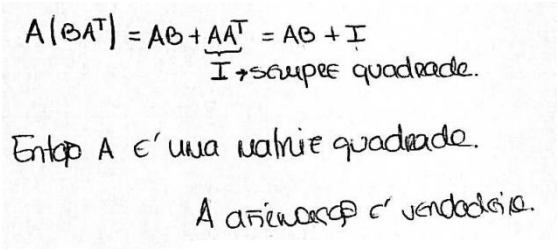
Tarefa adaptada de Laugwitz, D. (1974). Motivations and Linear Algebra. *Educactional studies in Mathematics*, *5*, 243-254.

Ficha de trabalho n.º 5 – Matrizes (Parte II)

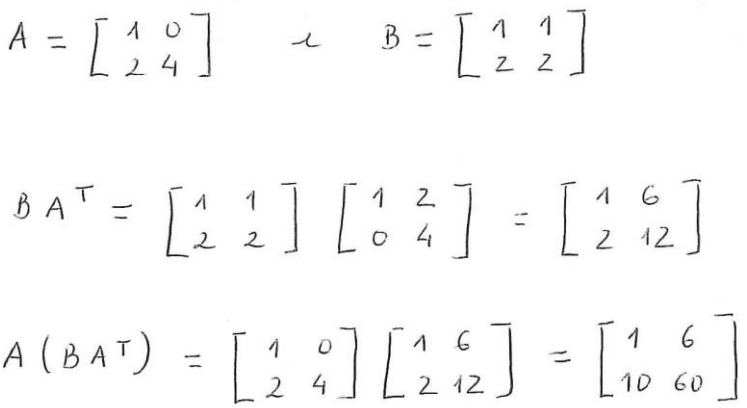
1. Considere a afirmação: Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada então A é uma matriz quadrada.

De seguida apresentam-se as respostas de alguns alunos quando analisaram a veracidade da afirmação dada. Diga, justificando, se concorda ou não com os raciocínios apresentados.

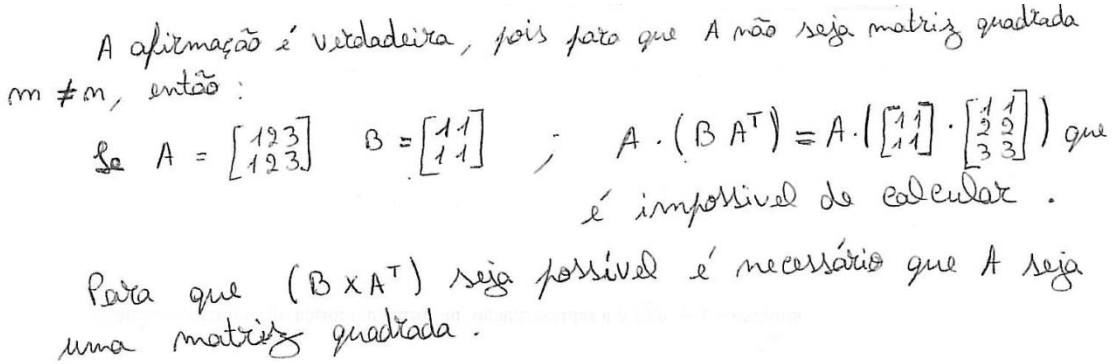
Resposta da Florbela:



Resposta da Maria:



Resposta da Luísa:

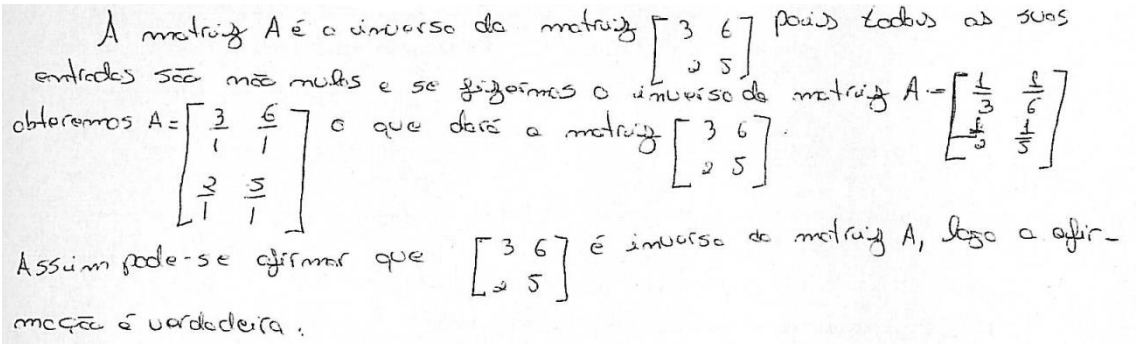


2. Sabendo que $A+B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{bmatrix}$ e $A-B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, calcule A^2-B^2.

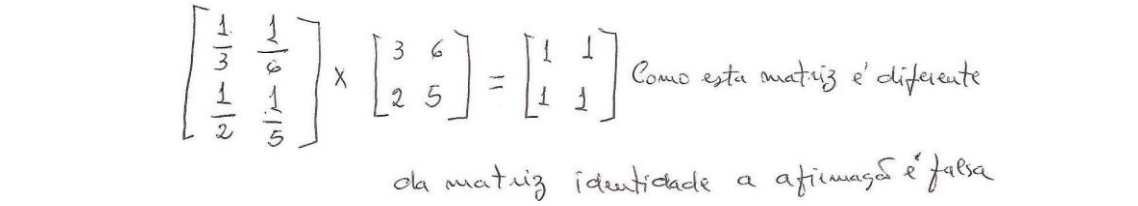
3. Considere a afirmação: A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

De seguida apresentam-se as respostas de alguns alunos quando analisaram a veracidade da afirmação. Diga, justificando, se concorda ou não com os raciocínios apresentados.

