

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Paula Cristina da Costa Gomes

Funções e calculadoras gráficas: análise de algumas inferências erróneas

Julho de 2005

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Paula Cristina da Costa Gomes

Funções e calculadoras gráficas: análise de algumas inferências erróneas

Tese de Mestrado
Mestrado em Matemática, área de Especialização em Ensino

Trabalho efectuado sob orientação dos
Professores Rui Ralha e Elfrida Ralha

Julho de 2005

DECLARAÇÃO

Paula Cristina da Costa Gomes
Endereço Electrónico: pccg@sapo.pt
Telefones 253 269 425 / 91 487 31 36
Bilhete de Identidade n.º 10608904

Tese de Mestrado: *Funções e Calculadoras gráficas: análise de algumas inferências erróneas.*

Orientadores: Maria Elfrida Ramos de Matos Ralha e Rui Manuel da Silva Ralha

Ano de conclusão: 2005
Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Ensino

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 31 de Julho de 2005

Assinatura: _____

"Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta. Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência."

José Sebastião e Silva

AGRADECIMENTOS

Ao ano em que decorreu o trabalho de investigação, seguiram-se cerca de dois anos em que praticamente não foi desenvolvido qualquer trabalho por razões de ordem pessoal e profissional. Foram tempos de algum desalento, onde várias vezes foi colocada a hipótese de desistir da realização deste trabalho. Porém, em meados do ano dois mil e quatro uma decisão foi tomada com firmeza: o trabalho já iniciado merecia ser concluído. Para isso foram decisivas as palavras de incentivo da orientadora e que passo a citar “continuo a não ter dúvidas sobre a sua capacidade para desenvolver um trabalho de investigação de muita qualidade”. O recomeço foi árduo e a realização do trabalho passou por algumas dificuldades que foram, na medida do possível, sendo ultrapassadas.

Antes mais, gostaria de apresentar os meus agradecimentos a quem mais directamente contribuiu para a realização deste trabalho e que sempre me aconselharam a não desistir.

Aos meus orientadores, Professores Doutores Rui Manuel da Silva Ralha e Maria Elfrida Ramos de Matos Ralha, pelo interesse, paciência e disponibilidade com que acompanharam este estudo e pelas críticas, sugestões e incentivo que foram dando ao longo da sua realização.

A todos os meus colegas da Escola Secundária com 3º Ciclo de Vieira do Minho pelas palavras de ânimo, força e amizade.

Aos meus amigos e à minha família por todo o apoio que sempre me deram na realização deste trabalho, em particular, aos meus pais que acompanharam a sua evolução e aconselharam-me sempre a não desistir.

A todos os meus sinceros agradecimentos.

FUNÇÕES E CALCULADORAS GRÁFICAS: ANÁLISE DE ALGUMAS INFERÊNCIAS ERRÓNEAS

RESUMO

O principal objectivo desta tese é o de clarificar, através de um estudo sistemático, as variadas implicações para o ensino das funções reais de variável real do tratamento do conjunto dos números reais como conjunto finito, discreto e limitado que a calculadora gráfica nos oferece.

Os actuais programas do Ensino Secundário de Matemática prevêem a utilização de calculadoras gráficas não apenas como meros instrumentos de cálculo que devem estar à disposição dos alunos mas, sobretudo, como meios de incentivo ao espírito de pesquisa. Defendem, esses programas, que a formalização e a estruturação do conhecimento matemático enquanto sistema dedutivo não são pontos de partida mas sim metas a atingir com a ajuda, em particular, de meios tecnológicos.

As máquinas de calcular afirmam-se como instrumentos didácticos indispensáveis na concretização de objectivos gerais fundamentais da aprendizagem da Matemática, mas também na concretização de competências específicas do ensino de determinados tópicos. De facto, a utilização das calculadoras gráficas nas salas de aula pode permitir a resolução de problemas mais realísticos, pode contribuir para um melhor entendimento das funções matemáticas e pode proporcionar um maior envolvimento dos alunos na descoberta de soluções para os problemas propostos.

Uma vez que os professores de Matemática portugueses parecem suficientemente esclarecidos sobre os benefícios da utilização das calculadoras gráficas e o seu uso generalizado é já uma realidade, urge chamar a atenção para os perigos que resultam de uma "utilização às cegas". Neste estudo são apresentados alguns exemplos que ilustram como se pode chegar a resultados errados se se fizer um uso da calculadora desligado da análise e do cálculo numéricos.

Na verdade, as calculadoras gráficas têm limitações tecnológicas que fazem com que seja impossível captar em imagens discretas certas características das funções reais de variável real. As limitações porventura mais importantes das calculadoras gráficas são assim consequência directa das limitações de precisão numérica. Os professores de Matemática utilizarão certamente as calculadoras gráficas de uma forma mais eficaz quando estiverem preparados para demonstrarem aos seus alunos a importância de se ser crítico porque "a máquina também se engana". Afigura-se-nos, por isso, injustificável que os professores fujam dos casos menos rotineiros, às vezes apelidados de "difíceis" porque, afinal, as "surpresas" (erros) que a calculadora nos proporciona podem ser aproveitadas como motivação para o ensino/aprendizagem dos aspectos matemáticos envolvidos.