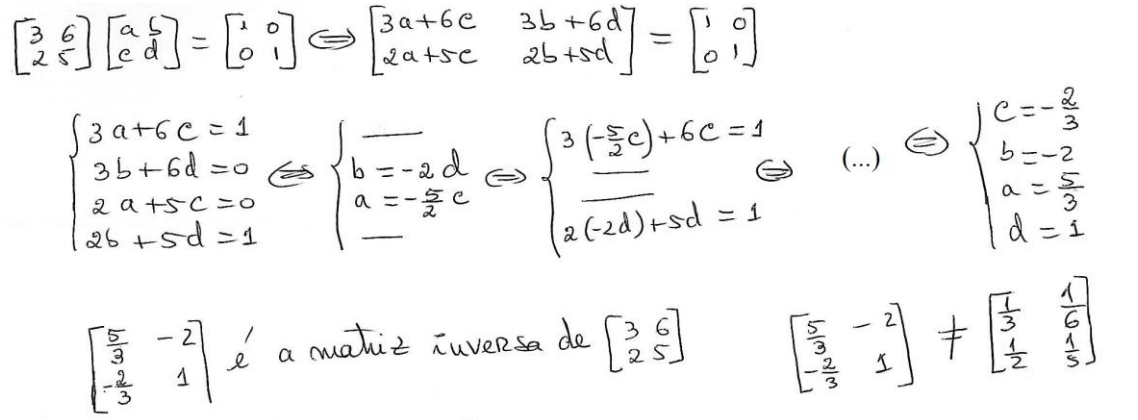
Resposta da Clotilde:



Resposta do Cláudio:



Resposta da Raquel:



4. Suponha que A é uma matriz invertível e que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que:

a) $XA = 0_{2\times 3}$ b) $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Ficha de trabalho n.º 6 – Característica de uma matriz

Recorde que :
Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em escada obtida por operações elementares sobre as linhas de A chama-se **característica** da matriz A. Denota-se por c(A) ou car(A).
Chamam-se **operações elementares sobre as linhas** de uma matriz às seguintes operações:

- troca de linhas;
- multiplicação de uma linha por um escalar não nulo;
- adição a uma linha do produto de outra por um escalar.

1. Determine a característica das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -6 & -3 & -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$

2. Averigue, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa: Existe uma matriz A do tipo 2×5, sem elementos nulos, tal que a característica de A é igual a 1.

Determinantes – Exercícios do *PowerPoint*

Estes exercícios foram realizados de forma faseada à medida que se exploravam os conceitos teóricos associados.

Exercício: Determine o número de inversões nas seguintes permutações:
a) (6,1,3,4,5,2) b) (1,2,3,4)

Exercício: Determine os complementos algébricos C_{12} e C_{31} da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercício:
1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: Se $\det(A) = \det(B)$, então $A = B$.

Exercício: Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ usando operações elementares.

Exercícios:
1. Calcule $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Seja A uma matriz de ordem 4 e $|A| = 3$. Calcule:

a) $|A^{-1}|$.

b) $|A^T|$.

c) $|AB|$, sendo $|B| = 5$

d) $|2A|$

Exercício: Caso exista, determine a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & -4 \end{bmatrix}$.

Ficha de trabalho n.º 7 – Matrizes e determinantes

1. Sabendo que A^{-1} é uma matriz quadrada de ordem 2 e que $\left|A^{-1}\right| = 4$, determine uma matriz A que satisfaça essas condições.

2. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

2.1. Se A e B forem matrizes quadradas da mesma ordem, então:

a) $|A+B| = |A| + |B|$

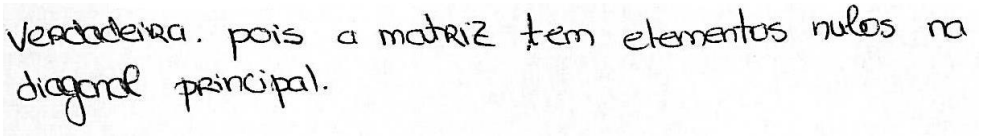
b) $\left|(AB)^2\right| = \left|A^2\right|\left|B^2\right|$

2.2. Se A é uma matriz quadrada cujas entradas da diagonal principal são todas iguais a 1, então A é invertível.

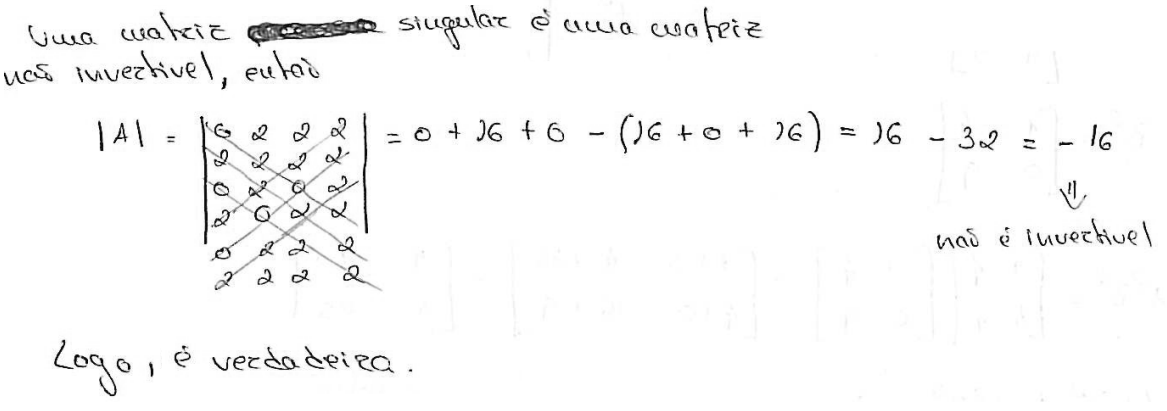
3. Considere a afirmação: A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é singular.

De seguida apresentam-se as respostas de alguns alunos quando analisaram a veracidade da afirmação dada. Diga, justificando, se concorda ou não com os raciocínios apresentados.

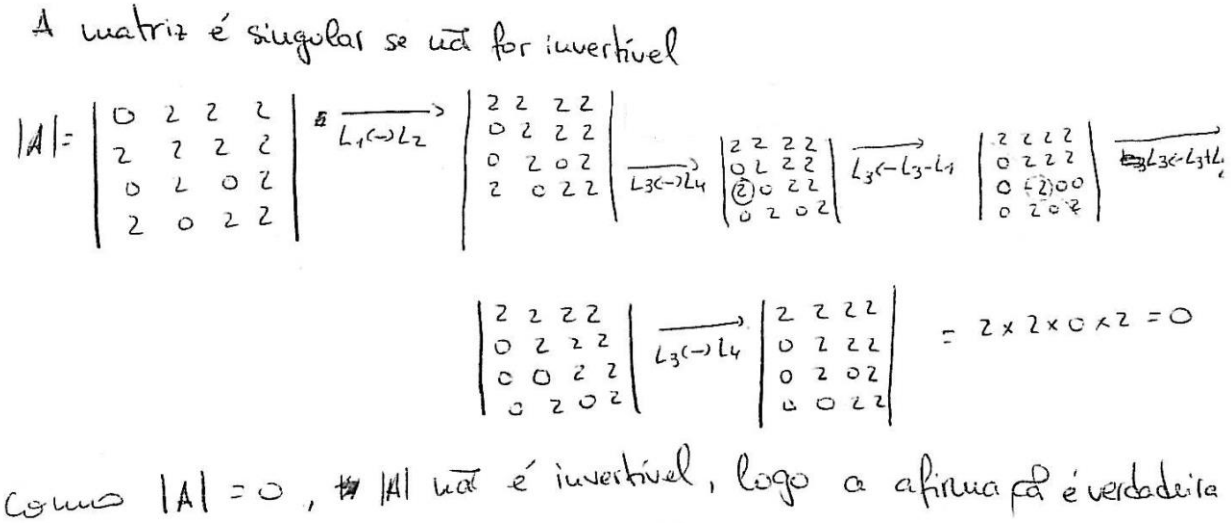
Resposta do Luís:



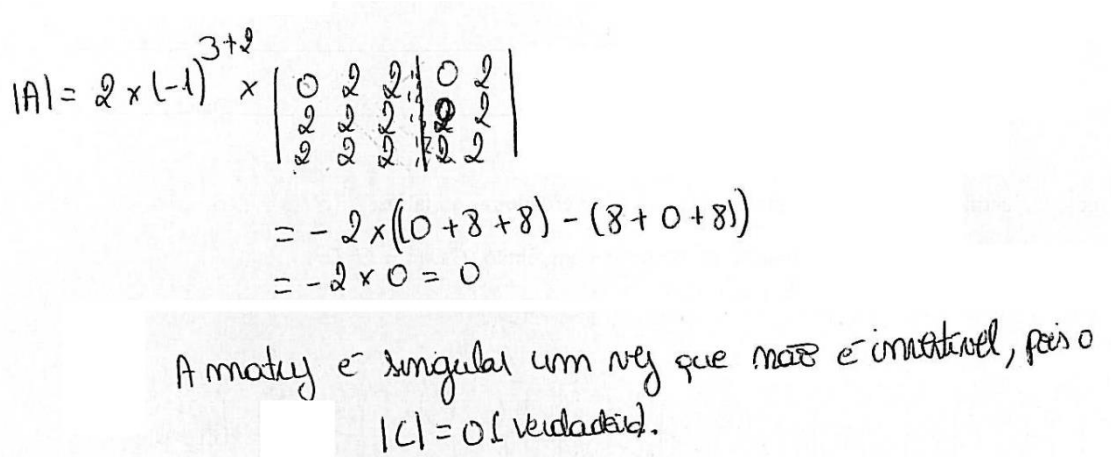
Resposta da Júlia:



Resposta da Maria:

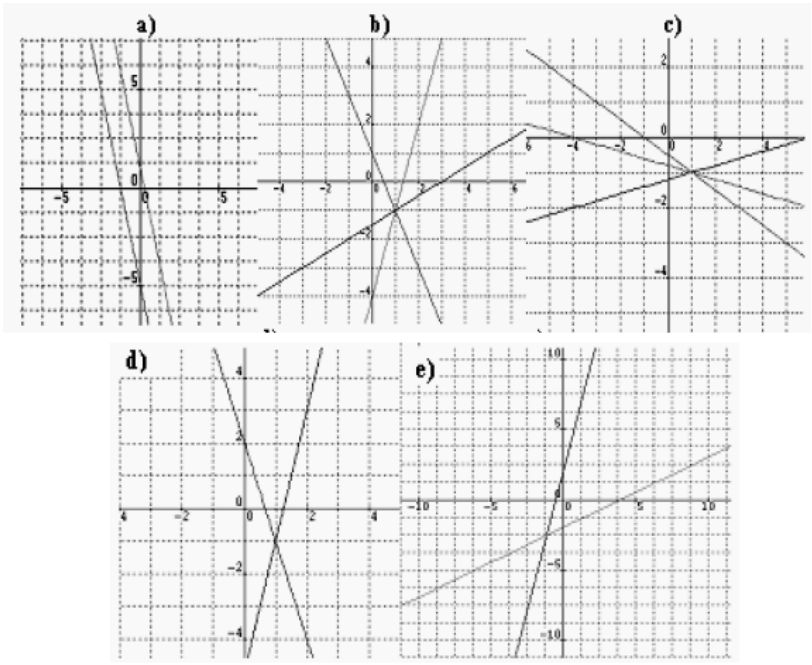


Resposta da Cristina:



Ficha de trabalho n.º 8 – Sistemas de equações lineares (Parte I)

1. Diga, justificando, quais das seguintes figuras representam sistemas de equações lineares equivalentes.



2. Dê exemplo de um sistema de equações lineares que tenha como solução única o ponto (2,1). Justifique a sua resposta.

3. Os sistemas de equações lineares podem ser classificados como **possíveis e determinados**, **possíveis e indeterminados ou impossíveis**.
Para cada alínea apresente, sempre que possível, exemplos de sistemas de cada um dos tipos: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. Justifique as suas respostas.

a) Sistema de 2 equações lineares a 2 incógnitas;
b) Sistema de 3 equações lineares a 2 incógnitas;
c) Sistema de 2 equações lineares a 3 incógnitas;
d) Sistema de 3 equações lineares a 3 incógnitas.

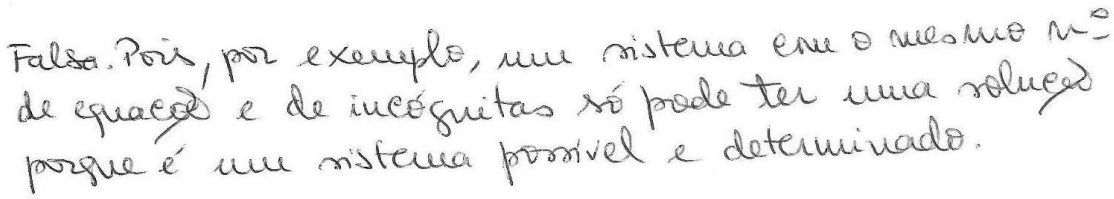
Sugestão: Utilize o *software Microsoft Mathematics* para representar graficamente as equações do sistema que indicou para cada caso.