FUNCTIONS AND GRAPHIC CALCULATORS: ANALYSIS OF SOME ERRONEOUS INFERENCES

ABSTRACT

The main goal of this thesis is to clarify, through a systematic analysis, the various limitations of the use of graphic calculators in the process of studying real functions. These limitations are a consequence of the fact that only a finite, discrete and bounded subset of the real numbers can be exactly represented on a calculator (or computer).

The current curricula of Mathematics at Portuguese High Schools include the use of graphic calculators not only for producing results but mainly as a tool that can be used by the students to test their own ideas. The curriculum foresees that the use of technologies allows the construction and the formalization of the mathematical knowledge.

The graphic calculators are widely accepted as didactic tools, which are very helpful for achieving general mathematical capabilities and are also essential in the process of learning different aspects of many mathematical subjects. As a matter of fact, the use of graphic calculators in the classroom allows the teacher to propose more realist problems to be solved and contributes to a more participative attitude of the students in the search of the solution.

High School Portuguese teachers are now aware about the potential benefits of the use of graphic calculators and students use them widely. Therefore, it is important to bring the attention of both, students and teachers, to the dangers of using the calculators without care. In this thesis we present some examples which illustrate that, based solely on the evidence provided by the calculator and not carrying out further analysis, one can arrive at erroneous conclusions.

Indeed, graphic calculators have technological limitations that prevent them to capture in discrete pictures some features of the real functions. The most important limitations are a direct consequence of the limitations of the numerical precision of the calculator. In order to attain an efficient use of graphic calculators High Schools teachers must be prepared to convince their students for the need of being critical because the machine “can be wrong”. In our view it is not acceptable that the teachers avoid those cases that may cause trouble in the calculator, since these examples can be exploited to motivate the students in learning the mathematical aspects involved.

ÍNDICE

1 Introdução 1

2 Revisão de Literatura 7
2.1 Evolução da tecnologia educativa: a calculadora gráfica 7
2.2 Os Programas do Ensino Secundário e o uso de calculadoras gráficas 18
2.3 Vantagens na utilização da calculadora gráfica e exploração de potenciais limitações..... 25

3 Aritmética Computacional 33
3.1 Introdução 33
3.2 Representação de números inteiros 35
3.3 Representação de números reais 38
3.3.1 Notação científica de números reais 39
3.3.2 Representação em sistema de ponto (ou vírgula) flutuante 40
3.3.3 Precisão e epsilon da máquina 43
3.3.4 Overflow e underflow 44
3.4 A Norma IEEE 754 46
3.5 Modos de arredondamento 57
3.5.1 Erro absoluto e erro relativo de arredondamento 62
3.6 Sistema de ponto flutuante das calculadoras gráficas 65
3.6.1 Introdução 65
3.6.2 Casio CFX – 9850 GB Plus 66
3.6.3 Texas Instruments TI – 83 Plus 69
3.6.4 Overflow e underflow 71
3.6.5 Precisão e epsilon da máquina 73
3.6.6 Modos de arredondamento 74

4 Operações aritméticas em sistema de vírgula flutuante 77
4.1 Introdução 77
4.2 Soma e Subtracção 80
4.3 Multiplicação e divisão 87
4.4 Condicionamento e estabilidade numérica 90
4.4.1 Condicionamento de um problema 90
4.4.2 Estabilidade numérica 94
4.4.3 Funções mal e bem condicionadas 99
4.4.4 Condicionamento de funções de duas variáveis 101
4.4.5 Condicionamento dos zeros de uma função 103

5 Gráficos 107
5.1 Introdução 107
5.2 Representação gráfica de funções 108
5.2.1 Texas Instruments TI – 83 Plus 109
5.2.2 Casio CFX – 9850 GB Plus 116
5.3 Limitações da calculadora gráfica 117

6 Sucessões e Funções 133
6.1 O número *e* como limite de uma sucessão 133
6.2 Limite de funções 145
6.3 Estudo de pontos críticos e assimptotas 150
6.4 Estudo de zeros e resolução de equações 152
6.5 Resolução de inequações 156
6.6 Continuidade de uma função 158
6.7 Derivadas 159
6.7.1 Introdução 159
6.7.2 Derivada simétrica e derivação numérica 160
6.7.3 Razões da utilização da derivada simétrica 169
6.8 Convergência de séries 173

7 As limitações da calculadora gráfica e os manuais escolares do Ensino Secundário 175
7.1 Introdução 175
7.2 Sucessões 177
7.3 Funções 178
7.3.1 Funções polinomiais e racionais 178
7.3.2 Gráficos 180
7.3.3 Igualdade de funções 186
7.3.4 Resolução de inequações fraccionárias 188
7.3.5 Limites 188
7.3.6 Derivadas 190
7.4 Conclusão 192

8 Conclusões 195

Bibliografia 201

Anexos 209