4. Tendo em atenção a questão anterior, e realizando outras representações gráficas, apresente uma exposição sobre a relação que existe entre o tipo de sistema e a posição relativa de:

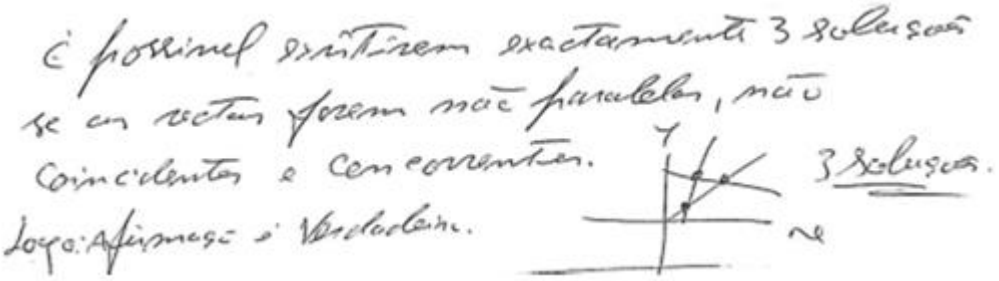
a) 2 retas em $I\!R^2$;
b) 3 retas em $I\!R^2$;
c) 2 planos em $I\!R^3$;
d) 3 planos em $I\!R^3$.

5. Considere a seguinte afirmação: "Existem sistemas de equações lineares com exatamente três soluções".
De seguida apresentam-se as respostas de alguns alunos quando analisaram a veracidade da afirmação dada. Diga, justificando, se concorda ou não com os raciocínios apresentados.

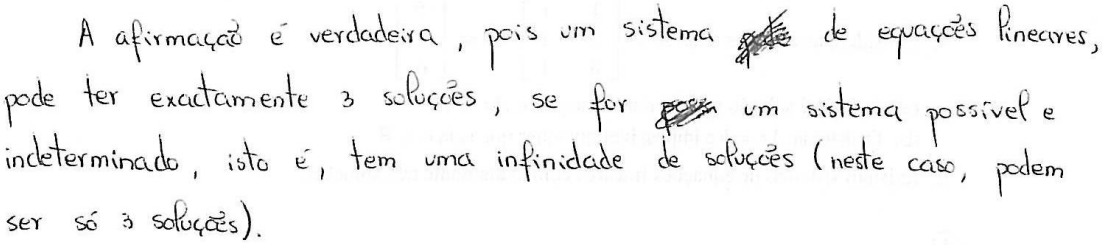
Resposta da Joana



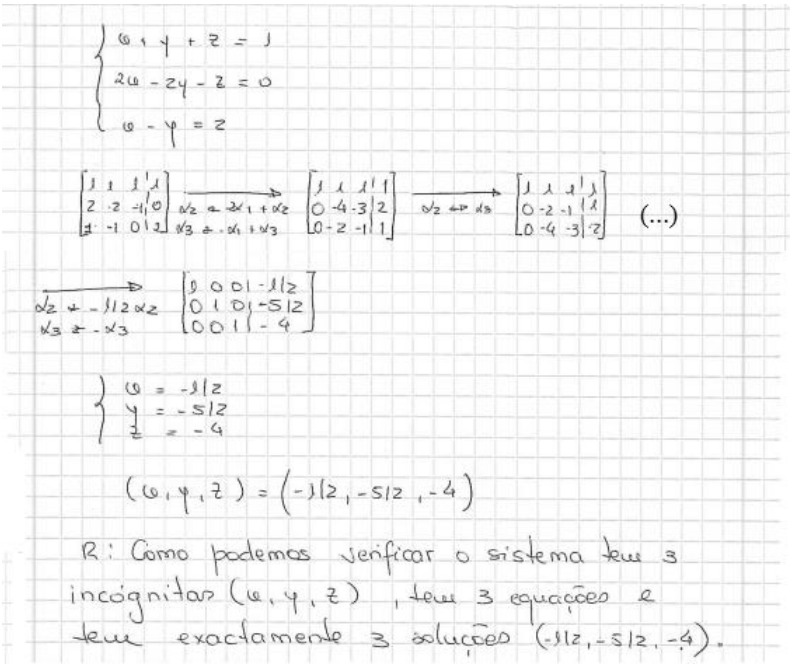
Resposta do Manuel



Resposta do Joel



Resposta da Flávia



Ficha de trabalho n.º 9 – Sistemas de equações lineares (Parte II)

1. Para que uma equação química esteja corretamente escrita o número de cada tipo de átomos dos reagentes deve ser igual ao número de átomos correspondentes dos produtos.
Acerte a seguinte equação química: $CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.
Sugestão: Escreva um sistema que lhe permita determinar os inteiros positivos x_1, x_2, x_3 e x_4 tais que $x_1(CH_4) + x_2(O_2) \rightarrow x_3(CO_2) + x_4(H_2O)$.

2. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
a) Um sistema de equações lineares homogéneo pode ser impossível.
b) Se A for uma matriz invertível, o sistema de equações lineares $Ax = 0$ admite uma infinidade de soluções.

3. Considere o sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada. Investigue a relação que existe entre a invertibilidade da matriz A e o número de soluções do sistema.

4. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares utilizando, sempre que possível, os diferentes métodos estudados (método da inversa, método de eliminação de Gauss, método de eliminação de Gauss-Jordan, regra de Cramer).

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + z = 1 \\ x - y = 3 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ y - z = 2 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$

Ficha de trabalho n.º10 – Sistemas de equações lineares (Parte III)

1. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) As soluções do sistema homogéneo $Ax=0$ são os vetores da forma $(0,-x_1,x_1)$, $x_1 \in IR^3$.

b) Para qualquer escolha de $b \in IR^3$, o sistema $Ax=b$ é impossível.

2. Determine os valores de a para os quais o sistema $\begin{cases} ax+y &= 1\\ x+ay &= 1\end{cases}$

a) Não tem solução;

b) Tem uma única solução;

c) Tem uma infinidade de soluções.

3. Considere o sistema $\begin{cases} x+y-z &= 2\\ 3x+3y+(a-3)z &= 6\\ -x-ay+(b+1)z &= -2\end{cases}$.

a) Discuta a natureza do sistema em função dos valores dos parâmetros $a,b \in IR$.

b) Para $a=1$ e $b=0$ indique, justificando, o conjunto-solução do sistema.

4. Considere que, depois de aplicado o método de eliminação de Gauss, a matriz ampliada de um sistema é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a-3 & 1 & 3 & 0\\ 0 & a-3 & 2 & b\\ 0 & 0 & a-4 & 1\end{array}\right]$$

Discuta a natureza do sistema em função dos parâmetros $a,b \in IR$.

Ficha informativa – Sistemas de equações lineares

Métodos de resolução de sistemas de equações lineares

Método da matriz inversa

Consideremos o sistema de equações lineares na forma matricial $Ax = b$. Se existir a inversa da matriz dos coeficientes, A, o sistema é possível e determinado e a solução é dada por:

$$x = A^{-1}b.$$

Método de eliminação de Gauss

Algoritmo do método de eliminação de Gauss:

1. Escrever a matriz ampliada do sistema.
2. Transformá-la numa matriz em escada por linhas recorrendo a operações elementares sobre as linhas da matriz.
3. Escrever o novo sistema correspondente a tal matriz.
4. Resolver esse sistema.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

O método de eliminação de Gauss-Jordan acrescenta dois passos ao algoritmo do método de eliminação de Gauss:

1. Começando na última linha não nula e fazendo os cálculos regressivamente, usar cada pivot para transformar em zero os elementos da respetiva coluna.
2. Transformar em uns todos os coeficientes da diagonal principal.

Regra de Cramer

Seja $Ax = b$ um sistema de n equações lineares com n incógnitas tal que $|A| \neq 0$. Então, o sistema tem uma só solução que pode ser obtida do seguinte modo:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

sendo A_i a matriz que se obtém de A substituindo a coluna i pela coluna dos termos independentes.

Classificação de sistemas

Seja $Ax = b$ um sistema com m equações e n incógnitas.

i) Se $car(A) < car(A \mid b)$ o sistema é impossível;

ii) Se $car(A) = car(A \mid b) < n$ o sistema é possível e indeterminado;

iii) Se $car(A) = car(A \mid b) = n$ o sistema é possível e determinando.

Anexo VIII – Minitestes

Miniteste – Matrizes e Determinantes

Duração: 30 min

É permitido o uso do *software Microsoft Mathematics* e do formulário
Justifique devidamente todas as respostas.
Cotação total – 5 valores

1. Considere as seguintes matrizes $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 6\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

(a) (Cotação:1,25 valores) Sabendo que X é uma matriz de ordem adequada, resolva a seguinte equação matricial: $A^{-1}XA=B$.
(b) (Cotação: 1,25 valores) Determine a característica da matriz C.

2. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
(a) (Cotação: 1,25 valores) Se A e B são matrizes singulares, da mesma ordem, então $A+B$ é uma matriz singular.
(b) (Cotação: 1,25 valores) Se A é uma matriz simétrica de ordem n então $3A^2-A^T+I_n$ também é uma matriz simétrica.

Miniteste – Sistemas de Equações Lineares

Duração: 30 min

É permitido o uso do *software Microsoft Mathematics* e do formulário
Justifique devidamente todas as respostas.
Cotação total – 5 valores

1. Considere as matrizes reais $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix}2\\ \alpha\\ 1\end{bmatrix}$.

(a) (Cotação: 1 valor) Verifique se $(1,-3,4,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax=0$.
(b) (Cotação: 2 valores) Comente a afirmação: "O sistema $Ax=b$ é impossível qualquer que seja $\alpha\in IR$".

2. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
(a) (Cotação: 1 valor) Se A for uma matriz singular, o sistema de equações lineares $Ax=b$ é possível e indeterminado.
(b) (Cotação: 1 valor) Se $\{(x,x,x):x\in IR\}$ é o conjunto-solução de um sistema de equações lineares, então os planos que representam graficamente as equações do sistema são coincidentes.

Anexo IX – Avaliação da intervenção de ensino

Questionário de avaliação da experiência de ensino

Questionário

Nome:_____

_____

Caro Estudante

N.º: _____

No âmbito da realização de uma investigação sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, que faz parte da minha tese de doutoramento, venho pedir a sua colaboração para responder a este questionário. Com ele pretende-se saber a sua opinião, como aluno, sobre alguns aspetos relativos à unidade curricular *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, que frequentou no 1.º semestre do presente ano letivo.

O questionário, constituído por três partes: informações gerais, opinião sobre o *software Microsoft Mathematics* e opinião sobre as aulas, destina-se a obter informações sobre a forma como decorreu o ensino e a aprendizagem na unidade curricular *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, em particular sobre os temas Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares.

Para garantir a validade do estudo, é muito importante que leia cuidadosamente todas as questões e que responda a todas elas com sinceridade e empenho, de modo que as suas respostas reflitam a sua verdadeira opinião. Pela minha parte, enquanto única pessoa com acesso aos dados, comprometo-me a não divulgar as suas respostas a não ser estritamente para fins do estudo e sempre sob a forma de anonimato.

Agradeço, desde já, a sua colaboração.

Paula Barros

INFORMAÇÕES GERAIS

1. Quantas vezes frequentou a unidade curricular ALGA no [redacted]? (Conte com o presente ano letivo) _____

2. Quantas aulas da unidade curricular frequentou este ano letivo? (Assinale apenas a opção que se aplica ao seu caso)

☐ Nenhuma ☐ < 20% ☐ ≥ 20% e < 50%

☐ ≥ 50% e < 80% ☐ ≥ 80% e < 100% ☐ Todas

Se frequentou menos de 80% das aulas, indique os motivos.

_____
_____
_____

3. Este ano letivo foram propostas várias formas de avaliação: trabalhos de grupo, minitestes, revisão dos minitestes e exame final.

3.1. Se não compareceu a algum dos minitestes realizados até ao momento ou à sua revisão, indique os motivos.

_____
_____
_____

3.2. Dos trabalhos de grupo propostos ao longo do semestre, deu o seu contributo para os que foram realizados:

Nas aulas ☐ Nunca ☐ Poucas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre

Fora das aulas ☐ Nunca ☐ Poucas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre

Se não deu sempre o seu contributo para todos os trabalhos, indique os motivos.

_____
_____
_____

4. Ao longo do seu percurso escolar, com que frequência tem trabalhado em grupo?

Nas aulas: ☐ Nunca ☐ Poucas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre

Extra-aula: ☐ Nunca ☐ Poucas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre

OPINIÃO SOBRE O *SOFTWARE MICROSOFT MATHEMATICS*

Nesta parte do questionário centre a sua opinião nos temas **Matrizes e Determinantes** e **Sistemas de Equações Lineares**.

Nas questões seguintes assinale a opção que melhor corresponde à sua opinião, considerando a seguinte escala: **1** – **Nunca**; **2** – **Poucas vezes**; **3** – **Muitas vezes**; **4** – **Sempre**.

1. Utilizei o *Microsoft Mathematics* para:				
Resolver as tarefas de grupo nas aulas	1	2	3	4
Realizar as tarefas de grupo extra-aula	1	2	3	4
Apoiar o estudo fora da aula	1	2	3	4
Resolver os minitestes	1	2	3	4
Fazer a revisão dos minitestes	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

2. A utilização do *Microsoft Mathematics* :				
Tornou as aulas mais motivantes	1	2	3	4
Ajudou-me a compreender melhor os conteúdos	1	2	3	4
Permitiu-me identificar os erros cometidos	1	2	3	4
Permitiu-me corrigir os erros cometidos	1	2	3	4
Ajudou-me a ultrapassar algumas dificuldades	1	2	3	4
Contribuiu para entender a relação entre as representações gráfica e algébrica	1	2	3	4
Permitiu-me resolver as tarefas com mais rapidez	1	2	3	4
Permitiu-me centrar menos nos aspetos de cálculo	1	2	3	4
Permitiu-me centrar mais nos aspetos de interpretação	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

3. Tive dificuldade na utilização do *Microsoft Mathematics* para:				
Realizar operações com matrizes	1	2	3	4
Calcular determinantes	1	2	3	4
Efetuar as representações gráficas em IR^2	1	2	3	4
Efetuar as representações gráficas em IR^3	1	2	3	4
Resolver sistemas	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

4. Quando utilizei o *Microsoft Mathematics*, tive dificuldade em interpretar os resultados obtidos:				
Nas operações com matrizes e determinantes	1	2	3	4
Na resolução gráfica de sistemas em IR^2	1	2	3	4
Na resolução gráfica de sistemas em IR^3	1	2	3	4
Na resolução analítica dos sistemas	1	2	3	4
Outra. Qual? _____	1	2	3	4

5. Fazendo o balanço geral das aulas sobre matrizes e determinantes e sistemas de equações lineares em que trabalhou com o *software*, indique:

5.1. As principais vantagens da sua utilização:

_____

_____

_____

_____

_____

5.2. As principais desvantagens da sua utilização:

_____

_____

_____

_____

_____

OPINIÃO SOBRE AS AULAS

Nas questões seguintes, centre a sua opinião nas aulas sobre os temas **Matrizes e Determinantes** e **Sistemas de Equações Lineares.**

1. Quantifique as dificuldades que sentiu nos conteúdos dos temas Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares indicados, assinalando apenas uma das opções: **1 – Não tive dificuldades**; **2 – Tive poucas dificuldades**; **3 – Tive algumas dificuldades**; **4 – Tive muitas dificuldades**.

1.1. *Matrizes e determinantes*				
Realizar operações com matrizes	1	2	3	4
Perceber a definição de inversa de uma matriz	1	2	3	4
Calcular a inversa de uma matriz	1	2	3	4
Calcular a matriz adjunta de uma matriz	1	2	3	4
Escrever uma matriz na forma de escada por linhas	1	2	3	4
Determinar a característica de uma matriz	1	2	3	4
Calcular determinantes	1	2	3	4
Aplicar as propriedades dos determinantes	1	2	3	4
Entender e aplicar o conceito de matriz ortogonal	1	2	3	4
Entender e aplicar os conceitos de matriz simétrica e antissimétrica	1	2	3	4
Outro. Qual? _____	1	2	3	4
1.2. *Sistemas de Equações Lineares*				
Reconhecer sistemas de equações lineares	1	2	3	4
Escrever um sistema na forma matricial	1	2	3	4
Verificar possíveis soluções de um sistema de equações lineares	1	2	3	4
Resolver sistemas pelo método de eliminação de Gauss	1	2	3	4
Resolver sistemas pelo método de eliminação de Gauss-Jordan	1	2	3	4
Resolver sistemas pelo método da inversa	1	2	3	4
Resolver sistemas pela regra de Cramer	1	2	3	4
Escrever o conjunto-solução de um dado sistema	1	2	3	4
Relacionar a representação gráfica das equações de um sistema com o tipo de sistema	1	2	3	4
Realizar a discussão de sistemas com parâmetros	1	2	3	4
Outro. Qual? _____	1	2	3	4

Nas questões seguintes assinale apenas a opção que melhor corresponde à sua opinião, considerando a seguinte escala:
1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**.

2. Tive dificuldade em "acompanhar" as aulas dos temas:				
Matrizes	1	2	3	4
Determinantes	1	2	3	4
Sistemas de Equações Lineares	1	2	3	4

3. As dificuldades que tive em "acompanhar" essas aulas deveram-se a:				
Falta de pré-requisitos do ensino secundário	1	2	3	4
Falta de motivação para a matemática	1	2	3	4
Falta de concentração nas aulas	1	2	3	4
Dificuldade em compreender as explicações da professora	1	2	3	4
Excessiva abstração dos conteúdos	1	2	3	4
Não gostar de trabalhar em grupo	1	2	3	4
Ter receio/não sentir à-vontade para colocar dúvidas	1	2	3	4
Não ter escolhido os colegas certos para o trabalho de grupo	1	2	3	4
Falta de estudo e aplicação	1	2	3	4
Pouca assiduidade às aulas	1	2	3	4
Não compreender as explicações dos colegas	1	2	3	4
Não saber utilizar o *software Microsoft Mathematics*	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

Durante a lecionação dos temas Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares realizou várias tarefas em grupo. Com as questões seguintes pretende-se conhecer a sua opinião sobre esse processo.

4. A minha opinião sobre o grupo e o trabalho desenvolvido:				
Houve coordenação entre os elementos do meu grupo	1	2	3	4
Participei ativamente nas discussões do grupo	1	2	3	4
Foi mais motivante resolver as tarefas com os meus colegas do que resolvê-las individualmente	1	2	3	4
Foi mais motivante resolver as tarefas em grupo do que apenas passar do quadro as resoluções efetuadas pela professora	1	2	3	4
Ter de entregar o trabalho realizado no final da aula fez com que me aplicasse mais na resolução das tarefas	1	2	3	4
Tínhamos quase sempre dificuldade em iniciar a resolução das tarefas	1	2	3	4
Progredimos pouco na resolução das tarefas enquanto a professora não ajudava a tirar dúvidas	1	2	3	4
Foi complicado acabar o trabalho de grupo extra-aula porque tivemos dificuldade na resolução das tarefas	1	2	3	4
Foi complicado acabar o trabalho de grupo extra-aula porque não conseguimos reunir os elementos do grupo	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo; 3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

5. A minha opinião sobre as tarefas propostas pela professora:				
Achei-as difíceis	1	2	3	4
Achei-as motivadoras	1	2	3	4
Permitiram-me discutir diferentes abordagens dos conteúdos	1	2	3	4
Fizeram-me refletir sobre vários conceitos/procedimentos em que tinha dificuldades	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

6. As tarefas de grupo em que tinha de analisar as resoluções realizadas por outros alunos contribuíram para eu:				
Aprender a questionar a validade das resoluções	1	2	3	4
Desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos	1	2	3	4
Reconhecer erros que costumo cometer	1	2	3	4
Debater, com os meus colegas, alguns erros que também costumo cometer	1	2	3	4
Refletir sobre a solidez dos meus conhecimentos	1	2	3	4
Clarificar alguns conceitos/procedimentos	1	2	3	4
Ter mais dificuldade em responder à questão	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

7. A interação e discussão estabelecida no seio do grupo contribuíram para:				
A partilha e a construção conjunta de novo conhecimento	1	2	3	4
Ultrapassar algumas das minhas dificuldades	1	2	3	4
Evitar que cometesse erros que provavelmente faria se resolvesse individualmente as tarefas	1	2	3	4
Desenvolver a minha autonomia na medida em que me permitiu resolver as tarefas sem estar sempre à espera das resoluções da professora	1	2	3	4
Desenvolver a minha capacidade de argumentação	1	2	3	4
Sentir mais confiança nas minhas capacidades	1	2	3	4
Aumentar as minhas dificuldades	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

Durante as aulas de Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares houve discussão em grande grupo sobre as tarefas realizadas nos grupos ou individualmente (no caso do teste diagnóstico), tendo sido confrontado com diferentes resoluções, válidas e não válidas.

8. O confronto com as diferentes resoluções das tarefas permitiu-me:				
Conhecer outras formas de responder às questões	1	2	3	4
Identificar os erros que cometi	1	2	3	4
Desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos	1	2	3	4
Aprender a questionar a validade das resoluções	1	2	3	4
Perceber a importância de utilizar os nossos próprios erros como meio de aprendizagem	1	2	3	4
Aprender a refletir melhor sobre as minhas respostas	1	2	3	4
Clarificar alguns conceitos/procedimentos	1	2	3	4
Melhorar a minha capacidade de argumentar	1	2	3	4
Melhorar a minha capacidade de comunicar matematicamente	1	2	3	4
Ultrapassar algumas das minhas dificuldades	1	2	3	4
Participar ativamente nas aulas	1	2	3	4
Aumentar a confiança nas minhas resoluções	1	2	3	4
Outra. Qual?_____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

As resoluções dos trabalhos sobre Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares foram objeto de apreciação por parte da professora, sendo por vezes devolvidas com sugestões para reformular ou completar as respostas.

9. O processo de revisão/reformulação das resoluções dos trabalhos:				
Permitiu-me obter um *feedback* importante sobre o trabalho realizado	1	2	3	4
Ajudou-me a identificar os erros cometidos	1	2	3	4
Permitiu-me tomar consciência das minhas dificuldades	1	2	3	4
Fez-me rever alguns conceitos que ainda não tinha compreendido	1	2	3	4
Contribuiu para eu ultrapassar algumas dificuldades	1	2	3	4
Contribuiu para que estivesse mais atento às discussões em grande grupo realizadas na aula, pois podia reformular o que entreguei	1	2	3	4
Era um trabalho acrescido pelo que nem sempre realizei as correções solicitadas	1	2	3	4
Outro. Qual? _____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

Durante o semestre realizou um mini-teste sobre Matrizes e Determinantes e outro sobre Sistemas de Equações Lineares. Após a correção pela professora, foi-lhe dada a oportunidade de tentar explicar o que tinha errado e de reformular as suas respostas.

10. A minha opinião sobre a revisão dos minitestes:				
O confronto com os meus próprios erros contribuiu para que tomasse consciência das minhas dificuldades	1	2	3	4
Saber que podia recuperar uma parte da pontuação perdida foi um incentivo para que estudasse um pouco mais	1	2	3	4
Explicar qual a causa dos meus erros contribuiu para que tomasse consciência de quais os procedimentos/propriedades que não são válidos	1	2	3	4
Este processo tornou-me mais autónomo na resolução das tarefas	1	2	3	4
Este processo estimulou-me a refletir sobre o meu raciocínio	1	2	3	4
As questões/sugestões da professora ajudaram-me a refletir sobre o trabalho realizado	1	2	3	4
Outro. Qual? _____	1	2	3	4

(**1 – Discordo totalmente; 2 – Discordo**; **3 – Concordo**; **4 – Concordo totalmente**)

No estudo dos temas Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares foram adotadas várias estratégias no desenvolvimento das aulas. Na questão seguinte pretende-se saber a sua opinião sobre a importância dessas estratégias para a sua aprendizagem.

11. Estratégias que foram importantes para a minha aprendizagem:				
Uso do *Microsoft Mathematics* nas aulas	1	2	3	4
Uso do *Microsoft Mathematics* nos minitestes	1	2	3	4
Discussão em grande grupo (alunos e professora)	1	2	3	4
Resolução de algumas tarefas no quadro pela professora	1	2	3	4
Exposição de conteúdos pela professora	1	2	3	4
Trabalho em grupo nas aulas	1	2	3	4
Trabalho em grupo extra-aula	1	2	3	4
Reformulação das resoluções resultantes do trabalho de grupo	1	2	3	4
Realização de minitestes no fim de cada tema	1	2	3	4
Revisão dos minitestes	1	2	3	4
Utilização de formas diversificadas de avaliação	1	2	3	4
Outro. Qual? _____	1	2	3	4

(**1** – **Discordo totalmente; 2** – **Discordo**; **3** – **Concordo**; **4** – **Concordo totalmente**)

12. Centrando-se nas aulas sobre os temas Matrizes e Determinantes e Sistemas de Equações Lineares, use o espaço seguinte para fazer comentários que considere importantes.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Muito obrigada pela sua colaboração.

Paula Barros

Guião da entrevista semiestruturada

Relação que os alunos têm com a Matemática/Álgebra Linear

– No ensino secundário gostavam ou não de matemática? Porquê?

– Gostaram ou não da UC de ALGA? Porquê?

– A atitude em relação à matemática mudou com a frequência da UC de ALGA? Em que sentido?

Clarificação e aprofundamento das respostas dadas no questionário

Esclarecimento de algumas das respostas dadas no questionário, tanto no sentido de as complementar, como de perceber com maior profundidade certas opções de resposta. Este pedido de clarificação pode variar para cada aluno, de acordo com as respostas que deu no questionário, assim como pela orientação que a entrevista seguir.

Opinião sobre o *software Microsoft Mathematics*

Utilizaram-no ou não também na realização/apoio ao estudo nos exames? Porquê?

Consideram que foi ou não positivo terem-no utilizado na UC?

Desvantagens que pode ter tido a utilização do *software*, do ponto de vista das limitações do *software* e da sua utilidade para a UC (no questionário praticamente não mencionaram desvantagens). Averiguar a concordância com as desvantagens mencionadas por alguns alunos:

– Esquecemo-nos dos métodos de cálculo aprendidos;

– O *software* devia ser mais avançado.

Clarificar as razões de, na parte dos Sistemas de equações, terem tido dificuldades:

– Na utilização do *software* para realizar as representações gráficas;

– Na interpretação da resolução gráfica;

– Na interpretação da resolução analítica.

Dificuldades em acompanhar as aulas

Os alunos manifestaram ter tido mais dificuldade em acompanhar as aulas sobre o tema Sistemas de equações lineares. Averiguar quais as razões.

Quanto à razão das dificuldades, as mais evidenciadas são:

– Falta de estudo e aplicação;

– Falta de pré-requisitos do ensino secundário;

– Falta de concentração nas aulas.

Pedir aos alunos para falarem sobre estes aspetos.

A excessiva abstração dos conteúdos só foi considerada relevante por um quarto dos alunos. Averiguar se é pelo facto de ser referirem aos temas Matrizes e determinantes e Sistemas de equações ou se a opinião muda relativamente aos outros temas.

Trabalho em grupo

Os alunos colaboraram mais nos trabalhos de grupo realizados nas aulas do que nos trabalhos extra-aula. Averiguar se essa situação foi visível no grupo, se afetou o desempenho, quais foram os problemas que surgiram e como os resolveram.

Interação e discussão no seio do grupo:

- Dificuldades em iniciar a resolução das tarefas – averiguar a que se deveram essas dificuldades.
- Acabar o trabalho extra-aula é complicado por causa de reunir os elementos do grupo – Quais as incompatibilidades?
- Dificuldades na resolução das tarefas – quais as tarefas que custaram mais a realizar e porquê?

Questões em que havia resoluções de outros alunos para analisar

- Averiguar se já tinham resolvido questões do mesmo tipo;
- Alguns alunos concordam que tiveram mais dificuldade em responder à questão – clarificar este aspeto;
- Outras desvantagens que queiram apontar.

Confronto com as diferentes resoluções das tarefas (debate em grande grupo)

- Pedir aos alunos que discordaram de alguns dos aspetos positivos apresentados que expliquem o seu ponto de vista;
- Desvantagens desta metodologia que queiram apontar.

Revisão/reformulação dos trabalhos

- Há alunos que concordam que era um trabalho acrescido pelo que nem sempre fizeram as correções necessárias – pedir para comentarem;
- Outras desvantagens que queiram apontar.

Avaliação efetuada

- Há algum método de avaliação que considerem dispensável? Porquê? Haveria outras formas de avaliação que considerassem adequadas?
- Opinião sobre a ponderação atribuída a cada um dos instrumentos de avaliação.

– Perguntar se resolveram os minitestes em "casa" antes de ir fazer a revisão. Explicar as razões do seu procedimento.
– Desvantagens da revisão dos minitestes (tanto do ponto de vista da revisão como dos procedimentos utilizados).

Importância das estratégias utilizadas para a aprendizagem dos alunos

Aprofundar a razão das suas preferências:

– Trabalho em grupo extra-aula – estratégia que mais alunos discordam.
– Não considerar importante: o uso do *Microsoft Mathematics* nas aulas ou nos testes, realização dos minitestes no fim de cada tema.
– Considerar importante a exposição de conteúdos e a resolução de algumas tarefas no quadro pela professora.

Fatores que contribuíram para a aprovação/reprovação dos alunos

– A que fatores atribuo a minha reprovação/aprovação à UC?
– O que contribuiu mais para a minha aprendizagem? E o que contribuiu menos? Porquê?
– Quem não compareceu ao exame, qual a razão?
– Pensam que trabalharam muito ou pouco para a UC? Porquê?
– Consideram que acompanharam as aulas durante o semestre ou dedicaram-se mais ao estudo para o exame?

Neste contexto, levar os alunos a falar sobre os aspetos a seguir indicados:

– Fatores externos à UC: falta de estudo, trabalho para outras UCs,...
– Fatores intrínsecos à UC: Método de avaliação utilizado e valorização de cada componente; trabalho em grupo na aula e extra-aula; utilização do *Microsoft Mathematics*; horário das aulas e datas dos exames/dos minitestes.

Em termos globais

– Não ser a primeira vez que frequentam a UC – vantagens e inconvenientes.
– O que gostaram mais e o que gostaram menos no funcionamento das aulas do semestre, particularmente nos temas em estudo.
– Alterações que gostavam de sugerir. Se frequentassem novamente as aulas recomendaria uma experiência semelhante? O que eliminariam? O que manteriam?
– Comentários que queiram acrescentar.